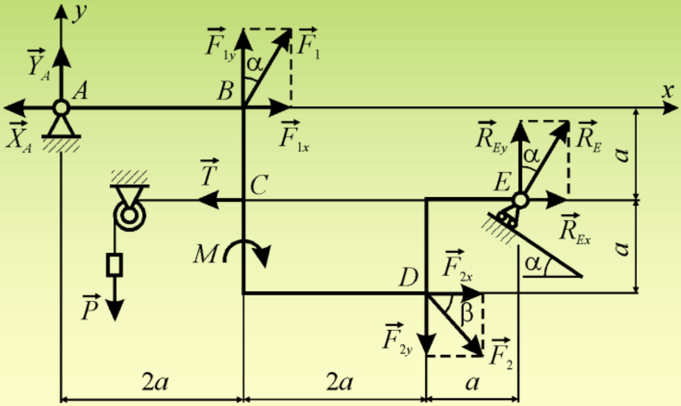
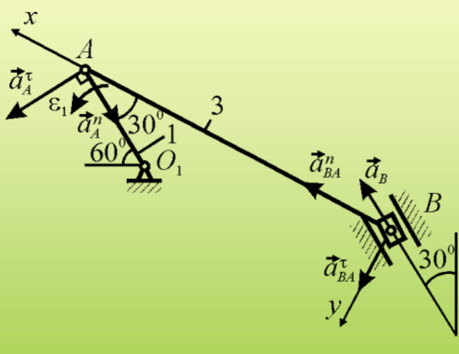
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ



Г. Б. Філімоніхін, В. В. Пирогов,
Л. С. Олійніченко

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА.
КІНЕМАТИКА



Кропивницький – 2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра деталей машин та прикладної механіки

Г. Б. Філімоніхін, В. В. Пирогов
Л. С. Олійніченко

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА.
КІНЕМАТИКА

Рекомендовано кафедрою деталей машин та прикладної механіки Центральноукраїнського національного технічного університету для студентів технічних та електротехнічних спеціальностей.
Протокол № 10 від 14.05.2024 р.

Кропивницький – 2024

Філімоніхін Г. Б., Пирогов В. В., Олійніченко Л. С. Технічна механіка. Кінематика [електроний ресурс]. – Кропивницький: ЦНТУ, 2024. – 31 с.: іл.

Табл. 4. Іл. 40. Бібліогр.: 6 назв.

Укладач д.т.н., проф. **Філімоніхін Геннадій Борисович**;
к.ф.-м.н., доц. **Пирогов Володимир Васильович**;
к.т.н., ст. викл. **Олійніченко Любов Сергіївна**.

Рецензент **д.т.н., проф. Мацуй Анатолій Миколайович,** професор кафедри автоматизації виробничих процесів Центральноукраїнського національного технічного університету.

ЗМІСТ

Передмова

Технічна (теоретична) механіка – загальнонаукова дисципліна, яка займає важливе місце в вузівській програмі фундаментальної підготовки спеціалістів. Її розділи “Статика”, ”Кінематика” і ”Динаміка” – відносно самостійні частини курсу, які використовується для вивчення багатьох предметів.

Необхідною умовою успішного оволодіння курсом є виконання індивідуальних домашніх завдань. Задачі треба розв’язувати на протязі семестру відразу після розгляду відповідної теми на лекціях, чи практичних заняттях.

Поточний контроль відбувається шляхом розв’язання типових задач курсу на контрольних і самостійних роботах, які проводяться після закінчення відповідних розділів. У посібнику сформульовані типові багатоваріантні задачі та приведені приклади їх розв’язання.

Посібник відповідає діючій робочій програмі з теоретичної механіки, призначений для студентів електротехнічних спеціальностей і може бути використаний як в навчальному процесі, так і в інженерній практиці.

Дані для розрахунків брати до кожної задачі згідно номеру варіанту, який видає викладач. Наприклад:

37

Останній цифрі 7 відповідає номер рисунка, а передостанній 5 – номер рядку в таблиці вихідних розрахункових даних.

Зауваження:

- роботи, виконані не за варіантом, або несамостійно не зараховуються;
- допускається видача інших варіантів лектором, або викладачем, що проводить практичні заняття – на першій лекції, або на першому практичному занятті.

Задача К1 повинна підтверджуватись розрахунками в середовищі Mathcad.

Задача К1 – кінематика точки

1.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Точка *M* рухається у площині *Oxy* (рис. К1.0 – К1.9, табл. К1; траєкторія точки на рисунках показана умовно). Закон руху точки заданий рівняннями: $x=f_1(t)$ та $y=f_2(t)$, де x та y виражені в сантиметрах, t – в секундах. Залежність $x=f_1(t)$ вказана на рис. К1.0 – К1.9, а залежність $y=f_2(t)$ – в табл. К1 (для рис. 0–2 – в стовпці 2, для рис. 3–6 – в стовпці 3, рис. 7–9 – в стовпці 4).

Знайти рівняння траєкторії руху точки. Для моменту часу t_1=1 с визначити:

1) положення точки на траєкторії;

2) швидкість точки та зобразити її графічно;

3) пришвидшення точки координатним способом та зобразити його графічно;

4) пришвидшення точки натуральним способом та зобразити його графічно;

5) радіус кривини траєкторії та зобразити його графічно.

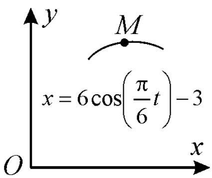


Рис. К1.0

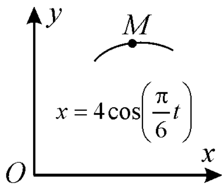


Рис. К1.1

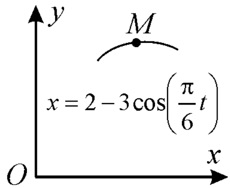


Рис. К1.2

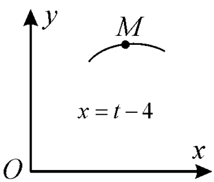


Рис. К1.3

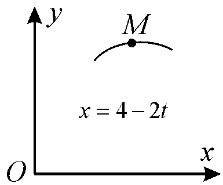


Рис. К1.4

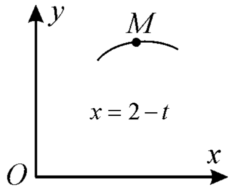


Рис. К1.5

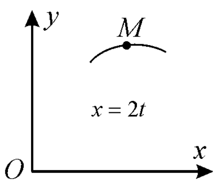


Рис. К1.6

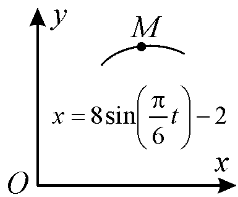


Рис. К1.7

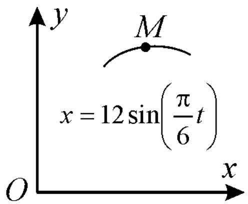


Рис. К1.8

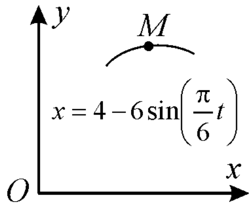


Рис. К1.9

Таблиця К1

Номер умови	$y=f_2(t)$		
	Рис. 0–2	Рис. 3–6	Рис. 7–9
1	2	3	4
0	$12\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$2t^2+2$	$4\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
1	$-6\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$8\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$6\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
2	$-3\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$(2+t)^2$	$4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
3	$9\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$2t^3$	$10\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
4	$3\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$2\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$-4\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
5	$10\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$2-3t^2$	$12\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
6	$6\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$-3\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
7	$-2\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$(t+1)^3$	$-8\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
8	$9\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$2-t^3$	$9\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
9	$-8\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$-6\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$

1.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача К1 відноситься до кінематики точки. При розв'язанні задачі скористатися координатним та натуральним способом визначення швидкості та пришвидшення точки. В задачі всі шукані величини необхідно визначати тільки для моменту часу t_1=1 с. В деяких варіантах задачі К1 при визначенні рівняння траєкторії руху точки або при подальших розрахунках (для їх спрощення) слід врахувати відомі із тригонометрії формули:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha .$$

1.3. Приклад розв'язання задачі К1

Умова задачі. Рівняння руху точки *M* мають вигляд:

$$x = 10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 5, \quad y = 20\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 10 ,$$

де *x, y* – в сантиметрах, *t* – в секундах.

Знайти рівняння траєкторії руху точки. Для моменту часу t_1=1 с визначити:

1) положення точки на траєкторії;

2) швидкість точки та зобразити її графічно;

3) пришвидшення точки координатним способом та зобразити його графічно;

4) пришвидшення точки натуральним способом та зобразити його графічно;

5) радіус кривини траєкторії та зобразити його графічно.

Розв'язок

1. Знаходимо рівняння траєкторії руху точки та будуємо графік траєкторії її руху. Визначаємо та показуємо положення точки на траєкторії в момент часу t_1.

Закон руху точки у координатній формі має вигляд:

$$x = 10\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 5, \quad y = 20\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 10 .$$

Одночасно це рівняння її траєкторії руху у параметричному вигляді, де параметром є час $t \in [0,+\infty)$.

Для визначення рівняння траєкторії руху точки у явному вигляді, виключимо з рівнянь руху час *t*. Скористаємося тригонометричною тотожністю

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \text{ де } \alpha = \pi t / 6 . \qquad (1)$$

З рівнянь руху знаходимо вирази відповідних функцій:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \sin\alpha = \frac{x-5}{10}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \cos\alpha = \frac{y+10}{20}. \qquad (2)$$

Підставляючи (2) в (1), отримаємо рівняння траєкторії руху точки:

$$\left(\frac{x-5}{10}\right)^2 + \left(\frac{y+10}{20}\right)^2 = 1. \qquad (3)$$

Рівняння (3) – це рівняння еліпса з півосями вздовж осі x – 10 *см*, вздовж осі y – 20 *см*. Центр еліпса має координати $C(5; -10)$. Використовуючи рівняння траєкторії (3) виконуємо її побудову (рис. К1а). При побудові обираємо такий масштаб відстаней, щоб на схемі було все добре видно.

Знайдемо координати точки на траєкторії. Для цього, підставимо в рівняння руху час t_1, матимемо:

$$x = 10\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right) + 5 = 10\cdot 0{,}5 + 5 = 10 \ \text{см};$$

$$y = 20\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right) - 10 = 20\cdot 0{,}866 - 10 = 7{,}32 \ \text{см}.$$

Отже, маємо точку M з координатами $M(10; 7{,}32)$.

Перевірка 1: підставимо в рівняння (3) координату точки x=10 см та визначимо з нього координату y:

$$\left(\frac{10-5}{10}\right)^2 + \left(\frac{y+10}{20}\right)^2 = 1,$$

звідки отримуємо, що y=7,32 *см*.

2. Визначаємо швидкість точки (координатний спосіб) та зображаємо її графічно.

Швидкість точки знайдемо по її проекціям на координатні осі. Проекції швидкості мають вигляд:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 5\right] = \frac{5\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right);$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[20\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 10\right] = -\frac{10\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right). \qquad (4)$$

Підставляючи час t_1 у вирази (4), матимемо:

$$v_{1x} = \frac{5\cdot 3{,}14}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right) = 5{,}236\cdot 0{,}866 = 4{,}53 \ \text{см/с};$$

$$v_{1y} = -\frac{10\cdot 3{,}14}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right) = (-10{,}47)\cdot 0{,}5 = -5{,}236 \ \text{см/с}.$$

Модуль швидкості

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{(4{,}53)^2 + (-5{,}236)^2} = 6{,}92 \;\; см/с. \qquad (5)$$

Обираємо масштаб для швидкостей $\mu_v = 2:1$, і зображаємо їх графічно (рис. К1а), причому так, щоб на схемі було все добре видно. Проекції швидкості v_{1x} та v_{1y} відкладаємо у обраному масштабі відповідно вздовж осі x та y, враховуючи при цьому їх напрямок з вказаними осями. Якщо проекції швидкості v_{1x} та v_{1y} мають знак „+", то їх направляємо в додатній бік осей, якщо знак „-" – в протилежний бік.

Перевірка 2: вектор швидкості $\vec{v}$ спрямований по дотичній τ до траєкторії точки.

3. Визначаємо пришвидшення точки (координатний спосіб) та зображаємо його графічно.

Пришвидшення точки знайдемо по його проекціям на координатні осі. Проекції пришвидшення мають вигляд:

$$a_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{5\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right] = -\frac{5\pi^2}{18}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right);$$

$$a_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-\frac{10\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right] = -\frac{5\pi^2}{9}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right). \qquad (6)$$

Підставляючи час t_1 у вирази (6), матимемо:

$$a_{1x} = -\frac{5\cdot(3{,}14)^2}{18}\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right) = (-2{,}74)\cdot 0{,}5 = -1{,}37 \;\; см/с^2;$$

$$a_{1y} = -\frac{5\cdot(3{,}14)^2}{9}\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right) = (-5{,}48)\cdot 0{,}866 = -4{,}75 \;\; см/с^2.$$

Модуль пришвидшення

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \sqrt{(-1{,}37)^2 + (-4{,}75)^2} = 4{,}94 \;\; см/с^2. \qquad (7)$$

Обираємо масштаб для пришвидшень $\mu_a = 4:1$, і зображаємо їх графічно (рис. К1а), причому так, щоб на схемі було все добре видно. Проекції пришвидшень a_{1x} та a_{1y} відкладаємо у обраному масштабі відповідно вздовж осі x та y, враховуючи при цьому їх напрямок з вказаними осями. Якщо проекції пришвидшень a_{1x} та a_{1y} мають знак „+", то їх направляємо в додатній бік осей, якщо знак „-" – в протилежний бік.

Перевірка 3: вектор пришвидшення $\vec{a}_1$ знаходиться з того ж боку, що і крива відносно дотичної τ.

4. Визначаємо пришвидшення точки (натуральний спосіб) та зображаємо їх графічно.

Дотичне пришвидшення знайдемо за формулою:

$$a_\tau = \vec{\tau} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{v}}{v_\tau} \cdot \vec{a} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v_\tau}. \tag{8}$$

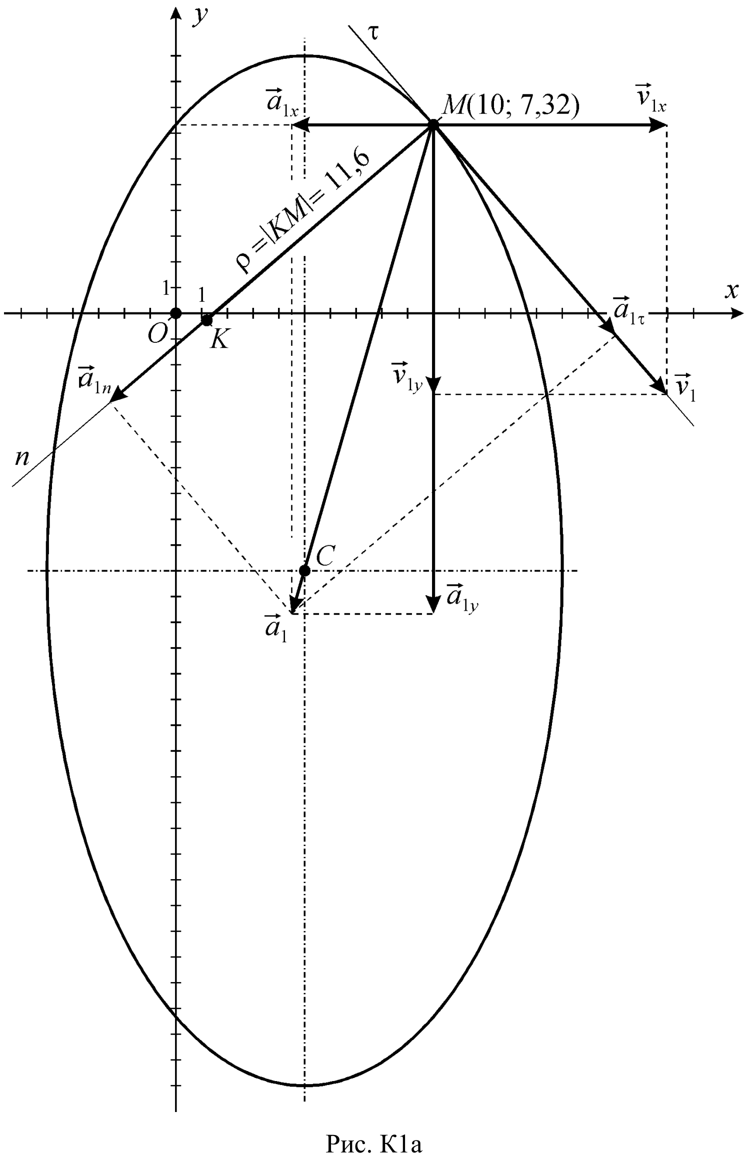


Рис. К1а

Враховуючи, що $v = v_1 = v_\tau$, матимемо при t_1:

$$a_{1\tau} = [4{,}53 \cdot (-1{,}37) + (-5{,}236) \cdot (-4{,}75)] / 6{,}92 = 2{,}7 \ \textit{см/с}^2.$$

Так як дотичне пришвидшення додатне, то його спрямовуємо в той же бік, що і вектор швидкості (якщо $a_{1\tau}<0$, то в протилежний бік).

Нормальне пришвидшення знайдемо з формули:

$$a_{1n} = \sqrt{a_1^2 - a_{1\tau}^2} = \sqrt{(4{,}94)^2 - (2{,}7)^2} = 4{,}13 \ \textit{см/с}^2.$$

Нормальне пришвидшення розташовується з того ж боку, що і крива відносно дотичної τ, на перпендикулярі (нормалі n) опущеному на дотичну в точці M. Обираємо масштаб для пришвидшень $\mu_a = 4:1$, і зображаємо їх графічно (рис. К1а), причому так, щоб на схемі було все добре видно.

Перевірка 4: пришвидшення точки M, яке є діагоналлю прямокутника побудованого на сторонах a_{1x} та a_{1y}, співпадає з діагоналлю прямокутника побудованого на сторонах $a_{1\tau}$ та a_{1n}.

5. Визначаємо радіус кривини траєкторії та зображаємо його графічно. При t_1:

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{a_{1n}} = \frac{(6{,}92)^2}{4{,}13} = 11{,}6 \ \textit{см}.$$

У масштабі відстаней, у напрямку нормального пришвидшення, вздовж нормалі n, відкладаємо радіус кривини.

Відповідь: v_1=6,92 *см/с*, a_1=4,94 *см/с*^{2}, $a_{1\tau}$=2,7 *см/с*^{2}, a_{1n}=4,13 *см/с*^{2}, ρ_1=11,6 *см*.

1.4. Документ MathCad для розв’язання задачі К1

Документ

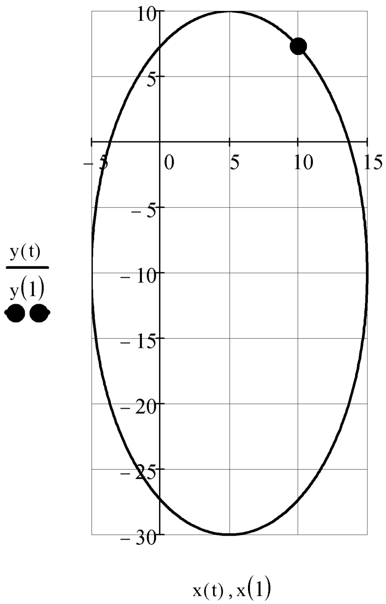
Mathcad для роз'вязання
задачі К1 - з кінематики точки

1. Будуємо траєкторію руху точки і показуємо на ней положення точки у момент часу t=1 *с*.

Закон руху точки у координатному вигляді - це рівняння її траєкторії у параметричному вигляді (час t - параметр):

$$x(t) := 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) + 5 \qquad y(t) := 20 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) - 10$$

Координати точки M при t=1 $с$: $\quad x(1) = 10 \qquad y(1) = 7.321$



На графіку зображено траєкторію руху точки і положення точки на траєкторії у момент часу t=1 с.

2. Проекції швидкості точки на осі x, y в довільний момент часу t:

$$v_x(t) := \frac{d}{dt}x(t) \qquad v_x(t) \rightarrow \frac{5 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)}{3}$$

$$v_y(t) := \frac{d}{dt}y(t) \qquad v_y(t) \to -\frac{10\cdot\pi\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{6}\right)}{3}$$

Проекції швидкості точки на осі *x*, *y* в момент часу *t*=1 *с*:

$$v_x(1) = 4.534 \qquad v_y(1) = -5.236$$

Модуль швидкості точки в момент часу *t*=1 *с*:

$$v := \sqrt{v_x(1)^2 + v_y(1)^2} \qquad v = 6.927$$

3. Проекції пришвидшення точки на осі *x*, *y* в довільний момент часу *t*:

$$a_x(t) := \frac{d}{dt}v_x(t) \qquad a_x(t) \to -\frac{5\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{6}\right)}{18}$$

$$a_y(t) := \frac{d}{dt}v_y(t) \qquad a_y(t) \to -\frac{5\cdot\pi^2\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{6}\right)}{9}$$

Проекції пришвидшення точки на осі *x*, *y* в момент часу *t*=1 *с*:

$$a_x(1) = -1.371 \qquad a_y(1) = -4.749$$

Модуль пришвидшення точки в момент часу *t*=1 *с*:

$$a := \sqrt{a_x(1)^2 + a_y(1)^2} \qquad a = 4.942$$

4. Дотичне пришвидшення в момент часу *t*=1 *с*:

$$a_\tau := \frac{a_x(1)\cdot v_x(1) + a_y(1)\cdot v_y(1)}{v} \qquad a_\tau = 2.692$$

Нормальне пришвидшення в момент часу *t*=1 *с*:

$$a_n := \sqrt{a^2 - a_\tau^{\,2}} \qquad a_n = 4.145$$

5. Радіус кривини траєкторії в момент часу *t*=1 *с*:

$$\rho := \frac{v^2}{a_n} \qquad \rho = 11.575$$

Задача К2 – плоскопаралельний рух абсолютно твердого тіла

2.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Плоский механізм складається із ланок 1, 2, 3, 4 і повзуна *B* або *E* (рис. К2.0 – К2.7), або із ланок 1, 2, 3 і повзунів *B* і *E* (рис. К2.8, К2.9), з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами O_1, O_2 шарнірами; точка *D* знаходиться посередині ланки *AB*. Довжини ланок рівні відповідно l_1=0,4 м, l_2=1,2 м, l_3=1,4 м, l_4=0,6 м. Положення механізму визначається кутами α, β, γ, φ, θ. Значення цих кутів та інших заданих величин вказані в табл. К2а (для рис. К2.0 – К2.4), або в табл. К2б (для рис. К2.5 – К2.9); при цьому в табл. К2а ω_1 і ω_4 – величини сталі.

Дугові стрілки на рисунках показують те, як повинні відкладатися відповідні кути при побудові креслення механізму (за ходом чи проти ходу стрілки годинника). Побудову креслення слід розпочинати із ланки, напрямок якої визначається кутом α; повзун з направляючими (рис. К2.10а) для наочності показати так, як показано на рис. К2.10б.

Задані кутову швидкість і кутове пришвидшення вважати направленими проти годинникової стрілки, а задані швидкість v_B і пришвидшення a_B – від точки *B* до *b* (на рис. К2.5 – К2.9).

***Знайти*:** величини вказані в стовпчику "Знайти".

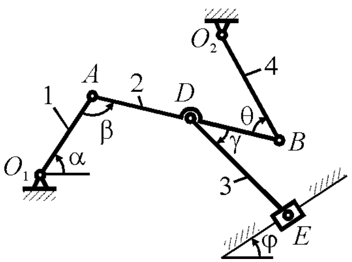


Рис. К2.0

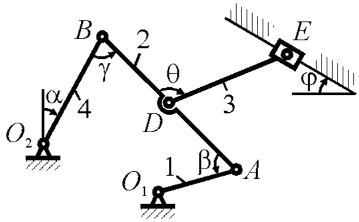


Рис. К2.1

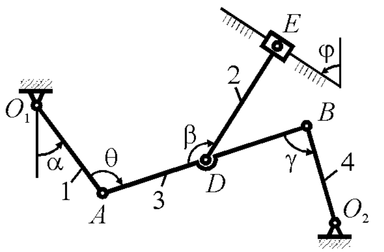


Рис. К2.2

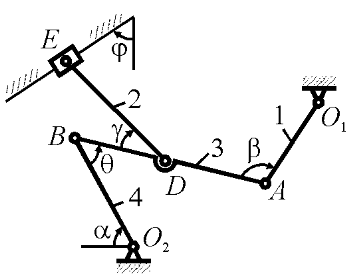


Рис. К2.3

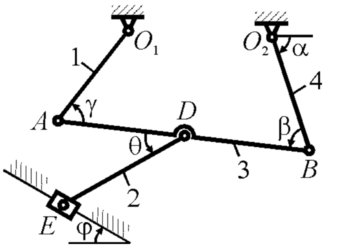


Рис. К2.4

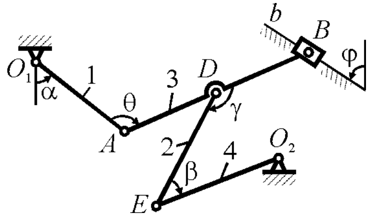


Рис. К2.5

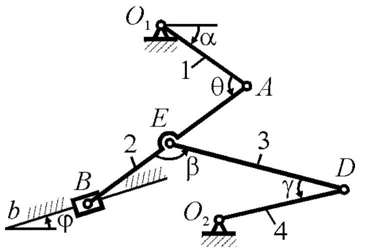


Рис. К2.6

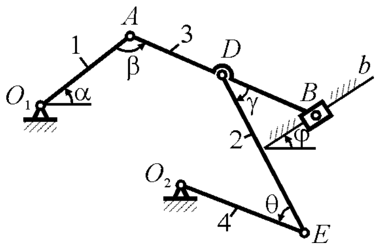


Рис. К2.7

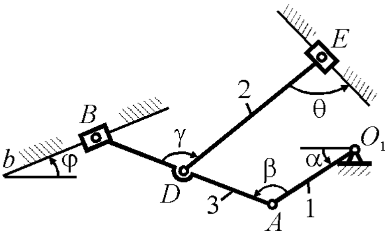


Рис. К2.8

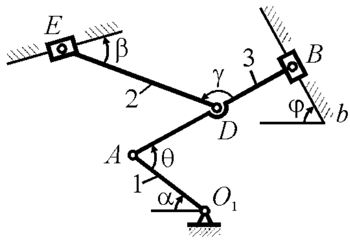


Рис. К2.9

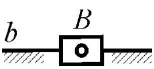


Рис. К2.10а

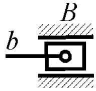


Рис. К2.10б

2.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі

Задача К2 – на дослідження плоскопаралельного руху твердого тіла. При її розв’язанні для визначення швидкостей точок механізму і кутових швидкостей його ланок необхідно скористатися теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла і поняттям про миттєвий центр швидкостей, застосовуючи дану теорему **до кожної ланки механізму окремо.** Побудову схеми швидкостей розпочинаємо з ланки механізму для якої задана швидкість (наприклад, або кутова швидкість однієї з ланок, або лінійна швидкість повзуна).

При визначенні пришвидшення точок механізму необхідно використовувати векторну рівність $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$, де A – точка, пришвидшення $\vec{a}_A$ якої або задано, або безпосередньо визначається по умові задачі (якщо точка A рухається по дузі кола, то $\vec{a}_A = \vec{a}^{\tau}_A + \vec{a}^{n}_A$); B – точка, пришвидшення $\vec{a}_B$ якої потрібно визначити (у випадку, коли точка B теж рухається по дузі кола, необхідно дивитися примітку в кінці розглянутого нижче прикладу К2).

Таблиця К2а (до рис. К2.0 – К2.4)

Номер умови	Кути, град					Дано		Знайти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/c	ω_4, 1/c	v, точок	ω, ланки	a, точки	ε, ланки
0	0	60	30	0	120	6	--	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
1	90	120	150	0	30	--	4	*A, E*	*AB*	*A*	
2	30	60	30	0	120	5	--	*B, E*	*AB*	*B*	
3	60	150	150	90	30	--	5	*A, E*	*DE*	*A*	
4	30	30	60	0	150	4	--	*D, E*	*AB*	*B*	
5	90	120	120	90	60	--	6	*A, E*	*AB*	*A*	
6	90	150	120	90	30	3	--	*B, E*	*DE*	*B*	
7	0	60	60	0	120	--	2	*A, E*	*DE*	*A*	
8	60	150	120	90	30	2	--	*D, E*	*AB*	*B*	
9	30	120	150	0	60	--	8	*A, E*	*DE*	*A*	

Таблиця К2б (до рис. К2.5 – К2.9)

Номер умови	Кути, град					Дано				Знайти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/c	ε_1, 1/c^2	v_B, м/с	a_B, м/с^2	v, точок	ω, ланки	a, точки	ε, ланки
0	120	30	30	90	150	2	4	--	--	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
1	0	60	90	0	120	--	--	4	6	*A, E*	*AB*	*A*	
2	60	150	30	90	30	3	5	--	--	*B, E*	*AB*	*B*	
3	0	150	30	0	60	--	--	6	8	*A, E*	*DE*	*A*	
4	30	120	120	0	60	4	6	--	--	*D, E*	*AB*	*B*	
5	90	120	90	90	60	--	--	8	3	*A, E*	*AB*	*A*	
6	0	150	90	0	120	5	8	--	--	*B, E*	*DE*	*B*	
7	30	120	30	0	60	--	--	2	5	*A, E*	*DE*	*A*	
8	90	120	120	90	150	6	10	--	--	*D, E*	*AB*	*B*	
9	60	60	60	90	30	--	--	5	4	*A, E*	*DE*	*A*	

2.3. Приклад розв'язання задачі К2

Умова задачі. Плоский механізм (рис. К2а) складається із ланок 1, 2, 3, 4 і повзуна *B*, з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами O_1 і O_2 шарнірами.

Дано: $\alpha=60^0$, $\beta=150^0$, $\gamma=90^0$, $\varphi=30^0$, $\theta=30^0$, $AD=DB$, $l_1=0{,}4$ м, $l_2=1{,}2$ м, $l_3=1{,}4$ м, $l_4=0{,}6$ м, $\omega_1=2$ рад/с, $\varepsilon_1=7$ рад/с^2.

Знайти: швидкості v_B, v_E і ω_2; пришвидшення ε_3 і a_B.

Розв'язок

1. Будуємо схему для швидкостей (рис. К2б). Будуємо положення механізму у відповідності із заданими кутами розпочинаючи з ланки, напрямок якої визначається кутом α.

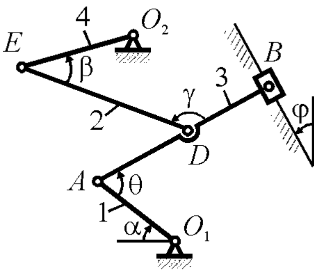


Рис. К2а

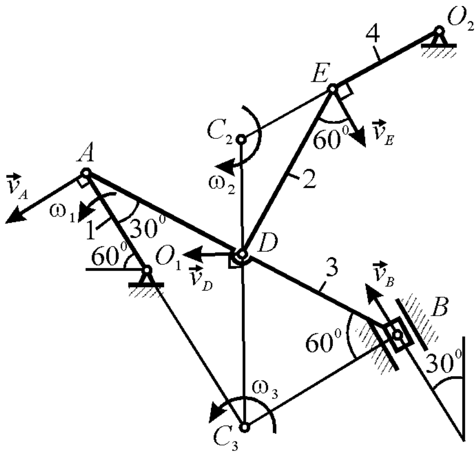


Рис. К2б

Побудову схеми швидкостей розпочнемо з першої ланки механізма (для якої задана кутова швидкість ω_1). Швидкість $\vec{v}_A$ направлена в сторону повороту і так, що $\vec{v}_A \perp O_1A$. Розглядаючи сусідню ланку 3, знайдемо спочатку напрямок швидкості точки *B* (вектор швидкості $\vec{v}_B$ паралельний напрявляючим по яким рухається повзун. Для цього будуємо миттєвий центр швидкостей (МЦШ) ланки *AB* – це точка C_3, що лежить на перетині перпендикулярів до швидкості $\vec{v}_A$ і напрямній вздовж якої рухається повзун, проведених із точок *A* і *B*. Враховуючи напрямок швидкості $\vec{v}_A$, кутова швидкість обертання ланки 3 ω_3, буде направлена проти ходу стрілки годинника. Вектори $\vec{v}_B$ і $\vec{v}_D$ направлені в сторону повороту ланки *AB*, причому $\vec{v}_D \perp C_3D$.

Розглянемо ланку 2. Так як точка E належить одночасно ланці 4, що обертається навколо O_2, то $\vec{v}_E \perp O_2E$. Тоді, провівши перпендикуляри з точок E і D до швидкостей $\vec{v}_E$ і $\vec{v}_D$, побудуємо МЦШ C_2 ланки 2. По напрямку вектора $\vec{v}_D$ визначаємо напрямок повороту ланки 2 навколо центра C_2. Вектор $\vec{v}_E$ направлений в сторону поворота цієї ланки.

2. Знаходимо швидкості. З рис. К2б отримуємо, що:

$$v_A = \omega_1 l_1 = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8 \ \text{м/с}.$$

Для знаходження швидкості точки B використаємо теорему про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що з'єднує ці точки (пряма AB), тоді

$$v_A \cos 60^0 = v_B \cos 30^0 ,$$

звідки

$$v_B = \frac{v_A \cos 60^0}{\cos 30^0} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}5}{0{,}866} = 0{,}462 \ \text{м/с}.$$

Величину v_D знайдемо з пропорції:

$$\frac{v_D}{C_3D} = \frac{v_B}{C_3B} . \tag{1}$$

Знайдемо C_3D і C_3B. Розглядаючи ΔAC_3B знайдемо, що

$$C_3B = AB \sin 30^0 = 0{,}5AB = BD = 0{,}7 \ \text{м},$$

$$C_3A = AB \cos 30^0 = 1{,}4 \cdot 0{,}866 \approx 1{,}21 \ \text{м}.$$

Тоді ΔBC_3D є рівностороннім трикутником і C_3B=C_3D. З рівності (1) отримуємо, що $v_D = v_B = 0{,}462$ м/с.

Знайдемо кутову швидкість ω_3:

$$\omega_3 = \frac{v_A}{C_3A} = \frac{0{,}8}{1{,}21} \approx 0{,}66 \ \text{рад/с}.$$

Величину v_E знайдемо з пропорції:

$$\frac{v_E}{C_2E} = \frac{v_D}{C_2D} . \tag{2}$$

Знайдемо C_2D і C_2E. З рис. К2б видно, що $\angle C_2ED$=$\angle C_2DE$=30^0 і

$$C_2E = C_2D = 0{,}5 l_2 \ / \cos 30^0 \approx 0{,}693 \ \text{м}.$$

З рівності (2) отримуємо, що $v_E = v_D = 0{,}462$ м/с.

З рис. К2б знайдемо, що

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2D} = \frac{0{,}462}{0{,}693} \approx 0{,}667 \ \text{рад/с}.$$

3. Будуємо схему для пришвидшень (рис. К2в). Так як ланки 2 і 4 не використовуються при проведені розрахунків, то їх на рис. К2в не показано.

Пришвидшення точки *B* ланки 3, яка здійснює плоскопаралельний рух, має вигляд:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}. \qquad (3)$$

Враховуючи, що точка *B* одночасно належить повзуну, який рухається поступально, вектор $\vec{a}_B$ паралельний направляючим повзуна. Тоді рівність (3) можна подати так:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n} + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}. \qquad (4)$$

Вектор $\vec{a}_A^{n}$ направлений вздовж AO_1, $\vec{a}_A^{\tau}$ - перпендикулярно AO_1. Зображаємо на кресленні вектори $\vec{a}_{BA}^{n}$ (вздовж *BA* від *B* до *A*) і $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ (в будь-яку сторону перпендикулярно *BA*).

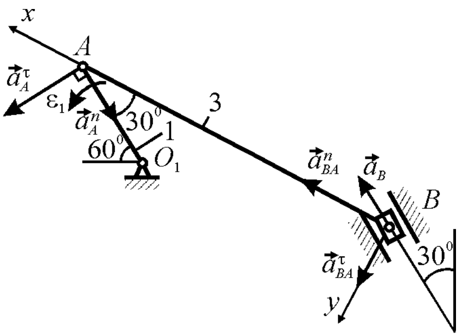


Рис. К2в

4. Визначаємо пришвидшення точки *B*. Знайдемо пришвидшення $\vec{a}_A^{\tau}$, $\vec{a}_A^{n}$, $\vec{a}_{BA}^{n}$:

$$a_A^{\tau} = \varepsilon_1 l_1 = 7 \cdot 0{,}4 = 2{,}8 \ \text{м/с}^2; \quad a_A^{n} = \omega_1^2 l_1 = 2^2 \cdot 0{,}4 = 1{,}6 \ \text{м/с}^2;$$

$$a_{BA}^{n} = \omega_3^2 l_3 = 0{,}66^2 \cdot 1{,}4 \approx 0{,}61 \ \text{м/с}^2.$$

Для знаходження невідомих пришвидшень $\vec{a}_B$, $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ скористаємося методом проекцій. Для цього введемо координатні осі *x* та *y* і спроектуємо на них векторне рівняння (4) (рис. К2в), матимемо:

$$x{:}\ a_B \cos 30^0 = a_A^{\tau} \cos 60^0 - a_A^{n} \cos 30^0 + a_{BA}^{n};$$

$$y{:}\ -a_B \sin 30^0 = a_A^{\tau} \sin 60^0 + a_A^{n} \sin 30^0 + a_{BA}^{\tau}. \qquad (5)$$

Розв’язуємо отриману систему рівнянь (5) відносно невідомих $\vec{a}_B$, $\vec{a}_{BA}^{\tau}$. З першого рівняння системи (5), знайдемо:

$$a_B = \frac{a_A^\tau \cos 60^0 - a_A^n \cos 30^0 + a_{BA}^n}{\cos 30^0} = \frac{2{,}8 \cdot 0{,}5 - 1{,}6 \cdot 0{,}866 + 0{,}61}{0{,}866} \approx 0{,}72 \ \text{м/с}^2.$$

Так як $a_B > 0$, то вектор $\vec{a}_B$ направлений так як показано на рис. К2в. Розв'яжемо друге рівняння системи (5), отримаємо:

$$a_{BA}^\tau = -a_B \sin 30^0 - a_A^\tau \sin 60^0 - a_A^n \sin 30^0 =$$
$$= -0{,}72 \cdot 0{,}5 - 2{,}8 \cdot 0{,}866 - 1{,}6 \cdot 0{,}5 \approx -3{,}585 \ \text{м/с}^2.$$

Знак "–" вказує, що напрямок $\vec{a}_{BA}^\tau$ протилежний показаному на рис. К3в. З рівності $a_{BA}^\tau = \varepsilon_3 l_3$ отримаємо:

$$\varepsilon_3 = \frac{\left|a_{BA}^\tau\right|}{l_3} = \frac{3{,}585}{1{,}4} \approx 2{,}56 \ \text{рад/с}^2.$$

Відповідь: $v_B = 0{,}462$ м/с; $v_E = 0{,}462$ м/с; $\omega_2 = 0{,}667$ рад/с; $a_B = 0{,}72$ *м/с*^{2}; $\varepsilon_3 = 2{,}56$ рад/с^2.

Примітка. Якщо точка *B*, пришвидшення якої визначається, рухається не прямолінійно (наприклад, як на рис. К2.0 – К2.4, де точка *B* рухається по колу радіуса O_2B), то напрямок $\vec{a}_B$ наперед невідомий. В цьому випадку $\vec{a}_B$ також слід подати двома складовими ($\vec{a}_B = \vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n$) і вихідне рівняння (8) набуде вигляду:

$$\vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n. \qquad (6)$$

При цьому вектор $\vec{a}_B^n$ буде направлений вздовж BO_2, а вектор $\vec{a}_B^\tau$ - перпендикулярно BO_2 в будь-яку сторону. Числові значення a_A^τ, a_A^n і a_{BA}^n визначаються так, як в розглядуваному прикладі (причому по умові задачі може бути, що $a_A^\tau = 0$ або $a_A^n = 0$, якщо точка *A* рухається прямолінійно).

Значення a_B^n також обчислюється по формулі: $a_B^n = v_B^2 / \rho = v_B^2 / l$, де l – радіус кола O_2B. Після цього в рівності (6) залишаються невідомими тільки значення a_B^τ і a_{BA}^τ і вони, як і в розглядуваному прикладі, знаходяться проектуванням обох частин рівності (6) на дві осі. Знайшовши a_B^τ, можемо обчислити шукане пришвидшення

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2}.$$

Величина a_{BA}^τ використовується для знаходження ε_{AB}.

Задача К3 – складний рух матеріальної точки

3.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Прямокутна пластина (рис. К3.0 – К3.4) або кругла пластина радіуса R=60 см (рис. К3.5 – К3.9) обертається навколо нерухомої осі по закону $\varphi=f_1(t)$, заданному в табл. К3. Додатній напрямок відліку кута φ показано на рисунках дуговою стрілкою. На рис. К3.0 – К3.2, К3.5, К3.6 вісь обертання перпендикулярна площині пластини і проходить через точку O (пластинка обертається в своїй площині); на рис. К3.3, К3.4, К3.7 – К3.9 вісь обертання OO_1 лежить в площині пластини (пластина обертається у просторі).

По пластині вздовж прямої BD (рис. К3.0 – К3.4) або по колу радіуса R (рис. К3.5 – К3.9) рухається точка M; закон її відносного руху, тобто залежність $s=f_2(t)$ (s виражено в сантиметрах, t – в секундах), заданий в таблиці К3 окремо для рис. К3.0 – К3.4 і для рис. К3.5 – К3.9. На рисунках точка M показана в положені, при якому s>0 (при s<0 точка M знаходиться по іншу сторону від точки A).

***Знайти*:** абсолютну швидкість та абсолютне пришвидшення точки M в момент часу t_1=1 с.

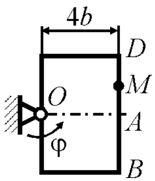


Рис. К3.0

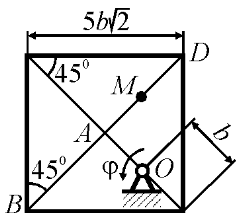


Рис. К3.1

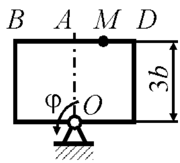


Рис. К3.2

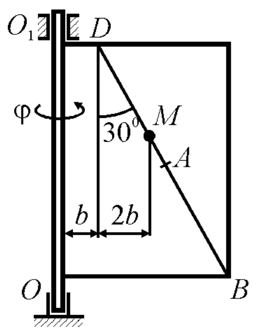


Рис. К3.3

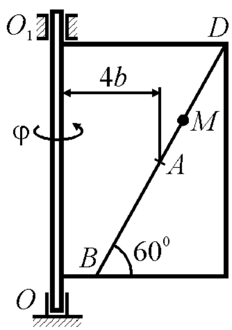


Рис. К3.4

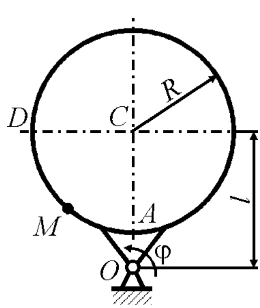


Рис. К3.5

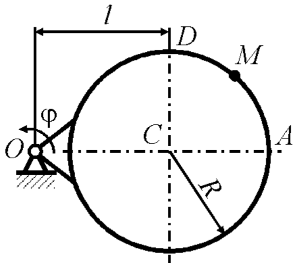


Рис. К3.6

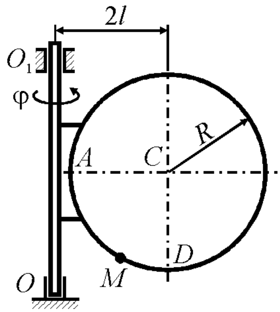


Рис. К3.7

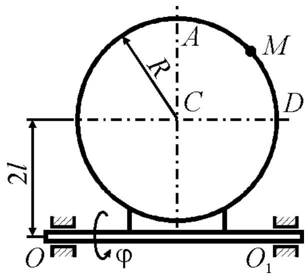


Рис. К3.8

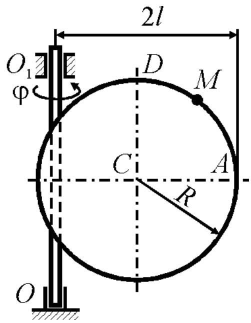


Рис. К3.9

Таблиця К3

Номер умови	$\varphi=f_1(t)$, рад	Рис. К3.0 – К3.4		Рис. К3.5 – К3.9	
		b, см	$s = AM = f_2(t)$, см	l, см	$s = \overset{\smile}{AM} = f_2(t)$, см
0	$4(t^2-t)$	12	$50(3t-t^2)-64$	R	$\pi R(4t^2-2t^3)/3$
1	$3t^2-8t$	16	$40(3t^2-t^4)-32$	$4R/3$	$\pi R(2t^2-t^3)/2$
2	$6t^3-12t^2$	10	$80(t^2-t)+40$	R	$\pi R(2t^2-1)/3$
3	t^2-2t^3	16	$60(t^4-3t^2)+56$	R	$\pi R(3t-t^2)/6$
4	$10t^2-5t^3$	8	$80(2t^2-t^3)-48$	R	$\pi R(t^3-2t)/3$
5	$2(t^2-t)$	20	$60(t^3-2t^2)$	R	$\pi R(t^3-2t)/6$
6	$5t-4t^2$	12	$40(t^2-3t)+32$	$3R/4$	$\pi R(t^3-2t^2)/2$
7	$15t-3t^3$	8	$60(t-t^3)+24$	R	$\pi R(t-5t^2)/6$
8	$2t^3-11t$	10	$50(t^3-t)-30$	R	$\pi R(3t^2-t)/3$
9	$6t^2-3t^3$	20	$40(t-2t^3)-40$	$4R/3$	$\pi R(t-2t^2)/2$

3.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі

Задача К3 – на складний рух точки. Для її розв’язання скористаємося теоремами про складання швидкостей і про складання пришвидшень. Перед тим, як виконувати всі розрахунки, слід по умові задачі визначити, де знаходиться точка *M* на пластині в момент часу t_1=1 с, і показати точку саме в цьому положенні (а не в довільному, яке показане на рисунках до задачі).

У випадках, що відносяться до рис. К3.5 – К3.9, при розв’язанні задачі не підставляти числового значення *R*, поки не буде визначене положення точки *M* в момент часу t_1=1 с і кут між радіусами *CM* і *CA* в цей момент.

3.3. Приклад розв’язання задачі К3а (складний рух точки у просторі)

Умова задачі. Пластинка *KDABE* обертається у просторі навколо нерухомої осі OO_1, яка лежить у площині пластинки, за законом $\varphi=f_1(t)$ (додатній напрямок відліку кута φ показано на рис. К3а дуговою стрілкою). Відносно пластинки по колу радіуса *R* рухається точка *M* за законом $s=f_2(t)$ (додатній напрямок відліку *s* – від *A* до *M*).

Дано: *R*=0,7 *м*; $\varphi=2t^2-5t$; $s = \overset{\cup}{AM} = \dfrac{\pi R}{3}\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$ (φ – в радіанах, *s* – в метрах, *t* – в секундах).

Знайти: абсолютну швидкість та абсолютне пришвидшення точки *M* в момент часу t_1=1 с.

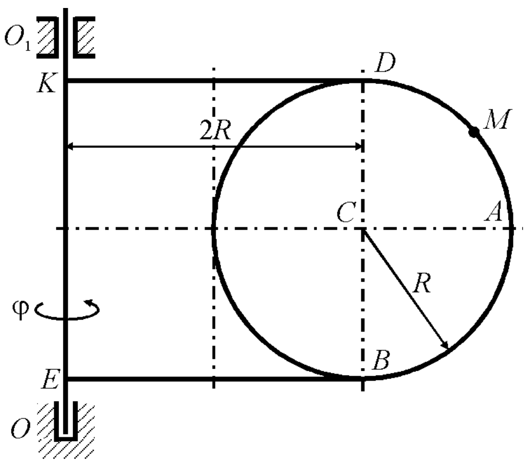


Рис. К3а

Розв'язок

1. Визначимо швидкості при відносному і переносному русі точки *M* (рис. К3б).

Будемо розглядати рух точки *M*, як складний. Тоді рух точки по колу будемо називати відносним рухом (пластинка при цьому умовно нерухома), а рух точки разом з пластинкою – переносним рухом (при цьому точка і пластинка обертаються, як одне жорстке ціле).

Спочатку визначаємо положення точки *M* на траєкторії. При t_1 матимемо:

$$s = \frac{\pi R}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi R}{6} > 0 \ \text{м}.$$

Кут $\alpha=\angle ACM=s/R=\pi/6$ (рис. К3б). Так як $s>0$, то відлік *AM* співпадає із вказаним на рисунку. Покажемо положення точки *M* на траєкторії при $\alpha=\pi/6$ (рис. К3б).

Швидкість точки *M* при її відносному русі має вигляд:

$$v_r = \dot{s} = \left[\frac{\pi R}{3}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right]' = -\frac{\pi^2 R}{9}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При t_1, матимемо

$$v_r = -\frac{(3{,}14)^2 \cdot 0{,}7}{9}\cdot 0{,}866 = -0{,}664 \ \text{м/с}.$$

Знак "–" вказує на те, що вектор $\vec{v}_r$ направлений в протилежну сторону зміни дугової координати s по дотичній до траєкторії точки при її відносному русі.

Швидкість точки *M* при її переносному русі має вигляд:

$$v_e = \omega r,$$

де

$$\omega = \dot{\varphi} = \left(2t^2 - 5t\right)' = 4t - 5; \quad r = NM = 2R + R\cos\alpha.$$

При t_1

$$\omega = 4\cdot 1 - 5 = -1 \ \text{рад/с}; \quad r = 2\cdot 0{,}7 + 0{,}7\cdot 0{,}866 = 2 \ \text{м};$$

$$v_e = |\omega|\cdot r = |-1|\cdot 2 = 2 \ \text{м/с}.$$

Знак "–" вказує на те, що напрямок кутової швидкості ω буде протилежний напрямку додатнього відліку кута повороту пластинки φ. Вектор $\vec{v}_e$ перпендикулярний площині пластинки і направлений в сторону кутової швидкості.

2. Знайдемо абсолютну швидкість точки *M*. Абсолютна швидкість точки *M* має вигляд:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r .$$

Так як вектори $\vec{v}_e$ і $\vec{v}_r$ взаємно перпендикулярні, то тоді

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{2^2 + (-0{,}664)^2} = 2{,}1 \ \textit{м/с}.$$

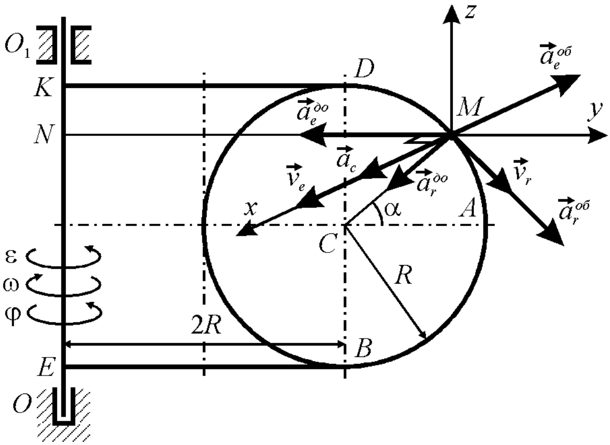


Рис. К3б

3. Визначимо пришвидшення переносного і відносного руху точки M та пришвидшення Коріоліса. Так як у відносному русі точка M здійснює рух по колу (рис. К3б), то її пришвидшення при відносному русі має вигляд:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{об} + \vec{a}_r^{до},$$

де

$$a_r^{об} = \dot{v}_r = \left[-\frac{\pi^2 R}{9}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right]' = -\frac{\pi^3 R}{27}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right), \ a_r^{до} = \frac{v_r^2}{R} = \frac{\pi^4 R}{81}\sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При t_1, матимемо

$$a_r^{об} = -\frac{(3{,}14)^3 \cdot 0{,}7}{27} \cdot 0{,}5 = -0{,}4 \ \textit{м/с}^2; \ a_r^{до} = \frac{(3{,}14)^4 \cdot 0{,}7}{81} \cdot 0{,}866^2 = 0{,}63 \ \textit{м/с}^2.$$

Знак “–” вказує на те, що вектор $\vec{a}_r^{об}$ направлений в протилежну сторону зміни дугової координати s по дотичній до траєкторії точки при її відносному русі; вектор $\vec{a}_r^{до}$ направлений до центра C кола.

Пришвидшення точки M при її переносному русі має вигляд:

$$\vec{a}_e = a_e^{до} + a_e^{об},$$

де

$$a_e^{до} = \omega^2 r; \ \ a_e^{об} = \varepsilon r; \ \ \varepsilon = \dot{\omega} = (4t - 5)' = 4 \ \textit{рад/с}.$$

Напрямок кутового пришвидшення ε співпадає з напрямком додатнього відліку кута φ. При t_1

$$a_e^{до} = (-1)^2 \cdot 2 = 2 \ м/с^2; \quad a_e^{об} = 4 \cdot 2 = 8 \ м/с^2.$$

Вектор пришвидшення $\vec{a}_e^{\,до}$ направлений по прямій MN до осі обертання, а вектор $\vec{a}_e^{\,об}$ – перпендикулярно площині пластинки і в сторону кутового пришвидшення.

Знайдемо пришвидшення Коріоліса. Так як кут між вектором $\vec{v}_r$ і віссю обертання (вектором $\vec{\omega}$) рівний 30^0, то пришвидшення Коріоліса в момент часу t_1 дорівнюватиме:

$$a_c = 2 \cdot |v_r| \cdot |\omega| \cdot \sin 30^0 = 2 \cdot |-0{,}664| \cdot |-1| \cdot 0{,}5 = 0{,}664 \ м/с^2.$$

Напрямок вектора $\vec{a}_c$ знайдемо використовуючи правило Жуковського. Для цього вектор $\vec{v}_r$ спроектуємо на площину перпендикулярну осі обертання (проекція буде направлена протилежно вектору $\vec{a}_e^{\,до}$) і потім цю проекцію повертаємо на кут 90^0 в сторону ω, тобто за ходом стрілки годинника; в результаті отримаємо напрямок вектора пришвидшення Коріоліса. Вектор $\vec{a}_c$ направлений так само, як і вектор $\vec{v}_e$.

4. Знайдемо абсолютне пришвидшення точки *M* при її складному русі. За теоремою Коріоліса абсолютне пришвидшення точки *M* має вигляд:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^{\,об} + \vec{a}_e^{\,до} + \vec{a}_r^{\,об} + \vec{a}_r^{\,до} + \vec{a}_c .$$

Для визначення абсолютного пришвидшення проведемо координатні осі *Mxyz* і обчислимо його проекції на ці осі:

$$a_{ax} = a_c - a_e^{об} = 0{,}664 - 8 = -7{,}336 \ м/с^2;$$

$$a_{ay} = \left|a_r^{об}\right| \sin 30^0 - a_r^{до} \cos 30^0 - a_e^{до} = |-0{,}4| \cdot 0{,}5 - 0{,}63 \cdot 0{,}866 - 2 = -2{,}34 \ м/с^2;$$

$$a_{az} = -\left|a_r^{об}\right| \cdot \cos 30^0 - a_r^{до} = -|-0{,}4| \cdot 0{,}866 - 0{,}63 = -0{,}976 \ м/с^2.$$

Остаточно

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{(-7{,}336)^2 + (-2{,}34)^2 + (-0{,}976)^2} = 7{,}76 \ м/с^2.$$

Відповідь: $v_a = 2{,}1$ *м/с*, $a_a = 7{,}76$ *м/с*^{2}.

3.4. Приклад розв'язання задачі К3б (складний рух точки у площині)

Умова задачі. Пластинка *ODAB* обертається навколо осі, що проходить через точку *O* перпендикулярно площині пластинки, за законом $\varphi=f_1(t)$ (додатній напрямок відліку кута φ показано на рис. К3в дуговою стрілкою). Відносно пластинки по колу радіуса *R* рухається точка *M* за законом $s=f_2(t)$ (додатній напрямок відліку *s* – від *A* до *M*).

Дано: R=0,5 *м*; $\varphi=t^2-0{,}5t^3$; $s=\overset{\cup}{AM}=\pi R\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$ (φ – в радіанах, *s* – в метрах, *t* – в секундах).

Знайти: абсолютну швидкість та абсолютне пришвидшення точки *M* в момент часу t_1=2 с.

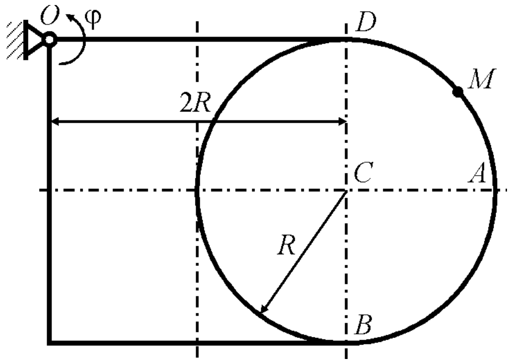


Рис. К3в

Розв'язок

1. Визначимо швидкості при відносному і переносному русі точки *M* (рис. К3г).

Будемо розглядати рух точки *M*, як складний. Тоді рух точки по колу будемо називати відносним рухом (пластинка при цьому умовно нерухома), а рух точки разом з пластинкою – переносним рухом (при цьому точка і пластинка обертаються, як одне жорстке ціле).

Спочатку визначаємо положення точки *M* на траєкторії. При t_1 матимемо:

$$s=\pi R\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\pi R}{2}<0\ \text{м}.$$

Кут $\alpha=\angle ACM=s/R=-\pi/2$ (рис. К3г). Так як $s<0$, то точка *M* буде розташована по інший бік від точки *A* (рис. К3г). Покажемо положення точки *M* на траєкторії при $\alpha=-\pi/2$ (рис. К3г).

Швидкість точки *M* при її відносному русі має вигляд:

$$v_r = \dot{s} = \left[\pi R\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right]' = -\frac{\pi^2 R}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При t_1, матимемо

$$v_r = -\frac{(3{,}14)^2 \cdot 0{,}5}{3}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx -1{,}42 \ \textit{м/с}.$$

Знак "–" вказує на те, що вектор $\vec{v}_r$ направлений в протилежну сторону зміни дугової координати *s* по дотичній до траєкторії точки при її відносному русі.

Швидкість точки М при її переносному русі має вигляд:

$$v_e = \omega r\,,$$

де

$$\omega = \dot{\varphi} = (t^2 - 0{,}5t^3)' = 2t - 1{,}5t^2; \quad r = OM = 2R\sqrt{2}\,.$$

При t_1

$$\omega = 2\cdot 2 - 1{,}5\cdot 2^2 = -2 \ \textit{рад/с}; \quad r = 2\cdot 0{,}5\sqrt{2} \approx 1{,}414 \ \textit{м};$$

$$v_e = |\omega|\cdot r = |-2|\cdot 1{,}414 \approx 2{,}83 \ \textit{м/с}.$$

Знак "–" вказує на те, що напрямок кутової швидкості ω буде протилежний напрямку додатнього відліку кута повороту пластинки φ. Вектор $\vec{v}_e$ направлений в сторону кутової швидкості і так, що $\vec{v}_e \perp OM_1$.

2. Знайдемо абсолютну швидкість точки *M*. Абсолютна швидкість точки *M* має вигляд:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r\,.$$

Для визначення абсолютної швидкості $\vec{v}_a$ проведемо координатні осі *Mxy* і обчислимо його проекції на ці осі:

$$v_{ax} = -|v_e|\cos 45^0 = -2{,}83\cdot 0{,}707 = -2 \ \textit{м/с};$$

$$v_{ay} = |v_r| + |v_e|\cos 45^0 = 1{,}42 + 2{,}83\cdot 0{,}707 = 3{,}42 \ \textit{м/с}^2.$$

Остаточно

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3{,}42^2} = 3{,}96 \ \textit{м/с}^2.$$

3. Визначимо пришвидшення переносного і відносного руху точки *M* та пришвидшення Коріоліса.

Так як у відносному русі точка *M* здійснює рух по колу (рис. К3г), то її пришвидшення у відносному русі має вигляд:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,об} + \vec{a}_r^{\,до}\,,$$

де

$$a_r^{об} = \dot{v}_r = \left[-\frac{\pi^2 R}{3} \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \right]' = -\frac{\pi^3 R}{9} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right), \; a_r^{до} = \frac{v_r^2}{R} = \frac{\pi^4 R}{9} \sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При t_1, матимемо

$$a_r^{об} = -\frac{(3{,}14)^3 \cdot 0{,}5}{9} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx 0{,}86 \;\; м/с^2;$$

$$a_r^{до} = \frac{(3{,}14)^4 \cdot 0{,}5}{9} \cdot 0{,}866^2 \approx 4{,}06 \;\; м/с^2.$$

Знак "+" вказує на те, що вектор $\vec{a}_r^{об}$ направлений в сторону зміни дугової координати s по дотичній до траєкторії точки при її відносному русі; вектор $\vec{a}_r^{до}$ направлений до центра C кола.

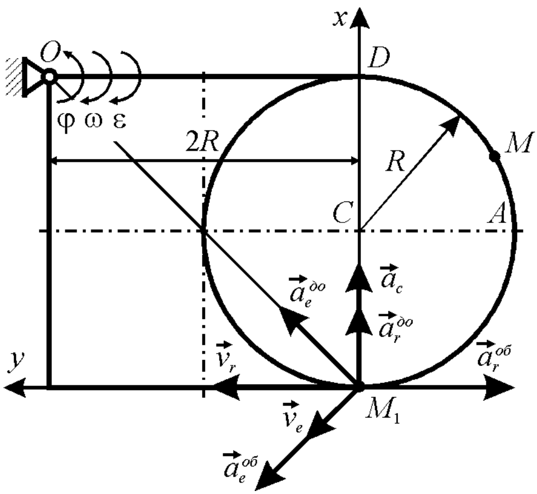


Рис. К3г

Пришвидшення точки M при її переносному русі має вигляд:

$$\vec{a}_e = a_e^{до} + a_e^{об},$$

де

$$a_e^{до} = \omega^2 r\,; \;\; a_e^{об} = |\varepsilon| r\,; \;\; \varepsilon = \dot{\omega} = \left(2t - 1{,}5t^2\right)' = 2 - 3t\,.$$

При t_1

$$\varepsilon = 2 - 3 \cdot 2 = -4 \;\; рад/с^2; \;\; a_e^{до} = (-2)^2 \cdot 1{,}414 = 5{,}656 \;\; м/с^2;$$

$$a_e^{об} = 4 \cdot 1{,}414 = 5{,}656 \;\; м/с^2.$$

Знак "–" вказує на те, що напрямок кутового пришвидшення ε буде протилежний напрямку додатнього відліку кута повороту пластинки φ.

Вектор пришвидшення $\vec{a}_e^{\partial o}$ направлений по прямій OM_1 до центра обертання – точки O, а вектор $\vec{a}_e^{o\delta}$ направлений в сторону кутового пришвидшення і так, що $\vec{a}_e^{o\delta} \perp OM_1$.

Знайдемо пришвидшення Коріоліса. Так як кут між вектором $\vec{v}_r$ і віссю обертання (вектором $\vec{\omega}$) рівний 90^0, то пришвидшення Коріоліса в момент часу t_1 дорівнюватиме:

$$a_c = 2 \cdot |v_r| \cdot |\omega| \cdot \sin 90^0 = 2 \cdot |-1{,}42| \cdot |-2| = 5{,}68 \ \text{м/с}^2.$$

Напрямок вектора $\vec{a}_c$ знайдемо використовуючи правило Жуковського-го. Так як вектор $\vec{v}_r$ знаходиться в площині перпендикулярній осі обертання, то повернемо його на кут 90^0 в сторону ω, тобто за ходом стрілки годинника; в результаті отримаємо напрямок вектора пришвидшення Коріоліса. Вектор $\vec{a}_c$ направлений так само, як і вектор $\vec{a}_r^{\partial o}$.

4. Знайдемо абсолютне пришвидшення точки M при її складному русі. За теоремою Коріоліса абсолютне пришвидшення точки M має вигляд:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^{o\delta} + \vec{a}_e^{\partial o} + \vec{a}_r^{o\delta} + \vec{a}_r^{\partial o} + \vec{a}_c .$$

Для визначення абсолютного пришвидшення $\vec{a}_a$ проведемо кординатні осі $Mxyz$ і визначимо його проекції на ці осі:

$$a_{ax} = a_r^{\partial o} + a_c + a_e^{\partial o} \cos 45^0 - a_e^{o\delta} \cos 45^0 =$$

$$= 4{,}06 + 5{,}68 + 5{,}656 \cdot 0{,}707 - 5{,}656 \cdot 0{,}707 = 9{,}74 \ \text{м/с}^2;$$

$$a_{ay} = a_e^{\partial o} \cos 45^0 + a_e^{o\delta} \cos 45^0 - a_r^{o\delta} =$$

$$= 5{,}656 \cdot 0{,}707 + 5{,}656 \cdot 0{,}707 - 0{,}86 \approx 7{,}14 \ \text{м/с}^2.$$

Остаточно

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{9{,}74^2 + 7{,}14^2} \approx 12{,}08 \ \text{м/с}^2.$$

Відповідь: $v_a = 3{,}96$ м/с, $a_a = 12{,}08$ м/с^2.

Література

1. *Кільчевський М. О.* **Курс теоретичної механіки**. – Т. 1–2. – К., 1955 – 1957.
2. *Павловський М.А.* **Теоретична механіка: Підручник** / М.А. Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
3. *Філімоніхін Г.Б.* **Теоретична механіка. Статика. Навчальний посібник.** – Кіровоград.: КНТУ, 2010. – 115 с.
4. *Філімоніхін Г.Б.* **Теоретична механіка. Кінематика. Навчальний посібник.** – Кіровоград.: КНТУ, 2011. – 68 с.
5. *Філімоніхін Г.Б.* **Теоретична механіка. Динаміка. Навчальний посібник.** – Кіровоград.: ПП "КОД", 2000. – 111 с.
6. *Г.Б.Філімоніхін* Методичні вказівки і завдання до курсової роботи з теоретичної механіки (розділ "Динаміка"). – К: "ВІПОЛ", 1993. – 31 с., іл.

Геннадій Борисович Філімоніхін
Володимир Васильович Пирогов
Любов Сергіївна Олійніченко

Технічна механіка.
Кінематика

Комп’ютерний набір
кафедра ДМ та ПМ
т. (0522) 390-547

Підп. до друку 2024 Формат 60х84 1/16 (А5). Папір друк №3. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. Ум.фарбо-відб. Облік.-вид.арк. . Тираж 100 прим.
Зам.№

Центральноукраїнський національний технічний університет
25030, м. Кропивницький. пр. Університетський, 8