

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра вищої математики та фізики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

**Методичні вказівки, програма та індивідуальні завдання для самостійної
роботи студентів технічних спеціальностей до розділу
“Лінійна алгебра та аналітична геометрія”**

КРОПИВНИЦЬКИЙ
2020

Вища математика. Методичні вказівки, програма та індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів технічних спеціальностей до розділу “Лінійна алгебра та аналітична геометрія”

/ Укл.: Ю.О. Шатських, С.М.Якименко – Кропивницький: ЦНТУ, 2020 р. – 60 с.

Укладачі:

Шатських Юрій Олександрович
Якименко Сергій Миколайович

- асистент
- канд. фіз.-матем. наук, доц.

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики та фізики
Протокол № 7 від 6.03.2020 р.

© Вища математика
/.: Ю.О. Шатських, С.М. Якименко

Програма розділу вищої математики
“Лінійна алгебра та аналітична геометрія”
для студентів технічних спеціальностей

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1. МАТРИЦІ, ДІЇ З НИМИ

Поняття числової матриці. Види матриць. Лінійні операції над матрицями. Множення матриць. Транспонування матриць.

2. ВИЗНАЧНИКИ

Означення визначника. Обчислення визначників 2-го та 3-го порядків. Визначники n -го порядку та їх властивості. Розклад визначників за елементами рядків та стовпців. Методи обчислення визначників n -го порядку.

3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.

Обернена матриця, означення та обчислення. Система лінійних рівнянь (основні поняття). Матрична форма запису системи. Матричний метод і формули Крамера.

4. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ДОВІЛЬНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Поняття та знаходження рангу матриці. Умови сумісності й визначеності систем лінійних рівнянь. Теорема Кронекера – Капеллі. Метод Гауса. Загальна схема дослідження і розв’язування систем. Загальний та частинний розв’язки невизначеної системи лінійних рівнянь. Однорідні системи лінійних рівнянь.

Розділ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА.

Поняття вектора. Лінійні операції над векторами. Колінеарні вектори. Поділ відрізка у заданому відношенні. Базис. Розклад вектора за базисом. Скалярний добуток векторів. Довжина вектора. Відстань між двома точками. Кут між векторами. Умова ортогональності векторів. Векторний добуток двох векторів, його геометричний зміст. Мішаний добуток векторів. Умова компланарності векторів.

2. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ.

Поняття рівняння лінії в R^2 . Різні види рівняння прямої. Взаємне розташування прямих. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки. Загальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої.

3. ПРЯМА ТА ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ

Поняття рівняння поверхні в R^3 . Основні рівняння площини у просторі. Рівняння площини, яка проходить через точку перпендикулярно вектору. Загальне рівняння площини та його дослідження. Кут між двома площинами. Загальні та канонічні рівняння прямої у просторі. Кут між прямою та площиною.

4. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Загальне рівняння ліній другого порядку. Коло. Знаходження центру та радіуса кола за загальним рівнянням. Еліпс. Гіпербола та її асимптоти. Парабола.

5. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Еліпсоїд. Гіперболоїди. Параболоїди. Циліндричні поверхні. Конічні поверхні.

Вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи.

Мета роботи – краще засвоєння розділу вищої математики “Лінійна алгебра та аналітична геометрія” та інтенсифікація самостійної роботи студентів. Для успішного виконання роботи необхідно ознайомитися з наступним теоретичним матеріалом:

1. Матриці. Види матриць, лінійні операції над матрицями, добуток матриць.
2. Визначники матриць. Основні властивості визначників.
3. Мінори та алгебраїчні доповнення. Обернена матриця. Теорема про існування оберненої матриці.
4. Розв’язування систем лінійних рівнянь матричним способом, по формулам Крамера та методом Гаусса.
5. Вектори, лінійні операції над векторами. Лінійна залежність та незалежність векторів.
6. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів.
7. Площина. Пряма на площині та в просторі.
8. Канонічні рівняння кривих другого порядку.
9. Циліндричні та конічні поверхні. Поверхні обертання.
10. Системи нерівностей.

Теоретичний матеріал та типові завдання висвітлені в наступній літературі:

1. Апатенок Р.Ф. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. – Мінськ, 1985р.
2. Бугров Я.С., Нікольський С.М. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. –М., 1960р.
3. Апатенок Р.Ф. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. –Мінськ, 1980р.
4. Привалов І.І. Аналітична геометрія. –М., 1966р.
5. Цубербіллер О.Н. Задачі та вправи з аналітичної геометрії.-М., 1971р.

6. Мишкіс А.Д. Лекції з вищої математики.-М., 1967р.
7. Ефимов Н.В. Краткий курс аналітичної геометрії.-М., 1963р.
8. Каплан І.А. Практичні заняття з вищої математики. – Харків, 1970р.

Розрахунково-графічна робота складається з 30 варіантів, в кожному з яких по 15 завдань. Завдання 1-4 відносяться до розділу 1, 5-15 – до розділу 2. Варіанти та номери завдань вибираються згідно вказівок викладача.

Варіанти індивідуальних завдань розрахунково- графічної роботи

Варіант 1

1. Знайти $3\mathbf{A}-2\mathbf{B}^T+4\mathbf{E}$, де $\mathbf{E}$ - одинична матриця третього порядку,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & -8 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -5 \\ 0 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 9 & 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -8 \\ x_1 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = 2. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(2; 1; 3)$, $\vec{b}(-1; 3; 0)$, $\vec{c}(4; -2; 5)$, $\vec{d}(-13; 9; -15)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, та знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Знайти проекцію вектора $\vec{a}(4; -3; 2)$ на вісь, яка утворює з координатними осями рівні гострі кути.

7. Знайти довжину висоти піраміди $A_1A_2A_3A_4$, проведеної із вершини A_4 , де $A_1(1; -1; 0)$, $A_2(3; -2; -3)$, $A_3(-2; 1; 4)$, $A_4(1; 5; 8)$.
8. Скласти рівняння бісектриси гострого кута між прямими $x - 7y + 5 = 0$ і $5x + 5y - 3 = 0$ та побудувати ці прямі на координатній площині.
9. Дано дві вершини $A(2; -2)$ і $B(3; -1)$ і точку $P(1; 0)$ перетину медіан трикутника ABC . Скласти рівняння висоти трикутника, яка проходить через вершину C . Зробити малюнок.
10. Скласти рівняння і побудувати на координатній площині лінію, відстані від кожної точки якої до точки $A(2; 0)$ і до прямої $2x + 5 = 0$ відносяться як $4 : 5$.
11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{21}{5 - 2 \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої і побудувати її.
12. На еліпсі $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ знайти точку, яка знаходиться на відстані 5 одиниць від його малої осі. Зробити рисунок.
13. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2; -1; 0)$ перпендикулярно до площини, що проходить через точки $A(4; 0; 6)$, $B(6; 9; -5)$, $C(8; 2; 3)$ і знайти точку перетину прямої з площиною.
14. Знайти рівняння кругового прямого конуса з радіусом основи R і висотою h .
15. Знайти область розв'язків системи нерівностей графічно:

$$\begin{cases} 2x - y \geq -2 \\ x - y \geq -2 \\ x \leq 1 \\ 3x - y \geq 9. \end{cases}$$

Варіант 2

1. Знайти $2BA - 4B^T + 6E$, де E - одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 2 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -3 & 7 & 3 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -4 & -4 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язки:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -7 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(-1; 2; 4)$, $\vec{b}(2; 3; 0)$, $\vec{c}(4; 1; -2)$, $\vec{d}(8; 7; -2)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Знайти одиничний вектор $\vec{c}$, ортогональний векторам $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ і $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

7. Знайти довжину висоти піраміди $A_1A_2A_3A_4$, проведеної із вершини A_4 , де $A_1(2; -1; 3)$, $A_2(0; 4; -2)$, $A_3(1; -3; 4)$, $A_4(4; -7; 1)$.

8. Дано вершини трикутника $A(-10; -13)$, $B(-2; 3)$ і $C(2; 1)$. Обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з вершини B на медіану, проведеному з вершини C .

9. Обчислити відстань d між паралельними прямими $3x - 4y - 10 = 0$ і $6x - 8y + 5 = 0$.

10. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться від точки $A(7; 2)$ вдвічі далі, ніж від точки $B(-1; 3)$. Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{12}{3 - \sqrt{2} \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі

координат. Визначити вид кривої і побудувати її.

12. Знайти полярні координати центра і радіус кола $\rho = 3 \sin \varphi$.

13. Знайти відстань між двома паралельними прямими $\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z+2}{2}$ і

$$\frac{x-4}{6} = \frac{y+3}{8} = \frac{z-1}{4}.$$

14. Скласти рівняння конічної поверхні, вершина якої знаходиться в початку координат, а напрямна задана рівняннями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = 6. \end{cases}$$

15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 3y - 2x \leq 6 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1 \\ x - 5 \leq 0. \end{cases}$$

Варіант 3

1. Знайти $2AB - B^T + 5E$, де E - одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 4 & 7 & 0 \\ -9 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 9 \\ -1 & 5 & 3 \\ -2 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3 \\ -5x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язки:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(1; 1; 3)$, $\vec{b}(-3; 0; 1)$, $\vec{c}(2; -1; 4)$, $\vec{d}(-13; 2; -5)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, та знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. При якому значенні m вектори $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ і $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ортогональні?

7. Обчислити об'єм піраміди, вершини якої знаходяться в точках $A(1; 2; 3)$, $B(-2; 4; 1)$, $C(7; 6; 3)$, $D(4; -3; -1)$.

8. На прямій $4x + 3y - 6 = 0$ знайти точку, рівновіддалену від точок $A(1; 2)$ і $B(-1; -4)$.

9. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1; 1)$ паралельно до прямої $4x + y - 5 = 0$.

10. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точок $A(6; 3)$ і $B(-2; 4)$. Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = 8 \cos \varphi$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої і побудувати її.

12. Знайти довжину хорди, яка проходить через фокус параболи $y^2 = 16x$ і перпендикулярна до її осі симетрії.

13. Знайти відстань між двома паралельними прямими

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{2} \text{ і } \frac{x-7}{6} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-3}{4}.$$

14. Скласти рівняння конічної поверхні, вершина якої знаходиться в початку координат, напрямна задана рівняннями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = 12. \end{cases}$$

15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 \leq 4 \\ y^2 \geq 12x^2. \end{cases}$$

Варіант 4

1. Знайти $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}^T + 6\mathbf{E}$, де $\mathbf{E}$ - одинична матриця третього порядку,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -8 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ 8 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & 14 & -1 \\ -1 & 1 & 6 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 13 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язки:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 7. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(2; 1; -1)$, $\vec{b}(3; -1; 0)$, $\vec{c}(-2; 1; 3)$, $\vec{d}(8; -2; 6)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, та знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Знайти довжину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\pi}{3}$.

7. Дана трикутна піраміда з вершинами $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(6; 2; 3)$ і $D(3; 7; 2)$. Знайти довжину висоти піраміди, проведеної на грань BCD .

8. Дано дві вершини трикутника $A(-6; 2)$ і $B(2; -2)$ і точку $H(1; 2)$ перетину його висот. Знайти координати третьої вершини C трикутника.

9. Пряма $5x - 3y + 4 = 0$ є однією із сторін трикутника, а прямі $4x - 3y + 2 = 0$ і $7x + 2y - 13 = 0$ – його висоти. Скласти рівняння двох інших сторін трикутника.

10. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точки $C(1; 3)$ і від прямої $y = -1$. Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = 4 \sin \varphi$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої і побудувати її.

12. Знайти точки перетину еліпса $4x^2 + y^2 = 20$ з прямою $2x - 3y + 10 = 0$.

13. Знайти відстань між двома паралельними прямими $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{8} = \frac{z}{4}$ і

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+7}{4} = \frac{z+1}{2}.$$

14. Скласти рівняння конічної поверхні, вершина якої знаходиться в початку

координат, а напрямна задана рівняннями $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 2 \end{cases}$.

15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \geq 1 \\ y - x \geq 0 \\ x \geq -4 \\ y \leq 10. \end{cases}$$

Варіант 5

1. Знайти $3\mathbf{A}-2\mathbf{B}^T+5\mathbf{E}$, де $\mathbf{E}$ - одинична матриця третього порядку,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 8 & 3 & -7 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & -7 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язки:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 5 \\ 3x_1 - x_2 = 10 \\ 4x_1 - 3x_2 = 15. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(-1; 3; 7)$, $\vec{b}(2; -3; 0)$, $\vec{c}(1; 4; -1)$, $\vec{d}(14; 1; -4)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо вектори $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ і $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ ортогональні?

7. Перевірити, чи лежать чотири точки $A(-1; 2; 3)$, $B(0; 4; -1)$, $C(2; 3; 1)$, $D(-2; 1; 0)$ в одній площині.

8. Дано рівняння двох сторін трикутника $5x - 4y + 15 = 0$ і $4x + y - 9 = 0$. Його медіани перетинаються в точці $P(0; 2)$. Знайти рівняння третьої сторони трикутника.

9. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1; 2)$ перпендикулярно до прямої, яка з'єднує точки $P(2; 3)$ і $N(0; -1)$.

10. Скласти рівняння лінії, для кожної точки якої квадрат її відстані до точки $A(6; 2)$ більше квадрата відстані до точки $B(-2; 3)$ на 12. Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{8}{3 - \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої і побудувати її.

12. Знайти довжину хорди, яка проходить через фокус параболи $y^2 = 2px$ та перпендикулярна до її вісі симетрії.

13. Скласти рівняння спільного перпендикуляра двох прямих $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ і $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

14. Знайти рівняння циліндричної поверхні, твірна і напрямна якої задані відповідно рівняннями $\frac{X-x}{1} = \frac{Y-y}{1} = \frac{Z-z}{1}$ та $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y - 2 \geq 0 \\ x - y + 1 \leq 0 \\ x \leq 2. \end{cases}$$

Варіант 6

1. Знайти $3AB - 4B^T + 2E$, де E - одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -5 & -2 & 9 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -4 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -11 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 13 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язки:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(2; 1; -1)$, $\vec{b}(3; -1; 2)$, $\vec{c}(1; -3; -1)$, $\vec{d}(16; 0; 14)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Вияснити, чи компланарні вектори $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{c} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

7. Показати, що точки $A(3; 1; -1)$, $B(5; 7; -2)$, $C(1; 5; 0)$ і $D(9; 4; -4)$ лежать в одній площині.

8. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2; -5; 3)$ паралельно

до прямої
$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$$

9. При яких значеннях параметра α прямі $(3\alpha + 2)x + (1 - 4\alpha)y + 8 = 0$ і $(5\alpha - 2)x + (\alpha + 4)y - 7 = 0$ взаємно перпендикулярні?

10. Скласти рівняння лінії, для кожної точки якої сума квадратів її відстаней до точок $A(-1; 1)$ і $B(6; 3)$ дорівнює 102. Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{18}{4 - 5 \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої і побудувати її.
12. Знайти рівняння кола, центр якого лежить в точці $A(4; 7)$ і яке дотикається прямої $3x - 4y + 1 = 0$.
13. Знайти проекцію прямої $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на площину $x - y + 3z + 8 = 0$.
14. Яку поверхню визначає рівняння $9y^2 - 16z^2 + 64z - 18y - 199 = 0$? Побудувати цю поверхню.
15. Знайти область розв'язків системи нерівностей графічно:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x + 3y \leq 3 \\ x - y + 1 \leq 0. \end{cases}$$

Варіант 7

1. Знайти $3\mathbf{A} + 5\mathbf{B}^T - 2\mathbf{E}$, де $\mathbf{E}$ - одинична матриця третього порядку,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 7 & 4 \\ 8 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ -2x_1 + 3x_3 = 15. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язки:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 3. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(1; -1; 4)$, $\vec{b}(3; -2; 0)$, $\vec{c}(-2; 1; 5)$, $\vec{d}(19; -13; 5)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Який кут утворюють вектори $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{2}{3}\pi$.

7. Знайти вектор $\vec{c}$, колінеарний вектору $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, такий, що $|\vec{c}| = |(\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{a}|$, якщо $\vec{m} = 4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

8. Знайти кут між прямою $2x + 3y - 1 = 0$ і прямою, яка проходить через точки $M_1(-1; 2)$, $M_2(0; 3)$.

9. Знайти відстань між площинами $11x - 2y - 10z + 15 = 0$ і $11x - 2y - 10z + 45 = 0$.

10. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться від точки $A(4; 3)$ втричі далі, ніж від точки $B(-3; 1)$. Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{16}{3 - 5 \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої і побудувати її.

12. На еліпсі $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{35} = 1$ знайти точку, яка знаходиться на відстані 2 одиниць від його великої вісі.

13. Знайти найкоротшу відстань між двома прямими $\frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2}$ і

$$\frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{3}.$$

14. Записати рівняння сфери, якщо відомо, що вона проходить через точку $M(0; -3; 1)$ і перетинає площину xOy по колу $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 0 \end{cases}$.

15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей:

$$\begin{cases} y^2 \geq 4x - 7 \\ y + x \leq 10 \\ x \leq 8. \end{cases}$$

Варіант 8

1. Знайти $2BA - 4B^T + 6E$, де E - одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 0 & 7 & 9 \\ -6 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 8 \\ 0 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -10 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язки:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(1; 3; -2)$, $\vec{b}(2; 3; -1)$, $\vec{c}(-2; 3; 3)$, $\vec{d}(22; 15; -17)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.
6. Знайти вектор $\vec{x}$, ортогональний вектору $\vec{a} = 12\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, який має з ним однакову довжину і лежить в площині yOz .
7. Знайти площу паралелограма, сторонами якого є вектори $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.
8. Дано точки $A(-1; 2; 3)$, $B(3; 1; 2)$, $C(1; 3; 1)$. Знайти точку перетину медіан трикутника ABC .
9. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-1; 3; 4)$ перпендикулярно до площини $3x + 4y - z + 2 = 0$.
10. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точки $C(1; 1)$ і від прямої $x = 3$. Зробити рисунок.
11. Знайти рівняння лінії $\rho = 6 \cos \varphi$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої і побудувати її.
12. Відомо, що пряма $2x - 5y - 30 = 0$ дотикається еліпса $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{24} = 1$. Знайти точку дотику.
13. Знайти відстань від точки $P(7; 9; 7)$ до прямої $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$.
14. Знайти рівняння сферичної поверхні, якщо відомо, що вона проходить через коло $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 36 \\ 4x + y - z - 9 = 0 \end{cases}$ і через точку $M(7; -3; 1)$.
15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей:

$$\begin{cases} x - 5y + 5 \geq 0 \\ x + 3y - 3 \leq 0 \\ x \leq 5. \end{cases}$$

Варіант 9

1. Знайти $3BA - 5B^T + 8E$, де E - одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 8 \\ 9 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} -6 & 8 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 5 & -4 & 9 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -11 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 23. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язки:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(2; -1; 5)$, $\vec{b}(-1; 4; 3)$, $\vec{c}(1; 5; 0)$, $\vec{d}(-7; 46; 27)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = 5\vec{i} + \beta\vec{j} - \vec{k}$ колінеарні?

7. Знайти синус кута між діагоналями паралелограма, сторонами якого є вектори $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

8. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(2; 3)$ ортогонально вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, якщо $M_2(4; 5)$.

9. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1; 0; 2)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$.

10. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точок $A(2; 1)$ і $B(-5; -1)$. Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{15}{3-4\cos\varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої і побудувати її.

12. На еліпсі $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ дано точку $M(2; -\frac{5}{3})$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать фокальні радіуси точки M .

13. На прямій $\frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1}$ знайти точку, найближчу до точки $M(3; 2; 6)$.

14. Знайти рівняння конуса, який проектує еліпс $\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ з точки $M(4; 0; -3)$.

15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей:

$$\begin{cases} y \leq 5 \\ x > 0 \\ x + y - 2 \geq 0 \\ x - y + 1 \leq 0 \\ x \leq 2. \end{cases}$$

Варіант 10

1. Знайти $3BA - 2B^T + 4E$, де E - одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ -4 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -3 \\ 7 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & -7 & -3 \\ 3 & -7 & 9 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -6. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язки:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 - 11x_3 = 10. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(1; -1; 5)$, $\vec{b}(2; 1; 3)$, $\vec{c}(-1; 2; 5)$, $\vec{d}(5; -9; -15)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ на напрямок вектора $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

7. Знайти синус кута між діагоналями паралелограма, сторонами якого є вектори $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

8. Сторонами трикутника є прямі $2x + y - 1 = 0$ і $4x - y - 11 = 0$, а точка $P(1; 2)$ – точка перетину третьої сторони з висотою, яка проведена до неї. Скласти рівняння третьої сторони.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2; -3; 1)$ і $M_2(1; 2; 4)$ перпендикулярно до площини $x - y + z + 5 = 0$.

10. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від вісі ординат і від кола $x^2 + y^2 = 4x$. Зробити малюнок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{18}{4 - 2 \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі

координат. Визначити вид кривої і побудувати її.

12. Знайти полярні координати центра і радіус кола $\rho = 8 \sin \varphi$.

13. Знайти відстань між паралельними прямими $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ і

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

14. Скласти рівняння конічної поверхні, вершина якої знаходиться в початку

координат, а напрямна задана рівняннями
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases}.$$

15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \geq 1 \\ y - x \geq 0 \\ x \geq -4 \\ y \leq 10. \end{cases}$$

Варіант 11

1. Знайти $5BA - 4B^T + 7E$, де E - одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 5 \\ -3 & 7 & -9 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 2 \\ -1 & -6 & 9 \\ 5 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} -4 & 4 & -3 & 10 \\ 4 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 2 & 7 \\ -4 & 4 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

- а) за формулами Крамера,
 б) матричним методом,
 в) методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -14 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язки:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 = 15 \\ 2x_1 + 5x_2 = -7. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(1; 1; 3)$, $\vec{b}(2; 3; -4)$, $\vec{c}(2; -1; 5)$, $\vec{d}(3; 4; -1)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо $\vec{a}, \vec{i} = \frac{\pi}{3}$, $\vec{a}, \vec{j} = \frac{\pi}{4}$, $|\vec{a}| = 6$.

7. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}\{3; 2; -5\}$, $\vec{b}\{1; -1; 4\}$, $\vec{c}\{1; -3; 1\}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

8. Дано рівняння двох сторін квадрата $4x - 3y + 3 = 0$ і $4x - 3y - 17 = 0$ і одна із його вершин $A(2; -3)$. Знайти рівняння двох інших сторін цього квадрата.

9. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1; 1; 1)$ паралельно векторам $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$ і $\vec{b} = \vec{j} + 3\vec{k}$.

10. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точки $A(0; 2)$ і прямої $y = 4$. Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{9}{4 - 5 \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі

координат. Визначити вид кривої і побудувати її.

12. Знайти площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $9x^2 + 5y^2 = 1$, а дві інші співпадають з кінцями його малої вісі.

13. Знайти точку, симетричну до точки $P(4; 3; 10)$ відносно прямої

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}.$$

14. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $\begin{cases} y^2 - z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

навколо вісі Oz .

15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей:

$$\begin{cases} x - y - 10 \geq 0 \\ x \leq 0 \\ y + 13 \geq 0 \\ y + x^2 - 15 \leq 0. \end{cases}$$

Варіант 12

1. Знайти $2BA - B^T + 7E$, де E - одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -5 \\ -2 & 7 & -3 \\ 8 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 7 \\ 9 & 1 & -9 \\ 7 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -5 & -9 & 4 & -1 \\ -3 & 6 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язки:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 9. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(2; -1; 3)$, $\vec{b}(1; -1; 5)$, $\vec{c}(3; -2; 5)$, $\vec{d}(-5; 3; -2)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{j} + 3\vec{k}$, утворює з віссю Оу тупий кут. Знайти координати вектора $\vec{x}$, якщо $|\vec{x}| = 26$.

7. Вершини трикутної піраміди знаходяться в точках А(0; 0; 0), В(3; 4; -1), С(2; 3; 5), D(6; 0; -3). Знайти довжину висоти, проведеної з вершини А.

8. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $3x - 5y + 2 = 0$, $5x - 2y + 4 = 0$ і точку А(1; 3).

9. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М(1; 1; 1) паралельно векторам $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$ і $\vec{b} = \vec{j} + 3\vec{k}$.

10. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точки А(2; 6) і прямої $y + 2 = 0$. Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{4}{\sqrt{5} - \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої і побудувати її..

12. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомі рівняння асимптот гіперболи $y = \pm \frac{1}{2}x$ та одну з її точок М(12; $3\sqrt{3}$).

13. Вияснити, чи прямі $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4}$ і $\frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{2}$ перетинаються, і записати рівняння площини, яка через них проходить.

14. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $\begin{cases} y = 3z \\ x = 0 \end{cases}$ навколо вісі Oz.

15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей:

$$\begin{cases} y - x^2 - 2 \leq 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \\ x \leq 1. \end{cases}$$

Варіант 13

1. Знайти $3AB - 6B^T + 5E$, де E - одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -7 & 5 \\ -8 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} -9 & -2 & 8 \\ 2 & -6 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & -2 & -1 \\ 8 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -7 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 13 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язки:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -5. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(1; 5; 4)$, $\vec{b}(-2; 3; 0)$, $\vec{c}(4; -1; -2)$, $\vec{d}(11; 10; -4)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Який кут утворюють вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вектори $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{n} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ ортогональні, а $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.
7. Обчислити площу паралелограма, сторонами якого є вектори $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$.
8. Через точку $M(1; 2)$ потрібно провести пряму так, щоб відстані від кожної її точки до точок $A(3; 3)$ і $B(5; 2)$ були б однаковими.
9. Знайти рівняння площини, яка проходить через початок координат і перпендикулярна до площин $2x - y + 5z + 3 = 0$ і $x + 3y - z - 7 = 0$.
10. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться від точки $A(-4; 0)$ втричі далі, ніж від початку координат. Зробити рисунок.
11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{4}{\sqrt{5} - \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої і побудувати її.
12. Знайти відстань від фокуса $F(c; 0)$ еліпса $\frac{x^2}{q^2} + \frac{y^2}{p^2} = 1$ до односторонньої з цим фокусом директриси.
13. На прямій $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 3x - y + 4z - 29 = 0 \end{cases}$ знайти точку, однаково віддалену від двох даних точок $A(3; 11; 4)$ і $B(-5; -13; -2)$.
14. Скласти рівняння поверхні, одержаної обертанням прямої $y = x$ навколо вісі Ox .
15. Знайти область розв'язків системи нерівностей графічно:

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 \leq 144 \\ y \geq x \\ y \leq -x \\ y \leq 1 \\ y \geq -1. \end{cases}$$

Варіант 14

1. Знайти $4BA - 2A^T + 7E$, де E - одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 6 \\ -1 & 8 & -2 \\ 9 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} -1 & 9 & 6 & 7 \\ -2 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язки:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_3 - 5x_4 = -8. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(-1; 3; 1)$, $\vec{b}(4; 0; 1)$, $\vec{c}(2; -2; 1)$, $\vec{d}(11; 7; 3)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Знайти одиничний вектор $\vec{d}$, компланарний векторам $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ і $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ і ортогональний вектору $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

7. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він ортогональний векторам $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ і $(\vec{x}, \vec{c}) = 51$, де $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

8. Дано трикутник з вершинами в точках $A(1; 5)$, $B(-4; 3)$, $C(2; 9)$. Знайти рівняння висоти, проведеної з вершини A .
9. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $A(1; -2; 3)$ паралельно площині, яка проходить через точки $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(3; 4; 5)$, $M_3(2; 0; -1)$.
10. Скласти рівняння лінії, відстані від кожної точки якої до початку координат і до точки $A(5; 0)$ відносяться як 2:1. Зробити рисунок.
11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{5}{6 + 3 \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої і побудувати її.
12. Обчислити площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $x^2 + 5y^2 = 20$, а дві інші співпадають з кінцями його малої вісі.
13. На прямій $\frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1}$ знайти точку, найближчу до точки $A(3; 2; 6)$.
14. Знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $\begin{cases} y^2 + z^2 = 4 \\ x = 0 \end{cases}$ навколо вісі Oy .
15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} y - x^2 \geq 2 \\ x + y \geq 2 \\ y \leq 3. \end{cases}$$

Варіант 15

1. Знайти $3BA - 2B^T + 4E$, де E - одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 0 \\ -3 & 5 & -2 \\ 9 & 8 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 9 \\ 4 & -6 & -1 \\ 0 & 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язки:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(1; 1; -4)$, $\vec{b}(2; 3; 0)$, $\vec{c}(-1; 3; -2)$, $\vec{d}(8; 25; -10)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Знайти проекцію вектора $\vec{a} + \vec{b}$ на напрям вектора $\vec{c}$.

7. Перевірити, чи компланарні вектори $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ і $\vec{c} = 7\vec{i} + 14\vec{j} - 13\vec{k}$.

8. Дано рівняння двох висот трикутника $x + y = 4$ і $y = 2x$ і одну з його вершин $A(0; 2)$. Знайти рівняння сторін трикутника.

9. Знайти значення параметрів α і d , при яких пряма $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 + 4t \\ z = -3 + t \end{cases}$ належить

площині $\alpha x + 2y - 4z + d = 0$.

10. Скласти рівняння лінії, відстань від кожної точки якої до точки $A(-1; 0)$ вдвічі менше відстані від неї до прямої $x + 4 = 0$. Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{18}{4 - 5 \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі

координат. Визначити вид кривої і побудувати її.

12. Дано еліпс $9x^2 + 5y^2 = 45$. Знайти його ексцентриситет і рівняння директрис.

13. Через початок координат провести площину, перпендикулярну до прямої $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{-2}$.

14. Скласти рівняння циліндра, якщо його напрямна задана рівняннями $\begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ x = 2z \end{cases}$, а твірні його перпендикулярні до площини напрямної.

15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 3y + 2x - 12 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 16

1. Знайти $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}^T + 4\mathbf{E}$, де $\mathbf{E}$ - одинична матриця третього порядку,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -2 & 5 & -3 \\ 8 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 7 \\ -7 & 1 & -9 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & -3 & -4 \\ 2 & -11 & -8 & -5 \\ 5 & 13 & 4 & 6 \\ 5 & 9 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 = 10. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(1, 1, 2)$, $\vec{b}(3, -2, 1)$, $\vec{c}(3, 1, -2)$, $\vec{d}(13, -13, 12)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{j} - 7,5\vec{k}$, утворює гострий кут з віссю Oz. Знайти координати вектора $\vec{b}$, якщо $|\vec{b}| = 50$.

7. Знайти $(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, якщо $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$ і $C(3, 2, 1)$.

8. Дано рівняння двох сторін трикутника $5x + 4y + 15 = 0$ і $4x + y - 9 = 0$. Його медіани перетинаються в точці $P(0, 2)$. Знайти рівняння третьої сторони трикутника.

9. Через пряму $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ провести площину, перпендикулярну до площини $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

10. Знайти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться втричі далі від точки $A(0, 9)$, ніж від точки $B(0, 1)$. Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{144}{13 - 5 \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої та побудувати її.

12. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на вісі ординат симетрично відносно початку координат, а відстань між фокусами дорівнює 10 та ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

13. Через пряму $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$ провести площину, паралельну до площини $x + y - z + 15 = 0$.

14. Скласти рівняння циліндричної поверхні, твірної і напрямної якої задані

відповідно рівняннями $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ z = -5 \end{cases}$ і $\begin{cases} y = 7z^2 \\ x = 0 \end{cases}$.

15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} y - x \geq 0 \\ y \leq 7 \\ y + x \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 17

1. Знайти $2BA - 5B^T + 4E$, де E – одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -9 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -7 & -5 & 1 \\ -4 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 5 & -2 \\ 2 & -5 & 9 & 7 \\ 1 & -5 & -4 & 6 \\ -1 & -6 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -8 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \\ -x_1 + 4x_2 = -13. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(2,0,-1)$, $\vec{b}(1,2,1)$, $\vec{c}(3,1,-5)$, $\vec{d}(18,17,-9)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.
6. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\overrightarrow{AC} = 6\vec{a} + 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Перевірити, чи компланарні вектори $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 14\vec{j} - 13\vec{k}$.
8. Знайти рівняння сторін трикутника ABC, якщо дано одну з його вершин A(1; 3) і рівняння двох медіан $x - 2y + 1 = 0$ і $y - 1 = 0$.
9. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}$ і площини $3x - 3y - 4z - 5 = 0$.
10. Вивести рівняння геометричного місця точок, для яких відстань до даної точки A(3; 0) дорівнює відстані до даної прямої $x + 3 = 0$. Зробити рисунок.
11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{3}{1 - 2\cos\varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої та побудувати її.
12. Дано рівняння гіперболи $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти ексцентриситет, рівняння асимптот, рівняння директрис.
13. Провести площину через перпендикуляри, опущені із точки A(-3, 2, 5), на площини $4x + y - 3z + 13 = 0$ і $x - 2y + z - 11 = 0$.
14. Знайти рівняння циліндра, якщо він проходить через криву
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 25 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$
, а твірна його паралельна до прямої $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$.
15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 \geq 144 \\ x \geq -7 \\ x \leq 5. \end{cases}$$

Варіант 18

1. Знайти $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}^T + 4\mathbf{E}$, де $\mathbf{E}$ – одинична матриця третього порядку,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 9 \\ 0 & 7 & -8 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 4 & -6 & 3 \\ -7 & 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -5 & -2 & 7 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

- а) за формулами Крамера,
- б) матричним методом,
- в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -6. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(1, 3, -4)$, $\vec{b}(2, -3, 5)$, $\vec{c}(-2, 4, 0)$, $\vec{d}(17, -21, 36)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Знайти вектор $\vec{d}$, який задовольняє умовам $(\vec{d}, \vec{a})=5$, $(\vec{d}, \vec{b})=2$, $(\vec{d}, \vec{c})=3$, якщо $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{k}$ і $\vec{c} = \vec{i}$.

7. Знайти координати вектора $\vec{x}$, якщо він ортогональний векторам $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, а $|\vec{x}| = 1$.
8. Дано трикутник з вершинами в точках $A(1;5)$, $B(-4;3)$, $C(2;9)$. Знайти рівняння висоти, проведеної з вершини A .
9. Знайти проекцію точки $A(1; 2; -1)$ на площину $x - y + z - 4 = 0$.
10. Скласти рівняння геометричного місця точок, сума квадратів відстаней від яких до точок $A(-3; 0)$ і $B(3; 0)$ дорівнює 50. Зробити рисунок.
11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{1}{3(1 - \cos \varphi)}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої та побудувати її.
12. Обчислити площу трикутника, утвореного асимптотами гіперболи $9x^2 - 4y^2 = 36$ і прямою $9x + 2y - 24 = 0$.
13. Перевірити, що прямі $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4}$ і $\frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-2}$ перетинаються, і написати рівняння площини, яка проходить через них.
14. Визначити, яка поверхня задана рівнянням $z^2 + 4z - 2x + 6 = 0$, і побудувати її.
15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x - 5y + 5 \geq 0 \\ x + 5y + 20 \leq 0 \\ y \geq -1 \\ x \geq -3. \end{cases}$$

Варіант 19

1. Знайти $3\mathbf{A} - 5\mathbf{B}^T + 4\mathbf{E}$, де $\mathbf{E}$ – одинична матриця третього порядку,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -1 & 8 & -4 \\ 9 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 9 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & -4 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -8. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(0, 1, -3)$, $\vec{b}(-1, 4, 2)$, $\vec{c}(4, 3, 2)$, $\vec{d}(-13, 34, 13)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, та знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Знайти вектор $\vec{b}$, якщо він колінеарний вектору $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ та $(\vec{a}, \vec{b}) = 3$.

7. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ і вектори $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{n} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

8. При яких значеннях α прямі $\alpha x - 2y - 1 = 0$ і $6x - 4y - 3 = 0$ мають одну спільну точку?

9. Перевірити, чи лежить пряма $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$ на площині $4x + 3y - z + 3 = 0$.

10. Скласти рівняння геометричного місця точок, для яких відношення відстані від даної точки $F(-4; 0)$ до відстані від даної прямої $4x + 25 = 0$ дорівнює $\frac{4}{5}$.

Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{l}{2(1 + \cos \varphi)}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої та побудувати її.

12. Знайти площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $9x^2 + 5y^2 = 1$, а дві інші співпадають з кінцями його малої вісі.

13. Знайти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі $\frac{x}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5}$ і $\frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{5}$.

14. Знайти рівняння конуса, вершина якого знаходиться в точці $M(5; -1; 0)$, а напрямною є коло $\begin{cases} (x-5)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 16 \\ z = 1 \end{cases}$.

15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 2x - y \geq -2 \\ x - y \geq -2 \\ x \leq 1 \\ 2x - y \geq 3. \end{cases}$$

Варіант 20

1. Знайти $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}^T + 6\mathbf{E}$, де $\mathbf{E}$ – одинична матриця третього порядку,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 5 \\ 1 & 7 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 & 8 & 2 \\ -1 & 6 & -7 \\ 5 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 8 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -8 \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 27. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(1, -1, 0)$, $\vec{b}(2, 3, -5)$, $\vec{c}(3, -2, 1)$, $\vec{d}(-7, 4, -3)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, та знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Знайти вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, якщо $(\vec{a}, \vec{b}) = 3$.

7. Знайти $(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, якщо $A(2; 1; -1)$, $B(1; 2; -1)$ і $C(3; 2; 1)$.

8. Знайти відстань між прямими $3x - 4y + 25 = 0$ і $6x - 8y - 50 = 0$.

9. Знайти проекцію точки $A(1; 2; -1)$ на площину $x - y + z - 4 = 0$.

10. Скласти рівняння геометричного місця точок, для яких відношення відстані від даної точки $F(-5; 0)$ до відстані від даної прямої $5x + 16 = 0$ дорівнює $\frac{5}{4}$.

Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{4}{2-3\cos\varphi}$ в прямокутній декартовій системі

координат. Визначити вид кривої та побудувати її.

12. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на вісі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо дано: точка $M(-\sqrt{5}; 2)$ еліпса і відстань між його директрисами дорівнює 10.

13. Чи можна через пряму $\frac{x-7}{4} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{6}$ провести площину паралельно площині $2x + y - 7z + 1 = 0$?

14. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії
$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

навколо вісі Oz.

15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x - 5y + 5 \geq 0 \\ x + 3y - 3 \leq 0 \\ x \leq 5. \end{cases}$$

Варіант 21

1. Знайти $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}^T + 7\mathbf{E}$, де $\mathbf{E}$ – одинична матриця третього порядку,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -4 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 7 \\ -4 & 8 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 & 6 \\ 8 & -7 & 8 & 1 \\ -1 & -8 & 13 & -9 \\ 8 & -5 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 10. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(-1; 1; 2)$, $\vec{b}(4; -2; -2)$, $\vec{c}(1; -1; 0)$, $\vec{d}(6; -4; 2)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, та знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Знайти $(\vec{a}, \vec{b})$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, якщо $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.

7. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$, $\vec{b} = \vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$, $\vec{c} = \vec{m} - \vec{n} + \vec{p}$, якщо $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ - одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

8. Дано дві вершини трикутника $A(-6; 2)$, $B(2; -2)$ і точка $H(1; 2)$ перетину його висот. Знайти координати вершини C .

9. Знайти кут між прямою $\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -2z + 1 \end{cases}$ і прямою, яка проходить через точки $A(-1; 2; 4)$ і $B(0; 1; 0)$.

10. Знайти рівняння геометричного місця точок, для яких різниця відстаней до двох даних точок $F_1(-5; 0)$ і $F_2(5; 0)$ є величина постійна і дорівнює 6. Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{1}{3 - 3 \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої та побудувати її.

12. Відстань між директрисами еліпса дорівнює 36. Знайти рівняння еліпса, якщо відомо, що фокальні радіуси деякої його точки дорівнюють 9 і 15.

13. Знайти проекцію прямої $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на площину $x - y + 3z + 8 = 0$.

14. Визначити вид поверхонь та побудувати їх разом: $z = 2x^2 + y^2 + 1$ і $x^2 + 2y^2 = (z - 1)^2$.

15. Знайти область розв'язків системи нерівностей графічно

$$\begin{cases} x - y + 6 \geq 0 \\ \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} \geq 1 \\ 2x + y - 6 \leq 0. \end{cases}$$

Варіант 22

1. Знайти $2BA - 3B^T + 5E$, де E – одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -9 \\ 6 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -9 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 7 & -6 & -1 & 9 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(1; 1; -3)$, $\vec{b}(2; 3; 4)$, $\vec{c}(-1; 0; -2)$, $\vec{d}(8; 8; 6)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, та знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Знайти $|\vec{a} \times \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 15$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 96$.

7. Знайти $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}]$, якщо $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

8. Об'єм трикутної піраміди дорівнює 5 кубічних одиниць. Три її вершини знаходяться в точках $A(2; 11; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Знайти координати четвертої вершини D , якщо відомо, що вона лежить на вісі Oy .

9. Через пряму $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ провести площину, перпендикулярну до площини $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

10. Знайти рівняння геометричного місця точок, сума відстаней від яких до двох даних точок $F_1(-3; 0)$ і $F_2(3; 0)$ є величина постійна і дорівнює 10. Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{10}{2 + \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої та побудувати її.

12. Скласти канонічні рівняння парабол, фокуси яких співпадають з фокусами еліпса $5x^2 + 4y^2 = 20$.

13. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2; 0; -4)$ і $M_2(0; 3; 5)$ паралельно прямій $\frac{x-4}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{0}$.

14. Визначити вид поверхонь та побудувати їх разом: $x^2 + y^2 - 4z^2 = 16$ і $y^2 = 2x$.

15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 \geq 9 \\ y \leq 2x \\ y \geq 0 \\ x \leq 7. \end{cases}$$

Варіант 23

1. Знайти $2BA - 5B^T - 6E$, де E – одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -3 \\ -9 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 9 \\ -3 & 7 & -3 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & -8 \\ 2 & 5 & 3 & 13 \\ -3 & 3 & -7 & -5 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -14 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -6 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(2; 1; 1)$, $\vec{b}(-1; -4; 2)$, $\vec{c}(3; 1; 0)$, $\vec{d}(4; -9; 8)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, та знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Обчислити синус кута між діагоналями паралелограма, сторонами якого є вектори $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

7. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, якщо його основою є паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

8. Знайти проекцію прямої $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на площину $x - y + 3z + 8 = 0$.

9. Дано трикутник з вершинами в точках A(1; 2), B(3; 7), C(5; -13). Обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з вершини B на медіану, яка проведена з вершини A.

10. Знайти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться в 1,5 рази далі від прямої $y = \frac{8}{3}$, ніж від точки F(0; 6). Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{8}{3 - \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої та побудувати її.

12. На гіперболі $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$ знайти точку, яка була б в три рази ближче від однієї асимптоти, ніж від другої.

13. Через точку A(4; 0; -1) провести пряму так, щоб вона перетинала дві дані прямі $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3}$ і $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

14. Скласти рівняння конуса, вершина якого знаходиться в початку координат, а напрямна задана рівняннями
$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x = 1 \end{cases}$$
.

15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} y - x \geq 0 \\ y \leq 7 \\ y + x \geq 0 \\ y \geq \frac{1}{7}x^2 \end{cases}$$

Варіант 24

1. Знайти $2\mathbf{A} + 2\mathbf{B}^T - 5\mathbf{E}$, де $\mathbf{E}$ – одинична матриця третього порядку,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -2 & 5 & -3 \\ 8 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 2 \\ -2 & 8 & -5 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & 11 & 8 & 10 \\ -3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & -5 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -6 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(1; 1; 5)$, $\vec{b}(2; -3; 1)$, $\vec{c}(3; -1; 5)$, $\vec{d}(-5; -5; 11)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, та знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Знайти $(2\vec{a} - 5\vec{b}, \vec{a} + 3\vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ і $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{3}\pi$.

7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ і

$\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$.

8. Визначити, чи належать точки $A(-1; 2)$, $B(3; 4)$ і $C(1; 2)$ одній прямій.

9. Перевірити, що прямі $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4}$ і $\frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{2}$ перетинаються, і написати рівняння площини, яка через них проходить.
10. Знайти рівняння траєкторії точки М, яка рухаючись залишається вдвічі ближче до точки А(-1; 1), ніж до точки В(-4; 4). Зробити рисунок.
11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{3}{4 - \cos \varphi}$ в декартовій прямокутній системі координат. Визначити вид кривої та побудувати її.
12. На еліпсі $\rho = \frac{12}{3 - \sqrt{2} \cos \varphi}$ знайти точку, полярний радіус якої дорівнює 6.
13. Скласти рівняння спільного перпендикуляра двох прямих $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ і $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.
14. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $\begin{cases} y = 3z \\ x = 0 \end{cases}$ навколо вісі Оу.
15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 3y \geq 0 \\ 4x - y \geq 0 \\ 4x + y \leq 0 \\ x \leq 5. \end{cases}$$

Варіант 25

1. Знайти $2\mathbf{A} - 6\mathbf{B}^T + 5\mathbf{E}$, де $\mathbf{E}$ – одинична матриця третього порядку,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} -11 & 6 & -2 & 15 \\ 1 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 = 7. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(2; 1; 4)$, $\vec{b}(-1; -3; 2)$, $\vec{c}(0; 3; 4)$, $\vec{d}(-1; -13; 18)$ в деякому базисі $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тримірного простору, та знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Вектор $\vec{c}$, колінеарний вектору $\vec{a} = 5\vec{j} - 2\vec{k}$, утворює гострий кут з віссю Oz. Знайти координати вектора $\vec{c}$, якщо $|\vec{c}| = 3\sqrt{29}$.

7. Обчислити площу паралелограма, сторонами якого є вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $A(1; -1)$, $B(2; -3)$ і $C(1; 4)$.

8. Дано рівняння сторін трикутника $x + 2y - 1 = 0$, $5x + 4y - 17 = 0$, $x - 4y + 11 = 0$. Знайти рівняння прямої, яка проходить через одну з вершин трикутника паралельно протилежній стороні.

9. Знайти відстань між площинами $x - 2y - 2z + 7 = 0$ і $2x - 4y - 4z + 17 = 0$.

10. Знайти рівняння лінії, відстань від кожної точки якої до точки $A(-1; 0)$ вдвічі менша відстані від неї до прямої $x + 4 = 0$. Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{l}{1 + \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої та побудувати її.

12. На параболі $y^2 = 8x$ знайти точку, фокальний радіус - вектор якої дорівнює 20.

13. Через лінію перетину площин $x + 5y + z = 0$ і $x - z + 4 = 0$ провести площину, яка утворює кут $\frac{\pi}{4}$ з площиною $x - 4y - 8z + 12 = 0$.

14. Знайти точки перетину поверхні $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = -1$ з прямою

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{3}.$$

15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} y^2 \leq 4x \\ 2x + 4y \leq 9 \\ y \leq 0,5. \end{cases}$$

Варіант 26

1. Знайти $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}^T + 7\mathbf{E}$, де $\mathbf{E}$ – одинична матриця третього порядку,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 7 & -6 \\ -8 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9 & 6 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 9 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & 11 & -7 \\ 1 & -3 & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = -1 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь i , у випадку її сумісності, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 - x_2 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 = 19. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(1, 0, 3)$, $\vec{b}(-2, 4, 1)$, $\vec{c}(5, -2, 1)$, $\vec{d}(-25, 30, 9)$ в деякому базисі $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис тримірного простору і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ на напрям вектора $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

7. Знайти площу трикутника з вершинами в точках $A(1; 3; -1)$, $B(1; -1; 3)$ і $C(5; -6; 2)$.

8. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(5; 0)$ і точку перетину прямої $3x - 2y + 4 = 0$ з віссю Oy .

9. Обчислити об'єм піраміди з вершинами в точках $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$ і $O(0; 0; 0)$.

10. Скласти рівняння лінії, відстані від кожної точки якої до точки $A(2; 0)$ і до прямої $5x + 8 = 0$ відносяться, як $\frac{5}{4}$. Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{4}{2 - \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої та побудувати її.

12. На гіперболі $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ знайти точку, для якої відстань до лівого фокуса вдвічі менше, ніж до правого.

13. Із усіх прямих, які перетинають дві прямі $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$ і

$\frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}$, знайти ту, яка була б паралельна прямій

$$\frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{1}.$$

14. Знайти рівняння конуса з вершиною в точці $M(1; 2; 0)$ і напрямною

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ z = 2 \end{cases}.$$

15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 3x^2 - 4y^2 \leq 12 \\ y \leq x \\ y \leq 3 \\ y \geq -1. \end{cases}$$

Варіант 27

1. Знайти $3A - 5B^T + 4E$, де E – одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 5 \\ -9 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 \\ -7 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & 7 & 5 \\ 4 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 & 6 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(1, -1, 3)$, $\vec{b}(2, 2, 0)$, $\vec{c}(-3, -5, 1)$, $\vec{d}(1, -13, 11)$ в деякому базисі $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис тримірного простору і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.
6. Дано радіуси-вектори трьох вершин паралелограма ABCD $\vec{r}_A = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{r}_B = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{r}_C = 7\vec{i} + 9\vec{j} + 11\vec{k}$. Визначити радіус-вектор четвертої вершини D.
7. Знайти одиничний вектор, ортогональний векторам $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
8. Через точку M(3; 2) провести пряму так, щоб її відрізок, який знаходиться між осями координат, ділився в даній точці пополам.
9. Через пряму $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$ провести площину паралельно площині $x + y - z + 15 = 0$.
10. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точок A(2; 1) і B(-5; -1). Зробити рисунок.
11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{3}{1 - 2 \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої та побудувати її.
12. Гіпербола дотикається прямої $x - y - 3 = 0$ в точці A(5; 2). Скласти канонічне рівняння цієї гіперболи.
13. Вияснити, чи мають спільну точку наступні чотири площини: $5x - z + 3 = 0$, $2x - y - 4z + 5 = 0$, $3y + 2z - 1 = 0$, $3x + 4y + 5z - 3 = 0$? Якщо мають, то знайти її.
14. Визначити вид поверхні і побудувати її:
- $$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1.$$
15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ y \geq 2x \\ y \leq 6 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 28

1. Знайти $4BA - 8B^T + 5E$, де E – одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -7 & -2 \\ 9 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -9 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} -4 & 6 & 10 & -6 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

- а) за формулами Крамера,
- б) матричним методом,
- в) методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -5 \\ -6x_1 + x_2 - 5x_3 = -20 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(2, 1, -4)$, $\vec{b}(-3, 1, 2)$, $\vec{c}(1, 0, 2)$, $\vec{d}(-21, 10, 6)$ в деякому базисі $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис тримірного простору і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Дано дві сторони трикутника $\overrightarrow{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$ і $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$. Обчислити довжину його висоти CD при умові, що $\vec{p}$ і $\vec{q}$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.
7. Знайти одиничний вектор $\vec{c}$, ортогональний векторам $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
8. Дано вершини трикутника A(3, 5), B(-3, 3), C(5, -8). Визначити довжину медіани, проведеної з вершини C.
9. Знайти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі $\frac{x}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5}$ і $\frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{5}$.
10. Скласти рівняння лінії, для кожної точки якої сума квадратів її відстаней до точок A(-3; 3) і B(7; 5) дорівнює 124. Зробити рисунок.
11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{2}{3 - \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої та побудувати її.
12. Знайти рівняння гіперболи, якщо відомо, що відстань між її директрисами дорівнює 6, а відстань між фокусами 10.
13. Знайти рівняння площини, яка перпендикулярна до площини $5x - y + 3z - 2 = 0$ і перетинає її по прямій, яка лежить в площині xOy.
14. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $\begin{cases} y^2 - x^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ навколо вісі Oy.
15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} y^2 + x + 4 \leq 0 \\ x - y + 4 \geq 0 \\ y \geq -2. \end{cases}$$

Варіант 29

1. Знайти $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}^T + 4\mathbf{E}$, де E – одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -7 \\ 6 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 9 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 4 & 1 \\ -9 & -4 & -9 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 14 & 3 & 9 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 = 14. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -5 \\ 3x_1 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 = -9 \\ x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(1, -2, 4)$, $\vec{b}(2, 0, 3)$, $\vec{c}(-3, 1, -4)$, $\vec{d}(11, -1, 23)$ в деякому базисі $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис тримірного простору і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо вектори $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ і $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ ортогональні?

7. Знайти кут між діагоналями паралелограма, сторонами якого є вектори $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

8. На осі ординат прямокутної системи координат знайти точку, однаково віддалену від початку координат і від прямої $3x - 4y + 12 = 0$.
9. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $A(3; 1; -2)$ і через пряму $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$.
10. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точки $C(1; 3)$ і від прямої $y = -1$. Зробити рисунок.
11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{5}{1-3\cos\varphi}$ в прямокутній декартовій системі координат. Визначити вид кривої та побудувати її.
12. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо мала вісь його видна із фокуса під прямим кутом.
13. Через лінію перетину площин $4x - y + 3z - 1 = 0$ і $x + 5y - z + 2 = 0$ провести площину, перпендикулярну до площини $2x - y + 5z - 3 = 0$.
14. Скласти рівняння циліндричної поверхні, твірні якої паралельні прямій $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$, а напрямна задана рівняннями $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ z = 0. \end{cases}$
15. Знайти графічно область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} y + x^2 - 3 \geq 0 \\ y \geq 5 \\ x \geq -1 \\ x \leq 2. \end{cases}$$

Варіант 30

1. Знайти $2BA - 8B^T + 2E$, де E – одинична матриця третього порядку,

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 5 \\ -4 & 4 & 8 \\ -7 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -8 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & 4 & -1 \\ 7 & -5 & 0 & 3 \\ 11 & -7 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -9. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь і, у випадку її сумісності, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

5. Дано чотири вектори $\vec{a}(1, 3, -2)$, $\vec{b}(2, -1, -2)$, $\vec{c}(-3, -2, 0)$, $\vec{d}(0, 7, -6)$ в деякому базисі $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$. Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис тримірного простору і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

6. Знайти вектор $\vec{x}$, ортогональний вектору $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, який має з ним однакову довжину і який лежить в площині Oyz.

7. Знайти площу паралелограма, сторонами якого є вектори $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

8. На прямій $2x + y + 11 = 0$ знайти точку, рівновіддалену від двох даних точок A(1; 1) і B(3; 0).

9. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{m} + 5\vec{n} + \vec{p}$,

$\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n} + \vec{p}$, $\vec{c} = 2\vec{m} + 7\vec{n} - \vec{p}$, якщо $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $|\vec{p}| = 1$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$, а

вектор $\vec{p}$ ортогональний векторам $\vec{m}$ і $\vec{n}$.

10. Визначити траєкторію руху точки М, яка, рухаючись, залишається вдвічі ближче до точки A(1; 0), ніж до точки B(4; 0). Зробити рисунок.

11. Знайти рівняння лінії $\rho = \frac{4}{5 + \cos \varphi}$ в прямокутній декартовій системі

координат. Визначити вид кривої та побудувати її.

12. Знайти рівняння гіперболи, якщо асимптоти її задані рівняннями $3x \pm 4y = 0$, а відстань між фокусами дорівнює 20.

13. Перевірити, чи лежать дві прямі $\begin{cases} 4x + y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 2z - 9 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 3x - 2y + z + 5 = 0 \\ x - 3y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$ в

одній площині? Якщо лежать, то знайти рівняння площини, в якій вони лежать.

14. Знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $\begin{cases} \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$,

навколо вісі Oy.

15. Знайти область розв'язків системи нерівностей графічно:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x + 3y \leq 3 \\ x - y + 1 \leq 0. \end{cases}$$