

принципа математичної індукції, отримуємо із рівняння (5) наступну формулу:

$$m + 2(\cos^2 \varphi_1 \cdot \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_2 \cdot \cos^2 \varphi_3 + \dots + \cos^2 \varphi_{m-1} \cdot \cos^2 \varphi_m + \sin^2 \varphi_1 \cdot \sin^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2 \cdot \sin^2 \varphi_3 + \dots + \sin^2 \varphi_{m-1} \cdot \sin^2 \varphi_m) = k^2 \cdot m^2; \quad (6)$$

Після перетворень формула (6) перепишеться у вигляді:

$$m + 2(m - 1 - 2 \cdot \cos^2 \varphi_1 - 2 \cdot \cos^2 \varphi_2 - \dots - 2 \cdot \cos^2 \varphi_n) = k^2 \cdot m^2; \quad (7)$$

звідкіля маємо наступний вираз для визначення шуканої величини k :

$$k = \sqrt{\frac{m + 2(m - 1 - 2 \cdot \cos^2 \varphi_1 - 2 \cdot \cos^2 \varphi_2 - \dots - 2 \cdot \cos^2 \varphi_n)}{m^2}}; \quad (8)$$

В формулі (8) кути φ_i можуть приймати лише дискретні значення з певним кроком. Також прийнято припущення, що коефіцієнт k може також приймати лише конкретні дискретні значення з кроком i . При подальших розрахунках прийнято $i = 0,1$, тобто може приймати якесь одне значення із ряду: $0; 0,1; 0,2; \dots; 0,9$.

На підставі формули (8) було розроблено алгоритм (рис.4) і складено програму для ЕОМ, яка за вихідними даними, що вводить користувач на початку роботи, рахує вірогідності $P_1; P_2; \dots; P_{10}$ того, що коефіцієнт k прийматиме значення, відповідно: $0; 0,1; 0,2; \dots; 0,9$, тобто, що величина погрешності буде мати значення, відповідно, $0,2 P_{\max}; 0,2 P_{\max}; 0,3 P_{\max}; \dots; 0,9 P_{\max}$.

Література:

1. Боровков А. А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1976.
2. Колмогоров А. Н. и др. Введение в теорию вероятностей. - 2-е изд. перераб. и доп. - М. Наука. 1982.
3. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. - 2-е изд. перераб. и доп. - М. Наука. 1982.

Реологічні особливості на поверхні адгезійно сумісних металів при пружній деформації системи

Пористі та насичені металоволокнові композиційні матеріали за своїми підвищеними фізико-механічними та експлуатаційними характеристиками займають важливе значення в сучасному машинобудуванні. Але стримуючим фактором розширення областей і об'ємів їх використання є висока собівартість вихідного матеріалу - волокон, які отримують в основному з тонкого холоднотянутого дроту.

В роботі [1] запропоновано отримувати волокна методом пресування гранул, способом, який не має аналогів у світовій практиці.

Процес отримання металевих волокон за допомогою направленої деформації (пресування) гранул характеризується інтенсивними зсувними деформаціями та утворенням на контактній поверхні вторинної структури, що за своїми фізико-механічними властивостями різко відрізняється від металу гранул.

Різні пружні характеристики металу волокон та вторинної структури, неоднаковість характеристик їх пластичності та деформаційного зміцнення, адгезійна взаємодія між ними - все це визиває складну реологічну картину, що безперервно змінюється, перетворення рівновісної частинки в довговісну.

Розглянемо стан лінії розриву швидкостей в контактній області. Перетворюючи аналітичні висновки Є.М.Макушка [2], приймаємо, що частинка А, яку деформують, рухається відносно частинки В вогнищі деформації зі швидкістю V_1 та, перетинаючи лінію поділу частинок, переходить на поверхню частинки В та змінює її швидкість на V_2 (рис.1).

Поскільки відповідно до умови суцільності нормальна компонента швидкості повинна бути неперервною $V_{n1} = V_{n2} = V_n$, то розрив зазнає лише дотична складова V_t . При переході через лінію розриву її значення змінюється скачком $V_t^2 = V_{t2} - V_{t1}$. Відповідний годограф швидкостей наведено на рис.2.

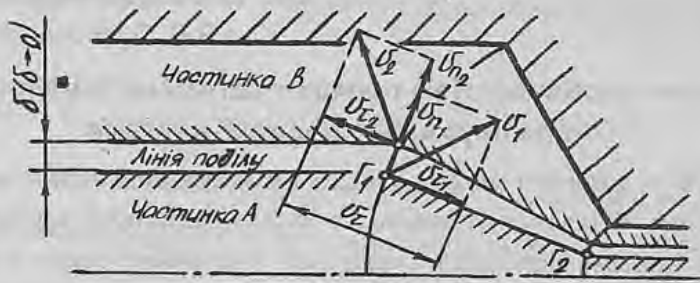


Рис. 1. Схема межі розриву швидкостей при пересуванні дискретних тіл (частинки А та В). Γ - інтенсивність зсувних деформацій.

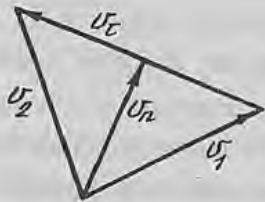


Рис. 2. Годограф швидкостей по лінії розриву.

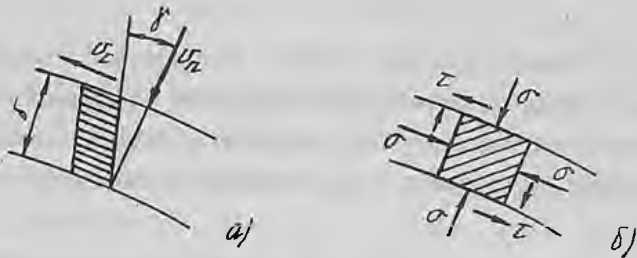


Рис. 3. Схема деформованого (а) і напруженого (б) станів лінії поділу частинок, які деформують.

Розрив дотичної складової швидкості визиває в нескінченно тонкому шарі ($V \rightarrow 0$) області поділу стан зсуву (рис.3,а) з інтенсивністю деформації зсуву $\Gamma = \text{tg} \gamma V_\tau / V_n$, тоді як швидкість деформації зсуву η та інтенсивність швидкостей деформації зсуву H

$$\eta = H = \lim_{V \rightarrow 0} (V_\tau / V) = \infty.$$

Дотичне напруження уздовж лінії розриву (рис.3,б) $\tau = k$, де k - опір контактного шару пластичному зсуву; нормальне напруження при плоскому де-

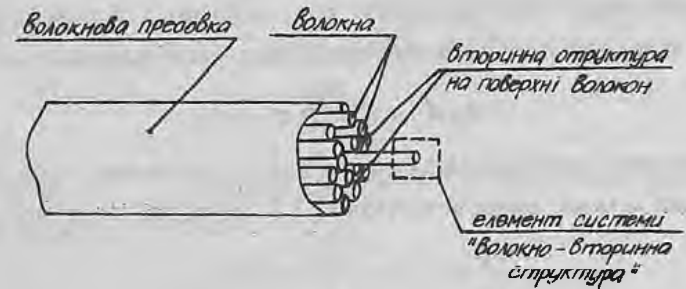


Рис. 4. Поперечний переріз волокнової пресовки. формованому стані дорівнює гідростатичному тиску p в елементі шару $\sigma_n = \sigma_\tau = p$.

Для вивчення реології системи "метал волокна - вторинна структура" при спільній деформації гранул, рис.4, виберемо із загальної маси нитку волокна, що оточена по поверхні в вигляді оболонки вторичною структурою, рис.5.

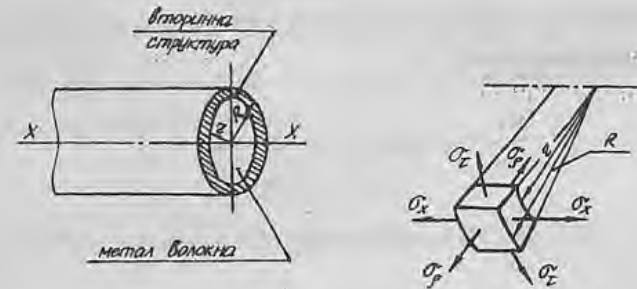


Рис. 5. Схема моделі вичленої системи.

За граничні умови приймаємо:

- 1) шар вторинної структури володіє більш високим модулем пружності, меншим коефіцієнтом Пуассона і більш високим напруженням текучості, ніж метал волокна;
- 2) дотичні та радіальні напруження на межі системи рівнозначні;
- 3) внаслідок виключної складності пружньо-пластичних деформацій, що відбуваються в системі, весь процес розглядається по стадіям: перша стадія - пружні деформації системи, друга - пластична деформація волокон, третя - пластична деформація вторинної структури.

На першій стадії стан рівноваги сил вибраного елемента (див. рис.5) або зв'язок між радіальними та тангенційними напруженнями має вигляд:

$$\sigma_r d + r d \sigma_r = \sigma_t d r; \quad (1)$$

В зоні пружних деформацій залежність між головними напруженнями та деформаціями можна, використовуючи [3], записати в вигляді:

$$\begin{cases} E e_x = \sigma_r - \mu (\sigma_x + \sigma_t); \\ E e_r = \sigma_r - \mu (\sigma_x + \sigma_t); \\ E e_t = \sigma_r - \mu (\sigma_x + \sigma_r), \end{cases} \quad (2)$$

де E - модуль пружності;

e - пружна деформація;

x, r, t , - індекси, що позначають осьову, радіальну та тангенційну компонент відповідно;

μ - коефіцієнт Пуассона.

Перетворюючи (2), отримуємо зв'язок поперечних напружень з головними пружними деформаціями:

$$\frac{\sigma_t}{\psi} = (1 - \mu) e_t + \mu \cdot e_r + \mu \cdot e_x; \quad (3)$$

$$\frac{\sigma_r}{\psi} = (1 - \mu) e_r + \mu \cdot e_t + \mu \cdot e_x; \quad (4)$$

де $\psi = E/(1 + \mu) \cdot (1 - 2 \mu)$ - константа.

Запишемо поперечні деформації в циліндричних координатах:

$$\begin{cases} e_r = d \theta / d r; \\ e_t = \theta / r. \end{cases} \quad (5)$$

де θ - радіальне зміщення.

Підставляючи (5) в (3) та (4), знайдемо зв'язок поперечних напружень з радіальною та осьовою пружними деформаціями:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_t}{\psi} = \mu \frac{d \theta}{d r} + [(1 - \mu) \frac{\theta}{r}] + \mu e_x, \\ \frac{\sigma_r}{\psi} = [(1 - \mu) \frac{d \theta}{d r}] + \mu \frac{\theta}{r} + \mu e_x. \end{cases} \quad (6)$$

Підставляючи (6) в рівняння рівноваги (1) знаходимо диференціальне рівняння для зміщень в вигляді:

$$\frac{d^2 \theta}{d r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d \theta}{d r} - \frac{\theta}{r^2} = 0. \quad (7)$$

Вираз (7) представляє рівняння для пружного зміщення в циліндричних координатах. Його рішення можна знайти, використовуючи [4] з деякими перетвореннями:

$$\theta = C_1 r + C_2 / r, \quad (8)$$

де C_1 та C_2 - постійні інтегрування.

Узагальнене рівняння (8) характеризує пружне зміщення всієї системи. Якщо вираз (8) переписати для шару вторинної структури, тоді для зміщення металу волокна отримуємо:

$$\theta = C_3 r + C_4 / r. \quad (9)$$

Зформуємо граничні умови для визначення постійних інтегрування C, C_2, C_3, C_4 .

Скористаємося симетрією вибраної моделі та умовами рівноваги сил і запишемо:

$$\begin{aligned} \sigma_r = 0 \quad \text{при} \quad r = R; & \quad \sigma_r = \sigma_r \quad \text{при} \quad r = r; \\ \theta = \theta' \quad \text{при} \quad r = r; & \quad \theta = 0 \quad \text{при} \quad r = 0. \end{aligned}$$

Радіальна компонента напружень повинна зникати при $r = R$, оскільки на зовнішній поверхні шару вторинної структури напруження відсутні. При $r = r$ на поверхні поділу системи радіальні зміщення її складових повинні бути рівними, так як зберігається умова неперервності, а радіальні напруження повинні бути рівними за величиною та протилежні за знаком. Четверта гранична умова, яка потребує рівності нулю радіальних зміщень в

системі з осью симетрії, означає, що $C_4 = 0$, тобто нескінченно велику величину зміщення.

Розповсюдивши граничні умови на рівняння (6), (8) та (9), отримуємо вирази, які зв'язують три нерівних нулю постійних інтегрування. Вирішуючи їх спільно, знаходимо:

$$\begin{cases} C_1 = r^2 e_x (1 - 2\mu) / \beta - \mu e_x & ; \\ C_2 = r^2 e_x R^2 / \beta & ; \\ C_3 = \{ e_x [r^2 (1 - 2\mu) + R^2] / \beta \} - \mu e_x & ; \\ C_4 = 0 & \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{де } \beta = 1 (\mu - \mu') \left\{ \frac{r^2}{r - 2\mu} \left(1 - \frac{\psi}{r} \right) + R^2 \left[1 + (1 - 2\mu) \frac{\psi}{r} \right] \right\}.$$

Величина β є константою і визначається пружними властивостями системи в цілому.

Підставляючи значення C_1 та C_2 в рівняння (8), знаходимо пружно компоненту поперечної деформації оболонки вторинної структури:

$$\theta = \frac{r^2 e_x}{\beta} \left[\rho (1 - 2\mu) + \frac{R^2}{\rho} \right] - \rho \mu e_x. \quad (11)$$

Отримане значення вносимо в рівняння (6) і визначаємо величину поперечних напружень:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_r}{\psi} = r^2 e_x (1 - 2\mu) \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2} \right) / \beta ; \\ \frac{\sigma_\theta}{\psi} = r^2 e_x (1 - 2\mu) \left(1 + \frac{R^2}{\rho^2} \right) / \beta . \end{cases} \quad (12)$$

Скориставшись законом Гука, що зв'язує головні деформації і головні напруження в пружному тілі, знаходимо повздовжні напруження в оболонці вторинної структури:

$$\sigma_x = E e_x + r^2 \mu e_x \psi (1 - 2\mu) / \beta. \quad (13)$$

Аналогічним чином, підстановка в рівняння (9) постійних C_3 та C_4 дає з урахуванням (6) значення деформацій і напружень в металі волокна:

$$\begin{cases} \theta' = \frac{\rho a}{\beta - \mu} & ; \\ \frac{\sigma_r'}{\psi'} = \frac{\sigma_\theta'}{\psi'} = \frac{a}{\beta - (\mu - \mu')} & ; \\ \sigma_x' = \frac{E' e_x + 2\mu' \psi' a}{\beta - (\mu - \mu')} & , \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{де } a = e_x [r^2 (1 - 2\mu) + R^2].$$

З аналізу рівнянь (11) - (14) випливає важливий для задачі, яка розглядається, висновок: осьові компоненти напружень головним чином залежать від характеристик пружності металу волокна та вторинної структури. В той же час, оскільки різниця коефіцієнтів Пуассона $(\mu - \mu')$ наближається до нуля, компоненти поперечних напружень всієї системи наближаються до нуля.

Література

1. Шепельський М.В., Пукалов В.П., Пукалов В.В. Перспективний процес отримання металевих волокон для композиційних матеріалів. - Проблеми розробки, виробництва та експлуатації сільськогосподарської техніки: Зб. наук. праць/ Кол.авт. - Кіровоград: КІСМ, 1995. - 140 с.
2. Макушок Е.М. Самоорганизация деформационных процессов. - Минск: Наука и техника, 1991. - 272 с.
3. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во МГУ, 1978. - 288 с.
4. Унксов Е.П., Джонсон У., Колмогоров В.Л. Теория пластических деформаций металлов. - М.: Машиностроение, 1983. - 898 с.