Міністерство освіти і науки України
Центральноукраїнський національний технічний університет
Кафедра «Автоматизація виробничих процесів»

Т Е О Р І Я   І Н Ф О Р М А Ц І Ї

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання обов'язкових домашніх завдань

для студентів спеціальності

151 «Автоматизація та комп'ютерно – інтегровані техології»

Затверджено на засіданні кафедри
«Автоматизація виробничих процесів»
Протокол № 3 від 26 вересня 2018 р.

Кропивницький
2018

Теорія інформації. Методичні вказівки до виконання обов'язкових домашніх завдань для студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп`стерно – інтегровані технології» /Укл.: Осадчий С.І., Березюк І.А., Зубенко В.О. – Кропивницький: ЦНТУ, 2018. – 48 с.

Укладачі: Осадчий С.І. – доктор технічних наук, професор

Березюк І.А. – кандидат технічних наук, доцент

Зубенко В.О. – кандидат технічних наук, доцент

Рецензент: Каліч В. М., кандидат технічних наук, професор.

Зміст

Загальні методичні вказівки до виконання та оформлення обов'язкових домашніх завдань

Мета обов'язкового домашнього завдання – закріпити основні положення курсу «Теорія інформації», а саме: способи кількісної оцінки ентропії і інформації, швидкості передачі інформації, пропускної здатності інформаційного каналу; способи узгодження сигналів з каналом передачі інформації; основні принципи ефективного та завадостійкого кодування та його застосування в інформаційній техніці.

Відповідно до навчального плану студенти очної форми навчання повинні виконати два обов'язкових домашніх завдання (ОДЗ). Виконані два ОДЗ – для студентів очної форми навчання є свідченням вміння студента підбирати та використовувати необхідний тематичний матеріал, в повній мірі висвітлювати поставлені питання. В цілому ОДЗ є звітом про роботу, проведену студентом за навчальний період.

Сутність ОДЗ полягає у розв'язанні практичних задач.

При виконанні ОДЗ студент повинен додержуватися наступних вимог:

1. Ознайомитись з рекомендованою літературою.
2. Робота має бути граматично та стилістично грамотно оформлена. Комп‘ютерний набір та друк тексту не повинні викликати у викладача труднощів при його перевірці.
3. Обов'язково записується повна умова задачі, потім її розв'язок. При вирішенні задач необхідно вказувати: формули та їхні назви; опис змінних, які використовуються в формулах; назви методів, які використовуються при розв'язанні конкретної задачі; всю послідовність виконання розрахунків та результати; чітко виражена відповідь.

Якщо до дня екзамену з дисципліни “Теорія інформації” два ОДЗ не зараховані, то студент не допускається до складання іспиту.

1. Обов'язкове домашнє завдання № 1

1.1.Варіанти завдань.

Задача 1.1. Отримати чисельні значення ентропії, продуктивності та надмірності дискретного джерела інформації з алфавітом *X* потужності. Значення ймовірностей $p(x_i)$ виникнення символів та їх тривалостей τ_i(в мілісекундах, *мс)* для різних варіантів наведені у таблиці 1.1

Таблиця 1.1

№ варіанта	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	$p(x_4)$	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
1	0,33	0,08	0,15	0,44	1,2	0,2	0,8	0,5
2	0,21	0,16	0,03	0,6	5,4	1,5	2,3	1,2
3	0,15	0,27	0,34	0,24	15	7	5	10
4	0,05	0,08	0,11	0,76	8,6	3,4	5,8	0,9
5	0,62	0,28	0,04	0,06	0,3	0,4	0,6	0,8
6	0,17	0,41	0,23	0,19	2,6	1,1	0,5	7,3
7	0,55	0,15	0,06	0,24	3,3	5,1	1,2	1,2
8	0,08	0,35	0,27	0,3	0,1	0,3	0,5	0,8
9	0,22	0,33	0,05	0,4	2,2	1,8	0,5	3
10	0,62	0,12	0,08	0,18	1,8	0,8	0,6	0,5
11	0,26	0,14	0,5	0,1	3,7	2,1	1,2	1,5
12	0,14	0,33	0,27	0,26	0,2	0,1	0,5	1,5
13	0,18	0,03	0,64	0,15	2,5	1,4	0,7	2,2
14	0,37	0,18	0,06	0,39	5	14	8	3
15	0,25	0,15	0,33	0,27	1,8	1,2	0,8	0,5
16	0,09	0,44	0,28	0,19	36	18	28	8
17	0,66	0,15	0,15	0,04	3,4	5,8	1,3	2,5
18	0,22	0,05	0,16	0,57	0,5	0,3	0,2	0,8
19	0,53	0,24	0,15	0,08	7,6	2,1	1,5	8,3
20	0,18	0,22	0,25	0,35	2,8	3,5	4,8	1,3

Задача 1.2. Маємо два дискретних джерела інформації з алфавітами X={x_1,x_2,x_3}, Y={y_1,y_2, y_3}. Чисельні значення ймовірностей $p(x_i,y_k)$ сумісного виникнення символів на виходах джерел для різних варіантів наведені у таблиці 1.2. Чому дорівнює ентропія системи цих двох джерел? Чи є джерела статистично незалежними?

Таблиця 1.2

№ варіанта	**p(x_1,y_1)**	**p(x_1,y_2)**	**p(x_1,y_3)**	**p(x_2,y_1)**	**p(x_2,y_2)**	**p(x_2,y_3)**
1	0,15	0,08	0,25	0,30	0,16	0,06
2	0,12	0,04	0,24	0,18	0,06	0,36
3	0,33	0,11	0,06	0,06	0,11	0,33
4	0,05	0,08	0,11	0,36	0,25	0,15
5	0,22	0,28	0,04	0,06	0,15	0,25
6	0,17	0,21	0,23	0,12	0,08	0,19
7	0,24	0,03	0,03	0,56	0,07	0,07
8	0,08	0,08	0,30	0,12	0,12	0,30
9	0,12	0,33	0,05	0,24	0,15	0,11
10	0,09	0,18	0,18	0,11	0,22	0,22
11	0,22	0,09	0,18	0,18	0,11	0,22
12	0,14	0,28	0,08	0,26	0,14	0,10
13	0,42	0,12	0,06	0,28	0,08	0,04
14	0,03	0,18	0,26	0,26	0,12	0,15
15	0,15	0,15	0,43	0,08	0,08	0,11
16	0,21	0,08	0,28	0,15	0,12	0,16
17	0,16	0,05	0,04	0,24	0,06	0,45
18	0,02	0,05	0,43	0,02	0,33	0,15
19	0,15	0,05	0,05	0,45	0,15	0,15
20	0,06	0,03	0,01	0,54	0,27	0,09

Задача 1.3. Маємо два дискретних джерела інформації з алфавітами $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ та $Y=\{y_1, y_2, y_3\}$ Чисельні значення безумовних $p(y_k)$ та умовних $p(y_k/x_i)$ ймовірностей виникнення символів на виході джерела з алфавітом Y відомі та для різних варіантів наведені у таблиці 1.3.

а) Знайти $H(X/Y)$, $H(X)$, $H(Y)$.

б) Отримати чисельні значення ентропії $H(X, Y)$ системи двох джерел та повної взаємної інформації $I(X, Y)$.

в) Яке з цих джерел має більшу надмірність?

г) Швидкість передачі інформації.

д) Втрати інформації

Таблиця 1.3

№ варіанта	$p(y_1)$	$p(y_2)$	$p(y_3)$	$\begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \end{bmatrix}$	τ, мкс	k
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0,37	0,594	0,036	0,56 0,10 0,34 0,36 0,62 0,02	0,3	100
2	0,498	0,240	0,262	0,75 0,15 0,10 0,33 0,30 0,37	5,1	30
3	0,5	0,24	0,26	0,76 0,12 0,12 0,24 0,36 0,40	1,1	250
4	0,575	0,29	0,135	0,75 0,15 0,10 0,25 0,55 0,20	0,4	75
5	0,304	0,29	0,406	0,36 0,15 0,49 0,16 0,65 0.19	1,4	80
6	0,479	0,348	0,173	0,40 0,19 0,4 0,50 0,39 0,11	3,4	450
7	0,206	0,168	0,626	0,15 0,18 0,67 0,43 0,12 0,45	7	25
8	0,266	0,466	0,268	0,28 0,48 0,24 0,14 0,34 0,52	1,5	230
9	0,424	0,136	0,44	0,40 0,12 0,48 0,55 0,22 0,23	0,2	1000
10	0,656	0,188	0,156	0,74 0,23 0,03 0,54 0,13 0,33	3,5	45
11	0,257	0,504	0,239	0,17 0,33 0,50 0,27 0,53 0,20	2,1	1200
12	0,412	0,202	0,386	0,37 0,58 0,05 0,42 0,13 0,45	0,3	56

Продовження таблиці 1.3

1	2	3	4	5	6	7
13	0,181	0,449	0,37	0,15 0,48 0,37 0,25 0,38 0,37	1,4	83
14	0,368	0,178	0,454	0,53 0,34 0,13 0,33 0,14 0,53	5,8	120
15	0,532	0,082	0,386	0,74 0,16 0,10 0,34 0,01 0,65	18	670
16	0,236	0,328	0,436	0,33 0,14 0,53 0,13 0,54 0,33	1,8	540
17	0,483	0,221	0,296	0,27 0,15 0,58 0,57 0,25 0,18	1,2	900
18	0,312	0,348	0,34	0,18 0,15 0,67 0,38 0,45 0,17	14	50
19	0,168	0,286	0,546	0,11 0,17 0,72 0,31 0,57 0,12	0,1	43
20	0,444	0,225	0,296	0,36 0,12 0,52 0,48 0,27 0,25	2,1	91

1.2. Методичні приклади.

Приклад 1.1. Розподіл ймовірностей появи символів на виході джерела з алфавітом X потужності M =5 є таким: $p(x_1)= p(x_2)=0,1; p(x_3)=0,15; p(x_4)=0,2; p(x_5)=0,45$. Тривалості символів $\tau_1=\tau_2=\tau_3=2мс;\tau_4=1мс;$ $\tau_5=3мс$. Розрахувати ентропію, продуктивність та надмірність джерела.

Розв'язання. Для знаходження ентропії використовуємо вираз:

$$H = \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 p_i \qquad (1.1)$$

1. ентропія

H=(-0,1·log$_2$0,1)·2-0,15·log$_2$0,15-0,2·log$_2$0,2-0,45·log$_2$0,45≈2,058 *біт/символ;*

2. середня тривалість символу

τ=2·(0,1+0,1+0,15)+1·0,2+3·0,45=2,25 мс*;*

3. продуктивність

H=2,058/(2,25·10^{-3})≈914,67 біт/с;

4. надмірність

R=1-2,058/log$_2$5=0,114.

Приклад 1.2. Матриця ймовірностей сумісної появи символів на виходах двох джерел з алфавітами $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ та $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ має вигляд:

$$\begin{bmatrix} p(x_1,y_1) & p(x_2,y_1) & p(x_3,y_1) \\ p(x_1,y_2) & p(x_2,y_2) & p(x_3,y_2) \\ p(x_1,y_3) & p(x_2,y_3) & p(x_3,y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0336 & 0{,}0264 & 0{,}0200 \\ 0{,}3150 & 0{,}2475 & 0{,}1875 \\ 0{,}0714 & 0{,}0561 & 0{,}0425 \end{bmatrix}$$

Визначити, яке з джерел має більшу ентропію та чи є джерела статистично незалежними.

Розв'язання. Для відповіді на перше запитання розрахуємо безумовні ймовірності появи символів на виходах першого та другого джерел:

$p(x_1) = 0{,}0336 + 0{,}3150 + 0{,}0714 = 0{,}42;$
$p(x_2) = 0{,}0264 + 0{,}2475 + 0{,}0561 = 0{,}33;$
$p(x_3) = 0{,}0200 + 0{,}1875 + 0{,}0425 = 0{,}25;$
$p(y_1) = 0{,}0336 + 0{,}0264 + 0{,}0200 = 0{,}08;$
$p(y_2) = 0{,}3150 + 0{,}2475 + 0{,}1875 = 0{,}75;$
$p(y_3) = 0{,}0714 + 0{,}0561 + 0{,}0425 = 0{,}17.$

Тепер можемо знайти ентропії джерел за виразами :

$$H(X) = -\sum_j p(x_j)\log p(x_j), \tag{1.2}$$

$$H(Y) = -\sum_i p(y_i)\log p(y_i), \tag{1.3}$$

$H(X) = 1{,}553\,біт;\quad H(Y) = 1{,}037\,біт.$

Таким чином, джерело з алфавітом X має більшу ентропію, ніж джерело з алфавітом Y.

Відповідь на друге запитання можна отримати різними способами. По-перше, оскільки вже відомі значення ентропій *H(X)* та *H(Y),* доцільно перевірити, чи виконується рівність:

$$H(X,Y)= H(X)+H(Y) \tag{1.4}$$

Для цього розрахуємо сумісну ентропію *H(X,Y).*

Для розрахунку *H(X,Y)* використовується вираз

$$H(X,Y) = -\sum_i \sum_j p(x_j, y_i)\log p(x_j, y_i) \quad \text{біт/ два символи} \tag{1.5}$$

Підставивши чисельні значення ймовірностей у вираз (1.5), отримаємо:

H(X,Y)=2,59 біт/символ.

Оскільки

$$H(X)+H(Y)=1{,}533+1{,}037=2{,}59=H(X,Y),$$

то джерела є статистично незалежними.

Другий спосіб базується на перевірці виконання співвідношень

$p(x_j,y_i) = p(x_j)\, p(y_i)$

для всіх пар символів:

$$p(x_1) \cdot p(y_1) = 0{,}42 \cdot 0{,}08 = 0{,}0336 ;$$
$$p(x_2) \cdot p(y_1) = 0{,}33 \cdot 0{,}08 = 0{,}0264 ;$$
$$p(x_3) \cdot p(y_1) = 0{,}25 \cdot 0{,}08 = 0{,}0200 ;$$
$$p(x_1) \cdot p(y_2) = 0{,}42 \cdot 0{,}75 = 0{,}3150 ;$$
$$p(x_2) \cdot p(y_2) = 0{,}33 \cdot 0{,}75 = 0{,}2475 ;$$
$$p(x_3) \cdot p(y_2) = 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 0{,}1875 ;$$
$$p(x_1) \cdot p(y_3) = 0{,}42 \cdot 0{,}17 = 0{,}0714 ;$$
$$p(x_2) \cdot p(y_3) = 0{,}33 \cdot 0{,}17 = 0{,}0561 ;$$
$$p(x_3) \cdot p(y_3) = 0{,}25 \cdot 0{,}17 = 0{,}0561 .$$

Як і слід було очікувати, розраховані ймовірності цілком збігаються із відповідними значеннями ймовірностей $p(x_j,y_i)$ сумісної появи символів, що наведені в умовах задачі.

Найбільш універсальним способом оцінки статистичної залежності джерел є обчислення повної взаємної інформації $I(X, Y)$:

$$I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y). \qquad (1.6)$$

Аналізуючи вираз (1.6), легко зрозуміти, що для джерел цієї задачі $I(X,Y) = 0$.

Ще один спосіб розв'язання задачі базується на аналізі матриці умовних ймовірностей. Розрахуємо, наприклад, умовні ймовірності $p(x_j,y_i)$ користуючись виразом: $p(x_j / y_i) = p(x_j, y_i) / p(y_i)$:

$$\begin{bmatrix} p(x_1/y_1) & p(x_2/y_1) & p(x_3/y_1) \\ p(x_1/y_2) & p(x_2/y_2) & p(x_3/y_2) \\ p(x_1/y_3) & p(x_2/y_3) & p(x_3/y\ ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}42 & 0{,}33 & 0{,}25 \\ 0{,}42 & 0{,}33 & 0{,}25 \\ 0{,}42 & 0{,}33 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

Всі елементи кожного стовпця однакові і дорівнюють безумовній ймовірності $p(x_j)$ появи відповідного символу x_j. Це означає, що ймовірність появи символу на виході першого джерела не залежить від символу на виході другого джерела. Можна переконатись, що і в матриці умовних ймовірностей $p(y_i/x_j\ )$всі елементи кожного стовпця будуть однаковими і дорівнювати $p(y_j)$.

Приклад 1.3 По каналу зв'язку передаються повідомлення, що являють послідовність шістнадцятирічних цифр імовірності яких відповідно дорівнюють:

p(x_1)=0,1; p(x_2)=0,4; p(x_3)=0,5.

Канальна матриця, що визначає втрати інформації в каналі зв'язку має вигляд:

$$P(y/x)=\begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \\ p(y_1/x_3) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}75 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

Визначити:

1 Ентропію джерела інформації - H(X)

2 Безумовну ентропію приймача інформації - H(Y).

3 Загальну умовну ентропію - H(Y/X).

4 Швидкість передачі інформації, якщо час передачі одного символу первинного алфавіту дорівнює 0,25мкс

5 Визначити втрати інформації в каналі зв'язку при передачі 1500 символів алфавіту.

Розв'язання.

Знаходимо значення ймовірностей сумісної появи та будуємо матрицю ймовірностей сумісної появи:

$$p(x_1,y_1)=p(x_1)p(y_1/x_1)=0{,}1\cdot 1=0.1$$

$$p(x_2,y_1)=p(x_2)p(y_1/x_2)=0{,}4\cdot 0{,}25=0.1$$

$$p(x_3,y_1)=p(x_3)p(y_1/x_3)=0{,}5\cdot 0=0$$

$$p(x_1,y_1)=p(x_1)p(y_1/x_1)=0{,}1\cdot 1=0{,}1$$

$$p(x_1,y_2)=p(x_1)p(y_2/x_1)=0{,}1\cdot 0=0$$

$$p(x_2,y_2)=p(x_2)p(y_2/x_2)=0{,}4\cdot 0{,}75=0{,}3$$

$$p(x_3,y_2)=p(x_3)p(y_2/x_3)=0{,}5\cdot 0{,}2=0{,}1$$

$$p(x_1,y_3)=p(x_1)p(y_3/x_1)=0{,}1\cdot 0=0$$

$$p(x_2,y_3)=p(x_2)p(y_3/x_2)=0{,}4\cdot 0=0$$

$$p(x_3,y_3)=p(x_3)p(y_3/x_3)=0{,}5\cdot 0{,}8=0{,}4$$

$$P(x,y)=\begin{bmatrix} p(x_1,y_1) & p(x_1,y_2) & p(x_1,y_3) \\ p(x_2,y_1) & p(x_2,y_2) & p(x_2,y_3) \\ p(x_3,y_1) & p(x_3,y_2) & p(x_3,y_3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} p(x_1)=0{,}1 \\ p(x_2)=0{,}4 \\ p(x_3)=0{,}5 \\ \hline \sum_i p(x_i)=1 \end{array}$$

Безумовні імовірності $p(y_1)$, $p(y_2)$, $p(y_3)$ знаходимо шляхом сумування «стовпчиків» отриманої матриці

$p(y_1)= 0,2$, $p(y_2)=0,4$, $p(y_3)=0,4$.

Ентропія H(X):

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i)\log_2 p(x_i) = -(0{,}1\log_2 0{,}1 + 0{,}4\log_2 0{,}4 + 0{,}5\log_2 0{,}5) =$$

$$= 0{,}332 + 0{,}528 + 0{,}5 = 1{,}36 \text{ біт/ символ}$$

Ентропія H(Y):

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j)\log_2 p(y_j) = -(0{,}2\log_2 0{,}2 + 2\cdot 0{,}4\log_2 0{,}4) =$$

$$= 0{,}464 + 2\cdot 0{,}528 = 1{,}520 \text{ біт/ символ}$$

Загальна умовна ентропія

$$H(Y/X) = -\sum_{i}\sum_{j} p(x_i)p(y_j/x_i)\log_2 p(y_j/x_i) =$$

$$= -\left[0{,}1(1\log_2 1) + 0{,}4(0{,}75\log_2 0{,}75 + 0{,}25\log_2 0{,}25) + 0{,}5(0{,}8\log_2 0{,}8 + 0{,}2\log_2 0{,}2)\right] =$$

$$= 0{,}3244 + 0{,}3610 = 0{,}6854 \text{ біт/ символ}$$

Визначимо швидкість передачі інформації яка являє середню кількість інформації яка передається по каналу зв'язку за одиницю часу та розраховується за формулою:

$C=V[H(Y)-H(Y/X)]=V[H(X)-H(X/Y)]==1/(0{,}25\cdot 10^{-3})\cdot(1{,}520-0{,}6854)= 3{,}34$ кбіт/с.

Визначимо втрати інформації в каналі зв'язку при передачі 1500 символів алфавіту

$\Delta I=k\ H\ (Y/X)=1500\cdot 0{,}6854 =1{,}02$ кбіт.

Визначимо середню кількість прийнятої інформації:

$I=k[H(Y)-H(Y/X)]=k\ [H(X)-H(X/Y)]==1500\cdot(1{,}520-0{,}6854)=1{,}26$ кбіт.

Приклад 1.4. Канал з шумами описується наступною канальною матрицею

$$P(x,y) = \begin{bmatrix} p(x_1,y_1) & p(x_1,y_2) & p(x_1,y_3) \\ p(x_2,y_1) & p(x_2,y_2) & p(x_2,y_3) \\ p(x_3,y_1) & p(x_3,y_2) & p(x_3,y_3) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{vmatrix}$$

Знайти I(X,Y).

Розв'язання.

Знаходимо безумовні імовірності $p(x_i)$, $p(y_j)$:

$$p(x_i)=\sum_j p(x_i,y_j); \quad p(x_1)=0{,}2; \qquad p(x_2)=0{,}3; \qquad p(x_3)=0{,}5;$$

$$p(y_j)=\sum_i p(x_i,y_j); \quad p(y_1)=0{,}1; \qquad p(y_2)=0{,}5; \qquad p(y_3)=0{,}4.$$

Ентропія джерела та приймача повідомлень:

$$H(X)=-\sum_i p(x_i)\log_2 p(x_i)=-(0{,}2\log_2 0{,}2+0{,}3\log_2 0{,}3+0{,}5\log_2 0{,}5)=$$

$$=0{,}4644+0{,}5211+0{,}5=1{,}4855 \text{ біт/символ.}$$

$$H(Y)=-\sum_j p(y_j)\log_2 p(y_j)=-(0{,}1\log_2 0{,}1+0{,}5\log_2 0{,}5+0{,}4\log_2 0{,}4)=$$

= 0,3321 + 0,5 + 0,5287 = 1,3608 біт/символ.

Ентропія об'єднання:

$$H(X,Y)=-\sum_i \sum_j p(x_i,y_j)\log_2 p(x_i,y_j)=-(3\cdot 0{,}1\log_2 0{,}1+2\cdot 0{,}2\log_2 0{,}2+0{,}3\log_2 0{,}3)=$$

= 0,9963 + 0,9288 + 0,5211 = 2,4462 біт/два символи.

Середня кількість інформації в повідомленні

$$I(X,Y)=H(X)+H(Y)-H(Y,X)=1{,}4855+1{,}3608-2{,}4462=0{,}4 \text{ біт}$$

1.3. Контрольні питання:

1. Що таке джерело повідомлень?
2. Що таке ансамбль повідомлень?
3. Як визначається кількість інформації в одному повідомленні?
4. Що таке ентропія?
5. Сформулюйте основні властивості ентропії.
6. Як визначається ентропія дискретної системи з рівномірними і нерівноімовірними станами ?
7. Як обчислити кількість інформації в повідомленні, якщо символи зустрічаються з однаковою імовірністю?
8. В яких одиницях вимірюється ентропія та кількість інформації?
9. Чому дорівнює ентропія при нерівномірному і взаємозалежному розподілі елементів системи?
10. Як визначається ентропія об’єднання двох джерел?
11. За яких умов ентропія джерела стає максимальною?
12. Що таке умовна ентропія?
13. Яким чином можна визначити чи є джерела статистично залежними?
14. Які бувають та для чого використовуються канальні матриці?
15. Як визначити інформаційні втрати при передачі повідомлення?
16. Що таке надлишковість та в яких одиницях вимірюється?

2. Обов’язкове домашнє завдання №2

2.1. Варіанти завдань.

Задача 2.1. Алфавіт джерела налічує N_0 символів , які кодують рівномірним двійковим простим кодом. Згідно з варіантами, поданими в таблиці 2.1, визначити надмірність повідомлень, які надходять до каналу зв'язку з завадами з виходу кодера, де вони кодуються завадостійким кодом, якщо довжина коду на виході кодера *n*.

Таблиця 2.1

№ варіанта	Кількість повідомлень, N_0	Довжина коду, n
1	16	7
2	32	9
3	128	11
4	256	12
5	512	15

Задача 2.2. Згідно з варіантами, поданими в таблиці 2.2, визначити кодову відстань між двійковими комбінаціями *A* та *B* двійкового коду та записати всі комбінації, які знаходяться від комбінації *A* на кодовій відстані *d*.

Таблиця 2.2

№ варіанта	Кодові комбінації		Кодова відстань d
	A	B	
1	0101	1010	2
2	0111	0101	2
3	1000	1010	2
4	1100	0110	2
5	10101	10011	3
6	01010	01100	3
7	11011	10110	3
8	01100	11001	3
9	1010101	0101010	4
10	1100110	0110011	4
11	1110001	0111000	4
12	0011110	1111000	4
13	1111000	1100110	5
14	1011001	1110101	5
15	1001100	1110011	5
16	1000111	1111011	5
17	00011101	11100110	6

Продовження таблиці 2. 2.

1	2	3	4
18	01010101	00011101	6
19	11001100	01100111	6
20	11110000	00110011	6

Задача 2.3. Згідно з варіантами, поданими в таблиці 2.3, побудувати всі комбінації n-елементного двійкового простого коду, які знаходяться від двійкової комбінації *A* на кодовій відстані *d*.

Таблиця 2.3

№ варіанта	**Двійкова кодова комбінація, *A***	**Довжина коду, *n***	**Кодова відстань, *d***
1	**2**	**3**	**4**
1	0110	4	2
2	1010	4	2
3	0101	4	2
4	1100	4	2
5	101010	6	3
6	110011	6	3
7	111001	6	3
8	100111	6	3
9	1101001	7	4
10	1110011	7	4
11	1001101	7	4
12	1010111	7	4
13	01110001	8	5
14	11001100	8	5
15	11100010	8	5
16	10011100	8	5
17	111010	6	2
18	101110	6	1
19	101100	6	4
20	111100	6	3

Задача 2.4. Згідно з варіантами, поданими в таблиці 2.4, визначити мінімальну та максимальну кодові відстані Хеммінга *d* між комбінаціями *A, B, C, D* двійкового n-елементного простого коду.

Таблиця 2.4

№ варіанта	**Двійкові кодові комбінації**				**Довжина коду, n**
	A	**B**	**C**	**D**	
1	00011	11001	10110	11100	5
2	01010	11011	00111	11110	5
3	11001	01100	10110	00011	5
4	00110	00111	10111	01111	5
5	100011	100010	110001	111000	6
6	101110	110011	100111	011000	6
7	010011	011011	011100	011010	6
8	011100	110111	010011	111010	6
9	0010000	0110110	0111101	1110010	7
10	0111000	1010110	0011111	1101101	7
11	0101011	1100011	1011100	1010010	7
12	1100101	1101110	1011010	1101111	7
13	11100011	01111000	01101010	11110000	8
14	01110110	10010001	11000111	10101010	8
15	11010101	01101110	01010111	01010011	8
16	10110010	10110001	10111000	00110101	8
17	011110010	111100001	101010100	101000101	9
18	101010001	101110100	010101001	010110110	9
19	011011100	000111000	111101010	010111111	9
20	111000100	110111011	101001101	011100100	9

Задача 2.5. Побудувати оптимальний код згідно варіанту поданому в таблиці 2.5.

Таблиця 2.5

№ варіанта	**Розподіл ймовірностей появи літер алфавіту в повідомленні**	**Метод**
1	**2**	**3**
1	p=(1/4; 1/4; 1/8;1/8;1/16;1/16; 1/16;1/16)	Шеннона-Фано
2	p=(0.04; 0.06; 0.08; 0.1; 0.1; 0.12; 0.15; 0.15; 0.2)	Хаффмена
3	p=(1/2; 1/4; 1/8;1/16;1/32;1/64)	Шеннона-Фано
4	p=(0.16; 0.2; 0.14; 0.4; 0.02; 0.03; 0.05)	Шеннона-Фано
5	p=(0.5; 0.15; 0.12; 0.1; 0.04; 0.04; 0.03; 0.02)	Хаффмена
6	p=(0.5;0.25;0.098;0.052;0.04;0.03;0.019;0.011)	Шеннона-Фано
7	p=(0.06; 0.25; 0.1; 0.05; 0.2; 0.04; 0.3)	Хаффмена

Продовження таблиці 2.4

1	2	3
8	p=(0.15; 0.35; 0.2 0.03;0.02; 0.05; 0.1; 0.04; 0.06)	Шеннона-Фано
9	p=(0.15; 0.1; 0.05; 0.25; 0.02; 0.03; 0.35)	Шеннона-Фано
10	p=(0.4; 0.18; 0.1; 0.1; 0.07; 0.06; 0.05; 0.04)	Хаффмена
11	p=(0.18; 0.18; 0.18; 0.18; 0.1; 0.09; 0.09)	Шеннона-Фано
12	p=(0.4; 0.22; 0.16; 0.12; 0.08; 0.02)	Хаффмена
13	p=(0.06; 0.15; 0.07; 0.05; 0.3; 0.18; 0.04)	Шеннона-Фано
14	p=(0.19; 0.19; 0.19; 0.19; 0.08; 0.08; 0.08)	Шеннона-Фано
15	p=(0.4; 0.18; 0.1; 0.1; 0.07; 0.06; 0.05; 0.04)	Шеннона-Фано
16	p=(0.24; 0.18; 0.38; 0.1; 0.06; 0.02; 0.02)	Хаффмена
17	p=(0.02; 0.5; 0.03; 0.15; 0.04; 0.12; 0.04; 0.1)	Шеннона-Фано
18	p=(0.06; 0.15; 0.07; 0.05; 0.3; 0.18; 0.04)	Шеннона-Фано
19	p=(0.02; 0.5; 0.03; 0.15; 0.04; 0.12; 0.04; 0.1)	Хаффмена
20	p=(0.6; 0.08; 0.07; 0.06; 0.05; 0.05; 0.05; 0.04)	Хаффмена

Задача 2.6. Побудувати твірну матрицю двійкового систематичного (групового) коду, який має, N_0 дозволених кодових комбінацій та здатен виправляти всі однократні помилки (згідно з варіантом таблиці 2.6). Навести приклад кодування за допомогою твірної матриці

Таблиця 2.6

№ варіанта	**Кількість дозволених комбінацій ;N_0**
1	8
2	16
3	32
4	64
5	128

Задача 2.7. Визначити, які з наведених комбінацій двійкового групового (7,4) - коду (згідно з варіантом таблиці 2.7), містять помилку, якщо відомо, що код побудований за твірною матрицею:

$$G_{7,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Таблиця 2.7

№ варіанта	Комбінації двійкового групового коду
1	1000011, 1100011, 0000101
2	1100110, 1001010, 1111110
3	0001111, 0000111, 0000011
4	0100101, 0101101, 0000101
5	1010101, 1001000, 1110111
6	1001100, 1001101, 0100011
7	0110011, 1011001, 1100011
8	0101010, 0000111, 0000011
9	0011001, 1011001, 1111100
10	1110000, 1110100, 0111000
11	0111100, 1101010, 0101101
12	1011010,1011110, 0011111
13	1101001, 1100011, 0110110
14	1111111, 1001111, 0100100
15	1000011, 1000111, 0000100
16	0100101, 0101101, 0000011
17	0010110, 1100011, 0101101
18	0001111, 1001011, 1001101
19	1100110, 1011011, 0000111
20	1101001, 0101001, 1010011

Задача 2.8. Визначити, які з комбінацій двійкового групового (7,4)-коду містять помилку (згідно з варіантом таблиці 2.8), якщо відомо, що перевірочна матриця коду мас вигляд:

$$H_{7,3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Таблиця 2.8

№ варіанта	Комбінації двійкового групового коду
1	**2**
1	1110000, 1110100, 0111000
2	0111100, 1101010, 0101101

Продовження таблиці 2.8

1	2
3	1011010,1011110, 0011111
4	1101001, 1100011, 0110110
5	1111111, 1001111, 0100100
6	1000011, 1000111, 0000100
7	1000011, 1000111, 0000100
8	0100101, 0101101, 0000011
9	0010110, 1100011, 0101101
10	0001111, 1001011, 1001101
11	1100110, 1011011, 0000111
12	1101001, 0101001, 1010011
13	1000011, 1100011, 0000101
14	1100110, 1001010, 1111110
15	0001111, 0000111, 0000011
16	0100101, 0101101, 0000101
17	1010101, 1001000, 1110111
18	1001100, 1001101, 0100011
19	0101010, 0000111, 0000011
20	1000011, 1000111, 0000100

Задача 2.9. Побудувати перевірочну матрицю традиційного двійкового коду Хеммінга з заданими d_{min} та $к$ (згідно з варіантом таблиці 2.9). За допомогою одержаної матриці закодувати кодом Хеммінга комбінації двійкового простого коду A_1 та A_2.

Показати на прикладі виправлення будь-якої однократної помилки (для коду з d_{min} = 3) або виявлення будь-якої трикратної помилки (для коду з $d_{min}=4$) в отриманих кодових комбінаціях коду Хеммінга

Таблиця 2.9

№ варіанта	$\mathbf{d_{min}}$	**k**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	3	4	0011	1010
2	3	5	11001	00110
3	3	7	0101010	1110000
4	3	11	01110001010	00011100011
5	3	12	001100110010	111000111000
6	3	14	00010001000100	10010010010010
7	4	4	1110	0011
8	4	7	0100101	1110001
9	4	11	01110111000	11001100111
10	4	15	100011100101011	010100010100001

Продовження таблиці 2.9

1	2	3	4	5
11	4	4	1110	0110
12	4	5	01010	11100
13	4	7	0100111	0101011
14	4	11	01001111011	01101011010
15	4	12	101110011011	100001110110
16	3	14	10010111010001	01110010011101
17	3	15	111000110010110	011001010011100
18	3	7	0111000	0001101
19	3	5	01110	01100
20	3	4	0001	0111

Задача 2.10. Закодувати комбінації двійкового простого коду A_1 та A_2 довжиною k (згідно з варіантом таблиці 2.10) двійковим кодом з багатократним повторенням, здатним виправляти помилки кратності s. Показати процес виправлення помилок.

Таблиця 2.10

№ варіанта	k	s	A_1	A_2
1	3	2	001	100
2	3	1	100	010
3	3	2	010	011
4	4	1	1100	0110
5	4	2	0011	1001
6	4	1	0100	1010
7	5	2	11100	10101
8	5	1	11001	11010
9	5	2	01010	01110
10	6	1	001000	110010
11	6	2	111011	111000
12	6	1	010010	101101
13	7	2	0100101	1100110
14	7	1	0111011	1011011
15	7	2	0110110	1110111
16	7	1	0101100	1011010
17	8	2	10001110	11100001
18	8	1	10110110	01011100
19	8	2	11001100	00111000
20	8	1	10011010	10101110

Задача 2. 11. Закодувати двійковим циклічним кодом $d_{min=}3$, що виправляє однократні помилки, комбінацію двійкового простого коду $Q(x)$

довжиною k інформаційних елементів згідно варіанту (табл. 2.11). Показати процес виправлення будь-якої однократної помилки і визначити надмірність коду.

Таблиця 2.11

№ варіанта	$\boldsymbol{k}$	**Поліном комбінації двійкового простого коду $Q(x)$**
1	**2**	**3**
1	4	$x^2 \oplus x \oplus 1$
2	4	$x^3 \oplus x^2 \oplus 1$
3	5	$x^4 \oplus x^2 \oplus x$
4	5	$x^4 \oplus x^3 \oplus x \oplus 1$
5	6	$x^5 \oplus x^2 \oplus 1$
6	7	$x^6 \oplus x \oplus 1$
7	7	$x^6 \oplus x^5 \oplus x^2 \oplus x$
8	5	$x^4 \oplus x^2 \oplus 1$
9	8	$x^7 \oplus x^6 \oplus x^4 \oplus x$
10	9	$x^7 \oplus x^5 \oplus x^3 \oplus 1$
11	10	$x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$
12	11	$x^{10} \oplus x^9 \oplus x^8 \oplus x^4 \oplus x$
13	5	$x^4 \oplus x^3 \oplus 1$
14	12	$x^{11} \oplus x^{10} \oplus x^7 \oplus x^6 \oplus x^3 \oplus 1$
15	6	$x^5 \oplus x^4 \oplus x^2 \oplus x$
16	14	$x^{13} \oplus x^{12} \oplus x^{10} \oplus x^9 \oplus x^3 \oplus x^2$
17	6	$x^5 \oplus 1$
18	7	$x^6 \oplus x^4 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$
19	12	$x^{11} \oplus x^{10} \oplus x^8 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus 1$
20	14	$x^{13} \oplus x^{11} \oplus x^7 \oplus x^9 \oplus x^3 \oplus x^2$

Задача 2.12. Закодувати двійковим циклічним кодом, що виявляє трикратні помилки ($d_{min=}4$), кодову комбінацію двійкового простого коду $Q(x)$ довжиною k інформаційних елементів згідно з варіантом, поданим в таблиці 2.12. Показати процес виявлення будь-якої трикратної помилки.

Таблиця 2.12

№ варіанта	*k*	Поліном комбінації двійкового простого коду *Q(x)*
1	**2**	**3**
1	4	$x^2 \oplus x \oplus 1$
2	9	$x^8 \oplus x^5 \oplus x^2 \oplus 1$
3	5	$x^4 \oplus x^2 \oplus x$
4	5	$x^4 \oplus x^3 \oplus 1$
5	6	$x^5 \oplus x^4 \oplus x^2 \oplus 1$
6	7	$x^6 \oplus x^4 \oplus x \oplus 1$
7	10	$x^9 \oplus x^7 \oplus x^5 \oplus x^2 \oplus 1$
8	8	$x^7 \oplus x^6 \oplus x^3 \oplus x$
9	6	$x^5 \oplus x^3 \oplus 1$
10	9	$x^8 \oplus x^3 \oplus x \oplus 1$
11	12	$x^{11} \oplus x^8 \oplus x^7 \oplus x^3 \oplus x^2$
12	10	$x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$
13	11	$x^{10} \oplus x^9 \oplus x^5 \oplus x^2 \oplus 1$
14	8	$x^7 \oplus x^5 \oplus 1$
15	6	$x^5 \oplus x^4 \oplus x \oplus 1$
16	9	$x^8 \oplus x^7 \oplus x^5 \oplus x^3 \oplus x^2$
17	14	$x^{13} \oplus x^{11} \oplus x^{,10} \oplus x^7 \oplus x^3 \oplus x$
18	10	$x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$
19	12	$x^{11} \oplus x^9 \oplus x^7 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus 1$
20	6	$x^5 \oplus x^3 \oplus x$

Задача 2.13. Побудувати твірну матрицю двійкового циклічного коду з мінімальною кодовою відстанню $d_{min=}3$ (здатного виправляти однократні помилки), твірний поліном *P(x)* якого та довжина n вибираються згідно з варіантом, поданим в таблиці 2. 13.

Таблиця 2.13

№ варіанта	Довжина коду n	Твірний поліном циклічного коду *P(x)*
1	**2**	**3**
1	7	$x^3 \oplus x^2 \oplus 1$
2	7	$x^3 \oplus 1$

Продовження таблиці 2.13

1	**2**	**3**
3	9	$x^4 \oplus x \oplus 1$

4	18	$x^6 \oplus x^4 \oplus 1$
5	15	$x^4 \oplus x^3 \oplus 1$
6	7	$x^3 \oplus x \oplus 1$
7	16	$x^5 \oplus x^2 \oplus 1$
8	7	$x^3 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$
9	16	$x^5 \oplus 1$
10	16	$x^5 \oplus x^4 \oplus 1$
11	9	$x^4 \oplus 1$
12	16	$x^5 \oplus x^3 \oplus 1$
13	9	$x^4 \oplus x \oplus 1$
14	17	$x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$
15	16	$x^5 \oplus x \oplus 1$
16	9	$x^4 \oplus x^2 \oplus 1$
17	9	$x^4 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$
18	18	$x^6 \oplus x^3 \oplus 1$
19	10	$x^4 \oplus x \oplus 1$
20	12	$x^4 \oplus x^3 \oplus 1$

Задача 2. 14. Побудувати перевірочну матрицю двійкового циклічного коду з мінімальною кодовою відстанню d_{min}=3 (здатного виправляти однократні помилки), твірний поліном *P(x)* якого та довжина *n* вибираються згідно з варіантом, поданим в таблиці 2.14.

Таблиця 2.14

№ варіанта	**Довжина коду n**	**Твірний поліном циклічного коду *P(x)***
1	**2**	**3**
1	7	$x^3 \oplus x \oplus 1$
2	10	$x^4 \oplus x \oplus 1$
3	16	$x^5 \oplus x^2 \oplus 1$
4	7	$x^3 \oplus x^2 \oplus 1$
5	12	$x^4 \oplus x^3 \oplus 1$
6	9	$x^4 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$
7	18	$x^5 \oplus x^3 \oplus 1$
8	7	$x^3 \oplus 1$

Продовження таблиці 2.14

1	**2**	**3**
9	9	$x^4 \oplus x \oplus 1$

10	16	$x^5 \oplus x^4 \oplus 1$
11	9	$x^4 \oplus 1$
12	16	$x^5 \oplus x^3 \oplus 1$
13	18	$x^6 \oplus x^4 \oplus 1$
14	15	$x^4 \oplus x^3 \oplus 1$
15	16	$x^5 \oplus x \oplus 1$
16	18	$x^6 \oplus x^3 \oplus 1$
17	10	$x^4 \oplus x \oplus 1$
18	12	$x^4 \oplus x^3 \oplus 1$
19	16	$x^5 \oplus x^4 \oplus 1$
20	20	$x^5 \oplus x^4 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$

2.2. Методичні приклади

Приклад 2.1. Визначити кодову відстань між комбінаціями A і B двійкового коду та записати всі комбінації, які знаходяться від комбінації A на кодовій відстані d= 3, якщо A = 01001, B =11101.

Розв'язання. Щоб визначити кодову відстань між комбінаціями A та B знаходимо поелементну суму за модулем 2 цих комбінацій:

$$A \oplus B = \oplus \begin{array}{r} 01001 \\ 11101 \\ \hline 10101 \end{array}$$

одержуємо комбінацію C = 10101, вага якої w= 2. Тобто в комбінаціях A і B у трьох однойменних розрядах (на 1-му справа, 2-му і 4-му) знаходяться однакові символи, а на двох (на 3-му справа і 5-му) різні, сукупність яких і визначає степінь різниш між комбінаціями A та B, Вага комбінації C є кодовою відстанню Хеммінга між комбінаціями A та В.

Будь-яка комбінація ваги w = 3, якщо її порозрядно додати за модулем 2 до комбінації A (такої ж довжини) дає нову комбінацію, яка буде знаходитись від комбінації A на кодовій відстані d= 3.

Кількість таких комбінацій буде дорівнювати кількості сполучень з n=5 по d=3:

$$C_5^3 = \frac{n!}{d!(n-d)!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10.$$

Ці комбінації одержуємо, додаючи порозрядно до комбінації A почергово всі десять комбінацій з вагою 3:

$$\begin{array}{r} 01001 \\ \oplus\ 00111 \\ \hline 01110 \end{array} \quad \begin{array}{r} 01001 \\ \oplus\ 01011 \\ \hline 00010 \end{array} \quad \begin{array}{r} 01001 \\ \oplus\ 01101 \\ \hline 00100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 01001 \\ \oplus\ 01110 \\ \hline 00111 \end{array} \quad \begin{array}{r} 01001 \\ \oplus\ 10011 \\ \hline 11010 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 01001 \\ \oplus\ 10101 \\ \hline 11100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 01001 \\ \oplus\ 10101 \\ \hline 11111 \end{array} \quad \begin{array}{r} 01001 \\ \oplus\ 11001 \\ \hline 10000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 01001 \\ \oplus\ 11010 \\ \hline 10011 \end{array} \quad \begin{array}{r} 01001 \\ \oplus\ 11100 \\ \hline 10101 \end{array}$$

Таким чином одержуємо такі 10 комбінацій, які знаходяться від комбінації A на кодовій відстані d = 3: 01110, 00010, 00100, 00111, 11010, 11100,11111, 10000, 10011, 10101.

Приклад 2.2. Побудувати всі комбінації *n*-елементного (розрядного) двійкового простого коду, які знаходяться від двійкової комбінації *A* на кодовій відстані d= 2, якщо A = 10101, $n = 5$.

Розв'язання. Для отримання комбінацій двійкового простого коду, які знаходяться на кодовій відстані d =2 від комбінації А, треба до комбінації A додати за модулем 2 всі комбінації двійкового *n*-елементного (n = 5) простого коду з відповідною вагою (w = 2).

Загалом кількість комбінацій відповідної ваги визначається *з* виразу $C_n^{\,w} = C^d_n$ тобто для $n = 5$ та $d = 2$:

$$C_5^2 = \frac{n!}{d!(n-d)!} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10.$$

Додавання комбінацій виконуємо поелементно за модулем 2 без переносу. При цьому отримуємо 10 кодових комбінацій двійкового простого коду, які знаходяться від комбінації A = 10101 на кодовій відстані $d= 2$.

Приклад 2.3. Символи алфавіту зустрічаються в повідомленнях з наступними ймовірностями: А – 0,09; Б – 0,17; В – 0,41; Г – 0,08; Д – 0,05; Є – 0,06; Ж – 0,4; З – 0,04. Побудувати оптимальний код методом Шеннона – Фано.

Розв'язання.

Код будується наступним чином: літери алфавіту повідомлень записують в таблицю в порядку спадання ймовірностей. Потім вони поділяються на дві групи таким чином, щоб суми ймовірностей в кожній з груп були по можливості однакові. Всім літерам верхньої половини в якості першого символу присвоюється 1, а нижнім 0. Кожна з отриманих груп в свою чергу розбивається на дві підгрупи з однаковими сумарними ймовірностями і так далі. Процес повторюється до тих пір, поки в кожній підгрупі не залишиться по одній літері. Результати побудови оптимального коду занесені в таблицю 2.15.

Таблиця 2.15

Побудова оптимального коду за допомогою методики Шеннона - Фано

Літера	Імовірність появи літери	Кодове слово	Кількість знаків в кодовому слові	$p_i l_i$
В	0,41	00	2	0,82
Б	0,17	01	2	0,34
Ж	0,1	100	3	0,3
А	0,09	101	3	0,27
Г	0,08	1100	4	0,32
Є	0,06	1101	4	0,24
Д	0,05	1110	4	0,2
З	0,04	1111	4	0,16

Виконуємо перевірку . Розраховуємо середню довжину кодового слова та ентропію:

$$L_{ñð} = \sum_{з} ð_з l_i = 0{,}82 + 0{,}34 + 0{,}3 + 0{,}27 + 0{,}32 + 0{,}24 + 0{,}2 + 0{,}16 = 2{,}65,$$

$$H = -(0{,}09 \log_2 0{,}09 + 0{,}17 \log_2 0{,}17 + \ldots + 0{,}04 \log_2 0{,}04) = 2{,}543 \text{ біт/символ}$$

Оскільки значення $L_{cp} \geq H$, то код оптимальний.

Приклад 2.4 Символи алфавіту зустрічаються в повідомленнях з наступними ймовірностями 0,10; 0,02; 0,22; 0,20; 0,16; 0,10; 0,04; 0,16.

Розв'язання.

При кодуванні методом Хаффмена виконуємо наступні дії:

1) розташовуємо літери у порядку спадання ймовірностей;
2) останні літери об'єднуємо у нову з імовірністю, що дорівнює сумі об'єднуваних ймовірностей;
3) утворену множину імовірностей розташовуємо у порядку спадання ймовірностей;
4) об'єднують останні дві літери і впорядковують множину літер у порядку спадання ймовірностей. Так діють доти, доки ймовірність чергової об'єднаної літери не дорівнюватиме одиниці;

5) будують кодове дерево, починаючи з кореня, і гілкам цього дерева присвоюють якісні ознаки кодового алфавіту;

Згідно з викладеною вище методикою складено таблицю 2.16 та побудовано кодове дерево рис. 2.1. Кодові комбінації — це послідовність якісних ознак, які зустрічаються на шляху від кореня до вершини кодового дерева.

Таблиця 2.16

Побудова оптимального коду за допомогою методики Хаффмена

Літера	Імовірність появи літери	Допоміжні стовпці							Кодове слово
		1	2	3	4	5	6	7	
Z_1	0,22	0,22	0,22	0,26	0,32	0,42	0,58	1	01
Z_2	0,20	0,20	0,20	0,22	0,26	0,32	0,42		00
Z_3	0,16	0,16	0,16	0,20	0,22	0,26			111
Z_4	0,16	0,16	0,16	0,16	0,20				110
Z_5	0,10	0,10	0,16	0,16					100
Z_6	0,10	0,10	0,10						1011
Z_7	0,04	0,03							10101
Z_8	0,02								10100

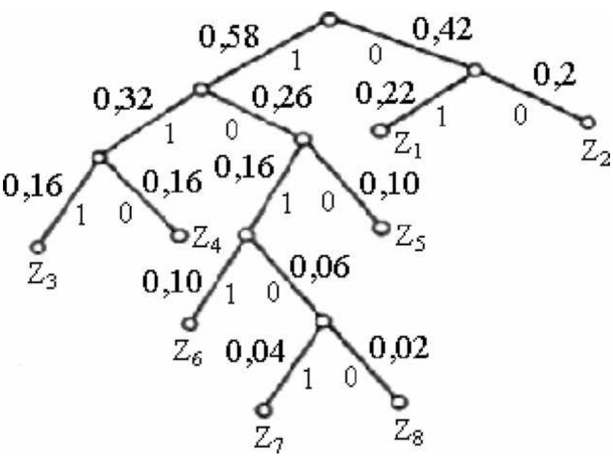

Рис. 2.1 Кодове дерево

Приклад 2.5. Побудувати твірну матрицю і визначити всі комбінації двійкового систематичного (групового) коду, здатного виправляти поодинокі помилки для N_0 =8 повідомлень.

Розв'язання. Кількість інформаційних розрядів коду $k=\log_2 8=3$ Кількість перевірочних розрядів визначається як найменше ціле r, яке задовольняє нерівності $2^r \geq k + r + 1$. Таким значенням буде $r = 3$. Довжина коду $n = \kappa + r$=6. Таким чином, твірна матриця $G_{n,k}$ має 6 стовпців та 3 рядка, а перевірочна підматриця $C_{r,\kappa}$ має 3 стовпця та 3 рядка.

Згідно з правилом побудови підматриці $C_{r,\kappa}$ кількість одиниць у кожному рядку цієї підматриці повинна бути не менша за d_{min}- 1 = 3- 1 = 2, а кодова відстань між окремими рядками цієї під матриці не менша за d_{min}-2 = 3-2 = 1. Тому, з триелементних комбінацій для підматриці $C_{3,3}$ вибираємо тільки ті, які задовольняють цим умовам, і тобто 110, 101,011.

За інформаційну підматрицю E_k твірної матриці обирають одиничну підматрицю. Дописавши до неї перевірочну підматрицю, одержимо твірну матрицю систематичного коду, здатного виправляти однократні помилки

$$G_{6.3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

За допомогою одержаної твірної матриці $G_{6,3}$ визначимо всі 8 кодових комбінацій, які належать до цього систематичного коду:

1 – 000000; 2 – 100110; 3 – 010101; 4 – 001011; 5 – 110011 ($2 \oplus 3$);
6 – 101101 ($2 \oplus 4$); 7 – 011110 ($3 \oplus 4$); 8 – 111000 ($2 \oplus 3 \oplus 4$).

Приклад 2.6. Побудувати перевірочну матрицю двійкового систематичного коду, здатного виправляти однократні помилки з d_{min}=3 Закодувати за допомогою одержаної перевірочної матриці комбінації первинного двійкового коду 111 та 011.

Розв'язання. Для побудови перевірочної матриці систематичного коду, здатного виправляти однократні помилки, скористуємося твірною матрицею, побудованою для одержання 8 комбінацій систематичного коду в прикладі 2.3.

Перевірочна матриця $H_{n,r}$ повинна мати r= 3 рядки та n = 6 стовпців. Вона утворюється з двох підматриць**:** $D_{3.3,}$ яка містить три стовпці і три рядки, кожний рядок якої відповідає стовпцю перевірочної підматриці $C_{3,3}$ твірної матриці $G_{6,3}$ та одиничної під-матриці E_3. Таким чином,

$$H_{6,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Перевірочні елементи, згідно матриці $H_{6,3}$, можна визначити так:

$$b_1 = a_1 \oplus a_2; \quad b_2 = a_1 \oplus a_3; \quad b_3 = a_2 \oplus a_3.$$

За допомогою одержаної перевірочної матриці $H_{6,3}$ виконуємо кодування систематичним (груповим) кодом комбінацій первинного коду 111 та 011, для чого визначаємо перевірочні елементи для заданих комбінцій

$b_1 = 0 \oplus 1 = 1; \quad b_2 = 0 \oplus 1 = 1; \quad b_3 = 1 \oplus 1 = 0.$

$b_1 = 1 \oplus 1 = 0; \quad b_2 = 1 \oplus 1 = 0; \quad b_3 = 1 \oplus 1 = 0.$

Таким чином, кодові комбінації систематичного (групового) коду будуть мати вигляд: 111000 та 011110.

Приклад 2.7. Для групового (7,4) - коду, що виправляє однократні помилки, побудувати перевірочну матрицю $H_{7,3}$ і закодувати за її допомогою комбінацію двійкового простого коду 1101, якщо твірна матриця має вигляд

$$G_{7,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Визначити синдром для виправлення однократних помилок в комбінаціях цього коду. Показати па прикладі виправлення однократної помилки.

Розв'язання. Перевірочна матриця $H_{7,3}$ для (7.4)-коду буде складатись з двох підматриць: $D_{4.3}$, кожний рядок якої відповідає транспонованому стовпцю перевірочної підматриці $C_{3,4}$, твірної матриці $G_{7,4}$ та одиничної підматриці E_3. Отже, перевірочна матриця $H_{7,3}$ буде мати вигляд:

$$H_{7,.3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Перевірочні елементи, згідно матриці $H_{7,3}$ будуть визначатись за такими виразами:

$$b_1 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3; \quad b_2 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_4; \quad b_3 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4.$$

Користуючись ними, закодуємо комбінацію $[a_1a_2a_3a_4]$=1101,тобто визначимо перевірочні елементи

$$b_1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0; \quad b_2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1; \quad b_3 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0;$$

Таким чином, комбінація групового коду буде мати вигляд 1101010.

У декодері для виявлення і виправлення однократної помилки у прийнятій кодовій комбінації систематичного групового коду виконують перевірку - визначають синдром помилки. Для одержаної перевірочної матриці елементи синдрому помилки визначаються таким

$$s_1 = a_1^* \oplus a_2^* \oplus a_3^* \oplus b_1^*; \quad s_2 = a_1^* \oplus a_2^* \oplus a_4^* \oplus b_2^*; s_3 = a_1^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* \oplus b_3^*$$

Знайдемо і виправимо однократну помилку, наприклад, у комбінації $[a^*_1a^*_2a^*_3a^*_4b^*_1b^*_2b^*_3]$=1001010.

Для цього визначимо кодовий синдром помилки:

$$s_1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1; \quad s_2 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1; s_3 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0,$$

тобто синдром має вигляд 110, що відповідає другому стовпцю перевірочної матриці $H_{7,3}$ Синдром показує, що помилка знаходиться у другому розряді прийнятої кодової комбінації. Для виправлення помилки інвертуємо значення даного розряду, тобто замість "0" записуємо "1". Виправлена кодова комбінація групового коду буде мати вигляд 1101010.

Приклад 2.8. Закодувати традиційним двійковим кодом Хеммінга комбінацію двійкового простого коду 10110 і показати на прикладі процес виправлення будь-якої однократної помилки. Визначити надмірність коду.

Розв'язання. При $к$ - 5 кількість перевірочних елементів r = 4; довжина коду $n=k+r$=5+4=9

Перевірочні елементи будуть розташовані на позиціях 1, 2, 4, і 8 згідно правила побудови перевірочної матриці коду Хеммінга. Побудуємо перевірочну матрицю коду Хеммінга розмірами r= 4 рядків та n = 9 стовпців:

$$H_{9,4} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} b1 & b2 & a1 & b3 & a2 & a3 & a4 & b4 & a5 \end{matrix} \end{array}$$

Під матрицею для полегшення процесу кодування записана у загальному вигляді кодова комбінація, де через a_i, та b_j, позначені інформаційні та перевірочні елементи відповідно.

Користуючись побудованою перевірочною матрицею $H_{9,4}$, визначимо значення перевірочних елементів для $[a_1a_2a_3a_4]$=10110

$$b_1 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0;$$
$$b_2 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1;$$
$$b_3 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0;$$
$$b_4 = a_5 = 0.$$

Кодова комбінація традиційного коду Хеммінга
буде мати вигляд: 011001100.

Виконаємо декодування одержаної кодової комбінації з виправленням однократної помилки. Припустимо, що при передачі сталося спотворення і замість 011001100 була прийнята кодова комбінація 011001000.

Для виявлення і виправлення помилки у декодері виконують перевірки на парність з урахуванням перевірочних елементів, тобто знаходять синдром помилки згідно перевірочній матриці $H_{9,4}$:

$$s_1 = b_1 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1;$$
$$s_2 = b_2 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1;$$
$$s_3 = b_3 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1;$$
$$s_4 = b_4 \oplus a_5 = 0 \oplus 0 = 0.$$

Маємо синдром 0111. Таким чином , визначаємо, що спотворено елемент із порядковим номером $0111_2 = 7_{10}$, тобто елемент a_4. Виправляємо його за допомогою інверсії та одержуємо правильну кодову комбінацію-011001100.

Надмірність коду

R=1-k/n=1-k/(k+r)=r/n=4/9

Приклад 2.9. Закодувати кодову комбінацію 01101 двійкового простого коду двійковим кодом з багатократним повторенням, здатним виправляти однократні помилки. Виправити будь-яку однократну помилку та визначити надмірність коду.

Розв'язання. Число m повторень при виправленні однієї помилки визначається з виразу $d_{min}=m+1$. Кодова відстань при виправленні однократної помилки повинна бути не менше за d_{min}=3, тому $m=d_{min}$ -1 =3-1=2. Кодова комбінація коду з багатократним повторенням буде мати вигляд: 011010110101101.

Покажемо процес виправлення однократної помилки. Для цього припустимо, що при передачі комбінації коду з багатократним повторенням виникла однократна помилка, вектор якої 000010000000000. Тоді прийнята кодова комбінація буде мати вигляд: 011000110101101. У декодері прийнята кодова комбінація розбивається на три частини по 5 елементів у кожній і виконується порозрядне їх порівняння:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1, \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

у результаті якого виявляється помилка у п'ятому розряді. Застосувавши "голосування за більшістю", можна виправити цю-помилку. Виправлена комбінація двійкового первинного коду буде мати вигляд 01101.

Надмірність коду R=m/(m+1)=r/n=2/3

Приклад 2.10. Закодувати двійковим циклічним кодом, що виправляє однократні помилки, кодову комбінацію двійкового простого коду 1110 та показати процес виправлення будь-якої однократної помилки в одержаній комбінації циклічного коду. Визначити надмірність коду.

Розв'язання. Для того, щоб закодувати комбінацію простого коду циклічним кодом, необхідно вибрати твірний поліном. Степінь твірного поліному *P(x)* визначається кількістю перевірочних елементів *r* у комбінації циклічного коду, а величина *r* при d_{min}= 3 визначається з виразу $2^r-1 \geq n$. Тобто, при k = 4 маємо *r = 3*. Вибираємо поліном (див. додаток В) степені 3:

$$P(x) = x^3 \oplus x \oplus 1.$$

Виконуємо кодування комбінації двійкового простого коду 1110. Для цього:

- записуємо її у вигляді полінома: $Q(x) = x^3 \oplus x^2 \oplus x$;

-помножимо *Q(x)* на x^r, оскільки *r*=3, то

$$Q(x)x^3 = (x^3 \oplus x^2 \oplus x)x^3 = x^6 \oplus x^5 \oplus x^4;$$

-поділимо $Q(x)x^3$ на *P(x)* з метою визначення остачі *R(x),* коефіцієнти при степенях *x* якого є перевірочними елементами комбінації циклічного коду:

$$\begin{array}{l|l}
\oplus \begin{array}{l} x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \\ \underline{x^5 \oplus x^4 \oplus x^3} \end{array} & \begin{array}{l} x^3 \oplus x \oplus 1 \\ \hline x^3 \oplus x^2 \end{array} \\
\quad \oplus \begin{array}{l} x^5 \oplus x^3 \\ \underline{x^5 \oplus x^3 \oplus x^2} \end{array} & \\
\qquad\qquad x^2 &
\end{array}$$

Одержуємо остачу *R(x) – x^2*, якій відповідає трирозрядний вектор (*r*=3) -100; додаємо остачу *R(x)* до *Q(x)*x^3 і отримуємо кодову комбінацію двійкового циклічного коду $F(x) = Q(x)x^3 \oplus R(x) = x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^2 \rightarrow F = 1110100.$

Покажемо процес виправлення однократної помилки. Для цього припустимо, що при передачі виникла однократна помилка, поліном та вектор якої відповідно $E(x) = x^3$ та 0001000. Тоді поліном *F* (x)* прийнятої комбінації $F^*(x) = F(x) \oplus E(x) = x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x^2 \rightarrow 1111100.$

Декодер виконує перевірочне ділення *F* (x)* на той же твірний поліном *P(x),* який був використаний при кодуванні:

$$\begin{array}{l|l}
\oplus \begin{array}{l} x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x^2 \\ \underline{x^6 \oplus x^4 \oplus x^3 \qquad\qquad} \end{array} & \begin{array}{l} x^3 \oplus x \oplus 1 \\ \hline x^3 \oplus x^2 \oplus 1 \end{array} \\
\quad \oplus \begin{array}{l} x^5 \oplus x^3 \\ \underline{x^5 \oplus x^3 \oplus x^2} \end{array} & \\
\qquad \oplus \begin{array}{l} x^3 \\ \underline{x^3 \oplus x \oplus 1} \end{array} & \\
\qquad\qquad x \oplus 1 &
\end{array}$$

Отже, остача $R(x) = x \oplus 1$ або R = 011.

Оскільки остача від ділення не дорівнює нулю, робимо висновок про наявність помилки у прийнятій комбінації $F^*(x)$.

Для визначення місця помилки скористуємося методом гіпотез.

Крок 1. Висуваємо гіпотезу про помилку у молодшому розряді комбінації циклічного коду F^* (x), тобто вважаємо, що поліном та вектор помилки відповідно $E_1(x)$= 1 та E_1= 0000001. Беремо суму за модулем 2 $F^*(x) \oplus E_1(x)$:

$$F^*(x) \oplus E_1(x) = (x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x^2) \oplus 1 = x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus 1.$$

Ділимо отриману суму на $P(x)$ з метою підтвердження (у разі нульової остачі) або спростування (у разі не нульової остачі) висунутої гіпотези:

$$\begin{array}{l|l}
\oplus\, x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus 1 & x^3 \oplus x \oplus 1 \\
\quad x^6 \oplus x^4 \oplus x^3 & \overline{x^3 \oplus x^2 \oplus 1} \\
\hline
\qquad \oplus\, x^5 \oplus x^2 \oplus 1 & \\
\qquad \quad x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 & \\
\hline
\qquad \oplus\, x^3 \oplus 1 & \\
\qquad \quad x^3 \oplus x \oplus 1 & \\
\hline
\qquad \qquad x &
\end{array}$$

Остача $R(x) = x$, тобто $R(x) \neq 0$, і гіпотеза відхиляється.

Крок 2 . Висуваємо гіпотезу про помилку у другому розряді $F^*(x)$, тобто вважаємо, що $E_2(x) = x \rightarrow E_2 =$ 0000010. Беремо суму за модулем 2 $F^*(x) \oplus E_2(x)$:

$$F^*(x) \oplus E_2(x) = (x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x^2) \oplus x = x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus x.$$

Ділимо цю суму на $P(x)$ з метою підтвердження або спростування гіпотези:

$$\begin{array}{l|l}
\oplus\, x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus x & x^3 \oplus x \oplus 1 \\
\quad x^6 \oplus x^4 \oplus x^3 & \overline{x^3 \oplus x^2 \oplus 1} \\
\hline
\qquad \oplus\, x^5 \oplus x^2 \oplus x & \\
\qquad \quad x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 & \\
\hline
\qquad \oplus\, x^3 \oplus x & \\
\qquad \quad x^3 \oplus x \oplus 1 & \\
\hline
\qquad \qquad 1 &
\end{array}$$

Остача *R(x)*= 1, тобто R(x)≠0, і гіпотеза відхиляється.

Крок 3. Висуваємо гіпотезу про помилку у третьому розряді *F*(x),* тобто вважаємо, що $E_3(x) = x^2 \to E_3 = 0000100$. Беремо суму за модулем 2 $F^*(x) \oplus E_3(x)$:

$$F^*(x) \oplus E_3(x) = (x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x^2) \oplus x^2 = x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3.$$

Ділимо цю суму на *P(x)* з метою підтвердження або спростування гіпотези:

$$
\begin{array}{l|l}
\oplus\; x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 & x^3 \oplus x \oplus 1 \\
\quad\; x^6 \oplus x^4 \oplus x^3 & \overline{x^3 \oplus x^2 \oplus 1} \\
\hline
\qquad \oplus\; x^5 & \\
\qquad\quad x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 & \\
\hline
\qquad \oplus\; x^3 \oplus x^2 & \\
\qquad\quad x^3 \oplus x \oplus 1 & \\
\hline
\qquad\qquad x^2 \oplus x \oplus 1 &
\end{array}
$$

Остача $R(x) = x^2 \oplus x \oplus 1$, тобто R(.x)≠0, і гіпотеза відхиляється.

Крок 4. Висуваємо гіпотезу про помилку у четвертому розряді

F(x),* тобто вважаємо, що $E_4(x) = x^3 \to E_4 = 0001000$. Беремо суму за модулем 2 $F^*(x) \oplus E_4(x)$:

$$F^*(x) \oplus E_4(x) = (x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x^2) \oplus x^3 = x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^2.$$

Ділимо отриману суму на *P(x)* з метою підтвердження або спростування гіпотези:

$$
\begin{array}{l|l}
\oplus\; x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^2 & x^3 \oplus x \oplus 1 \\
\quad\; x^6 \oplus x^4 \oplus x^3 & \overline{x^3 \oplus x^2} \\
\hline
\qquad \oplus\; x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 & \\
\qquad\quad x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Остача *R(x)* = 0. тобто помилка дійсно була у четвертому розряді, а вихідна комбінація циклічного коду має вигляд: $F(x) = F^*(x) \oplus E(x) = x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^2 \to F = 1110100.$

Надмірність коду *R= r/ n =3/7.*

Приклад 2.11. Закодувати двійковим циклічним кодом, що виправляє однократні помилки, кодову комбінацію двійкового простого коду $Q(x) = x^5 \oplus x^2$ і виправити будь-яку однократну помилку в одержаній комбінації циклічного коду. Визначити надмірність коду.

Розв'язання. Щоб закодувати задану кодову комбінацію $Q(x) = x^5 \oplus x^2$ *(Q*= 100100) циклічним кодом, що виправляє однократні помилки *(*d_{min}*=3)* необхідно вибрати твірний поліном. Степінь твірного поліному *P(x)* визначається кількістю перевірочних елементів *r*, яку визначаємо з виразу $2^r - 1 \geq n$ (для d_{min}*=3).* При *k* = 6 одержуємо *r* =4 та вибираємо з таблиці (додаток В) поліном четвертого степеня: $P(x) = x^4 \oplus x \oplus 1$.

Виконаємо кодування первинної кодової комбінації $Q(x) = x^5 \oplus x^2$, для чого знайдемо остачу *C(x)* від ділення *Q(x)x*^{4} на *P(x),* а потім помножимо її на *P(x).* Маємо $Q(x)x^4 = (x^5 \oplus x^2)x^4 = x^9 \oplus x^6$.

Поділимо отриманий добуток на *P(x)* з метою визначення частки *C(x)* від ділення:

$$\begin{array}{rl|l} \oplus & x^9 \oplus x^6 & x^4 \oplus x \oplus 1 \\ & x^9 \oplus x^6 \oplus x^5 & x^5 \oplus x \\ \hline \oplus & x^5 & \\ & x^5 \oplus x^2 \oplus x & \\ \hline & x^2 \oplus x & \end{array}$$

Тобто *C(x)* = $x^5 \oplus x$. Помножимо *C(x)* на *P(x)* і одержимо кодову комбінацію циклічного коду:

$$F(x) = C(x)P(x) = (x^5 \oplus x)(x^4 \oplus x \oplus 1) = x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x,$$

або у двійковому вигляді *F* = 1001000110.

Виправляємо однократну помилку.

Припустимо, що при передачі по каналу зв'язку виникла однократна помилка, поліном якої *E(x)* = 1. Тоді поліном прийнятої кодової комбінації циклічного коду $F^*(x) = x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$.

Декодер виконує перевірочне ділення *F (x)* на твірний поліном *P(x):*

$$
\begin{array}{r|l}
\oplus\; x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1 & x^4 \oplus x \oplus 1 \\
\quad x^9 \oplus x^6 \oplus x^5 \qquad & \overline{x^5 \oplus x} \\
\hline
\oplus\; x^5 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1 & \\
x^5 \oplus x^2 \oplus x & \\
\hline
1 &
\end{array}
$$

Тобто *R(x)* = 1 *≠0.*Це вказує на наявність помилки у прийнятій кодовій комбінації.

Для визначення місця помилки скористуємося методом гіпотез, першим кроком якої є гіпотеза про наявність помилки у молодшому розряді прийнятої кодової комбінації *F* (x),* тобто вважаємо, що поліном та вектор помилки відповідно $E_1(x)$= 1 та E_1=0000000001. Визначаємо суму за модулем 2 $F^*(x)E_1(x)$ та ділимо що суму на *P(x)* з метою підтвердження або спростування гіпотези:

$$F^*(x)E_1(x) = (x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1) \oplus 1 = x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x$$

$$
\begin{array}{r|l}
\oplus\; x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x & x^4 \oplus x \oplus 1 \\
x^9 \oplus x^6 \oplus x^5 \quad & \overline{x^5 \oplus x} \\
\hline
\oplus\; x^5 \oplus x^2 \oplus x & \\
x^5 \oplus x^2 \oplus x & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Тобто *R(x)* = 0, що вказує на те, що помилка дійсно була у першому розряді.

Таким чином, вихідна комбінація циклічного коду:

$F(x) = x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x \rightarrow F = 1001000110.$ Надмірність коду *R* =r/n= 4/10 =2/5.

Приклад 2.12. Побудувати твірну матрицю для циклічного коду з *n*=7, *k*=4. Твірний поліном має вигляд $P(x) = x^3 \oplus x^2 \oplus 1.$

Розрізняють два матричних методи побудови циклічного коду на основі твірної матриці $С_ц$. Перший з них ґрунтується на вже відомому виразі

$$\frac{x^r Q(x)}{P(x)} = C(x) \oplus \frac{R(x)}{P(x)},$$

де $C(x)$ — частка від ділення, яка має той самий степінь, що й поліном $Q(x)$; $R(x)$ - остача від ділення, яка має степінь, не більший від r-1 [менший, ніж степінь дільника $P(x)$].

Відповідний рядок твірної матриці $G_ц$ записується у вигляді $x^rQ(x) + R(x)$. При цьому вся матриця розбивається на дві підматриці, як і в лінійному систематичному груповому коді:

$$G_ц = [E_к^T,\ C_{r,k}],$$

де $E_к^T$— транспонована одинична інформаційна підматриця; $C_{r,k}$ — перевірна підматриця з кількістю стовпців r і рядків k, що утворюється остачами від ділення $R_i(x)$.

Для побудови твірної матриці (формування її рядків) беруть не довільні комбінації $Q(x)$ двійкового простого коду, а тільки ті з них, які містять одиницю в одному розряді $Q_i(x)$, де i = 1, 2, k. Ці комбінації множать на x^r і знаходять остачу від ділення $Q(x)x^r/P(x)$, що дорівнює $R_i(x)$.

Таким чином, щоб побудувати твірну матрицю, вибираємо чотириелементні одиничні комбінації Q двійкового простого коду $Q_1(x)$ =1 (0001); $Q_2(x) = x$(0010); $Q_3(x) = x^2$(0100); $Q_4(x) = x^3$(1000). Вибрані комбінації $Q_i(x)$ множать на x^3 $(r=n-k=7-4=3)$, ділять на $P(x) = x^3+x^2+1$ і знаходять остачі:

$$\frac{1x^3}{x^3+x^2+1} \to R_1(x)=x^2+1 \to 101;$$

$$\frac{xx^3}{x^3+x^2+1} \to R_2(x)=x^2+x+1 \to 111;$$

$$\frac{x^2x^3}{x^3+x^2+1} \to R_3(x)=x+1 \to 011;$$

$$\frac{x^3x^3}{x^3+x^2+1} \to R_4(x)=x^2+x \to 110;$$

Таким чином, твірна матриця для розглядуваного прикладу матиме вигляд:

$$G_{ö(7,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1}_{E_k^T} & & & & \underbrace{1 \quad 0 \quad 1}_{C_{r,k}} & & \end{bmatrix}$$

Твірна матриця має змогу дістати k комбінацій коду. Решту 2^k-k-1 комбінацій, крім нульової, знаходять додаванням за модулем 2 рядків твірної матриці в усіх можливих сполученнях. Остання комбінація коду — нульова.

За аналогією з лінійним систематичним груповим кодом твірну матрицю $G_ц$ можна перетворити на перевірну матрицю $H_ц$, яка має наступний вигляд:

$$H_{ö(7,3)} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \end{array}$$

Перевірними елементами, які визначає дана матриця будуть:

$b_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4;$

$b_2 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3;$

$b_3 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_4.$

2.3. Контрольні питання:

1. Що таке код?
2. Що таке кодова комбінація?
3. Яка різниця між двійковими та недвійковими кодами?
4. Чим відрізняються рівномірні коди від нерівномірних?
5. Яка різниця між подільними та неподільними блоковими кодами?
6. Яка особливість побудови систематичних подільних блокових кодів?
7. Якими параметрами характеризуються коди?
8. Що таке кодова відстань і що характеризує мінімальна кодова відстань коду?
9. Які способи використовуються для подання кодів?
10. На що спрямовані основні теореми кодування для каналу зв'язку?
11. Що таке оптимальне кодування?
12. На чому ґрунтується перша універсальна методика побудови ОНК?
13. На чому ґрунтується друга універсальна методика побудови ОНК?
14. Чим різняться ОНК Шеннона — Фано та Хаффмена?
15. Що таке коректувальна здатність коду?
16. Що таке кодовий синдром і як він визначається?
17. Як визначається склад перевірних елементів у двійковому коді Хеммінга?
18. Які коди належать до циклічних?
19. Як вибирається твірний поліном у двійкових циклічних кодах?
20. Які є методи побудови двійкових циклічних кодів?
21. Як виявляються та виправляються помилки в двійкових циклічних кодах?

Література

1. Жураховський В.А. Теорія інформації та кодування. – Вища школа., 2001. – 348с
2. Игнатов В.А. Теория информации и передачи сигналов. – М.: Радио и связь., 1991. – 389с.
3. Основы информации и кодирования /Кузьмин И.В., Кедрус В.А. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища школа. Головное изд – во , 1986. – 238с.
4. Цымбал В.П. Теория информации и кодирования. – К. : Вища школа., 1992. – 456с.
5. Цымбал В.П. Задачник по теории информации и кодированию. – К. : Вища школа. Головное изд – во, 1976. – 276с.

Додаток А

Таблиця логарифмів

p	***-plog₂p***	***p***	***-plog₂p***	***p***	***-plog₂p***
0.00	-	0.35	0.5301	0.70	0.3602
0.01	0.0664	0.36	0.5306	0.71	0.3508
0.02	0.1129	0.37	0.5307	0.72	0.3412
0.03	0.1517	0.38	0.5304	0.73	0.3314
0.04	0.1857	0.39	0.5298	0.74	0.3215
0.05	0.2161	0.40	0.5288	0.75	0.3113
0.06	0.2435	0.41	0.5274	0.76	0.3009
0.07	0.2686	0.42	0.5256	0.77	0.2903
0.08	0.2915	0.43	0.5236	0.78	0.2796
0.09	0.3127	0.44	0.5211	0.79	0.2687
0.10	0.3322	0.45	0.5184	0.80	0.2575
0.11	0.3503	0.46	0.5153	0.81	0.2462
0.12	0.3671	0.47	0.5120	0.82	0.2348
0.13	0.3826	0.48	0.5083	0.83	0.2231
0.14	0.3971	0.49	0.5043	0.84	0.2113
0.15	0.4105	0.50	0.5000	0.85	0.1993
0.16	0.4230	0.51	0.4954	0.86	0.1871
0.17	0.4346	0.52	0.4906	0.87	0.1748
0.18	0.4453	0.53	0.4854	0.88	0.1623
0.19	0.4552	0.54	0.4800	0.89	0.1496
0.20	0.4644	0.55	0.4744	0.90	0.1368
0.21	0.4728	0.56	0.4684	0.91	0.1238
0.22	0.4806	0.57	0.4623	0.92	0.1107
0.23	0.4877	0.58	0.4558	0.93	0.0974
0.24	0.4941	0.59	0.4491	0.94	0.0839
0.25	0.5000	0.60	0.4422	0.95	0.0703
0.26	0.5053	0.61	0.4350	0.96	0.0565
0.27	0.5100	0.62	0.4276	0.97	0.0426
0.28	0.5142	0.63	0.4199	0.98	0.0286
0.29	0.5179	0.64	0.4121	0.99	0.0140
0.30	0.5211	0.65	0.4040		
0.31	0.5238	0.66	0.3957		
0.32	0.5260	0.67	0.3871		
0.33	0.5278	0.68	0.3784		
0.34	0.5292	0.69	0.3694		

Додаток Б

Таблиця Б.1

Співвідношення між n, k, r для коду Хеммінга

n	*k*	*r*	*n*	*k*	*r*
1	0	1	9	5	4
2	0	2	10	6	4
3	1	2	11	7	4
4	1	3	12	8	4
5	2	3	13	9	4
6	3	3	14	10	4
7	4	3	15	11	4
8	4	4	16	11	5

Таблиця Б.2

Загальна таблиця перевірок

№ перевірки	Перевірочні позиції	№ контрольного символу
1	1, 3, 5, 7, 9, 11…	1
2	2, 3, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 27, 30, 31…	2
3	4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31..	3
4	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46…	4

Зауваження: n – довжина кодового слова; *k* - число інформаційних символів; *r*- число коректуючих символів; *s* – число символів, які виправляються.

Додаток В

Твірні поліноми циклічних кодів

Кількість перевірочних елементів *r*	Твірний поліном *P(x)*	Двійковий запис полінома
3	$x^3 \oplus x \oplus 1 \oplus$	1011
3	$x^3 \oplus x^2 \oplus 1$	1101
4	$x^4 \oplus x \oplus 1$	10011
4	$x^4 \oplus x^3 \oplus 1$	11001
5	$x^5 \oplus x^2 \oplus 1$	100101
5	$x^5 \oplus x^3 \oplus 1$	101001
5	$x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$	101111
5	$x^5 \oplus x^4 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$	110111
6	$x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus 1$	1110001
8	$x^8 \oplus x^7 \oplus x^6 \oplus x^5 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$	111100111
9	$x^9 \oplus x^5 \oplus x^3 \oplus 1$	1000101001

Додаток Г

Титульний лист ОДЗ

Міністерство освіти та науки України

Центральноукраїнський національний технічний університет

Кафедра «АВП»

ОБОВ'ЯЗКОВЕ ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

з курсу «ТЕОРІЯ ІНФОРМАЦІЇ»

Варіант № ____

Розробив: студент гр. *шифр групи*

прізвище, ім'я, по-батькові студента

Перевірив: *вчений ступінь та звання, посада*

прізвище, ім'я, по-батькові викладача

Кропивницький 2018