

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА АВТОМАТИЗАЦІЇ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ

ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ ТА
ЗОБРАЖЕНЬ

Методичні вказівки
для самостійної роботи
для студентів напрямку 6.050201 «Системна інженерія»

Кропивницький 2017

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА АВТОМАТИЗАЦІЇ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ

ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ ТА
ЗОБРАЖЕНЬ

Методичні вказівки
для самостійної роботи
для студентів напрямку 6.050201 «Системна інженерія»

Затверджена
на засіданні кафедри АВП
протокол №8 від 15.12.2017 р.

Кропивницький 2017

Цифрова обробка сигналів та зображень. Методичні вказівки для самостійної роботи для студентів напрямку 6.050201 «Системна інженерія»/ Укл. : В.А. Зозуля. І.А. Березюк - Кропивницький: ЦНТУ,2017. – 37с.

Укладачі: В.А. Зозуля – к.т.н., доцент кафедри АВП
І.А. Березюк – к.т.н., доцент кафедри АВП

Рецензент: С.І. Осадчий– проф., д.т.н.

ЦНТУ, 2017р.

Зміст

	Стор.
1. Загальні методичні рекомендації	2
1.1 Мета і призначення	2
1.2 Завдання на самостійну роботу	2
1.2.1 Розрахунок і дослідження нерекурсивних фільтрів	2
1.2.2. Розрахунок і дослідження рекурсивних фільтрів	4
1.3. Зміст РГР	5
1.4 Об'єм і вимоги до оформлення РГР	5
2. Методичні рекомендації за розрахунком і дослідженням нерекурсивних і рекурсивних цифрових фільтрів	6
2.1 Нерекурсивні цифрові фільтри (НЦФ)	6
2.2 Розрахунок цифрових фільтрів в командному вікні	13
2.2.1 Розрахунок коефіцієнтів a_k нерекурсивного фільтру за допомогою функції <code>fir1</code>	13
2.2.2 Побудова графіків АЧХ і ФЧХ	15
2.2.3 Побудова графіку ІПХ	16
2.3 Розрахунок фільтру a_k за допомогою пакету <code>sptool</code>	17
2.4 Розрахунок фільтру a_k за допомогою пакету <code>fdatool</code>	19
2.5 Моделювання процесу цифрової фільтрації	20
3. Рекурсивні цифрові фільтри (РЦФ або ІІР)	31
Список літератури	37

1. Загальні методичні рекомендації

1.1 Мета і призначення

Мета - закріплення і поглиблення теоретичного матеріалу курсу, а також підготовка студентів до самостійного і творчого рішення інженерних завдань, як в період дипломного проектування, так і в подальшій практичній діяльності.

Призначення роботи - практичне освоєння методів розрахунку нерекурсивних (FIR) і рекурсивних (IIR) цифрових фільтрів. Дослідження властивостей синтезованих фільтрів.

1.2 Завдання на самостійну роботу

1.2.1 Розрахунок і дослідження нерекурсивних фільтрів

Перелік вирішуваних завдань :

- 1) розрахунок і дослідження НЧ-фільтрів;
- 2) розрахунок і дослідження смугового фільтру.

Порядок виконання роботи :

1. Вибрати з таблиці 1.1 свій варіант параметрів фільтру ФНЧ1, що синтезується, - номер варіанту відповідає двом останнім цифрам номера у вашій заліковій книжці.
2. Вручну, тобто без комп'ютера:
 - 1) розрахувати коефіцієнти фільтру a_k ;
 - 2) записати рівняння фільтру;
 - 3) записати аналітичне вираження частотної характеристики фільтру $H_d(\omega)$.
3. За допомогою програми Matlab вичислити коефіцієнти нерекурсивного фільтру нижніх частот. Зіставити (у табличній формі) розрахункові і вичислені за допомогою програми Matlab коефіцієнти фільтру, побудувати графіки імпульсного відгуку, АЧХ і ФЧХ фільтру.
4. Повторити дії з пп.1-3 для іншого фільтру - ФНЧ2.
5. За результатами розрахунку ФНЧ1 і ФНЧ2 розрахувати (без комп'ютера) коефіцієнти смугового фільтру з частотами зрізу f_{c1} і f_{c2} ($f_{c1} < f_{c2}$).
6. За допомогою програми Matlab провести розрахунок коефіцієнтів цього ж смугового цифрового фільтру і побудувати графіки його імпульсною і частотною характеристик. Зіставити (у табличній формі) розрахункові і вичислені за допомогою програми Matlab коефіцієнти смугового фільтру.
7. Синтезувати вхідний сигнал у вигляді адитивної суміші гармонійного сигналу з шумом. Частота гармонійного сигналу $f_0 = (f_{c1} + f_{c2})/2$, амплітуда $A=1$, тривалість

$T = 10/f_0$. Шум - з нормальним розподілом, нульовим середнім значенням і одиничним стандартним відхиленням.

8. Провести фільтрацію суміші сигналу з шумом розрахованим смуговим фільтром. Побудувати графіки фільтрованої суміші і результату фільтрації.
9. Згенерувати і профільтрувати (розрахованим смуговим фільтром) сигнал у вигляді послідовності знакопозитивних прямокутних імпульсів амплітудою $A=1$, тривалістю $T = 10/f_0$, наступних з частотою $f_0 = (f_{c1} + f_{c2})/2$. Відносна тривалість імпульсів $\tau_0 = 0.3$. Побудувати графіки фільтрованої суміші і результату фільтрації.
10. Зробити висновки по першій частині роботи: пояснити вид отриманих графіків, а також відповісти на контрольні питання з теоретичної частини до цієї роботи.

Таблиця 1.1

Вар.	Ф-гр	N	f_d	f_c	Вікно (НЦФ)	Прототип (РЦФ)	Сигнал
1	ФНЧ1	3	600	50	Прямокутне	Баттерворт	Прямокутний імпульс
	ФНЧ2	3	600	70			
2	ФНЧ1	4	900	60	Ганна	Бесселя	Трикутний імпульс
	ФНЧ2	4	900	90			
3	ФНЧ1	5	1200	80	Трикутне	Чебышева I	Синусоїдальний імпульс
	ФНЧ2	5	1200	130			
4	ФНЧ1	6	1500	120	Хэмминга	Баттерворт	Експоненціальний імпульс
	ФНЧ2	6	1500	160			
5	ФНЧ1	7	1800	140	Блэкмана	Кауера	Пачка з двох прямокутних імпульсів
	ФНЧ2	7	1800	200			
6	ФНЧ1	7	2100	175	Ланчоса	Чебишева I	Пачка з двох трикутних імпульсів
	ФНЧ2	7	2100	220			
7	ФНЧ1	6	2400	200	Ганна	Баттерворт	Пачка з двох синусоїдальних імпульсів
	ФНЧ2	6	2400	300			
8	ФНЧ1	5	2700	225	Трикутне	Кауера	Пачка з двох експоненціальних імпульсів
	ФНЧ2	5	2700	300			
9	ФНЧ1	4	3000	250	Хэмминга	Бесселя	Пачка з трьох прямокутних імпульсів
	ФНЧ2	4	3000	350			
10	ФНЧ1	3	3300	260	Блекмана	Баттерворт	Пачка з трьох трикутних імпульсів
	ФНЧ2	3	3300	360			
11	ФНЧ1	3	600	50	Прямокутне	Бесселя	Пачка з трьох синусоїдальних імпульсів
	ФНЧ2	3	600	70			
12	ФНЧ1	4	900	60	Ганна	Чебишева I	Пачка з трьох експоненціальних імпульсів
	ФНЧ2	4	900	90			
13	ФНЧ1	5	1200	80	Трикутне	Кауера	Прямокутний радіоімпульс
	ФНЧ2	5	1200	130			
14	ФНЧ1	6	1500	120	Хэмминга	Бесселя	Трикутний радіоімпульс
	ФНЧ2	6	1500	160			
15	ФНЧ1	7	1800	140	Блекмана	Баттерворт	Синусоїдальний радіоімпульс
	ФНЧ2	7	1800	200			
16	ФНЧ1	7	2100	175	Ланчоса	Кауера	Експоненціальний радіоімпульс

	ФНЧ2	7	2100	220			
17	ФНЧ1	6	2400	200	Ганна	Чебишева I	Пачка з двох прямокутних радіоімпульсів
	ФНЧ2	6	2400	300			
18	ФНЧ1	5	2700	225	Трикутне	Бесселя	Пачка з двох трикутних радіоімпульсів
	ФНЧ2	5	2700	300			
19	ФНЧ1	4	3000	250	Хемминга	Кауєра	Пачка з двох синусоїдальних радіоімпульсів
	ФНЧ2	4	3000	350			
20	ФНЧ1	3	3300	260	Блекмана	Баттерворт	Пачка з двох експоненціальних радіоімпульсів
	ФНЧ2	3	3300	360			
21	ФНЧ1	3	3300	260	Блекмана	Чебишева I	Пачка з трьох прямокутних радіоімпульсів
	ФНЧ2	3	3300	360			
22	ФНЧ1	3	600	50	Прямокутне	Баттерворт	Пачка з трьох трикутних радіоімпульсів
	ФНЧ2	3	600	70			
23	ФНЧ1	4	900	60	Ганна	Кауєра	Пачка з трьох синусоїдальних радіоімпульсів
	ФНЧ2	4	900	90			
24	ФНЧ1	7	2100	175	Ланчоса	Бесселя	Пачка з трьох експоненціальних радіоімпульсів
	ФНЧ2	7	2100	220			
25	ФНЧ1	6	2400	200	Ганна	Чебишева I	Прямокутний імпульс
	ФНЧ2	6	2400	300			

1.2.2. Розрахунок і дослідження рекурсивних фільтрів

Перелік вирішуваних завдань :

- 1) розрахунок і дослідження НЧ-фільтрів;
- 2) розрахунок і дослідження смугового фільтру.

Порядок виконання роботи :

1. Провести розрахунок ФНЧ1, ФНЧ2 і смугового рекурсивних фільтрів за тими ж початковими даними, що і для нерекурсивних фільтрів (згідно зі своїм варіантом), з тими лише відмінностями, що:
 - 1) для усіх варіантів приймати порядок фільтру $N=2$;
 - 2) ручний розрахунок коефіцієнтів фільтру a_k і b_k не проводити;
 - 3) синтез фільтрів проводити тільки за допомогою програми Matlab - за результатами синтезу записати аналітичні вирази для імпульсної і комплексної частотної характеристик усіх синтезованих фільтрів;
 - 4) провести фільтрацію сигналів смуговим фільтром за допомогою програми Matlab (Примітка: проводячи фільтрацію, в якості вхідних сигналів використовуйте ті ж сигнали, що і для нерекурсивного фільтру - це дозволить порівняти результати фільтрації рекурсивним і нерекурсивним фільтрами при одних і тих же вхідних даних).
2. Зробити висновки по другій частині роботи : пояснити вид отриманих графіків, а також відповісти на контрольні питання з теоретичної частини до цієї роботи.

- Зробити висновки по роботі в цілому (виявите тут, як мінімум, розуміння того, що ви виконали, а також - самостійність мислення). Врахуйте, скопійовані один у одного виводи цінуються тим нижче, чим вище їх наклад.

1.3. Зміст РГР

Записка РГР комплектується в наступному порядку:

- Титульний аркуш оформляється відповідно до вимог ГОСТ 2.105-79. Вважається першим листом РГР.

- Зміст є другим листом ПЗ, виконується на листі формату А4 з основним написом по ГОСТ 2.104-68.

- Вступ; основна частина, що включає: розрахунок і дослідження цифрових фільтрів; висновок; перелік використовуваної літератури; застосування (лістинг програм).

Якщо в тексті прийнята спеціальна термінологія, то у кінці перед списком літератури має бути приведений перелік прийнятих термінів з відповідними роз'ясненнями. Перелік також включають в зміст роботи.

- Нумерація листів ПЗ і застосування наскрізна. Усі застосування з вказівкою їх номерів і заголовків мають бути перераховані в змісті.

1.4 Об'єм і вимоги до оформлення РГР

РГР виконується у вигляді рукописної (машинописною) записки пояснення загальним об'ємом 20 - 25 стор. стандартного формату А4 (297(210мм) ГОСТ 2.301-68. На форматі роблять рамку, віддалену від лінії відрізу формату на 20 мм ліворуч і 5 мм з інших сторін. У середині рамки виконується напис по формах 2 або 2а по ГОСТ 2.104-79. Відстань від внутрішньої рамки до меж тексту слід залишати: на початку рядків - не менше 5 мм, у кінці рядків - не менше 3 мм. Відстань від верхнього або нижнього рядка тексту до верхньої або нижньої рамки - не менше 10 мм.

Писати слід тільки на одній стороні листа. Титульний аркуш виконується відповідно до ГОСТ 2.105-79.

Абзаци в тексті слід починати з відступом від лівої межі тексту на 15 - 17 мм. Текст документу розділяють на розділи і підрозділи, а при необхідності на пункти і підпункти.

Порядок побудови розділів і підрозділів, правила викладу тексту, розрахунків, а також побудови таблиць повинні відповідати ГОСТ 2.105-79. Загальні вимоги до текстових документів і ГОСТ 7.32-81. Звіт про науково - дослідницькій роботі.

Основні графічні матеріали наводяться на двох аркушах формату А1 з основним написом по ГОСТ 2.104-68.

2. Методичні рекомендації за розрахунком і дослідженням нерекурсивних і рекурсивних цифрових фільтрів

2.1 Нерекурсивні цифрові фільтри (НЦФ)

Основні визначення. Відмітною особливістю НЦФ є залежність вихідного сигналу $y(n)$ тільки від вхідних сигналів зараз часу $x(n)$ і попередні моменти $x(n - k)$. Алгоритм (рівняння) НЦФ порядку N записують у виді

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n - k).$$

Для розрахунків зручніше використовувати фільтр близько $2N$ з алгоритмом фільтрації виду :

$$y(n) = \sum_{k=-N}^N a_k x(n - k) \quad (2.1)$$

При $N=2$ відповідно до (2.1) можна записати

$$y(n) = a_{-2}x(n + 2) + a_{-1}x(n + 1) + a_0x(n) + a_1x(n - 1) + a_2x(n - 2)$$

де

$x(n)$ - вхідний сигнал (відлік сигналу) у момент часу nT_d ;

$y(n)$ - відповідний вихідний сигнал;

T_d - період дискретизації.

При такому записі алгоритму фільтрації вихідний сигнал у момент часу n можна вчислити тільки тоді, коли стануть відомими "майбутні" вхідні відліки. Це означає необхідність затримки вихідного сигналу фільтру відносно вхідного.

Якщо на НЦФ подати одиничний імпульс \square

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0 \\ 0 & \text{при } n \neq 0 \end{cases},$$

те відповідно до (2.1) на виході повинна з'явитися послідовність з $(2N+1)$ відліків, що відповідають ваговим коефіцієнтам фільтру a_k . Очевидно, що ця послідовність кінцева, тому НЦФ має кінцевий імпульсний відгук і називається фільтром з кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ-фільтром або FIR (finite impulse response filtre) фільтром).

Якщо на НЦФ подати дискретне гармонійне коливання:

$$x_n = \exp(j\omega n T_d),$$

тоді з (2.1) слідує

$$y_n = \sum_{k=-N}^N a_k \cdot \exp[j\omega(n-k)T_d],$$

звідки передавальна функція НЦФ

$$H_d(\omega) = \left. \frac{Y_n}{X_n} \right|_{x_n = \exp(j\omega n T_d)} = \sum_{k=-N}^N a_k \exp(-j\omega k T_d) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(-j\omega k T_d).$$

Неважко перевірити, що $H_d(\omega)$ - періодична з періодом $2\pi/T_d$ функція частоти, тобто

$$H_d(\omega) = H_d(\omega + r \cdot 2\pi/T_d), \quad r = \pm 1, 2, \dots$$

Таким чином, $H_d(\omega)$ може бути представлена рядом Фур'є в частотній області, причому коефіцієнти a_k цього ряду визначаються співвідношенням:

$$a_k = \frac{T_d}{2\pi} \int_{-\pi/T_d}^{\pi/T_d} H_d(j\omega) \exp(j\omega k T_d) d\omega.$$

При розрахунках зручно оперувати парними або непарними відносно k коефіцієнтами a_k . В цьому випадку спрощується вид передавальної функції $H_d(\omega)$. Для парних $a_k = a_{-k}$ передавальна функція $H_d(\omega)$ речова і складається з суми зважених косинусоїд :

$$H_d(\omega) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^N a_k \cos \omega k T_d,$$

а для непарних $a_k = -a_{-k}$ - чисто уявна і складається з суми синусоїд :

$$H_d(\omega) = -2j \sum_{k=1}^N a_k \sin \omega k T_d.$$

Розрахунок цифрового ФНЧ. Для визначення параметрів цифрового нерекурсивного НЧ-фільтру за основу береться ідеальний фільтр нижніх частот (ФНЧ). Ідея методу розрахунку зводиться до апроксимації ідеального ФНЧ, передавальна функція якого має вигляд:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{для } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{для } |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (2.2)$$

де ω_c - частота зрізу (іноді її означають ω_b і називають "верхня гранична частота").

Ця передавальна функція $H(j\omega)$ може бути періодизирована з періодом $2\pi/T_d$, після чого також може бути представлена рядом Фур'є, який тим краще апроксимуватиме $H(j\omega)$, ніж більше складових міститиме. Якщо ж таке розкладання "усікти", тобто залишити в ній стільки складових, скільки коефіцієнтів фільтру ми хочемо вичислити, тоді результат такого усікання природно трактувати як $H_d(j\omega)$. З'являється різниця між $H(j\omega)$ і її апроксимацією $H_d(j\omega)$. Одним з кількісних критеріїв такої різниці є метод найменших квадратів Гауса : середній квадрат різниці має бути мінімальним:

$$\frac{T_d}{2\pi} \int_{-\pi/T_d}^{\pi/T_d} [H(j\omega) - H_d(j\omega)]^2 d\omega = \min.$$

Можна показати, що відповідно до ці критерієм помилка апроксимації буде мінімальною, якщо вагові коефіцієнти шуканого фільтру обчислювати як коефіцієнти Фур'є розкладання в ряд періодизированной функції $H(j\omega)$. Враховуючи (2.2), можна записати для парних функцій a_k :

$$a_k = a_{-k} = \frac{T_d}{\pi} \int_0^{\omega_c} 1 \cdot \cos k\omega T_d d\omega = \frac{T_d}{\pi} \frac{\sin k\omega_c T_d}{k T_d} = \frac{\omega_c T_d}{\pi} \frac{\sin k\omega_c T_d}{k \omega_c T_d} = \frac{2f_c}{f_d} \frac{\sin k \frac{\omega_c}{f_d}}{k \frac{\omega_c}{f_d}} \quad (2.3)$$

Таким чином, коефіцієнт a_k ($k = 0, \dots, N$) залежить від відношення частоти зрізу до частоти дискретизації. Тому при розрахунках зручно використовувати відносну частоту зрізу

$$\Omega_c = \frac{\omega_c}{f_d} = 2\pi \frac{f_c}{f_d}.$$

В цьому випадку

$$a_k = a_{-k} = \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin k\Omega_c}{k\Omega_c} = \frac{\Omega_c}{\pi} Sa(k\Omega_c), \quad (2.4)$$

де $Sa(x) = \sin x/x$.

Приклад 1. Розрахувати ФНЧ 6-го порядку ($N=3$) для $f_c = 25$ Гц, $f_d = 100$ Гц.

По розрахункових формулах (2.4) отримуємо:

$$a_0 = 0.5; \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{\pi} = 0.3183; \quad a_2 = a_{-2} = 0; \quad a_3 = a_{-3} = -\frac{1}{3\pi} = -0.1061.$$

Цікаво і корисно перевірити, чи дійсно ці коефіцієнти з точністю до коефіцієнта $\Delta t = 1/f_d$ співпадають зі значеннями ПХ $h(k\Delta t)$:

$$a_k = \Delta t \cdot h(k\Delta t).$$

Зворотне перетворення Фур'є від функції

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

дає вираження для ПХ аналогового фільтру:

$$h(t) = 2f_c \text{Sa}(2\pi f_c t),$$

звідки слідує

$$h(k\Delta t) = 2f_c \text{Sa}(2\pi f_c k\Delta t) = f_d \frac{\Omega_c}{\pi} \text{Sa}(k\Omega_c) = \frac{1}{\Delta t} a_k.$$

Відстань між нулями функції:

$$\Delta\tau = \frac{1}{2f_c}.$$

Було прийнято $f_c = \frac{f_d}{4} = \frac{1}{4\Delta t}$, звідки слідує $\Delta\tau = 2\Delta t$. Дійсно, коефіцієнт $a_2 = 0$.

Ясно також, що усі парні коефіцієнти мають дорівнювати 0.

Для ілюстрації побудуємо графік функції (рис.2.1).

Програма побудови графіку в Matlab:

```
% % Графік ПХ безперервного ФНЧ
dt=1;           % крок дискретизації
dtau=2*dt;    % відстань між нулями
fc=1/(2*dtau); % частота зрізу
t=-3*dtau :0.1:3*dtau; % час
h=2*fc*sinc(2*fc*t); % ПХ
plot(t, h)     % графік
grid on       % сітка на графіці
```

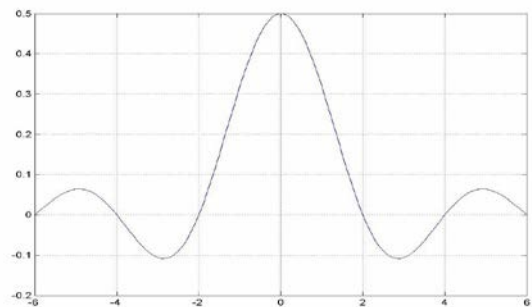


Рис.2.1

Побудуємо частотну характеристику розрахованого фільтру (рис.2.2):

$$H_d(\omega) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^N a_k \cos \omega k\Delta t$$

Програма:

```
% % Частотна хар-ка ФНЧ
```

```

a0=0.5;           % нульовий коефіцієнт фільтру
ak=[0.3183 0 -0.1061]; % коефіцієнти фільтру с 1 по 3
dt=1;           % крок дискретизації
N=3;           % половина порядку фільтру
df=0.02;       % крок по частоті
f=-0.5: df :1.5; % діапазон частот
% % розрахунок суми
sum=0;
for k=1: N
    sum=sum+ak(k)*cos(2*pi*f*k*dt);
end;
H=a0+2*sum;     % частотна хар-ка
plot(f, H)      % побудова графіку
grid on        % побудова сітки

```

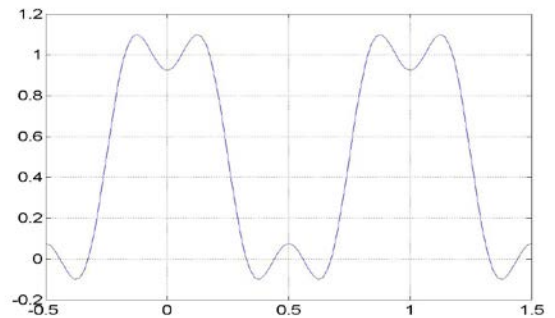


Рис.2.2

Як видно з графіку на рисунку 2.2, частотна характеристика фільтру 3-го порядку істотно відрізняється від прямокутника з відносною частотою зрізу $f_c/f_d = 1/4$. Вважаючи, що причина тому - малий порядок фільтру.

Розрахунок фільтрів верхніх частот (ФВЧ), смугових (СФ) і режекторних фільтрів (РФ) проводиться на підставі теореми складання перетворень Фур'є.

Вибір частоти дискретизації. Як відзначалося вище, найважливіший параметр, що визначає коефіцієнти нерекурсивного ФНЧ - це відношення f_c/f_d . Інший не менш важливий параметр - порядок фільтру $2N$. Виявляється, фіксуючи порядок фільтру $2N$, ми "автоматично" ставимо завдання про оптимальний в деякому розумінні вибір співвідношення між частотою дискретизації f_d і частотою зрізу f_c . Виходячи з цього, на практиці рекомендують вибирати "оптимальні" значення $f_c/f_d = 4$ або $f_c/f_d = 6$.

Якщо врахувати зв'язок a_k і ПХ $h(t)$ безперервного (аналогового) фільтру :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau, \quad (2.5)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(jf)\exp(j2\pi ft)df = \int_{-f_c}^{f_c} \exp(j2\pi ft)df = 2f_c Sa(2\pi f_c t). \quad (2.6)$$

Порівнюючи (2.6) і (2.4), приходимо до висновку, що $a_k = T_d h(kT_d)$, тобто з точністю до множника T_d коефіцієнти цифрового фільтру співпадають зі значеннями ПХ аналогового фільтру, узятими в дискретні моменти часу T_d .

До такого ж висновку приходимо, порівнюючи (2.5) з (2.1) і приблизно замінюючи співвідношення (2.5) його дискретним аналогом

$$y(nT_d) = T_d \sum_{k=-N}^N h(kT_d) x[(n-k)T_d].$$

Функція $Sa(2\pi f_c t)$ має нулі в точках $t_k = \pm k \frac{1}{2f_c}$. А відліки ПХ $h(t)$ беруться в моменти часу $t_n = nT_d = n \frac{1}{f_d}$. Вибираючи $f_d = 2f_c$, ми отримуємо єдиний ненульовий відлік a_0 , що відповідає так-званому "всечастотному" фільтру (ВФ) (рис 2.3).

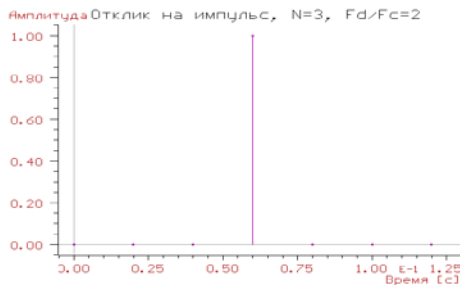


Рис.2.3, а

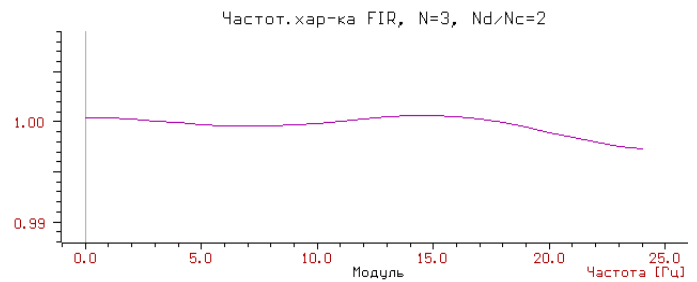


Рис.2.3, б

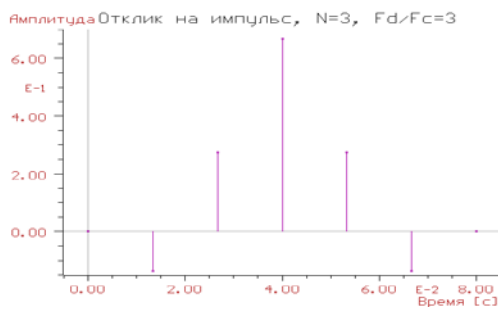


Рис.2.4, а

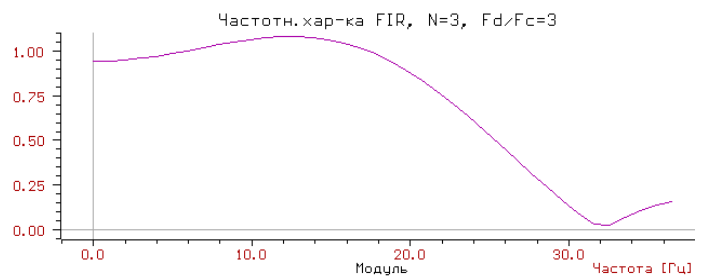


Рис.2.4, б

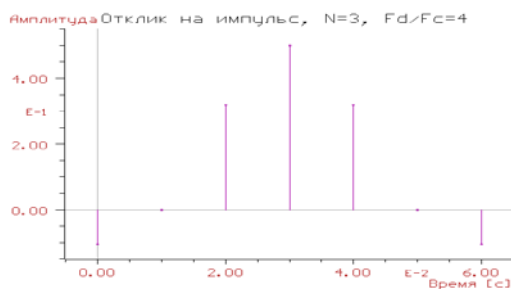


Рис.2.5, а

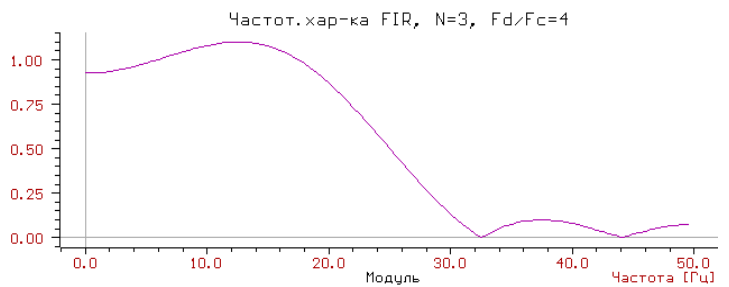


Рис.2.5, б

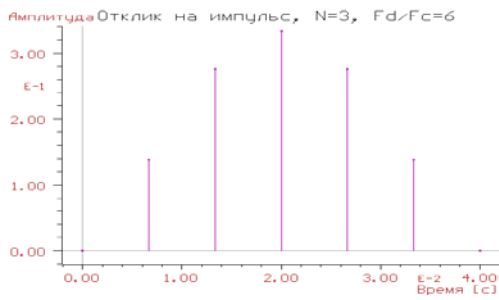


Рис.2.6, а

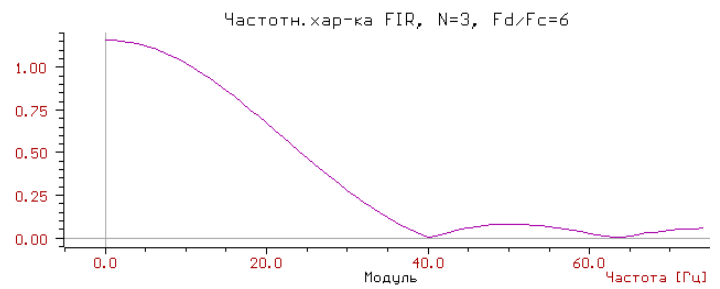


Рис.2.6, б

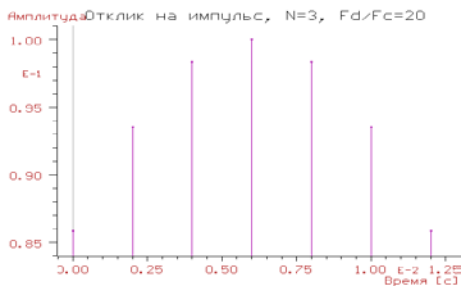


Рис.2.7, а

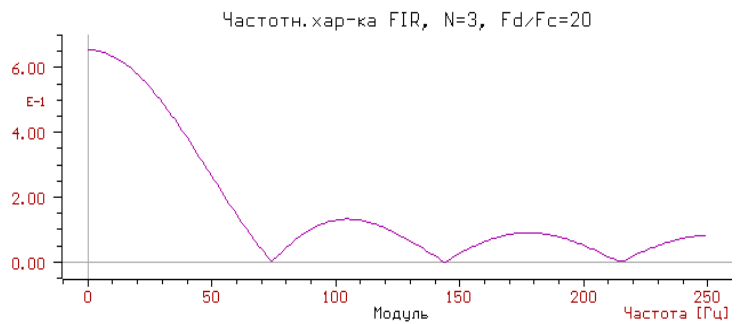


Рис.2.7, б

Вибір $f_d = 3 f_c$ (рис.2.4), в принципі, дає очікуваний результат, проте вибираючи $f_d = 4 f_c$ (рис.2.5), отримаємо ситуацію, при якій усі парні a_k дорівнюють нулю, - це означає економію в об'ємі обчислень при цифровій фільтрації. А при $f_d = 6 f_c$ (рис.2.6) нулю дорівнюють коефіцієнти з номерами, кратними 3, що також призводить до економії, хоча і меншої. Істотно збільшуючи відношення f_c / f_d при невеликих N , промальовувався тільки малу околицю верхівки функції $Sa(2\pi f_c t)$ і, як наслідок, виходить незадовільна "прямокутність" форми функції $H_d(j\omega)$ (рис.2.7).

Розрахунок ВЧ, смугових і режсекторних цифрових фільтрів

А. Перетворення ФНЧ у ФВЧ.

Всечастотний фільтр (ВФ) пропускає без послаблення усі частоти. Його рівняння

$$y(n) = x(n)$$

Має місце тільки один коефіцієнт, не рівний 0

$$a_0 = 1.$$

Якщо із спектру всечастотного фільтру відняти спектр ФНЧ, то залишиться спектр ФВЧ з тією ж частотою зрізу ω_c . Для коефіцієнтів ФВЧ це означає:

$$a_k, \text{ ФВЧ} = a_k, \text{ ВФ} - a_k, \text{ НЧ} \tag{2.7}$$

Б. Перетворення ФНЧ в СФ.

За основу береться ФНЧ з частотою зрізу ω_b , яка відповідає верхній частоті зрізу шуканого СФ. Із спектру цього ФНЧ віднімається спектр іншого ФНЧ з меншою (нижньою) частотою зрізу ω_n . В результаті залишиться спектр смугового фільтру із зоною пропускання між ω_n і ω_b . Шукані коефіцієнти СФ розраховуються по формулі

$$a_{k, \text{СФ}} = a_{k, \text{ФНЧ(в)}} - a_{k, \text{ФНЧ(н)}} \quad (2.8)$$

В. Перетворення ФНЧ в РФ.

Якщо із спектру всечастотного фільтру (ВФ) відняти спектр смугового фільтру (СФ), то залишиться спектр режекторного фільтру (РФ). Для коефіцієнтів фільтру це означає

$$a_{k, \text{РФ}} = a_{k, \text{ВФ}} - a_{k, \text{ФНЧ(в)}} + a_{k, \text{ФНЧ(н)}} \quad (2.9)$$

У середовищі Matlab цифрові фільтри можна розрахувати щонайменше 3 способами:

- 1) у командному вікні;
- 2) за допомогою пакету sptool;
- 3) за допомогою пакету fdatool.

2.2 Розрахунок цифрових фільтрів в командному вікні

2.2.1 Розрахунок коефіцієнтів a_k нерекурсивного фільтру за допомогою функції fir1

Функція fir1 реалізує обчислення за методом зворотного перетворення Фур'є з використанням вікон:

a=fir1(n, Wn', ftype', window', normalization')

Тут:

n - порядок фільтру - ціле парне число (к-ть коефіцієнтів фільтру рівна n+1);

Wn - відносна частота зрізу (по відношенню до частоти Найквіста, рівної половини частоти дискретизації F_d) - число в діапазоні (0,1); є вектором з двох чисел, якщо фільтр смуговий або режекторний;

'ftype' - тип фільтру (**'low'** - ФНЧ; **'high'** - ФВЧ; **'bandpass'** - смуговий; **'stop'** - режекторний);

Примітка: в Matlab 5.3 явна вказівка типу фільтру 'low' призводить до відмови від обчислень - в цьому випадку параметр 'ftype' треба опускати.

window - вектор-стовпець з n+1 елементів (за умовчанням застосовується вікно Хеммінга **hamming(n+1)**)

'normalization' - нормування АЧХ і ПІХ (за умовчанням значення **'scale'** - одиничне значення АЧХ в центрі смуги пропускання; **'noscale'** - нормування не проводиться).

Примітка: при нормалізації максимальне значення АЧХ в точності дорівнює одиниці. За відсутності нормалізації із-за ефекту Гіббса максимальне значення АЧХ більше одиниці. Цим і пояснюється, що розраховані коефіцієнти фільтру у відсутність нормалізації більше таких за наявності нормалізації (див. нижче приклад).

Приклад 2:

```
window=rectwin(7)    % синтез прямокутного вікна з 7 відліків
a=fir1(6,0.5, window) % розрахунок коеф-в КІХ-фільтру з нормалізацією
```

Результат:

```
a=[ -0.1148  0.0000  0.3443  0.5409  0.3443  0.0000 -0.1148]
```

Порівнюючи ці результати з розрахованими вручну коефіцієнтами, неважко бачити різницю. Наприклад, ручні розрахунки дають $a_0 = 0.5$, тоді як в Matlab ми отримали $a_0 = 0.5409$. Природно припустити, що причиною тому нормування ПІХ, що проводиться за умовчанням. Перевіримо це припущення, задаючи в програмі значення **'noscale'** для параметра нормалізації :

```
window=rectwin(7)    % синтез прямокутного вікна з 7 відліків
a=fir1(6,0.5, window', noscale') % розрахунок коеф-в КІХ-фільтру без нормалізації
```

Результат:

```
a=[ -0.1061  0.0000  0.3183  0.5000  0.3183  0.0000 -0.1061]
```

У наведеному вище прикладі прямокутне вікно генерувалося за допомогою функції **rectwin(n+1)**, де n - порядок нерекурсивного фільтру. Слід зазначити, що прямокутне вікно можна згенерувати також за допомогою функції **boxcar(n+1)**. Інші типи вікон, можна згенерувати за допомогою функцій, перерахованих в приведеній нижче таблиці:

Найменування вікна	Функція
Трикутне (Бартлетта)	bartlett(n+1)

Ханна (Хэннинга)	hann(n+1)
Хэмминга	hamming(n+1)
Блэкмена	blackman(n+1)

Функція генерування вікна Лангоса відсутня в Matlab, тому це вікно слід згенерувати самостійно, використовуючи командне вікно (діалоговий режим обчислень) або вікно редагування m -файлов (автоматичний режим обчислень).

2.2.2 Побудова графіків АЧХ і ФЧХ

Існує декілька способів побудови графіків АЧХ і ФЧХ. При використанні команд

freqz(a, b)

чи

freqz(a, b, N) % N - число відліків АЧХ і ФЧХ

графіки АЧХ і ФЧХ будуються в діапазоні 0 - 1 нормованих (по частоті Найквіста $F_d/2$) значень частоти частот (рис.2.8).

Замість нормованих частот можна працювати і з "звичайними", тобто ненормованими, частотами.

Наприклад, при використанні команд

[H, f] = freqz(a, b, N, fs);

figure; plot(f, 20*log10(abs(H))); grid on

буде побудований графік АЧХ в діапазоні частот (0 - $f_s/2$) Гц.

А при використанні команд

[phi, f] = phasez(a, b, N, fs);

figure; plot(f, phi/pi*180); grid on

буде побудований графік ФЧХ в діапазоні частот (0 - $f_s/2$) Гц.

Отримані рисунки доцільно зберігати на диску шляхом експортування у форматі *.jpg.

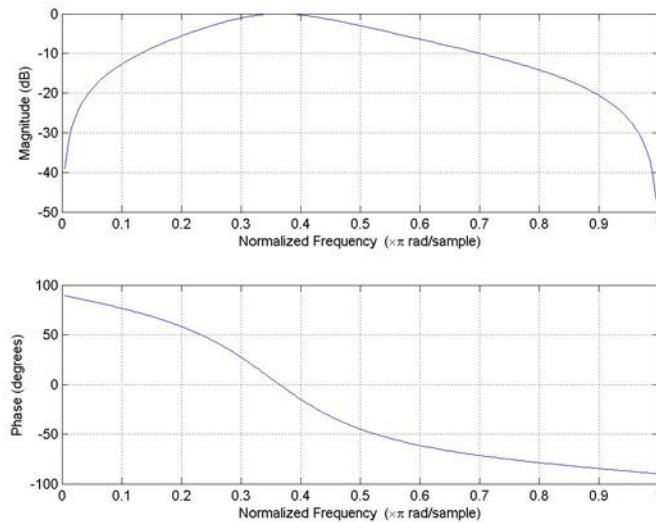


Рис.2.8 АЧХ і ФЧХ смугового фільтру Баттерворта 2-го порядку для $w_1=0.25$, $w_2=0.5$

2.2.3 Побудова графіку ПХ

Побудову графіку ПХ зручно здійснювати парою команд :

[h, t] = impz(a, b);

stem(t, h)

При цьому у разі рекурсивного фільтру кількість відліків ПХ, що виводяться, вибирається автоматично (рис.2.9).

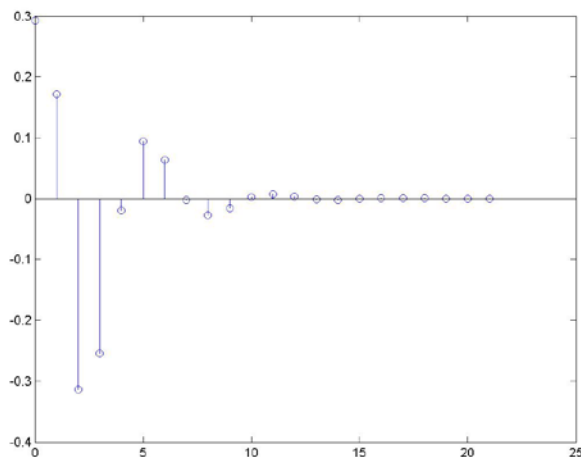


Рис.2.9 ПХ смугового фільтру Баттерворта 2-го порядку для $w_1=0.25$, $w_2=0.5$

Пара команд

[h, t] = impz(a, b, N); % N - число відліків ПХ

stem(t, h)

дозволяє вивести на графік N відліків ПІХ.

2.3 Розрахунок фільтру a_k за допомогою пакету `sptool`

Для активізації пакету треба в командному вікні набрати команду `sptool`. Потім у вікні (рис.10), що з'явилося, в колонці кнопок "Filters" натиснути кнопку "New".

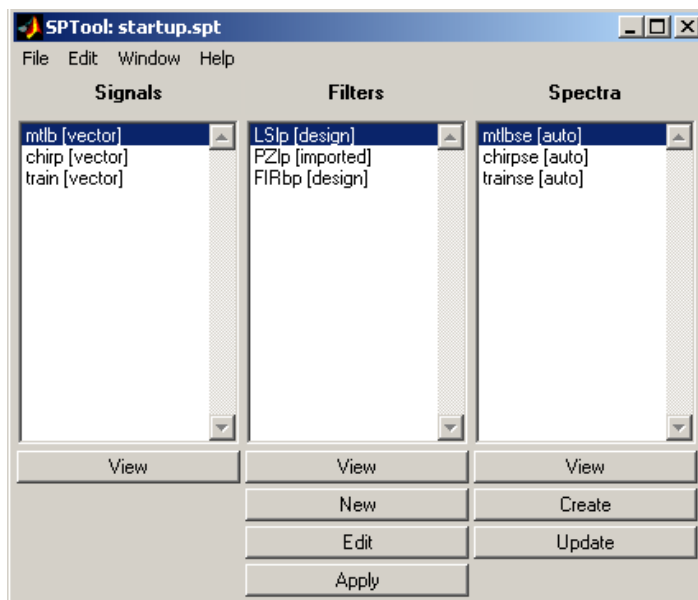


Рис.10. Вікно графічного інтерфейсу пакету `sptool`

У вікні Filter Designer (рис.2.11), що з'явилося:

- 1) задати частоту дискретизації (задаємо 100 Гц, як в Прикладі 1);
- 2) вибрати у позиції **Algorithm** значення **Kaiser Window FIR** (вибираємо з 3-х варіантів: **Equiripple FIR**, **Least Square FIR** і **Kaiser Window FIR**);
- 3) відключити прапорець **Minimum Order**;
- 4) задати **Order=6**;
- 5) задати **Type=lowpass**;
- 6) задати **Passband Fp=25**;
- 7) відключити прапорець **Autodesigne**;
- 8) натиснути кнопку **Apply**;
- 9) у вікні `sptool` в колонці **Filters** натиснути кнопку **View**;
- 10) у вікні, що з'явилося, **Filter Viewer** спостережуваний графіки АЧХ, ФЧХ, ПІХ (ПІХ спостережуваний після активізації відповідного прапорця).

*Примітка: ми вибрали у позиції **Algorithm** значення **Kaiser Window FIR**. Окрім цього алгоритму, є ще два алгоритми: **Equiripple FIR**, **Least Square FIR**. З усіх цих 3-х алгоритмів тільки алгоритм Кайзера реалізує метод зворотного перетворення Фур'є з*

ваговим вікном Кайзера. При значенні параметра $\beta = 0$ вікно Кайзера перетворюється на звичайне прямокутне вікно.

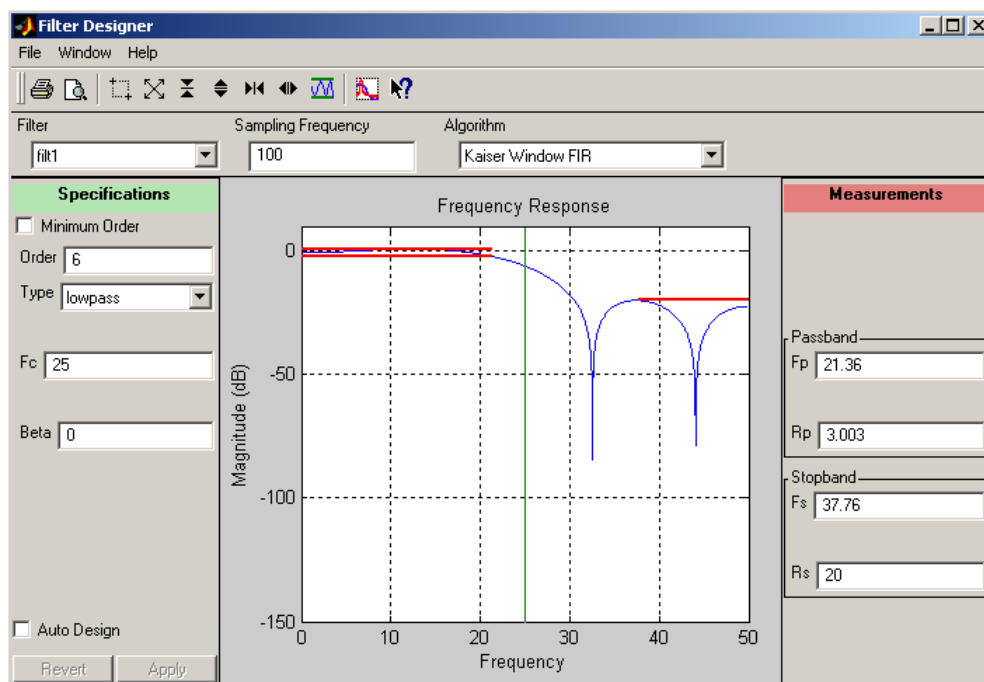


Рис.2.11. Вікно Filter Designer

Як показує експеримент, розраховані таким чином коефіцієнти ФНЧ виявляються ненормованими, тобто в точності рівними вичисленим вручну.

Примітка: щоб упізнати значення коефіцієнтів, треба:

- 1) активізувати графік ППХ, клацнувши після нього мишкою;
- 2) активізувати вертикальні маркери (кнопкою, розташованою під меню);
- 3) помістити один з маркерів (всього є 2 маркери - 1-ою зображується суцільною вертикальною лінією. 2-й - пунктирною) навпроти потрібного відліку ППХ;
- 4) рахувати значення відліку ППХ в спеціальному віконці.

На рис.2.12 показано вікно **Filter Viewer** (у режимі перед друкарського перегляду) для даного конкретного випадку (маркер 1 встановлений проти максимального відліку, рівного 0.5, а маркер 2 - проти суміжного відліку, рівного 0.3183)

Пакет **sptool** дозволяє моделювати процес фільтрації за допомогою розрахованого фільтру. Для цього в середу пакету **sptool** треба імпортувати вхідний сигнал, з генерований в робочому вікні програми **Matlab**. Фільтрація відбувається після натиснення кнопки **Apply**.

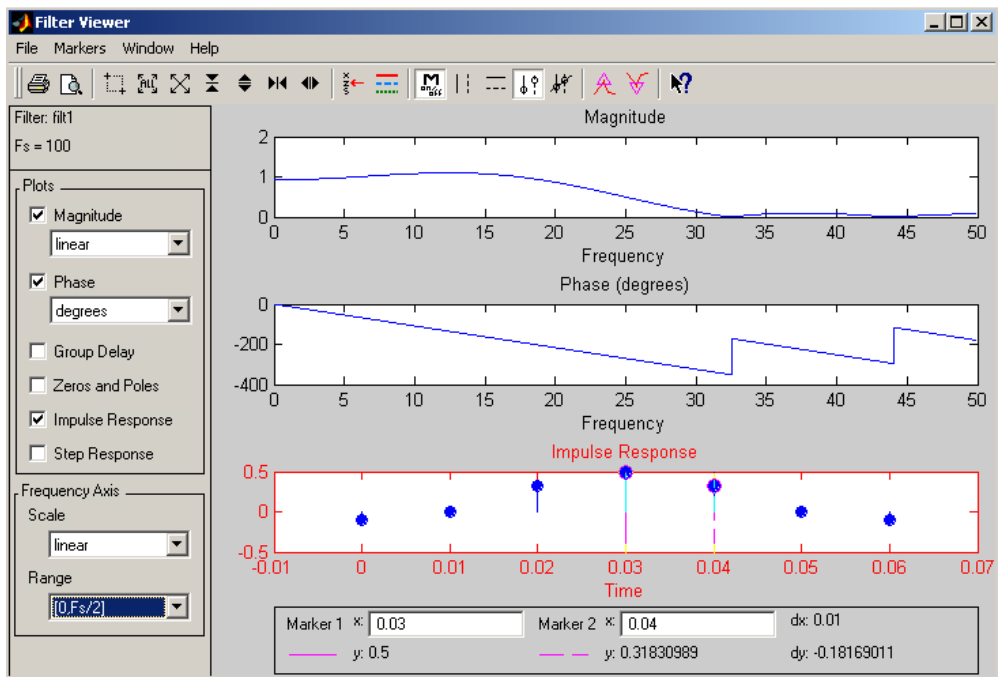


Рис.2.12. Вікно Filter Viewer

2.4 Розрахунок фільтру a_k за допомогою пакету fdatool

Для активізації пакету треба в командному вікні набрати команду **fdatool**.

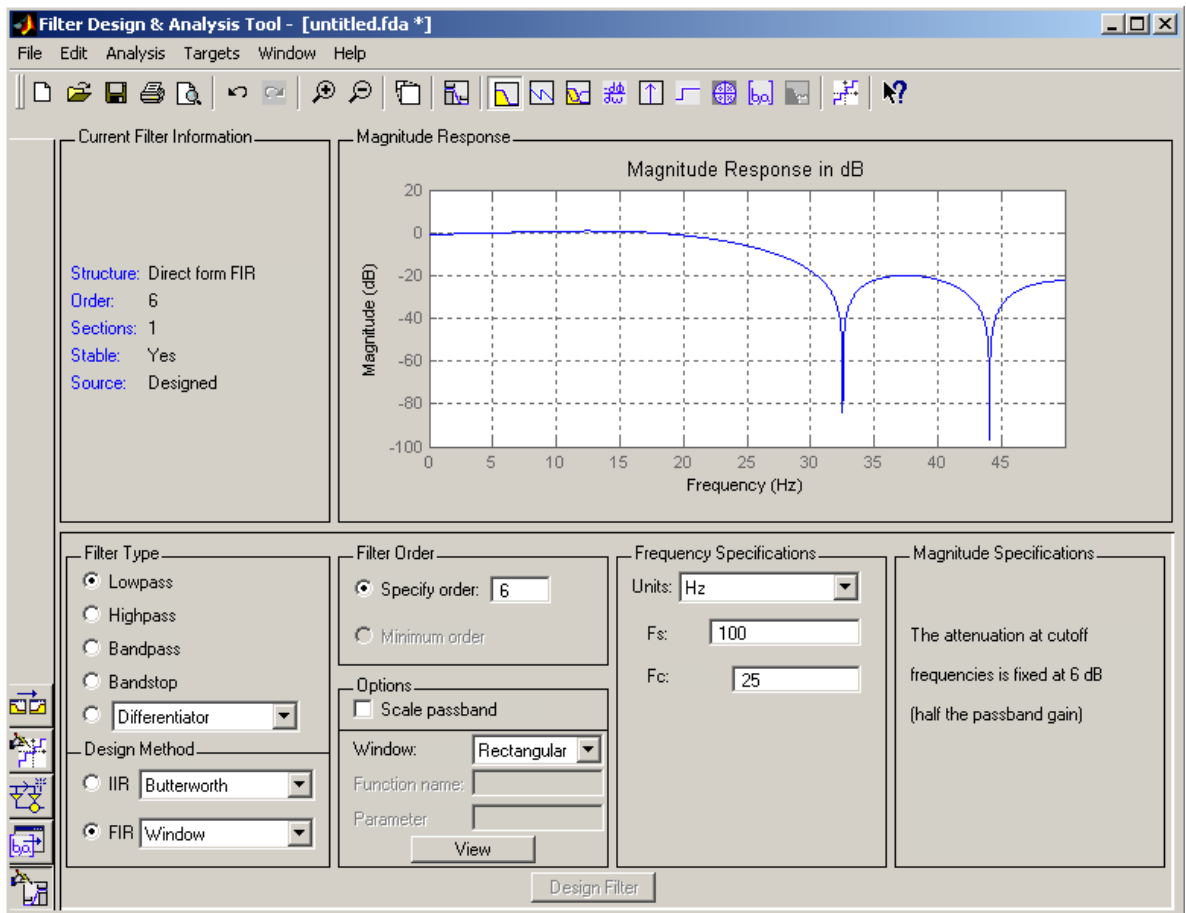


Рис.2.13. Вікно fdatool

Потім у вікні (рис.2.13), що з'явилося, в розділі **Designe Filter** задати:

- 1) **Designe Method : FIR=Window;**
- 2) **Window Specifications : Window=Rectangular;**
- 3) **Filter order: Specify order=6;**
- 4) задати частоту дискретизації ($F_s=100$ Гц);
- 5) задати **Filter Type=lowpass;**
- 6) задати **Passband Fc=25;**
- 7) за допомогою кнопок під меню включаємо режим перегляду коефіцієнтів фільтру.

В результаті проведених розрахунків переконуємося, що тут за умовчанням проводиться нормування ПІХ (см вище **fir1**).

Пакет **fdatool** не дозволяє моделювати процес фільтрації за допомогою розрахованого фільтру. Проте розраховані коефіцієнти фільтра можна імпортувати з середовища **fdatool** в середовище **Matlab**, де їх можна використовувати для моделювання фільтрації.

2.5 Моделювання процесу цифрової фільтрації

Моделювання роботи цифрового фільтру припускає завдання тестового сигналу, використання його відліків в якості вхідних в алгоритмі цифрової фільтрації, знаходження вихідного сигналу і порівняння його з вхідним. Крім того, корисно розглянути спектри вхідного і вихідного сигналів і зіставити їх з частотною характеристикою фільтру.

1. Завдання тестових сигналів

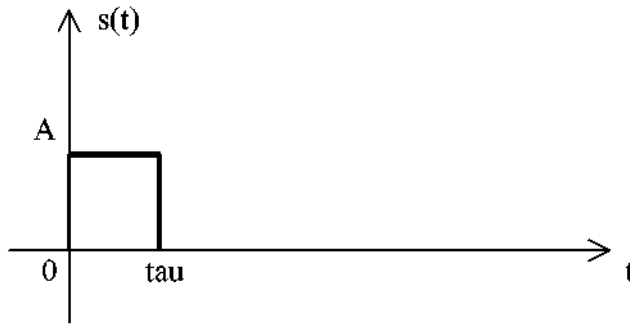
Ця процедура здійснюється в робочій області MatLab. Сигнал задається у вигляді вектору, зіставленого з вектором моментів часу. Перед введенням безпосередньо моделі сигналу треба вказати частоту дискретизації і сформувати вектор-стовпець моментів часу. Наприклад

```
>> Fs = 1e3; t=0:1/Fs :1; t=t';
```

В даному випадку введена частота дискретизації 1кГц. Сигнал буде заданий на інтервалі часу 1с (1001 відлік). Останній оператор означає перетворення вектору-рядка у вектор-стовпець (' - операція транспонування матриці). Не слід забувати ставити крапку з комою у кінці кожного оператора, щоб подавити виведення значень на екран монітора.

Розглянемо деякі з можливих сигналів.

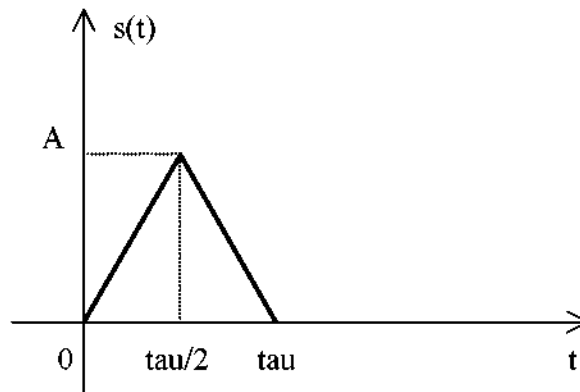
а) Прямокутний імпульс.



>> $s=A*\text{rectpuls}(t - \tau/2, \tau);$

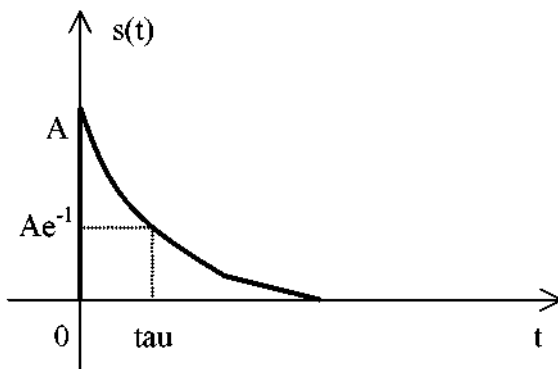
При введенні цього оператора або треба заздалегідь задати значення амплітуди A і тривалість τ , або в самому операторові замість ідентифікаторів A і τ поставити чисельні значення.

б) Трикутний імпульс.



>> $s= A * \text{tripuls}(t - \tau/2, \tau);$

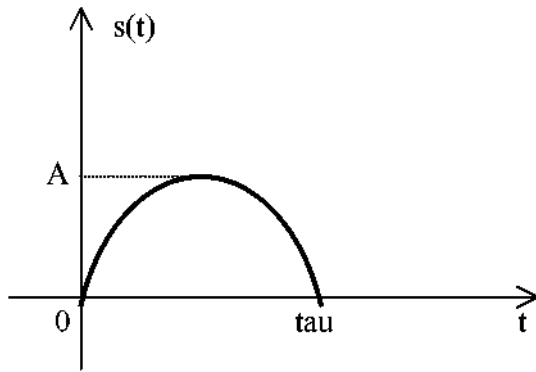
в) Експоненціальний імпульс.



>> $s = A * \exp(-t / \tau);$

Мається на увазі, що вектор t заданий для моментів часу $t \geq 0$.

г) Синусоїдальний імпульс.



```
>> s = A * sin (pi * t / tau) .* (t>=0) .* (t<=tau);
```

Тут використовується той факт, що операції порівняння повертають 1, якщо нерівність виконується, або 0 інакше.

д) Радіоімпульси.

Вони виходять при множенні відеоімпульса s на гармонійне коливання:

```
>> s1 = s .* cos (2*pi*f0*t + phi);
```

Заздалегідь треба задати значення частоти f_0 і початкової фази ϕ , що несе. Зверніть увагу, що операція множення представлена тут як $.*$ (точка перед знаком $*$). Це означає по елементне множення векторів (інакше проводилися б операція матричного множення). У тих випадках, коли здійснюється множення скалярів або матриці (вектору) на скаляр, можна використовувати символ $*$. Те ж саме відноситься до операції ділення і піднесення до степеня. Поелементне ділення матриць задається оператором $./$, по елементне піднесення до степеня $.^$. Число до задається в MatLab як π .

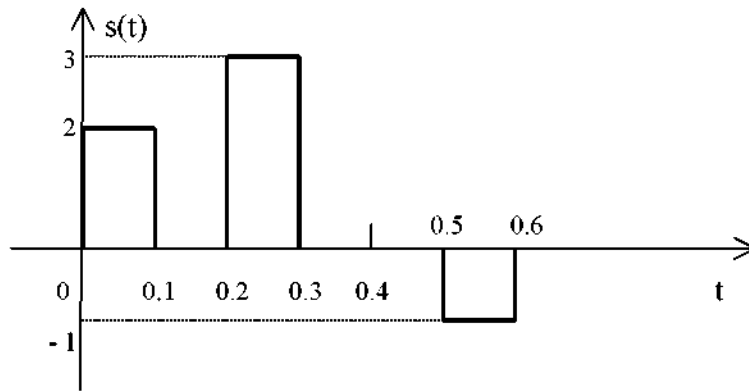
е) Пачки імпульсів.

Для генерації кінцевої послідовності (пачки) імпульсів однакової форми із затримками, що довільно задаються, і амплітудами використовується функція `pulstran`. Вона викликається таким чином:

```
s = pulstran (t, d, 'func ', p1, p2 .)
```

Тут t - вектор значень моментів часу, d - вектор затримок і амплітуд імпульсів, 'func' - ім'я функції, задаючої поодинокий імпульс, наприклад, 'rectpuls' або 'tripuls'; $p1, p2$ - параметри поодинокого імпульсу, передаванні функції `func`.

Наприклад, треба задати наступну послідовність прямокутних імпульсів :



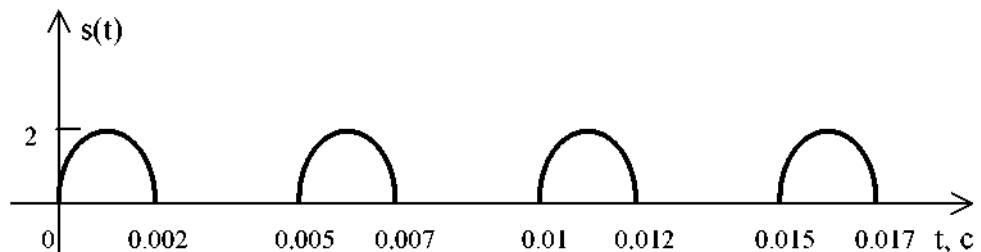
Вводиться набір операторів :

```
>> Fs= 1e3; t= 0:1/Fs :1; t=t';
>> tau= 0.1;
>> d(:, 1)=[0.05 0.25 0.55]';
>> d(:, 2)=[2 3 - 1]';
>> s= pulstran (t, d, 'rectpuls ', tau);
```

Якщо треба побудувати послідовність імпульсів довільної форми, причому відліки поодинокого імпульсу записані у векторі s1, то використовують наступну форму завдання функції pulstran :

```
s= pulstran (t, d, s1, Fs);
```

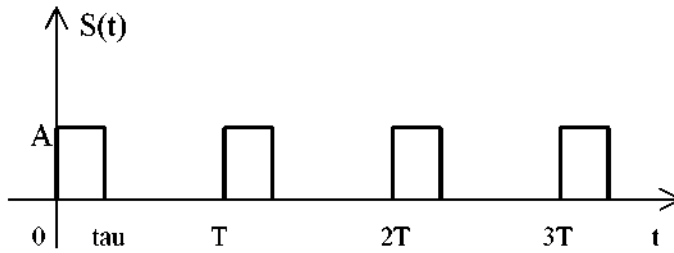
Наприклад, треба задати пачку з чотирьох синусоїдальних імпульсів:



Вводяться наступні оператори:

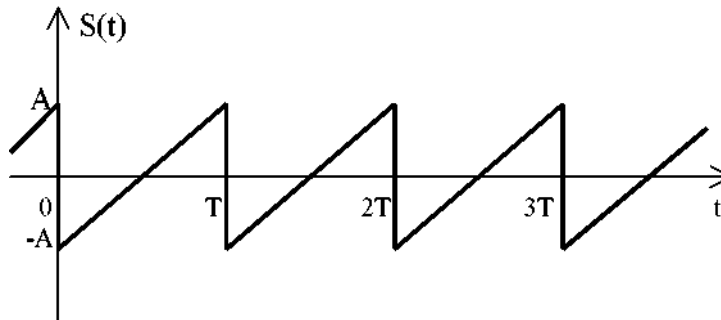
```
>> Fs= 1e4;
>> t= 0:1/Fs :2 e - 2; t=t';
>> tau= 2e-3; A= 2;
>> s1= sin (pi * t / tau) .* (t<=tau);
>> d(0:3)' * 5e-3;
>> d(:, 2)= A*ones(4,1);
>> s= pulstran (t, d, s1, Fs);
```

ж) Періодична послідовність прямокутних імпульсів.



```
>> s = A/2 * (1 + square(2*pi*t / T, tau / T*100));
```

з) Пілкоподібний сигнал.



```
>> s = A * sawtooth(2*pi*t / T);
```

і) Бігармонічний сигнал.

```
>> s = A1 * cos(2*pi*f1*t + phi1) + A2 * cos(2*pi*f2*t + phi2);
```

к) Амплітудно-модульований сигнал.

```
>> s = A * (1 + M * cos(2*pi*F*t + psi)) .* cos(2*pi*f0*t + phi);
```

л) частотно-модульований сигнал.

```
>> s = A * cos(2*pi*f0*t + m * cos(2*pi*F*t + psi) + phi);
```

м) Випадкові сигнали.

Для генерації випадкової послідовності з рівномірним законом розподілу вірогідності служить функція `rand`, з нормальним законом розподілу - функція `randn`.

Наприклад, треба задати нормальний білий шум гауса з нульовим математичним очікуванням і дисперсією $\sigma^2=4$.

```
>> Fs = 1e3;
>> t = 0:1/Fs : 1;
>> sigma = 2;
>> n = sigma * randn(1, length(t));
```

Моделювання відрізка вхідного процесу у вигляді адитивної суміші гармонійного сигналу одиничної амплітуди і $(0;1)$ -нормального білого шуму :

```
>> sn = s + n;
```

В якості сигналу `s` можна узяти одну з функцій, описаних вище.

2. Побудова графіку тестового сигналу

Графік тестового сигналу можна побудувати, використовуючи функції `plot`, `stem` або `stairs` :

```
>> plot (t, s)
>> plot (t, s, '.')
>> stem(t, s)
>> stairs (t, s)
```

Перша функція будує графік сигналу, в якому усі відлікові значення сполучені відрізками прямих (виходить графік відповідного аналогового сигналу при досить малому інтервалі дискретизації). Друга функція має "точковий" вигляд (відліки сигналу не сполучені лініями). Третя функція представляє відліки вертикальними лініями з гуртком на кінці. Четверта функція представляє сигнал у вигляді ступінчастої лінії. Можна обмежити діапазон значень, що виводяться. При цьому вказується інтервал номерів відліків :

```
>> plot (t(1:100), s(1:100))
```

Будуть виведені значення сигналу з 1-го по 100-й відлік. Можна управляти діапазоном значень, відкладених по осях абсцис і ординат графіку. Для цього використовуються функції: `axis` (`[xmin xmax ymin ymax]`) - завдання меж по осі абсцис (від `xmin` до `xmax`) і по осі ординат (від `ymin` до `ymax`); числові значення в списку розділяються пропусками;

`xlim` (`[xmin xmax]`) - завдання меж по осі абсцис;

`ylim` (`[ymin ymax]`) - завдання меж по осі ординат.

Додавання сітки проводиться оператором `grid` (`grid on` - включення, `grid off` - виключення). Можна також управляти кольором, типом ліній і маркерами точок даних. Для цього використовується строковий параметр в списку вхідних аргументів функцій `plot`, `stem`, `stairs`.

Управління кольором:

`b` - синій(за умовчанням);

`z` - блакитний (`cyan`);

`g` - зелений (`green`);

`k` - чорний (`black`);

`m` - фіолетовий (`magenta`);

`r` - червоний (`red`);

`y` - жовтий (`yellow`).

Управління типом ліній :

- безперервна (за умовчанням);

- пунктирна (довгий штрих);
- : пунктирна (короткий штрих);
- . штрих-пунктирна.

Управління маркерами даних :

- . - точка (за умовчанням);
- + - знак "плюс";
- * - зірочка;
- o - коло;
- x - хрестик;
- s - квадрат;
- d - ромб;
- v - трикутник вістрям вниз;
- ^ - трикутник вістрям вгору.

Наприклад, `plot (t, s, 'r')` - безперервна лінія червоного кольору, `plot (t, s, ': og')` - пунктирна лінія зеленого кольору, точки даних відмічені кружками.

3.Фільтрація сигналу

Вихідний сигнал фільтру можна знайти, використовуючи функцію **filter**. Вона реалізує алгоритм цифрової фільтрації, що відповідає транспонованій структурі фільтру (**direct form II transposed**).

```
>> y= filter (b, a, s);
```

де b і a - вектори коефіцієнтів чисельника і знаменника передавальної функції фільтру; s - вектор вхідного сигналу; y - вектор вихідного сигналу. Розрахувавши вихідний сигнал, можна побудувати графіки вхідного і вихідного сигналів:

```
>> plot (t, s, 'r ', t, y, 'g')
```

Вхідний сигнал буде відображений безперервною лінією червоного кольору, а вихідний - безперервною лінією зеленого кольору.

При використанні функції `stem` краще вивести графіки окремо:

```
>> subplot (2,1,1)
```

```
>> stem (t, s, 'r')
```

```
>> subplot (2, 1, 2)
```

```
>> stem (t, y, 'b')
```

4. Фільтрація як операція свертки вхідного сигналу і імпульсної характеристики фільтру

Спочатку треба отримати імпульсну характеристику фільтру :

```
>> g= impz (b, a);
```

де b і a - коефіцієнти поліномів чисельника і знаменника передавальної функції, g - вектор відліків імпульсної характеристики. Кількість відліків розраховується автоматично і залежить від поведінки імпульсної характеристики. Для явного завдання кількості розрахункових точок n треба ввести оператор:

```
>> g= impz (b, a, n);
```

Для виведення графіку імпульсної характеристики не треба вказувати вихідний параметр і ставити крапку з комою:

```
>> impz (b, a)
```

Розрахувавши імпульсну характеристику, можна знайти вихідний сигнал фільтру методом свертки :

```
>> y= conv (s, g);
```

де s - вектор вхідного сигналу, g - вектор імпульсної характеристики, y - вектор вихідного сигналу.

Далі слід побудувати графіки вхідного і вихідного сигналів (див. пункти 2 і 3).

4. Фільтрація в частотній області з використанням швидкого перетворення Фур'є (БПФ)

Відповідно до спектрального методу спектр вихідного сигналу дорівнює твору спектру вхідного сигналу і комплексної частотної характеристики фільтру. Спектр обчислюється шляхом застосування до сигналу, заданого у вигляді послідовності відліків, дискретного перетворення Фур'є (ДПФ). У MatLab алгоритм ДПФ застосовується у формі БПФ (FFT - Fast Fourier Transform). Для здійснення фільтрації в частотній області задаються оператори (мається на увазі, що сигнал s , частота дискретизації F_s , а також коефіцієнти фільтру b і a визначені раніше) :

```
>> K= freqz (b, a, 512);
```

```
>> S= fft (s, 1024);
```

```
>> Y= S(1:512) .*K;
```

```
>> y= ifft (Y);
```

Треба стежити, щоб сумарна кількість відліків сигналу s і імпульсної характеристики $g= \text{impz}(b, a)$ не перевищувала 1024. Інакше треба використовувати функцію **fft**, задаючи вищу розмірність перетворення. Тоді більшу кількість точок n потрібно задавати при розрахунку частотної характеристики фільтру : $K = \text{freqz}(b, a, n)$. ($n = N/2$, де N - розмірність БПФ.) Окрім графіків сигналів можна вивести спектри вхідного і вихідного сигналів і частотну характеристику фільтру :

```
>> f = (0:511)/512*(Fs/2);
```

```
>> subplot (3,1,1)
```

```
>> stem (f, abs(S(1:512)))
```

```
>> subplot (3,1,2)
>> plot (f, abs(K))
>> subplot (3,1,3)
>> stem (f, abs(Y(1:512)))
```

Замість функції `stem` можна використовувати функцію **plot**, тоді отримаємо безперервні спектри. Якщо є необхідність поєднати усі три графіки, то можна використовувати оператори **hold on** і **hold off** замість операторів **subplot**. Для розрізнення графіків треба задати різний колір і (чи) тип лінії (див. пункт 2).

Блокову фільтрацію з допомогою БПФ (сигнал розбивається на блоки по N відліків, де N - розмірність БПФ) можна також реалізувати, використовуючи функцію **fftfilt** :

```
>>y = fftfilt (g, s, N);
```

де g - вектор імпульсної характеристики фільтру, s - вектор вхідного сигналу, N - розмірність БПФ.

5. Фільтрація сигналу із застосуванням програми sptool

Програма **sptool** (signal processing tool) дозволяє переглядати графіки сигналів і їх спектрів, проводити спектральний аналіз сигналу, розраховувати і аналізувати фільтри, а також фільтрувати сигнали. Програма має зручний графічний інтерфейс. Фільтрація здійснюється із застосуванням функції **filter** (див. пункт 3). При виконанні спектрального аналізу сигналу є можливість вибору з досить широкого набору цифрових параметричних і непараметричних методів. Виклик програми здійснюється з командного рядка MatLab :

```
>> sptool
```

Після набору імені програми натисніть клавішу **<Enter>**. Основне вікно програми містить три поля: Signals, Filters і Spectra. У них перераховуються ідентифікатори завантажених в програму сигналів, фільтрів і спектрів.

Під списками розташовані кнопки, натискаючи на одну з яких можна активізувати виконання тієї або іншої операції.

Кнопка **View** - перегляд графіку сигналу, спектру або характеристик фільтру. Виводяться графіки або характеристики того об'єкту, який виділений в списку. Для виділення декількох об'єктів одночасно треба при натисненні лівої кнопки миші утримувати клавішу **<Ctrl>**. При перегляді графіків можна змінювати масштаб, укрупнюючи окремі ділянки. Для виміру значень в окремих точках використовуються маркери, які можна перетягувати мишею. При перегляді характеристик фільтру є можливість спільного або роздільного виведення АЧХ (у логарифмічному або в лінійному масштабі), ФЧХ (у градусах або в радіанах), характеристики групового часу запізнювання, діаграми нулів і полюсів, імпульсної і перехідної характеристик.

Кнопка **Create** - при її натисненні здійснюється розрахунок спектру сигналу, виділеного в списку сигналів. У вікні Spectrum Viewer в полі Parameters треба вказати метод спектрального аналізу. Має сенс випробувати декілька методів і порівняти їх результати. Зазвичай з непараметричних методів перевагу віддають методу Уелча (Welch), з параметричних - можна застосувати авторегресійний метод Юла-Уолкера (Yule AR). Зрозуміло, не слід забувати і про звичайний ДПФ (FFT). Вказавши метод, слід клацнути мишею по кнопці **Apply**. Буде виведений графік спектральної щільності потужності. Є можливість виводити спектри в лінійному або в логарифмічному масштабі (меню Options).

Кнопки **New** і **Edit** дозволяють здійснити синтез нового фільтру або змінити характеристики вже існуючого фільтру. При натисненні однієї з цих кнопок з'явиться вікно Filter Designer. При проектуванні фільтру треба задати ідентифікатор фільтру (поле Filter), частоту дискретизації (поле Sampling Frequency), вибрати алгоритм (Algorithm) із списку, що розкривається. Потім задати параметри частотної характеристики фільтру в розділі Specifications. Клацнувши по кнопці **Apply**, отримаємо в центрі вікна графік АЧХ синтезованого фільтру, в розділі Measurements відмічені деякі параметри АЧХ. Є можливість редагувати розташування нулів і полюсів на відповідній діаграмі, змінювати їх кількість. Для цього в списку Algorithm треба вибрати рядок Pole/Zero Editor. У вікні Filter Designer з'явиться z -плоскість із зображеними на ній полюсами і нулями. Використовуючи мишу і інструменти, значки яких розташовані в лівій верхній частині z -плоскості, треба скоректувати діаграму полюсів і нулів. Потім можна перейти в режим перегляду характеристик фільтру (вікно Filter Viewer). Зручно одночасно відкрити вікна Filter Designer і Filter Viewer і розмістити їх разом, щоб стежити за тим, як зміни положення полюсів і нулів відбиваються на виді АЧХ.

Фільтрація сигналу здійснюється таким чином.

1) Вибір сигналу із списку або завантаження сигналу з робочої області MatLab. Якщо сигнал, фільтрацію якого треба здійснити, є в списку (вікно **SPTool** : startup.spt), то його треба виділити мишею. Є можливість завантажити сигнал в програму sptool з робочої області MatLab. Для цього треба спочатку створити сигнал в робочій області (див. пункт 1). Потім треба вибрати команду **Import** в меню **File** головного вікна програми **sptool**. З'явиться вікно **Import to SPTool**. Перемикач **Source** встановите в положення **From Workspace**. У списку **Workspace Contents** перераховані змінні, наявні в робочій області MatLab. У списку **Import As**, що розкривається, треба вибрати рядок **Signal**. Далі вибирають в списку ідентифікатор вектору, що містить відліки сигналу, і натискають кнопку --> навпроти поля Data. Потім аналогічним чином вводять значення частоти

дискретизації F_s в поле Sampling Frequency. Задають ім'я сигналу в полі Name. Під цим ім'ям він буде поміщений в список сигналів **sptool**. Услід за цим слід натиснути кнопку **OK**.

2) Розрахунок фільтру або завантаження опису фільтру з робочої області MatLab. Розрахунок нового фільтру проводиться після натиснення кнопки **New** основного вікна **sptool** (див. вище). Для завантаження опису фільтру з робочої області MatLab задають команду **Import** меню **File** основного вікна і далі у вікні **Import to SPTool** в полі Import As вибирають рядок Filter. У розділі Source встановлюють перемикач в положення **From Workspace**. У полі Form вказують форму завдання параметрів фільтру (Transfer Function - коефіцієнти передавальної функції, **Zeros, Poles, Gain** - нулі, полюси, коефіцієнт посилення, **2nd Order Sections** - каскадна форма). У першому випадку в полях Numerator і Denominator вводять вектори коефіцієнтів b і a передавальної функції фільтру (у квадратних дужках, значення відділяються пропусками) або імена векторів, якщо вони є в робочій області MatLab. Можна виділити імена в списку **Workspace Contents** і натиснути на кнопку --> . В другому випадку вводять вектори z , p і константу k , в третьому випадку - матрицю sos . Услід за цим треба вказати ім'я фільтру в полі Name і клацнути по кнопці **OK**.

3) Фільтрація сигналу. Виділяють потрібний сигнал і потрібний фільтр в списках основного вікна **sptool**. Потім натискають кнопку **Apply**. У вікні, що з'явилося, **Apply Filter** задають ім'я вихідного сигналу в полі Output Signal. У списку, що розкривається, **Algorithm** задають алгоритм фільтрації : **Direct Form II Transposed (filter)**. Потім треба клацнути по кнопці **OK**. Вихідний сигнал з'явиться в списку основного вікна програми.

4) Розрахунок спектрів сигналів. Виділяють по черзі вхідною і вихідною сигнали в списку і натискають кнопку **Create**. У вікні Spectrum Viewer вказують метод спектрального аналізу і його параметри, натискають кнопку **Apply**. Буде побудований графік спектру. У списку спектрів з'являться імена спектрів, що відповідають цим сигналам.

Перегляд графіків сигналів і спектрів. Виділяють обидва сигнали одночасно в списку сигналів (для цього спільно з натисненням лівої кнопки миші утримують клавішу <Ctrl>). Натискають кнопку **View** під списком сигналів і переглядають графіки вхідного і вихідного сигналів. Є можливість змінювати колір і тип ліній. Для цього використовують відповідні кнопки панелі інструментів вікна Signal Browser. Аналогічно здійснюється перегляд спектрів. Можна також накласти спектр на графік АЧХ фільтру. Для цього слід відкрити вікно Filter Designer (кнопки New або Edit) основного вікна sptool), натиснути кнопку Overlay Spectrum (передостання на панелі інструментів) і далі вибрати потрібний спектр із списку у вікні Overlay Spectrum, розділ Select a spectrum). Має сенс

досліджувати, як проходить цей сигнал через різні фільтри, а також проаналізувати зміну форми вихідного сигналу при варіюванні його параметрів (частоти, тривалість і ін.).

Контрольні питання:

1. Що називається нерекурсивним цифровим фільтром ?
2. Що є відмінною особливістю НЦФ ?
3. Що характеризує порядок НЦФ ?
4. Чим обумовлена затримка вихідного сигналу в НЦФ ?
5. Чому НЦФ називають фільтром з кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ - чи FIR - фільтром ?
6. Що називається відносною частотою зрізу ?
7. Що називається всечастотним фільтром ?

3. Рекурсивні цифрові фільтри (РЦФ або ІІР)

Основні визначення. Вихідний сигнал рекурсивного фільтру в кожен момент часу залежить не лише від вхідних сигналів, але і від вихідних в попередні моменти часу. У загальному випадку рівняння РЦФ записують у виді:

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M b_k y(n-k) \quad (3.1)$$

Більше з двох чисел M і N визначає порядок фільтру.

На простих прикладах можна показати, що ІІХ рекурсивного фільтру нескінченна, тому такий фільтр іменують БІХ- чи ІІР (infinite impulse response) фільтром. Дійсно, нехай рівняння РЦФ має вигляд:

$$y_n = x_n + 0,5 y_{n-1}.$$

Подано на такий фільтр одиничний імпульс:

$$x_n = x_0 = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n = 1. \end{cases}$$

Оскільки в моменти часу, передуючі $n = 0$, фільтр не був збуджений, тобто $y_{-1} = 0$, отримуємо:

$$n = 0: \quad x_0 = 1; \quad y_0 = x_0 + 0,5 y_{-1} = x_0 = 1;$$

$$n = 1: \quad x_1 = 0; \quad y_1 = x_1 + 0,5 y_0 = 0,5;$$

$$n = 2: \quad x_2 = 0; \quad y_2 = x_2 + 0,5 y_1 = 0,25;$$

і так далі, тобто ІІХ триває нескінченно довго.

Для отримання передавальної функції рекурсивного фільтру прийнято використовувати Z - перетворення:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Умноживши $y(n)$ на $b_0 = 1$ і піддаючи обидві частини рівняння (3.1) Z - перетворення, отримаємо

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^M b_k y(n-k) \right] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^N a_k x(n-k) \right] z^{-n}.$$

Оскільки в рівнянні (3.1) прийнято

$$a_k = 0 \text{ при } k < 0 \text{ і } k > N$$

$$b_k = 0 \text{ при } k < 0 \text{ і } k > M$$

можна розширити межі підсумовування $\pm \infty$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k y(n-k) \right] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x(n-k) \right] z^{-n}$$

чи

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k) z^{-(n-k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k) z^{-(n-k)}$$

Позначивши $m = (n - k)$, отримаємо

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m z^{-m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m z^{-m}$$

чи в компактному виді

$$B(z) Y(z) = A(z) X(z)$$

де $A(z)$, $B(z)$, $X(z)$, $Y(z)$ - Z - перетворення відповідних числових послідовностей.

Звідси витікає, що Z - перетворення передавальної функції фільтру (тобто стосунки вихідної реакції до вхідної дії) має вигляд:

$$H_d(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}} \quad (3.2)$$

Після підстановки в (3.2) $z = \exp(j\omega T_d)$ отримаємо передавальну функцію в явному виді, тобто у вигляді залежності коефіцієнта передачі від частоти:

$$H_d(j\omega) = H_d(z = \exp(j\omega T_d)).$$

Коефіцієнт передачі - періодична функція частоти з періодом $2\pi/T_d$.

У окремому випадку нерекурсивного фільтру

$$B(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^{-n} = \sum_{n=0}^0 b_n z^{-n} = b_0 = 1$$

та

$$H_d(j\omega) = A(z = \exp(j\omega T_d)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(-j\omega n T_d).$$

Розрахунок рекурсивних цифрових фільтрів. Розрахунок (проекування) рекурсивних фільтрів істотно складніший за розрахунок нерекурсивних фільтрів. Існує велика кількість різних методик, проте багато з них розраховані на висококваліфікованих професіоналів в області фільтрації сигналів, знайомих як з методиками проектування аналогових фільтрів, так і з областю математичного аналізу, присвяченою перетворенням Лапласа, Z - перетворенням, теорії вирахувань.

Оскільки ми хочемо отримати початкове уявлення про розрахунок РЦФ, обмежимося розглядом найбільш простої і популярної методики, що іменується "частотне перетворення" [1,2].

Суть цієї методики полягає в трансформації передавальної характеристики $H_d(z^*)$ деякого ФНЧ, що іменується "ФНЧ-прототип", в передавальну характеристику $H_d(z)$ потрібного фільтру (НЧ, ВЧ, смугового, режекторного), з наступною заміною $z = \exp(j\omega T_d)$.

Представимо таку методику у вигляді послідовності "кроків" :

Крок 1: Виходячи з вимог до якості проектованого фільтру (гладкість в смузі пропускання, фазова характеристика, допустимий рівень пульсацій в смугах пропускання і замикання), вибирають тип фільтру і порядок фільтру N . При цьому слід знати:

ФНЧ Баттерворта забезпечує максимально плоску характеристику в зоні пропускання, проте погано передає fronti прямокутних імпульсів. Крутизна перехідної зони (із смуги пропускання в смугу замикання) росте із збільшенням N .

ФНЧ Бесселя забезпечує лінійність фазової характеристики в зоні пропускання, що добре для фільтрації прямокутних імпульсів (малі викиди на фронтах відфільтрованих імпульсів), крутизна перехідної зони менша, ніж у фільтрів Баттерворта.

ФНЧ Чебишева забезпечує фіксовану пульсацію в зоні пропускання (фільтри типу I) або в зоні замикання (фільтри типу II). Погано передає fronti прямокутних імпульсів. Крутизна перехідної зони більша, ніж у фільтрів Баттерворта і Бесселя.

ФНЧ Кауера має пульсацію як в зоні пропускання, так і в зоні замикання. Погано передає фронти прямокутних імпульсів. Крутизна перехідної зони більша, ніж у фільтрів Баттерворта і Бесселя.

Крок 2. Після вибору типу фільтру звертаються до однієї з таблиць фільтрів-прототипів, з яких вибирають числові значення коефіцієнтів a_k і b_k . До таких таблиць "прив'язаний" також числовий параметр f_d^*/f_c^* - відношення частоти дискретизації до частоти зрізу фільтру-прототипу. У [1] пропонуються таблиці для $f_d^*/f_c^* = 4$, що мають вигляд:

Таблиця 3.1. Коефіцієнти для прототипів ФНЧ Баттерворта N -го порядку

N	i	a_{0i}	a_{1i}	a_{2i}	b_{1i}	b_{2i}
1	1	0,5	0,5	0	0	0
2	2	0,2929	0,5858	0,2929	0	0,1716
3	1	0,5	0,5	0	0	0
	2	0,3333	0,6667	0,3333	0	0,3333

Таблиця 3.2. Коефіцієнти для прототипів ФНЧ Бесселя N -го порядку

N	i	a_{0i}	a_{1i}	a_{2i}	b_{1i}	b_{2i}
1	1	0,5	0,5	0	0	0
2	2	0,3356	0,6712	0,3356	0,2564	0,0806
3	1	0,5695	0,5695	0	0,1390	0
	2	0,4037	0,8075	0,4037	0,4222	0,1928

Таблиця 3.3. Коефіцієнти для прототипів ФНЧ Чебишева I -го типу
N -го порядку з пульсацією 11% (1дБ)

N	i	a_{0i}	a_{1i}	a_{2i}	b_{1i}	b_{2i}
1	1	0,5	0,5	0	0	0
2	2	0,2595	0,5190	0,2595	-0,2862	0,3242
3	1	0,3110	0,3110	0	-0,3780	0
	2	0,3636	0,7273	0,3636	-0,1496	0,6042

Таблиця 3.4. Коефіцієнти для прототипів ФНЧ Кауєра N -го порядку з пульсацією 15% (1,5дБ)

N	i	a_{0i}	a_{1i}	a_{2i}	b_{1i}	b_{2i}
3	1	0,3306	0,3306	0	-0,3389	0
	2	0,4898	0,6612	0,4898	-0,0219	0,6627
3	1	0,1851	0,2397	0,1851	-0,5678	0,1778
	2	0,4347	0,8693	0,4347	-0,0215	0,7602

Розглядаючи таблиці, неважко бачити що коефіцієнти залежать також від деякого індексу i - номера каскаду. Річ у тому, що рекурсивні фільтри порядку $N > 2$ прийнято отримувати шляхом послідовного з'єднання фільтрів 2-го порядку. Тому якщо передавальна функція фільтру-прототипу 2-го порядку має вигляд:

$$H_d(z^*) = \frac{a_0^* + a_1^* z^{*-1} + a_2^* z^{*-2}}{b_0^* + b_1^* z^{*-1} + b_2^* z^{*-2}},$$

те передавальна функція фільтру-прототипу вищого порядку виходить як твір передавальних характеристик P приватних фільтрів :

$$H_d(z^*) = \prod_{i=1}^P \frac{a_{0i}^* + a_{1i}^* z^{*-1} + a_{2i}^* z^{*-2}}{b_{0i}^* + b_{1i}^* z^{*-1} + b_{2i}^* z^{*-2}}.$$

Крок 3. Виходячи з необхідного співвідношення f_c / f_d (при розрахунку НЧ або ВЧ фільтру) або необхідної пари співвідношень f_{c1} / f_d і f_{c2} / f_d , $f_{c1} < f_{c2}$ (при розрахунку смугового або режекторного фільтру), замінюють змінну z^* на функцію змінної z , для чого використовують співвідношення з таблиці 3.5.

Таблиця 3.5

ФНЧ → ФНЧ	$z^{*-1} = \frac{z^{-1} - d}{1 - dz^{-1}}, \quad d = \frac{\sin(\pi f_c^* / f_d^* - \pi f_c / f_d)}{\sin(\pi f_c^* / f_d^* + \pi f_c / f_d)}$
-----------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

ФНЧ → ФВЧ	$z^{*-1} = \frac{z^{-1} + d}{1 + dz^{-1}}, \quad d = \frac{\cos(\pi f_c^* / f_d + \pi f_c / f_d)}{\sin(\pi f_c^* / f_d - \pi f_c / f_d)}$
ФНЧ → смуговий фільтр	$z^{*-1} = \frac{z^{-2} - \frac{2dk}{k+1}z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2} - \frac{2dk}{k+1}z^{-1} + 1}, \quad d = \frac{\cos(\pi f_{c1} / f_d + \pi f_{c2} / f_d)}{\cos(\pi f_{c2} / f_d - \pi f_{c1} / f_d)}$ $k = \operatorname{ctg}(\pi f_{c2} / f_d - \pi f_{c1} / f_d) \operatorname{tg} \pi f_c^* / f_d^*$
ФНЧ → режекторний фільтр	$z^{*-1} = \frac{z^{-2} - \frac{2d}{k+1}z^{-1} + \frac{1-k}{k+1}}{\frac{1-k}{k+1}z^{-2} - \frac{2d}{k+1}z^{-1} + 1}, \quad d = \frac{\cos(\pi f_{c1} / f_d + \pi f_{c2} / f_d)}{\cos(\pi f_{c2} / f_d - \pi f_{c1} / f_d)}$ $k = \operatorname{tg}(\pi f_{c2} / f_d - \pi f_{c1} / f_d) \operatorname{tg} \pi f_c^* / f_d^*$

Крок 4. Отримане аналітичне вираження передавальної характеристики $H_d(z)$ спрощують так, щоб в чисельнику і знаменнику опинилися поліноми змінної z^{-1} .

Крок 5. Чисельник і знаменник функції $H_d(z)$ ділять на таке число, щоб виконувалася умова $b_0 = 1$. Результуючі коефіцієнти в чисельнику і знаменнику (після такого нормування) і утворюють шукану безліч коефіцієнтів a_k і b_k .

Крок 6. У аналітичному вираженні для $H_d(z)$ проводять заміну $z = \exp(j\omega T_d)$, отримуючи таким чином частотну характеристику $H_d(j\omega) = H_d(z = \exp(j\omega T_d))$ синтезованого фільтру. АЧХ фільтру отримують як корінь квадратний з суми квадратів дійсної і уявної частин комплексної функції $H_d(j\omega)$.

У разі, коли отримана АЧХ не влаштовує користувача, проводять перерахунок коефіцієнтів для іншого типу фільтру або збільшують порядок фільтру.

Контрольні питання

1. У чому полягає принципова відмінність рекурсивних цифрових фільтрів від нерекурсивних?
2. Як впливає порядок фільтру на його характеристики (крутизну підйому або спаду АЧХ, величину пульсацій)?
3. Як зрозуміти термін "нескінченна імпульсна характеристика" фільтру?

4. Чому фільтри Баттерворта називають фільтрами з "максимально гладкою характеристикою"?
5. У чому сенс і корисність Z - перетворення для аналізу і розрахунку цифрових фільтрів?

Список літератури

1. Е. Шрюфер, Обробка сигналів. Цифрова обробка дискретизованих сигналів. Київ, Либідь, 1992. -294с.
2. Введение в цифровую фильтрацию. Под ред.Р.Богнера и А.Констандинидиса. – М., Мир, 1976 – 216с.