ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Кафедра сільськогосподарського машинобудування

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ

Методичні рекомендації до виконання практичних робіт
для здобувачів ступеня вищої освіти магістр спеціальності G11
"Машинобудування" освітньо-наукова програма "Галузеве машинобудування"

Ухвалено
на засіданні кафедри
сільськогосподарського
машинобудування.
Протокол № 10 від 21 квітня 2025 р.

м. Кропивницький
2025

Математичне моделювання процесів і систем : методичні рекомендації до виконання практичних робіт для здобувачів ступеня вищої освіти магістр спеціальності G11 "Машинобудування" освітньо-наукова програма "Галузеве машинобудування" / [уклад. : В.В. Амосов, Д.Ю. Артеменко, С.М. Мороз] ; М-во освіти і науки України, Центральноукраїн. нац. техн. ун-т, каф. с.-г. машинобуд. – Кропивницький : ЦНТУ, 2025.– 64 с.

Укладачі: канд. техн. наук, доцент В.В. Амосов,
канд. техн. наук, доцент Д.Ю. Артеменко,
канд. техн. наук, доцент С.М. Мороз

Рецензенти: доктор техн. наук, проф. Кулєшков Ю.В.
канд. техн. наук, доцент Петренко Д.І.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1
Побудова аналітичної математичної моделі руху точки

Мета роботи: набути практичних навиків побудови аналітичної моделі.

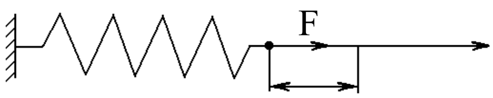
Теоретична частина

Аналітична модель – це ряд функціональних та логічних відношень, які повністю описують функціонування системи та її частин.

Приклад 1.1 Маленька сталева кулька масою m лежить на горизонтальній гладенькій поверхні (тертям нехтуємо). Вона прикріплена до одного кінця пружини з коефіцієнтом жорсткості k, другий кінець якої закріплений нерухомо. Пружину стискають на величину x_0 і відпускають. Вивести рівняння руху кульки.

Розв'язок

1. Вважаємо кульку матеріальною точкою. Зобразимо розрахункову схему процесу:



2. На кульку діє (відповідно до закону Гука) пружина з силою $F = -kx$, де x – величина деформації пружини.

За другим законом Ньютона

$$m\ddot{x} = F \text{ або } m\ddot{x} = -kx \qquad (1.1)$$

Ми отримали диференціальне рівняння руху кульки (1.1). Це звичайне диференційне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.

3. Його розв'язок:

$$x(t) = A\sin\sqrt{k/m}t + B\cos\sqrt{k/m}t, \qquad (1.2)$$

де A і B – постійні величини.

Визначаємо їх, підставляючи в (1.2) початкові умови (t = 0, $x(0) = x_0$,).

Отримуємо $A = 0$; $B = x_0$, тому рівняння руху кульки

$$x(t) = x_0\cos\sqrt{k/m}t. \qquad (1.3)$$

4. Аналізуючи рівняння, можна зробити такі висновки:

а) кулька здійснює гармонічні коливання з амплітудою x_0 та частотою

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

б) при збільшенні жорсткості пружини та зменшенні маси кульки частота коливань збільшується.

Зміст звіту

1. Аналітичний розв'язок диференціального рівняння за умовами свого варіанту.
2. Оцінити тип отриманої математичної функції.
3. Якщо аналітично не вдається розв'язати диференціальне рівняння, перейти до його розв'язку чисельним методом (ПЗ №2, пункти 1 та 4).

Індивідуальні варіанти умов задачі 1

1.1–1.28. Скласти математичну модель руху точки або тіла з метою визначення рівняння руху (залежність пройденого шляху від часу).

1.1. Тіло масою **m** падає з початковою швидкістю v_o. Сила опору рухові тіла пропорційна квадрату його швидкості (коефіцієнт пропорційності **К**).

1.2. Частку маси **m** кинуто вертикально вгору. При русі на неї діє сила опору, яка прямо пропорційна першому ступеню швидкості (коефіцієнт пропорційності дорівнює k^2m)

1.3. М'яч масою **m** кинуто вертикально вгору зі швидкістю v_o. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості (коефіцієнт пропорційності **К**).

1.4. Куля масою **m** з початковою швидкістю v_o занурюється в воду, сила опору якої пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності **К**).

1.5. Човен масою **m** рухається по озеру зі швидкістю v_o. Мотор вимикають. Опір води пропорційний швидкості човна (коефіцієнт пропорційності **К**).

1.6. Визначити закон прямолінійного руху матеріальної точки масою **m**, яка падає в середовищі, опір якого пропорційний другому ступеню швидкості (коефіцієнт пропорційності дорівнює k^2m).

1.7. Тіло падає в повітрі. Сила опору повітря пропорційна квадрату його швидкості v та площі **А** найбільшого перерізу тіла (коефіцієнт пропорційності **К**).

1.8. Поїзд вагою **P** рухається по прямолінійному горизонтальному відрізку шляху. Сила тяги тепловоза постійна та дорівнює **F** . Сила опору руху лінійно залежить від швидкості поїзда (коефіцієнт пропорційності **К**).

1.9. Аеросани ковзають по горизонтальному полю зі швидкістю v_o. Сила тяги двигуна – **F** . Сила тертя лиж по снігу пропорційна вазі **P** саней (коефіцієнт пропорційності K_1). Опір повітря пропорційний швидкості руху (коефіцієнт пропорційності K_2).

1.10. Літак масою **m** починає рух по злітній смузі. Сила тяги його двигунів – **F**. Сила опору повітря пропорційна швидкості літака v (коефіцієнт пропорційності K_1). Підйомна сила пропорційна швидкості літака (коефіцієнт пропорційності K_2).

1.11. Тіло занурюється вертикально у воду. Швидкість занурення прямопропорційна глибині занурювання (коефіцієнт пропорційності **К**) та зворотньопропорційна початковій швидкості v_o.

1.12. Парашутист масою **m** падає з розкритим парашутом. Його кінетична енергія пропорційна висоті **h** над поверхнею землі (коефіцієнт пропорційності **К**).

1.13. Локомотив масою **m** рухається по горизонтальному шляху зі швидкістю v_o. Машиніст включає термінове гальмування. Опір руху після початку гальмування дорівнює 0,2 ваги поїзда.

1.14. У катера зупинився двигун. Сила опору води пропорційна квадрату його швидкості (коефіцієнт пропорційності **К**).

1.15. Куля об'ємом **V** та щільністю ρ_k вертикально падає в рідині щільністю ρ_p. Опір рідини пропорційний квадрату швидкості кулі (коефіцієнт пропорційності **К**).

1.16. Метеорит під впливом земного тяжіння із стану спокою починає прямолінійно падати на Землю з висоти **h**. Якою була б швидкість метеорита на поверхні Землі, коли б не було земної атмосфери? Радіус Землі дорівнює 6377 км.

1.17. Парашутист опускається на парашуті, який має форму півсфери радіуса **R**=4м. Його маса разом з масою парашута дорівнює **m**=82 кг. Знайти швидкість парашутиста через 2 с після початку опускання і шлях, який він пройшов за час **t**. Вважати, що сила опору повітря $F_{оп}=0{,}00081Sv^2$, де **S**–площа найбільшого перерізу, перпендикулярного до напрямку руху, **v**– швидкість руху.

1.18. Вітер у лісі втрачає частину своєї швидкості. На нескінченно малому проміжку шляху ця втрата пропорційна швидкості на початку проміжку та його довжині (коефіцієнт пропорційності **k**). Знайти швидкість вітру, який пройшов 150 м, якщо його початкова швидкість v_o =12 м/с.

1.19. Фрикційний сепаратор складається з площини, яка розташована під кутом α до горизонту, та коробочки, поділеної на секції, до якої потрапляють частки добрив або насінини (рис.1.1). Частки подаються на площину зі швидкістю v_0, яка спрямована перпендикулярно до лінії найбільшого нахилу. Скласти диференціальне рівняння руху частки з коефіцієнтом тертя f по площині. Визначити розміри секцій l_i, які забезпечать сепарацію часток за коефіцієнтом тертя в межах від f_{min} до f_{max} з інтервалом Δf, якщо b задане.

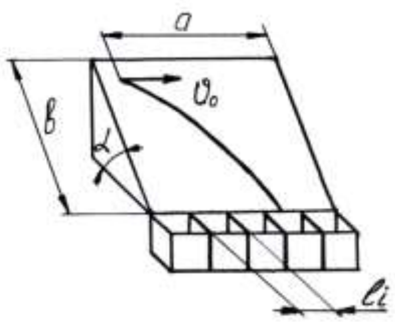


Рис. 1.1

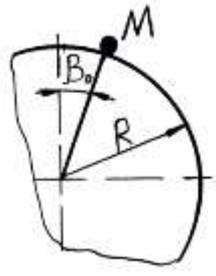


Рис. 1.2

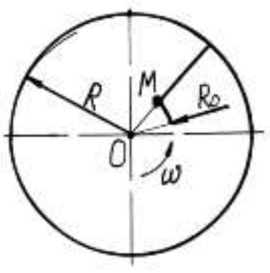


Рис. 1.3

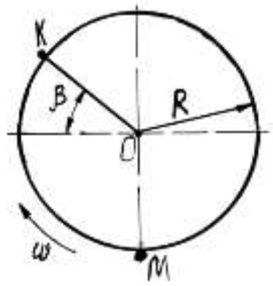


Рис. 1.4

1.20. Частка масою m починає рух у точці М при куті β_0 та ковзає по нерухомій циліндричній поверхні радіуса R (рис.1.2). Коефіцієнт тертя між часткою та циліндром f. Скласти диференціальне рівняння руху частки. Визначити кут $\beta_к$, при якому частка відривається від поверхні, та швидкість частки $v_к$ в момент відриву.

1.21. Частка масою m потрапляє без початкової швидкості в нижню точку М циліндра радіуса R, який обертається навколо горизонтальної осі Ох з кутовою швидкістю ω (рис.1.3). Коефіцієнт тертя між часткою та циліндром f.

Скласти рівняння руху частки, припустивши, що вона рухається без обертання. Визначити кут $\boldsymbol{\beta}$, при якому частка відривається від поверхні, та швидкість частки $\boldsymbol{v_к}$ в момент відриву. Визначити мінімальну кутову швидкість $\boldsymbol{\omega_{min}}$, при якій частка підніметься вище горизонтальної осі циліндра.

1.22. Частка добрив масою $\boldsymbol{m}$ потрапляє без початкової швидкості на поверхню горизонтального диска радіуса $\boldsymbol{R}$, який обертається навколо вертикальної осі Oy з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$, і починає рухатись у точці M вздовж радіальної лопаті, яка починається на відстані $\boldsymbol{R_0}$ від центра (рис.1.4). Коефіцієнт тертя між часткою та поверхнями диска та лопаті $\boldsymbol{f}$.

Скласти рівняння руху частки. Визначити швидкість $\boldsymbol{v_l}$, при якій буде забезпечено дальність розкидання добрив $\boldsymbol{l}$ (диск розташовано на висоті $\boldsymbol{H}$ від поверхні поля). Опір повітря пропорційний швидкості частки.

1.23. Клавіша двохвального соломотряса здійснює плоско-коливальний рух під дією кривошипа радіуса $\boldsymbol{r}$, який обертається з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$ (рис.1.5). Клавіша нахилена під кутом $\boldsymbol{\alpha}$ до горизонту. Частка соломи А масою $\boldsymbol{m}$ перебуває на клавіші. Сила опору середовища при її русі пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності $\boldsymbol{K}$).

Визначити кут $\boldsymbol{\varphi}$, при якому частка відірветься від клавіші. Побудувати траєкторію польоту частки від моменту відриву до наступної її зустрічі з клавішею.

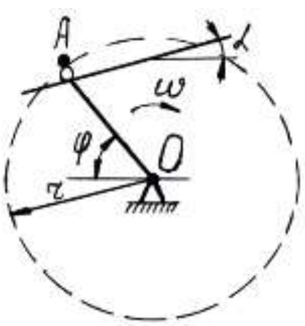


Рис. 1.5

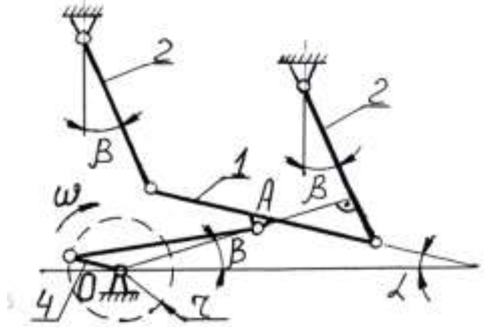


Рис. 1.6

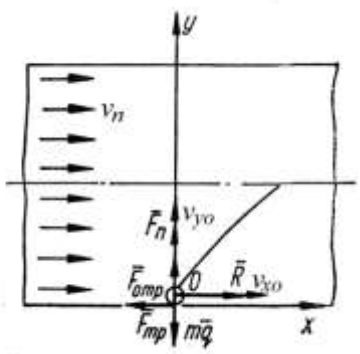


Рис. 1.7

1.24. Решето 1 підвішене на підвісках 2 та нахилене під кутом $\boldsymbol{\alpha}$ до горизонту (рис.1.6). За допомогою кривошипно-шатунного механізму 3 його приводять до коливального руху. Кривошип радіуса $\boldsymbol{r}$ обертається з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$. Скласти диференціальне рівняння та рівняння руху зерна А масою $\boldsymbol{m}$ по решету. Коефіцієнт тертя між поверхнею зерна та решета $\boldsymbol{f}$.

1.25. Частка добрив масою $\boldsymbol{m}$ перебуває на нижній стінці горизонтального пневмотукопровода діаметра $\boldsymbol{d}$, маючи горизонтальну початкову швидкість $\boldsymbol{v_{x0}}$ і вертикальну $\boldsymbol{v_{y0}}$=0 (рис.1.7). На неї діють горизонтальна рушійна сила, яка пропорційна різниці між швидкістю повітряного потоку $\boldsymbol{v_n}$ та горизонтальною складовою $\boldsymbol{v_x}$ абсолютної швидкості частки (коефіцієнт пропорційності $\boldsymbol{K_1}$), вертикальна підйомна сила, яка пропорційна квадрату горизонтальної складової швидкості частки (коефіцієнт пропорційності $\boldsymbol{K_2}$), вертикальна підйомна сила опору повітряного потоку, яка пропорційна квадрату вертикальної складової швидкості частки $\boldsymbol{v_y}$ (коефіцієнт пропорційності $\boldsymbol{K_3}$). Скласти диференціальне рівняння руху частки в горизонтальній ділянці пневмотукопровода та визначити рівняння її траєкторії. Визначити час, за який частка досягає верхньої стінки пневмотукопровода, та відстань, яку вона подолає вздовж горизонтальної осі за цей час.

1.26. Зерно А масою $\boldsymbol{m}$ перебуває на скребку 1 похилого елеватора, який має висоту $\boldsymbol{в}$ та рухається зі швидкістю $\boldsymbol{v_r}$ (рис.1.8). Тяговий ланцюг 2 елеватора розташований під кутом $\boldsymbol{\alpha}$ до горизонту. Скласти диференціальне рівняння та рівняння руху частки по скребку. Визначити довжину вивантажувального вікна $\boldsymbol{l}$, при якій зерно подолає шлях, що дорівнює висоті скребка. Коефіцієнт тертя зерна по поверхні скребка $\boldsymbol{f}$.

1.27. Частка А масою $\boldsymbol{m}$, яка має складові початкової швидкості $\boldsymbol{v_{x0}}$ та $\boldsymbol{v_{y0}}$, потрапляє у верхню частину похилого повітряного каналу (кут нахилу до горизонту $\boldsymbol{\alpha}$) (рис.1.9). Швидкість повітря у каналі $\boldsymbol{v_n}$.

Скласти диференціальне рівняння та рівняння руху частки у каналі. Визначити довжину горизонтального шляху $\boldsymbol{l}$, який подолає частка до моменту досягнення нижньої стінки каналу. Розрахунок провести для часток, які мають швидкості паріння $\boldsymbol{v_к}$ (основна культура) та $\boldsymbol{v_д}$ (домішки).

1.28. Частка добрив А масою $\boldsymbol{m}$ перебуває у нижній точці конусної частини тарілки (кут нахилу до горизонту $\boldsymbol{\alpha}$) туковисівного апарата радіуса $\boldsymbol{R_1}$, яка обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$ (рис.1.10). Скласти диференціальне рівняння та рівняння руху частки. Коефіцієнт тертя між часткою та поверхнею тарілки $\boldsymbol{f}$. Визначити граничну швидкість $\boldsymbol{\omega_r}$, при якій частка не буде скинута з тарілки, якщо радіус її верхньої частини $\boldsymbol{R_2}$.

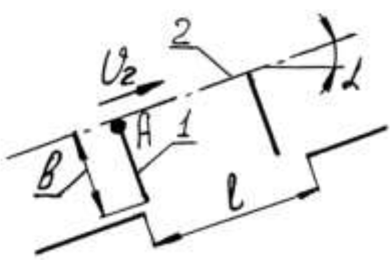


Рис. 1.8

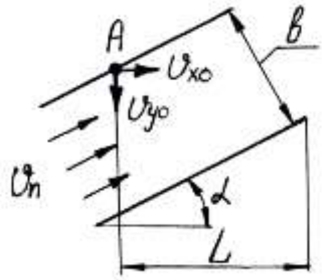


Рис. 1.9

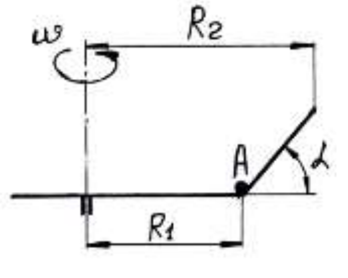


Рис. 1.10

1.29. Зерно А масою $\boldsymbol{m}$ перебуває на радіальній лопаті 1, жорстко з'єднаній з вертикальним висівним диском 2, який обертається з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$ навколо горизонтальної осі (рис.1.11). Ширина лопаті $\boldsymbol{в}$. Її зовнішня точка розташована на відстані $\boldsymbol{R}$ від осі обертання. Зерно починає рухатись по лопаті в момент, коли кут між лопаттю та горизонталлю складає φ.

Визначити рівняння руху зерна по лопаті. Побудувати траєкторію руху зерна відносно висівного диска. Визначити кут $\varphi_к$, при якому траєкторія руху зерна пройде через центр присмоктувального отвору 3, який розташовано на відстані r від осі обертання. Коефіцієнт тертя зерна по лопаті та диску f.

1.30. Частка сіна А масою m переміщується по стерні граблиною 1 ротаційних грабель, яка обертається навколо вертикальної осі Оу з кутовою швидкістю ω (рис.1.12). Граблі рухаються поступально зі швидкістю v. Ширина граблини $в$. Радіус траєкторії, яку утворює її зовнішня точка, R. Коефіцієнт тертя сіна по стерні f_1, по граблині – f_2. Скласти диференціальне рівняння та рівняння руху частки сіна по граблині. Визначити час, за який частка зійде з граблини. Побудувати графік траєкторії абсолютного руху частки.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2

Чисельний розв’язок диференціального рівняння

Мета роботи: набути практичних навиків чисельного розв’язку звичайного диференціального рівняння.

Теоретична частина

Однією з найбільш розповсюджених математичних моделей руху матеріальних точок та твердих тіл є диференціальне рівняння. Для розв’язку диференціальних рівнянь розроблено велику кількість аналітичних методів, але їх пошук та використання потребують ґрунтовної математичної підготовки та суттєвих витрат часу. Зрозуміло, що аналітичний розв’язок диференціального рівняння дає універсальний результат, який розкриває можливість краще зрозуміти фізичну сутність досліджуваного процесу та використати його у аналогічних випадках. Але бувають ситуації, коли знань вищої математики не вистачає, або потрібно швидко отримати інформацію про хоча б один розв’язок диференціального рівняння при заданих початкових умовах. Тут на допомогу приходять чисельні методи розв’язку диференціальних рівнянь, яких розроблено вже чимало. У системі Mathcad реалізовано різні алгоритми чисельних методів розв’язку звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Наприклад,

odesolve(x, b, [step]),

де *x* – змінна інтегрування; *b* – кінцева точка інтервалу інтегрування; *step* (не обов'язковий) – кількість кроків при розв'язку рівняння.

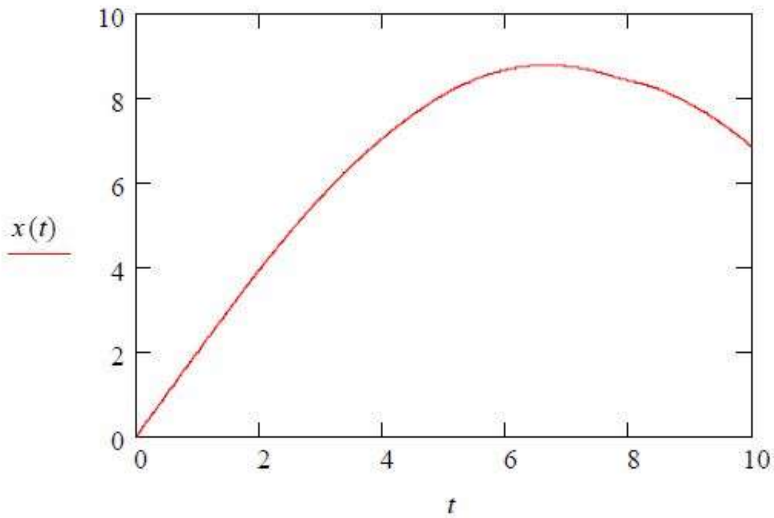
Приклад розв'язку ЗДР другого порядку з використанням функції *odesolve* з графічним представленням результату:

Given

$$53x''(t) + 0x'(t) + 3x(t) = e^{-t} + \tan(t)$$

$x(0) = 0 \quad x(1) = 2$

$x := Odesolve(t, 150)$



Рівняння вирішується з використанням так званого "*блоку розв'язку*", що складається з послідовності виразів, які містять у собі слово *Given*, набір початкових умов і виклик зовнішньої функції для розв'язку рівняння.

Символ «`», що позначає похідну, ставлять з використанням клавіш *Ctrl+F7.*

Іншою функцією, що дозволяє вирішувати ЗДР, є функція *rkfixed.* Для розв'язку за допомогою цієї функції ЗДР, якщо воно містить похідні другого порядку й вище, повинне бути презентовано у вигляді системи ЗДР першого порядку.

Системи з ЗДР для їхнього розв'язку в середовищі *Mathcad* за допомогою функції *rkfixed* повинні бути представлені у формі Коші:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{0,1}; \\ y_2(x_0) = y_{0,2}; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y_n(x_0) = y_{0,n}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n); \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n); \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

Функція *rkfixed (y,* x1, x2, *npoints, D)* повертає матрицю, перший стовпець якої містить точки, у яких обчислювався розв'язок; другий стовпець містить відповідні розв'язки і їх перші $n - 1$ похідні.

Аргументи функції *rkfixed:*

y повинен бути вектором з *n* початковими значеннями, де *n* – порядок диференціального рівняння або число рівнянь у системі (якщо вирішується система рівнянь); x1, x2 – початкова й кінцева (граничні) точки інтервалу, на якому шукається розв'язок (початкові значення у векторі *y* дані для точки x1);

npoints – число точок, не рахуючи початкової точки, у яких розв'язок повинний апроксимуватися; від значення *npoints* залежить кількість рядків матриці, що вертається функцією;

D – *n*-елементна векторна функція, що містить перші похідні невідомих функцій.

Приклад розв'язку диференціального рівняння з використанням функції *rkfixed:*

Спочатку треба перепозначити диференціальне рівняння
як систему двох рівнянь першого порядку

Нехай $x''(t) - x'(t) + x(t) = \sinh(t)$,

тоді хай $x0(t) = x(t) \quad x1(t) = x0'(t)$,

тепер можна записати систему:

$$x0'(t) = x1(t)$$

$$x1'(t) = x1(t) - x0(t) + \sinh(t)$$

$$\begin{pmatrix} x0(0) \\ x1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

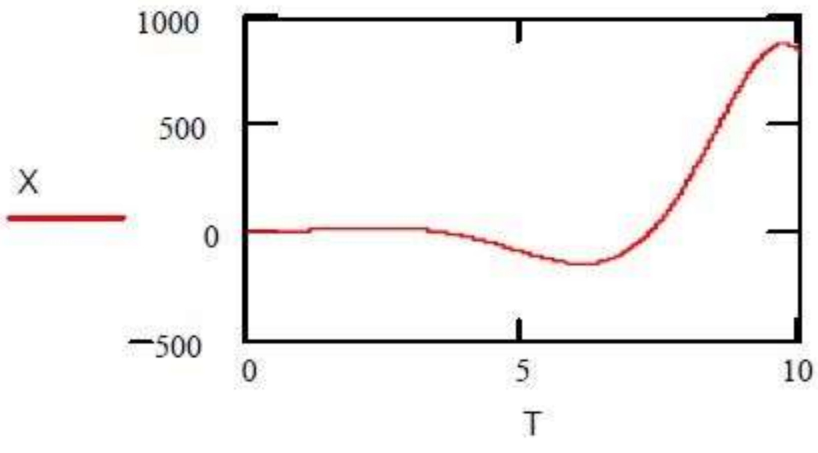
$$ic := \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$D(t, X) := \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 - X_0 + \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$S := \mathrm{rkfixed}(ic, 0, 10, 1500, D)$$

$T := S^{\langle 0 \rangle}$ значення незалежної змінної

$X := S^{\langle 1 \rangle}$ значення шуканої функції



Існує ще одна функція для розв'язку систем ЗДР, а саме для розв'язку повільно мінливих систем ЗДР. Ця функція – *Rkadapt(y,* xl, x2, *npoints,* D). Використовується вона аналогічно *rkfixed,* але, на відміну від *rkfixed,* яка інтегрує рівними кроками, *Rkadapt* аналізує швидкість зміни розв'язку й відповідно адаптує розмір кроку.

Задавшись фіксованим числом точок, можна апроксимувати функцію більш точно, якщо обчислювати її значення в точках, розташованих у такий спосіб: досить часто на тих інтервалах, де функція міняється швидко; і не дуже часто там, де функція змінюється повільніше.

Функція *Rkadapt* має ті ж самі аргументи, що й функція *rkfixed.* Матриця з наближеним розв'язком, що вертається функцією *Rkadapt,* ідентична по виду матриці*, що вертається* функцією *rkfixed.*

Приклад 2.1. Розв’язати чисельним методом диференціальне рівняння $m\ddot{x} = -kx$ з прикладу 1.1.

Розв’язок

Вводимо чисельні значення вихідних даних. Використовуємо для розв’язку функцію *odesolve. Задаємо значення початкових умов* (t=0, $x(0)=x_0$,) та кінцевої точки інтервалу інтегрування (*в=3).*

Чисельний розв'язок звичайного диференціального рівняння

Маса кульки, кг $m := 0.1$

Коефіцієнт жорсткості пружини, Н/м $k := 1$

Початкова деформація пружини, м $x0 := 0.01$

Given

$m \cdot x''(t) + 0 \cdot x(t) + k \cdot x(t) = 0$

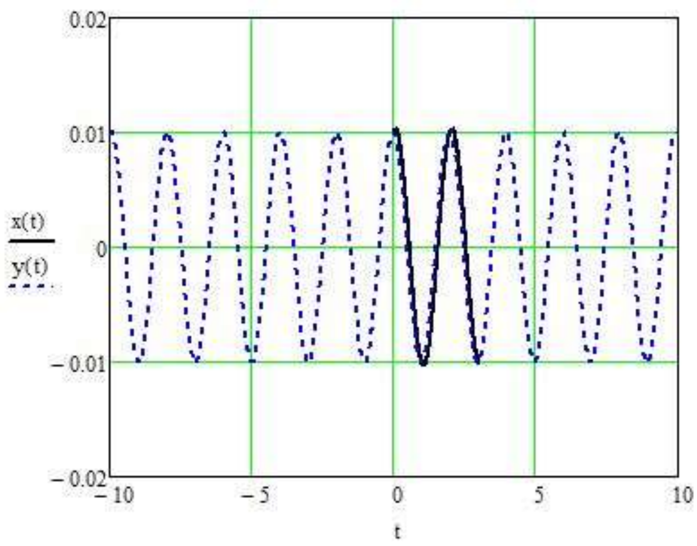
Початкові умови:

$x(0) = x0$ $\quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$x := \mathrm{Odesolve}(t, 3)$

Побудова графіка за результатами аналітичного розв'язку рівняння (формула (1.3))

$y(t) := x0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \, t\right)$



На отриманих графіках чітко видно, що результати, отримані чисельним методом (суцільна лінія) та аналітично (пунктирна лінія), співпадають на інтервалі чисельного інтегрування (0; 3).

Виконання роботи

1. Розв'язати диференціальне рівняння за умовами свого варіанту чисельним методом з використанням функцій системи Mathcad та інтерпретувати його графічно. Вихідні дані та початкові умови обрати самостійно, враховуючи фізичний зміст задачі.

2. Побудувати графік залежності, отриманої у результаті аналітичного розв'язку на практичному занятті №1, розміщений у одній системі координат з графіком, побудованим у пункті 1.

3. Порівняти отримані графіки та зробити висновок.

4. Змінити вихідні дані та початкові умови. Зробити висновок про їх вплив на форму графіка.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3
Графічний розв'язок задачі лінійного програмування

Мета роботи: набути практичних навиків розв'язку задачі лінійного програмування.

Теоретична частина

Суть лінійного програмування полягає у визначенні екстремуму лінійної цільової функції із множини значень оптимізованих параметрів, які визначаються лінійними обмеженнями у вигляді рівнянь та нерівностей.

$y+2x+3>0$

$y=-2x-3$

У загальному вигляді задача лінійного програмування формулюється так

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\geq b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\geq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}+x_2+\ldots+a_{mn}x_n\geq b_m \end{array}\right\}$$

$z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\rightarrow extr$

Методами лінійного програмування розв'язують задачі раціонального використання ресурсів, складання харчових раціонів, задачі оптимального транспортування вантажів та інші.

Якщо кількість невідомих не перевищує двох, використовують графічний метод розв'язку, якщо більше 3, то симплексний метод розв'язку.

Якщо кількість невідомих дорівнює 3, то можливо розв'язувати задачу графічно (з використанням аксонометричних проекцій), але практично цього ніколи не роблять.

Приклад 3.1 При відгодівлі кожна тварина повинна отримати не менше 9 одиниць поживної речовини S_1, не менше 8 одиниць поживної речовини S_2, не менше 12 одиниць поживної речовини S_3.

Для складання раціону використовують 2 корми.

1 кг корму першого вміщує 3 одиниці речовини S_1, 1 одиницю S_2 , 1 один. – S_3.

1 кг корму другого вміщує 1 од. –S_1; 2 од. – S_2; 6 од. – S_3 .

1 кг корму першого коштує 1 гривню, 1 кг корму другого – 1,50 грн.

Скласти денний раціон потрібної поживності так, щоб його вартість була мінімальною.

Розв'язок

Позначимо x_1 та x_2 – кількість кілограмів першого та другого корму в денному раціоні.

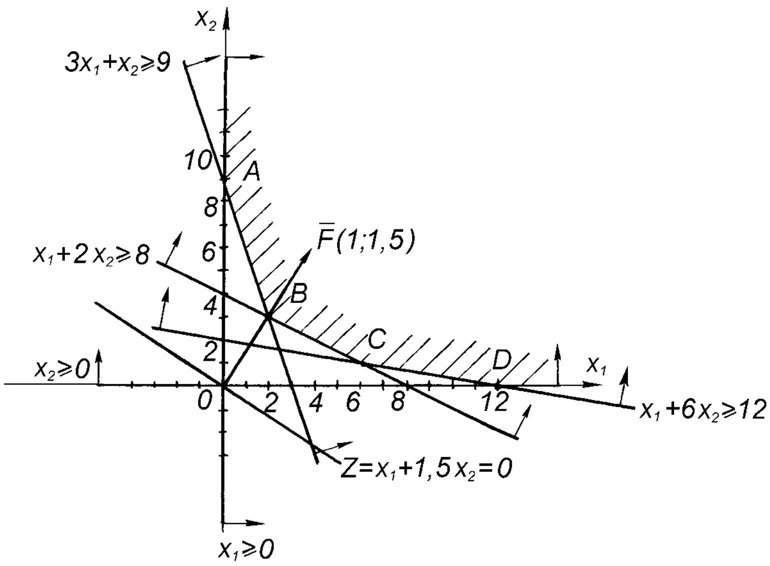
$3x_1+x_2\geq 9$

$x_1+2x_2\geq 8$

$x_1+6x_2\geq 12$

$z=x_1+1,5x_2\rightarrow \min$

Будуємо прямі, які відповідають нерівностям.



Визначаємо область розв'язків кожної із нерівностей, підставляючи в нерівність координати довільної точки, яка не лежить на прямій.

Показуємо їх стрілочками.

Визначаємо спільну для всіх нерівностей область допустимих розв'язків (ОДР).

Будуємо графік цільової функції на початку координат.

$x_1 + 1,5x_2=0$

$x_1=3$ та $x_2=-2$

Будуємо вектор F з координатами, які дорівнюють коефіцієнтам цільової функції.

F(1; 1,5)

Переміщуємо цільову функцію паралельно самій собі до торкання з першою точкою ОДР (т. В).

$Z_{min}=2+1,5\cdot 3=6,5$

Відповідна мінімальна вартість денного раціону (6,5 грн) буде досягнута, якщо використати 2 кг першого корму та 3 кг другого.

Індивідуальні варіанти умов задачі 3

3.1–3.28. Розв'язати задачу лінійного програмування, користуючись графічним методом.

3.1. Є три види сировини – А, В, С, які використовуються для виробництва двох видів продуктів – І і ІІ. У наявності є 500 одиниць сировини А, 750 одиниць сировини В і 200 одиниць сировини С. Продукт І складається з 1 одиниці сировини А і 2 одиниць сировини В. Продукт ІІ складається з 2 одиниць сировини А, 1 одиниці сировини В і 1 одиниці сировини С. Прибуток від виробництва однієї одиниці продукту І складає 4 грн, а від однієї одиниці продукту ІІ – 5 грн. Скільки одиниць кожного продукту слід виробляти, щоб отримати максимальний прибуток?

3.2. При виготовленні виробів А і В використовують два типи технологічного обладнання Р і Q. На виробництво одиниці виробу А обладнання Р використовують 2 год, а Q – 1 год. На виробництво одиниці виробу В обладнання Р використовують 1 год, а Q – 2 год. Адміністрація на виготовлення виробів може виділити обладнання Р на 10 год, а обладнання Q – на 8 год.

Спланувати виробництво виробів А і В так, щоб загальний прибуток був найбільшим, якщо від реалізації одиниці виробу А прибуток дорівнює 50 грн, В – 20 грн.

3.3. Для виготовлення двох видів продукції P1, P2 використовують три види сировини: S1, S2, S3. Запаси сировини, кількість одиниць сировини, які витрачаються на виготовлення одиниці продукції, а також величина прибутку від реалізації одиниці продукції, наведено в таблиці. Необхідно скласти такий план випуску продукції, щоб при реалізації отримати максимальний прибуток.

Вид сировини	Запас сировини	Кількість одиниць сировини, які витрачаються на виготовлення одиниці продукції	
		P1	P2
S1 S2 S3	20 40 30	2 8 5	5 5 6
Прибуток від одиниці продукції, грн		50	40

3.4. Для виготовлення двох видів виробів використовують чотири види матеріалів: S1, S2, S3 та S4. Запаси матеріалів, технологічні норми витрати матеріалів на кожний виріб та ціна одиниці виробу приведені в таблиці.

Скласти план випуску виробів, що забезпечує їх максимальний випуск по вартості.

Вид матеріалу	Запас матеріалу, кг	Норма витрат матеріалу на один виріб, кг	
		P1	P2
S1 S2 S3 S4	150000 170000 100000 200000	4 6 2 8	2 2 4 8
Вартість одного виробу, грн		100	150

3.5. Підприємство випускає два види продукції. Питомі витрати ресурсів на випуск одиниці кожного з видів продукції та обсяги ресурсів наведено в таблиці.

Вид ресурсу	Вид продукції		Обсяг ресурсів
	1	2	
Площа складу, кв. м Фонд робочого часу, год Електроенергія, кВт·год	0,6 0,2 0,3	0,5 0,1 0,2	7000 4000 3000
Прибуток, грн	50	20	

Складіть план випуску продукції, який дозволить отримати максимальний прибуток.

3.6. Для виготовлення виробів двох видів склад може відпустити не більше 80 кг металу, причому на виріб 1-го виду витрачається 2 кг, а на виріб 2-го виду

– 1 кг металу. Потрібно спланувати виробництво так, щоб був забезпечений найбільший прибуток, якщо виробів 1-го виду потрібно виготовити не більше 30 шт., а виробів 2-го виду – не більше 40 шт., причому прибуток від реалізації одного виробу 1-го виду складає 50 грн, а 2-го виду – 30 грн.

3.7. Невелика фірма виробляє два типи підшипників А та В, кожний з яких повинен бути оброблений на трьох верстатах. Час, необхідний для кожної стадії виробничого процесу, наведено в таблиці.

Тип підшипника	Час обробки, годин			Прибуток від продажу одного підшипника, грн
	Токарний верстат	Шліфувальн. верстат	Свердлув. верстат	
A B	0,01 0,02	0,02 0,01	0,04 0,01	80 125
Повний можливий час роботи на тиждень, год.	160	120	150	

Яку кількість підшипників кожного типу має виготовляти фірма, щоб отримати максимальний прибуток?

3.8. Цех випускає електродвигуни та трансформатори. Дані по витратах матеріалу на 1 виріб, запасах матеріалів та прибутку, отриманому від реалізації одного виробу, наведені в таблиці.

Виріб	Сталь, кг	Мідь, кг	Текстоліт, кг	Прибуток, тис. грн
Електродвигун Трансформатор	10 60	30 50	2 3	0,4 0,7
Запаси матеріалів	1800	3000	180	

Визначте план випуску продукції, який забезпечить максимальний прибуток.

3.9. Меблевий цех виготовляє трюмо та тумбочки. Вихідні дані наведено в таблиці.

Види матеріалів	Запаси матеріалів, куб. м	Норми витрат, куб. м/шт.	
		трюмо	тумбочка
ДСП Фанера Дошки	80 50 60	0,030 0,01 0,02	0,036 0,018 0,008
Прибуток від реалізації одиниці продукції, грн		41	37

Яку кількість трюмо та тумбочок треба виготовити, щоб отримати максимальний прибуток?

3.10. Компанія виготовляє столи двох типів (1,2). Дані про обсяг роботи, необхідний для кожної операції та максимум обсягу робіт на тиждень наведено в таблиці.

Операція	Обсяг роботи, люд·год.		Максимум обсягу роботи, люд·год.
	1	2	
Виготовлення частин	2	3	360
Складання	1	2	240
Полірування та перевірка	1	1	180

Ринок збуту розширюється, але можливості зберігання обмежують виробництво 170 столами на тиждень. Прибуток від продажу столів типів 1 та 2 складає відповідно 15 та 22 грн. Скільки столів кожного типу на тиждень слід виготовляти, щоб отримати максимальний прибуток?

3.11. Цех випускає столи і книжкові шафи. Їх можна виробляти в будь-яких співвідношеннях, але ресурси деревини обмежені. Треба запланувати такий щомісячний випуск продукції, щоб сума прибутку була найбільшою. Використати всі ресурси деревини. У таблиці наводяться числові дані.

Види продукції	Норми витрат на одиницю продукції		Прибуток на одиницю продукції, грн
	деревини, куб. м	скла, кв. м	
Стіл	0,3	–	20
Шафа	0,6	2,0	50
Ресурси на місяць	24	60	

3.12. Компанія виробляє пластмасові полички двох розмірів – А та В. Торгові агенти вважають, що на ринку може бути реалізовано до 550 поличок. Для кожної полички типу А потрібно 0,4 кг сировини, а для полички типу В – 0,6 кг. Компанія може отримати до 240 кг сировини на тиждень. Для виготовлення однієї полички типу А потрібно 12 хв. машинного часу, а для виготовлення однієї полички типу В – 30 хв. Верстат, який виготовляє полички, можливо використовувати до 160 годин на тиждень. Якщо прибуток від продажу поличок типу А складає 30 грн, а від поличок типу В – 40 грн, то скільки поличок кожного типу слід випускати щотижня?

3.13. Фірма виробляє дві моделі А та В книжкових полиць. Для кожного виробу моделі А потрібно 0,3 куб.м дощок, а для виробу моделі В – 0,4. Фірма може отримати від своїх поставників до 170 куб.м дощок на тиждень. Для кожного виробу моделі А потрібно 12 хв. машинного часу, а для виробу моделі В – 30 хв. На тиждень можливо використати 160 год. машинного часу.

Скільки виробів кожної моделі слід випускати фірмі на тиждень, якщо кожний виріб моделі А приносить 20 грн прибутку, а кожний виріб моделі В – 40 грн прибутку?

3.14. Швейна майстерня виготовляє жіночі костюми та сукні двох видів. На сукню використовується тканини одного виду 1,5, іншого – 0,5 кв.м; на костюм відповідно 1,6 та 0,8 кв.м. Прибуток майстерні від реалізації одного костюма складає 25 грн, від реалізації однієї сукні – 15 грн. Визначити, скільки суконь та костюмів необхідно зшити в майстерні, щоб досягти найвищої рентабельності виробництва, якщо запас тканини першого виду 141 кв.м, другого – 63 кв.м.

3.15. У тваринницькому господарстві на виробництво 1ц молока витрачається 25 грн, з них на витрати праці припадає 10 грн, на матеріальні – 15 грн. Виробництво 1ц м'яса коштує 180 грн, з яких вартість працевитрат складає 100 грн, матеріальних – 80 грн. Державні закупівельні ціни за 1ц молока – 30 грн, за 1ц м'яса – 200 грн. Визначити оптимальний план виробництва продукції тваринницького господарства, якщо правлінням господарства виділено на тваринництво 19 тис. грн. Фонд заробітної плати повинен складати 10 тис. грн, залишки – на технічне обладнання ферми.

3.16. Скласти добовий кормовий раціон для худоби за даними, наведеними в таблиці, так, щоб його вартість була мінімальною.

Показник	Добова потреба	Вміст поживних речовин в 1кг корма	
		Комбікорм	Цукровий буряк
Поживність, к.од.	3,6	1,00	0,24
Протеїн, г	330	105	12
Вартість, грн/кг		0,84	0,17

3.17. Денний раціон молодняка ВРХ повинен вміщувати кормових одиниць – не менше 1,6 кг, протеїну – не менше 200г, каротину – не менше 10мг. Інші дані наведено в таблиці. Скласти денний раціон, який задовольняє умовам поживності та має мінімальну вартість.

Назва поживної· речовини	Кількість одиниць поживних речовин, яку вміщує 1кг корма	
	ячмінь	боби
Кормові одиниці, кг	1,2	1,4
Протеїн, г	80	280
Каротин, мг	5	5
Ціна 1кг корма, грн	3	4

3.18. Для відгодівлі тварин використовують два види кормів; вартість 1 кг корму 1-го виду – 0,5 грн, а корму 2-го виду – 0,2 грн. У кожному кілограмі корму 1-го виду міститься 5 од. поживної речовини А, 2,5 од. поживної речовини Б та 1 од. поживної речовини В, а в кожному кілограмі корму 2-го виду відповідно – 3; 3 та 1,3 од.

Яку кількість корму кожного виду необхідно витрачати щоденно, щоб витрати на корм були мінімальними, якщо добовий раціон передбачає не менше 225 од. поживної речовини типу А, не менше 150 од. – типу Б та не менше 80 од. типу В?

3.19. Людина повинна вживати за добу деяку кількість умовних одиниць поживних речовин: білків (В1), жирів (В2), вуглеводів (В3), води (В4) та вітамінів (В5). Їх запаси в двох видах їжі (П1 та П2) та мінімальна норма добового споживання наведені в таблиці.

Поживні речовини	Мінімальна норма	Запас поживних речовин, яку вміщує 1кг їжі	
		П1	П2
В1	10	1	5
В2	12	3	2
В3	16	2	4
В4	10	2	2
В5	1	1	0
Вартість одиниці їжі, грн		20	30

Як організувати харчування, щоб його вартість була найменшою, але організм отримував не менше мінімальної добової норми поживних речовин?

3.20. Пенсіонер складає дієту, яка повинна вміщувати не менше 20 од. білків, 30 од. вуглеводів, 10 од. жирів та 40 од. вітамінів. Як найдешевше цього досягнути при вказаних у таблиці вмісті поживних речовин та цінах?

Поживні речовини	Хліб	Молоко
Білки	2	2
Вуглеводи	12	3
Вітаміни	2	2
Жири	1	4
Ціна, грн	6,5	6

3.21. Складіть денний раціон розвантажувального дня з використанням двох видів продуктів:

1 кг виду I вміщує 150 ккал та 14 од. жиру,

1 кг виду II вміщує 200 ккал та 4 од. жиру.

Денне харчування цими продуктами повинно давати не більше 14 одиниць жиру та не менше 200 ккал. Ціна 1 кг продукту I – 15 грн, продукту II – 25 грн.

Яку кількість продуктів треба з'їсти, щоб витратити якнайменше грошей?

3.22. Торгівельне підприємство може замовити на цукровому заводі цукор-пісок та рафінад. Для розміщення кожної тони цукру-піску потрібно 8 кв. м площі складу, для рафінаду – 10 кв. м. На продаж 1 тони цукру-піску продавець витрачає 3 години, рафінаду – 5 годин. Торгівельне підприємство має склади площею 180 кв. м та 75 продавців. Прибуток від реалізації 1 тони цукру-піску складає 300 грн, 1 тони рафінаду – 320 грн.

Скільки тон цукру-піску та рафінаду має закупити торгівельне підприємство, щоб отримати максимальний прибуток?

3.23. Скільки грамів вишень і скільки грамів абрикос треба ввести в денний раціон, щоб в ньому було 75 мг вітаміну С і не більш як 0,25 кг вишень при найменших витратах?

Вміст вітаміну С в 1кг фруктів і вартість 1кг наведені в таблиці

Фрукти	Вітамін С, мг	Вартість, грн
Вишні	150	8
Абрикоси	75	6

3.24. У швейному цеху є 164 м сатину. На пошив одного халата потрібно 4 м, а однієї піжами – 3 м сатину. Скільки слід виготовити халатів і піжам, щоб одержати найбільший прибуток від реалізації продукції, якщо халат коштує 70грн, а піжама – 60 грн? Відомо, що халатів потрібно виготовити не менше як 14 штук.

3.25. Цех випускає столи і книжкові шафи. Їх можна виробляти в будь-яких співвідношеннях, але ресурси деревини обмежені. Треба запланувати такий щомісячний випуск продукції, щоб сума прибутку була найбільшою. Використати всі ресурси деревини. У таблиці наводяться числові дані.

Види продукції	Норми витрати на одиницю продукції		Прибуток на одиницю продукції, грн
	деревини, куб. м	скла, кв. м	
Стіл	0,3	–	20
Шафа	0,6	2,0	50
Ресурси на місяць	24	60	

3.26. Для виготовлення столів і шаф є 60 куб. м деревини. Витрати деревини і прибуток на 1 виріб такий:

Виріб	Деревина, куб. м	Прибуток, грн
Стіл	0,15	10
Шафа	0,2	16

Скільки столів і скільки шаф має виготовити майстерня, щоб забезпечити найбільший прибуток і виготовити не менш як 80 столів, якщо використовується вся деревина?

3.27. Кормовий раціон містить сіно і концентрати. В таблиці наведено числові дані про добове споживання однією твариною поживних речовин і собівартість кормів.

Види кормів	Вміст поживних одиниць в 1 кг кормів	Собівартість 1 кг кормів
Сіно	0,5	15
Концентрати	1,0	25
Добове споживання на 1 тварину	20	

Потрібно знайти найдешевший щоденний раціон, якщо він складається не менш як з 16 кг сіна.

3.28. Фермер виділив під кормові культури 100 га. Вирішили використати цю землю під посіви кукурудзи і цукрового буряку. Як розподілити площу між цими культурами, якщо врожай кукурудзи – 500 ц з гектару, а буряку – 200 ц/га, щоб зібрати не менш як 32000 ц врожаю?

Зміст звіту

1. Розв'язок задачі лінійного програмування за умовами свого варіанту графічним методом.
2. Економічна інтерпретація отриманого результату.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4
Розв'язок задачі лінійного програмування у системі Mathcad

Мета роботи: набути практичних навиків розв'язку задачі лінійного програмування з використанням системи Mathcad.

Теоретична частина

У практичному занятті № 3 було вказано, що при кількості невідомих більше трьох використовують симплексний метод розв'язку. Цей аналітичний метод полягає у поступовому наближенні до оптимального розв'язку шляхом цілеспрямованого перебору проміжних рішень, коли кожне з наступних усе більше наближається до оптимального. Для реалізації симплексного методу були розроблені спеціальні програми на універсальних мовах програмування. Їх використання дозволило автоматизувати розв’язок широкого кола задач планування виробництва, розподілу ресурсів, транспортування вантажів як в масштабах окремих підприємств, регіонів, так і великих галузей виробництва. Така спеціалізована програма для розв'язку задачі лінійного програмування у системи Mathcad відсутня. Тому доведеться скористатись універсальними програмами для пошуку мінімуму функції ***Minimize*** та для пошуку максимуму функції ***Maximize.*** Для практичного використання достатньо однієї з них, оскільки, як відомо з курсу математики, ***min***(f(x))=***max***(–f(x)). Функції використовують у поєднанні з блоком ***given*** та системою обмежень, яка може мати векторну форму або форму системи нерівностей та рівнянь.

Minimize(f, var1, var2, ...)

Повертає значення змінних ***var1, var2***, ..., що задовольняють обмеженням у блоці розв'язку, які й доставляють найменше значення функції ***f***. Повертає скаляр, якщо зазначено одну змінну, інакше повертає вектор розв'язків.

Приклад 4.1 Розглянемо чисельний розв’язок задачі з Прикладу 3.1. Використаємо сформульовану математичну модель

$$3x_1+x_2\geq 9$$

$$x_1+2x_2\geq 8$$

$$x_1+6x_2\geq 12$$

$$z=x_1+1{,}5x_2\rightarrow \min$$

Перш за все, введемо позначення x1= x_0, та x2=x_1 як елементи вектора x (у системі Mathcad за замовчуванням перший індекс дорівнює 0), та запишемо цільову функцію. Введемо коефіцієнти при невідомих у лівих частинах нерівностей у формі матриці **A**, яка складається з 3 рядків (кількість нерівностей) та 2 стовпчиків (кількість невідомих). З вільних членів (у правих частинах нерівностей) сформуємо вектор-стовпець **B.** Обов'язково задаємо початкові значення змінних. Далі блоком ***given*** розпочинається блок розв'язку, до якого входять система обмежень у векторній формі та звернення до функції ***Minimize.*** Отримані значення невідомих x1 та x2 підставляємо у цільову функцію.

Виконання роботи

1. Сформулювати математичну модель задачі лінійного програмування за умовами свого варіанту.
2. Розв'язати задачу лінійного програмування з використанням системи Mathcad.
3. Дати економічну інтерпретацію отриманого результату.

Розв'язок задачі лінійного програмування у системі Mathcad

Позначимо змінну x1 як x_0, а змінну x2 - як x_1

$$z(x) := 1 \cdot x_0 + 1.5 \cdot x_1$$

Введемо коефіцієнти при невідомих у нерівностях одного типу (≥) у вигляді матриці A, а константи з правих частин - у вигляді вектора B

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Задаємо початкові значення змінних управління, наприклад 1

$$x_0 := 1 \qquad x_1 := 1$$

Проводимо обчислення, вказуючи обмеження.

Given

$$A \cdot x \geq B$$

$$x \geq 0$$

Отримуємо розв'язок задачі у вигляді вектора-стовбця

$$x := \mathrm{Minimize}(z, x) \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$z(x) = 6.5$$

Елементи вектора-стовбця x_0=2 x_1=3, тобто мінімальна вартість денного раціону (6,5 грн) буде досягнута, якщо використати 2 кг першого корму та 3 кг другого.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5

Постановка та аналітичний розв'язок задач оптимізації

Мета роботи: набути практичних навиків складання математичних моделей та розв'язку оптимізаційних задач.

Теоретична частина

Оптимізацією називають пошук мінімального або максимального значення функції (її називають *цільовою*) при заданих обмеженнях.

Цільова функція в математичній формі виражає мету задачі.

Обмеження можуть мати форму рівнянь або нерівностей.

Цільову функцію іноді називають критерієм якості. Вона в узагальненій формі відображує головні економічні або технічні характеристики об'єкта (собівартість і т. ін.).

Оптимізація буває *умовна* (коли є обмеження) і *безумовна* (коли обмежень немає).

Оптимізацію можна виконувати *аналітично* або *чисельними методами*.

Аналітичні методи оптимізації:

1. Безпосереднє диференціювання.
2. Математичне програмування.
3. Метод Понтрягіна.
4. Варіаційне числення.

Розглянемо приклад використання аналітичного методу оптимізації безпосереднім диференціюванням.

Приклад 5.1

Потрібно вибрати геометричні розміри циліндричного бака об'ємом V з умови мінімальної витрати матеріалу на його виготовлення.

Розв'язок

Для побудови математичної моделі введемо в розгляд вектор проєктних розв'язків $X = (r, h)$, де $2r$, h – діаметр і висота бака (рис. 5.1).

Якщо припустити, що бак виготовляється зварюванням із трьох деталей, то витрата матеріалу при довільному векторі розв'язків X буде дорівнює площі поверхні бака:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \to \min_{r,h}. \quad (5.1)$$

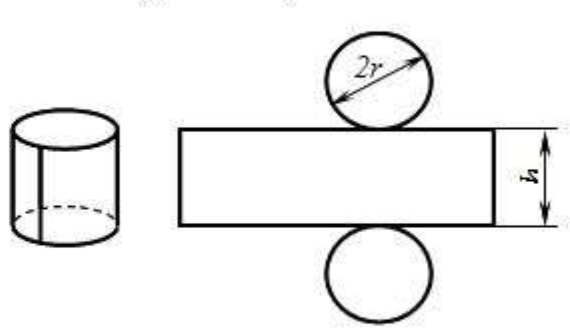


Рис. 5.1

Згідно з умовами задачі вираження (5.1) є цільовою функцією (критерій оптимальності проєктних розв'язків).

Умова того, що бак повинен мати об'єм заданого значення V, представимо у вигляді:

$$\pi r^2 h = V. \quad (5.2)$$

На компоненти вектора розв'язків X необхідно накласти додаткові умови:

$$r > 0,\ \ h > 0. \quad (5.3)$$

Вирази (5.1)–(5.3) описують нелінійну однокритеріальну модель формування оптимальних рішень.

З рівняння (5.2) виразимо

$$h = V/\pi r^2 \quad (5.4)$$

та підставимо до (5.1)

$$S=2\pi r^2+2\pi rV/\pi r^2=2\pi r^2+2V/r. \quad (5.5)$$

Таким чином, ми звели рівняння критерію оптимальності до функції однієї змінної r. Візьмемо похідну (5.5) щодо змінної r

$$dS/dr=4\pi r\text{-}2V/r^2$$

та прирівняємо її до нуля

$$2\pi r\text{-}V/r^2=0,$$

звідки

$$r=\sqrt[3]{(V/(2\pi))},$$

або, підставляючи до (5.4), отримаємо

$$h =\sqrt[3]{(4V/\pi)}.$$

При цих значеннях r і h буде досягнуто мінімальні витрати матеріалу на виготовлення баку.

Виконання роботи

1. Вивести вектор проєктних розв'язків задачі 4 за умовами свого варіанту (табл. А1 у додатку А)
2. Записати критерій оптимальності проєктних розв'язків.
3. Вивести рівняння зв’язку між параметрами вектора проєктних розв'язків.
4. Накласти додаткові умови на параметри вектора проєктних розв'язків.
5. Взяти похідну рівняння критерію оптимальності проєктних розв'язків.
6. Прирівняти отриманий вираз похідної до нуля та розв’язати як алгебраїчне рівняння відносно невідомого параметру.

Індивідуальні варіанти умов задачі 5

5.1–5.26. Розв'язати задачі оптимізації

5.1. Пункти A і B (рис.5.1) розташовані по один бік від магістралі CD. Потрібно з'єднати їх найкоротшою дорогою AMB, яка виходить до магістралі (знайти відстань **x**, вважаючи що відстані **a**, **в**, **c** відомі).

5.2. Обабіч від залізниці у пункті A (рис.5.2) перебуває склад лісу. Цей ліс треба перевезти на станцію B. З цією метою вирішили від пункту A до пункту C (на залізниці) прокласти прямолінійний автомобільний шлях. Як треба вибрати положення **x** пункту C на залізниці, щоб перевезти ліс з A до B за найменший час, якщо швидкість руху по автомобільному шляху $\mathbf{v_1}$, а залізницею $\mathbf{v_2}$ ($\mathbf{v_2} > \mathbf{v_1}$)?

5.3. Центральна садиба господарства A (рис.5.3) розташована на відстані 50 км від райцентру B і на відстані 30 км від магістралі, що проходить через райцентр. Під яким кутом до магістралі **x** слід провести під'їзний шлях з A, щоб вартість доставки вантажу з A в B і з B в A була найнижчою, якщо вартість перевезень по кілометровому відрізку магістралі буде коштувати господарству в 2 рази дешевше, ніж по 1 км під'їзного шляху.

5.4. Центральна садиба господарства A (рис.5.3) розташована на відстані 50 км від райцентру B і на відстані 30 км від магістралі, що з'єднує райцентр з елеватором C, розташованим на відстані 100 км від райцентру. Визначити, яким повинен бути кут примикання **x** під'їзного шляху до магістралі, щоб сумарний річний пробіг автомобілів з A в B і C був якомога менше, якщо відомо, що рух між A і B буде в 2 рази інтенсивнішим, ніж між A і C.

5.5. Проектується канал. Поперечний переріз його повинен мати форму рівнобічної трапеції площею **S** та висотою **h**. Визначити розміри каналу, при яких втрати на тертя води по дну та стінках будуть мінімальними.

5.6. З трьох однакових дощок шириною **a** (рис.5.4) треба зробити жолоб, поперечний переріз якого мав би форму трапеції. Яким повинен бути кут **β**, щоб отримати переріз максимальної площі?

5.7. Під яким кутом **x** (рис.5.5) слід збити три дошки однакової ширини **b**, щоб одержати водонапувальний жолоб найбільшої місткості?

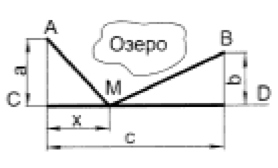


Рис. 5.1

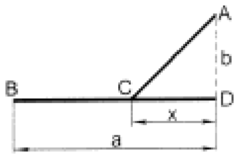


Рис. 5.2

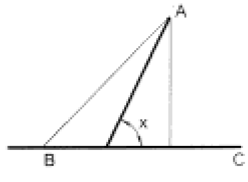


Рис. 5.3

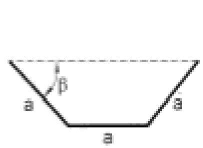


Рис. 5.4

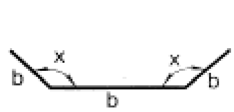


Рис. 5.5

5.8. Щоб зменшити тертя рідини об стінки та дно каналу, треба зробити площу, яку вона змочує, якомога меншою. Потрібно знайти розміри **a** і **в** прямокутного каналу заданої площі перерізу **S**, при яких змочувана площа буде найменшою.

5.9. Площа стін і дна каналу зрошувальної системи з прямокутним перерізом становить **S**. Якими мають бути розміри перерізу **a** і **в**, щоб об'єм води в каналі, довжина якого **L**, був найбільшим?

5.10. Переріз тунелю має форму прямокутника з півколом, яке примикає до нього (рис.5.6). Площа перерізу має дорівнювати **S**. Якими мають бути розміри **R** і **H**, щоб периметр перерізу був найменшим?

5.11. Які розміри **а** і **в** повинна мати прямокутна ділянка землі площею **S**, щоб довжина обмежуючої її огорожі була мінімальною?

5.12. Заготовлено матеріал для влаштування огорожі довжиною **l**. Ним має бути обнесено прямокутний майданчик, який прилягає до стіни будинку. Якими повинні бути розміри цього майданчика **а** і **в**, щоб його площа була якнайбільшою?

5.13. Сторінка книги має площу **S** (рис.5.7). За технічними умовами ширина полів зверху та знизу має бути **а**, зліва і справа – **в**. Якими повинні бути розміри сторінки, щоб площа сторінки, яку займає текст, була найбільшою?

5.14. Прямокутний дорожній покажчик розмірами **w** і **h** (рис.5.8) виготовлено з металічного листа постійної товщини. Площа поля, яка вміщує зображення, має складати **S**. З нижнього боку покажчик має поле **а**, з трьох інших – **в**. Знайти значення **w** і **h**, при яких для виготовлення покажчика потрібна мінімальна кількість листового матеріалу.

5.15. З прямокутного листа жерсті розмірами **а** і **в** (рис.5.9) треба виготовити відкриту зверху коробку. Для цього по кутах листа вирізають однакові квадрати та загинають краї. Квадрати якого розміру **х** потрібно вирізати, щоб отримати коробку максимальної місткості?

5.16. З квадратного листа жерсті зі стороною **а** (рис.5.10) в кутах вирізають однакові квадрати і, загинаючи краї листа, роблять годівницю. При якому розмірі сторони квадрата **х** об'єм годівниці буде найбільшим?

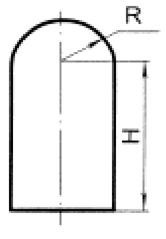


Рис. 5.6

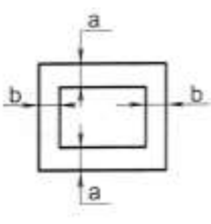


Рис. 5.7

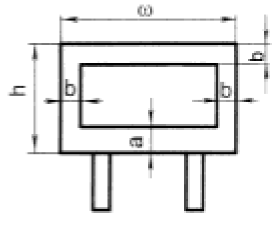


Рис. 5.8

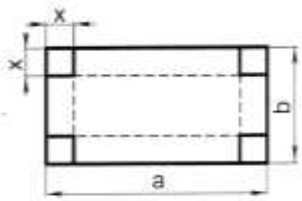


Рис. 5.9

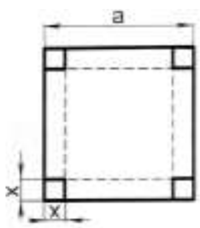


Рис. 5.10

5.17. Із трьох прямокутних шматків жерсті виготовляють закриту циліндричну банку місткістю **V** (рис.5.11). Якими мають бути її розміри **D** і **H**, щоб площа використаних шматків жерсті була мінімальною?

5.18. З кружечка фільтрувального паперу радіуса **R** (рис.5.12) треба вирізати сектор з кутом **х** і згорнути його в конусоподібний фільтр. Сектор якого кутового розміру **х** треба вирізати, щоб із нього отримати фільтр найбільшої місткості?

5.19. Спроектувати контейнер у формі кругового конуса без дна місткістю **V** (рис.5.13). Якими повинні бути його геометричні характеристики **D** і **H**, щоб його бічна поверхня була мінімальною?

5.20. З круглого дерева, діаметр якого дорівнює **d** (рис. 5.14), потрібно вирізати балку прямокутного перерізу так, щоб площа перерізу була найбільшою. Якими повинні бути розміри **a** і **b** цього перерізу?

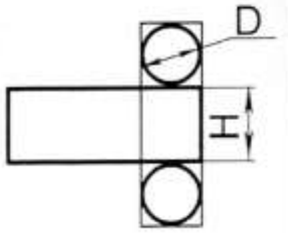


Рис. 5.11

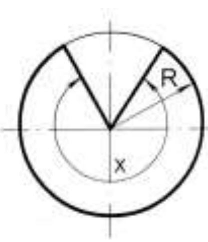


Рис. 5.12

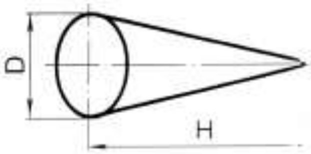


Рис. 5.13

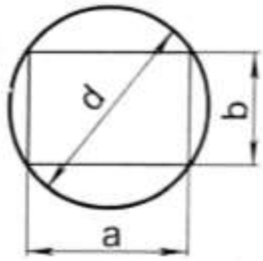


Рис. 5.14

5.21. Круговий майданчик, радіус якого **R**, збираються освітлювати одним світильником, який підвішений над його центром. На якій висоті **h** треба підвісити світильник, щоб освітленість межі майданчика була максимальною?

5.22. Глядач перебуває на відстані **a** (рис.5.15) від площини екрана кінотеатру. Висота екрана **h**. На якій висоті від рівня очей глядача **y** має бути розташований нижній край екрана, щоб видимість була найкращою (кут зору **x** був би найбільший)?

5.23. Є похила площина, довжина основи якої дорівнює **b** (рис.5.16). Кут її нахилу **x** та довжину **l** можна змінювати. По цій площині вільно скочується куля. Яким повинен бути кут нахилу площини **x**, щоб час скочування був найменшим?

5.24. На причіпний плуг діє сила тяги **S** (рис. 5.17), прикладена під кутом **α** до горизонту. Визначити кут **α**, при якому сила тяги **S** буде мінімальною, але достатньою для того, щоб зрушити плуг з місця, долаючи силу тертя (коефіцієнт тертя сталі по ґрунту **f**).

5.25. Камінь масою **m** лежить на дерев'яній горизонтальній підлозі. Під яким кутом до горизонту треба прикласти до нього силу, щоб зсунути його і щоб для цього була потрібна найменша сила?

5.26. Під яким кутом **x** (рис.5.18) до берега потрібно спрямувати човен, щоб під час переправи через річку його якомога менше знесло течією, швидкість якої $\mathbf{v_1}$? Власна швидкість човна $\mathbf{v_2}$.

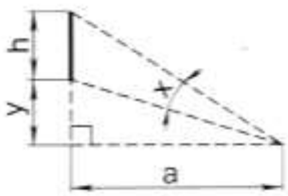


Рис. 5.15

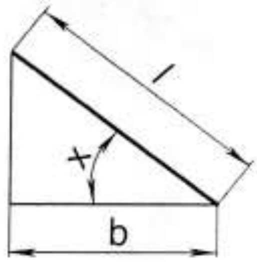


Рис. 5.16

Рис. 5.17

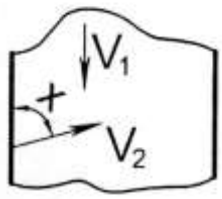


Рис. 5.18

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6

Розв'язок задач оптимізації з використанням системи Mathcad

Мета роботи: набути практичних навичок використання системи Mathcad для розв'язку задач оптимізації.

Теоретична частина

Система Mathcad має крім широких обчислювальних можливостей потужний засіб для аналітичного розв'язку математичних задач – символьний процесор. Операції, які відносяться до роботи символьного процесора, вміщуються в підменю позиції Symbolic головного меню. Вони виконуються у командному режимі.

Найчастіше використовуються такі символьні операції:

1) диференціювання виразу за виділеною змінною;
2) інтегрування виразу за виділеною змінною;
3) розв'язок рівняння відносно виділеної змінної;
4) розкладання функції в ряд Тейлора;
5) розкладання раціонального дробу на елементарні дроби;
6) розкладання виразу на множники;
7) спрощення виразу;
8) перетворення Фур'є, Лапласа (пряме та зворотне) та інші.

Вирази, над якими повинні бути виконані перетворення, повинні бути виділені. Майже всі перетворення можуть бути виконані:

а) безпосередньо в командному режимі (використовуючи позиції *Symbolic* головного меню);

б) за допомогою символьних операцій $\rightarrow$ та операцій, які представлені в палітрі символьних обчислень (позначена докторською чотирьохуголкою).

Виконання роботи

1. Вивести математичну залежність, яка виражає мету задачі (цільову функцію), і записати її в документ Mathcad. Використати умови задачі за своїм варіантом з практичного заняття №5.

Наприклад:

$$S(x)=2\pi r^2+2V/r$$

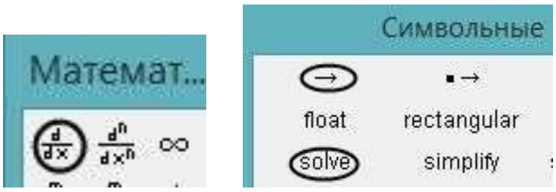
2. Взяти похідну від цієї функції за змінною *x* (рис. 6.1, а)

$$\frac{d}{dx}f(x)$$

4. Розв’язати рівняння похідної відносно *x*, попередньо виділивши його (рис. 6.1, б)

$$Solve, x \rightarrow$$

і отримати вираз у формі вектора-стовбця, елементами якого є коренів рівняння похідної. Обрати серед них ті, які підходять за фізичним змістом задачі.



а б

Рис. 6.1 Підменю «Математика» (а) та «Символьные» (б).

Розв'язок задачі оптимізації за допомогою символьних операцій

Функція, екстремум якої потрібно визначити

$$S(r) := 2\cdot\pi\cdot r^2 + 2\cdot\frac{V}{r}$$

Визначення похідної функції

$$\frac{d}{dr}S(r) \rightarrow 4\cdot\pi\cdot r - \frac{2\cdot V}{r^2}$$

Розв'язок рівняння похідної відносно *r*

$$\rightarrow 4\cdot\pi\cdot r - \frac{2\cdot V}{r^2} \text{ solve } \rightarrow \begin{bmatrix} \left(\frac{V}{2\cdot\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{\left(\frac{V}{2\cdot\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot\left(\frac{V}{2\cdot\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot i}{2} \\ -\frac{\left(\frac{V}{2\cdot\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot\left(\frac{V}{2\cdot\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot i}{2} \end{bmatrix}$$

Комплексні корені нас не влаштовують, тому єдиний дійсний розв'язок рівняння

$$r := \left(\frac{V}{2\cdot\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №7
Статистична обробка результатів експериментальних досліджень

Результати експериментальних досліджень необхідно проаналізувати. Першочергово, експериментальні дані формують у вигляді файлу з розширенням «prn» або «dat» за допомогою текстових редакторів «Блокнот», «Notepad» та ін. Наприклад, запишемо результати вимірювання розмірів насінин у файл “as.prn”, який складається з N елементів. Програма сприймає ці дані як вектор-стовбець **V**, якщо ввести їх оператором READPRN.

Для роботи з векторами та масивами у системі MathCAD зручно використовувати функції, зосереджені в категорії *«Векторы и матрицы»* (*Vectors and Matrix*) з меню *Добавитъ-Функция.* Зокрема:

- функції *max*() та *min()* знаходять максимальний і мінімальний елементи масиву;
- *rows*() та *cols()* повертають число рядків і стовпців;
- *last()* повертає номер останнього елемента вектора;
- *length()* – число елементів у векторі;

Зміст звіту

1. Запустити програму «MM SGM statobr sem k.xmcd». Замінити у програмі ім’я файлу “as.prn” на ім’я відповідне своєму варіанту (табл. 7.1).
2. Виконати розрахунки. Уважно прочитати коментарі до програми. Згадати, що таке середнє арифметичне значення, середнє квадратичне відхилення, гістограма, нормальний закон розподілу, полігон частот, критерій χ-квадрат.
3. Проаналізувати отриманий результат.

Література

1. Васильковський О.М., Лещенко С.М., Васильковська К.В., Петренко Д.І. Підручник дослідника : навч. посібник для студентів агротехнічних спеціальностей. Кіровоград : 2016. 204 с. URL: http://dspace.kntu.kr.ua/jspui/bitstream/123456789/2898/3/Pidruchnik%20doslidnika_2016.pdf
2. Васильєва Л.В., Гончаров О.А., Коновалов В.А., Соловйова Н.А. Чисельні методи розв’язання інженерних задач в пакеті MathCAD. Курс лекцій та індивідуальні завдання : навч. посібник з дисципліни «Інформатика» для студентів вищих навчальних закладів. Краматорськ : ДДМА, 2006. 108 с.

Статистична обробка результатів вимірювання розмірів насінин

Вводимо дані для розрахунку з попередньо сформованого файла **a.prn** у вектор **V**

$V := READPRN("a.prn")$

Визначаємо мінімальний та максимальний елементи вектора **V**

$x_{min} := min(V)$ $\quad x_{min} = 9.6$ $\quad x_{max} := max(V)$ $\quad x_{max} = 15.5$

Визначаємо середнє арифметичне значення елементів вектора **V**

$x_{тср} := mean(V)$ $\quad x_{тср} = 12.078$

Визначаємо середнє квадратичне відхилення елементів вектора **V**

$\sigma_T := stdev(V)$ $\quad \sigma_T = 0.979$

Визначаємо межі інтервалів для побудови гістограми

$R := x_{max} - x_{min}$ $\quad R = 5.9$ $\quad N := length(V)$ $\quad N = 500$

$m := if(floor(\sqrt{N}) < 20, floor(\sqrt{N}), 2(\; m = 20$

$m \equiv 10$

$\Delta x := \frac{R}{m-1}$

$j := 1..m+1$ $\quad x_j := x_{min} - \frac{\Delta x}{2} + (j-1)\Delta x$ $\quad \Delta x = 0.656$

$k := 1..m$

$x_{m_k} := x_k + \frac{\Delta x}{2}$

Частоти, з якими значення даних вектора **V** потрапляють у задані інтервали

$n_h := hist(x, V)$

$h := \frac{n_h}{N}$

$length(V) = 500$ $\quad length(h) = 11$ $\quad kurt(V) = 0.38$ $\quad$ коеф. ексцесу

$\sum_k h_k = 1$ $\quad H_k := \sum_{j}^{k} h_j$ $\quad H_m = 1$ $\quad skew(V) = 0.363$ $\quad$ коеф. асиметрії

Моделювання "ідеального" нормального розподілу з заданими параметрами (використано параметри, отримані при обробці експериментальних даних)

$$p := \mathrm{dnorm}(x, x_{Tcp}, \sigma_T) \cdot \Delta x \qquad n_{h_5} := \sum_{i=1}^{5} n_{h_i} \qquad p_5 := \sum_{i=1}^{5} p_i$$

$$\alpha := 0.05 \quad r := 2 \quad f := m - r - 1$$

$$n_{h_5} = 357 \qquad p_5 = 0.559$$

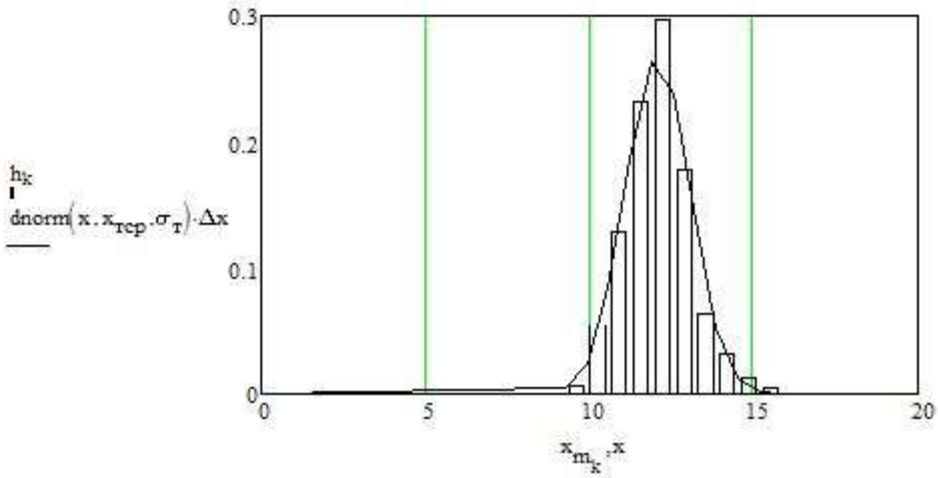
Визначаємо експериментальне значення критерію χ-квадрат

$$\chi 2_n := \sum_{i=5}^{m} \frac{\left(n_{h_i} - N \cdot p_i\right)^2}{N \cdot p_i} \qquad \chi 2_n = 55.26$$

Визначаємо табличне значення критерію χ-квадрат

$$\mathrm{qchisq}(1 - \alpha, f) = 14.067$$

Оскільки експериментальне значення критерію χ-квадрат перевищує табличне, то експериментальні дані розподілені за нормальним законом. Будуємо на одному графіку гістограму на основі експериментальних даних та теоретичний полігон частот



Таблиця 7.1

Індивідуальні варіанти умов задачі

№ варіанту	Ім'я файлу	№ варіанту	Ім'я файлу	№ варіанту	Ім'я файлу	№ варіанту	Ім'я файлу	№ варіанту	Ім'я файлу
1	a.prn	**4**	b.prn	**7**	c.prn	**10**	g.prn	**13**	s.prn
2	a1.prn	**5**	b1.prn	**8**	c1.prn	**11**	g1.prn	**14**	s1.prn
3	a2.prn	**6**	b2.prn	**9**	c2.prn	**12**	g2.prn	**15**	s2.prn

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №8
Рівняння регресії

Побудова математичних моделей об'єктів на основі експериментальних даних зводиться до пошуку невипадкових характеристик зв'язку, що встановлюють функціональні залежності між вхідними і вихідними змінними у сталому режимі роботи агрегату. Ці залежності називаються **рівняннями регресії**.

У найпростішому випадку лінійного зв'язку двох змінних рівняння регресії представляється залежністю

$$y = a_0 + ax.$$

Якщо вихідна змінна є лінійною функцією багатьох змінних $x_1,...x_к$, рівняння регресії можна подати у вигляді

$$y_0 = a_0 + a_1x_1 + ... + a_kx_k = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$$

Якщо залежність між змінними має більш складний характер, то для її опису може використовуватись більш складна модель, наприклад, квадратична

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{C_k^2} a_{ij} x_i x_j ,$$

де $C_к^2$ – число сполучень з $к$ елементів по 2.

В загальному випадку невідомими можуть бути як число членів полінома (структура моделі), так і коефіцієнти при змінних. Визначення цих невідомих і є задачею регресійного аналізу.

Таблиця 8.1

Залежність між числом факторів і числом коефіцієнтів степеневого рівняння регресії

Число факторів	Число коефіцієнтів степеневого рівняння			
	I ст.	II ст.	III ст.	IV ст.
2 3	3 4	6 10	10 20	15 85
4	5	15	35	70
5	6	21	56	126

Уявимо, що структура моделі відома і за вибіркою експериментальних даних необхідно визначити оцінки коефіцієнтів.

Для оцінки коефіцієнтів використовується метод найменших квадратів. Відповідно до цього методу оцінки коефіцієнтів визначаються з умови мінімуму функції помилки

$$J(a_1...a_k) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \min$$

де y_I – значення вихідної змінної за даними спостережень;

$\bar{y}_i$ – відповідне значення вихідної змінної, передвіщене за допомогою регресійної моделі.

Для одержання оцінок $a_1,\ldots a_к$, при яких значення функції J мінімальне, застосовують звичайні методи математичного аналізу. Умовою мінімуму є:

$\partial J/\partial a_i=0 \quad i=1\ldots k$,

де k – число факторів.

В *Mathcad* присутні наступні функції для визначення рівняння регресії.

Лінійна регресія:

slope(vx,vy) – тангенс кута нахилу лінії регресії;

intercept(vx,vy) – точка перетинання лінії регресії з лінією Оу;

line(vx,vy) – повертає вектор, що містить коефіцієнти для лінії регресії ($a+b\cdot x$), що щонайкраще апроксимує дані з векторів *vx, vy;*

medfit(vx,vy) – повертає вектор, що містить коефіцієнти для лінії регресії, отримані методом медіан-медіанної регресії.

Поліноміальна регресія:

regress (vx, vy, к) – повертає вектор, використовуваний функцією *interp* для побудови полінома до *к-го* ступеня, що щонайкраще наближається до значень із *vx* і v*y* (для знаходження полінома необхідно скористатися функцією *interp);*

loess(vx, vy, span) – повертає вектор, використовуваний функцією *interp* для знаходження полінома другого ступеня, що наближається до значень точок з *vx, vy (span* контролює відстань від вихідних точок, на якому може перебувати парабола; чим більший розкид даних, тим більшим повинен бути параметр *span;* гарні результати дає значення *span*=0.75).

Спеціальна регресія:

expfit(vx,vy,vg) – знаходить коефіцієнти для експонентної кривої, щонайкраще відповідної до даних з *vx, vy;* в *vg* утримуються передбачувані значення коефіцієнтів ($a\cdot e^{bx}+c$)*;*

lgsfit(vx,vy,vg) – знаходить коефіцієнти для логістичної кривої

$$\left(\frac{a}{\left(1+b\cdot e^{-c\cdot x}\right)}\right),$$

в *vg* утримуються передбачувані значення коефіцієнтів;

sinfit(vx,vy,vg) – знаходить коефіцієнти для гармонійної кривої виду ($a\ \sin(x+b)+c$);

logfit(vx,vy,vg) – знаходить коефіцієнти для логарифмічної кривої виду $a\cdot\ln(x+b)+c$;

lnfit(vx,vy) – знаходить коефіцієнти для логарифмічної кривої виду $a\cdot\ln(x)+b$;

pwrfit(vx, vy,vg) – знаходить коефіцієнти для кривої виду $a\cdot x^b+c$**.**

Генералізована регресія:

linfit(vx,vy,F) – повертає вектор, що містить коефіцієнти, використовувані для складання лінійної комбінації функцій, що втримуються в *F,* щонайкраще відповідної до значень із *vx, vy.*

Звичайно отримані в результаті досвіду експериментальні значення розташовані не зовсім правильним чином - дають деякий "розкид", тобто виявляють випадкові відхилення від видимої загальної закономірності. Ці відхилення пов'язані з неминучими при всякому досвіді помилками виміру.

Для усунення цих помилок вирішується задача *згладжування* експериментальної залежності.

В *Mathcad* існують три функції згладжування:

medsmooth(vy,n) - повертає вектор, отриманий згладжуванням *vy* з, що зміщаються медіанами з вікном ширини *n;*

ksmooth(vx,vy,b) - повертає вектор, отриманий згладжуванням з використанням ядра Гаусса для обчислення середньозважених елементів з *vy;*

supsmooth(vx,vy) - повертає вектор, отриманий шляхом згладжування адаптивним методом найменших квадратів.

У кожному разі після згладжування виходить крива, набагато більш гладка, ніж кусочно-лінійна функція, що з'єднує точки одну з одною у послідовному порядку. При згладжуванні буває корисне застосування функції *sort(Y),* що сортує дані векторів, що іноді зменшує погрішності чисельного алгоритму згладжування.

Приклад 8.1. Результати експериментальних досліджень оформлені у вигляді таблиці, перший рядок якої включає значення вхідного параметра *x* ,а другий – вихідного *t.* Необхідно побудувати в системі координат *x0t* точки з координатами (x_i, t_i, i=1, 2, ..., 10) (рис. 8.1) та провести згладжування експериментальної залежності, користуючись однією з функцій *Mathcad.* Визначити коефіцієнти рівняння регресії за згладженими даними.

Таблиця 8.1

Значення аргументу, x_i									
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Первісне значення функції, t_i									
0	1	3	4	7	12	14	18	21	25

Підготуємо експериментальні дані у вигляді двох вектор-стовбців: ***X*** (вхідний параметр) та ***T*** (вихідний параметр).

Зобразимо точки з координатами (x_i, t_i, $i=1, 2, ..., 10$) на двомірному графіку (рис. 8.1), виділивши їх червоним кольором.

Візуальна оцінка дозволяє зробити висновок, що більшість точок лежать на прямій лінії або плавній кривій великого радіуса кривизни. Випадають із загальної тенденції точки 4, 5 та 6. Тому перед подальшою математичною обробкою експериментальних даних доцільно провести вирівнювання (згладжування) кривої. Обираємо для згладжування функцію *supsmooth(vx,vy),* яка повертає вектор, отриманий адаптивним методом найменших квадратів. Зображуємо вектор ***Ts*** пунктирною лінією (рис. 8.1). Вона дуже близька до прямої, тому можна з невеликою похибкою вважати, що маємо найпростіший випадок лінійного зв'язку двох змінних, для якого рівняння регресії представляється залежністю

$$t = a + b \cdot x.$$

Для визначення коефіцієнтів *a* і *b* використовуємо функцію *line(vx,vy)*, що щонайкраще апроксимує дані з векторів *vx, vy*. У нашому випадку звертання до функції матиме вигляд

$$koef{:}= line(X, Ts),$$

де *koef* – вектор, який складається з двох елементів $koef_0= a$ та $koef_1= b$.

Будуємо графік лінійної функції відповідно до рівняння регресії

$$Tr= koef_0+ koef_1{\cdot}X$$

та виділяємо його суцільною лінією (рис. 8.1).

Таблиця 8.2

Вихідні дані для побудови експериментально-статистичної моделі

№ Варіанту	**Значення аргументу, *x***									
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	Первісне значення функції, *t*									
1.	0	1	3	4	7	12	14	18	21	25
2.	1	3	4	7	12	14	18	21	25	32
3.	2	4	7	12	14	18	21	25	32	34
4.	3	7	12	14	18	21	25	32	34	38
5.	8	12	14	18	21	25	32	34	38	44
6.	11	14	18	21	25	32	34	38	44	47
7.	12	18	21	25	32	34	38	44	47	55
8.	19	21	25	32	34	38	44	47	55	60
9.	22	25	32	34	38	44	47	55	60	72
10.	26	32	34	38	44	47	55	60	72	80
11.	31	34	38	44	47	55	60	72	80	86
12.	35	38	44	47	55	60	72	80	86	94
13.	37	44	47	55	60	72	80	86	94	104
14.	45	47	55	60	72	80	86	94	104	111
15.	51	55	60	72	80	86	94	104	111	122
16.	55	60	72	80	86	94	104	111	122	130
17.	69	72	80	86	94	104	111	122	130	145
18.	77	80	86	94	104	111	122	130	145	150
19.	81	86	94	104	111	122	130	145	150	168
20.	89	94	104	111	122	130	145	150	168	185
21.	92	104	111	122	130	145	150	168	185	202
22.	108	111	122	130	145	150	168	185	202	225
23.	118	122	130	145	150	168	185	202	225	237
24.	126	130	145	150	168	185	202	225	237	255
25.	137	145	150	168	185	202	225	237	255	280
26.	145	150	168	185	202	225	237	255	280	296

Зміст звіту

1. Знайти і завантажити файл «ExperMMPS.xmcd».
2. Внести зміни до файлу відповідно до свого варіанту в табл. 8.2 (за узгодженням з викладачем можна ввести свої дані).
3. Зробити копію отриманих результатів та вставити у звіт.

Результати виконання Приклад 8.1

Рівняння регресії

Підготуємо експериментальні дані у вигляді двох вектор-стовбців: X (вхідний параметр) та T (вихідний параметр)

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \\ 14 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad T := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 12 \\ 14 \\ 18 \\ 21 \\ 25 \end{pmatrix} \qquad Ts := \mathrm{supsmooth}(X, T)$$

Зобразимо точки з координатами (x_i, t_i, i=1, 2, ..., 10) на двомірному графіку (рис. 8.1)

$koef := \mathrm{line}(X, Ts)$ $\qquad Tr := koef_0 + koef_1 \cdot X$

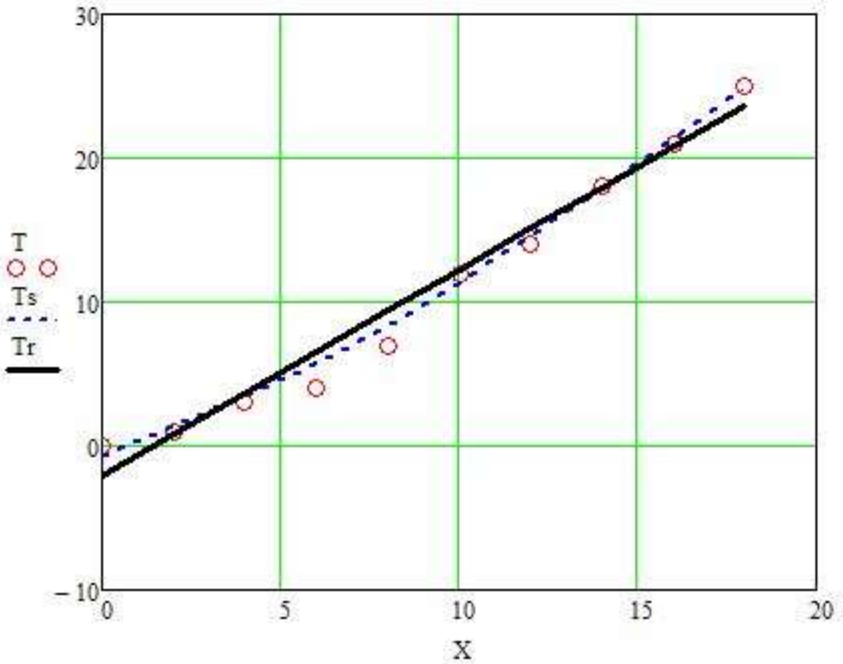


Рисунок 8.1 – Зв'язок між вхідним X та вихідним T параметрами.

Візуальна оцінка дозволяє зробити висновок, що більшість точок лежать на прямій лінії або плавній кривій великого радіуса кривизни. Випадають із загальної тенденції точки 4, 5 та 6. Тому перед подальшою математичною обробкою експериментальних даних доцільно провести вирівнювання (згладжування) кривої. Обираємо для згладжування функцію *supsmooth(vx,vy),* яка повертає вектор, отриманий адаптивним методом найменших квадратів. Зображуємо вектор Ts пунктирною лінією (рис. 8.1).

Вона дуже близька до прямої, тому можна з невеликою похибкою вважати, що маємо найпростіший випадок лінійного зв'язку двох змінних. Для визначення коефіцієнтів лінійного рівняння використовуємо функцію *line(vx,vy).* Будуємо графік апроксимуючої лінійної функції Tr=f(X) та виділяємо його суцільною лінією (рис. 8.1).

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №9
ММ сушіння зерна

В однокамерній сушарці з киплячим шаром відбувається процес безперервного сушіння дисперсного матеріалу (рис. 9.1). У сушарку подається G кг/с вологого матеріалу, що має температуру θ_1°C и вологе повітря, що містить L кг/с абсолютно сухого повітря. Перед калорифером повітря має ентальпію I_0 Дж/кг сухого повітря. Після нагрівання в калорифері, тобто на вході в сушарку ентальпія повітря підвищується до I_1 Дж/кг сухого повітря. У сушарці з матеріалу випаровується W кг/с вологи й із сушарки видаляється G_2 кг/с висушеного матеріалу з температурою t_2°C.

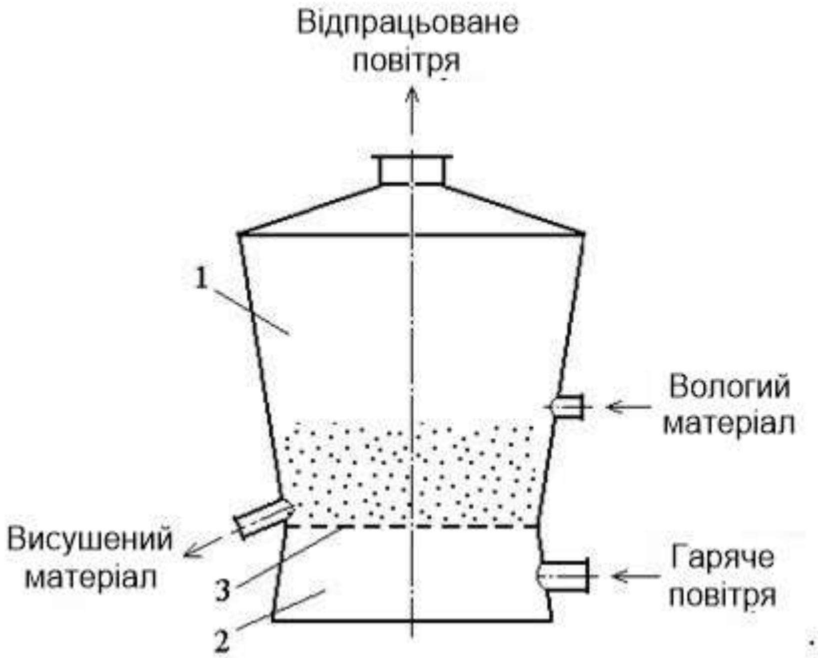


Рис. 9.1 Однокамерна сушарка з киплячим шаром: 1 – сушильна камера; 2 – газова камера; 3 – газорозподільні ґрати.

Коментарів у тексті програми достатньо для розуміння основних моментів ММ сушіння зерна у однокамерній сушарці з киплячим шаром.

Зміст звіту

1. Внести зміни у вихідні дані задачі за умовами свого варіанту (табл.9.1).
2. Визначити функції кожного оператора програми.
3. Проаналізувати отриманий результат.

ММ сушіння зерна

Вихідні дані :

Продуктивність сушарки по сухому матеріалу, кг/с	$G_2 := 0.1$
Діаметр апарату, м	$Da := 1$
Висота киплячого шару,м	$H := 0.3$
Вологовміст матеріалу, що надходить на сушіння, кг/кг	$uвх := 0.35$
Температура повітря, що надходить в сушарку, °C	$tc := 200$
Температура матеріалу, що надходить на сушіння, °C	$\theta_1 := 10$
Середній діаметр часток матеріалу, м	$d_3 := 1 \cdot 10^{-3}$
Робоча швидкість повітря, м/с	$w := 1.8$
Щільність матеріалу, кг/ $м^3$	$\rho м := 1500$
Щільність сушильного агента, кг/ $м^3$	$\rho г := 1$
Динамічний коефіцієнт в'язкості сушильного агента, $Па \cdot с$	$\mu г := 2 \cdot 10^{-5}$
Коефіцієнт швидкості сушіння, 1/с	$N := 0.001$
Коефіцієнт масопровідності матеріалу, $м^2$/м	$k := 1 \cdot 10^{-9}$
Коефіцієнт масовіддачі, м/с	$\beta := 0.14$
Рівноважний вологовміст, кг/кг	$uр := 0.002$
Критичний вологовміст, кг/кг	$uкр := 0.15$

Розрахунок :

Радіус частинки

$$r_0 := \frac{d_3}{2} \qquad r_0 = 5 \times 10^{-4}$$

Критерій Рейнольдса

$$Re := \frac{w \cdot d_3 \cdot \rho г}{\mu г} \qquad Re = 90$$

Критерій Архімеда

$$Ar := \frac{(d_3)^3 \cdot \rho г \cdot 9.81 \cdot \rho м}{\mu г^2} \qquad Ar = 3.679 \times 10^4$$

Порозність шару

$$s := \left(\frac{18 \cdot Re + 0.36 \cdot Re^2}{Ar}\right)^{0.21} \qquad s = 0.644$$

Площа газорозподільної решітки, $м^2$

$$Sp := \frac{\pi \cdot Da^2}{4} \qquad Sp = 0.785$$

Середній час перебування, с

$$\tau_0 := \frac{Sp \cdot H \cdot (1 - s) \cdot \rho м}{G_2} \qquad \tau_0 = 1.257 \times 10^3$$

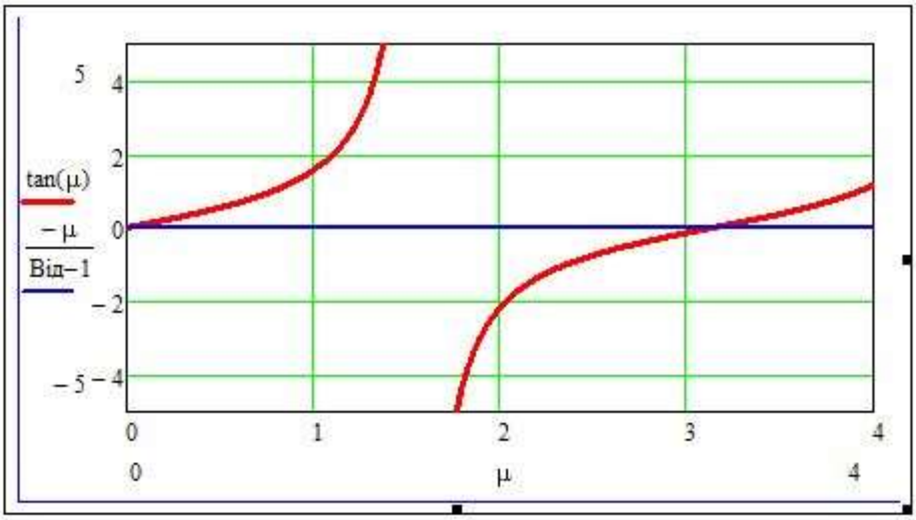
Тривалість періоду постійної швидкості сушіння, с

$$\tau кр := \frac{uвх - uкр}{N} \qquad \tau кр = 200$$

Дифузійний критерій Біо

$$Biд := \frac{\beta \cdot r_0}{k} \qquad Biд = 7 \times 10^4$$

Знайдемо перший не нульовий корінь характеристичного рівняння



$$F(\mu) := \tan(\mu) + \left(\frac{\mu}{Biд - 1}\right)$$

$$\mu := root(F(\mu), \mu, 2, 3.142)$$

Корінь характеристичного рівняння

$$\mu = 3.141$$

Коефіцієнти

$$A_1 := \frac{6 \cdot (\sin(\mu) - \mu \cdot \cos(\mu))^2}{\mu^2 \cdot (\mu - \sin(\mu) \cdot \cos(\mu))}$$

$$I1 := uвх \cdot \left(1 - e^{\frac{-τкр}{\tau_0}}\right) + N \cdot \left(τкр \cdot e^{\frac{-τкр}{\tau_0}} + \tau_0 \cdot e^{\frac{-τкр}{\tau_0}} - \tau_0\right)$$

$$I2 := uр + \frac{(uкр - uр) \cdot A_1 \cdot e^{-\left[\frac{\mu^2 \cdot k}{(r_0)^2} + \frac{1}{\tau_0}\right] \cdot τкр}}{\tau_0 \cdot \left[\frac{\mu^{2 \cdot k}}{(r_0)^2} + \frac{1}{\tau_0}\right]}$$

Вологовміст матеріалу на виході з апарата, кг/кг

$uвих := I1 + I2$ $\qquad uвих = 0.039$

Література

1. Кірчук Р.В., Дударєв І.М. Математичне моделювання машин : навч. посібник. Луцьк : Ред.-вид. відділ Луцького НТУ, 2014. 134 с.

Таблиця 9.1

Вихідні дані для визначення вологовмісту матеріалу на виході з сушарки

№ варіанту	***d**з*, **м**	***D**а*, **м**	**Θ1, град**	**uвх, м/с**	**№ варіанту**	***d**з*, **м**	***D**а*, **м**	**Θ1, град**	**uвх, м/с**
1	0,006	1	10	0,35	**11**	0,006	1	8	0,35
2	0,006	1	15	0,35	**12**	0,006	1	12	0,35
3	0,006	0,8	10	0,4	**13**	0,006	0,8	8	0,4
4	0,006	0,8	15	0,4	**14**	0,006	0,8	12	0,4
5	0,002	1	10	0,35	**15**	0,002	1	8	0,35
6	0,002	1	15	0,35	**16**	0,002	1	12	0,35
7	0,002	0,8	10	0,4	**17**	0,002	0,8	8	0,4
8	0,002	0,8	15	0,4	**18**	0,002	0,8	12	0,4
9	0,001	1	10	0,35	**19**	0,001	1	8	0,35
10	0,001	1	15	0,35	**20**	0,001	1	12	0,35

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 10
Моделювання системи роздачі кормів мобільними кормороздавачами [1]

Завантажувачі кормів та мобільні кормороздавачі працюють у взаємозв’язку. На тривалість кожної технологічної операції та всього процесу завантаження і роздачі кормів діють випадкові фактори. Для визначення економічно доцільної кількості кормороздавачів, які обслуговують один завантажувач корму, використовують теорію масового обслуговування. Завантажувач і кормороздавачі (рис. 10.1) утворюють одноканальну систему масового обслуговування (СМО) з очікуванням.

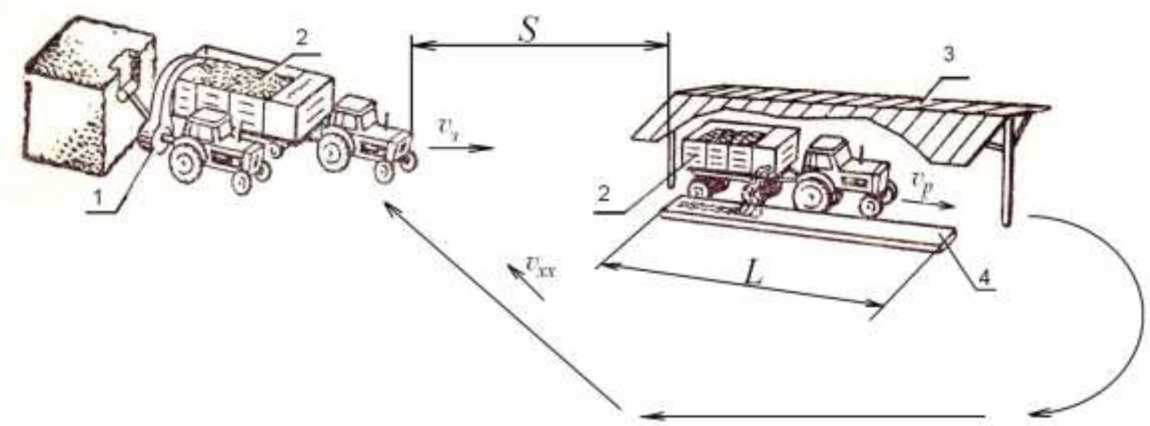


Рис. 10.1. Розрахункова схема системи роздачі кормів мобільними кормороздавачами: 1 – завантажувач кормів; 2 – кормороздавач; 3 – виробниче приміщення; 4 – годівниця.

На завантаження прибуває в середньому λ кормороздавачів за годину

$$\lambda = m/t_ц, \qquad (10.1)$$

де m– кількість кормороздавачів (її треба визначити у результаті дослідження);

$t_ц$ – середня тривалість циклу роботи кормороздавача, год

$$t_ц = t_{зав} + t_{р.з.} + t_р + t_{хх}, \qquad (10.2)$$

де $t_{зав}$, $t_{р.з.}$, $t_р$, $t_{хх}$ – середній час відповідно завантаження, руху з кормом, роздачі корму і холостого ходу кормороздавача, год

$$t_{р.з.} = \frac{S}{\vartheta_з}, \qquad (10.3)$$

де S– відстань від місця завантаження корму до місця роздачі, км (табл.10.1);

$\vartheta_з$– швидкість руху агрегату з завантаженим кормороздавачем, $\vartheta_з$=10 км/год.

$$t_р = \frac{L}{\vartheta_р}, \qquad (10.4)$$

де L – довжина годівниць, у які треба завантажити корм, км (табл. 10.1);
ϑ_p – швидкість руху агрегату при роздачі корму, км/год (табл. 10.1).

$$t_{xx} = \frac{S}{\vartheta_{xx}}, \tag{10.5}$$

де ϑ_{xx} – швидкість руху агрегату з порожнім кормороздавачем, ϑ_{xx}=15 км/год.

Завантажувач може завантажити μ кормороздавачів за годину

$$\mu = \frac{1}{t_{зав}}. \tag{10.6}$$

Продуктивність системи масового обслуговування характеризуються показником

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = m \cdot \frac{t_{зав}}{t_ц}. \tag{10.7}$$

Середня кількість кормороздавачів, які простоюють,

$$N_{пр} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha}. \tag{10.8}$$

Втрати коштів через простій кормороздавачів

$$B_к = C_к \frac{\alpha^2}{1-\alpha}, \tag{10.9}$$

де $C_к$ – втрати від однієї години простою кормороздавача, $C_к$=20 грн.

Втрати коштів через простій завантажувача

$$B_з = C_з(1-\alpha), \tag{10.10}$$

де $C_з$ – втрати від однієї години простою завантажувача кормів, $C_з$=15 грн.

Сумарні втрати коштів через простій кормороздавачів та завантажувача

$$B(\alpha) = C_к \frac{\alpha^2}{1-\alpha} + C_з(1-\alpha). \tag{10.11}$$

Оптимальну кількість кормороздавачів, яка забезпечить мінімальні втрати коштів, можливо визначити, взявши похідну від функції (10.11) по α, прирівнявши її до нуля і визначивши значення $\alpha_{опт} < 1$ (умова функціонування СМО з очікуванням). Ці перетворення можна виконати вручну або з використанням програми в системі Mathcad, яка наведена далі.

Оптимальна кількість кормороздавачів

$$m_{опт} = \alpha_{опт} \frac{t_ц}{t_{зав}}. \tag{10.12}$$

Таблиця 10.1

Індивідуальні варіанти умов задачі для дослідження системи завантаження та роздачі кормів мобільними кормороздавачами

№ варіанту	$t_{зав}$, **год**	S, **км**	L, **км**	ϑ_p, **км/год**	**№ варіанту**	$t_{зав}$, **год**	S, **км**	L, **км**	ϑ_p, **км/год**
1	0,3	1	0,1	1,0	**17**	0,5	1	0,1	1,4
2	0,3	1	0,1	1,2	**18**	0,5	1	0,1	1,6
3	0,3	1	0,12	1,0	**19**	0,5	1	0,12	1,4
4	0,3	1	0,12	1,2	**20**	0,5	1	0,12	1,6
5	0,3	0,8	0,1	1,0	**21**	0,5	0,8	0,1	1,4
6	0,3	0,8	0,1	1,2	**22**	0,5	0,8	0,1	1,6
7	0,3	0,8	0,12	1,0	**23**	0,5	0,8	0,12	1,4
8	0,3	0,8	0,12	1,2	**24**	0,5	0,8	0,12	1,6
9	0,4	1	0,1	1,0	**25**	0,2	0,6	0,08	1,7
10	0,4	1	0,1	1,2	**26**	0,2	0,6	0,08	1,9
11	0,4	1	0,12	1,0	**27**	0,2	0,6	0,1	1,7
12	0,4	1	0,12	1,2	**28**	0,2	0,6	0,1	1,9
13	0,4	0,8	0,1	1,0	**29**	0,2	0,8	0,08	1,7
14	0,4	0,8	0,1	1,2	**30**	0,2	0,8	0,08	1,9
15	0,4	0,8	0,12	1,0	**31**	0,2	0,8	0,1	1,7
16	0,4	0,8	0,12	1,2	**32**	0,2	0,8	0,1	1,9

Зміст звіту

1. Розрахунок часу циклу $t_ц$ згідно заданого варіанту.
2. Результати диференціювання функції (10.11) та розв'язку рівняння $\frac{dB(\alpha)}{d\alpha}=0$ відносно α або роздрукування результатів обчислень за програмою.
3. Визначення оптимальної кількості кормороздавачів.
4. Визначення мінімальних втрат коштів через простій кормороздавачів та завантажувача.

Література

1. Кірчук Р.В., Дударєв І.М. Математичне моделювання машин : навч. посібник. Луцьк : Ред.-вид. відділ Луцького НТУ, 2014. 134 с.

Дослідження системи роздачі кормів мобільними кормороздавачами студента гр.МС98 Заінчковського

$S := 0.5$ - відстань від сховища кормів до тваринницького приміщення, км

$t_{зав} := 0.8$ - середня тривалість завантаження кормороздавача, год

$L := 0.12$ - довжина годівниць, км

$C_{зав} := 20$ - втрати від простою завантажувача, грн/год

$C_k := 16$ - втрати від простою кормороздавача, грн/год

$V_m := 10$ - середня швидкість руху завантаженого кормороздавача, км/год

$V_p := 1.6$ - середня швидкість руху при роздачі кормів у годівниці, км/год

$V_{xx} := 15$ - середня швидкість руху розвантаженого кормороздавача, км/год

Тривалість циклу роботи кормороздавача

$$tц := \frac{S}{V_m} + \frac{L}{V_p} + \frac{S}{V_{xx}} + t_{зав} \qquad tц = 0.958$$

Втрати коштів через простій завантажувача та кормороздавачів

$$C(\alpha) := \left[C_{зав} \cdot (1-\alpha) + C_k \cdot \frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right]$$

Визначаємо оптимальне значення α

$$\frac{d}{d\alpha}C(\alpha) \rightarrow -20 + 32 \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} + 16 \cdot \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} \text{ solve}, \alpha \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Вибираємо значення $\alpha < 1$, яке відповідає умові роботи СМО з чеканням

$$\alpha := \frac{1}{3}$$

Визначаємо оптимальну кількість кормороздавачів

$$m := \alpha \cdot \frac{tц}{t_{зав}} \qquad m = 0.399$$

Висновок: для забезпечення мінімальних втрат коштів при завантаженні, транспортуванні і роздачі кормів на тваринницькій фермі достатньо використати один кормороздавач.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №11
Створення ймовірнісної ММ сівби насіння висівним апаратом точного висіву

Метою створення математичної моделі процесу однозернового дозування є дослідження впливу радіуса насінин, радіуса присмоктувального отвору, форми та геометричних параметрів його поверхні на якість розподілу насінин по довжині рядка та визначення раціональних параметрів присмоктувального отвору.

Модель імітує процес відокремлення насінин, розміри яких розподілені за нормальним усіченим законом [1], від поверхні присмоктувального отвору з циліндричною поверхнею (індекс i=1) (рис. 11.1, а), конічною поверхнею (i=2) (рис. 11.1, б) та тороїдальною поверхнею (i=3) (рис. 11.1, в).

У програмі моделювання, створеній у системі MathCAD для формування вектора радіусів насінин $r_{сем}$ використано функцію ***rnorm***, яка генерує N випадкових нормально розподілених чисел.

Основні математичні залежності, необхідні для створення математичної моделі, виведено у [1].

Для кожного значення $r_{сем}$ алгоритмом передбачено розрахунок таких величин:

а) початкові кути при русі насінин по кожній з трьох форм поверхні $(\tau_0, \eta_0, \eta_{ок})$;

б) кути, які показують положення насінин в момент відокремлення від поверхні ($\tau_{отд}, \eta_{отд}, \eta_{отд.к}$);

г) проекції швидкості насінин в момент відокремлення на осі координат ($\vartheta_{ox}, \vartheta_{oy}, \vartheta_{oz}$);

д) координати центра мас насінини у системі координат $\boldsymbol{Oxyz}$, пов'язаній з центром висівного диска ($x_{отд}, y_{отд}, z_{отд.}$);

е) час падіння насінини на дно борозни;

ж) інтервал між сусідніми насінинами на дні борозни x_p.

У результаті статистичної обробки отриманого вектора $\boldsymbol{x_p}$ визначаються середнє вибіркове значення інтервалу між насінинами ($x_{гср}$, $x_{кср}$, $x_{тср}$) та середньоквадратичне відхилення інтервалів для присмоктувального отвору з гострою кромкою $\sigma_г$, конічної $\sigma_к$ та тороїдальної $\sigma_т$ поверхонь. Останній показник обрано критерієм рівномірності розподілу насінин по довжині рядка.

Багаторазове повторення математичного експерименту дозволить отримати залежності $\sigma_г=f_1(r_{сем\ ср})$, $\sigma_к=f_2(r_{сем\ ср})$, $\sigma_т=f_3(r_{сем\ ср})$, $\sigma_г=f_4(r_{отв})$, $\sigma_к=f_5(r_{отв})$, $\sigma_т=f_6(r_{отв})$, $\sigma_к=f_7(\gamma)$, $\sigma_т=f_3(r_ф)$ та інші, які необхідні для визначення раціональних параметрів присмоктувального отвору.

Зміст звіту

1. Внести зміни у вихідні дані задачі за умовами свого варіанту (табл.11.1).
2. Визначити функції кожного оператора програми.
3. Проаналізувати отриманий результат.

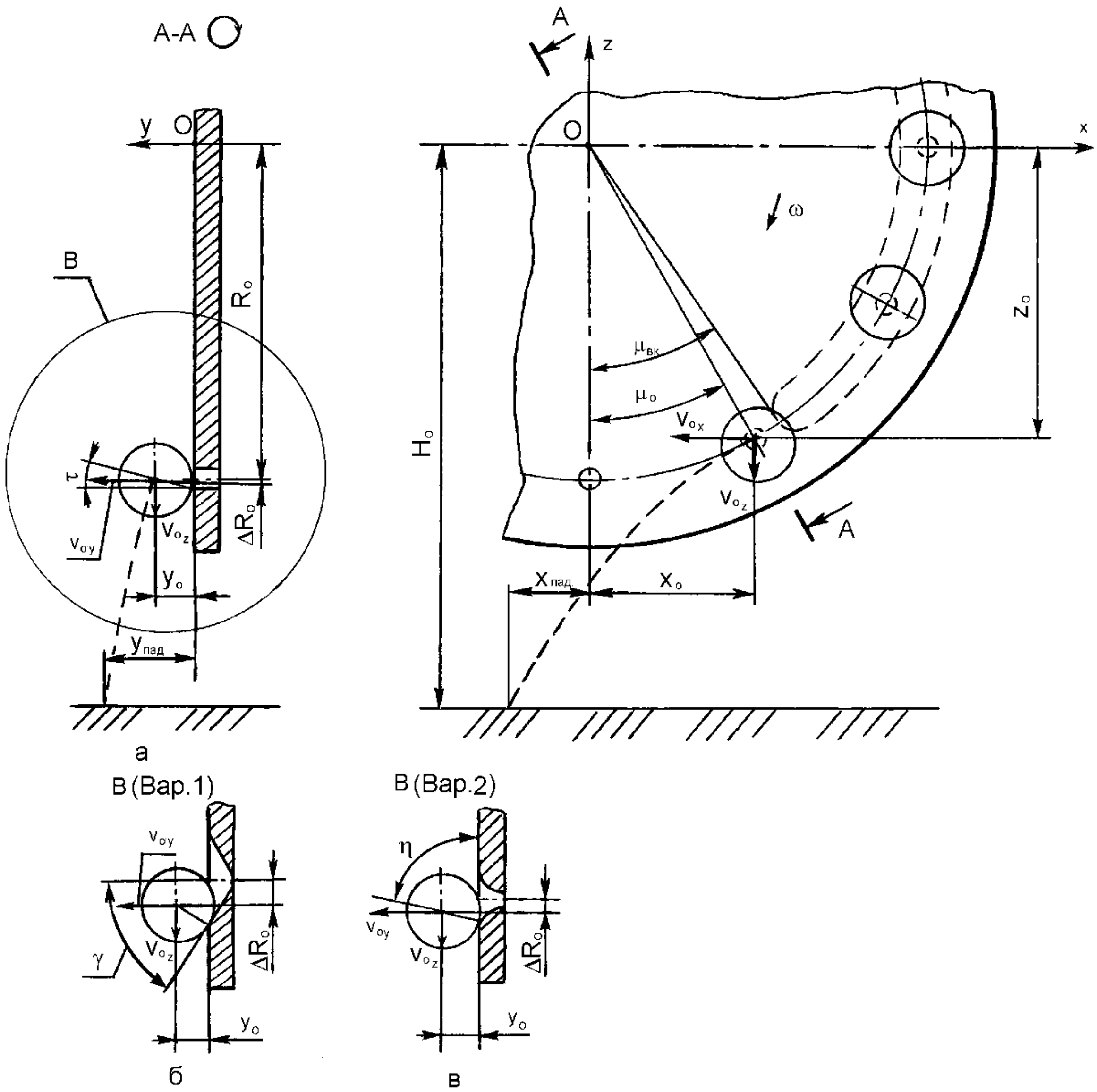


Рис. 11.1. Схема процесу відокремлення насінини від присмоктувального отвору та падіння на дно борозни: а – від циліндричної поверхні; б – від конічної поверхні; в – від тороїдальної поверхні.

Література

1. Амосов В.В. Аналіз процесу відокремлення насінин від присмоктувальних отворів вакуумного пневмомеханічного висівного апарата // Техніка в с.-г. виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація: Зб. наук. пр. Кіровоград. нац. техн. ун-ту. – Кіровоград: КНТУ, 2004.–Вип. 15.– С. 438–444.

Таблиця 11.1

Індивідуальні варіанти умов задачі для визначення раціональних параметрів присмоктувального отвору

№ варіанту	$r_{сем\ ср}$ **м**	$r_{отв}$, **м**	γ, **рад**	$r_ф$, **м**	**№ варіанту**	$r_{сем\ ср}$ **м**	$r_{отв}$, **м**	γ, **рад**	$r_ф$, **м**
1	0,003	0,001	1	0,001	**17**	0,003	0,001	1	0,001
2	0,003	0,001	1	0,0012	**18**	0,003	0,001	1	0,0012
3	0,003	0,001	0,8	0,001	**19**	0,003	0,001	0,8	0,001
4	0,003	0,001	0,8	0,0012	**20**	0,003	0,001	0,8	0,0012
5	0,003	0,0005	1	0,001	**21**	0,003	0,0005	1	0,001
6	0,003	0,0005	1	0,0012	**22**	0,003	0,0005	1	0,0012
7	0,003	0,0005	0,8	0,001	**23**	0,003	0,0005	0,8	0,001
8	0,003	0,0005	0,8	0,0012	**24**	0,003	0,0005	0,8	0,0012
9	0,002	0,001	1	0,001	**25**	0,002	0,001	1	0,001
10	0,002	0,001	1	0,0012	**26**	0,002	0,001	1	0,0012
11	0,002	0,001	0,8	0,001	**27**	0,002	0,001	0,8	0,001
12	0,002	0,001	0,8	0,0012	**28**	0,002	0,001	0,8	0,0012
13	0,002	0,0005	1	0,001	**29**	0,002	0,0005	1	0,001
14	0,002	0,0005	1	0,0012	**30**	0,002	0,0005	1	0,0012
15	0,002	0,0005	0,8	0,001	**31**	0,002	0,0005	0,8	0,001
16	0,002	0,0005	0,8	0,0012	**32**	0,002	0,0005	0,8	0,0012

Програма математичного моделювання процесу однозернового дозування

Вихідні дані:

Кутова швидкість обертання диска, 1/с	$\omega := 10$
Радіус кола присмоктувальних отворів, м	$R_o := 0.06$
Радіус присмоктувального отвору, м	$r_{отв} := 0.001$
Кут закінчення вакуумної камери	$\mu_{вк} := \frac{\pi}{6}$
Висота осі диска над дном борозни, м	$H_o := 0.2$
Прискорення сили тяжіння, м/с^2	$g := 9.81$
Максимальний діаметр конічного отвору, м	$d_{max} \equiv 0.0049$
Кут між віссю та твірною конічного отвору	$\gamma := \frac{\pi}{3}$
Коефіцієнт, який враховує момент інерції кулі	$\varepsilon := \frac{5}{7}$
Радіус фаски, м	$r_ф \equiv 0.001$
Коефіцієнт тертя насінини по поверхні отвору	$k_{тр} \equiv 0.4$
Кількість отворів висівного диска	$z := 30$
Швидкість руху сівалки, м/с	$v_m := 2$
Кількість інтервалів моделювання	$N \equiv 1000$

Розрахунок

Відокремлення насінини від гострої кромки отвору

$r_{сем} \equiv \mathrm{rnorm}(N, 0.003, 0.00045)$ $\qquad$ $\mathrm{ORIGIN} := 1$

$k := 1 .. N$

$$\nu_k := \frac{r_{отв}}{r_{сем_k}}$$

$$\tau_{o_k} := \mathrm{asin}(\nu_k) \qquad \tau_{отд_k} := \mathrm{asin}\left(2\cdot\frac{\nu_k}{3}\right)$$

$$t_{o_{1,k}} := \int_{\tau_{o_k}}^{\tau_{отд_k}} \frac{1}{-\sqrt{\left[98.1\cdot\frac{(\nu_k - \sin(\tau))}{7\cdot r_{сем_k}}\right]}}\,d\tau$$

$$v_{c_{1,k}} := \sqrt{10 \cdot g \cdot \frac{r_{отв}}{21}} \qquad \Delta R_{\upsilon_{1,k}} := r_{сем_k} \cdot \left(\cos\left(\tau_{\upsilon_k}\right) - \cos\left(\tau_{отд_k}\right) \right) \qquad o_{1,k} := \tau_{отд_k}$$

$$v_{c_{2,k}} := \mathrm{if}\left[d_{max} \ge 2 \cdot r_{сем_k} \cdot \cos(\gamma), \sqrt{g \cdot \varepsilon \cdot \left(d_{max} - 2 \cdot r_{сем_k} \cdot \cos(\gamma) \right)}, \sqrt{5 \cdot g \cdot \frac{d_{max}}{21}} \right]$$

$$\nu_{k_k} := \frac{d_{max}}{2 \cdot r_{сем_k}}$$

$$\tau_{\upsilon k_k} := \mathrm{asin}\left(\nu_{k_k}\right) \qquad \tau_{отдк_k} := \mathrm{asin}\left(2 \cdot \frac{\nu_{k_k}}{3}\right)$$

$$t_{\upsilon_{2,k}} := \mathrm{if}\left[d_{max} \ge 2 \cdot r_{сем_k} \cdot \cos(\gamma), \frac{\sqrt{\frac{\left(d_{max} - 2 \cdot r_{сем_k} \cdot \cos(\gamma) \right)}{g \cdot \varepsilon}}}{\sin(\gamma)}, \int_{\tau_{ok_k}}^{\tau_{отдк_k}} \frac{1}{-\sqrt{\left(98.1 \cdot \frac{\left| \nu_{k_k} - \sin(\tau) \right|}{7 \cdot r_{сем_k}} \right)}} \, d\tau \right]$$

$$o_{2,k} := \mathrm{if}\left(d_{max} \ge 2 \cdot r_{сем_k} \cdot \cos(\gamma), \gamma, \tau_{отдк_k} \right)$$

$$\Delta R_{\upsilon_{2,k}} := \mathrm{if}\left[d_{max} \ge 2 \cdot r_{сем_k} \cdot \cos(\gamma), 0.5 \cdot d_{max} - r_{сем_k} \cdot \sin(\gamma), r_{сем_k} \cdot \left(\cos\left(\tau_{\upsilon k_k}\right) - \cos\left(\tau_{отдк_k}\right) \right) \right]$$

$$y_{\upsilon_{2,k}} := \mathrm{if}\left(d_{max} \ge 2 \cdot r_{сем_k} \cdot \cos(\gamma), r_{сем_k} \cdot \cos(\gamma), r_{сем_k} \cdot \cos\left(\tau_{отдк_k}\right) \right)$$

$$y_{\upsilon_{1,k}} := r_{сем_k} \cdot \cos\left(\tau_{отд_k}\right) \qquad \eta_{\upsilon_k} := \mathrm{acos}\left[\frac{\left(r_{отв} + r_{ф} \right)}{r_{сем_k} + r_{ф}} \right]$$

$$\eta_{кач_k} := \mathrm{acos}\left[2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{k_{тр}}{\sqrt{(1 + 2 \cdot \varepsilon)^2 \cdot k_{тр}^2 + (1 - \varepsilon)^2}} \right] - \mathrm{atan}\left[\frac{(1 - \varepsilon)}{k_{тр} \cdot (1 + 2 \cdot \varepsilon)} \right]$$

$$\eta_{отд_k} := \mathrm{acos}\left(2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\cos\left(\eta_{o_k}\right)}{1 + 2 \cdot \varepsilon} \right)$$

$$t_{ок_k} := \mathrm{if}\left[\eta_{o_k} < \eta_{кач_k}, \sqrt{\frac{\left(r_{сем_k} + r_{ф} \right)}{2 \cdot \varepsilon \cdot g}} \cdot \int_{\eta_{o_k}}^{\eta_{отд_k}} \frac{1}{\sqrt{\cos\left(\eta_{o_k}\right) - \cos(\eta)}} \, d\eta, 0 \right]$$

$$F(r, \eta) := 2 \cdot \frac{g \cdot \left[3 \cdot k_{тр} \cdot \sin(\eta) + \left(1 - 2 \cdot k_{тр}^2 \right) \cdot \cos(\eta) \right]}{\left(r + r_{ф} \right) \cdot \left(1 + 4 \cdot k_{тр}^2 \right)}$$

$$t_{oc_k} := \mathrm{if}\left[\eta_{o_k} > \eta_{кач_k}, \int_{\eta_{o_k}}^{\eta_{отд_k}} \frac{1}{\sqrt{F\left(r_{сем_k}, \eta_{o_k}\right)\cdot \exp\left[2\cdot k_{тр}\cdot\left(\eta - \eta_{o_k}\right)\right] - F\left(r_{сем_k}, \eta\right)}}\,d\eta, 0\right]$$

$$t_{o_{3,k}} := t_{ок_k} + t_{oc_k} \qquad \alpha_{3,k} := \frac{\pi}{2} - \eta_{отд_k}$$

$$v_{cc_{3,k}} := \sqrt{F\left(r_{сем_k}, \eta_{o_k}\right)\cdot \exp\left[2\cdot k_{тр}\cdot\left(\eta_{отд_k} - \eta_{o_k}\right)\right] - F\left(r_{сем_k}, \eta_{отд_k}\right)}$$

$$v_{c_{3,k}} := \mathrm{if}\left[\eta_{o_k} < \eta_{кач_k}, \sqrt{\varepsilon\cdot g\cdot\left(\cos\left(\eta_{o_k}\right) - \cos\left(\eta_{отд_k}\right)\right)\cdot\left(r_{сем_k} + r_{ф}\right)}, v_{cc_{3,k}}\right]$$

$$\Delta R_{o_{3,k}} := \left(r_{сем_k} + r_{ф}\right)\cdot\left(\cos\left(\eta_{o_k}\right) - \cos\left(\eta_{отд_k}\right)\right) \qquad y_{o_{3,k}} := \left(r_{сем_k} + r_{ф}\right)\cdot\sin\left(\eta_{отд_k}\right) - r_{ф}$$

$$i := 1..3$$

$$\mu_{o_{i,k}} := \mu_{вк} - \omega\cdot t_{o_{i,k}} \qquad v_{д_{i,k}} := \omega\cdot\left(R_o + \Delta R_{o_{i,k}}\right) \qquad x_{o_{i,k}} := \left(R_o + \Delta R_{o_{i,k}}\right)\cdot\sin\left(\mu_{o_{i,k}}\right)$$

$$z_{o_{i,k}} := \left(R_o + \Delta R_{o_{i,k}}\right)\cdot\cos\left(\mu_{o_{i,k}}\right) \qquad v_{ox_{i,k}} := v_{c_{i,k}}\cdot\cos\left(\alpha_{i,k}\right)\cdot\sin\left(\mu_{o_{i,k}}\right) - v_{д_{i,k}}\cdot\cos\left(\mu_{o_{i,k}}\right)$$

$$v_{oy_{i,k}} := v_{c_{i,k}}\cdot\sin\left(\alpha_{i,k}\right) \qquad v_{oz_{i,k}} := -\left(v_{c_{i,k}}\cdot\cos\left(\alpha_{i,k}\right)\right)\cdot\cos\left(\mu_{o_{i,k}}\right) - v_{д_{i,k}}\cdot\sin\left(\mu_{o_{i,k}}\right)$$

$$t_{пад_{i,k}} := \frac{\left[\sqrt{\left(v_{oz_{i,k}}\right)^2 + 2\cdot g\cdot\left(H_o - z_{o_{i,k}}\right)} - v_{oz_{i,k}}\right]}{g} \qquad x_{пад_{i,k}} := x_{o_{i,k}} - v_{ox_{i,k}}\cdot t_{пад_{i,k}}$$

$$x_{нас_i} := 2\cdot\pi\cdot\frac{v_m}{\omega\cdot z}$$

$$x_{p_{i,k}} := \mathrm{if}\left(k < 2, x_{нас_i}, x_{нас_i} + x_{пад_{i,k-1}} - x_{пад_{i,k}}\right)$$

$$V_{г_k} := x_{p_{1,k}} \qquad V_{к_k} := x_{p_{2,k}} \qquad V_{т_k} := x_{p_{3,k}}$$

$$x_{тср} := \mathrm{mean}\left(V_т\right) \qquad \sigma_т := \mathrm{stdev}\left(V_т\right)$$

$$x_{тср} = 0.042 \qquad \sigma_т = 8.143\times10^{-4}$$

$$x_{гср} := \mathrm{mean}\left(V_г\right) \qquad \sigma_г := \mathrm{stdev}\left(V_г\right)$$

$$x_{гср} = 0.041888 \qquad \sigma_г = 1.305\times10^{-4}$$

$$x_{кср} := \mathrm{mean}\left(V_к\right) \qquad \sigma_к := \mathrm{stdev}\left(V_к\right)$$

$$x_{кср} = 0.041888 \qquad \sigma_к = 1.64\times10^{-4}$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 12
Графічне представлення результатів експерименту

Графічне представлення результатів експерименту значно полегшує їх аналіз. Сучасні програмні комплекси, призначені для обробки результатів експериментальних досліджень, дозволяють обрати найрізноманітніші форми їх графічного відображення. Серед них провідне місце займають двовимірні (2Д) та тривимірні (3Д) графіки та діаграми. З метою підвищення їх наочності розроблено рекомендації для їх виконання.

Виконання діаграм (графіків)

При виконанні діаграм використовують прямокутну і полярну систему координат, які наведені на рисунках 13.1 та 13.2 відповідно.

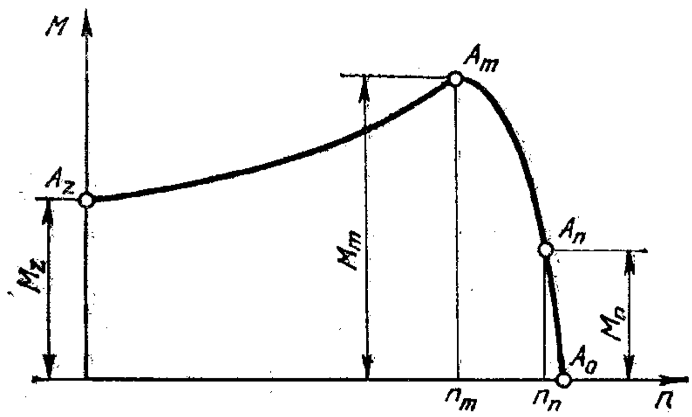


Рисунок 12.1 – Прямокутна система координат

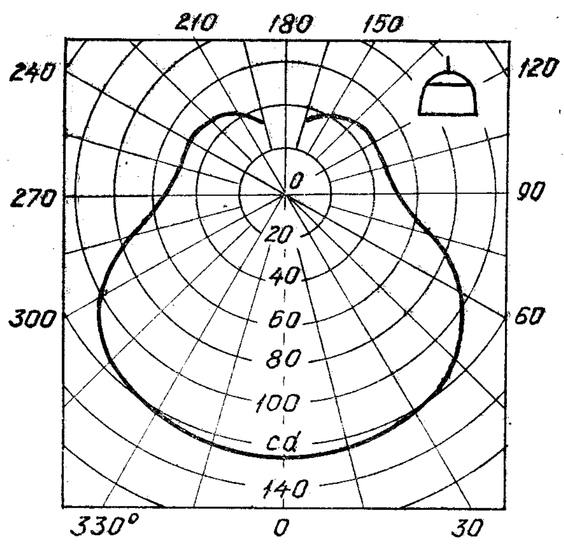


Рисунок 12.2 – Полярна система координат

В прямокутній системі координат незалежну змінну, як правило, необхідно відкладати на горизонтальній осі (осі абсцис).

Позитивні значення величин відкладають на осях, як правило, вправо і вгору від точки початку відліку (рис.12.3). При виконанні діаграм в системі трьох координат (просторовій) функціональні залежності слід зображати у вигляді аксонометричної проекції за ДСТУ ГОСТ 2.317:2014 (рис. 12.4).

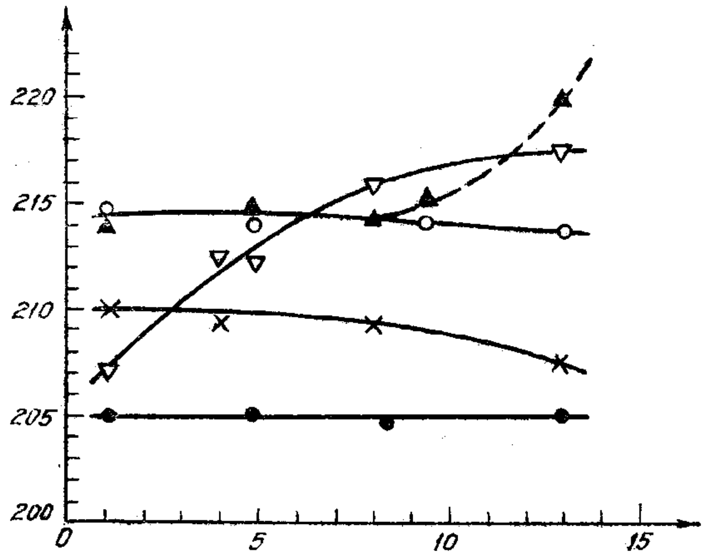


Рисунок 12.3 – Відкладання позитивних величин на осях системи координат

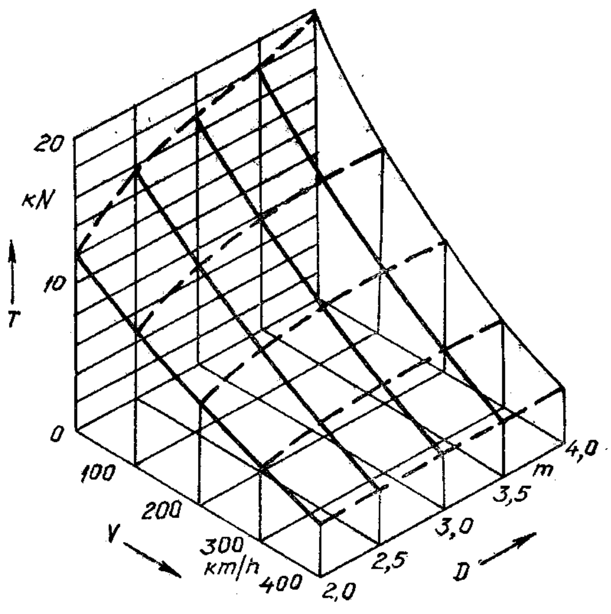


Рисунок 12.4 – Система трьох координат

У полярній системі координат початок відліку кутів (кут 0^o) повинен знаходитися на горизонтальній або вертикальній осі. Позитивний напрямок кутових координат повинен відповідати напрямку обертання проти годинникової стрілки.

Значення величин, пов'язаних функціональною залежністю, яка зображується, відкладають на осях координат, які використовуються у вигляді шкал (рис. 12.5). В діаграмах, які зображують декілька функцій різних

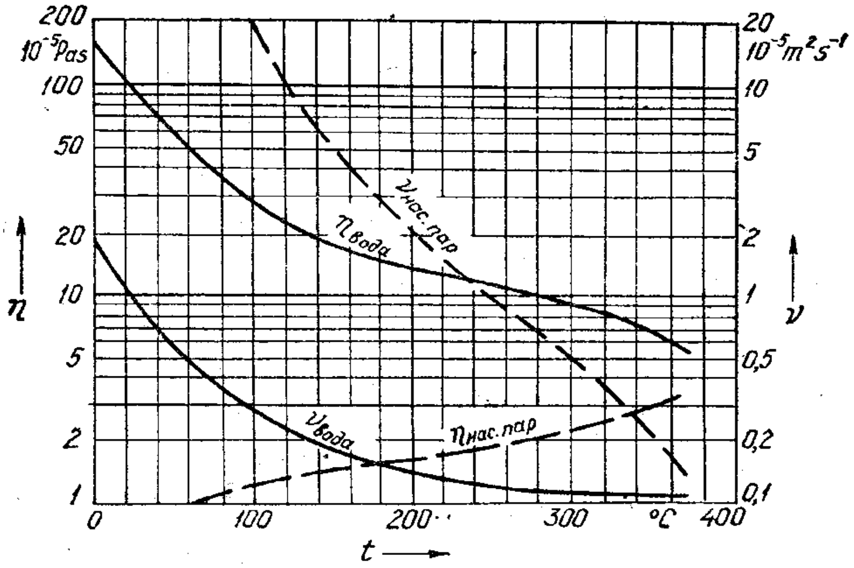


Рисунок 12.5 – Використання осей координат у вигляді шкал

змінних, а також в діаграмах, в яких одна і та ж змінна повинна бути виражена одночасно в різних одиницях, допускається використовувати в якості шкал координатні осі, лінії координат на сітці, що обмежують поля діаграми, а також прямі, які розташовані паралельно координатним осям (рис. 12.6)

Координатні осі, які використовуються в якості шкал значень величин, що зображуються, повинні бути розділені на графічні інтервали одним із наступних способів: координатною сіткою (рис. 12.5); ділильними штрихами (рис. 12.3); сполученням координатної сітки і ділильних штрихів (рис. 12.6).

Ділильні штрихи, що відповідають кратним графічним інтервалам, допускається подовжувати.

Допускається осі координат завершувати стрілками, які вказують напрямок зростання значень величин. Їх наносять за межами шкал (рис. 12.3). Допускаються самостійні стрілки, які наносяться після позначення величини – паралельно осі координат (рис. 12.5).

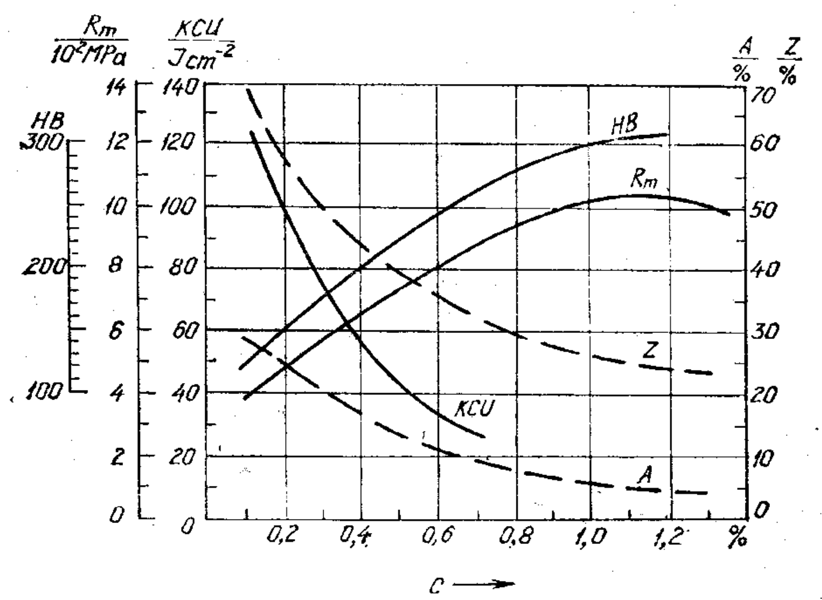


Рисунок 12.6 – Використання осей і сітки у вигляді шкал

Рядом з поділками сітки або ділильними штрихами, які відповідають початку і закінченню шкали, повинні бути вказані відповідні числа (значення величин). Якщо початком відліку шкал є нуль, його вказують один раз в точці перетину шкал.

Числа у шкал слід розташовувати горизонтально поза полем діаграми. В окремих випадках дозволяється наносити числа у шкал в межах поля діаграми.

Діаграми виконують лініями за ГОСТ 2.303.

Осі координат і шкал, що обмежують поле, виконують товстою суцільною лінією (s). Лінії координатної сітки і ділильні штрихи виконують суцільною тонкою лінією (від s/3 до s/2). Зображення функціональної залежності виконують основною лінією товщиною 2s.

Якщо в одній діаграмі зображуються дві і більше функціональні залежності, то допускається виконувати їх лініями різних типів.

Характерні точки ліній функціональної залежності (тобто позначені числами, буквами, символами) допускається позначати кружками (рис. 12.1).

Точки діаграми, які отримані вимірюванням або розрахунками позначають графічно (кружком, хрестиком тощо). Позначення таких точок повинно бути пояснено під діаграмою або на вільному місці поля діаграми.

Викладені вище рекомендації не є обов’язковими до виконання на території України та призначені для вибору найбільш наочного способу зображення результатів моделювання.

Правила виконання графіків і діаграм у прикладних програмах для математичного моделювання можуть відрізнятись від рекомендованих. Отримані зображення необхідно копіювати «як є» і вставляти у власні документи.

Приклад 12.1. Побудувати 3D-зображення (в системі трьох координат) залежності (математичної моделі), отриманої експериментально-статистичним методом.

Рівняння регресії на основі отриманих експериментальних даних має вигляд

$$Y = 1{,}0221 + 0{,}1043x_1 + 0{,}3349x_3$$

Вхідні параметри змінюємо в межах: $8 \leq x_1 \leq 16$, $10 \leq x_3 \leq 22$.

Використовуємо для побудови просторового каркасного графіка з кольоровою заливкою крок зміни параметра x_1 $\Delta x_1 = 0{,}5$, параметра x_3 $\Delta x_3 = 1{,}0$.

Зміну параметрів організовуємо, використовуючи конструкцію *m…n* з підменю «Матрица».

Просторовий графік починаємо будувати, обравши пункт «График поверхности» в підменю «График». Клацаємо правою кнопкою миші, зупинивши курсор у створеній області графіка, обираємо у меню «Свойства». Відмічаємо у підпунктах:

«Общие»: «Периметр», «Показать поле», «График поверхности»;

«Оси»: «Ось X»: «Провести линии», «Автосетка», «Цвет линии», «Толщина линии»=1, «Подпись»=x1, «Показать числа», «Цвет осей», «Толщина осей»=1,5, «Автомасштабирование»;

«Ось Y»: «Провести линии», «Цвет линии», «Число»=4, «Толщина линии»=1, «Подпись»=x3, «Показать числа», «Цвет осей», «Толщина осей»=1,5, «Автомасштабирование»;

«Ось Z»: «Провести линии», «Автосетка», «Цвет линии», «Толщина линии»=1, «Подпись»=Y, «Показать числа», «Цвет осей», «Толщина осей»=1,5, «Автомасштабирование»;

«Оформление»: «График 1»: «Поверхность с заливкой», «Карта цветов», «Каркас», «Толщина»=1, «Сплошной цвет».

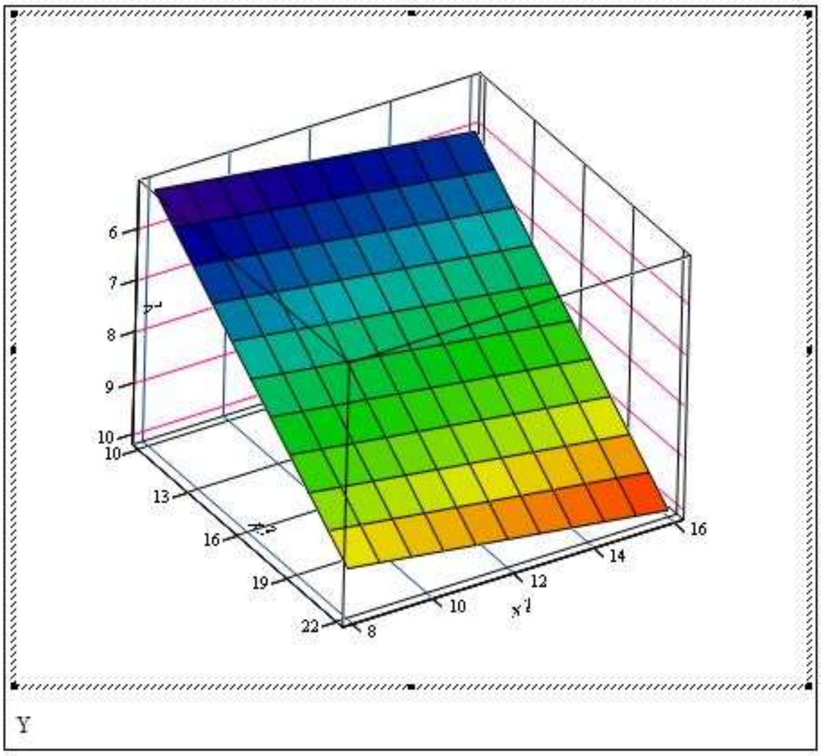
Зберігаємо результат, присвоюючи файлу своє ім’я.

Графічне представлення результатів моделювання

Вхідний параметр x_1 змінюємо в межах від 8 до 16, вхідний параметр x_3 – в межах від 10 до 22

$x_1 := 8.0, 8.5 .. 16.0$ $\quad$ $x_3 := 10, 11 .. 22$

$Y(x_1, x_3) := 1.0221 + 0.3349 \cdot x_3 + 0.1043 \cdot x_1$



Таблиця 12.1

Індивідуальні варіанти умов задачі для побудови просторового графіка

№ варіанту	Рівняння регресії	Межі зміни параметрів	
		x_1	x_2
1	$Y = 1,0221 + 0,1043x_1 + 0,3349x_2$	[8; 16]	[10; 22]
2	$Y = 1,44 – 0,13x_1 + 0,26x_2$	[11; 74]	[9; 30]
3	$Y = 0,62 – 0,03x_1 + 0,02x_2$	[1; 2]	[1; 2]
4	$Y = 1,02 + 0,10x_1 + 0,19x_2$	[8; 16]	[0,1; 0,2]
5	$Y = 0,62 + 0,02x_1 + 0,02x_2$	[1; 2]	[8; 16]
6	$Y = 384 – 27x_1 + 23x_2$	[20; 40]	[12; 24]
7	$Y = 384 + 27x_1 + 26x_2$	[20; 40]	[112; 314]
8	$Y = 385 – 25x_1 – 25x_2$	[2; 4]	[8; 30]
9	$Y = 1,44 + 0,13x_1 – 0,26x_2$	[10; 30]	[10; 70]
10	$Y = 3,2 + 0,4x_1 – 0,3x_2$	[1; 2]	[1; 2]

Зміст звіту

1. Знайти і завантажити файл «Exp graf 3D.xmcd».
2. Внести зміни до файлу (коментар, межі зміни параметрів, крок зміни параметрів, рівняння регресії) відповідно до свого варіанту в табл. 12.1 (за узгодженням з викладачем можна ввести дані своєї математичної моделі з двома вхідними параметрами).
3. Зробити копію (можна скріншот) отриманих результатів та вставити у звіт.

Додаток А

Таблиця А1

Варіанти задач для самостійної роботи

№ варі-анту	Задача		
	1	3	5
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
11	11	11	11
12	12	12	12
13	13	13	13
14	14	14	14
15	15	15	15
16	16	16	16
17	17	17	17
18	18	18	18
19	19	19	19
20	20	20	20
21	21	21	21
22	22	22	22
23	23	23	23
24	24	24	24
25	25	25	25
26	26	26	26
27	27	27	1
28	28	28	2
29	1	2	3
30	2	3	4

№ варі-анту	Задача		
	1	3	5
31	3	4	5
32	4	5	6
33	5	6	7
34	6	7	8
35	7	8	9
36	8	9	10
37	9	10	11
38	10	11	12
39	11	12	13
40	12	13	14
41	13	14	15
42	14	15	16
43	15	16	17
44	16	17	18
45	17	18	19
46	18	19	20
47	19	20	21
48	20	21	22
49	21	22	23
50	22	23	24
51	23	24	25
52	24	25	26
53	25	26	1
54	26	27	2
55	27	28	3
56	28	1	4
57	1	3	5
58	2	4	6
59	3	5	7
60	4	6	8

№ варі-анту	Задача		
	1	3	5
61	5	7	9
62	6	8	10
63	7	9	11
64	8	10	12
65	9	11	13
66	10	12	14
67	11	13	15
68	12	14	16
69	13	15	17
70	14	16	18
71	15	17	19
72	16	18	20
73	17	19	21
74	18	20	22
75	19	21	23
76	20	22	24
77	21	23	25
78	22	24	26
79	23	25	1
80	24	26	2
81	25	27	3
82	26	28	4
83	27	1	5
84	28	2	6
85	4	3	7
86	5	4	8
87	6	5	9
88	7	6	10
89	8	7	11
90	9	8	12

ЗМІСТ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ

Методичні рекомендації до виконання практичних робіт
для здобувачів ступеня вищої освіти магістр спеціальності G11
"Машинобудування" освітньо-наукова програма "Галузеве машинобудування"

Укладачі: В.В. Амосов, Д.Ю. Артеменко, С.М. Мороз