МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ БУДІВНИЦТВА, ТРАНСПОРТУ ТА ЕНЕРГЕТИКИ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ В ТРАНСПОРТНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Методичні рекомендації для студентів спеціальності «Транспортні технології»

КРОПИВНИЦЬКИЙ – 2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ БУДІВНИЦТВА, ТРАНСПОРТУ ТА ЕНЕРГЕТИКИ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ В ТРАНСПОРТНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Методичні рекомендації для студентів спеціальності «Транспортні технології»

Затверджено
На засіданні кафедри
вищої математики та фізики
Протокол №1 від 29.08.2024

КРОПИВНИЦЬКИЙ – 2024

Методи прикладної математики в транспортних технологіях. Елементи теорії графів. Методичні рекомендації для студентів спеціальності «Транспортні технології» / Семенюта М.Ф. – Кропивницький: ЦНТУ, 2024 р. – 54 с.

Методичні рекомендації містять основні відомості з теорії графів: типи графів та основні означення, способи задання графів, відомості про маршрути на графі, основні поняття про зважені графи, транспортні мережі, розглянуто задачу пошуку найкоротшого маршруту за алгоритмом Дейкстри та задачу визначення максимального потоку за алгоритмом Форда-Фалкерсона. Теоретичний матеріал викладено з детальними поясненнями та проілюстровано достатньою для його розуміння кількістю прикладів. Для перевірки як теоретичного так і практичного рівня засвоєння матеріалу запропоновано контрольні питання, задачі для самостійного розвязування, варіанти індивідуальних завдань.

Орієнтовано на студентів технічних спеціальностей.

Зміст

1. Вступ

На рівні наших звичайних уявлень граф – це сукупність будь-яких об'єктів між якими існують певні зв’язки (зазвичай їх зображують у вигляді точок чи кругів, з'єднаних неорієнтованими чи орієнтованими лініями). Зокрема, у вигляді графів можна подати електричні схеми, маршрути перевезень, схеми взаємозв'язків підрозділів підприємства, грошові та ресурсні потоки, системи керування різними об'єктами тощо.

Розпочалася історія графів зі статті Л. Ейлера 1736 року, у якій розглядалася задача про кьонігсбергські мости. У місті Кьонігсберг було два острови, з’єднаних сімома мостами з берегами річки Преголь і між собою, як показано на рисунку 1.1. Необхідно було знайти відповідь на питання: як обійти всі чотири частини суші, проходячи по кожному мосту один раз, і повернутися у вихідну точку, що розташована на одній з частин суші. Л. Ейлер узагальнив постановку цієї задачі і знайшов критерій існування такого маршруту. Л. Ейлера вважають засновником теорії графів.

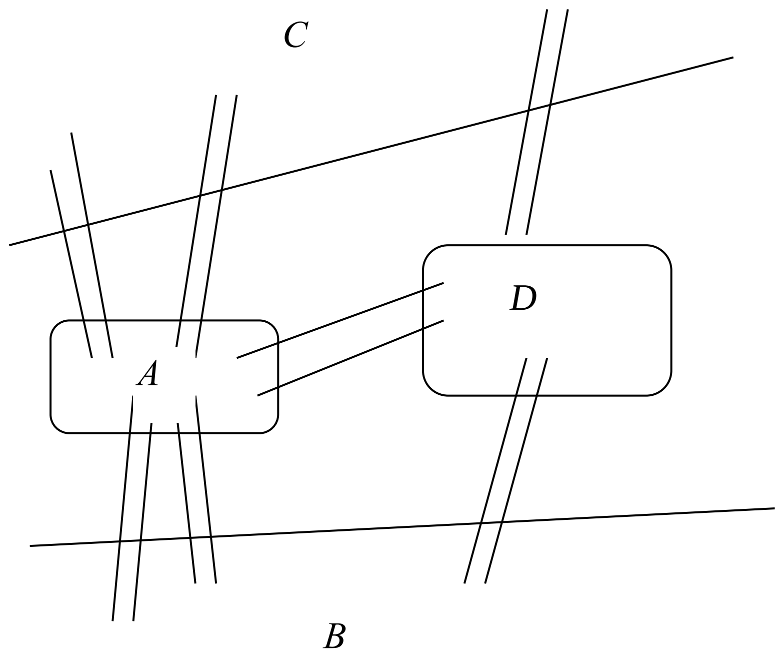


Рис.1. Ілюстрація до задачі про кьонігсбергскі мости

Інтерес до графів відродився в XIX сторіччі. Німецький фізик Г. Кірхгоф (1847) використовував графи при дослідженні електричних мереж, англійський математик А. Келлі (1857; 1874) в органічній хімії, ірландський математик У. Гамільтон для рішення ломиголівок. Початок сучасної теорії графів заклав у 1937 році американець Пойа. А поняття конфігурація з точок і ліній одержало назву граф у 1936 р., його запропонував угорський математик Д. Кьоніг. Минуле сторіччя було свідком неухильного розвитку теорії графів, що за останні двадцять років вступила в новий період інтенсивних розробок. У цьому процесі явно помітний вплив запитів нових областей додатків: програмування, теорії передачі повідомлень, електричних, контактних і транспортних мереж та інші.

2. Поняття графа

Неорієнтованим графом (або *графом*) $G = (V,\ E)$ називається сукупність двох множин – непорожньої множини V, що складається з p вершин і не порожньої множини E, що містить q неупорядкованих пар елементів множини V. Будемо розглядати тільки скінченні графи, тобто множина V передбачається скінченою. V називають множиною вершин, а E – множиною ребер. Надалі слово «неорієнтований» будемо опускати.

Число вершин графа $G = (V,\ E)$ називають його порядком, а число ребер – його розміром.

Граф $G = (V,\ E)$ називають *звичайним* (надалі просто «граф»), якщо кожну пару вершин сполучає не більше одного ребра.

Дві вершини графа називають *суміжними*, якщо вони є кінцями одного і того ж ребра. Вершина *інцидентна* ребру, якщо вона є його кінцем. Два ребра, що інцидентні одній тій самій вершині (тобто мають спільну вершину) називають суміжними.

Якщо ребро e графа G з'єднує дві його вершини u і v, то це ребро позначатимемо $\{u, v\}$ або $\{v, u\}$. В цьому випадку маємо:

вершини u та v *суміжні*,

вершини u та v *інцидентні* ребру e,

ребро e *інцидентне* вершинам u та v.

Множина вершин графа G, суміжних з вершиною $v \in V(G)$, називається *множиною суміжності вершини* v (або *околом вершини* v), будемо її позначати $\text{См}(v)$. Таким чином, $\text{См}(v) = \{u \in V(G) | \{u, v\} \in E(G)\}$.

Степенем вершини v графа G називається число ребер інцидентних цій вершині, позначається $deg(v)$. Для звичайного графа степінь вершини v дорівнює потужності її множини суміжності $\text{См}(v)$.

Максимальну і мінімальну степені вершин графа G позначаю символами $\Delta(G)$ і $\delta(G)$ відповідно.

Вершина степені 0 називається *ізольованої*, а вершина степені 1 – *висячою* або *кінцевою*. Ребро, інцидентне кінцевій вершині, також називається *кінцевим*.

Якщо степені всіх вершин графа G рівні r, то граф називається *регулярним* (або *однорідним*) степені r або r-*регулярним*: $\Delta(G) = \delta(G) = r$.

Теорема 2.1. Сума степенів всіх вершин графа $G = (V,\ E)$ є парним числом і дорівнює подвіному числу ребер, тобто

$$\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2 \cdot |E|\ .$$

Наслідок. У будь-якому графі число вершин непарного степеня парне.

З теореми 2.1 випливає, що не існує регулярного графа, порядок і степінь якого непарні одночасно.

В деяких задачах інцидентні ребру вершини нерівноправні: вони розглядаються у заданому порядку. Тоді кожному ребру можна приписати напрямок від однієї вершини до іншої і ребро стає орієнтованим. Граф, що складається з орієнтованих ребер, називають *орієнтованим* або *орграфом*. Такий граф позначатимемо $\vec{G} = (V,\ E)$.

Якщо граф $\vec{G} = (V,\ E)$ орінтований, то множина E, складається з упорядкованих пар елементів множини V. Ребро e орграфа $\vec{G}$, що виходить з вершини u і заходить в вершину v, позначають через $e = (u, v)$ і часто називають орієнтованим ребром або *дугою*. Вершини u і v дуги $e = (u, v)$ називають *кінцевими*, при цьому u є *початком*, а v – *кінцем* дуги e.

Якщо дві вершини графа G сполучені більше ніж одним ребром, то ці ребра називають *кратними*. Для орграфа $\vec{G}$ всі дуги, що мають однакову пару початкових і кінцевих вершин зазвичай називають *паралельними*.

Петля – це ребро графа або орграфа, яке сполучає вершину з собою.

Мультиграф – це граф з кратними ребрами, але він не містить петель. *Псевдограф* – це граф в якому допускаються не тільки кратні ребра, але і петлі.

Поняття степені вершини і теорема 2.1 зберігаються для мульти- і псевдо графів.

Кожна петля вносити в степінь відповідної вершини двійку.

Приклад 2.1. Задано граф $G = (V,\ E)$. Виначити порядок і розмір графа. Навести приклад суміжних вершин, суміжних ребер. Визначити чи містить граф G петлю, кратні ребра. Якщо так, то вказати їх. Знайти степені всіх вершин графа.

а) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \big\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\big\}$, знайти множину суміжності вершин v_2 і v_5.

Розв'язання.

Граф G не містить петель та кратних ребер, він є звичайним графом, має порядок 5 і розмір 4, так як $|V| = 5$, $|E| = 4$.

Вершина v_1 суміжна з вершинами v_2 і v_4, а ребро $\{v_1, v_4\}$ суміжне з ребром $\{v_2, v_4\}$, так як вони інцидентні вершині v_4.

Степені вершин графа G:

$deg(v_1) = 2, deg(v_2) = 3, deg(v_3) = 1, deg(v_4) = 2, deg(v_5) = 0.$

Вершина v_5 є ізольованою.

$\text{См}(v_2) = \{v_1, v_3, v_4\}$ – множина суміжності вершини v_2;

$\text{См}(v_5) = \emptyset$ – множина суміжності вершини v_5.

б) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_2\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$. Перевірити виконання умови теореми 2.1.

Розв'язання.

Порядок графа G дорівнює 5, а розмір дорівнює 7, так як $|V| = 5$, $|E| = 7$. Граф G містить кратні ребра $\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\}$ і петлю $\{v_2, v_2\}$, тому він є псевдографом.

Вершина v_1 суміжна з вершинами v_2 і v_3, а ребро $\{v_1, v_2\}$ суміжне з кратними ребрами $\{v_1, v_3\}$, так як вони інцидентні вершині v_1.

Степені вершин графа G:

$deg(v_1) = 3, deg(v_2) = 4, deg(v_3) = 3, deg(v_4) = 2, deg(v_5) = 2.$

Перевіримо виконання умови теореми 2.1:

$$deg(v_1) + deg(v_2) + deg(v_3) + deg(v_4) + deg(v_5) = 3 + 4 + 3 + 2 + 2 = 14,$$
$$|E| = 7,\ 2 \cdot |E| = 14.$$

Одержали:

$$deg(v_1) + deg(v_2) + deg(v_3) + deg(v_4) + deg(v_5) = 2 \cdot |E|.$$

Отже, для даного графа умова теореми 2.1 виконується.

Для орграфа $\vec{G}$ кажуть, що *дуга* $e = (u, v)$ *інцидентна* своїм кінцевим вершинам u і v. Вершини u і v орграфа $\vec{G} = (V,\ E)$ *суміжні*, якщо вони є кінцевими для однієї дуги, тобто $e = (u, v) \in E$.

Степенем $deg(v)$ вершини v оргафа $\vec{G} = (V,\ E)$ називають число інцидентних їй дуг. *Півстепенем заходу* $deg^-(v)$ вершини $v \in V(\vec{G})$ є число дуг, що заходять в v (тобто v для цих дуг є кінцем), *півстепенем виходу* $deg^+(v)$ – число дуг, що виходять з v (тобто v для цих дуг є початком). Символи δ^- і δ^+ використовують для позначення мінімального півстепеня заходу і виходу. Аналогічно символами Δ^- і Δ^+ позначають максимальну півстепень заходу і виходу. Множини суміжності $\Gamma^-(v)$ і $\Gamma^+(v)$ визначать наступним чином:

$$\Gamma^-(v) = \{u \big| (u, v) \in E(\vec{G})\}, \qquad \Gamma^+(v) = \{u \big| (v, u) \in E(\vec{G})\}.$$

Зауважимо, що петля збільшує півстепінь як входу, так і виходу цієї вершини.

Теорема 2.2. В орграфі $\vec{G} = (V,\ E)$ сума півстепенів заходу дорівнює сумі півстепенів виходу і дорівнює числу дуг цього орграфа, тобто

$$\sum_{v \in V(G)} deg^-(v) = \sum_{v \in V(G)} deg^+(v) = |E|.$$

Теорема 2.1 справедлива для будь-якого орієнтованого графа $\vec{G} = (V,\ E)$:

$$\sum_{v \in V(G)} deg^-(v) + \sum_{v \in V(G)} deg^+(v) = 2 \cdot |E|.$$

Приклад 2.2. Задано орграф $\vec{G} = (V,\ E)$. Визначити його порядок і розмір. Навести приклад суміжних вершин. Визначити чи містить $\vec{G}$ петлю, паралельні ребра. Якщо так, то вказати їх. Знайти степені всіх вершин графа, а також півстепені заходу і виходу, множини суміжності $\Gamma^-(v_2)$ і $\Gamma^+(v_2)$. Перевірити виконання умов теорем 2.1 і 2.2.

а) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_4, v_1), (v_5, v_1), (v_5, v_3)\}$.

Розв'язання.

$\vec{G}$ є орієнтованим графом, його порядок дорівнює 5, а розмір дорівнює 7 так як $|V| = 5$, $|E| = 7$. Вершина v_2 суміжна з вершинами v_1 і v_3. Граф не містить паралельних ребер та петель.

Степені вершин орграфа $\vec{G} = (V,\ E)$:

$deg(v_1) = 4, deg(v_2) = 3, deg(v_3) = 4, deg(v_4) = 1, deg(v_5) = 2;$

півстепені заходу:

$deg^-(v_1) = 2, deg^-(v_2) = 2, deg^-(v_3) = 3, deg^-(v_4) = 0, deg^-(v_5) = 0;$

півстепені виходу:

$deg^+(v_1) = 2, deg^+(v_2) = 1, deg^-(v_3) = 1, deg^-(v_4) = 1, deg^-(v_5) = 2.$

Множини суміжності: $\Gamma^-(v_2) = \{v_1, v_3\}$; $\Gamma^+(v_2) = \{v_3\}$.

Перевіримо виконання умови теореми 2.1:

$$\big(deg^-(v_1) + deg^-(v_2) + deg^-(v_3) + deg^-(v_4) + deg^-(v_5)\big) +$$
$$= \big(deg^+(v_1) + deg^+(v_2) + deg^-(v_3) + deg^-(v_4) + deg^-(v_5)\big) =$$
$$= (2 + 2 + 3 + 0 + 0) + (2 + 1 + 1 + 1 + 2) = 7 + 7 = 14,$$
$$|E| = 7,\ 2 \cdot |E| = 14.$$

Отже, для даного орграфа умова теореми 2.1 виконується.

Перевіримо виконання умови теореми 2.2:

$deg^-(v_1) + deg^-(v_2) + deg^-(v_3) + deg^-(v_4) + deg^-(v_5) = 7;$

$deg^+(v_1) + deg^+(v_2) + deg^-(v_3) + deg^-(v_4) + deg^-(v_5) = 7;$

$$|E| = 7.$$

Отже, для даного орграфа умова теореми 2.2 виконується.

б) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_4, v_1), (v_5, v_3)\}$.

Розв'язання.

$\vec{G}$ є орієнтованим графом, його порядок і розмір дорівнює 6, так як $|V| = |E| = 6$. Вершина v_2 суміжна тільки з вершиною v_3.Граф містить паралельні ребра $(v_2, v_3), (v_2, v_3)$ та петелю (v_1, v_1).

Степені вершин орграфа $\vec{G} = (V,\ E)$:

$deg(v_1) = 4, deg(v_2) = 2, deg(v_3) = 4, deg(v_4) = 1, deg(v_5) = 1.$

півстепені заходу: і виходу

$deg^-(v_1) = 2, deg^-(v_2) = 0, deg^-(v_3) = 4, deg^-(v_4) = 0, deg^-(v_5) = 0;$

півстепені виходу:

$deg^+(v_1) = 2, deg^+(v_2) = 2, deg^-(v_3) = 0, deg^-(v_4) = 1, deg^-(v_5) = 1.$

Множини суміжності: $\Gamma^-(v_2) = \emptyset$ $\Gamma^+(v_2) = \{v_3\}$.

Перевіримо виконання умови теореми 2.1:

$$\big(deg^-(v_1) + deg^-(v_2) + deg^-(v_3) + deg^-(v_4) + deg^-(v_5)\big) +$$
$$= \big(deg^+(v_1) + deg^+(v_2) + deg^-(v_3) + deg^-(v_4) + deg^-(v_5)\big) =$$
$$= (2 + 0 + 4 + 0 + 0) + (2 + 2 + 0 + 1 + 1) = 6 + 6 = 12,$$
$$|E| = 6,\ 2 \cdot |E| = 12.$$

Отже, для даного орграфа умова теореми 2.1 виконується.

Перевіримо виконання умови теореми 2.2:

$$deg^{-}(v_1) + deg^{-}(v_2) + deg^{-}(v_3) + deg^{-}(v_4) + deg^{-}(v_5) = 6;$$
$$deg^{+}(v_1) + deg^{+}(v_2) + deg^{-}(v_3) + deg^{-}(v_4) + deg^{-}(v_5) = 6;$$
$$|E| = 6.$$

Отже, для даного орграфа умова теореми 2.2 виконується.

Контрольні питання

1. Що називають неорієнтованим графам?
2. Що називають порядком і розміром графа?
3. Який граф називають звичайним?
4. Які вершини графа називають суміжними?
5. Що означає вершина інцидентна ребру або ребро інцидентне вершині?
6. Які ребра називають суміжними?
7. Які ребра називають кратними?
8. Що називають петлею?
9. Як називається граф з кратними ребрами?
10. Який граф називають псевдографом?
11. Що називають множиною суміжності вершини графа?
12. Що називають степенем вершини графа?
13. Який граф називають регулярним?
14. Яка вершина називається ізольованою, висячою?
15. Чому дорівнює сума степенів всіх вершин графа?
16. Що можна сказати про число вершин непарного степеня графа?
17. Який граф називають орієнтованим (або орграфом)?
18. Як називають ребра орієнтованого графа?
19. Які ребра називаються паралельними в орієнтованому графі?
20. Які вершини в орграфі суміжні?
21. Що називають степенем вершини в орграфі?
22. Що називають півстепенем заходу, півстепенем виходу в орграфі?
23. Як між собою пов'язані суми півстепенів заходу і виходу в орграфі?

Задачі для самостійного розв'язування

1. Для заданого графа $G = (V, E)$, де $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}\}$, знайти:

1) петлі і кратні ребра, якщо граф G їх містить;
2) порядок і розмір графа G;
3) множину суміжності вершин v_1 і v_5;
4) степені вершин графа G;
5) вказати ізольовані і висячі вершини графа G, якщо він їх містить.

Вказати тип графа: звичайний граф, мультиграф, псевдограф, орієнтований граф. Перевірити виконання умови теореми 2.1.

Чи буде даний граф регулярним? Відповідь поясніть.

2. Для заданого графа $\vec{G} = (V,\ E)$, де $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, $E = \{(v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_6), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_4, v_5), (v_5, v_3), (v_6, v_5)\}$, знайти:

1) петлі і паралельні дуги, якщо граф $\vec{G}$ їх містить;
2) порядок і розмір графа $\vec{G}$;
3) півстепені заходу і виходу графа $\vec{G}$;
4) множини суміжності $\Gamma^{-}(v_5)$ і $\Gamma^{+}(v_5)$;
5) перевірити виконання умов теореми 2.1 і 2.2.

3. Способи задання графа

Граф вважають заданим, якщо вказана множина вершин і ребер. Існують різні способи завдання графів. Розглянемо деякі з них, а саме: переліком елементів множини вершин і множини ребер, діаграмою, матрицею суміжності та інцидентності.

3.1. Задання графа переліком елементів множини вершин і ребер

Спосіб представлення графа за допомогою переліку елементів множини вершин і множини ребер розглянуто в пункті 2.

3.2. Геометричне задання графа

Наочним є геометричне представлення графа, коли на площині зображують вершини графа точками або кружками, а ребра відрізками або дугами. Кажуть, що маємо *діаграму* графа.

Діаграма орграфа відрізняється від діаграми звичайного графа тим, що дуги орграфа зображають напрямленими лініями (відрізками чи кривими), що йдуть від початку до кінця дуги. Напрямок ліній позначають стрілкою.

Приклад 3.1. Зобразити граф $G = (V,\ E)$ з прикладу 2.1.
а) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \left\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\right\}$.

Розв'язання.
На рис. 3.1 наведено діаграму даного графа.

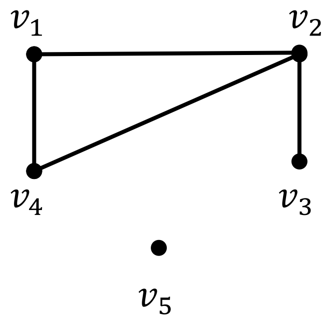


Рисунок 3.1

б) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_2\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$.

Розв'язання.

На рис. 3.2 наведено діаграму даного графа.

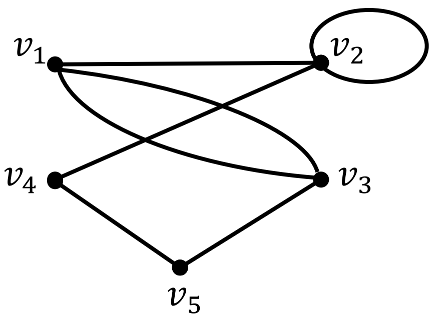


Рисунок 3.2

Приклад 3.2. Зобразити $\vec{G} = (V,\ E)$ з прикладу 2.2.

а) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_4, v_1), (v_5, v_1), (v_5, v_3)\}$.

Розв'язання.

На рис. 3.3 наведено діаграму даного орграфа.

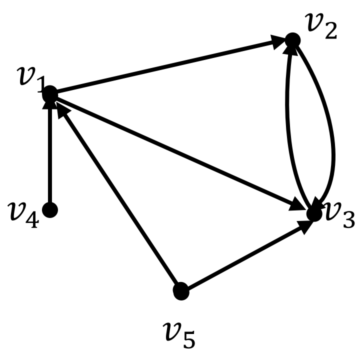


Рисунок 3.3

б) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_4, v_1), (v_5, v_3)\}$.

Розв'язання.

На рис. 3.4 наведено діаграму даного орграфа.

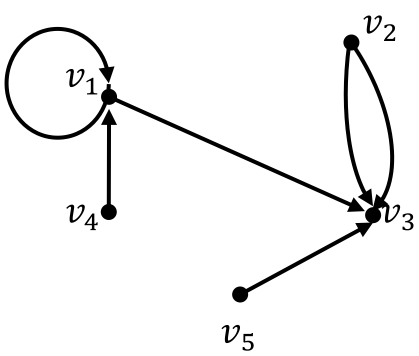


Рисунок 3.4

3.3. Матриця суміжності

Матрицею суміжності вершин графа G називають квадратну матрицю $A = A(G)$, порядок якої дорівнює порядку графа G, а елементи визначаються за правилом: $a_{ij} = 1$, якщо вершини i та j суміжні, в інших випадках $a_{ij} = 0$.

Матриця суміжності вершин A графа G має властивості:

1) бінарна з елементами 0 і 1;

2) симетрична: $a_{ij} = a_{ji}$;

3) всі елементи головної діагоналі нулі;

4) сума елементів i-го рядка або i-го стовпця матриці A дорівнює степені вершини i;

5) сума елементів матриці A, розташованих вище (або нижче головної діагоналі) дорівнює кількості ребер графа.

Число ребер дорівнює числу одиниць, розташованих вище або нижче головної діагоналі A.

Аналогічно визначається матриця суміжності мульти- і псевдографів: елемент a_{ij} дорівнює числу ребер, що з'єднує вершини i та j, при цьому петля означає два ребра.

Приклад 3.3. Для графа $G = (V,\ E)$ з прикладу 2.1 записати матрицю суміжності.

а) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \big\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\big\}$.

Розв'язання.

Напишемо матрицю суміжності A у вигляді таблиці:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	0	1	0
v_2	1	0	1	1	0
v_3	0	1	0	0	0
v_4	1	1	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0

Також матрицю A можна записати у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Достатньо обрати один зі способів запису матриці суміжності.

б) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_2\}, \{v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$.

Розв'язання.

Напишемо матрицю суміжності A для заданого графа:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицею суміжності вершин орграфа $\vec{G}$ називають квадратну матрицю $A = A(\vec{G})$, порядок якої дорівнює порядку графа $\vec{G}$, а елементи визначаються за правилом: $a_{ij} = 1$, якщо вершини $(i, j) \in E(\vec{G})$, в інших випадках $a_{ij} = 0$.

Приклад 3.4. Для орграфа $\vec{G} = (V,\ E)$ з прикладу 2.2 записати матрицю суміжності.

а) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_4, v_1),$ $(v_5, v_1), (v_5, v_3)\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_4, v_1),$ $(v_5, v_3)\}$.

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що будь-яка квадратна бінарна симетрична матриця є матрицею суміжності деякого графа, а будь-яка квадратна бінарна матриця є матрицею суміжності орієнтованого графа.

Приклад 3.5. Задано матрицю суміжності графа. Побудувати його діаграму.

а)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Побудуємо діаграму графа заданого матрицею суміжності його вершин:

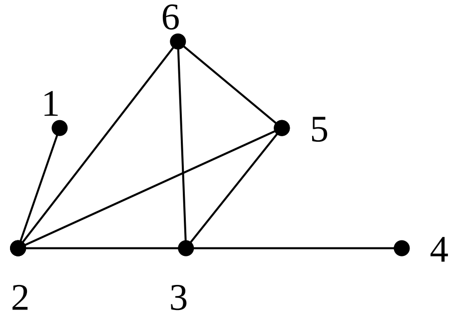


Рисунок 3.5

б)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язання.

Побудуємо діаграму орграфа заданого матрицею суміжності його вершин:

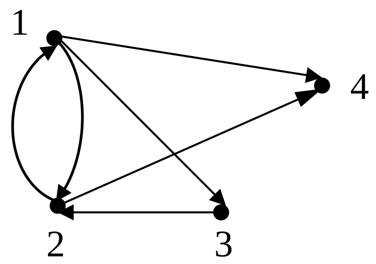


Рисунок 3.6

3.4. Матриця інцидентності

Матрицею інцидентності графа $G=(V,E)$, де $V=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$, $E=\{e_1,e_2,\dots,e_q\}$ називають матрицю $B=B(G)$ розміру $p\times q$ з елементами b_{ij}, що визначаються за правилом: $b_{ij}=1$, якщо вершина v_i та ребро e_j інцидентні в графі G, в інших випадках $b_{ij}=0$.

Матриця $B(G)$ – бінарна, але не обов'язково квадратна, число одиниць в кожному стовпці матриці $B(G)$ дорівнює двом, тому що кожне ребро звичайного графа інцидентне двом вершинам.

Якщо ребро e_j є петлею в вершині v_i, то $b_{ij}=2$.

Матрицею інцидентності орграфа $\vec{G}=(V,E)$, де $V=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$, $E=\{e_1,e_2,\dots,e_q\}$ називають матрицю $B=B(\vec{G})$ розміру $p\times q$ з елементами b_{ij}, що визначаються за правилом:

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, \text{якщо вершина } v_i \text{ є початком дуги } e_j, \\ -1, \text{якщо вершина } v_i \text{ є кінцем дуги } e_j, \\ 0, \text{якщо вершина } v_i \text{ та дуга } e_j \text{ не інцидентні.} \end{cases}$$

В кожному стовпці матриці $B(\vec{G})$ розташовано одна 1, одна –1, інші елементи нулі.

Приклад 3.6. Для графа $G=(V,\,E)$ з прикладу 2.1 записати матрицю інцидентності.

а) $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$, $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, де $e_1=\{v_1,v_2\}, e_2=\{v_1,v_4\}$, $e_3=\{v_2,v_3\}, e_4=\{v_2,v_4\}$.

Розв'язання.

Напишемо матрицю інцидентності B у вигляді таблиці:

	e_1	e_2	e_3	e_4
v_1	1	1	0	0
v_2	1	0	1	1
v_3	0	0	1	0
v_4	0	1	0	1
v_5	0	0	0	0

Також матрицю інцидентності B можна записати у вигляді:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Достатньо обрати один зі способів запису матриці інцидентності B.

б) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, де $e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_1, v_3\}, e_3 = \{v_1, v_3\}, e_4 = \{v_2, v_2\}, e_5 = \{v_2, v_4\},\ e_6 = \{v_3, v_5\},\ e_7 = \{v_4, v_5\}$.

Розв'язання.

Напишемо матрицю інцидентності B для заданого псевдографа:

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Приклад 3.7. Для орграфа $\vec{G} = (V,\ E)$ з прикладу 2.2 а) записати матрицю інцидентності, де

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, де $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_1, v_3), e_3 = (v_2, v_3),\ e_4 = (v_3, v_2), e_5 = (v_4, v_1),\ e_6 = (v_5, v_1), e_7 = (v_5, v_3)$.

Розв'язання.

Напишемо матрицю інцидентності B для заданого орграфа:

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

.

Приклад 3.5. Задано матрицю інцидентності графа. Побудувати його діаграму.

а)

$$B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

.

Розв'язання.

Побудуємо діаграму графа заданого матрицею інцидентності:

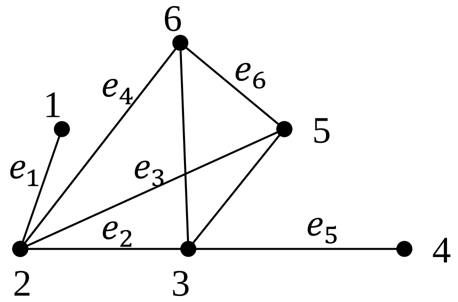


Рисунок 3.6

б)

$$B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Розв'язання.

Побудуємо діаграму орграфа заданого матрицею інцидентності:

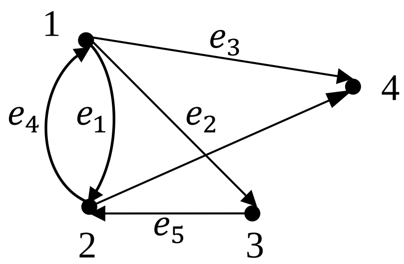


Рисунок 3.7

Контрольні питання

1. Які способи задання графа ви знаєте?
2. Що означає представлення графа за допомогою переліку елементів множини вершин і множини ребер? Навести приклад.
3. Що таке діаграма звичайного і орієнтованого графа? Навести приклади.
4. Що називають матрицею суміжності вершин графа?
5. Якими властивостями володіє матриця суміжності вершин звичайного графа?
6. Як визначається матриця суміжності мультиграфа і псевдографа?
7. Що називають матрицею суміжності вершин орграфа?
8. Що називають матрицею інцидентності графа? Які вона має властивості?
9. Якщо ребро e_j є петлею в вершині v_i графа G, то чому дорівнює елемент b_{ij} матриці інцидентності $B(G)$?
10. Що називають матрицею інцидентності орграфа? Які вона має властивості?
11. Як за допомогою матриці суміжності визначити

а) кількість ребер в графі;

б) степені вершин графа?

Задачі для самостійного розв'язування

1. Дано граф $G = (V,\ E)$, де

а) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}\}$.

б) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}\}$.

Побудувати діаграму графа G. Знайти його матриці суміжності і інцидентності.

2. Дано граф $\vec{G} = (V,\ E)$, де $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, $E = \{(v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_6), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_4, v_5), (v_5, v_3), (v_6, v_5)\}$.

Побудувати діаграму графа $\vec{G}$. Знайти його матриці суміжності і інцидентності.

3. Граф задано матрицею суміжності A. Побудувати його діаграму.

а) $A=\begin{pmatrix}0&0&1&1&1\\0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1\\1&0&0&0&1\\1&0&1&1&0\end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&2&1&0\\1&1&0&1\\2&0&1&0\end{pmatrix}$, в) $A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

4. Граф задано матрицею інцидентності B. Побудувати його діаграму.

$$B=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0\\1&0&1&1&-1&0&-1\\-1&0&0&0&0&1&0\\0&-1&0&-1&1&0&0\\0&0&-1&0&0&-1&1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&1&0&1\\1&1&0&1&1\end{pmatrix}.$$

4. Маршрути у графі та його зв'язність. Спеціальні графи, підграфи

Маршрутом у графі $G=(V,E)$ називається послідовність, у якій вершини чергуються з ребрами і яка починається вершиною і закінчується вершиною:

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n \qquad (4.1)$$

Кожне ребро послідовності (4.1) інцидентне двом вершинам. Згідно означення маршрут прокладено між вершинами v_0 і v_n, його можна також позначити $v_0, v_1, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$ (наявність ребер мається на увазі). Вершина v_0 є початком маршруту, v_n – його кінець. *Довжина маршруту* дорівнює кількості ребер у ньому. Маршрут замкнений, якщо $v_0=v_n$, інакше відкритий. Маршрут називається *ланцюгом*, якщо всі його ребра різні і *простим ланцюгом*, якщо всі вершини (а отже і ребра) різні. Замкнутий ланцюг називають *циклом*, замкнутий простий ланцюг – *простим циклом*.

Відстанню $d(u,v)$ між вершинами u і v називається довжина найкоротшого з ланцюгів, яким можна з'єднати u і v у графі $G=(V,E)$, де $u,v \in V$. Якщо вершини u і v не зєднані маршрутом, то покладаємо $d(u,v)=\infty$.

Приклад 4.1. Граф $G=(V,E)$ задано діаграмою (рис.4.1). Вкажіть, яка з наведених послідовностей вершин є маршрутом, ланцюгом, простим ланцюгом, циклом, простим циклом:

1) v_1, v_2, v_3, v_2, v_5;
2) v_3, v_4, v_5, v_1, v_2;
3) $v_3, v_4, v_2, v_5, v_4, v_1$;
4) v_1, v_4, v_2, v_3, v_5;
5) v_1, v_2, v_3, v_4, v_1.

Знайдіть довжину кожного маршруту. Визначити відстань між вершинами v_1 і v_5.

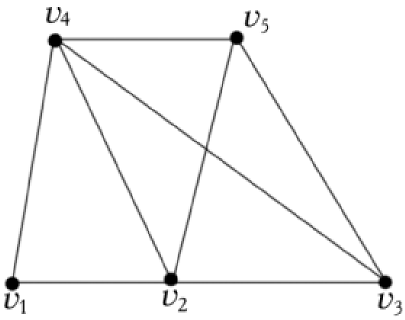


Рисунок 4.1. Діаграма графа $G = (V, E)$

Розв'язання.

Послідовність вершин 2) v_3, v_4, v_5, v_1, v_2 не є маршрутом, так як ребра між вершинами v_1 і v_5 не існує в графі G. Всі інші послідовності вершин є маршрутами.

Послідовності 3) $v_3, v_4, v_2, v_5, v_4, v_1$ і 4) v_1, v_4, v_2, v_3, v_5 є ланцюгами, причому 4) v_1, v_4, v_2, v_3, v_5 – простий ланцюг. Послідовність 5) v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 є простим циклом.

Довжина маршруту 3) дорівнює 5, а довжина кожного з маршрутів 1), 4) і 5) дорівнює 4.

Найкоротший ланцюг між вершинами v_1 і v_5 містить два ребра, тому відстань між v_1 і v_5 дорівнює 2, тобто $d(v_1, v_5) = 2$.

Граф G називається *зв'язним*, якщо будь-яка пара його вершин з'єднана деяким маршрутом. Такі дві вершини називаються зв'язаними, ізольована вершина вважається зв'язаною сама з собою.

Максимальний зв'язний підграф графа G називається *компонентою зв'язності* або просто *компонентою* графа G. Число компонент звязності графа позначатимемо через $k(G)$ або k.

Приклад 4.2. Граф $G = (V, E)$ задано діаграмою (рис.4.2). Чи буде граф звязним? Скільки компонент звязності він містить?

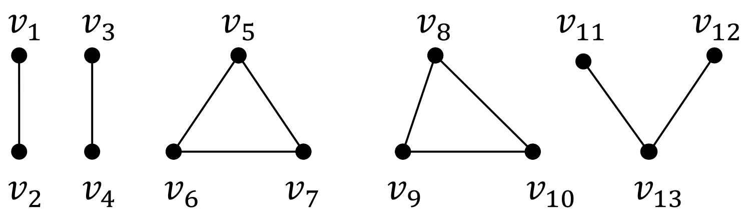


Рисунок 4.2. Діаграма графа G

Розв'язання.

В графі G, зображеному на рис. 4.2, існують вершини не зєднані маршрутом, наприклад v_1 і v_3, тому він незв'язний. Граф G містить 5 максимально звязних підграфів, тому число його компонент зв'язності дорівнює 5, тобто $k = 5$.

Для орієнтованого графа вводитися поняття *орієнтованого маршруту* – це послідовність виду (1), у якій $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Аналогом ланцюга є *орієнтований ланцюг*, а простого ланцюга – *орієнтованим шляхом* (або *шляхом*). Замкнутий орієнтований ланцюг (шлях) називається *орієнтованим циклом* або *контуром*, якщо всі його вершини, за виключенням кінцевих, різні.

Орієнтований граф називається *зв'язним*, якщо зв'язним є неорієнтований граф, який одержимо після зняття орієнтації з ребер.

Вершини v_i і v_j орієнтованого графа $\vec{G}$ називаються *сильно зв'язними*, якщо в $\vec{G}$ існує шлях з v_i в v_j і навпаки. Будь яка вершина сильно зв'язна сама з собою.

Орієнтований граф називається *сильно зв'язним*, якщо сильно зв'язні всі його вершини.

Максимальний сильно зв'язний підграф орієнтованого графа $\vec{G}$ називається *сильно зв'язною компонентою* графа $\vec{G}$.

Приклад 4.3. Граф $\vec{G} = (V, E)$ задано діаграмою (рис.4.3).

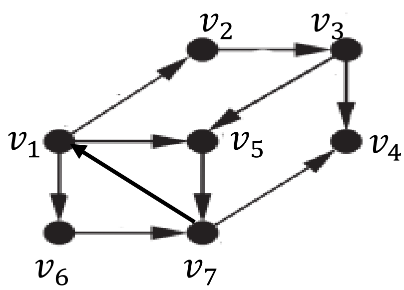


Рисунок 4.3. Діаграма графа $\vec{G}$

Вкажіть, яка з наведених послідовностей вершин є орієнтованим маршрутом, орієнтованим ланцюгом, орієнтованим шляхом, контуром:

1) $v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_5$;

2) v_1, v_5, v_7, v_1;

3) v_2, v_3, v_5, v_7, v_4.

Знайдіть довжину кожного орієнтованого маршруту. Визначити відстань між вершинами v_1 і v_4. Чи буде орграф $\vec{G}$ звязним, сильно звязним?

Розв'язання.

Послідовність вершин 1) $v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_5$ не є маршрутом, так як ребер (v_4, v_7) і (v_7, v_5) не існує в орграфі $\vec{G}$. Послідовності вершин 2) і 3) утворюють орієнтований маршрут в орграфі $\vec{G}$, причому 2) є контуром, а 3) – орієнтованим ланцюгом.

Довжина орієнтованого маршруту 2) дорівнює 3, а орієнтованого маршруту 3) – 4.

Найкоротший орієнтований ланцюг між вершинами v_1 і v_4 містить три ребра, тому відстань між v_1 і v_4 дорівнює 3, тобто $d(v_1, v_4) = 3$.

Орграф $\vec{G}$ є звязним, але він не буде сильно звязним, так як, наприклад, вершини v_1 і v_4 не є сильно звязними.

Деякі, графи, що часто зустрічаються, мають назву і позначення, це так звані *спеціальні графи*. Розглянемо деякі з них.

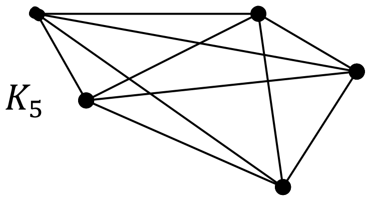


Рисунок 4.4. Діаграма K_5

Граф порядку n називається *повним*, якщо будь-які дві його вершини суміжні. Позначається K_n. На рис. 4.4 зображений повний граф K_5 порядку 5.

Граф називається *порожнім* (*нульовим*), якщо в ньому немає ребер. Порожній граф порядку n позначається O_n.

Цикл довжини n ($n \geq 3$) – це простий цикл на n вершинах, його позначають C_n (рис.4.5).

Ланцюг довжини n – це простий ланцюг на n вершинах, його позначають P_n (рис.4.6).

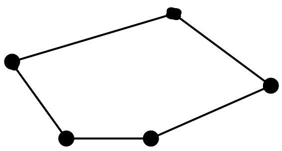


Рисунок 4.5. Діаграма цикла C_5

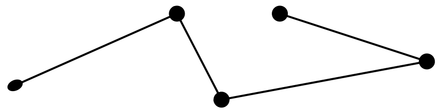


Рисунок 4.6. Діаграма ланцюга P_5

Двочастковий граф – це граф $G = (V, E)$, множину вершин V якого можна розбити на дві підмножини V_1 і V_2, які не перетинаються, таким чином, що кожне ребро графа G з'єднує вершини з різних підмножин.

Якщо при цьому будь-які дві вершини, що входять у різні підмножини, суміжні, то граф називається *повним двочастковим* і позначається $K_{m,n}$ (рис.4.7), $|V_1| = m,\ |V_2| = n$.

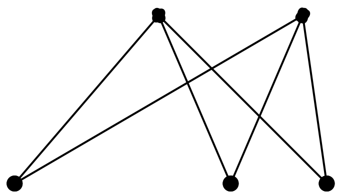


Рисунок 4.7. Діаграма повного двочасткового графа $K_{2,3}$

Аналогічно двочастковому визначаються k-*частковий* і *повний* k-*частковий* графи для $k = 3, 4, \ldots$

Граф $K_{1,n-1}$ називають *зіркою* порядку n.

Граф без циклів називають *ациклічним*. Ациклічний зв'язний граф називають *деревом*. Довільний ациклічний граф – це *ліс*. Компонентами зв'язності ліса є дерева. Вершини дерева степені один називаються *листками*.

Орієнтованим деревом називається вільний від петель орієнтований граф, який після зняття орієнтації з дуг стає деревом.

Щоб одержати *кореневе дерево*, треба довільним чином обрати в ньому вершину, цю вершину називають *коренем*.

Граф $G' = (V', E')$ називається *підграфом* графа $G = (V, E)$ (позначається $G' \subseteq G$), якщо $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$. В цьому випадку граф G називають *надграфо*м G'.

Підграф $G' = (V', E')$ називається *остовним підграфом* (або *фактором*) графа $G = (V, E)$, якщо $V' = V$.

Якщо $V' \subset V$ або $E' \subset E$ ($V' \neq V$ або $E' \neq E$), то G' називається *власним підграфом*, графа G.

На рис.4.8 представлено граф і три його підграфи: G_1 – остовний підграф; G_1, G_2 і G_3 – власні підграфи графа G. Підграф G_1 містить ізольовані вершини.

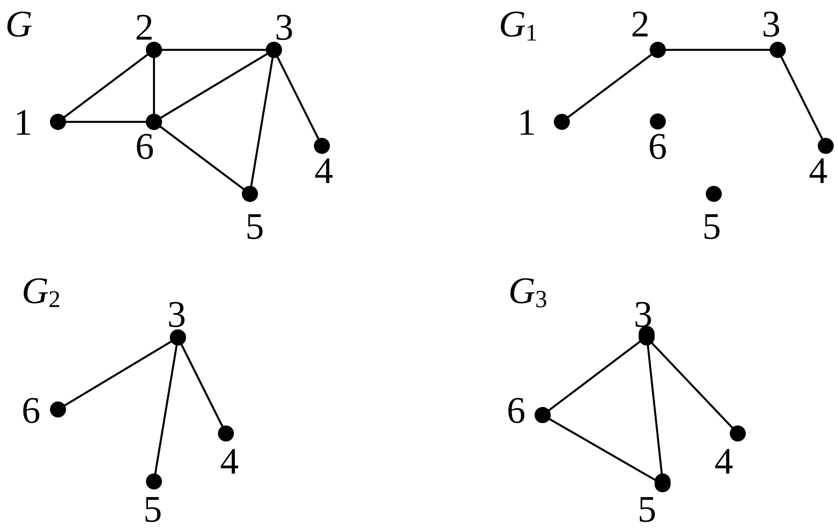


Рисунок 4.8. Діаграми графа і його підграфів

Граф $\overline{G} = (V, E_1)$ називають *доповненням* графа $G = (V, E)$, якщо їх множини вершин співпадають і вершини в $\overline{G}$ суміжні тільки тоді, коли вони не суміжні в G. Таким чином, $G \cup \overline{G} = K_n$, де $n = |V|$, $E(G) \cup E_1(\overline{G}) = E(K_n)$.

Приклад 4.4. Граф $G = (V, E)$ задано діаграмою (рис.4.1). Знайти доповнення $\overline{G}$ даного графа G.

Розв'язання.

Задамо граф G переліком елементів множини вершин та множини ребер:

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,

$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$.

Множини вершин графів G і $\overline{G}$ співпадають. $\overline{G}$ має множину ребер E_1, яка складається тільки з тих ребер, які зєднують несуміжні вершини графа G:

$$E_1 = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_5\}\}.$$

Діаграма графа $\overline{G}$ представлена на рис. 4.9.

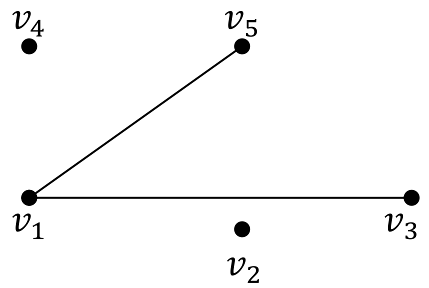


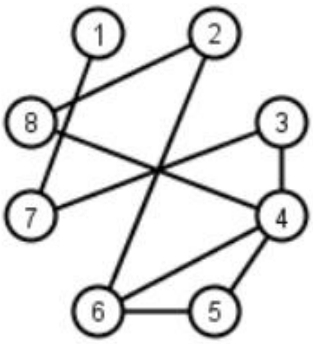
Рисунок 4.9. Діаграма графа $\overline{G}$

Контрольні питання.

1. Що називають маршрутом в графі?
2. Що називають довжиною маршруту в графі?
3. Який маршрут називають ланцюгом, простим ланцюгом, циклом, простим циклом?
4. Що називають відстанню між двома вершинами графа?
5. Якщо вершини u і v не зєднані маршрутом, що приймають за відстань між ними?
6. Який граф називають зв’язним?
7. Що називають компонентою зв’язності графа?
8. Що називають орієнтованим маршрутом в орграфі?
9. Що є аналогом ланцюга в орграфі?
10. Що називають контуром в орграфі?
11. Які вершини в орграфі називаються сильно зв’язними?
12. Який орграф називається сильно зв’язним?
13. Які спеціальні графи ви знаєте? Наведіть приклади.
14. Який граф називають дводольним?
15. Який граф називається деревом, лісом?
16. Який граф називається орієнтованим деревом?
17. Що називають підграфом даного графа?
18. Який підграф називають остовним, власним?
19. Що називають доповненням даного графа?

Задачі для самостійного розв′язування

1. Граф $G = (V, E)$ задано діаграмою:



1) Наведіть приклад маршруту, ланцюга, простого ланцюга, циклу, простого циклу.

2) Знайдіть відстань між вершинами 1 і 5.

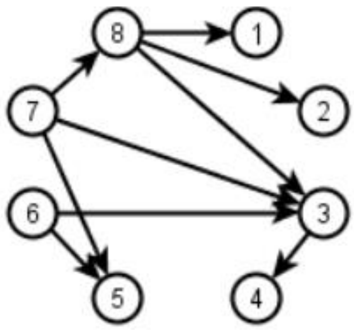
3) Чи буде граф зв'язним? Знайти число компонент зв'язності.

4) Наведіть приклад підграфа, остовного підграфа, власного підграфа для даного графа.

5) Побудувати доповнення даного графа.

2. Навести приклад графа з k компонентами звязності, якщо а) $k = 3$, б) $k = 6$.

3. Орграф $\vec{G} = (V, E)$ задано діаграмою:

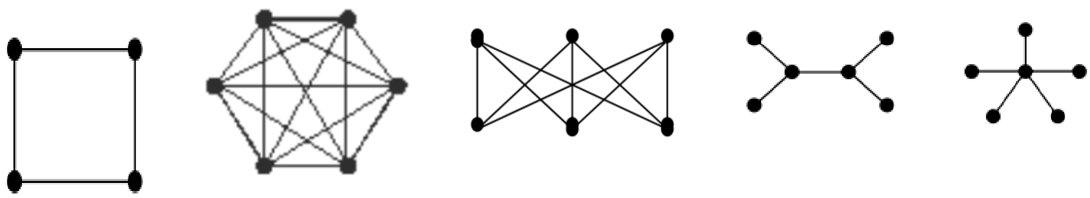


1) Наведіть приклад орієнтованого маршруту в $\vec{G}$?

2) Чи існує в $\vec{G}$ контур? Відповідь поясніть.

3) Чи буде орграф $\vec{G}$ сильно зв'язним? Відповідь поясніть.

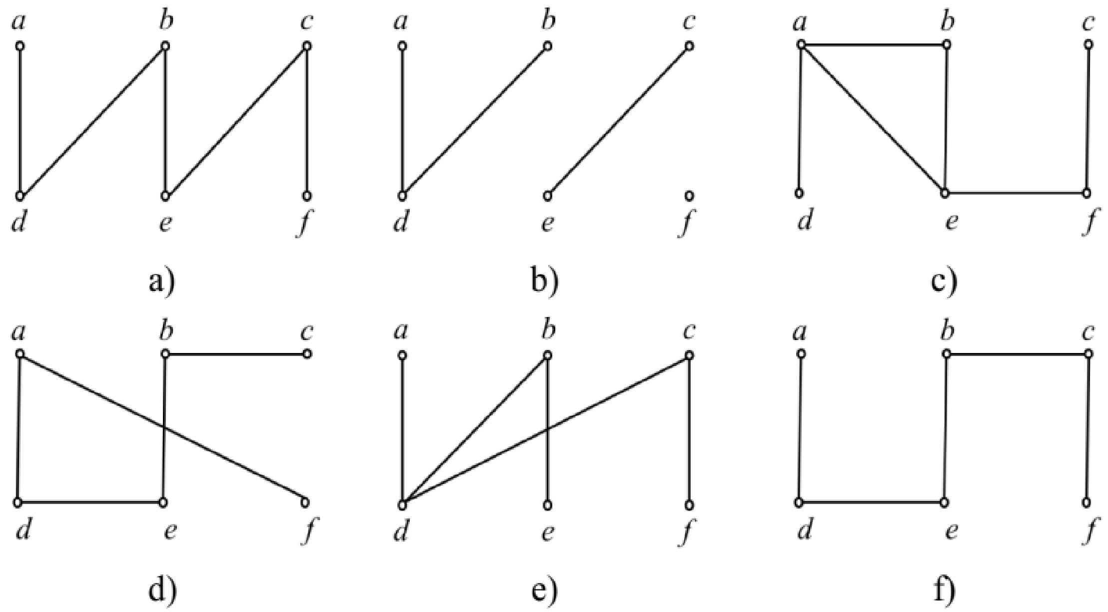
4. Спеціальні графи задані діаграмою:



а) б) в) г) д)

Як називається кожний із заданих графів?

5. Які з графів, представлених на діаграмі, є деревами?



5. Зважені графи. Алгоритм Дейкстри

5.1. Зважені графи

Будемо використовувати позначення $G = (V, E)$ як для неорієнтованого, так і для орієнтованого графа.

Граф $G = (V, E)$ називається *зваженим*, якщо кожному ребру $e \in E(G)$ поставлено у відповідність число $w(e)$. Число $w(e)$ називають *вагою* (або *довжиною*, або *вартістю*) ребра. Аналогічне означення вводиться для зваженого орієнтованого графа.

Зауваження. Будь-яким елементам графа (ребрам і/або вершинам) можна ставити у відповідність числа. Такий граф також вважають зваженим. Надалі будемо розглядати такі зважені графи, у яких тільки ребра мають вагу.

Довжиною (або *вагою*, або або *вартістю*) *маршруту* (*шляху*) між двома вершинами зваженого графа називається число, яке дорівнює сумі ваг ребер (дуг), які утворюють цей маршрут (шлях).

Відстань $d(i, j)$ *між двома вершинами* i та j дорівнює довжині найкоротшого маршруту, що їх з'єднує. Якщо між двома вершинами не існує маршруту, то приймають відстань між ними рівною ∞.

Якщо граф незважений, то вагу ребер (дуг) вважають рівною одиниці та отримують раніше введене поняття довжини маршруту (шляху) як кількості ребер (дуг) у ньому.

Зважений граф є зручною моделлю під час дослідження цілого ряду задач у транспорті, зв'язку та інших областях, пов'язаних з дійсним або уявним рухом товарів, інформації або людей.

Матрицею ваг графа G називають квадратну матрицю $W = W(G)$, порядок якої, дорівнює порядку графа G, а елементи визначаються за правилом: $w_{ij} = w(i,j)$, де $w(i,j)$ – вага ребра (дуги) між суміжними вершинами i та j для $i \neq j$, $w_{ii} = 0$, в інших випадках приймають $w_{ij} = \infty$.

Приклад 3.5.

а) Зважений граф G, заданого діаграмою рис.5.1. Біля кожного ребра вказана його вага. Записати матрицю ваг.

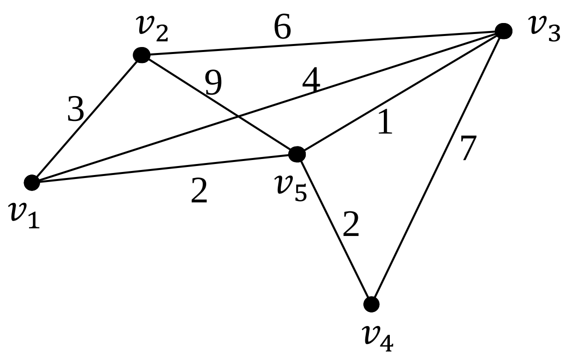


Рисунок 5.1 Діаграма графа G

Розв'язання.

Матриця ваг графа G:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & \infty & 2 \\ 3 & 0 & 6 & \infty & 9 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 1 \\ \infty & \infty & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 9 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Зважений граф $\vec{G}$, заданого діаграмою рис.5.2. Біля кожного ребра вказана його вага. Записати матрицю ваг.

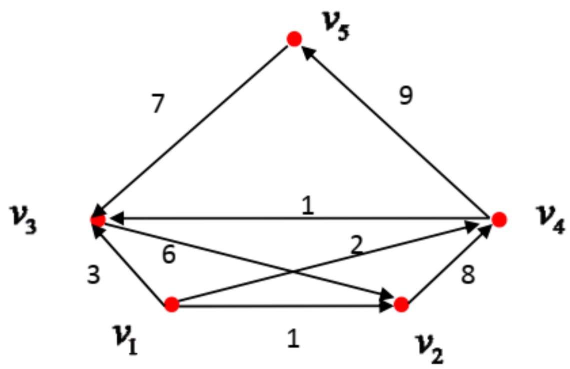


Рисунок 5.2

Розв'язання.

Матриця ваг графа $\vec{G}$:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 8 & \infty \\ \infty & 6 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 9 \\ \infty & \infty & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2. Алгоритм Дейкстри

Розглянемо клас задач оптимізації, в яких математичною моделлю виступає граф або орграф і необхідно знайти найкоротший маршрут (шлях) від заданої вершини до інших вершин графа. Універсальним алгоритмом для знаходження розв'язку цих задач є алгоритм Дейкстри.

Зауваження. В наведеному класі задач оптимізації вагами ребер можуть виступати будь-які додатні числові одиниці. Наприклад, якщо вага ребра дорівнює часу, то шукають мінімальний час. Якщо вага дорівнює кількості грошових одиниць, то шукають мінімальну вартість і т.п.

Будемо шукати в графі $G = (V, E)$ порядку n найкоротші шляхи з вершини a, яку називають *початковою* (або *джерелом* для орграфа) до всіх інших вершин G, досяжних з a.

Під час роботи алгоритму вводитимемо мітки вершин. Мітка $l(v)$ вершини v може буде постійною або тимчасовою. Величина постійної мітки дорівнює довжині найкоротшого шляху, який проходить від початкової вершини a через вершини з постійними мітками до v. Деякі вершини $v \neq a$ під час роботи алгоритму наділяються тимчасовими мітками $l(v)$, які дорівнюють мінімальній відстані від початкової вершини a до v серед довжин усіх тих маршрутів, які проходять через вершини з постійними мітками.

На кожному кроці будемо формувати множину вершин S, в яку входять тільки вершини з постійними мітками. Решта вершин буде мати тимчасові мітки.

Опишемо основні етапи роботи алгоритму Дейкстри знаходження довжин мінімальних шляхів від початкової вершини a до всіх інших вершини графа, досяжних з вершини a.

1. Вершині a приписуємо мітку 0 (нульова відстань до самої себе), а кожній з $(n-1)$ вершин, що залишилися, присвоюється тимчасова мітка ∞. Одержимо

$$l(a) := 0; \; l(v) := \infty \quad \forall v \neq a,$$

$l(a)$ – постійна мітка, $l(v)$ – тимчасові мітки для всіх $v \neq a$, $S = \{a\}$; $P = V \backslash S$ – множина вершин графа з тимчасовими мітками, V – множина вершин даного графа.

2. Правило перерахунку міток. Нехай вершина x має сталу мітку, одержану на попередньому кроці. Для кожної вершини $v \in P$ з тимчасовою міткою замінити мітки, якщо $v \in \text{См}(x)$:

$$l(v) = \min\{\, l(v), l(x) + w(x, v)\},$$

де См(x) – множина вершин v з тимчасовими мітками суміжних з x для неорієнтованого графа і для яких існує дуга (x, v) для орієнтованого графа.

3. Перетворення мітки на постійну. Серед усіх вершин з тимчасовими мітками знайти вершину з мінімальною міткою, тобто знайти v^* наступним чином:

$$l(v^*) = \min\{\, l(v) \mid v \in P = V \setminus S\}.$$

Мітка $l(v^*)$ перетворюється на постійну. Покладаємо $S = S \cup \{v^*\}$, $P = V \setminus S$.

4. Правило виходу з алгоритму. Якщо $S \neq V$, то переходимо на крок 2, інакше $l(v^*)$ – довжина мінімального шляху з вершини a у вершину v.

Зауваження. Якщо $l(v) = \infty$ по закінченню роботи алгоритму, то шляху з вершини a у вершину v на графі не існує, тобто v не досяжна з a.

Шлях від вершини a до вершини v відновлюється за відомими мітками вершин, отриманими за допомогою алгоритму Дейкстри, крок за кроком від вершини v до повернення у вершину a.

Приклад 5.2. Для графа, діаграма якого наведена на рис. 5.3, знайти довжини мінімальних шляхів від вершини v_0 до всіх інших і відновити мінімальний шлях від v_0 до c.

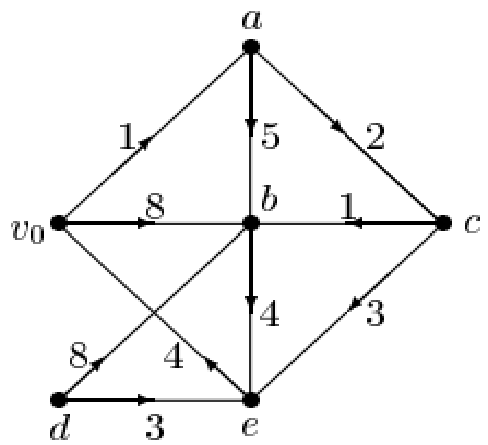


Рисунок 5.3

Розв'язання.

Застосуємо алгоритм Дейкстри. Процес призначення міток вершинам графа на кожному кроці зручно подати у вигляді таблиці 6.1.

Напишемо множину вершин даного графа досяжних з v_0:

$$V = \{v_0, a, b, c, e\}.$$

Вершина d не досяжна з вершини v_0. Отже, не існує шляху з v_0 в d і відстань між ними вважають рівною ∞.

Крок 0. Початкова вершина v_0 отримує постійну мітку 0, всі інші вершини будуть мати тимчасові мітки ∞:

$$l(v_0) := 0 - \text{стала мітка};\ \ l(a) = l(b) = l(c) = l(d) = l(e) = \infty.$$

Ці значення занесемо в рядок таблиці, що відповідає кроку 0.

Крок 1. См$(v_0) = \{a, b\}$, для вершин a, b з тимчасовими мітками, для яких існує дуга з вершини v_0 з постійною міткою, оновлюємо мітки:

$l(a) = \min\{\, l(a), l(v_0) + w(v_0, a)\} = \min\{\infty, 0 + 1\} = 1;$
$l(b) = \min\{\, l(b), l(v_0) + w(v_0, b)\} = \min\{\infty, 0 + 8\} = 8;$
$\min\{l(a), l(b),\ l(c), l(d), l(e)\} = \min\{\mathbf{1}, \mathbf{8}, \infty, \infty, \infty\,\} = \mathbf{1} = l(a)$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці, що відповідає кроку 1.

Крок 2. См$(a) = \{b, c\}$, для вершин b, c з тимчасовими мітками, для яких існує дуга з вершини a з постійною міткою, оновлюємо мітки:

$l(b) = \min\{\, l(b), l(a) + w(a, b)\} = \min\{\mathbf{8}, 1 + 5\} = \min\{8,6\} = \mathbf{6};$
$l(c) = \min\{\, l(c), l(a) + w(a, c)\} = \min\{\infty, 1 + 2\} = \min\{\infty, 3\} = \mathbf{3};$
$\min\{\, l(b),\ l(c), l(d), l(e)\} = \min\{\mathbf{6}, \mathbf{3}, \infty, \infty\} = \mathbf{3} = l(c)$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці, що відповідає кроку 2.

Крок 3. См$(c) = \{b, e\}$, для вершин b, e з тимчасовими мітками, для яких існує дуга з вершини a з постійною міткою, оновлюємо мітки:

$l(b) = \min\{\, l(b), l(c) + w(c, b)\} = \min\{6, 3 + 1\} = \min\{\mathbf{6}, 4\} = \mathbf{4};$
$l(e) = \min\{\, l(e), l(c) + w(c, e)\} = \min\{\infty, 3 + 3\} = \min\{\infty, 6\} = \mathbf{6};$
$\min\{\, l(b), l(d), l(e)\} = \min\{\mathbf{4}, \infty, \mathbf{6}\} = \mathbf{4} = l(b)$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці, що відповідає кроку 3.

Крок 4. См$(b) = \{e\}$, для вершини e з тимчасовою міткою, для якої існує дуга з вершини b з постійною міткою, оновлюємо мітки:

$l(e) = \min\{\, l(e), l(b) + w(b, e)\} = \min\{6, \mathbf{4} + 4\} = \min\{6,8\} = \mathbf{6}$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці, що відповідає кроку 4.

Таблиця 6.1

Кроки	v_0	a	b	c	d	e	Множини S, $V\backslash S$
0	0	∞	∞	∞	∞	∞	$S = \{v_0\}$, $P = V\backslash S = \{a, b, c, d, e\}$
1	0	1	8	∞	∞	∞	$S = S \cup \{a\} = \{v_0, a\}$, $P = V\backslash S = \{b, c, d, e\}$
2	0	1	6	3	∞	∞	$S = S \cup \{c\} = \{v_0, a, c\}$, $P = V\backslash S = \{b, d, e\}$
3	0	1	4	3	∞	6	$S = S \cup \{b\} = \{v_0, a, c, b\}$, $P = V\backslash S = \{\, d, e\}$
4	0	1	4	3	∞	6	$S = S \cup \{e\} = \{v_0, a, c, b, e\}$, $P = V\backslash S = \emptyset$

Довжини мінімальних шляхів від вершини v_0 до інших вершин, досяжних з вершини v_0, виділені в таблиці червоним кольором.

Мінімальний шлях від вершини v_0 до вершини e наступний: v_0, a, c, e, він має довжину 6.

Приклад 5.3. Розглянемо схему автомобільних доріг між населеними пунктами. Її математичною моделлю є граф, зображений на рис. 5.4. Вага кожного ребра дорівнює кількості годин, що витрачається в середньому на шлях між відповідними населеними пунктами. Обчислити мінімальний час, витрачений на маршрут від пункту 1 до всіх інших і відновити мінімальний маршрут від пункту 1 до пункту 7.

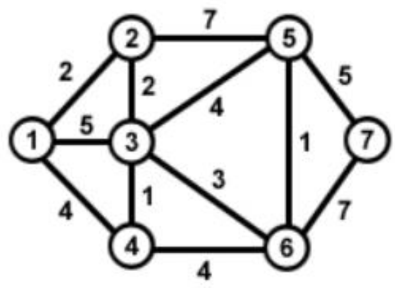


Рисунок 5.4

Розв'язання.

Застосуємо алгоритм Дейкстри.

Напишемо множину вершин даного графа досяжних з 1:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Крок 0. Початкова вершина 1 отримує постійну мітку 0, всі інші вершини будуть мати тимчасові мітки ∞:

$$l(1) := 0 - \text{стала мітка};\ \ l(2) = l(3) = l(4) = l(5) = l(6) = l(7) = \infty.$$

Ці значення занесемо в рядок таблиці 6.2, що відповідає кроку 0.

Крок 1. $\text{См}(1) = \{2, 3, 4\}$, для вершин $2, 3, 4$ з тимчасовими мітками оновлюємо мітки:

$l(2) = \min\{ l(2), l(1) + w(1,2)\} = \min\{\infty, 0 + 2\} = 2;$
$l(3) = \min\{ l(3), l(1) + w(1,3)\} = \min\{\infty, 0 + 5\} = 5;$
$l(4) = \min\{ l(4), l(1) + w(1,4)\} = \min\{\infty, 0 + 4\} = 4;$
$\min\{l(2), l(3),\ l(4), l(5), l(6),\ l(7)\} = \min\{\mathbf{2}, \mathbf{5}, \mathbf{4}, \infty, \infty, \infty\} = \mathbf{2} = l(2)$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці 6.2, що відповідає кроку 1.

Крок 2. $\text{См}(2) = \{3,5\}$, для вершин $3, 5$ з тимчасовими мітками оновлюємо мітки:

$l(3) = \min\{ l(3), l(2) + w(2,3)\} = \min\{\mathbf{5}, 2 + 2\} = \min\{5, 4\} = \mathbf{4};$
$l(5) = \min\{ l(5), l(2) + w(2\ ,5)\} = \min\{\infty, 2 + 7\} = \min\{\infty, 9\} = \mathbf{9};$
$\min\{ l(3), l(4), l(5), l(6), l(7)\} = \min\{\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{9}, \infty, \infty\} = \mathbf{4} = l(3)$ – постійна мітка.

Вершини 3 і 4 мають однакові мітки $l(3) = l(4) = 4$, обираємо будь-яку з цих вершин. Ми обрали вершину 3.

Ці значення занесемо в рядок таблиці 6.2, що відповідає кроку 2.

Крок 3. $\text{См}(3) = \{4, 5, 6\}$, для вершин $4, 5, 6$ з тимчасовими мітками, оновлюємо мітки:

$l(4) = \min\{\, l(4), l(3) + w(3,4)\} = \min\{4, 4 + 1\} = \min\{\mathbf{4}, 5\} = \mathbf{4}$;
$l(5) = \min\{\, l(5), l(3) + w(3,5)\} = \min\{9, 4 + 4\} = \min\{9, 8\} = \mathbf{8}$;
$l(6) = \min\{\, l(6), l(3) + w(3,6)\} = \min\{\infty, 4 + 3\} = \min\{\infty, 7\} = \mathbf{7}$;
$\min\{l(4), l(5), l(6), l(7)\} = \min\{\mathbf{4}, \mathbf{8}, \mathbf{7}\ , \infty\} = \mathbf{4} = l(4)$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці 6.2, що відповідає кроку 3.

Крок 4. $\text{См}(4) = \{6\}$, для вершини 6 з тимчасовою міткою оновлюємо мітки:

$l(6) = \min\{\, l(6), l(4) + w(4{,}6)\} = \min\{7, \mathbf{4} + 4\} = \min\{7, 8\} = \mathbf{7}$;
$\min\{l(5), l(6), l(7)\} = \min\{\, \mathbf{8}, \mathbf{7}\ , \infty\} = \mathbf{7} = l(6)$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці 6.2, що відповідає кроку 4.

Крок 5. $\text{См}(6) = \{5{,}7\}$, для вершин 5,7 з тимчасовими мітками оновлюємо мітки:

$l(5) = \min\{\, l(5), l(6) + w(6,5)\} = \min\{8, \mathbf{7} + 1\} = \min\{8, 8\} = \mathbf{8}$;
$l(7) = \min\{\, l(7), l(6) + w(6{,}7)\} = \min\{\infty, \mathbf{7} + 7\} = \min\{\infty, 14\} = \mathbf{14}$;
$\min\{l(5), l(7)\} = \min\{\, \mathbf{8}, \mathbf{14}\} = \mathbf{8} = l(5)$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці 6.2, що відповідає кроку 5.

Крок 6. $\text{См}(5) = \{7\}$, для вершини 7 з тимчасовою міткою оновлюємо мітки:

$l(7) = \min\{\, l(7), l(5) + w(5,7)\} = \min\{14, \mathbf{8} + 5\} = \min\{14, 13\} = \mathbf{13}$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці 6.2, що відповідає кроку 6.

Виконання алгоритму представимо в таблиці 6.2.

Таблиця 6.2

кроки	1	2	3	4	5	6	7	Множини S, $V \backslash S$
0	**0**	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$S = \{1\}$, $P = V \backslash S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
1	0	**2**	5	4	∞	∞	∞	$S = S \cup \{2\} = \{1, 2\}$, $P = V \backslash S = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
2	0	2	**4**	4	9	∞	∞	$S = S \cup \{3\} = \{1, 2, 3\}$, $P = V \backslash S = \{4, 5, 6{,}7\}$
3	0	2	4	**4**	8	7	∞	$S = S \cup \{4\} = \{1, 2, 3, 4\}$, $P = V \backslash S = \{5, 6{,}7\}$
4	0	2	4	4	8	**7**	∞	$S = S \cup \{6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $P = V \backslash S = \{5{,}7\}$

5	0	3	4	4	**8**	7	14	$S = S \cup \{5\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 5\}$, $P = V \backslash S = \{7\}$
6	0	2	4	4	8	7	**13**	$S = S \cup \{7\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 5, 7\}$, $P = V \backslash S = \emptyset$

Мінімальний час від пункту 1 до інших пунктів виділені в таблиці червоним кольором.

Мінімальний шлях з вершини 1 до вершини 7 наступний: $1, 2, 3, 4, 6, 5, 7$, на нього витрачається час, рівний 13 годинам.

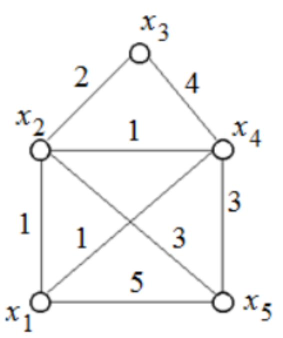
Контрольні запитання.

1. Який граф називається зваженим?
2. Що називають вагою або довжиною ребра у зваженому графі?
3. Що називають довжиною (або вартістю, або вагою) маршруту між двома вершинами графа?
4. Що називають відстанню між двома вершинами графа?
5. Що називають матрицею ваг графа?
6. Для якого класу задач застосовують алгоритм Дейкстри?
7. Наведіть основні етапи роботи алгоритму Дейкстри.

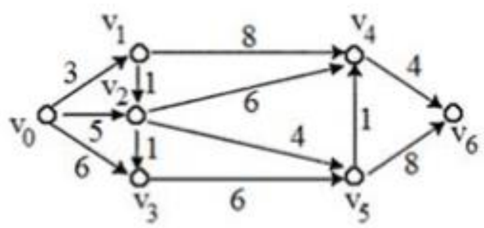
Задачі для самостійного розв'язування

1. Який із наведених графів є зваженим?

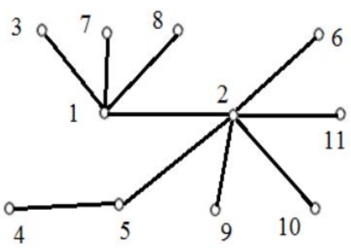
2. Для графа, заданого діаграмою, записати матрицю ваг.



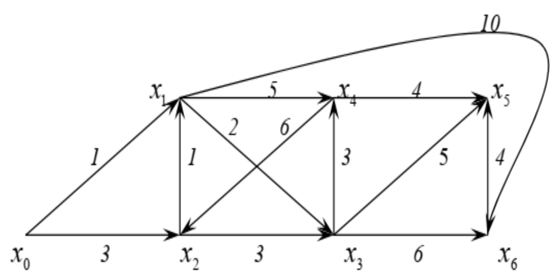
а)



б)



а)



б)

6. Потоки у транспортній мережі

6.1. Основні поняття

Розглядатимемо скінчені зважені орієнтовані графи.

Вершину орграфа $\vec{G}$ з нульовим півстепенем заходу, тобто з цієї вершини тільки виходять дуги, називають *джерелом* і позначають s.

Вершину орграфа $\vec{G}$ з нульовим півстепенем виходу, тобто в цю вершину тільки входять дуги, називають *стоком* і позначають t.

Пропускною здатністю дуги $e = (i, j)$ назвемо будь-яке невідємне число $c(e)$ або $c(i, j)$, що їй приписується, тобто те число, що ми раніше називали вагою ребра.

Транспортною мережою (або *мережою*) $N = (V,\ E)$ називають зв'язний зважений орієнтований граф, що не містить петель і задовольняє наступним умовам:

1) існує тільки одне джерело s;

2) існує тільки один сток t;

3) кожна дуга $e = (i, j)$ має пропускну здатність $c(e)$ або $c(i, j)$. Якщо не існує дуги e, орієнтованої з i в j, то довизначаємо $c(i, j) = 0$.

Транспортна мережа може слугувати моделлю мережі перевезення вантажу з центра виробництва до споживача через шляхи, що їх повязують. Пропускна спроможність дуги може розглядатися як максимальна швидкість, з якою вантаж транспортується вздовж дуги.

Потоком f в транспортній мережі $N = (V,\ E)$ є функція, яка ставить у відповідність кожному ребру $e = (i, j)$ невідємне дійсне число $f(e) = f(i, j)$, що задовольняє умовам:

$$1)\ 0 \le f(i, j) \le c(i, j) \quad \forall\, i, j\ \in V; \tag{6.1}$$

$$2)\ \sum_{\{j|(i,j)\in E\}} f(i, j) = \sum_{\{i|(j,i)\in E\}} f(j, i) \qquad \forall\, i \ne s, t, j \ne s, t, \text{де } i, j \in V. \tag{6.2}$$

Функція $f(e)$ може інтерпритуватися як кількість речовини (або швидкість з якою відбувається перевезення вантажу і т.п.), що проходить по дузі $e = (i, j)$ з i в j (за одиницю часу). Умову (6.1) називають *обмеженням по пропускній здатності*. Вона вимагає, щоб кількість речовини $f(e)$ не перевищувала пропускну здатність $c(e)$. Умову (6.2) називають *умовою збереження*. Згідно цієї умови для будь-якої вершини $i \ne s, t$ даної мережі кількість речовини, що надходить в i, дорівнює кількості речовини, що виходить з i. Це означає, що речовина не може накопичуватися в жодній вершині транспортної мережі за винятком джерела і стоку.

Величину потоку f у мережі N позначають $\mathrm{val}(f)$ і визначають виразом

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{\{j|(s,j)\in E\}} f(s,j). \tag{6.3}$$

Очевидно, що

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{\{j|(s,j)\in E\}} f(s,j) = \sum_{\{j|(j,t)\in E\}} f(j,t)$$

Введемо поняття розрізу орієнтованого графа $\vec{G} = (V,\ E)$. Розглянемо дві підмножини S і T множини вершин V орграфа $\vec{G}$, що не перетинаються, тобто $S\subset V, T\subset V,\ S \cap T = \emptyset$ і $S \cup T = V$. Розіб'ємо множину вершин V на дві підмножини S і T так, щоб $s \in\ S,\ t \in T$. Під $\langle s, t\rangle$-*розрізом* орграфа $\vec{G}$ розуміють множину дуг з E, що з'єднують S і T.

Розрізом $\langle S, \overline{S}\rangle$ орграфа $\vec{G}$ називають розріз, всі дуги якого або виходять з S або заходять в S. Розріз $\langle S, \overline{S}\rangle$ в транспортної мережі $N = (V,\ E)$ розділяє джерело s і сток t, якщо $s \in S$, а $t \in \overline{S}$. Пропускна здатність $c\left(S, \overline{S}\right)$ розрізу $\langle S, \overline{S}\rangle$ визначається виразом

$$c\left(S, \overline{S}\right) = \sum_{\substack{i\in S \\ j\in \overline{S}}} c(i,j). \tag{6.4}$$

Зауважимо, що пропускна здатність ребер, які орієнтовані з $\overline{S}$ в S, не збільшує пропускну здатність розрізу $\langle S, \overline{S}\rangle$. Позначимо через $f\left(S, \overline{S}\right)$ суму потоків по ребрах, орієнтованих з S в $\overline{S}$. Величина $f\left(\overline{S}, S\right)$ визначається аналогічно.

Приклад 6.1. Розглянемо мережу, наведену на рис. 6.1. Біля кожної дуги e наведено пара чисел, перше число – це пропускна здатність $c(e)$, друге число – це потік $f(e)$. Знайти пропускну здатність $\langle S, \overline{S}\rangle$, де $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$; суму потоків по ребрах, орієнтованих з S в $\overline{S}$ і з $\overline{S}$ в S.

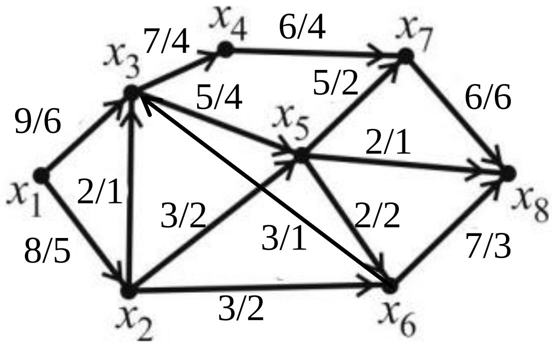


Рисунок 6.1

Розв'язання.

Граф мережі має одне джерело – вершина x_1 і один сток – вершина x_8.

За умовою задачі $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, тоді $\overline{S} = \{x_6, x_7, x_8\}$.

Ребрами орієнтованими з S в $\overline{S}$ є ребра (x_4, x_7), (x_5, x_6), (x_5, x_7), (x_5, x_8). Визначимо пропускну здатність $c\left(S, \overline{S}\right)$:

$$c\left(S, \overline{S}\right) = c(x_4, x_7\ ) + c(x_5, x_6) + c(x_5, x_7) + c(x_5, x_8) = 6 + 2 + 5 + 2 = 15.$$

Ребрами, орієнтованими з $\overline{S}$ в S є ребро (x_6, x_3). Визначимо пропускну здатність $c\left(\overline{S}, S\right)$:

$$c\left(S, \overline{S}\right) = c(x_6, x_3\ ) = 3.$$

Обчислимо суму потоків по ребрах, орієнтованих з S в $\overline{S}$ та з $\overline{S}$ в S:

$$f\left(S, \overline{S}\right) = f(x_4, x_7\ ) + f(x_5, x_6) + f(x_5, x_7) + f(x_5, x_8) = 4 + 2 + 2 + 1 = 9.$$
$$f\left(S, \overline{S}\right) = f(x_6, x_3\ ) = 1.$$

Теорема 6.1. Для будь-якого потоку f і будь-якого $s - t$-розрізу $\langle S, \overline{S}\rangle$ в транспортній мережі $N = (V,\ E)$ виконується наступна рівність

$$\mathrm{val}(f) = f\left(S, \overline{S}\right) - f\left(\overline{S}, S\right). \qquad (6.5)$$

Наслідок 1. Для будь-якого потоку f і будь-якого $s - t$-розрізу $\langle S, \overline{S}\rangle$ в транспортній мережі $N = (V,\ E)$ виконується наступна нерівність

$$\mathrm{val}(f) \le c\left(S, \overline{S}\right). \qquad (6.5)$$

Наслідок 2. Нехай f – потік, а $\langle S, \overline{S}\rangle$ такий $s - t$-розріз, що $\mathrm{val}(f) = c(S, \overline{S})$. Тоді f – максимальний потік, а $\langle S, \overline{S}\rangle$ мінімальний $s - t$-розріз.

Теорема 6.2 (теорема Форда і Фалкерсона)**.** Максимальний потік в транспортній мережі дорівнює пропускній здатності мінімального розрізу.

Теорема 6.3. Потік f в транспортній мережі $N = (V,\ E)$ масимальний тоді і тільки тоді, коли в мережі не має збільшуваного ланцюгу.

Ребро $e = (i, j)$ транспортної мережі називають f-*насиченим*, якщо $f(i, j) = c(i, j)$ і f-*ненасиченим* в противному випадку.

Ребро $e = (i, j)$ транспортної мережі називають f-*додатнім*, якщо $f(i, j) > 0$ і f-*нульовим*, якщо $f(i, j) = 0$.

6.2. Алгоритм пошуку максимального потоку в транспортній мережі (алгоритм Форда-Фалкерсона)

Розглянемо ланцюг P в транспортній мережі $N = (V,\ E)$ з джерела s в будь-яку вершину $v \in V/\{s\}$ (рис.6.2). Не обов’язково, щоб P був орієнтованим.

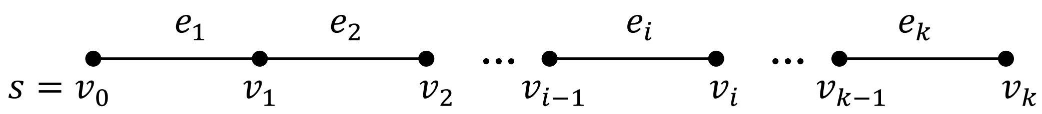


Рисунок 6.2

Ребро e_i ланцюга P називається *прямим*, якщо воно орієнтоване з v_{i-1} в v_i. Інакше e_i називається *оберненим ребром* ланцюга P. Нехай для кожного ребра e_i ланцюга P

$$\varepsilon_i(P) = \begin{cases} c(e_i) - f(e_i), \text{якщо } e_i - \text{пряме ребро,} \\ f(e_i), \quad \text{якщо } e_i - \text{обернене ребро.} \end{cases}$$

Поставимо у відповідність ланцюгу P невідємне число $\varepsilon(P)$, що визначається виразом

$$\varepsilon(P) = \min_i\{\varepsilon_i(P)\}.$$

Ланцюг називають f*-насиченим*, якщо всі його прямі ребра є f-насиченими, а всі обернені ребра – f-додатніми.

$s - t$-ланцюг P називається f*-доповняльним ланцюгом*, якщо P є f-ненасиченим.

Максимальний потік в транспортній мережі будемо визначати за алгоритмом Форда і Фалкерсона. Він базується на ідеї теореми 6.3 і містить два етапи.

На першому етапі будемо ставити у відповідність вершинам мітки $(u^{\pm}, \Delta_v)$, де $u^{\pm}$ вказує на вершину u з якої вершина v одержала мітку, «+» пишемо, якщо ребро (u, v) пряме і «–», якщо воно обернене.

Припустимо, що u має мітку, а v ні. Нехай e – ребро, що повязує u і v.

Пряме розмічування. Якщо $e = (u, v)$, то пряме розмічування v з u вздовж ребра e можливе при $c(e) > f(e)$. Якщо здійснили це розмічування, то v отримає мітку (u^+, Δ_v), де $\Delta_v \min\{\Delta_u, c(e) - f(e)\}$.

Обернене розмічування. Якщо $e = (v, u)$, то обернене розмічування v з u вздовж ребра e можливе при $f(e) > 0$. Якщо здійснили це розмічування, то v отримає мітку (u^-, Δ_v), де $\Delta_v \min\{\Delta_u, f(e)\}$.

На першому етапі вершинам ставляться мітки тільки один раз. Цей етап завершується, коли

1) стік t отримає мітку

або

2) стік t не має мітку і жодну вершину більше не можна розмітити.

Якщо стік t отримає мітку на першому етапі, то існує f-доповняльний ланцюг P і $\varepsilon(P) = \Delta_t$. На другому етапі ланцюг P простежується в зворотному напрямі за допомогою символів u^- і визначається змінений на основі P поток $\hat{f}$. Далі перший етап повторюється по відношенню до нового потоку $\hat{f}$. Якщо перший етап завершується, не виконав розмітку стоку t, то це означає, що f-доповняльного ланцюга не існує, і отже існуючий потік максимальний.

Опишемо роботу алгоритму Форда-Фалкерсона знаходження максимального потоку в транспортній мережі:

1. Вибрати будь-який початковий потік f від джерела s до стоку t в транспортній мережі $N = (V,\ E)$. Можемо покласти $f(e) = 0$ для кожного ребра $e \in E$.

2. (Розпочинається перший етап.)Призначити s мітку $(-,\infty)$.

3. Якщо існує непомічена вершина, яку можна помітити з допомогою прямого або оберненого розмічування, то обрати одну таку вершину v і призначити їй мітку, а далі перейти до кроку 4. Інакше перейти до кроку 7.

4. Якщо $v = t$, то перейти до кроку 5. (Перший етап завершено.) Інакше перейти до кроку 3.

5. (Розпочинається другий етап.) Нехай вершина v має мітку $(u^{\pm}, \Delta_v)$. Тоді виконуємо наступні дії:

5.1) якщо $u^{\pm} = u^{+}$, то покласти $f(u, v) = f(u, v) + \Delta_t$,

5.2) якщо $u^{\pm} = u^{-}$, то покласти $f(v, u) = f(v, u) - \Delta_t$.

6. Якщо $u = s$, то видалити всі мітки (другий етап завершено) і перейти до кроку 2. Інакше покласти $v =\ u$ і перейти до кроку 5.

7. Отриманий потік f масимальний.

Проілюструємо роботу алгоритму Форда-Фалкерсона на прикладі.

Приклад 6.2. Розглянемо транспортну мережу $N = (V,\ E)$, представлену на рис. 6.3. Для кожної дуги e вказана її пропускна здатність $c(e)$. Знайти максимальний потік по мережі за алгоритмом Форда-Фалкерсона.

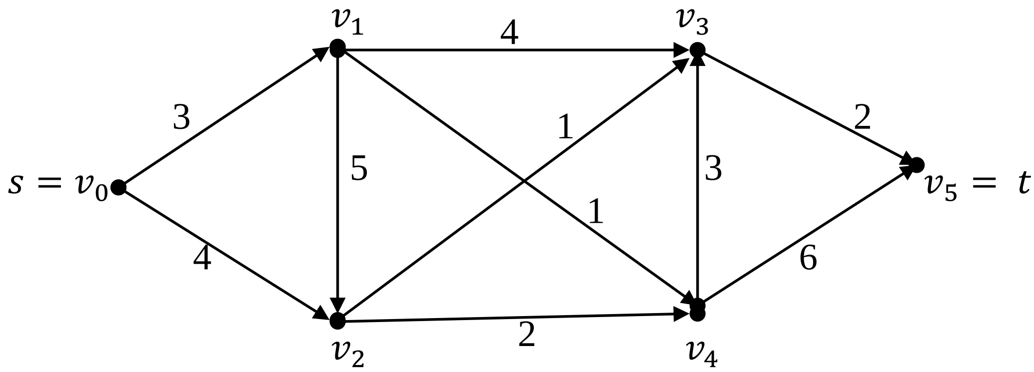


Рисунок 6.3

Розв'язання.

В якості початкового потоку приймаємо $f(e) = 0$ для кожного ребра $e \in E$. Починаємо розмічування з мітки $(-,\infty)$ джерела $s = v_0$. Згідно кроку 3 алгоритму Форда-Фалкерсона розмічуємо вершини v_1, v_3, v_2, v_4 і $v_5 = t$ у вказаному порядку (рис. 6.4).

Першій етап завершено, так як вершина t має мітку.

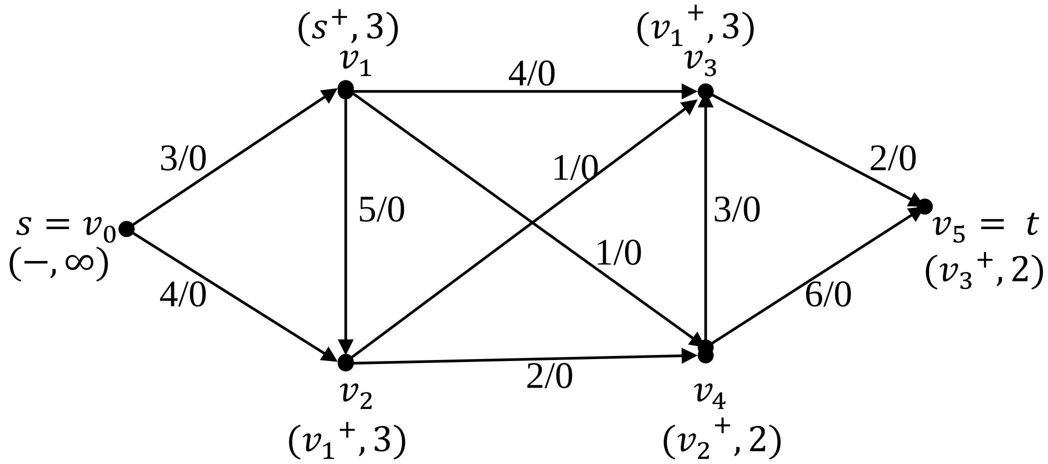
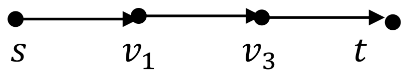


Рисунок 6.4

На другому етапі визначаємо доповняльний ланцюг P і змінений потік f_1 (кроки 3 і 6). Перший символ в мітці t є $v_3{}^+$. Це означає, що у ланцюгу P вершина v_3 передує t. Перший символ в мітці v_3 є $v_1{}^+$, тому вершина v_1 передує v_3 і т.д. Таким чином, маємо наступний доповняльний ланцюг P:



Обрали довільний орієнтований ланцюг $P = s \to v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_4 \to t$ з джерела в сток.

Всі ребра в $P = s \to v_1 \to v_3 \to t$ прямі. Тому для одержання зміненого потоку f_1 збільшуємо потоки по всіх ребрах P на $\Delta_t = 2$. Потік f_1 має величину рівну 2 і зображено на рис. 6.5. Мітки всіх вершин оновлюємо, нові значення вказані на рис. 6.5.

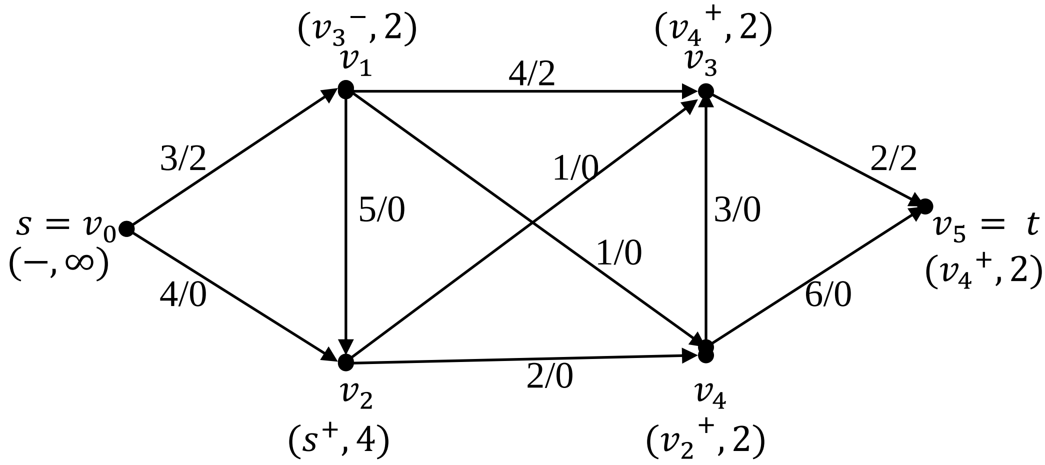


Рисунок 6.5

Доповняльний ланцюг P по відношенню до потоку f_1 складається з вершин s, v_2, v_4, t у вказаному порядку, тобто $P = s \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow t$. Всі ребра в цьому ланцюзі прямі. Потоки в цих ребрах збільшуються на $\Delta_t = 2$. Новий потік f_2 має величину рівну 2 і зображено на рис. 6.6. Мітки всіх вершин оновлюємо, нові значення вказані на рис. 6.6.

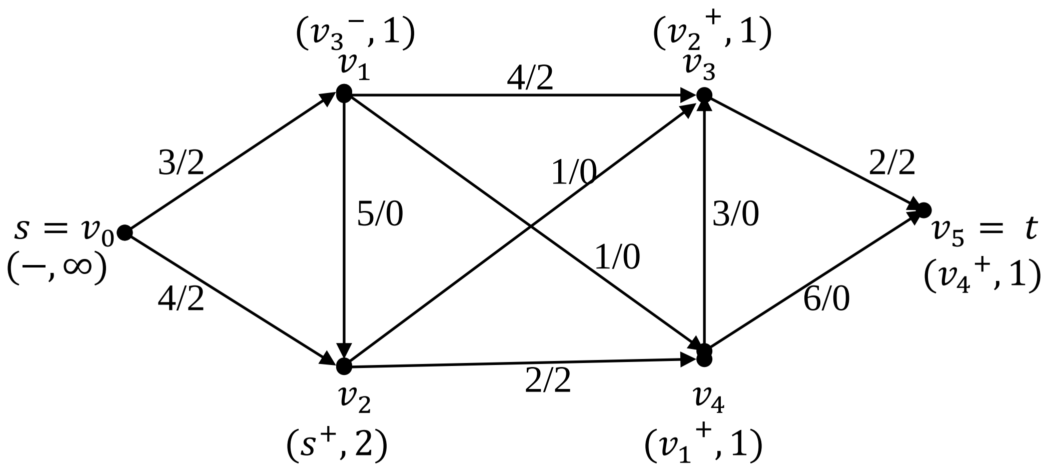


Рисунок 6.6

Доповняльний ланцюг P по відношенню до потоку f_2 складається з вершин s, v_2, v_3, v_1, v_4, t у вказаному порядку. Ребро, що з'єднує вершини v_1 та v_3, є оберненим в цьому ланцюзі, а всі інші ребра – прямі. Збільшуємо потоки в прямих ребрах на 1 і на 1 зменшимо потік в оберненому ребрі. Новий потік f_3 зображено на рис. 6.7. Мітки всіх вершин оновлюємо, нові значення вказані на рис. 6.7. Розмічування вершин завершується в стані наведеному на рис. 6.7, коли вершина t ще не має мітку. Таким чином, не існує доповняльного ланцюга по відношенню до f_3. Тому f_3 – максимальний потік.

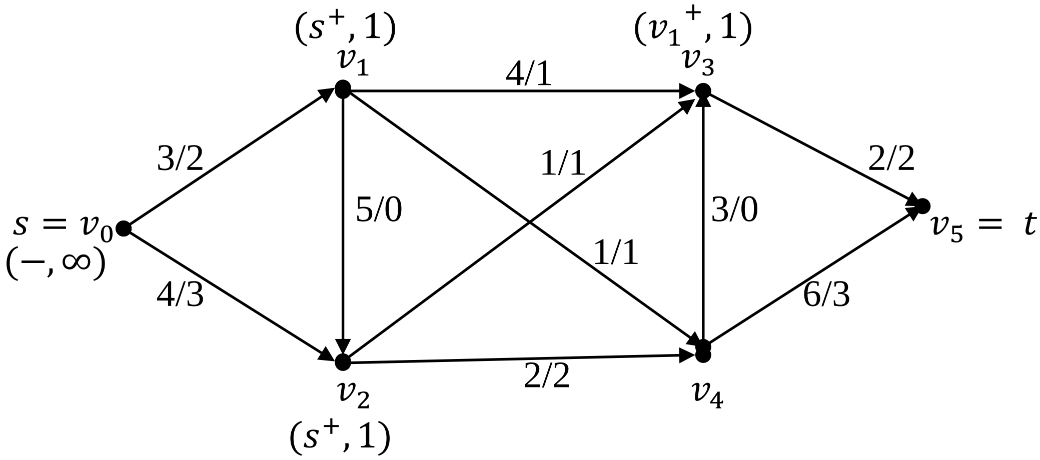


Рисунок 6.7

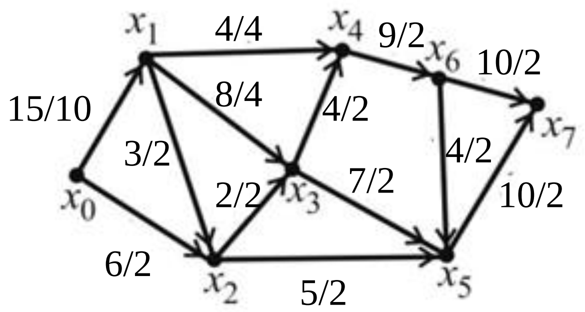
Зауваження. Нехай S – множина вершин на рис. 6.7, що мають мітки, тобто $S = \{s, v_1, v_2, v_3\}$. Розріз $\langle S, \overline{S}\rangle$ є мінімальним і $\mathrm{val}(f_3) = c(S, \overline{S})$

Контрольні запитання

1) Яку вершину орграфа називають джерелом, стоком?
2) Що називається пропускною здатністю дуги?
3) Що називається транспортною мережею?
4) Що називається потоком в транспортній мережі?
5) Якою є умова обмеження по пропускній здатності?
6) Якою є умова збереження по пропускній здатності?
7) Як позначається і визначається величина потоку в транспортній мережі?
8) Що розуміють під $\langle s, t\rangle$-розрізом орграфа $\vec{G} = (V,\ E)$? Відповідь поясніть.
9) Що розуміють під $\langle S, \overline{S}\rangle$ розрізом орграфа $\vec{G} = (V,\ E)$? Відповідь поясніть.
10) Як визначається пропускна здатність $c(S, \overline{S})$ розрізу $\langle S, \overline{S}\rangle$ в транспортній мережі?
11) Як визначається величина $f(\overline{S}, S)$?
12) Як повязано значення $\mathrm{val}(f)$ з величиною розрізу $\langle S, \overline{S}\rangle$?
13) В якому випадку потік в мережі буде максимальний, а розріз мінімальний?
14) Яке ребро траспортної мережі називають насиченим, ненасиченим?
15) Яке ребро траспортної мережі називають додатнім, нульовим?
16) Яке ребро ланцюга P траспортної мережі називають прямим, оберненим?
17) Який ланцюг називають насиченим, доповняльним?
18) Що означає пряме розмічування вершин?
19) Що означає обернене розмічування вершин?
20) Опишіть роботу алгоритму Форда-Фалкерсона.

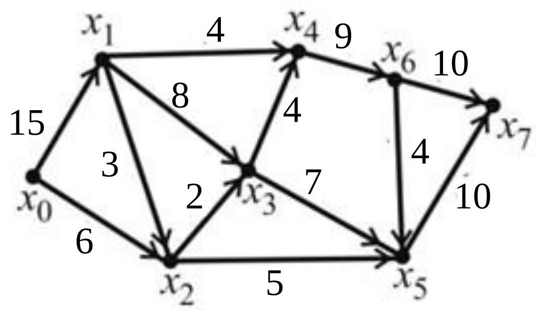
Задачі для самостійного розвязування

1. Для мережі, зображеної на рисунку, знайти пропускну здатність $\langle S, \overline{S} \rangle$, де $S = \{x_0, x_2, x_3, x_4\}$; суму потоків по ребрах, орієнтованих з S в $\overline{S}$ і з $\overline{S}$ в S.



Біля кожної дуги e наведено пара чисел, перше число – це пропускна здатність $c(e)$, друге число – це потік $f(e)$.

2. Для транспортної мережі відомо, що $c(S, \overline{S}) = 12$ і $c(\overline{S}, S) = 5$. Знайти $\text{val}(f)$. Чи буде розріз $\langle S, \overline{S} \rangle$ мінімальний, а знайдений потік f максимальний.
3. Для транспортної мережі з №1 записати насичені ребра, якщо такі існують.
4. Для транспортної мережі з №1 розглянемо ланцюг $P = x_0 \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_5 \to x_6 \to x_7$. Знайти прямі і обернені ребра в P.
5. Розглянемо транспортну мережу $N = (V,\ E)$, представлену на рисунку.



Для кожної дуги e вказана її пропускна здатність $c(e)$. Знайти максимальний потік по мережі за алгоритмом Форда-Фалкерсона.

Індивідуальні завдання

1. *1) Визначити*

   а) порядок та розмір графа;

   б) степені всіх вершин графа.

   2) Задати граф переліком елементів множини вершин і множини ребер.

   3) Знайти

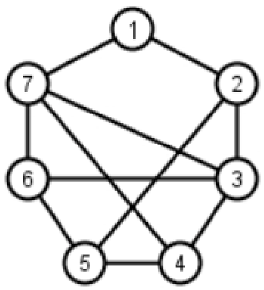
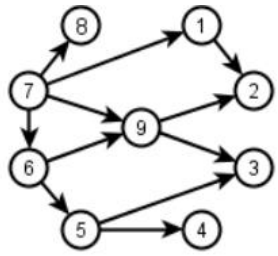
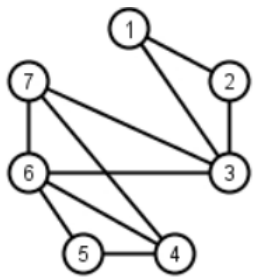
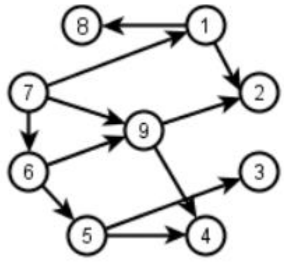
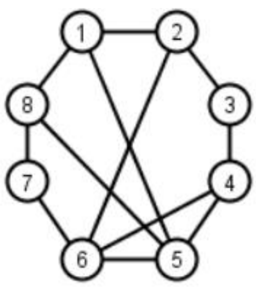
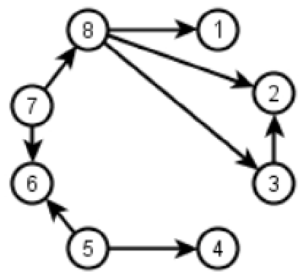
   а) матрицю суміжності та інцидентності для заданого графа;

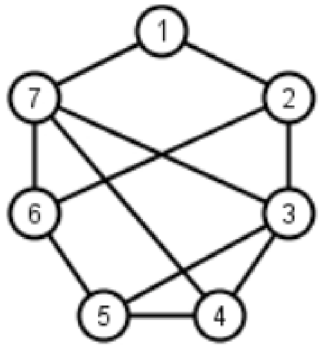
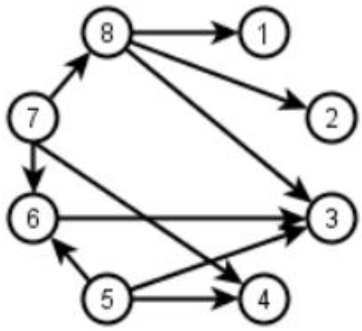
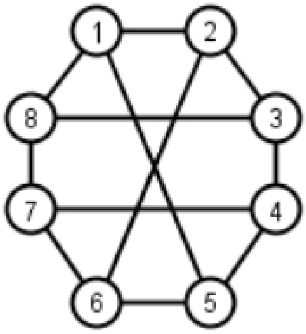
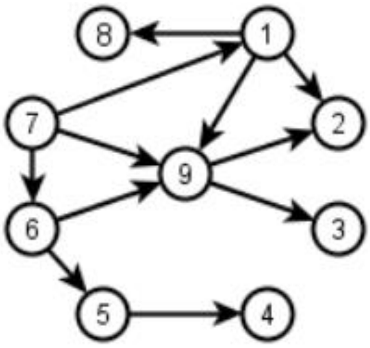
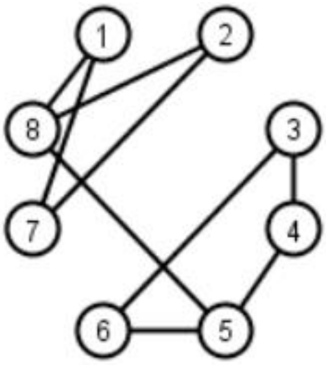
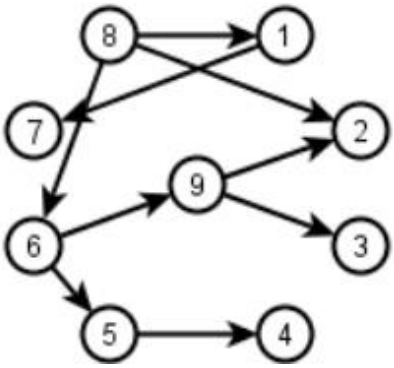
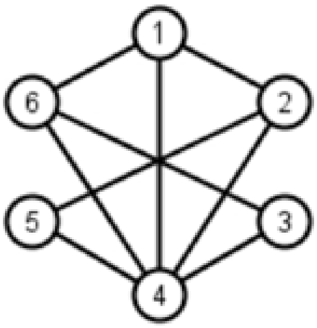
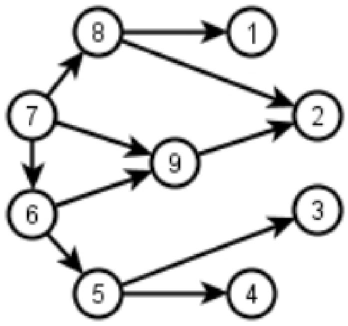
   б) простий ланцюг (шлях для орграфа), що веде з вершини у вершину ;

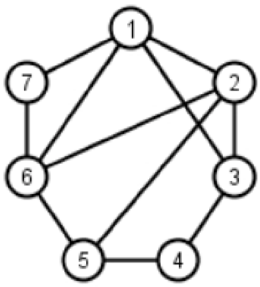
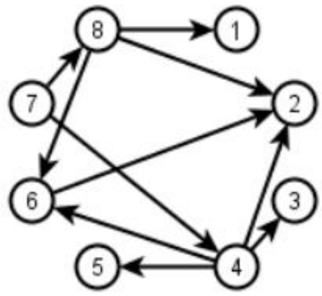
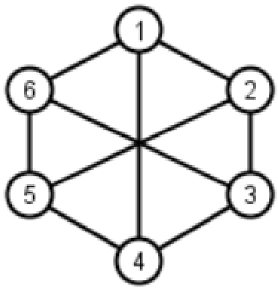
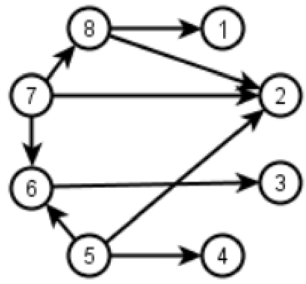
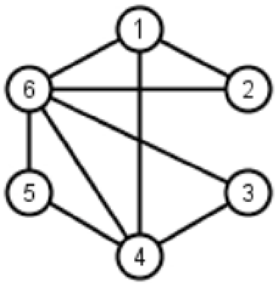
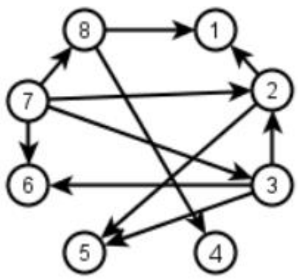
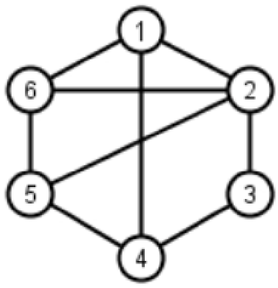
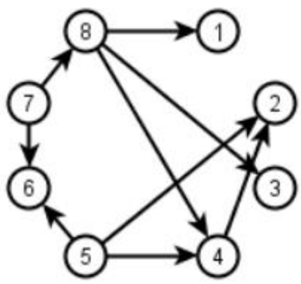
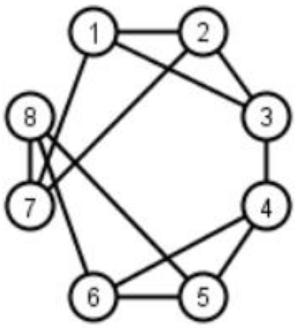
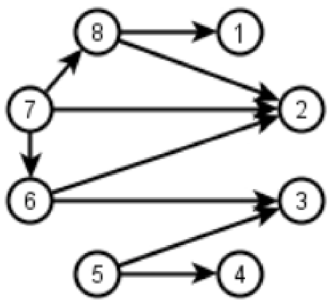
   в) простий цикл (контур для орграфа), якщо він існує;

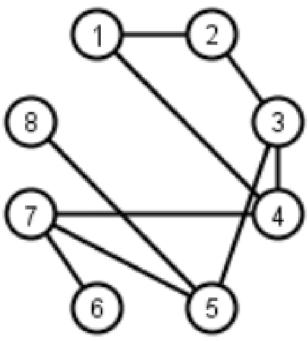
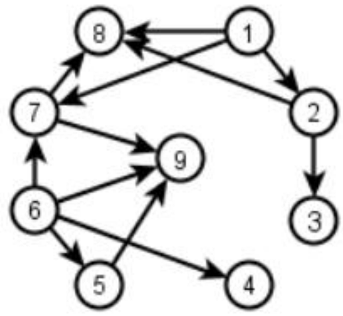
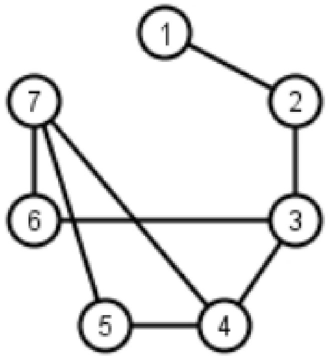
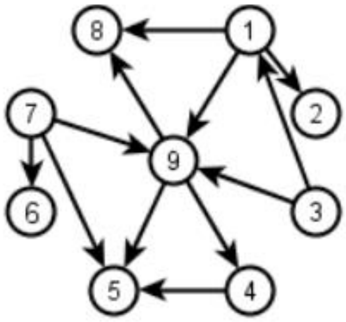
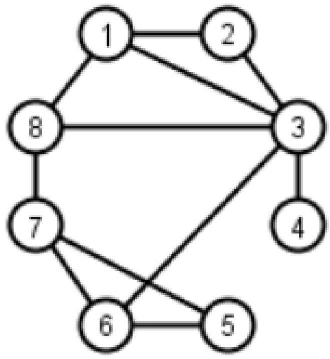
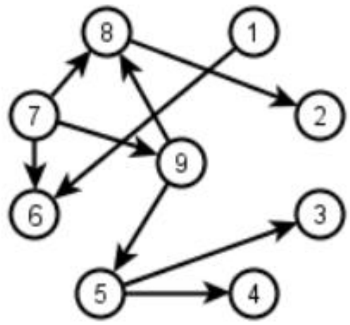
   г) підграф порядку 4;

   д) остовний підграф.

<table>
<tr><th>№</th><th>Граф $G = (V,\ E)$</th><th>№</th><th>Орграф $\vec{G} = (V,\ E)$</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>
</td><td>2.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>
</td><td>4.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>
</td><td>6.</td><td>
</td></tr>
</table>

7.		8.	
9.		10.	
11.		12.	
13.		14.	

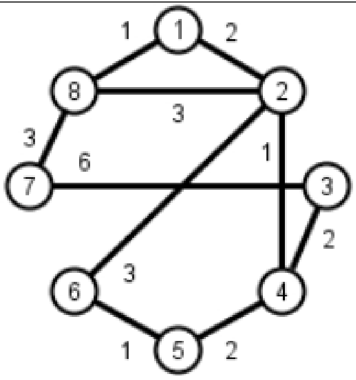
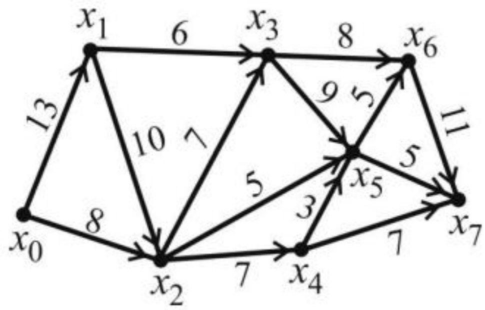
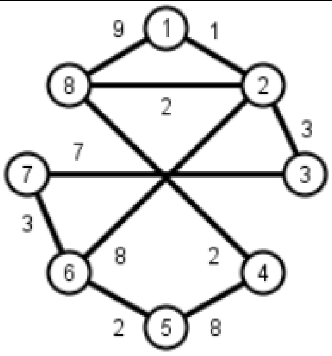
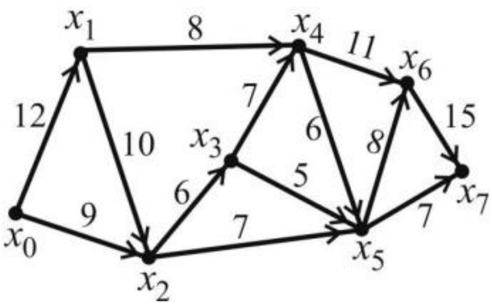
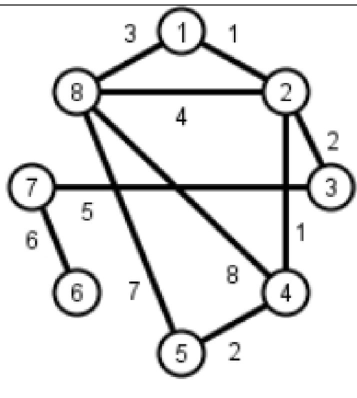
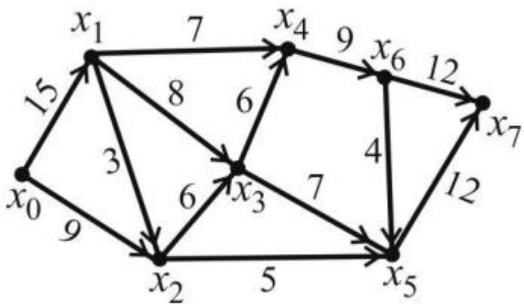
15.		16.	
17.		18.	
19.		20.	
21.		22.	
23.		24.	

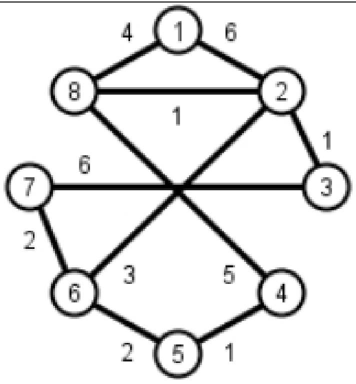
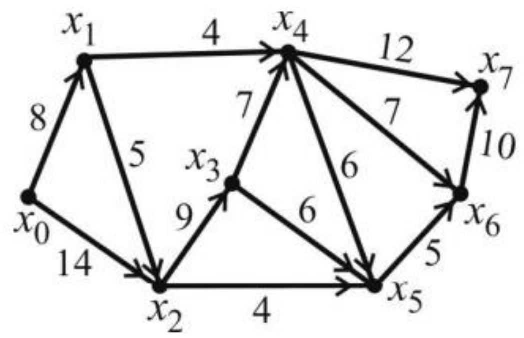
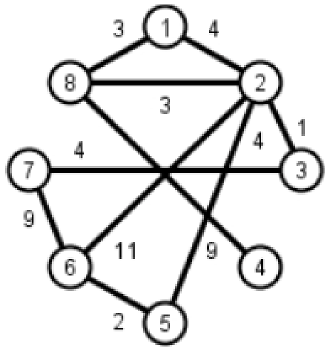
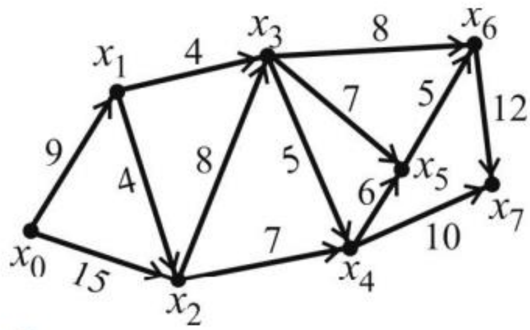
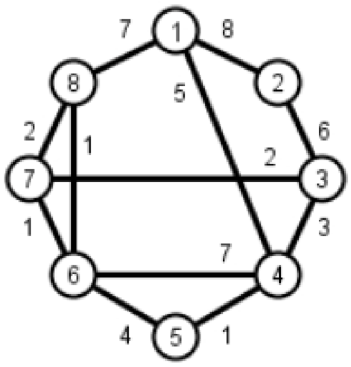
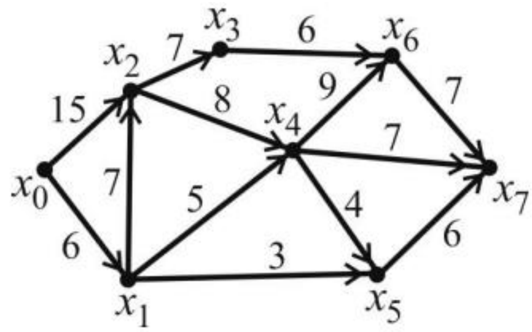
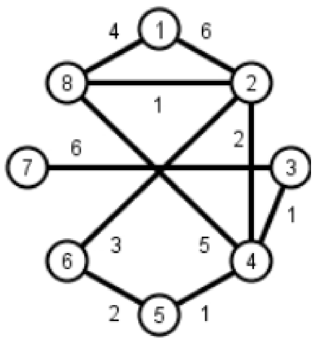
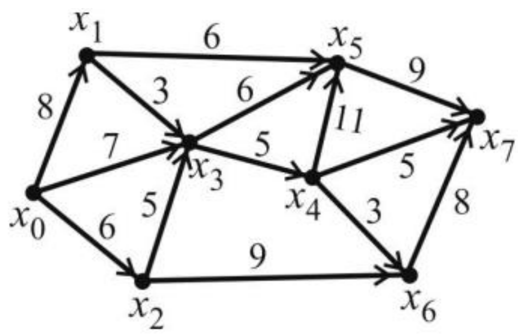
25.		26	
27		28	
29		30	

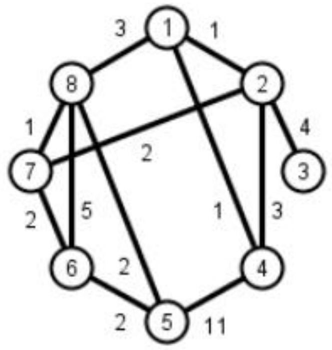
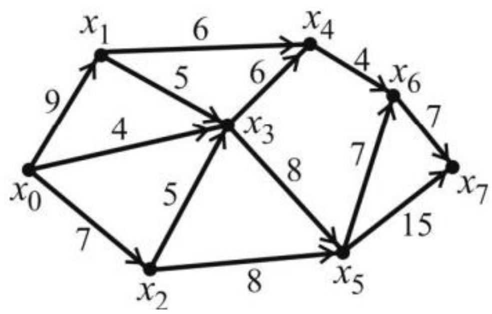
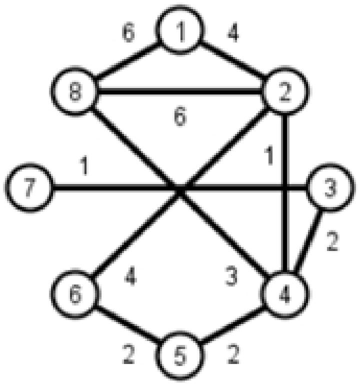
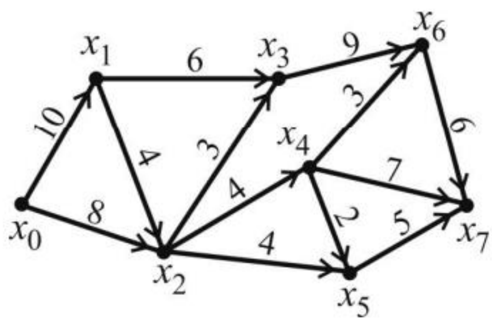
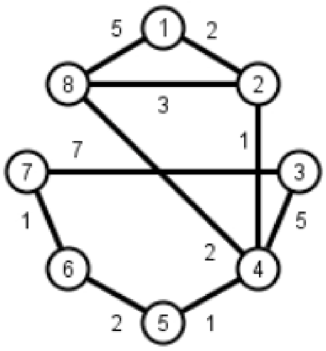
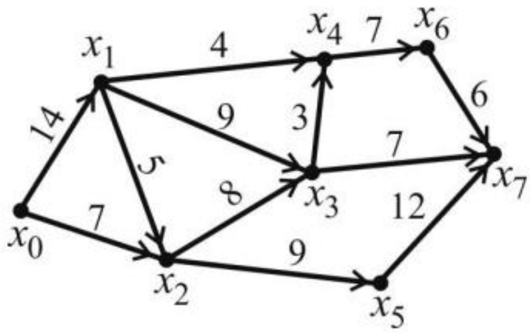
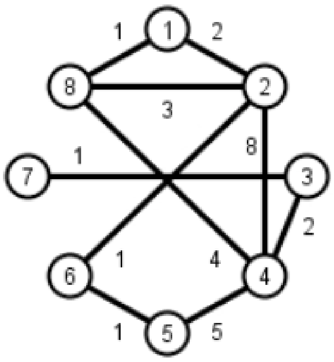
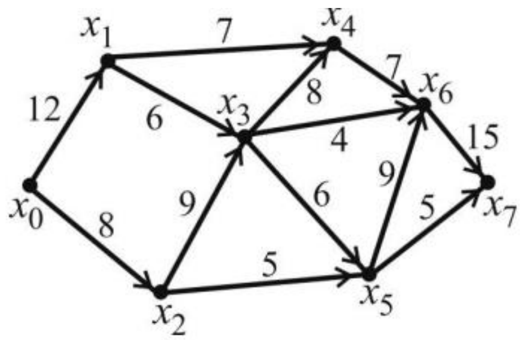
2. *Графи в <u>непарних варіантах</u> є моделями транспортної мережі. Ваги ребер дорівнюють часу, що витрачено на транспортування вантажу між парами вершин, які відповідають населеним пунктам.*
   Задати граф матрицею ваг. Знайти мінімальний по часу маршрут від вершини **1** *до всіх інших вершин графа і від вершини* **1** *до вершини* **5**.

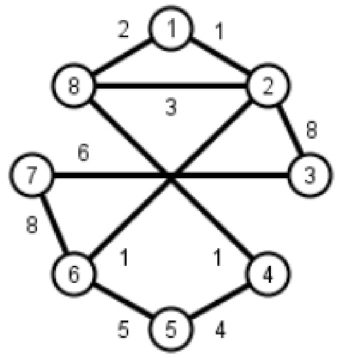
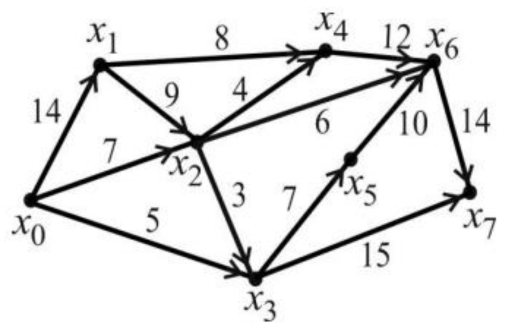
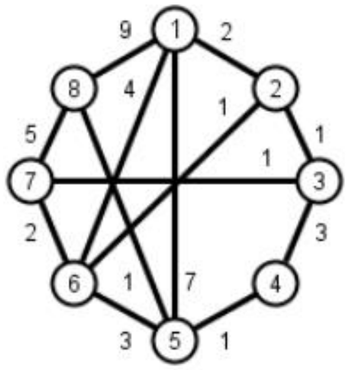
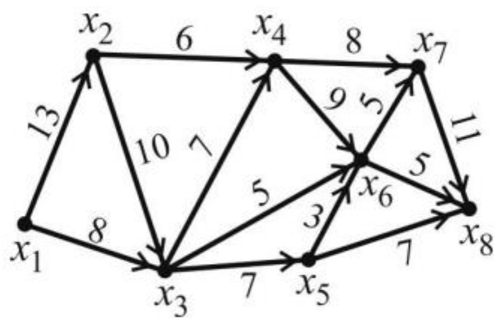
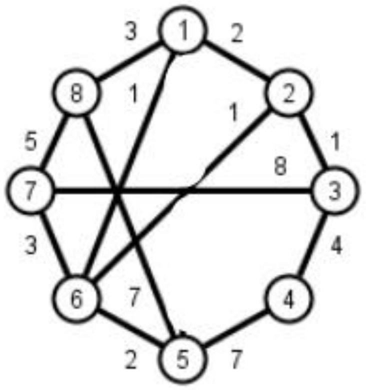
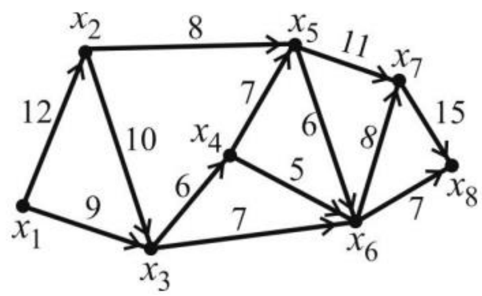
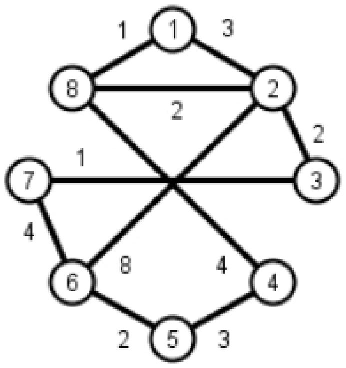
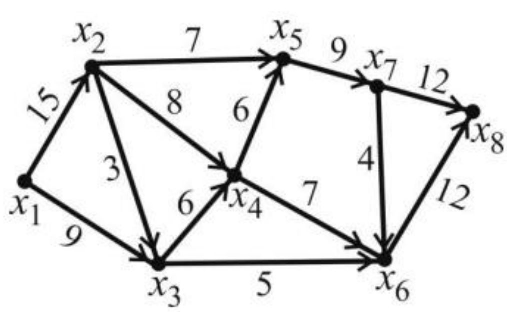
   Орграфи в <u>парних варіантах</u> є моделями трубопроводу. Ваги ребер *дорівнюють вартості, що витрачено на транспортування нафти між парами вершин, які відповідають пунктам розгалуження трубопроводу.*

Задати граф матрицею ваг. Знайти мінімальний по вартості маршрут від вершини x_0 до всіх інших вершин орграфа і від вершини x_0 до вершини x_7.

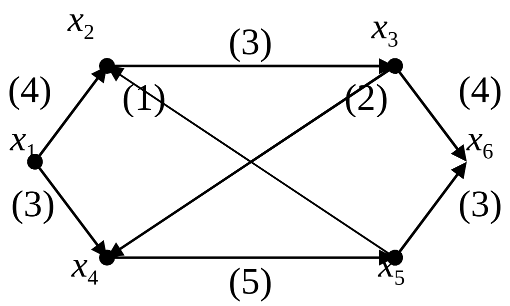
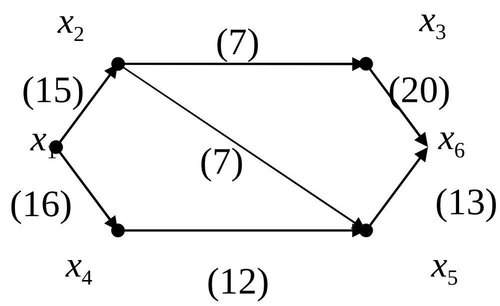
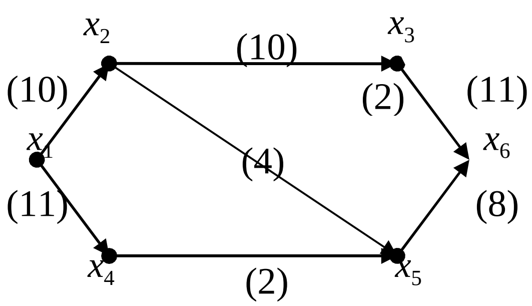
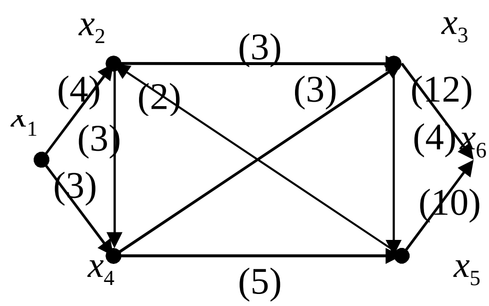
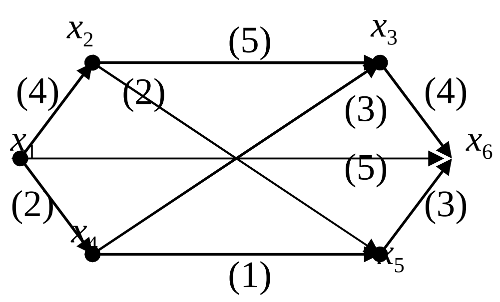
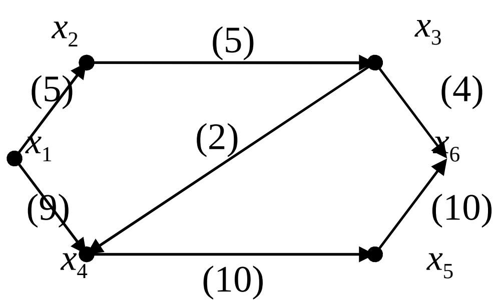
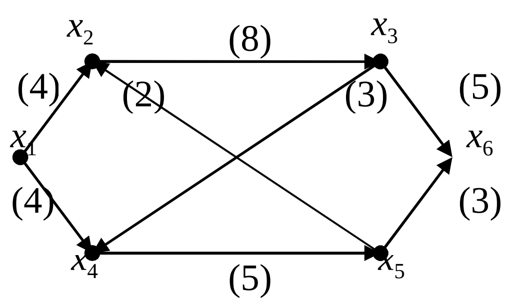
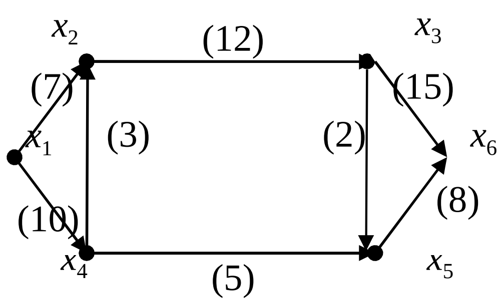
№	Граф $G = (V, E)$	№	Орграф $\vec{G} = (V, E)$
1.		2.	
3.		4.	
5.		6.	

7.		8.	
9.		10.	
11.		12.	
13.		14.	

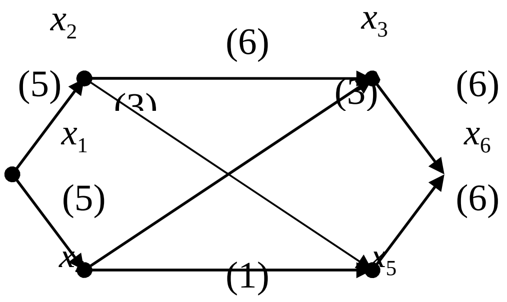
15.		16.	
17.		18.	
19.		20.	
21.		22.	

23.		24.	
25.		26	
27		28	
29		30	

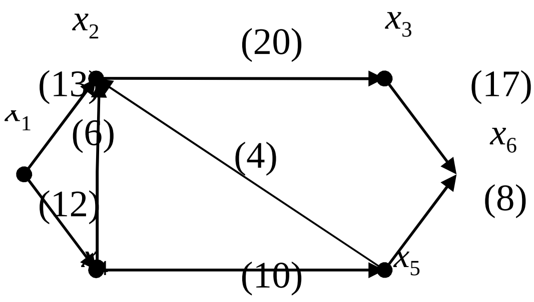
3. *Обчислити повний потік в транспортній мережі G (в дужках вказані допустимі пропускні спроможності дуг).*

№	Завдання	№	Завдання
01		02	
03		04	
05		06	
07		08	

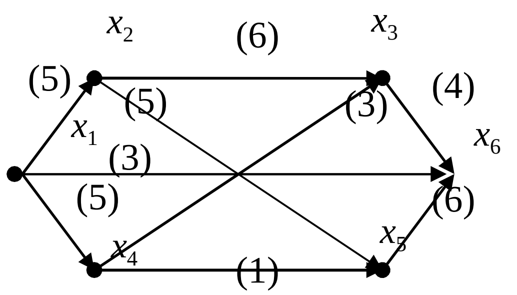
09



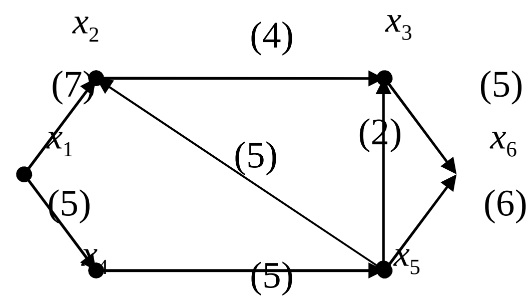
10



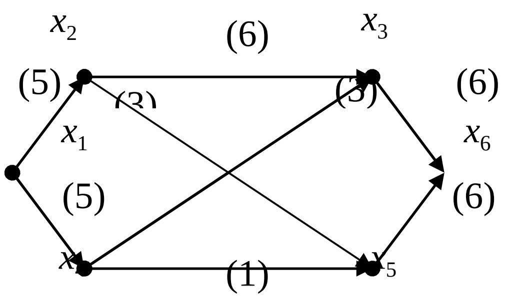
11



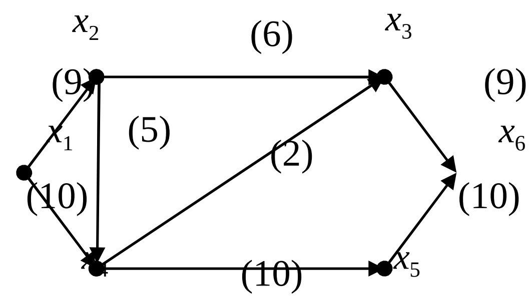
12



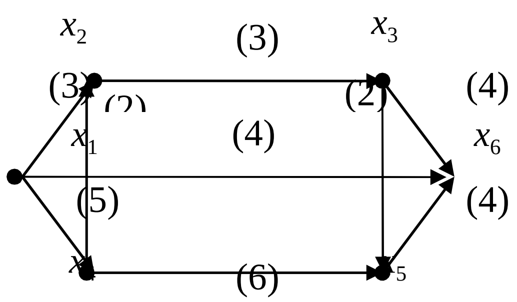
13



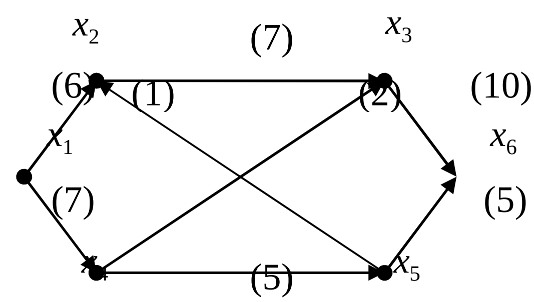
14



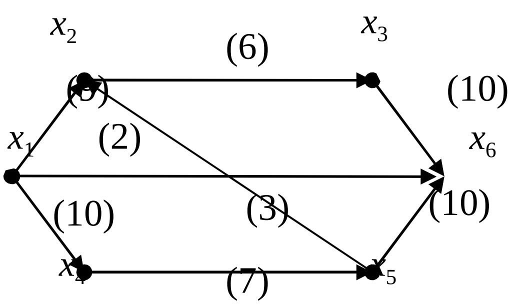
15



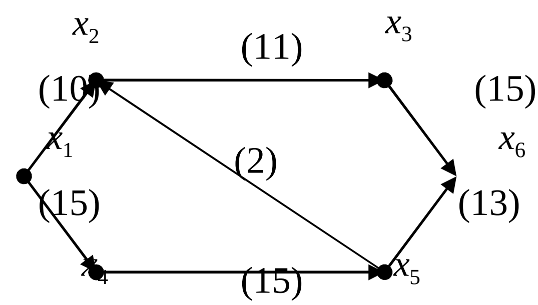
16

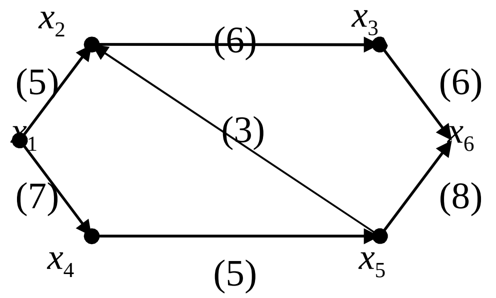
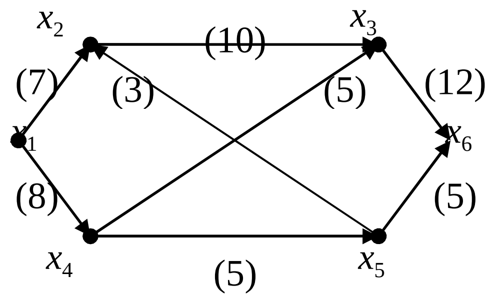
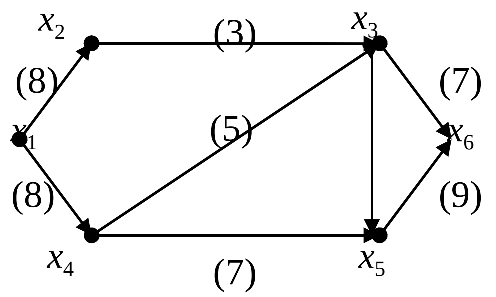
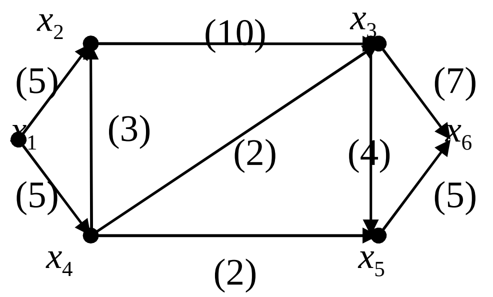
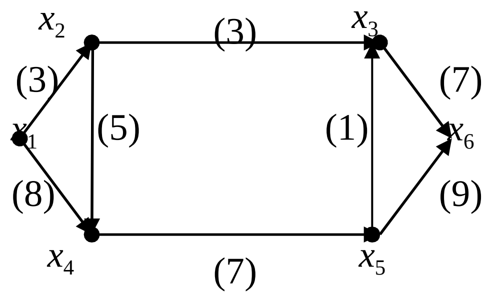
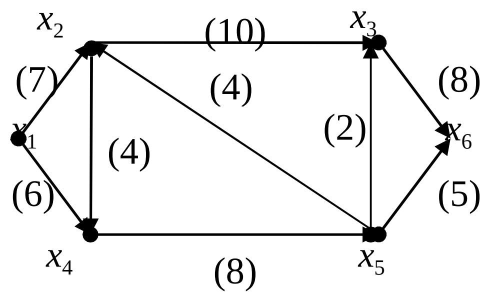
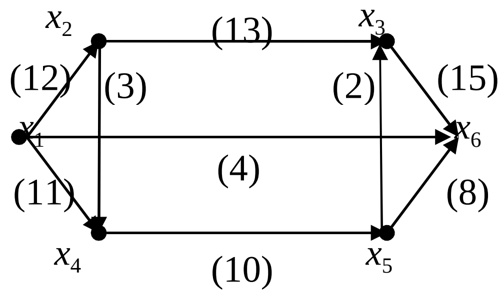


17



18



19		20	
21		22	
23		24	
25			

Рекомендована література

1. Chartrand G., Lesniak L., Zhang P. Graphs & Digraphs/ 6th Edition – New York: Chapman and Hall/CRC, 2015 – 640 p.
2. Hartsfield N., Ringel G. Pearls in Graph Theory. – Dover, 2003. – 249 p.
3. Handbook of Graph Theory, Combinatorial Optimization, and Algorithms/ Edited by Krishnaiyan "KT" Thulasiraman, Subramanian Arumugam, Andreas Brandstädt, Takao Nishizeki, 1-st Edition. – New York: Chapman and Hall/CRC, 2015 – 1244 p.
4. Joyner D., Nguyen M. V., Cohen N. Algorithmic Graph Theory. Version 0.7, 2013 March 24 https://static.latexstudio.net/wp-content/uploads/2013/03/book.pdf
5. Robin J. Wilson, Introduction to Graph Theory, 5th edition. – Pearson, 2010. – 192 p.
6. Андрійчук В.І., Комарницький М.Я., Іщук Ю.Б.. Вступ до дискретної математики: Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, 2004. – 254 с.
7. Базилевич Л. Дискретна математика у прикладах і задачах: Підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков. – 2013. – 487 с.
8. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є. Дискретна математика. Підручник. – К.: Вища школа, 2002. – 287 с.
9. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп’ютерна дискретна математика. — Харків: "Компанія Сміт", 2004. — 480 с.
10. Коцовський В.М. Основи дискретної математики: навчальний посібник. – Ужгород: Рік-У, 2020. – 123 с.
11. Кривий С.Л. Курс дискретної математики: навчальний посібник – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2007. – 432с.
12. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. Підручник. – Львів: "Магнолія Плюс", 2005. – 608 с.
13. Основи дискретної математики: Підручник / Ю.В. Капітонова, С.Л. Кривий, О.А. Летичевський, Г.М. Луцький, М.К. Печурін; за ред. Т.С. Мельник. – К.: Наукова думка, 2002. – 580 с..
14. Спекторський І.Я., Стусь О.В., Статкевич В.М. Дискретна математика. Збірник задач: навч. посіб. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 106 с. http://spectorsky.ho.ua/files/zadachi.pdf