Міністерство освіти і науки України

Центральноукраїнський національний технічний університет

Кафедра загального землеробства

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних робіт з курсу

«Моделювання технологічних процесів і систем»

для студентів спеціальності 201 «Агрономія»

Кропивницький – 2019

Міністерство освіти і науки України

Центральноукраїнський національний технічний університет

Кафедра загального землеробства

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання практичних робіт з курсу
«Моделювання технологічних процесів і систем»
для студентів спеціальності 201 «Агрономія»

Ухвалено
на засіданні кафедри
загального землеробства
Протокол №___ від _______ 2019 р.

Кропивницький – 2019

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з курсу «Моделювання технологічних процесів і систем» для студентів спеціальності 201 «Агрономія»/ Укл.: К.В. Васильковська, Д.І. Петренко, В.О. Майхровська – Кропивницький; ЦНТУ, 2019.– 20 с.

Укладачі:
Васильковська Катерина Вікторівна – канд. техн. наук, ст. викл.
Петренко Дмитро Іванович – канд. техн. наук, доцент
Майхровська Валентина Олександрівна - викладач

Рецензент:
Кулик Галина Андріївна, канд. с. г. наук, доц.

Зміст

стор.

Практична робота № 1

Моделі розвитку рослин. Дослідження функцій росту

Мета роботи: засвоїти прийоми і методику побудови моделей розвитку рослин. Провести дослідження функцій росту

Теоретичні відомості

1. Статична математична модель росту рослини

На рис. 1.1 зображено криву росту, що побудована на підставі експерименту, в ході якого змінювалася витрата поживних речовин рослиною.

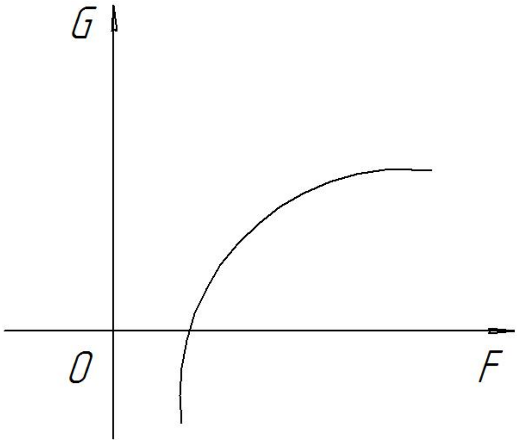


Рис. 1.1. Графік кривої росту

Криву можна описати рівнянням:

$$G = G_1 \frac{F}{K+F} - G_2,$$

де F – витрата поживних речовин в одиницю часу;

G – приріст ваги сухої речовини рослини;

K, G_1, G_2 – параметри.

Якщо витрата поживних речовин в одиницю часу F=0, то приріст ваги сухої речовини рослини G=–G_2. Якщо витрата поживних речовин велика, то відношення $F/(K+F)$ прямує до 1, а G прямує до G_1–G_2.

2. Динамічна математична модель росту рослини

У найпростішому випадку динамічна модель росту виражається залежністю:

$$W = W_0 + b \cdot t,$$

де W – вага сухої речовини рослини;

t – час;

b – параметр,

$W = W_0$ при $t = 0$, тобто W_0 – початкове значення ваги сухої речовини рослини.

Продиференціювавши рівняння по t, отримаємо:

$$\frac{dW}{dt} = b$$

де $\frac{dW}{dt}$ називають темпом росту.

Функцією росту називають функцію, що зв’язує масу сухої речовини (W) і час (t). У загальному виді $W = f(t)$ (t – деякий функціональний зв’язок). Аналіз динаміки кількості сухої речовини традиційно починають з розгляду темпу росту, тобто похідної $\frac{dW}{dt}$.

1. Нехай кількість енергії росту $\frac{dW}{dt}$ пропорційна кількості сухої маси *W*. Механізм росту впродовж усього процесу «працює» з максимальним темпом. Поки існує поживне середовище, процес росту необоротний і припиняється, як тільки воно виснажується.

В цьому випадку попереднє рівняння буде мати вигляд:

$$\frac{dW}{dt} = \mu \cdot W ,$$

де μ – параметр відносного темпу росту.

Параметр μ залежить від функції сухої маси *W*, що відповідає (в заданій пропорції) ресурсу поживного середовища *S*, та від швидкості, з якою «працює» механізм росту.

Розв'язавши отримане диференціальне рівняння, маємо рівняння росту:

$$W = W_0 \cdot e^{\mu t} \text{ при } 0 \le t \le t_f ,$$

$$W = W_f \text{ при } t > t_f ,$$

яке називається рівнянням простого експоненціального росту, який обмежений реальним ресурсом поживного середовища (рис. 1.2).

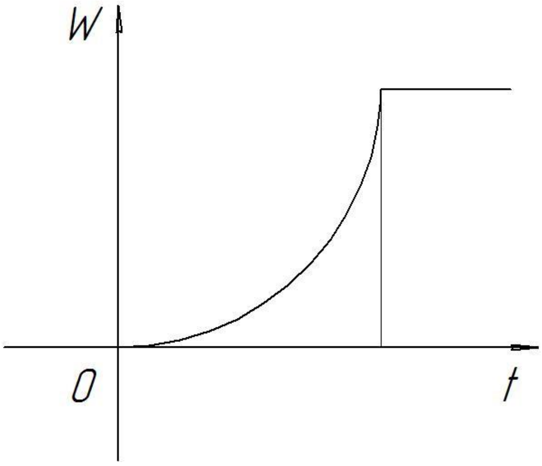


Рис. 1.2. Графік рівняння простого експоненціального росту

2. Нехай кількість енергії росту не змінюється і не залежить від кількості сухої маси *W*. Механізм росту «працює» із швидкістю, що пропорційна ресурсу поживного середовища *S*, ріст не може бути оберненим. В цьому випадку розглядається таке рівняння:

$$\frac{dW}{dt} = k \cdot S ,$$

де k – стала.

Якщо взяти ресурс поживного середовища:

$$S = W_f - W ,$$

де W_f – граничне значення при $t \to \infty$, то рівняння росту буде мати вид:

$$W = W_f - \left(W_f - W_0\right) \cdot e^{-kt} .$$

Одержане рівняння називається мономолекулярним. На графіку рівняння (рис.1.3) бачимо, що темп росту неперервно спадає.

3. Нехай енергія росту пропорційна сухій масі *W*, механізм росту «працює» із швидкістю, що пропорційна ресурсу поживного середовища *S*, процес росту необоротний. Тоді розглядаємо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{dW}{dt} = k^1 \cdot W \cdot S ,$$

де k^1 – стала.

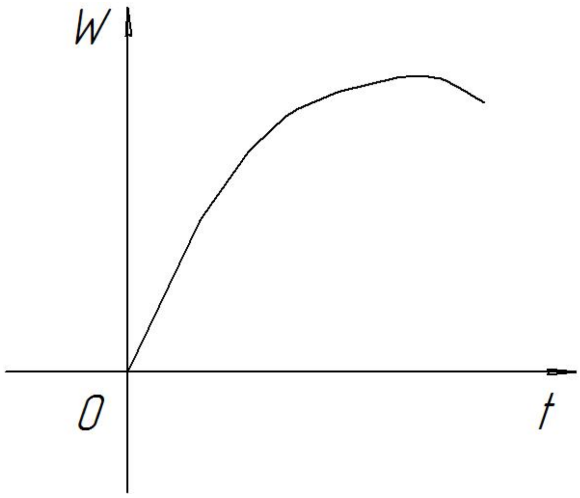


Рис. 1.3. Графік мономолекулярного рівняння росту

Якщо взяти ресурс поживного середовища:

$$S = W_f - W,$$

маючи на увазі, що

$$S_f = 0,\ k^1 = \frac{\mu}{W_f}$$

отримаємо рівняння

$$W = \frac{W_0 \cdot W_f}{W_0 + \left(W_f - W_0\right) \cdot e^{-\mu t}},$$

яке називають рівнянням логістичного росту (рис. 1.4).

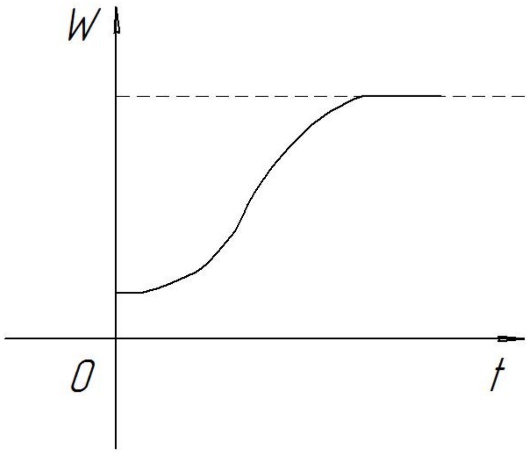


Рис. 1.4. Графік рівняння росту логістичного типу

Рівняння показує, що при $W_0 << W_f$ для малих значень t має місце

$$W = W_0 \cdot e^{-\mu t},$$

звідки випливає, що при вказаних вище умовах має місце експоненціальний ріст з початковим темпом μ. Оскільки при $t \to \infty$ => $W \to W_f$, і процес росту має асимптотичний характер.

4. Нехай ресурс поживного середовища S необмежений, енергія росту пропорційна сухій масі W, ефективність енергії росту падає з часом і цей спад носить експоненціальний характер. Причиною спаду може бути деградація (наприклад,

розщеплення ферментів), старіння або розвиток та ускладнення організму. Розглядаються такі рівняння:

$$\frac{dW}{dt} = \mu \cdot W\ ,\ \frac{d\mu}{dt} = -D \cdot \mu\ ,$$

де D – параметр, що характеризує темп μ.

З цих диференціальних рівнянь виводимо таке рівняння росту:

$$W = W_0 \cdot e^{\frac{\mu_0\left(1-e^{-Dt}\right)}{D}}\ ,$$

яке називають рівнянням росту Гомпертца (рис. 1.5).

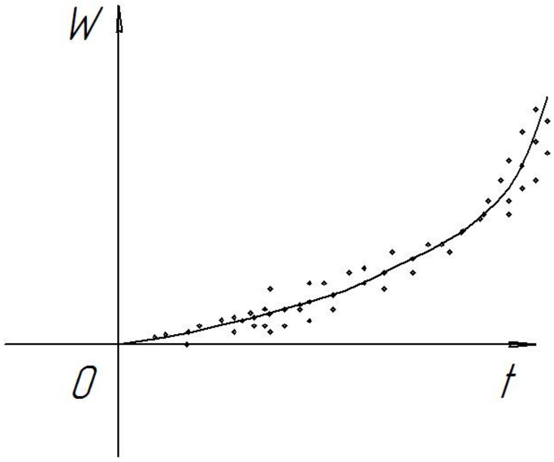


Рис. 1.5. Графік рівняння росту Гомпертца

З рис. 1.5 бачимо, що для малих значень *t:*

$$e^{-Dt} = 1 - D \cdot t$$

отримаємо рівняння експоненційного росту

$$W = W_0 \cdot e^{\mu t}\ ,$$

оскільки при $t \to \infty \Rightarrow W \to W_f$ (асимптотичне значення), де

$$W_f = W_0 \cdot e^{\mu / D}.$$

5. Похідним від рівнянь Гомпертца і логістичного є рівняння росту Чантера:

$$W = \frac{W_0 \cdot B}{W_0 + \left(B - W_0\right) \cdot e^{-\mu \cdot \left(1-e^{-Dt}\right)/D}}$$

де μ, B, D – сталі. Параметр e^{-Dt}, що пов’язаний з плином часу, може інтерпретуватися як розвиток або старіння, ускладнення організму;

B – як доступність поживного середовища;

D – показник ускладнення організму;

μ – питомий темп росту.

З рис. 1.6 бачимо, що при різних сталих D можемо отримати різні криві, які обмежені логістичною кривою L зверху та кривою Гомпертца G знизу.

Завдання:

1. Проведіть дослідження моделі росту (відповідно до варіанту), розрахуйте темп росту, побудуйте графік кривої (параметри визначити з табл.1.1).
2. Опишіть процес росту за обраною моделлю.

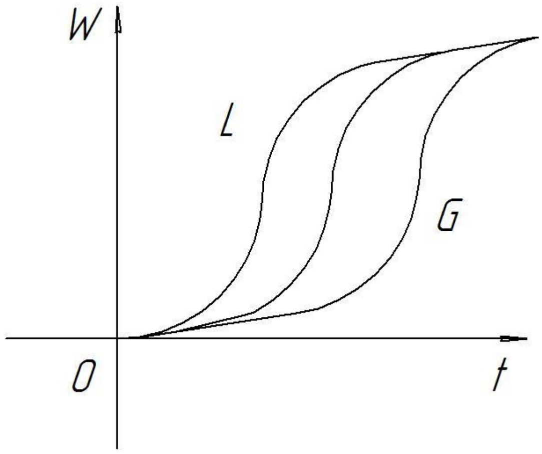


Рисунок 1.6 – Графік рівняння росту Чантера

Таблиця 1.1.

Завдання до розрахунку

№	Рівняння росту	W_0	W_f	μ	μ_0	k	D	B
1	простого експоненційного	10	-	0,2	-	-	-	-
2	мономолекулярного	1,5	10	-	-	2	-	-
3	логістичного	0,7	60	1,6	-	-	-	-
4	Гомпертця	10	-	-	0,8	-	1,1	-
5	Чантера	0,1	-	2,5	-	-	0,9	1,8
6	простого експоненційного	0,5	-	0,8	-	-	-	-
7	мономолекулярного	0,5	50	-	-	0,3	-	-
8	логістичного	2	11	0,5	-	-	-	-
9	Гомпертця	5			1,2		0,7	
10	Чантера	1	-	0,5	-	-	0,3	8

Практична робота № 2

Лінійні математичні моделі

Мета роботи: ознайомити студентів з методикою побудови лінійної математичної моделі та її аналізом.

Обладнання: ЕОМ, пакет прикладних програм ***Microsoft Office.***

У досліді вивчалась залежність кількості зернин у колосі ячменю Y від довжини колосу X. Дослідні дані значень змінних x_i та y_i наведено у табл. 2.1. За допомогою методу найменших квадратів (МНК) побудувати емпіричну залежність Y від X.

Таблиця 2.1

Залежність кількості зернин ячменю у колосі від довжини

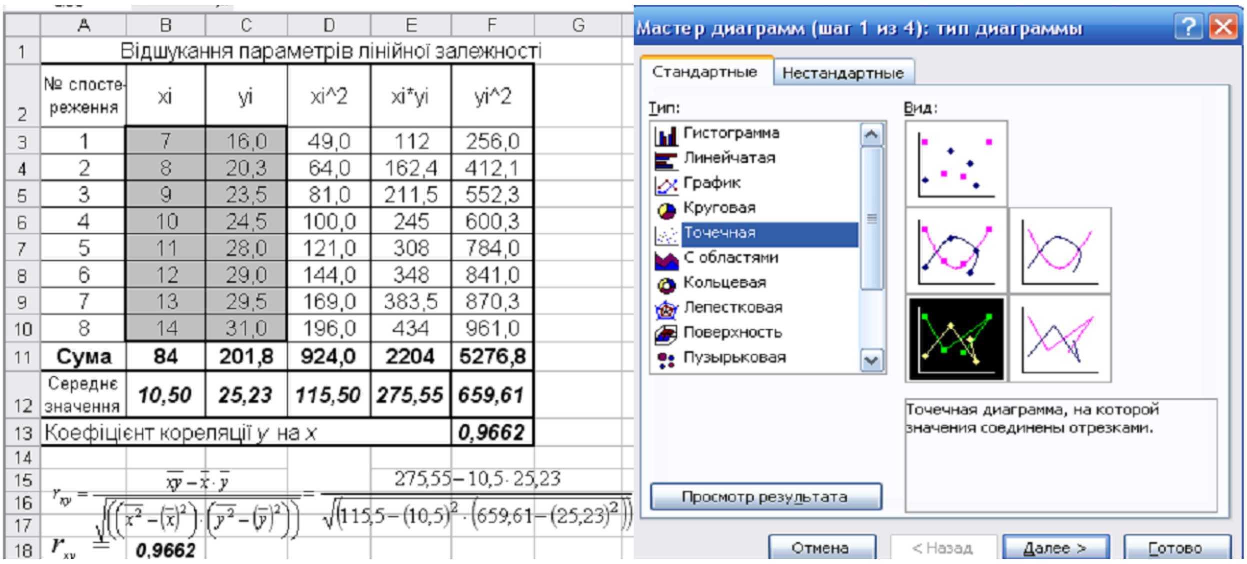
№ спостереження	1	2	3	4	5	6	7	8
Довжина колоса ячменю X , (см)	7	8	9	10	11	12	13	14
Кількість зернин у колосі Y , (шт.)	16,0	20,3	23,5	24,5	28,0	29,0	29,5	31,0

Алгоритм виконання завдань

І. Підготовчий етап.

1. Побудуємо електронну таблицю:

1) запустіть програму ***Microsoft Excel***;
2) збережіть файл у свою робочу папку під назвою ***МНК. xls***;
3) перейменуйте робочий аркуш «***Лист1***» у «***Лінійна залежність***»;
4) на аркуші «***Лінійна залежність***» створіть електронну таблицю за дослідними даними згідно умови (табл. 2.1), увівши до діапазону комірок ***B3:B10*** та ***C3:C10*** відповідні значення x_i та y_i (рис. 2.1, а).



а) б)

Рис. 2.1. Вигляд робочого аркуша ***Microsoft Excel*** (а) та «***Мастера диаграмм***»

2. Побудуємо точкову діаграму за допомогою *«Мастера диаграмм»*:

1) виділіть діапазон комірок ***B3:C10*** із дослідними даними;
2) на панелі інструментів натисніть кнопку «***Мастер диаграмм***»;
3) у вікні «***Мастер диаграмм***» на першому кроці вкажіть тип діаграми «***Тип: Точечная***» та оберіть вигляд «***Вид: Точечная диаграмма, на которой значения соединены отрезками***» (рис. 2.1, б);
4) наступними кроками знехтуйте, натискаючи кнопки для покрокового переходу «***Далее***»;

5) виконайте останній крок «***Мастер диаграмм (шаг 4 из 4): размещение диаграммы***», натискаючи кнопку «***Готово***».

ІІ. Попередній аналіз.

3. Перевіримо наявність лінійного кореляційного зв'язку між *Y* та *X*:

1) розрахуємо лінійний коефіцієнт кореляції *y* на *x*. Для цього виконайте розрахунки у таблиці так, як зображено на рис. 2.1, а.

Вказівки:

а) для розрахунку значень у рядку «***Сума***» скористайтесь кнопкою «***Автосумма***» або функцією ***=СУММ(…)***;

б) рядок «***Середнє значення***» обчисліть, розділивши відповідні значення у рядку «***Сума***» на кількість спостережень або за допомогою функції ***=СРЗНАЧ(…)***;

в) коефіцієнт кореляції *y* на *x* обчисліть за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{\left(\left(\overline{x}^2 - (\overline{x})^2\right) \cdot \left(\overline{y}^2 - (\overline{y})^2\right)\right)}}, \qquad (2.1)$$

2) числове значення коефіцієнта кореляції $r_{xy} \approx 97,0$ вказує на тісний зв'язок між y_i і x_i. Крім того, між досліджуваними ознаками зв'язок є прямим, тобто із збільшенням довжини колоса ячменю збільшується у ньому відповідно й кількість зернин.

Примітка: перевіримо правильність виконання обчислень коефіцієнта кореляції *y* на *x* за допомогою функції ***=КОРРЕЛ(B3:B10; C3:C10)***.

4. За графіком (рис. 2.2, а) можна зробити такі висновки:

1) характер залежності – лінійний (експериментальні точки розташовані приблизно вздовж прямої лінії);

2) Математична модель має вигляд: $y=ax+b$ (лінійна функція).

5. Крок, у якому передбачено лінеаризацію обраної моделі, опускаємо, оскільки модель, що описує емпіричну залежність, – це лінійна функція.

ІІІ. Застосування методу найменших квадратів. Аналіз моделі та висновки

6. Значення параметрів лінійної залежності знайдемо, підставляючи дані з таблиці (рис. 2.1, а) у систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}, \qquad (2.2)$$

1) одержимо:

$$\begin{cases} 924 \cdot a + 84 \cdot b = 2204,4 \\ 84 \cdot a + 8 \cdot b = 201,8 \end{cases}.$$

2) знайдемо параметри лінійної залежності *a* та *b*, розв'язавши систему нормальних рівнянь методом Крамера:

а) у діапазон комірок ***B19:C20*** введіть значення відповідних коефіцієнтів при змінних *a* і *b* даної системи, для обчислення визначника Δ;

б) у комірку ***E19*** введіть формулу: ***=МОПРЕД(B19:C20)***;

в) для знаходження Δ_a і Δ_b виконайте копіювання комірок ***B19:E20*** (наприклад, за допомогою виділення та натиснення комбінації клавіш ***Ctrl+C*** та ***Ctrl+V***);

г) підставляємо відповідно стовпець вільних членів у Δ замість першого стовпця в діапазон комірок ***B22:B23*** та обчисліть визначник Δ_a, аналогічно, виконайте заміну другого стовпця ***C25:C26*** й обчисліть визначник Δ_b;

д) за формулами Крамера знайдіть числові значення параметрів *a* і *b*: $a=\Delta_a/\Delta$, $b=\Delta_b/\Delta$, (рис. 2.2, б).

7. Для контролю правильності виконання обчислень побудуємо лінію тренду,

знайдемо її рівняння та обчислимо коефіцієнт достовірності апроксимації R^2. Для цього:

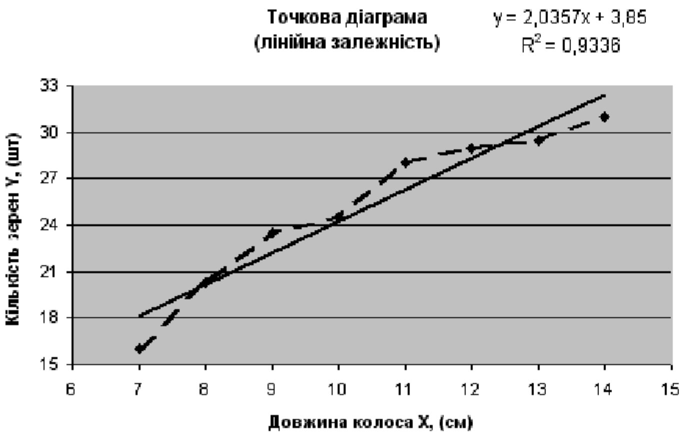
1) виділіть діаграму (рис. 2.2, а), натиснувши ліву кнопку миші;

2) виділіть графік емпіричної залежності, натиснувши на ламаній ліву кнопку миші;

3) для появи контекстного меню натисніть на графіку діаграми правою кнопкою миші й оберіть пункт «***Добавить линию тренда***» натисніть кнопку «***ОК***»;

4) у вікні «***Линия тренда***» вкажіть тип: «***Линейная***»;

5) перейдіть до вкладки «***Параметры***» і встановіть прапорці біля параметрів «***показать уравнение на диаграмме***» та «***поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации(R^2)***», натисніть кнопку «***ОК***» (рис. 2.2, а).



19	Δ =	924	84	=	***336***
20		84	8		
21					
22	Δa =	2204	84	=	***684***
23		201,8	8		
24					
25	Δb=	924	2204	=	***1294***
26		84	201,8		
27					
28					
29	a = Δa / Δ = ***2,0357***				
30					
31	b = Δb / Δ = ***3,85***				

а) б)

Рис. 2.2. Точкова діаграма з лінією тренду (а)
та визначення параметрів лінійної залежності (б).

8. Порівняємо параметри моделі, одержані безпосереднім обчисленням за методом найменших квадратів із параметрами лінії тренду: вони мають співпадати, що свідчить про правильність обчислень.

9. Проаналізуємо одержану модель та зробимо висновки:

1) кількість зернин у колосі зростає із збільшенням довжини колоса, оскільки a>0;

2) із приростом довжини колоса на1 см кількість зернин зростає в середньому на 2 шт., про що свідчить числове значення параметра a=2,0357; параметр b (для нашого прикладу дорівнює 3,85), як вільний член рівняння, має тільки розрахункове значення і не інтерпретується;

3) коефіцієнт достовірності апроксимації дає кількісну оцінку якості емпіричної формули. Значення R^2=0,9336 вказує на те, що одержане рівняння прямої лінії регресії y на x лише на 93% пояснює варіацію кількості зернин у колосі варіацією довжини колосся ячменю, а 7% обумовлено впливом інших, неврахованих у моделі факторів.

Емпіричне рівняння (математична модель), що виражає залежність між змінними величинами y та x має вигляд:

$$y = 2{,}0357 \cdot x + 3{,}75$$

Практична робота №3

Квадратична математична модель

Мета роботи: ознайомити студентів з методикою побудови квадратичної математичної моделі та її аналізом.

Обладнання: ЕОМ, пакет прикладних програм ***Microsoft Office.***

У досліді вивчається залежність врожайності сільськогосподарської культури Y від глибини зрошення X. Дослідні дані значень змінних x_i та y_i наведено у табл. 3.1. Методом найменших квадратів побудувати емпіричну залежність Y від X.

Таблиця 3.1

Залежність врожайності сільськогосподарської культури від глибини зрошення

№ спостереження	1	2	3	4	5	6
Глибина зрошення X, (см)	0	10	20	30	40	50
Врожайність Y, (ц/га)	10,4	14	14,7	14,3	13,7	12

Алгоритм виконання завдань.

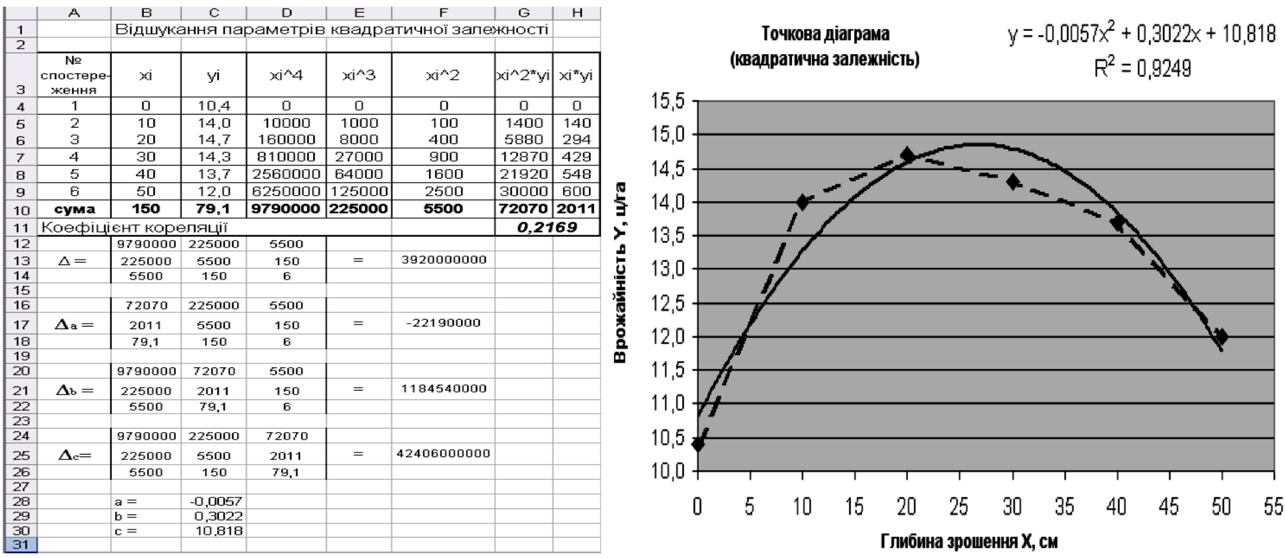
I. Підготовчий етап.

1. Перейменуйте робочий аркуш із «***Лист 2***» у «***Квадратична залежність***» та за дослідними даними створіть на цьому аркуші електронну таблицю, згідно умови задачі (табл. 3.1).

2. Побудуйте точкову діаграму за дослідними даними.

II. Попередній аналіз.

3. Числове значення лінійного коефіцієнта кореляції y на x $r_{xy}\approx 0{,}22$ вказує на слабкий лінійний кореляційний зв'язок між y_i та x_i, але не заперечує можливість існування нелінійного зв'язку між дослідними даними (рис. 3.1, а).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Відшукання параметрів квадратичної залежності						
2								
3	№ спостере-ження	xi	yi	xi^4	xi^3	xi^2	xi^2*yi	xi*yi
4	1	0	10,4	0	0	0	0	0
5	2	10	14,0	10000	1000	100	1400	140
6	3	20	14,7	160000	8000	400	5880	294
7	4	30	14,3	810000	27000	900	12870	429
8	5	40	13,7	2560000	64000	1600	21920	548
9	6	50	12,0	6250000	125000	2500	30000	600
10	**сума**	**150**	**79,1**	**9790000**	**225000**	**5500**	**72070**	**2011**
11	Коефіцієнт кореляції						***0,2169***	
12		9790000	225000	5500				
13	Δ =	225000	5500	150	=	3920000000		
14		5500	150	6				
15								
16		72070	225000	5500				
17	Δ_a =	2011	5500	150	=	-22190000		
18		79,1	150	6				
19								
20		9790000	72070	5500				
21	Δ_b =	225000	2011	150	=	1184540000		
22		5500	79,1	6				
23								
24		9790000	225000	72070				
25	Δ_c=	225000	5500	2011	=	42406000000		
26		5500	150	79,1				
27								
28		a =	-0,0057					
29		b =	0,3022					
30		c =	10,818					
31								

а) б)

Рис. 3.1. Вигляд робочого аркуша ***Microsoft Excel*** (а) та «***Точкової діаграми***» для квадратичної залежності (б)

4. Аналіз графіка вказує на те, що залежність між x_i й y_i може бути квадратичною тому, що графік нагадує параболу (рис. 3.1, б). Отже, у якості моделі обираємо квадратичну функцію:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c. \tag{3.1}$$

ІІІ. Застосування МНК. Аналіз моделі та висновки.

5. Для знаходження параметрів *a, b, c* обраної моделі скористаємось системою нормальних рівнянь. Отримаємо, згідно даних задачі систему (3.2):

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} 9790000a + 225000b + 5500c = 72070 \\ 225000a + 5500b + 150c = 2011 \\ 5500a + 150b + 6c = 79{,}1 \end{cases} \tag{3.3}$$

5.1. Числові значення параметрів *a, b* і *c* знайдемо за формулами Крамера аналогічно попередньому прикладу. Для обчислення визначників використаємо функцію: ***=МОПРЕД(діапазон_комірок)*** (рис. 3.1, а).

6. Для контролю обчислень побудуємо лінію тренду і знайдемо коефіцієнт R^2.

Примітка: у вікні «***Линия тренда***» вкажіть тип: «***Полиномиальная***», встановіть прапорець біля параметра «***Степень: 2***».

6.1. Для першого прикладу коефіцієнт достовірності апроксимації становить R^2 =0,9249 (рис. 3.1, б). Це означає, що обрана модель на 92,5% пояснює варіацію врожайності сільськогосподарської культури залежно від глибини зрошення.

7. Рівняння, одержане безпосереднім обчисленням параметрів квадратичної залежності МНК, і коефіцієнти рівняння лінії тренду співпадають, що є свідченням правильності проведених розрахунків.

8. Аналіз одержаної емпіричної залежності (моделі):

1) параметр $a=-0{,}0057$ характеризує зміну темпу приросту врожайності сільськогосподарської культури *Y* залежно від глибини зрошення *X*, а параметр $b=0{,}3022$ показує початковий темп приросту врожайності залежно від глибини зрошення. Щодо параметра $c=10{,}818$, то він вказує на початкову врожайність культури за відсутності зрошення;

2) обчислені за одержаною моделлю значення врожайності при глибині зрошення 10 см та 20 см дорівнюють 13,3 ц/га та 14,6 ц/га, а при 30 см та 40 см, відповідно 14,8 ц/га та 13,8 ц/га. Отже, приріст урожайності сільськогосподарської культури при збільшенні глибини зрошення на 10 см залежить від глибини зрошення і становить 1,3 ц/га, у першому випадку, і 1 ц/га у другому. Отже, при різній глибині зрошення темп приросту урожайності різний;

3) глибина зрошення, за якої досягається максимальна врожайність відповідає абсцисі вершини параболи:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{0{,}3022}{2 \cdot (-0{,}0057)} = 26{,}51 \text{ (см)},$$

причому максимальна врожайність становить:

$$y_0 = y(x_0) = -0{,}0057 \cdot (26{,}51)^2 + 0{,}3022 \cdot 26{,}51 + 10{,}818 = 14{,}62 \text{ (ц/га)}.$$

Висновок: залежність врожайності культури від глибини зрошення описується рівнянням***:*** $y = -0{,}0057 \cdot x^2 + 0{,}3022 \cdot x + 10{,}818$. Максимальна врожайність становить 14,62 ц/га при глибині зрошення 26,51 см.

Практична робота № 4

Гіперболічна математична модель

Мета роботи: ознайомити студентів з методикою побудови гіперболічної математичної моделі та її аналізом.

Обладнання: ЕОМ, пакет прикладних програм ***Microsoft Office.***

У досліді вивчалась залежність приросту довжини стебла конюшини червоної *Y* від вологості ґрунту *X*. Дослідні дані значень змінних x_i й y_i (табл. 4.1). МНК побудувати емпіричну залежність *Y* від *X*.

Таблиця 4.1

Залежність приросту довжини стебла конюшини червоної від вологості ґрунту

№ спостереження	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Вологість ґрунту *X* , %	25	27	30	32	35	39	43	46	50	55	58	62
Приріст довжини стебла конюшини *Y*, мм	370	335	280	240	200	150	120	95	70	40	30	10

Знайдемо емпіричне рівняння залежності.

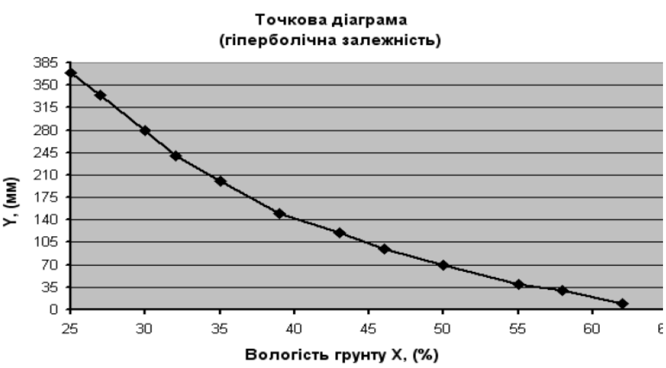
І. Підготовчий етап.

1. Запустіть програму ***Microsoft Excel*** і назвіть робочий аркуш «***Гіперболічна залежність***». За дослідними даними створіть на цьому аркуші електронну таблицю, згідно умови задачі (табл. 4.1) (рис. 4.1, а).

2. Побудуйте точкову діаграму за дослідними даними (рис. 4.1, б).

1	Відшукання параматрів гіперболічної залежності					
2						
3	№ спостере-ження	xi	yi	xi' = 1/ xi	(xi')^2	xi * yi
4	1	25	370	0,04	0,0016	14,8
5	2	27	335	0,03704	0,0014	12,407
6	3	30	280	0,03333	0,0011	9,3333
7	4	32	240	0,03125	0,001	7,5
8	5	35	200	0,02857	0,0008	5,7143
9	6	39	150	0,02564	0,0007	3,8462
10	7	43	120	0,02326	0,0005	2,7907
11	8	46	95	0,02174	0,0005	2,0652
12	9	50	70	0,02	0,0004	1,4
13	10	55	40	0,01818	0,0003	0,7273
14	11	58	30	0,01724	0,0003	0,5172
15	12	62	10	0,01613	0,0003	0,1613
16	**Сума**	**502**	**1940**	**0,31238**	**0,0088**	**61,263**
17	Коефіцієнт кореляції					***-0,970***

а)



б)

Рис. 4.1 Вигляд робочого аркуша ***Microsoft Excel*** (а) та «***Точкової діаграми***» для гіперболічної залежності (б)

ІІ. Попередній аналіз

3. Числове значення коефіцієнта парної лінійної кореляції r_{xy} =0,970 вказує на сильний від'ємний лінійний кореляційний зв'язок між *Y* і *X*, але візуальний аналіз точкової діаграми дає підстави зробити припущення, що більш точно зв'язок між *Y* і *X* можна описати гіперболічною, квадратичною, експоненційною або логарифмічною залежністю (рис. 4.1, б).

4. Зокрема, аналіз графіка вказує на те, що залежність між x_i й y_i може бути гіперболічною тому, що графік нагадує вітку гіперболи (рис. 4.1, б). Отже, як модель оберіть гіперболічну функцію:

$$y = \frac{a}{x} + b.$$

Обрана модель нелінійна і допускає **лінеаризацію**. Зведіть її до лінійної моделі підстановкою

$$x' = \frac{1}{x}.$$

Одержимо:

$$y = a \cdot x' + b.$$

ІІІ. Застосування МНК. Аналіз моделі й висновки

6. Для знаходження параметрів a і b обраної моделі, скористайтесь системою нормальних рівнянь (СНР) (4.1). Отримайте, згідно даних задачі, систему (4.2):

$$\left\{ \begin{aligned} & a\sum_{i=1}^{n}(x_i')^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i' = \sum_{i=1}^{n} x_i' \cdot y_i \\ & a\sum_{i=1}^{n} x_i' + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} \cdot y_i \end{aligned} \right\} \tag{4.1}$$

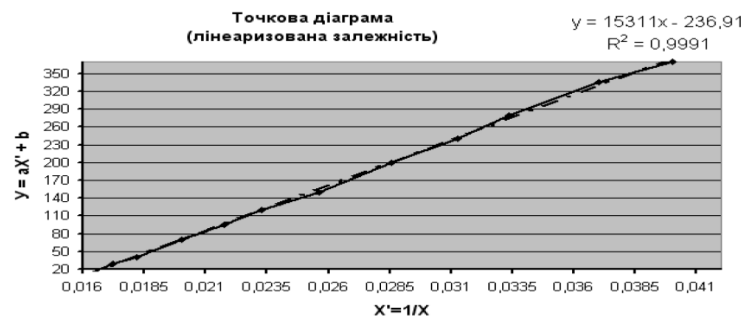
$$\left\{ \begin{aligned} & 0{,}0088 \cdot a + 0{,}3124 \cdot b = 61{,}263 \\ & 0{,}3124 \cdot a + 12 \cdot b = 1940 \end{aligned} \right\} \tag{4.2}$$

Числові значення параметрів a і b знайдіть за формулами Крамера, обчисливши визначники за допомогою функції: ***=МОПРЕД(…)***. Маєте одержати:

a=15311,3; b=-236,91.

7. Побудуйте графік за точками (x'_i; y_i). Для контролю обчислень додатково побудуйте лінію тренда і знайдіть коефіцієнт апроксимації $\boldsymbol{R^2}$, вказавши у вікні ***«Линия тренда»*** тип: ***«Линейная»*** (рис. 4.2, а).

Слід наголосити, щоб звернули увагу на відповідність значень a=15311,3 та b=-236,91 у рівнянні лінії тренду, раніше обчисленими значеннями параметрів моделі.



	A	B	C	D	E	F
1	Відшукання параматрів гіперболічної залежності					
30						
31	A =	0,0088	0,312		B =	61,263
32		0,3124	12			1940
33						
34	A* =	1422,8	-37		X =	15311
35		-37,04	1,047			-236,91
36						
37						

а) б)

Рис. 4.2. Вигляд «***Точкової діаграми***» (а) та робочого аркуша ***Microsoft Excel*** (б) для лінійної залежності

Відповідь: ММ, що описує залежність приросту конюшини червоної від вологості ґрунту, має вигляд:

$$y = \frac{15311{,}3}{x} - 236{,}91.$$

Зауваження: важливим питанням під час побудови ММ є оцінка області її застосування. У даному випадку область застосування моделі можна оцінити, виходячи з таких міркувань: зі змісту задачі випливає, що $x \geq 0$, але структура ММ допускає лише $x>0$. Фактично, для побудови моделі розглядається інтервал значень x_i , починаючи з x=25 і далі. Тому, значення x=25 приймаємо за нижню границю інтервалу допустимих значень x. Верхню границю знайдемо з умови $y \geq 0$, яка означає, що приріст довжини стебла конюшини у будь-якому випадку має бути невід’ємним. З цієї умови одержимо:

$$\frac{15311{,}3}{x} - 236{,}91 \geq 0\,,\; x \leq 64{,}3\,.$$

Отже, можна стверджувати, що дана модель працює у діапазоні значень $x \in [25; 64]$.

Окрім розглянутого у прикладі способу знаходження параметрів гіперболічної залежності, шляхом розв’язування СНР методом Крамера, доцільно, для розрахунку параметрів a і b , скористатися іншим відомим методом розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), зокрема матричним методом. Відповідні вказівки щодо виконання обчислень можуть мати такий вигляд:

1. Скласти матрицю *А* із коефіцієнтів при невідомих СНР ***(В30:С31)***.

2. Скласти матрицю-стовпець вільних членів *В* ***(F30:F31)***.

3. Знайти обернену матрицю A^{-1} за допомогою функції ***=МОБР(В30:С31)***, натиснувши комбінацію клавіш ***Ctrl+Shift+Enter*** для вставки числових значень елементів оберненої матриці у комірки вибраного діапазону ***(В33:С34)***.

4. Знайдіть розв’язки системи за допомогою функції =***МУМНОЖ(В33:С34; F30:F31)***, натиснувши комбінацію клавіш ***Ctrl+Shift+Enter*** для вставки компонентів вектора розв’язку в комірки вибраного діапазону ***(F33:F34)*** (Рис. 4.2, б).

5. Порівняйте числові значення коефіцієнтів a і b , знайдені матричним методом із тими, що обчислені методом Крамера.

Практична робота № 5

Степенева математична модель

Мета роботи: ознайомити студентів з методикою побудови степеневої математичної моделі та її аналізом.

Обладнання: ЕОМ, пакет прикладних програм ***Microsoft Office.***

У досліді вивчається залежність інтенсивності обміну кисню Y від маси тварини X для птахів і ссавців (табл. 5.1). Методом найменших квадратів побудувати емпіричну залежність Y від X .

Таблиця 5.1

Залежність інтенсивності обміну кисню за одиницю часу від маси тварини

№ спостереження	1	2	3	4	5	6
Маса тварини X	0,1	0,25	0,5	0,8	1	1,5
Кількість кисню, що поглинає тварина Y	10	25	43	56	70	91

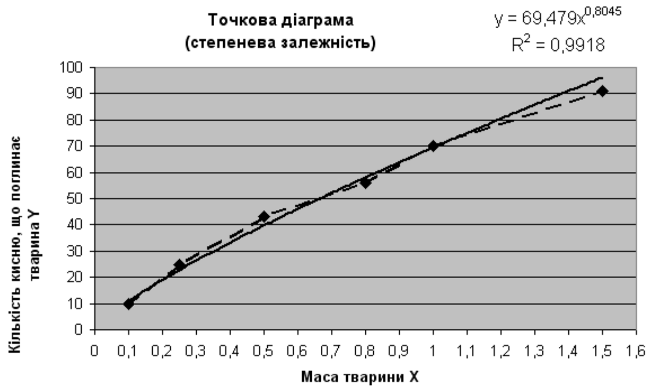
Алгоритм виконання завдання

1. Назвіть вільний робочий аркуш «**Степенева залежність**». За дослідними даними створіть на цьому аркуші електронну таблицю, ввівши відповідні значення x_i і y_i згідно умови (табл. 5.1) (рис. 5.1, а).

Відшукання параметрів степеневої залежності

№ спостере-ження	xi	yi	xi' = lg xi	(xi')^2	y'i = lg yi	xi' * yi'
1	0,1	10	-1	1	1	-1
2	0,25	25	-0,602	0,3625	1,3979	-0,8416437
3	0,5	43	-0,301	0,0906	1,6335	-0,491723
4	0,8	56	-0,097	0,0094	1,7482	-0,1694169
5	1	70	0	0	1,8451	0
6	1,5	91	0,176	0,031	1,959	0,3449701
Сума	**4,15**	**295**	**-1,824**	**1,4935**	**9,5837**	**-2,1578136**

а)



б)

Рис. 5.1. Вигляд робочого аркуша ***Microsoft Excel*** (а) та «***Точкової діаграми***» для степеневої залежності (б)

2. Побудуйте точкову діаграму для дослідних даних (xi ; yi) (рис. 5.1, б).

3. З агробіології відомо, що залежність інтенсивності обміну кисню від маси тварини найбільш точно описується степеневою функцією, тому немає необхідності обчислювати коефіцієнт парної лінійної кореляції.

4. Переконайтесь, що ММ даної залежності дійсно може бути степенева функція: $y=bx^a$, де $y>0$ і $x>0$ (виходячи з умови задачі) і $b>0$.

5. Лінеалізуйте степеневу функцію. Для цього: прологарифмуйте ліву й праву частини рівняння, враховуючи властивості логарифмів:

$$lg\, y = lg\, b + a \cdot lg\, x\ .$$

Зведемо модель до:

$$y' = lg\, y\,,\ b' = lg\, b\,,\ x' = lg\, x\,.$$

Тоді маємо:

$$y = a \cdot x' + b'\ .$$

6. Знайдіть параметри a і b' лінеалізованої моделі із системи нормальних рівнянь (5.1). Отримайте, згідно даних задачі систему (5.2).

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i')^2 + b'\sum\limits_{i=1}^{n}x_i' = \sum\limits_{i=1}^{n}x_i'\cdot y_i' \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i' + n\cdot b' = \sum\limits_{i=1}^{n}y_i' \end{cases} \qquad (5.1)$$

$$\begin{cases} 1{,}493\cdot a - 1{,}824\cdot b' = 61{,}263 \\ -1{,}824\cdot a + 6\cdot b' = 9{,}584 \end{cases} \qquad (5.2)$$

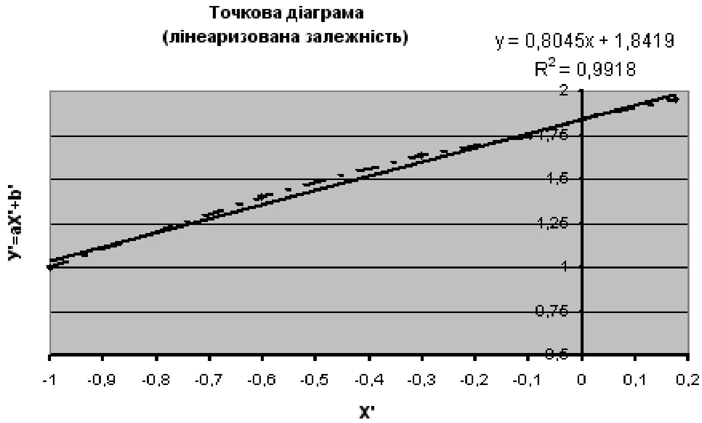
7. Обчисліть числові значення параметрів a і b' аналогічно прикладу лінійної залежності за допомогою функції ***=МОПРЕД(…)***. Знайдіть параметр b із співвідношення (рис. 5.2, а):

$$lg\, b = b' \;\; \Rightarrow b = 10^{b'}.$$

G23 fx =СТЕПЕНЬ(10;C23)

	A	B	C	D	E	F	G
1		Відшукання параметрів степеневої залежності					
11							
12	Δ =	1,493	-1,82	=	5,631		
13		-1,824	6				
14							
15	Δ a =	-2,158	-1,82	=	4,5332		
16		9,584	6				
17							
18	a=	Δ a / Δ =	0,805				
19							
20	Δ b' =	1,493	-2,16	=	10,373		
21		-1,824	9,584				
22							
23	→lg b' = Δb' /Δ=		1,842	→ b = 10 ^ (1,842) =			69,5131

а)



б)

Рис. 5.2. Відшукання параметрів степеневої залежності (а) та вигляд «***Точкової діаграми***» для лінеалізованої залежності (б)

8. Для контролю обчислень побудуйте графік за точками (x'_i; y'_i) і додатково побудуйте лінію тренда та знайдіть коефіцієнт апроксимації R^2, вказавши у вікні ***“Линия тренда”*** тип: ***“Линейная”*** (рис. 5.2, б).

Відповідь: залежність інтенсивності обміну кисню за одиницю часу від маси тварини (птахи, ссавці) має вигляд:

$$y = 69{,}479\cdot x^{0{,}8045}.$$

Список використаних джерел

1. Васильковський О., Лещенко С., Васильковська К., Петренко Д. Підручник дослідника: Навчальний посібник для студентів агротехнічних спеціальностей. – Харків: Мачулін, 2016. – 204 с.
2. Малайчук В.П., Петренко О.М., Рожковський В.Ф. Основи теорії ймовірності і математичної статистики: навч. посібник. – Д.: РВВ ДНУ, 2001. 163 с.
3. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: Підручник. – К., 2000. 688 с.
4. Томашевський О.В., Рисіков В.П. Комп'ютерні технології статистичної обробки даних. Навчальний посібник. Запоріжжя: ЗНТУ, 2006. 175 с.
5. Толбатов Ю.А., Толбатов Є.Ю. Математичне програмування: підручник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2008. 432 с.
6. Трибрат Р.О. Моделювання технологічних процесів у тваринництві: метод. рекомендації до самостійного вивчення дисципліни. – Миколаїв: МНАУ, 2016. 47 с.
7. Забуранна Л.В. Оптимізаційні методи та моделі: підручник. – К., 2014. 372 с.
8. Швець В.О., Флегантов Л.О., Овсієнко Ю.І. Програма навчальної дисципліни «Вища математика (за фаховим спрямуванням)» для підготовки бакалаврів напряму 6.090101 «Агрономія» у вищих навчальних закладах II-IV рівнів акредитації Міністерства аграрної політики країни. – К.: Аграрна освіта, 2008. – 30 с.