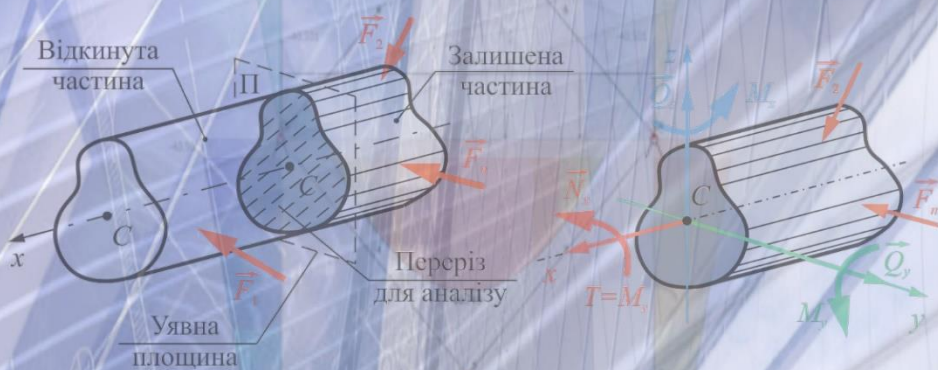


# ОПІР МАТЕРІАЛІВ. Частина I



# **ОПР МАТЕРІАЛІВ.**

## **ЧАСТИНА І**

Навчальний посібник

Кропивницький – 2024

**Автори:**

**Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В., Олійніченко Л.С.**

**Рецензенти:**

**Харченко Євген Валентинович** – доктор технічних наук, професор, Національний університет «Львівська політехніка», завідувач кафедри опору матеріалів та будівельної механіки;

**Бабенко Андрій Єлисейович** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», професор кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів.

Опір матеріалів. Частина I: Навчальний посібник. – Кропивницький: ЦНТУ, 2024. – 165 с.

Викладаються основи напруженого стану, а також розглядаються прості види деформацій.

Для студентів механічних і машинобудівних спеціальностей вузів. Може бути корисний для аспірантів, наукових працівників та інженерів-конструкторів.

*Друкується за рішенням вченої ради  
Центральноукраїнського національного технічного університету  
протокол № 9 від 27 травня 2024 року*

© Г.Б. Філімоніхін, В.В. Пирогов,  
Л.С. Олійніченко, 2024

**Authors:**

**Filimonikhin G.B., Pirogov V.V., Olijnichenko L.S.**

**Reviewers:**

***Kharchenko Evgen Valentinovich*** – doctor of technical sciences, professor, Lviv Polytechnic National University, Head of the Department of Resistance of Materials and Construction Mechanics;

***Babenko Andrii Yelyseyovych*** – doctor of technical sciences, professor, National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute Igor Sikorskyi", professor of the Department of Dynamics and Strength of Machines and Resistance of Materials.

Strength of Materials. Course design. Part 1: Study guide. –  
Kropivnitskiy: CNTU., 2024. – 165 p.

The basics of the stress state are explained, and simple types of deformations are also considered.

For students of mechanical and machine-building specialties. May be useful for post-graduate students, scientists and engineers-designers.

*Published by the decision of the academic council  
of Central ukrainian national technical university  
the protocol No. 1 of May 27, 2024*

© G.B. Filimonikhin, V.V. Pirogov,  
L.S. Olijnichenko, 2024

## ЗМІСТ

<b>ПЕРЕДМОВА .....</b>	<b>14</b>
<b>1. ВИХІДНІ ТВЕРДЖЕННЯ КУРСУ .....</b>	<b>16</b>
1.1. ЗАГАЛЬНІ ВИЗНАЧЕННЯ І ПОНЯТТЯ .....	16
1.2. МОДЕЛЮВАННЯ РЕАЛЬНИХ ОБ'ЄКТІВ .....	17
1.2.1. Моделювання дії навантажень .....	17
1.2.2. Моделювання властивостей конструкційних матеріалів .....	18
1.2.3. Моделювання типів конструктивних елементів .....	19
1.2.4. Моделювання типів деформацій .....	20
1.2.5. Моделювання умов роботи елементів .....	21
1.3. МЕТОД ПЕРЕРІЗІВ, ПОНЯТТЯ ПРО ДІЛЯНКИ .....	22
1.4. ПОНЯТТЯ ПРО НАПРУЖЕННЯ В ПЕРЕРІЗІ .....	24
1.5. ПОНЯТТЯ ЕПОР ТА ЗАГАЛЬНА МЕТОДИКА ЇХ ПОБУДОВИ .....	25
1.6. ЗАГАЛЬНІ ПРИНЦИПИ ПРОЕКТНОГО РОЗРАХУНКУ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ.....	25
1.7. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	26
<b>2. ОСЬОВИЙ РОЗТЯГ І СТИСК ПРЯМИХ СТРИЖНІВ.....</b>	<b>27</b>
2.1. УМОВИ ВИНИКНЕННЯ ОСЬОВОГО РОЗТЯГУ І СТИСКУ СТРИЖНЯ. ФАКТОРИ, ДІЮЧІ В ЙОГО ПОПЕРЕЧНИХ ПЕРЕРІЗАХ .....	27
2.2. ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПЕРЕРІЗІВ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ ВНУТРІШНІХ СИЛ ТА НОРМАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ В СТРИЖНЯХ. ЕПЮРИ $N$ , $\sigma$ .....	27
2.2.1. Випадак дії на стрижень зовнішніх зосереджених сил .....	28
2.2.2. Випадак одночасної дії зовнішніх зосереджених і розподілених (наприклад, власної ваги) сил .....	29
2.3. УМОВА МІЦНОСТІ .....	30
2.4. ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ТРЬОХ ТИПІВ ЗАДАЧ ПРИ ОСЬОВОМУ РОЗТЯГУ (СТИСКУ) .....	31
2.5. ПОЗДОВЖНІ І ПОПЕРЕЧНІ ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ РОЗТЯГУ (АБО СТИСКУ) ЗОВНІШНІМИ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ СИЛАМИ .....	32
2.6. ЗАКОН ГУКА.....	33
2.7. ВИЗНАЧЕННЯ ДЕФОРМАЦІЙ .....	33

2.8. Визначення поздовжніх температурних деформацій.....	35
2.9. Визначення переміщень поперечних перерізів стрижня. ЕПОРА ПЕРЕМІЩЕНЬ. УМОВА ЖОРСТКОСТІ.....	35
2.10. СХІДЧАСТИЙ СТРИЖЕНЬ .....	37
2.11. РАЦІОНАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ.....	38
2.12. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ.....	43
2.12.1. Випробування на розтяг .....	43
2.12.1.1. Зразки для випробувань .....	43
2.12.1.2. Діаграми розтягу.....	44
2.12.1.3. Діаграми розтягу для низьковуглевої сталі (вміст вуглецю 0,1 ÷ 0,3 %).....	45
2.12.1.4. Характеристики міцності .....	47
2.12.1.5. Характеристики пластичності .....	48
2.12.1.6. Процеси, виникаючі в матеріалах при деформації .....	48
2.12.1.7. Закон розвантаження.....	49
2.12.1.8. Робота, витрачена на деформацію.....	50
2.12.2. Випробування на стиск .....	52
2.12.3. Основні методи випробувань машинобудівельних матеріалів .....	54
2.13. ДОПУСТИМИ НАПРУЖЕННЯ .....	55
2.14. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ ПРИ РОЗТЯГУ, СТИСКУ.....	56
2.14.1. Поняття статичної невизначеності .....	56
2.14.2. Приклади розв'язку задач для статично невизначених систем .....	57
2.14.2.1. Стрижень, закріплений кінцями і деформований зовнішньою силою .....	57
2.14.2.2. Абсолютно жорсткий брус, зафіксований шарнірно- стрижневою системою .....	59
2.14.2.3. Вплив неточності розмірів елементів при монтажі статично невизначених систем, монтажні напруження .....	62
2.14.2.4. Вплив температури на зусилля і напруження в статично невизначених системах.....	64
2.15. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	65

<b>3. ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО ТА ДЕФОРМАЦІЙНОГО СТАНУ. КРИТЕРІЇ МІЦНОСТІ. КРИТЕРІЙ МОРА .....</b>	<b>68</b>
3.1. Поняття напруженого стану .....	68
3.2. Лінійний (одновісний) напружений стан .....	69
3.3. Плоский (двовісний) напружений стан .....	71
3.3.1. Положення головних площадок. Величини головних напружень .....	72
3.3.2. Площинки зсуву, взаємозв'язок з головними площадками . Екстремальні дотичні напруження .....	73
3.4. Об'ємний (тривісний) напружений стан .....	75
3.5. Деформації при об'ємному напруженому стані .....	76
3.5.1. Положення головних площадок. Величини головних напружень .....	76
3.5.2. Положення головних площадок. Величини головних напружень .....	77
3.5.3. Положення головних площадок. Величини головних напружень .....	78
3.6. Критерії міцності, їх необхідність .....	78
3.6.1. Класичні теорії міцності .....	79
3.6.2. Критерій Мора .....	80
3.7. Застосування критеріїв міцності в деяких випадках плоского напруженого стану .....	82
3.8. Контрольні запитання .....	84
<b>4. ЗСУВ.....</b>	<b>85</b>
4.1. Чистий зсув .....	85
4.1.1. Умови виникнення .....	85
4.1.2. Закон Гука при чистому зсуві .....	86
4.1.3. Робота і питома потенціальна енергія при чистому зсуві .....	87
4.1.4. Допустимі напруження при зсуві .....	89
4.2. Умови міцності при зсуві (зрізі), змінанні .....	89
4.3. Розрахунки на міцність болтових та заклепкових з'єднань .....	91

4.4. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ЗВАРНИХ З'ЄДНАНЬ .....	94
4.5. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	97
<b>5. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ СТЕРЖНІВ .....</b>	<b>98</b>
5.1. ЗАГАЛЬНІ ОЗНАЧЕННЯ.....	98
5.2. МОМЕНТИ ТА РАДІУСИ ІНЕРЦІЇ ПЕРЕРІЗУ .....	99
5.3. ВЛАСТИВОСТІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРЕРІЗІВ.....	100
5.3.1. Геометричні властивості складних (складених) перерізів.....	100
5.3.2. Формули перетворення при паралельному переносі координатних осей.....	100
5.3.3. Формули перетворення при повороті координатних осей .....	101
5.4. ГОЛОВНІ ОСІ ІНЕРЦІЇ .....	102
5.5. ВЕЛИЧИНИ ГОЛОВНИХ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ.....	103
5.6. МОМЕНТИ ОПОРУ ПЕРЕРІЗІВ .....	104
5.7. ПРИКЛАДИ ОБЧИСЛЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРЕРІЗІВ.....	105
5.7.1. Рівнобічні та нерівнобічні сортаментні кутики .....	105
5.7.2. Круглий переріз .....	107
5.7.3. Кільцевий переріз .....	108
5.7.4. Прямокутний переріз.....	109
5.7.5. Коробчастий переріз.....	110
5.8. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	112
<b>6. ЗГИН .....</b>	<b>115</b>
6.1. ОПІР ЗГИНУ, ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ .....	115
6.2. БАЛКИ ТА ЇХ ОПОРИ .....	117
6.3. ОСОБЛИВОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ВНУТРІШНІХ СИЛОВИХ ФАКТОРІВ ПРИ ЗГІНІ ТА ПОБУДОВА ЇХ ЕПЮР .....	118
6.4. ДИФЕРЕНЦІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ ЗГІНАЛЬНИМ МОМЕНТОМ, ПОПЕРЕЧНОЮ СИЛОЮ ТА РОЗПОДІЛЕНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ .....	119
6.5. НАСЛІДКИ З ТЕОРЕМИ ЖУРАВЬСЬКОГО ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ $M$ , $Q$ ТА $Q$ .....	120

6.6. ЧИСТИЙ ПЛОСКИЙ ЗГИН.....	120
6.6.1. Обчислення напружень .....	120
6.6.2. Рівняння пружної лінії .....	123
6.7. ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН, ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ, ФОРМУЛА ЖУРАВЬСЬКОГО.....	124
6.8. РОЗРАХУНКИ БАЛОК ПРИ ПЛОСКОМУ ЗГИНІ .....	125
6.8.1. Аналіз напруженого стану .....	125
6.8.2. Розрахунки балок на міцність.....	127
6.8.3. Розрахунки на жорсткість .....	129
6.9. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПЕРЕРІЗІВ БАЛОК (МЕТОД ПОЧАТКОВИХ ПАРАМЕТРІВ).....	129
6.10. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	132
<b>7. КРУЧЕННЯ .....</b>	<b>134</b>
7.1. УМОВИ ВИНИКНЕННЯ ДЕФОРМАЦІЙ, ЇХ ВИДИ. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ. ДОТИЧНІ НАПРУЖЕННЯ .....	134
7.2. ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ ПРУЖНИХ ДЕФОРМАЦІЙ. ВЕЛИЧИНА ЗОВНІШНІХ СКРУЧУЮЧИХ МОМЕНТІВ.....	137
7.3. РОЗРАХУНОК СУЦІЛЬНИХ І ПОРОЖНИСТИХ ВАЛІВ НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ ПРИ КРУЧЕННІ .....	138
7.3.1. Розрахунок на міцність і жорсткість валів суцільного круглого поперечного перерізу .....	139
7.3.2. Розрахунок на міцність і жорсткість порожнистих валів .....	139
7.4. ЕПЮРИ КРУТНИХ МОМЕНТІВ, КУТІВ ЗАКРУЧУВАННЯ ТА ВІДНОСНИХ КУТІВ ЗАКРУЧУВАННЯ.....	141
7.5. КРУЧЕННЯ ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ НЕКРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ.....	143
7.5.1. Вихідні твердження .....	143
7.5.2. Стержні прямокутного поперечного перерізу.....	144
7.5.3. Стержні еліптичного поперечного перерізу.....	145
7.5.4. Тонкостінні стержні замкнутого контуру .....	146
7.5.5. Тонкостінні стержні відкритих (розімкнених) профілів .....	148
7.6. РАЦІОНАЛЬНА ФОРМА ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ .....	150

7.6.1. Застосування порожнинних (трубчастих) валів.....	150
7.6.2. Оцінка раціональності форми перерізу .....	151
7.7. Статично невизначені задачі при крученні.....	152
<b>ДОДАТКИ .....</b>	<b>155</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....</b>	<b>162</b>
<b>ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК .....</b>	<b>163</b>

## CONTENTS

<b>INTRODUCTION</b>	<b>14</b>
<b>1. INITIAL STATEMENTS OF COURSE</b>	<b>16</b>
1.1. GENERAL DEFINITIONS AND CONCEPT	16
1.2. MODELING REAL OBJECT	18
1.2.1. Modeling the action of loads	29
1.2.2. Modeling the properties of structural materials	34
1.2.3. Modeling of types of structural elements	38
1.2.4. Modeling of deformation types	42
1.2.5. Modeling the operating conditions of a structural element or structure.	
Real 'object and calculation model (diagram)	45
1.3. THE METHOD OF CROSS-SECTIONS, THE CONCEPT OF SECTIONS	20
1.4. THE CONCEPT OF STRESS IN A SECTION	22
1.5. THE CONCEPT OF EPURS AND THE GENERAL METHOD OF THEIR CONSTRUCTION	22
1.6. GENERAL PRINCIPLES OF DESIGN CALCULATION OF STRUCTURAL ELEMENTS	22
1.7. CONTROL QUESTIONS	22
<b>2. AXIAL TENSION AND COMPRESSION OF STRAIGHT RODS</b>	<b>23</b>
2.1. CONDITIONS FOR THE OCCURRENCE OF AXIAL TENSION AND COMPRESSION OF THE ROD. FACTORS OPERATING IN ITS CROSS-SECTIONS	23
2.2. PECULIARITIES OF USING THE CROSS-SECTION METHOD IN DETERMINING INTERNAL FORCES AND NORMAL STRESSES IN RODS. EPURE $N$ , $\sigma$	26
2.4.1. The case of external concentrated forces acting on the rod	29
2.4.2. The case of simultaneous action of external concentrated and distributed (for example, own weight) forces	34
2.3. STRENGTH CONDITION	28
2.4. PECULIARITIES OF SOLVING THREE TYPES OF PROBLEMS UNDER AXIAL TENSION (COMPRESSION)	29

2.5. LONGITUDINAL AND TRANSVERSE DEFORMATIONS DURING STRETCHING (OR COMPRESSION) BY EXTERNAL CONCENTRATED FORCES	28
2.6. HOOKE'S LAW	28
2.7. DETERMINATION OF DEFORMATIONS	28
2.8. DETERMINATION OF LONGITUDINAL TEMPERATURE DEFORMATIONS	28
2.9. DETERMINATION OF MOVEMENTS OF CROSS SECTIONS OF THE ROD. CHART OF MOVEMENTS. RIGIDITY CONDITION	28
2.10. STEPPED ROD	28
2.11. RATIONAL DESIGN	28
2.12. EXPERIMENTAL DETERMINATION OF MECHANICAL CHARACTERISTICS OF STRUCTURAL MATERIALS	28
2.12.1. Tensile test	29
2.12.1.1. Samples for testing	51
2.12.1.2. Stretch diagrams	51
2.12.1.3. Tensile diagrams for low-carbon steel (carbon content $0,1 \div 0,3\%$ )	51
2.12.1.4. Strength characteristics	51
2.12.1.5. Characteristics of plasticity	51
2.12.1.6. Processes occurring in materials during deformation	51
2.12.1.7. Law of unloading	51
2.12.1.8. Work spent on deformation	51
2.12.2. Compression test	34
2.12.3. Basic methods of testing machine-building materials	38
2.13. PERMISSIBLE STRESSES	28
2.14. CALCULATION OF STATICALLY INDETERMINATE SYSTEMS UNDER TENSION AND COMPRESSION	28
2.14.1. The concept of static uncertainty	29
2.14.1. Examples of solving problems for statically indeterminate systems	29
2.14.1.1. A rod fixed at the ends and deformed by an external force	51
2.14.1.2. An absolutely rigid beam fixed by a hinge-rod system	51

2.14.1.3. Influence of inaccuracy in the dimensions of elements during installation of statically indeterminate systems, installation stresses	51
2.14.1.4. Effect of temperature on forces and stresses in statically indeterminate systems	51
2.15. CONTROL QUESTIONS	50
<b>3. BASICS OF THE THEORY OF STRESS AND DEFORMATION STATE. STRENGTH CRITERIA</b>	<b>51</b>
3.1. THE CONCEPT OF A TENSE STATE	51
3.2. LINEAR (UNIAXIAL) STRESS STATE	93
3.3. FLAT (BIAXIAL) STRESSED STATE	113
3.3.1. Location of the main sites. Values of principal stresses	93
3.3.2. Landslide sites, relationship with the main sites. Extreme tangential stresses	107
3.4. VOLUMETRIC (TRIAxIAL) STRESS STATE	113
3.5. DEFORMATIONS AT A VOLUMETRIC STRESS STATE	113
3.5.1. Generalized Hooke's law	51
3.5.2. Volumetric deformation	78
3.5.3. Specific potential energy of deformation	111
3.6. STRENGTH CRITERIA, THEIR NECESSITY	113
3.6.1. Classical theories of strength	51
3.6.2. Mohr's criterion	78
3.7. APPLICATION OF STRENGTH CRITERIA IN SOME CASES OF FLAT STRESS STATE	113
3.8. CONTROL QUESTIONS	113
<b>4. SHIFT</b>	<b>115</b>
4.1. PURE SHIFT	115
4.1.1. Conditions of occurrence	115
4.1.2. Hooke's law in pure shear	117
4.1.3. Work and specific potential energy at pure shear	121
4.1.4. Permissible shear stresses	123
4.2. CONDITIONS OF STRENGTH IN SHEAR (SHEAR), CRUMPLING	131

4.3. CALCULATIONS ON THE STRENGTH OF BOLTED AND RIVETED JOINTS	154
4.4. CALCULATIONS ON THE STRENGTH OF WELDED JOINTS	154
4.5. CONTROL QUESTIONS	173
<b>5. GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF FLAT SECTIONS OF RODS</b>	<b>175</b>
5.1. GENERAL DEFINITIONS	175
5.2. MOMENTS AND RADII OF INERTIA OF SECTION	193
5.3. PROPERTIES OF GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF SECTIONS	196
5.3.1. Geometric properties of complex (compound) sections	176
5.3.2. Conversion formulas for parallel transfer of coordinate axes	181
5.3.3. Transformation formulas when rotating coordinate axes	183
5.4. MAIN AXES OF INERTIA	196
5.5. VALUES OF THE MAIN MOMENTS OF INERTIA	196
5.6. MOMENTS OF RESISTANCE OF SECTIONS	196
5.7. EXAMPLES OF CALCULATION OF GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF SECTIONS	196
5.7.1. Equilateral and non-equilateral assortment corners	184
5.7.2. Round section	187
5.7.3. Annular section	189
5.7.4. Rectangular section	190
5.7.5. Box section	190
5.8. CONTROL QUESTIONS	200
<b>6. BEND</b>	<b>175</b>
6.1. BENDING RESISTANCE, BASIC CONCEPTS AND DEFINITIONS	175
6.2. BEAMS AND THEIR SUPPORTS	193
6.3. PECULIARITIES OF DETERMINING INTERNAL FORCE FACTORS DURING BENDING AND CONSTRUCTING THEIR DIAGRAMS	196
6.4. DIFFERENTIAL DEPENDENCE BETWEEN BENDING MOMENT, TRANSVERSE FORCE AND DISTRIBUTED LOAD	196

6.5. CONSEQUENCES OF ZHURAVSKY'S THEOREM ON THE CONNECTION BETWEEN $M$ , $Q$ AND $Q$	196
6.6. CLEAN FLAT BEND	196
6.6.1. Calculation of stresses	176
6.6.2. The equation of the elastic line	181
6.7. TRANSVERSE BENDING, DETERMINATION OF STRESSES, ZHURAVSKY'S FORMULA	196
6.8. CALCULATIONS OF BEAMS WITH A FLAT BEND OF	200
6.8.1. Stress state analysis	184
6.8.2. Calculations of beams for strength	187
6.8.3. Stiffness calculations	189
6.9. DETERMINING THE DISPLACEMENTS OF BEAM SECTIONS (METHOD OF INITIAL PARAMETERS)	200
6.10. CONTROL QUESTIONS	200
<b>7. TURNING</b>	<b>175</b>
7.1. CONDITIONS FOR THE OCCURRENCE OF DEFORMATIONS, THEIR TYPES. BASIC DEFINITIONS. TANGENTIAL STRESSES	175
7.2. POTENTIAL ENERGY OF ELASTIC DEFORMATIONS. THE MAGNITUDE OF THE EXTERNAL TWISTING MOMENTS IS	193
7.3. THREE TYPES OF PROBLEMS. CALCULATION OF SOLID AND HOLLOW SHAFTS FOR STRENGTH AND STIFFNESS WHEN TWISTING	196
7.3.1. Calculation of the strength and stiffness of shafts of solid round cross-section	176
7.3.2. Calculation of strength and stiffness of hollow shafts	181
7.4. PLOTS OF TORQUES, TWIST ANGLES AND RELATIVE TWIST ANGLES	196
7.5. TORSION OF STRAIGHT RODS OF NON-CIRCULAR CROSS-SECTION	196
7.5.1. Initial statements	184
7.5.2. Rods of rectangular cross-section	187
7.5.3. Bars of elliptical cross-section	189

7.5.4. Thin-walled rods of closed circuit	187
7.5.5. Thin-walled rods of open (open) profiles	189
7.6. RATIONAL CROSS-SECTIONAL SHAPE	196
7.6.1. Application of hollow (tubular) shafts	184
7.6.2. Evaluation of the rationality of the cross-section form	187
7.7. STATICALLY INDETERMINATE PROBLEMS	
IN TORSION	196
<b>APPENDIX</b>	<b>202</b>
<b>REFERENCES</b>	<b>251</b>

## Передмова

Машинобудування – основна галузь сучасної промислово розвинутої країни, що визначає рівень розвитку продуктивних сил суспільства і є вагомим фактором розвитку науки і техніки. Прогрес машинобудування зумовлюється досконалістю машин, які створюються. Тому сучасний інженер повинен не тільки вміти керувати складною технікою і успішно її використовувати, але і повинен оволодіти глибокими теоретичними знаннями та досвідом з розрахунку і конструювання нових машин.

Навчальний посібник призначено для закріплення теоретичного матеріалу та полегшення самостійної роботи студентів під час виконання індивідуальних завдань з дисципліни “Опір матеріалів”. Також його можна використовувати і для розв’язання задач, які виникають перед інженером на практиці при проектуванні або удосконаленні різноманітних будівельних конструкцій та машин.

Важливо відмітити, що авторами ставилась задача за допомогою даного посібника ознайомити майбутніх інженерів-конструкторів з основними теоретичними і практичними аспектами проектування різних будівельних конструкцій та машин, розвинути інженерне і технічне мислення, уміння та навички при проведенні конструкторських робіт.

**Структура посібника.** В першій частині посібника викладаються основи напруженого стану, а також розглядаються прості види деформацій. Посібник складається з семи розділів, додатка, списку використаної літератури та предметного покажчика.

**У першому розділі** розглянуто основні визначення та поняття, основні моделі, а також основні принципи проектного розрахунку.

**У другому розділі** розглянуто осьовий розтяг та стиск прямих стрижнів. Розглядаються особливості застосування методу перерізів, а також розглядається експериментальне визначення механічних характеристик конструкційних матеріалів.

**У третьому розділі** розглянуто основи теорії напруженого та деформаційного стану для лінійного, плоского та об’ємного випадку. Розглянуто класичні теорії міцності.

**У четвертому розділі** розглянуто чистий зсув та умови міцності при зсуві.

**У п’ятому розділі** розглянуто геометричні характеристики плоских перерізів.

**У шостому розділі** розглянуто згин, а також розрахунок балок при плоскому згині.

У цьому розділі розглянуто кручення, а також розрахунки суцільних, порожнистих валів та стержнів некруглого поперечного перерізу при крученні.

Особливістю посібника є те, що в ньому, крім прикладів розрахунку різних конструкцій, приведено основні теоретичні відомості та рекомендації необхідні для прийняття студентом виважених конструкторських рішень. Детальний порядок дій, при розрахунку тих чи інших конструкцій, можна використовувати як алгоритм для складання програм на ПЕОМ.

У посібнику використана єдина система фізичних одиниць (СІ) з наступними відхиленнями, які допускаються державними стандартами (ДСТУ) при розрахунку конструкцій: розміри виражаються у  $m$ ; сили в  $H$ ; крутні моменти в  $H\cdot m$ ; механічне напруження у  $MPa$  або в  $H/mm^2$ . У ряді окремих формул даються відповідні зауваження по використанню тих чи інших одиниць вимірювання.

Автори глибоко вдячні д.т.н., проф. Харченку Є.В. та д.т.н., проф. Бабенку А.Є., а також колективу кафедри “Деталей машин та прикладної механіки” за надану допомогу та корисні зауваження під час підготовки посібника.

# 1. Вихідні твердження курсу

## 1.1. Загальні визначення і поняття

У процесі своєї виробничої діяльності людина створює і використовує безліч різних конструкцій. До них відносяться різні машини і механізми, прилади, будівельні споруди і т.д. При проектуванні вони розраховуються так, щоб при дії навантажень не відбувалося їх руйнування та забезпечувалася необхідна міцність, жорсткість і стійкість на протязі певного терміну експлуатації.

**Опір матеріалів** – наука про інженерні розрахунки на міцність, жорсткість і стійкість елементів, конструкцій під дією навантажень, вивчає їх деформований стан.

**Елементи** – тіла, що входять до складу конструкції (системи).

**Конструкція, система** – задана сукупність елементів, які виконують встановлену функцію.

**Навантаження** – дія на елемент (конструкцію) зовнішніх факторів.

**Зовнішні фактори** – сили, моменти, зміна температури, зовнішнє середовище і т.д.

**Розвантаження** – припинення дії зовнішніх факторів на елемент (конструкцію).

**Деформований стан, деформація** – зміна лінійних, кутових розмірів елемента (конструкції).

Розрізняють деформації:

- **силові** – викликані дією зовнішніх сил, моментів;
- **температурні** – викликані дією температур;
- **змішані** – від одночасної дії перших двох факторів;
- **пружні** – які зникають одразу після розвантаження;
- **пластичні (залишкові)** – які залишаються після розвантаження.

Перевищення допустимих значень лінійних, кутових розмірів призводить до виникнення граничного стану елемента (конструкції).

**Граничний (небезпечний) стан елемента** – такий, що веде до його руйнування.

**Граничний (небезпечний) стан конструкції** – руйнування хоча б одного елемента, або поява в ньому недопустимої деформації.

**Руйнування** елемента настає при деформаціях, які роблять його існування, як єдиного цілого, неможливим.

**Міцність** – здатність елемента або конструкції витримувати навантаження без виникнення граничного стану.

**Жорсткість** – здатність елемента або конструкції витримувати навантаження при пружних деформаціях, що не перевищують певних допустимих значень.

**Стійкість** – здатність конструкції або її елементів зберігати задану форму рівноваги під дією навантаження.

Щоб конструкція в цілому відповідала вимогам міцності, жорсткості і стійкості, необхідно надати її елементам найбільш раціональну форму і, знаючи властивості матеріалів, з яких вони виготовлятимуться, визначати відповідні розміри залежно від величини і характеру діючих навантажень.

## 1.2. Моделювання реальних об'єктів

**Моделювання** в розрахунках на міцність, жорсткість і стійкість – по можливості повне відображення реальних процесів, що відбуваються, встановлення об'єктивних взаємозв'язків між ними у виді гіпотез, теорій або математичних залежностей.

**Модель** в розрахунках на міцність, жорсткість і стійкість – об'єктивна сукупність уявлень (гіпотез, теорій) або математичних залежностей, що вірогідно описують умови роботи елементів (конструкцій).

Метою моделювання є забезпечення надійності і міцності конструкції. Такий процес у загальному виді включає наступні етапи:

- моделювання дії навантажень;
- моделювання властивостей конструкційних матеріалів;
- моделювання типів конструктивних елементів;
- моделювання типів деформацій;
- моделювання умов роботи елементів (конструкцій).

**Математична модель** – математичні залежності, які відображають зв'язок різних факторів, що впливають на виникаючі процеси.

**Фізична модель** – може включати відтворення процесу взаємодії частинок матеріалу, процесу навантаження конструкції або її деформації і т.д.

### 1.2.1. Моделювання дії навантажень

**Зовнішні сили** – сили взаємодії між елементами і зв'язаними з ними тілами. **Реакції опор після їх визначення є зовнішніми силами.**

За способом дії зовнішні сили розрізняють як **зосереджені** ( $F, P$ ) і **розподілені** ( $q, \gamma$ ).

**Внутрішні сили** – сили взаємодії між частинами конструктивного елемента.

За характером дії зовнішні навантаження бувають **статичними** і **динамічними**.

**Статичне** – поступове зростання навантаження від 0 до кінцевої максимальної величини, що не викликає значних прискорень в конструктивній системі.

**Динамічне** – раптове навантаження, при якому елементи випробовують значні прискорення, які необхідно врахувати.

Дію зовнішніх і внутрішніх сил моделюють такими гіпотезами:

1) **принцип суперпозиції** – результат дії системи сил дорівнює сумі результатів окремих сил (**гіпотеза незалежності дії сил**);

2) **гіпотеза Сен-Венана** – у перерізах елемента, достатньо віддалених від місць прикладання зовнішніх навантажень, величини внутрішніх факторів мало залежать від способу прикладання зовнішніх навантажень (на рис. 1.1, а, б дано відповідні пояснення та показано, що внутрішні сили та нормальні напруження мало залежать від способу навантаження).

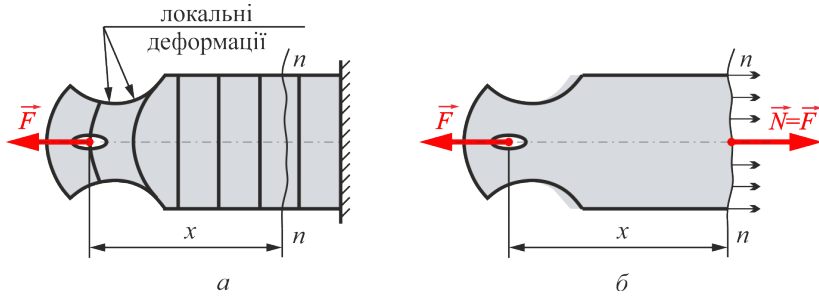


Рис. 1.1

### 1.2.2. Моделювання властивостей конструкційних матеріалів

У машинобудуванні чорні і кольорові метали та їх сплави використовуються як основні ізотропні конструкційні матеріали. В останні роки все ширше застосовуються композиційні, порошкові матеріали, напружений бетон та інші анізотропні матеріали.

Матеріали мають багато властивостей, які врахувати неможливо через складність їх взаємодії.

В опорі матеріалів приймається узагальнена модель матеріалу, що включає ряд гіпотез:

1) **матеріали припускаються ідеально пружними (гіпотеза ідеальної пружності);**

2) **матеріали приймаються ізотропними або анізотропними;**

3) **матеріали приймаються однорідними за структурою (гіпотеза однорідності);**

4) матеріал заповнює об'єм без порот у вигляді аморфної структури (гіпотеза суцільності);

5) гіпотеза про невзаємодію паралельних шарів (волокон) матеріалу при навантаженні.

**Пружність** – властивість матеріалу елемента повністю відновлювати початкові розміри і форму після розвантаження.

**Ізотропні матеріали** – властивості яких однакові в усіх напрямках.

**Анізотропні матеріали** – властивості яких в різних напрямках змінюються. До числа таких конструкційних матеріалів можна віднести, наприклад, деревину, композиційні матеріали.

### 1.2.3. Моделювання типів конструктивних елементів

Перелік всіх геометричних особливостей множини елементів конструкцій неможливий. Розглядають спрощені їх схеми – **моделі елементів**:

1) **стрижень (брус)** – тіло, два розміри якого одного порядку, а третій значно більший (рис. 1.2);

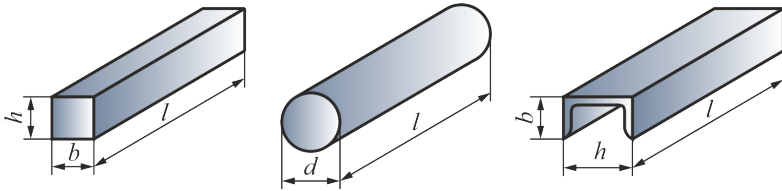


Рис. 1.2

2) **оболонка** – тіло, обмежене криволінійними поверхнями (рис. 1.3, а);

3) **пластина** – тіло, обмежене паралельними площинами (рис. 1.3, б);

4) **масивне тіло** – усі розміри якого наближно одного порядку (рис. 1.3, в).

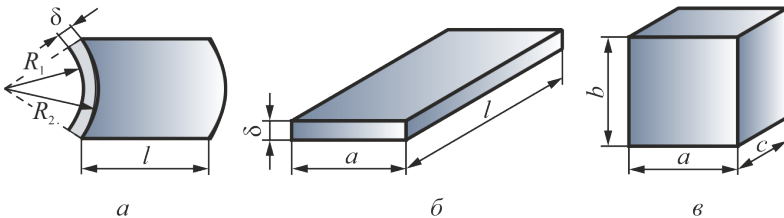


Рис. 1.3

Для поперечних перерізів стрижнів приймається **гіпотеза Бернуллі (гіпотеза плоских перерізів)**: поперечні перерізи, плоскі і нормальні до осі стрижня до його деформації, залишаються такими і після деформації (рис. 1.4, а – при розтягу, рис. 1.4, б – при згині).

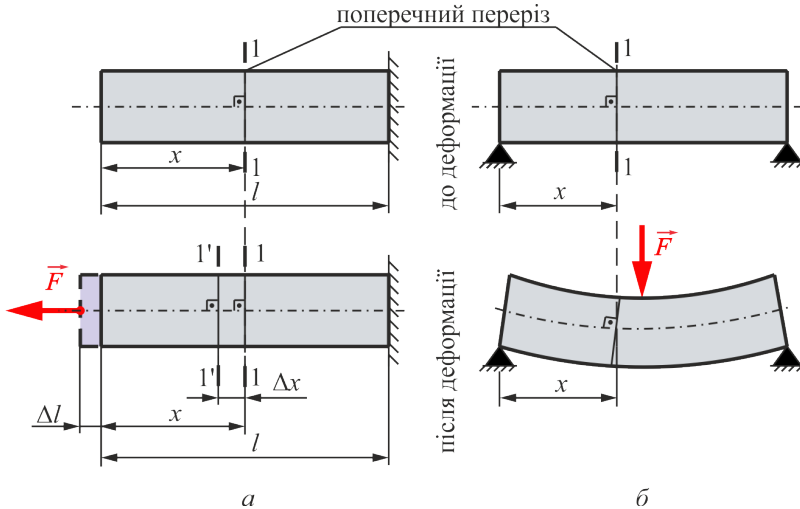


Рис. 1.4

### 1.2.4. Моделювання типів деформацій

Виділяють чотири прості типи деформацій.

1. **Розтяг (стиск)**. Виникають лінійні деформації (рис. 1.5, а).  
**Стержень (брус)** – конструктивний елемент, що працює на розтяг або стиск.

2. **Зсув**. Виникають кутові та лінійні деформації (рис. 1.5, б).

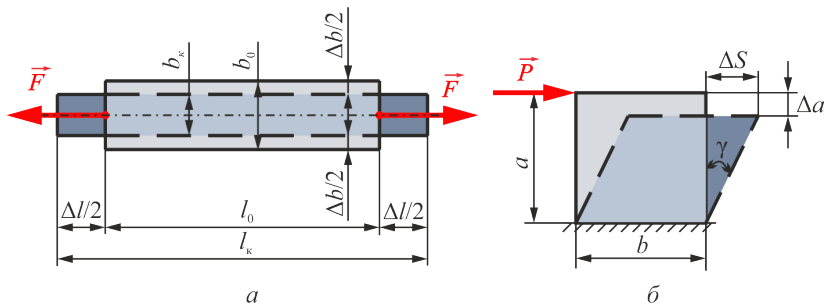


Рис. 1.5

3. **Кручення.** Виникають кутові деформації (рис. 1.6, а). **Вал** – конструктивний елемент, що працює на кручення.

4. **Згин.** Виникають лінійні та кутові деформації (рис. 1.6, б). **Балка** – конструктивний елемент, що працює на згин.

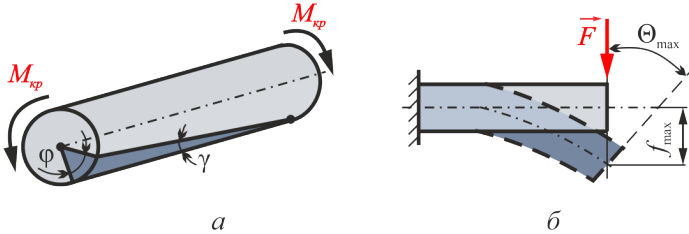


Рис. 1.6

Усі інші деформації являються різними сполученнями простих деформацій і являються **складними деформаціями**.

При моделюванні деформацій приймаються наступні гіпотези:

1) **деформації елемента (конструкції) припускаються настільки малими, що можна не враховувати їх вплив на взаємне розташування навантажень, та на відстань між навантаженнями і точками конструкції (принцип початкових розмірів);**

2) **до певних величин навантажень деформації конструкції прямопропорційні діючим навантаженням (закон Гука).**

### 1.2.5. Моделювання умов роботи елементів

В проектних розрахунках спочатку аналізують поведінку реальних елементів та конструкцій під дією навантажень.

**Реальний об'єкт** – конструктивні елементи та конструкції, або їх креслення, чи ескізи.

Для реального об'єкта та діючих навантажень встановлюють:

- 1) принцип роботи елемента або конструкції;
- 2) взаємодію між елементами конструкції, або конструкціями;
- 3) процес дії навантажень;
- 4) змінні і постійні параметри елемента або конструкції;
- 5) кількісне співвідношення постійних та змінних величин, що

визначають реальний об'єкт і процеси, які відбуваються.

В процесі розрахунків виникає потреба виконувати численні додаткові побудови, позначки, що важко зробити на реальному об'єкті, або його кресленнях. Тому для виконання розрахунків замість реального об'єкта використовують розрахункову модель (схему).

**Розрахункова модель (схема)** елемента або конструкції – умовне, спрощене їх зображення, на якому в стандартних позначеннях вказують: елементи, види опор, розміри, поперечні перерізи, деформації і переміщення, діючі навантаження, опорні реакції і т.д.

Розрахункова модель сприймається в сукупності з розглянутими гіпотезами.

Нижче наведений приклад складання для реального об'єкта (рис. 1.7, а) розрахункової моделі (схеми) (рис. 1.7, б).

Для одного реального об'єкта можна скласти кілька варіантів розрахункових моделей (схем). Їх вибір обумовлений необхідною точністю та змістом задачі, що поставлена перед конструктором.

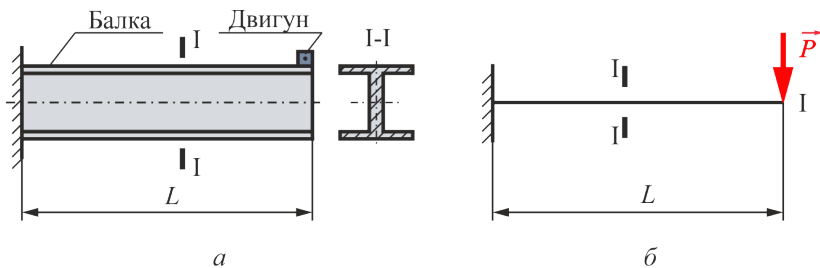


Рис. 1.7

### 1.3. Метод перерізів, поняття про ділянки

В розрахунках елементів і конструкцій, які перебувають під дією навантажень, необхідно вміти знаходити внутрішні зусилля.

Якщо, наприклад, руйнівні сили перевищують сили взаємодії між частинками конструкційного матеріалу, то виникає **розділення** елемента на частини, тобто він **зруйнується** в результаті перебування в небезпечному стані.

Для того щоб визначити, в якому стані знаходиться елемент, необхідно співставити діючі максимальні внутрішні фактори з їх небезпечними характеристиками.

Серед методів, що допомагають аналізувати внутрішні фактори, практичне значення має **статичний**, або **метод перерізів**. Він ґрунтується на способах проекцій, та моментної точки. Моментну точку та вісь проекції обирають так, щоб у рівняння рівноваги входила тільки одна невідома величина (внутрішнє зусилля), яку визначають.

**Метод перерізів** впливає з наступних передумов. Якщо конструктивний елемент (конструкція) перебуває в рівновазі до розтинання їх уявною площиною, то після розтинання ліва та права їх частини продовжують перебувати в рівновазі відносно уявної площини

поділу. Щоб практично застосувати метод перерізів, необхідно виконати наступні етапи:

1) **розігнути (розрізати)** конструктивний елемент (конструкцію) уявною площиною на дві частини в перерізі, де проводиться аналіз внутрішніх зусиль;

2) **відкинути** будь-яку з частин;

3) **замінити** вплив відкинутої частини на залишену для розгляду, передбаченими внутрішніми зусиллями або моментами. Напрямки їх можна обрати довільними;

4) **врівноважити** залишену частину, склавши рівняння рівноваги, з яких можна знайти необхідну величину і дійсний напрям внутрішніх зусиль.

На рис. 1.8 наведено приклад застосування методу перерізів.

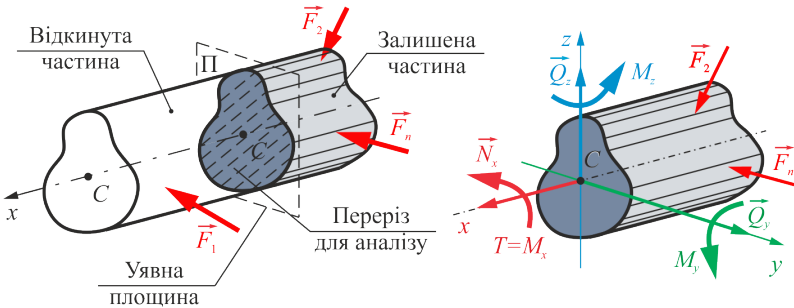


Рис. 1.8

З рис. 1.8 видно, що замість визначення рівнодійних векторів внутрішніх сил і моментів більш зручно визначити їх проєкції на осі координат або площини фізичної дії (для моментів). Величини їх знаходяться з шести рівнянь рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & \quad \sum F_y = 0; & \quad \sum F_z = 0; \\ \sum M_x = 0; & \quad \sum M_y = 0; & \quad \sum M_z = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

При використанні методу перерізів часто виникає потреба ділення конструктивного елемента або конструкції на окремі частини – ділянки. При цьому **межами (границями)** ділянок можуть бути:

- початок та кінець елемента (конструкції);
- перерізи, де прикладені зосереджені зовнішні навантаження (сили або моменти);
- початок та кінець розподіленого зовнішнього навантаження (сили або моменти);
- місця зміни площ поперечних перерізів, або їх конфігурації.

На рис. 1.9 наведено приклад поділення конструктивного елемента на ділянки (рис. 1.9, а – стержень; рис. 1.9, б – балка).

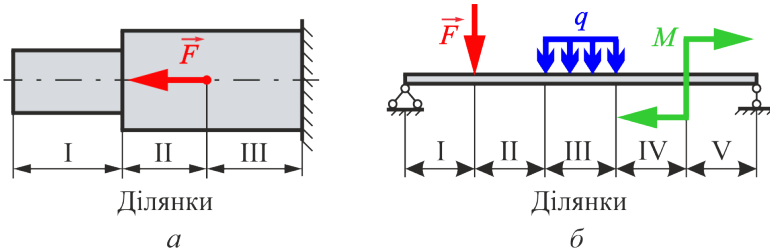


Рис. 1.9

### 1.4. Поняття про напруження в перерізі

Розглянемо залишену зрівноважену частину (див. рис. 1.8) більш детально на рівні елементарних площ і сил (рис. 1.10):

$dA$  – елементарна площа, виділена в перерізі;

$dN_x$  – елементарна поздовжня (нормальна до перерізу) сила;

$dQ_y$  – елементарна поперечна (дотична до перерізу) сила;

$dR$  – елементарна рівнодійна сила.

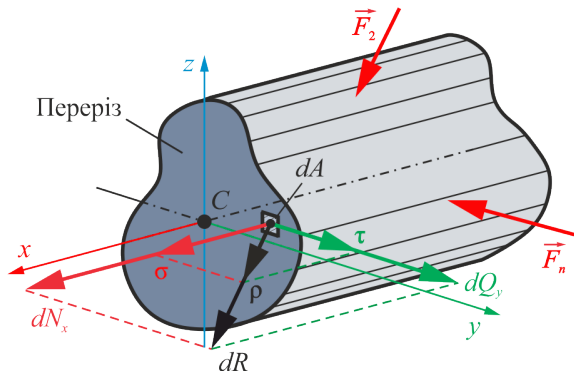


Рис. 1.10

**Напруження** – величина, яка характеризує інтенсивність внутрішніх сил, що припадають на одиницю площі перерізу, де вони діють.

Тоді:

$$\sigma = \frac{dN}{dA}, \quad \tau = \frac{dQ_y}{dA}, \quad \rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, \quad (1.2)$$

де  $\sigma$  – нормальне напруження;  $\tau$  – дотичне напруження;  $\rho$  – повне напруження.

Розмірність напружень  $N/m^2$  (Па);  $MN/m^2$  (МПа);  $kg/cm^2$  ( $kg/mm^2$ ).

## 1.5. Поняття епюр та загальна методика їх побудови

В результаті використання методу перерізів на ділянках конструктивних елементів визначають величини внутрішніх сил, моментів, напружень і т.д. Це дає можливість встановити закономірність їх зміни при переході від одного характерного перерізу до іншого, і далі побудувати діаграми (графіки).

**Епюра** – це діаграма (графік), що характеризує зміну даної величини. Епюри будують для використання їх в розрахунках на міцність і жорсткість. Вони дають можливість визначити положення таких перерізів, де можливе руйнування – **небезпечних перерізів**.

Загальна методика побудови епюр включає наступні основні етапи.

1. Конструктивні елементи розбиваються на ділянки.

2. При застосуванні методу перерізів, в межах кожної ділянки складаються математичні вирази, характеризуючі зміну досліджуваних величин (або функції Хевісайда при застосуванні ПЕОМ).

3. Паралельно поздовжній осі конструктивного елемента (або осі перерізу) проводиться вісь (**базова лінія**), на якій будується епюра.

Ординати епюри відкладаються перпендикулярно осі в масштабі, з урахуванням знаків, напроти відповідних перерізів конструктивного елемента. Епюру штрихують перпендикулярно її осі, при цьому кожна лінія штриховки – ордината епюри. В характерних перерізах на епюрі проставляють чисельні значення ординат.

## 1.6. Загальні принципи проектного розрахунку елементів конструкцій

Опір матеріалів розробляє методики розрахунків, пов'язаних з визначенням величин напружень, деформацій, переміщень, геометричних характеристик і т.д. для елементів конструкцій. Методи розрахунків приймаються в залежності від умов роботи конструкцій і вимог, що до них висуваються.

Етапи проектного розрахунку:

- 1) аналіз умов роботи конструкції;
- 2) розробка відповідної розрахункової моделі;
- 3) пошук науково обґрунтованих та технічно реальних варіантів рішень;

4) безпосередній проектний, чи перевірочний розрахунок з достатньою точністю;

5) контрольні перевірочні розрахунки, а для відповідальних конструкцій – додаткове проведення серії експериментальних випробувань.

## 1.7. Контрольні запитання

1. Що вивчає наука про опір матеріалів?
2. Поняття конструктивного елемента, системи, конструкції.
3. Поняття про зовнішні фактори.
4. Охарактеризуйте процес навантаження і розвантаження.
5. Поняття деформацій та причини їх виникнення.
6. Коли відбувається руйнування конструктивного елемента?
7. Коли настає небезпечний (граничний) стан елемента або конструкції?
8. Чим характеризуються міцність і жорсткість елемента або конструкції?
9. Що таке ізотропність та анізотропність конструкційних матеріалів?
10. Поняття моделювання, фізична та математична моделі.
11. В чому полягає моделювання властивостей конструкційного матеріалу?
12. Моделювання дії навантажень.
13. Типи конструктивних елементів.
14. Моделювання типів деформацій.
15. Реальний об'єкт та розрахункова модель, моделювання роботи елементів або конструкцій.
16. В чому полягає метод перерізів?
17. Поняття про напруження та їх види.
18. Що являють собою епюри, методика їх побудови?
19. Які загальні принципи проектного розрахунку елементів та конструкцій?

## 2. Осьовий розтяг і стиск прямих стрижнів

### 2.1. Умови виникнення осьового розтягу і стиску стрижня. Фактори, діючі в його поперечних перерізах

**Осьовий (центральный) розтяг та стиск** стрижня – деформація, при якій в довільному поперечному перерізі виникає рівнодійна поздовжня (осьова) сила, прикладена до центру ваги перерізу.

Елементарна поздовжня внутрішня сила

$$dN = \sigma dA.$$

Тоді для довільного поперечного перерізу стрижня

$$N = \int_A \sigma dA, \quad (2.1)$$

де  $N$  – рівнодійна внутрішня поздовжня сила, прикладена до центру ваги перерізу;  $dA$  – елементарна площа в поперечному перерізі стрижня;  $\sigma$  – нормальні напруження в поперечному перерізі стрижня.

Рівняння (2.1) справедливе для будь-якого закону зміни нормальних напружень в поперечному перерізі. Якщо прийняти до уваги гіпотезу Сен-Венана ( $\sigma = \text{const}$ ) та Бернуллі, то з рівняння (2.1) можна отримати для довільного перерізу:

$$N = \sigma \int_A dA \quad \text{або} \quad N = \sigma A. \quad (2.2)$$

Звідки

$$\sigma = N/A. \quad (2.3)$$

Відповідно до визначення осьового розтягу (стиску) поперечна сила та дотичні напруження в довільному перерізі стрижня відсутні

$$Q = \int_A \tau dA = 0, \quad \tau = 0.$$

#### **Правило знаків.**

1. Внутрішня сила  $N$  та нормальні напруження  $\sigma$  **додатні**, якщо вони напрямлені від перерізу – розтягуючі.

2. При стиску  $N$  та  $\sigma$ , навпаки, **від'ємні** – напрямлені до перерізу.

### 2.2. Особливості застосування методу перерізів при визначенні внутрішніх сил та нормальних напружень в стрижнях. Епюри $N$ , $\sigma$

При розтягу або стиску на стрижень можуть діяти зовнішні зосереджені і розподілені сили. Застосовуючи метод перерізів, необхідно брати до уваги наступні рекомендації:

1) закріпленій стрижень діють на ділянки, розглядають його частину з вільним кінцем, відкидають частину із закріпленням;

2) якщо знайдені реакції закріплень (опор), можна ділити стрижень на ділянки з будь-якого його кінця.

### 2.2.1. Випадок дії на стрижень зовнішніх зосереджених сил

Для стрижнів постійного поперечного перерізу (рис. 2.1, а-г):

$$\sum X = 0; \quad N - F = 0.$$

Звідки  $N=F$  – постійна величина для розглянутої ділянки стрижня.

Видно, що внутрішня сила  $N$  розтягуюча і змінюється по довжині стрижня за законом прямої, паралельної осі епюри (рис. 2.1, д).

Нормальні напруження описуються формулою (2.3), причому закон їх зміни такий самий, як і для  $N$  (рис. 2.1, е).

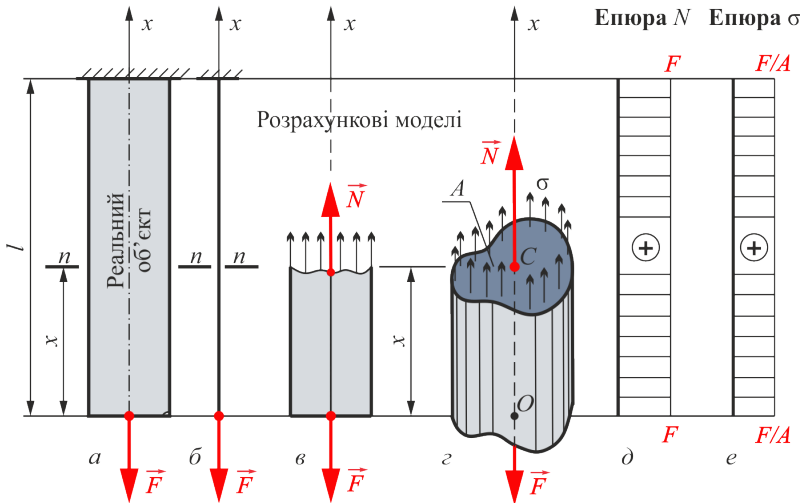


Рис. 2.1

Для стрижнів змінної величини поперечного перерізу (змінної жорсткості) (рис. 2.2, а-г):

$$\sum X = 0; \quad N(x) - F = 0, \quad \text{звідки } N(x) = F.$$

Закон зміни  $N(x)$  по довжині стрижня такий самий, як і у попередньому прикладі.

Нормальні напруження в довільному поперечному перерізі

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}. \quad (2.4)$$

Видно, що напруження  $\sigma(x)$  обернено пропорційне закону зміни площі поперечного перерізу. Тоді

$$\begin{aligned}
 x = 0, \quad A(x) = A_{min}, \quad \sigma_{max} &= \frac{N(x)}{A_{min}}; \\
 x = x, \quad A(x) = \Phi(x), \quad \sigma(x) &= \frac{N(x)}{A(x)}; \\
 x = l, \quad A(x) = A_{max}, \quad \sigma_{min} &= \frac{N(x)}{A_{max}}.
 \end{aligned}$$

Епюри зміни  $N(x)$  і  $\sigma(x)$  наведені на рис. 2.2, д, е.

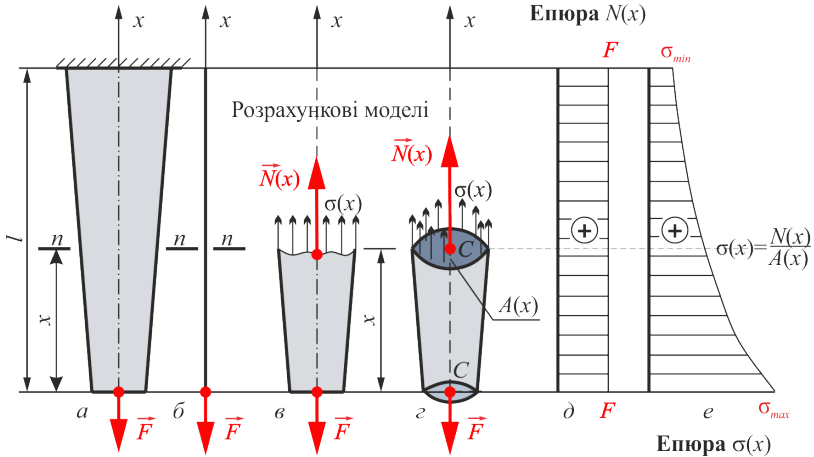


Рис. 2.2

З рис. 2.1 і 2.2 видно, що внутрішня сила  $N(x)$  залежить тільки від величини зовнішніх сил і не залежить від форми поперечного перерізу та матеріалу стрижня.

### 2.2.2. Випадок одночасної дії зовнішніх зосереджених і розподілених (наприклад, власної ваги) сил

Метод перерізів для такого випадку, можна продемонструвати на прикладі стрижня постійного перерізу (рис. 2.3, а). На рис. 2.3, б:  $\gamma$  – питома об’ємна вага матеріалу стрижня (наприклад, для сталі  $\gamma=78 \text{ кН/м}^3$ );  $C$  – центр ваги залишеної частини стрижня.

З рис. 2.3, в, г, отримуємо

$$\sum X = 0; \quad N(x) - F - Q(x) = 0.$$

Власна вага залишеної частини стрижня

$$Q(x) = \gamma Ax.$$

Остаточно

$$N(x) = F + \gamma Ax; \quad \sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{F}{A} + \gamma x. \quad (2.5)$$

Величини  $N(x)$  і  $\sigma(x)$  змінюються за законом похилої прямої.

Видно, що, згідно з принципом незалежності дії сил,  $N(x)$  та  $\sigma(x)$  являють собою алгебраїчну суму відповідних величин від дії зовнішніх зосереджених і розподілених сил:

$$\begin{aligned} N(x) &= N^F(x) + N^\gamma(x); \\ \sigma(x) &= \sigma^F(x) + \sigma^\gamma(x). \end{aligned}$$

Як і в попередніх прикладах, форма поперечного перерізу не впливає на  $N(x)$  та  $\sigma(x)$ . Але ці величини залежать від матеріалу стрижня та його довжини. Тоді

$$\begin{aligned} x = 0, \quad N(x) &= F, \quad \sigma(x) = \frac{F}{A}; \\ x = l, \quad N_{max}(x) &= F + \gamma Al, \quad \sigma_{max} = \frac{F}{A} + \gamma l. \end{aligned} \quad (2.6)$$

За результатами обчислень будують епюри  $N(x)$  та  $\sigma(x)$  (рис. 2.3, д, е).

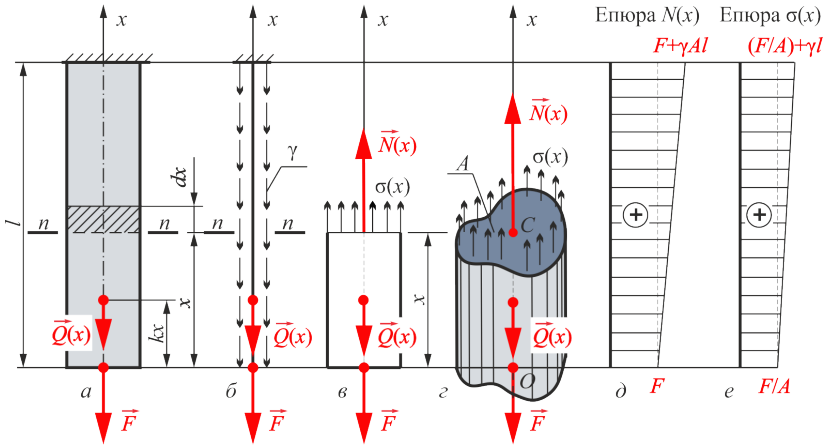


Рис. 2.3

З рівнянь (2.5) видно, що при відсутності зовнішньої зосередженої сили:

$$N(x) = \gamma Ax; \quad \sigma(x) = \gamma x. \quad (2.7)$$

Тоді

$$\begin{aligned} x = 0, \quad N(x) &= 0, \quad \sigma(x) = 0; \\ x = l, \quad N_{max}(x) &= \gamma Al, \quad \sigma_{max} = \gamma l. \end{aligned} \quad (2.8)$$

### 2.3. Умова міцності

Для надійної роботи елементів і конструкцій в умовах пружного стану їх не можна безмежно навантажувати. Очевидно, що необхідно

регламентувати величину напружень значеннями, які називають **допустимими напруженнями**  $[\sigma]$ .

Знаходять поперечний переріз, де напруження досягають найбільших значень за абсолютною величиною – **небезпечний переріз**. Порівнюють допустимі напруження з дійсними напруженнями небезпечного перерізу. Тоді враховуючи вирази (2.3), (2.4), отримуємо:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad \text{або} \quad \sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} \leq [\sigma]. \quad (2.9)$$

Умови (2.9) називають **умовами міцності** при розтягу або стиску. При розтягу порівнюють з  $[\sigma_p]$ , при стиску – з  $[\sigma_c]$ . Напруження в небезпечному перерізі не повинні перевищувати допустимі не більше ніж на 5 %. Для випадків, розглянутих на рис. 2.1 – 2.3, умови міцності мають вигляд:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \leq [\sigma] \quad \text{або} \quad \sigma_{max} = \frac{F}{A} + \gamma l \leq [\sigma]. \quad (2.10)$$

При відсутності зосередженої зовнішньої сили ( $F = 0$ ):

$$\sigma_{max} = \gamma l \leq [\sigma]. \quad (2.11)$$

В таблиці 1 додатку наведені значення допустимих напружень для деяких конструкційних матеріалів.

## 2.4. Особливості розв'язку трьох типів задач при осьовому розтягу (стиску)

З умов міцності (2.10), (2.11) можна отримати три типи задач (таблиця 2.1).

Таблиця 2.1

Тип задачі	При дії зовнішніх сил		
	зосереджених	зосереджених та власної ваги	власної ваги
1. Перевірка міцності	$\sigma_{max} = \frac{F}{A},$ $\sigma_{max} \leq [\sigma]$	$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \gamma l,$ $\sigma_{max} \leq [\sigma]$	$\sigma_{max} = \gamma l,$ $\sigma_{max} \leq [\sigma]$
2. Проектний розрахунок	$A \geq \frac{F}{[\sigma]}$	$A \geq \frac{N}{[\sigma] - \gamma l},$ $l_{гр} \leq \frac{[\sigma] - \frac{F}{A}}{\gamma}$	$l_{гр} \leq \frac{[\sigma]}{\gamma}$
3. Визначення максимального зовнішнього навантаження	$F_{max} \leq A[\sigma]$	$F_{max} \leq A([\sigma] - \gamma l)$	$\gamma_{max} \leq \frac{[\sigma]}{l}$

Тут в таблиці 2.1  $l_{sp}$  – гранично допустима довжина стрижня, при якій в поперечному перерізі стрижня  $\sigma_{max} = [\sigma]$ .

## 2.5. Поздовжні і поперечні деформації при розтягу (або стиску) зовнішніми зосередженими силами

**Абсолютна поздовжня деформація** визначається за формулою (рис. 2.4):

$$\Delta l = l_k - l. \quad (2.12)$$

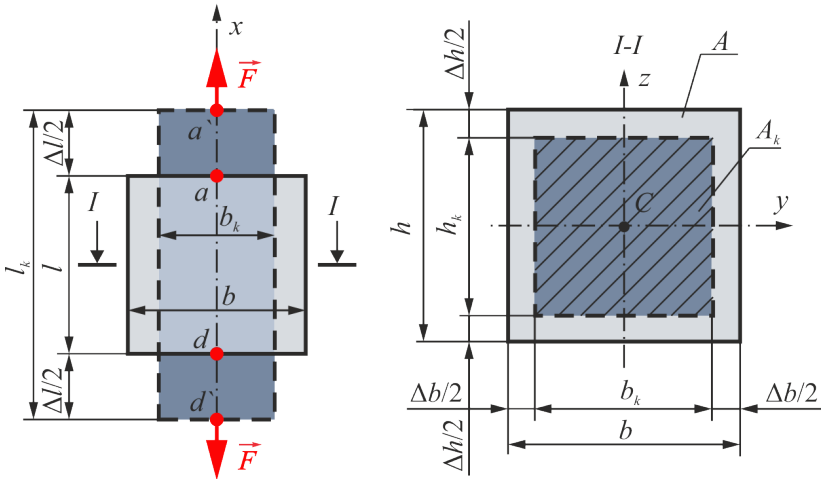


Рис. 2.4

**Відносна поздовжня деформація** визначається за формулою (рис. 2.4):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_k - l}{l}. \quad (2.13)$$

**Абсолютна поперечна деформація** визначається за формулою (рис. 2.4):

$$\Delta b = b_k - b; \quad \Delta h = h_k - h. \quad (2.14)$$

**Відносна поперечна деформація** визначається за формулою (рис. 2.4):

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b} = \frac{b_k - b}{b}, \quad \varepsilon'' = \frac{\Delta h}{h} = \frac{h_k - h}{h}. \quad (2.15)$$

Тобто, при розтягу стрижня його поперечні розміри зменшуються (поперечні деформації від'ємні), при стиску поперечні розміри збільшуються (поперечні деформації додатні).

Для пружних деформацій співвідношення між відносними поперечною і поздовжньою деформаціями при осьовому розтягу і стиску передається формулою:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \quad \varepsilon'' = -\mu\varepsilon. \quad (2.16)$$

Знак "мінус" вказує на протилежність зміни величин поперечної і поздовжньої деформацій. Абсолютна величина співвідношень

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|, \quad \mu = \left| \frac{\varepsilon''}{\varepsilon} \right|, \quad (2.17)$$

називається **коефіцієнтом Пуассона**, який характеризує пружні властивості матеріалу і визначається експериментально. Для різних матеріалів величина коефіцієнта Пуассона неоднакова. Значення його для деяких конструкційних матеріалів наведені в таблиці 2 додатку.

## 2.6. Закон Гука

Враховуючи прийняті раніше гіпотези (моделі) для конструкційних матеріалів і деформацій можна експериментально встановити залежність між напруженням і деформаціями при осьовому розтягу (або стиску). Крім того, з гіпотези Бернуллі випливає, що при розтягу (або стиску) перерізи, паралельні до навантаження, залишаються паралельними після навантаження. Для цього поздовжня абсолютна (або відносна) деформація повинна бути однакою по всьому поперечному перерізу:

$$\Delta l = const, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = const. \quad (2.18)$$

При пружних деформаціях між напруженнями і деформаціями існує лінійна залежність, яка носить назву **закону Гука**. Для випадку осьового розтягу (або стиску) закон Гука описується математичним виразом:

$$\sigma = \varepsilon E, \quad (2.19)$$

де  $E$  – коефіцієнт пропорційності, який має назву **модуль Юнга** (**модуль пружності** при розтягу або стиску, модуль пружності першого роду). Модуль  $E$  має розмірність напруження ( $МПа$ ) і характеризує пружні властивості матеріалу при розтягу і стиску. Для кожного матеріалу значення модуля являються сталою величиною і визначаються експериментально. В таблиці 3 додатку наведені значення модуля для деяких матеріалів.

## 2.7. Визначення деформацій

З рис. 2.1 видно – в поперечних перерізах  $A$  стрижня, навантаженого зовнішніми зосередженими силами  $F$ , діють постійні внутрішні зусилля  $N$ .

Запишемо формулу (2.19) у вигляді:

$$\varepsilon = \sigma/E. \quad (2.20)$$

Тоді враховуючи формулу (2.3), одержимо:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA}. \quad (2.21)$$

Враховуючи формулу (2.13), абсолютна поздовжня деформація матиме вигляд:

$$\Delta l = \varepsilon l. \quad (2.22)$$

Для частини стрижня довжиною  $x$  ( $0 \leq x \leq l$ ), отримаємо:

$$\Delta x = \left. \frac{Nx}{EA} \right|_{x=0}^{x=l}, \quad \Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad \text{або} \quad \Delta l = \frac{\sigma l}{E}. \quad (2.23)$$

Це формула Гука для абсолютних деформацій. З формули (2.23) видно, що величини деформацій змінюються по довжині розглянутої ділянки за законом прямої похилої. Величина  $EA$  називається **жорсткістю поперечного перерізу** стрижня при розтягу і стиску, а величина

$$C = EA/l.$$

називається **жорсткістю стрижня** при розтягу (стиску).

Розглянемо одночасну дію на стрижень зовнішніх зосереджених і розподілених (наприклад, власної ваги) сил (рис. 2.3). Виділимо в перерізі  $x$  елемент  $dx$ . Абсолютна поздовжня деформація елемента складає згідно (2.23)

$$\Delta dx = \frac{N(x)dx}{EA(x)}.$$

Знаючи, що для довільного перерізу поздовжнє внутрішнє зусилля визначається рівнянням (2.5), можна записати

$$\Delta dx = \frac{[F + \gamma A(x)x]dx}{EA(x)}.$$

Для стрижня, зображеного на рис. 2.3,  $E = \text{const}$ ,  $A(x) = A$  тобто  $EA = \text{const}$ .

Інтегруючи, одержимо повну деформацію частини стрижня довжиною  $x$ :

$$\Delta x = \int_0^x \frac{(F + \gamma Ax)dx}{EA} = \int_0^x \left( \frac{F}{EA} + \frac{\gamma x}{E} \right) dx = \frac{Fx}{EA} + \left. \frac{\gamma x^2}{2E} \right|_{x=0}^{x=l}.$$

Видно, що деформація стрижня по його довжині змінюється за законом параболи. Після перетворень повна деформація:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{\gamma l^2}{2E}. \quad (2.24)$$

Тобто, згідно принципу незалежності дії сил, повна деформація стрижня виникає від сумарної дії зосереджених і розподілених сил:

$$\Delta l = \Delta l_F + \Delta l_\gamma.$$

Якщо домножити і розділити на  $A$  другу складову формули (2.24), то одержимо:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{\gamma Al}{2EA} = \frac{Fl}{EA} + \frac{0.5Ql}{EA} = \frac{(F + 0.5Q)l}{EA}. \quad (2.25)$$

Тут  $Q$  – власна вага частини стрижня, деформацію якої визначають.

## 2.8. Визначення поздовжніх температурних деформацій

Розглянемо стрижень, що складається з мідної і сталевих ділянок (рис. 2.5).

Стрижень знаходиться при початковій температурі навколишнього середовища  $t^0$  °С. Змінимо температуру ділянок, наприклад, до якогось нового значення  $t_k^0$  °С. Зміна температури складає:

$$\Delta t^0 = t_k^0 - t^0. \quad (2.26)$$

Тут  $\Delta t^0 > 0$  – нагрівання;  $\Delta t^0 < 0$  – охолодження.

Згідно принципу суперпозиції, повна температурна деформація стрижня складається з суми температурних деформацій мідної та сталевих ділянок:

$$\Delta l^t = \Delta l_M^t - \Delta l_C^t = \alpha_M \Delta t^0 l_1 + \alpha_C \Delta t^0 l_2 = \Delta t^0 (\alpha_M l_1 + \alpha_C l_2), \quad (2.27)$$

де  $\alpha_M$  – температурний коефіцієнт лінійного розширення міді;  $\alpha_C$  – температурний коефіцієнт лінійного розширення сталі. –  $\alpha_C$ .

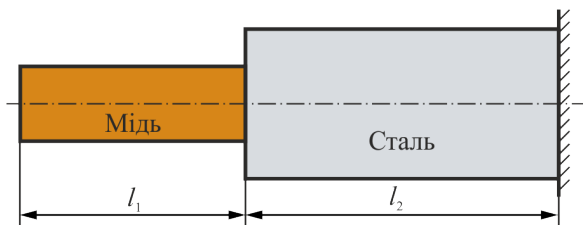


Рис.2.5

В таблиці 4 додатку наведені температурні коефіцієнти лінійного розширення деяких матеріалів.

В загальному випадку, згідно принципу суперпозиції, при одночасній дії навантажень у вигляді зосереджених, розподілених сил та температур, повна деформація стрижня являє собою алгебраїчну суму складових деформацій.

## 2.9. Визначення переміщень поперечних перерізів стрижня. Епюра переміщень. Умова жорсткості

З викладеної раніше гіпотези Бернуллі витікає, що в процесі деформації при осьовому розтягу (або стиску) поперечні перерізи прямого стрижня зміщуються вздовж його осі, залишаючись перпендикулярними осі стрижня, а значить, паралельними між собою.

Згідно загального поняття деформацій, **лінійна деформація** при осьовому розтягу (або стиску) – це зміна поздовжніх і поперечних розмірів стрижня, або його ділянок.

**Переміщеннями** поперечних перерізів стрижня при осьовому розтягу (або стиску) можна назвати зміну їх положення відносно нерухомого або довільного перерізів, взятих за початок відліку.

Закономірність розподілу переміщень поперечних перерізів по довжині стрижня показують на відповідних епюрах.

Побудуємо епюру переміщень  $\delta$  поперечних перерізів для випадку осьового розтягу тільки зовнішньою зосередженою силою  $F$  (рис. 2.6, а).

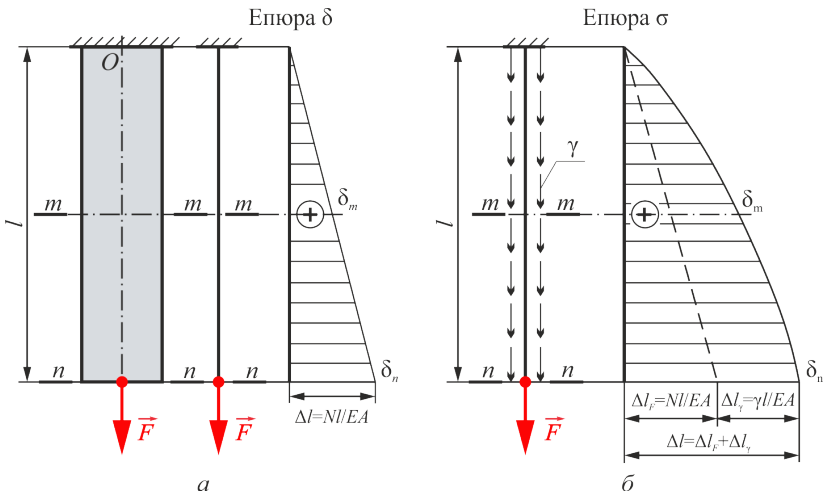


Рис. 2.6

Оскільки з виразу (2.23) відомо, що для такого випадку епюра переміщень має вигляд прямої, похилої, то достатньо двох значень для її побудови. За початок відліку приймається нерухомий переріз в закріпленні, за друге значення приймаємо повну деформацію стрижня  $\Delta l$ , що знаходиться з виразу (2.23). З епюри видно, що переміщення вільного кінця стрижня рівне повній його деформації. Користуючись епюрою, можна визначити переміщення  $\delta_m$  довільного перерізу  $m$ - $m$ .

При розтягу (або стиску) стрижня зовнішніми зосередженими і розподіленими силами, деформації, як відомо з (2.24), змінюються за законом параболі. Епюра переміщень  $\delta$  має вигляд, як на рис. 2.6, б.

В загальному випадку переміщення якого-небудь поперечного перерізу складається з алгебраїчної суми деформацій ділянок, розміщених між даним перерізом і початком відліку.

Для забезпечення нормальної роботи конструкції переміщення перерізів, або деформації їх елементів обмежують **допустимими деформаціями або переміщеннями** ( $[l]$ ,  $[\varepsilon]$ ,  $[\delta]$ ).

Порівняння дійсних переміщень і деформацій з допустимими можна подати у вигляді математичних виразів:

$$\Delta l \leq [\Delta l], \quad \varepsilon \leq [\varepsilon], \quad \delta \leq [\delta], \quad (2.28)$$

які називають **умовою жорсткості** при розтягу (або стиску). При цьому реальні переміщення чи деформації можуть перевищувати допустимі до 5 %.

## 2.10. Східчастий стрижень

**Східчастий стрижень** – такий, що складається з ділянок, в межах яких поперечний переріз постійний (рис. 2.7).

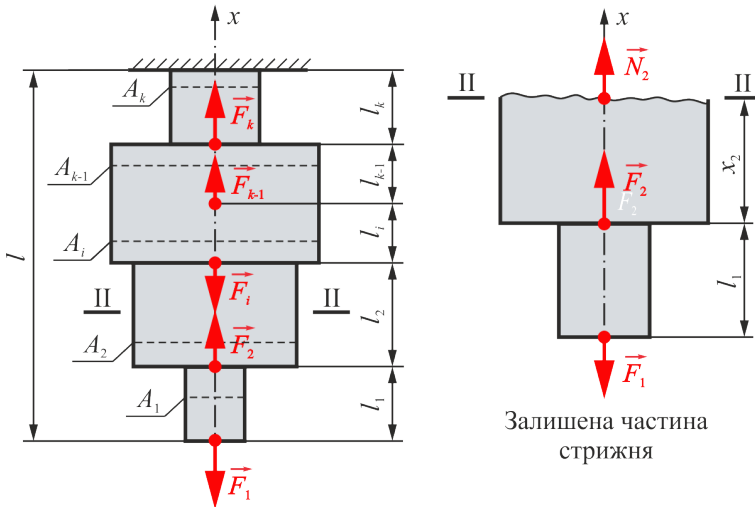


Рис. 2.7

Розглянемо випадок, коли діють лише зосереджені зовнішні сили. Кожна ділянка східчастого стрижня розглядається як односхідчастий стрижень, закріплений з одного боку і навантажений зовнішньою силою з іншого. Для побудови епюри  $N$  виникає необхідність визначення внутрішніх сил на ділянках такого стрижня. Знайдемо, наприклад, таку

силу для другої ділянки (рис.2.7). При цьому направимо  $N_2$  обов'язково розтягуючою (від перерізу), тобто додатною.

Згідно методу перерізів:

$$\sum X = 0: N_2 + F_2 - F_1 = 0, \text{ звідки } N_2 = F_1 - F_2.$$

Видно, що:  $F_1$  – розтягуюча (направлена від перерізу),  $F_2$  – стискаюча (направлена до перерізу).

Встановимо наступне **правило знаків: в рівняння внутрішньої поздовжньої сили для довільного поперечного перерізу входять зі своїми знаками зовнішні сили, які діють на залишену частину стрижня (знак "+", якщо зовнішні сили розтягуючі, знак "-", якщо стискаючі).**

Так, для поперечного перерізу довільної  $i$ -ої ділянки східчастого стрижня рівняння внутрішньої поздовжньої сили має вигляд:

$$N_i = \sum_{i=1}^k \pm F_i. \quad (2.29)$$

Якщо  $N_i > 0$ , то вона розтягуюча (направлена від поперечного перерізу), якщо  $N_i < 0$  – стискаюча (направлена до поперечного перерізу).

При відомій площі поперечного перерізу  $i$ -ої ділянки можна перевірити її міцність і знайти деформацію:

$$\sigma_i = N_i/A_i, \quad \sigma_i \leq [\sigma]; \quad \Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i} \quad \text{або} \quad \Delta l_i = \frac{\sigma_i l_i}{E_i}.$$

Необхідну площу поперечного перерізу можна знайти за формулою:

$$A_i \geq N_i/[\sigma].$$

Аналогічні розрахунки можна виконати, якщо врахувати одночасну дію зовнішніх та розподілених (наприклад, власної ваги) сил. Згідно закону зміни (2.5) внутрішньої сили по довжині ділянки, а також виразу (2.34) для  $k$ -ї ділянки східчастого стрижня (рис. 2.7) маємо:

$$N_{kmin} = \sum_{i=1}^k \pm F_i + \sum_{i=1}^{k-1} \pm Q_i - \text{початок ділянки}, \quad (2.30)$$

$$N_{kmax} = \sum_{i=1}^k \pm F_i + \sum_{i=1}^k \pm Q_i - \text{кінець ділянки}, \quad (2.31)$$

де  $Q_i$  – вага  $i$ -ої ділянки.

Тоді для  $k$ -ої ділянки:

$$\sigma_{kmax} = N_{kmax}/A_k, \quad A_k \geq N_{kmax}/[\sigma],$$

$$\Delta l_k = \frac{N_{kmin} l_k}{E_k A_k} + \frac{Q_k l_k}{2 E A_k}. \quad (2.32)$$

## 2.11. Рациональне проектування

При проектуванні стрижнів потрібно домагатися найбільш ефективного використання конструкційного матеріалу, досягаючи при цьому необхідної міцності. Коли у перерізах стрижня нормальні напруження менші допустимих, тобто  $\sigma_i < [\sigma]$ , конструкційний матеріал працює з недолантаженням, і використовується нерационально.

Завжди можна спроектувати стрижень, в поперечних перерізах якого, або на його ділянках, напруження  $\sigma_i = [\sigma]$ . В цьому випадку матимемо стрижень, запас міцності якого по перерізах, або на ділянках однаковий – **рівномісний стрижень, або стрижень однакового опору**.

Для одночасної дії зовнішньої зосередженої і розподіленої (власної ваги) сил ідеальний стрижень однакового опору, а також епюри  $N$ ,  $\sigma$ ,  $\delta$  наведені на рис. 2.8.

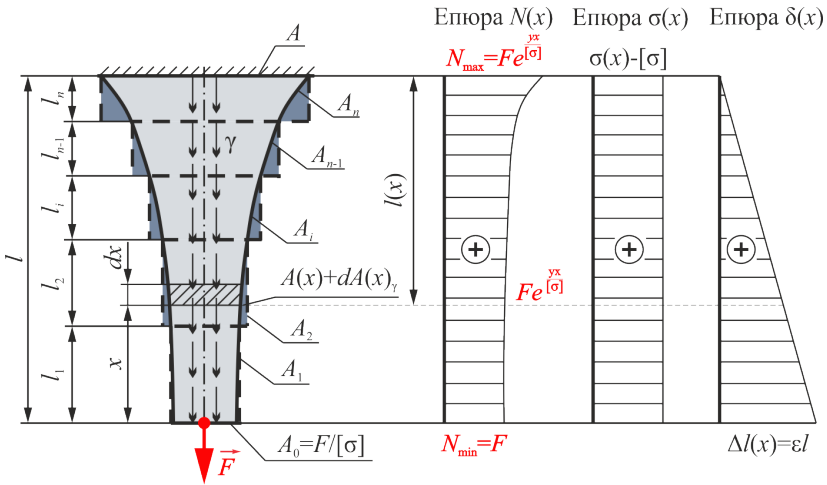


Рис. 2.8

Розглянемо етапи проектування такого стрижня однакового опору, при незмінній конфігурації площі поперечного перерізу.

З умови міцності площа перерізу вільного кінця стрижня:

$$A_0 = N_{min} / [\sigma] = F / [\sigma]. \quad (2.33)$$

Розітнемо стрижень перерізами на відстанях  $x$  і  $x+dx$  від вільного кінця. Тоді:

$A(x)$  – площа поперечного перерізу стрижня на відстані  $x$  ;

$A(x)+dA(x)$  – площа поперечного перерізу стрижня на відстані  $x+dx$  ;

$Q(x)$  – власна вага елемента довжиною  $x$ ;

$\gamma A(x)dx$  – власна вага елемента довжиною  $dx$ .

Згідно визначення стрижня однакового опору, нормальні напруження у перерізах  $x$  та  $x+dx$  повинні рівнятися допустимому.

Для перерізу  $x$ :

$$N(x) = F + Q(x); \quad (2.34)$$

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} = [\sigma];$$

$$\frac{F+Q(x)}{A(x)} = [\sigma]. \quad (2.35)$$

Для перерізу  $x+dx$ :

$$N(x + dx) = F + Q(x) + \gamma A(x)dx;$$

$$\sigma(x + dx) = \frac{N(x+dx)}{A(x)+dA(x)} = [\sigma];$$

$$\frac{F+Q(x)+\gamma A(x)dx}{A(x)+dA(x)} = [\sigma].$$

Після перетворень отримаємо

$$\frac{F+Q(x)+\gamma A(x)dx}{[\sigma]} = A(x) \left[ 1 + \frac{dA(x)}{A(x)} \right].$$

Звідки

$$\frac{dA(x)}{A(x)} = \frac{F+Q(x)+\gamma A(x)dx}{A(x)[\sigma]} - 1 = \frac{F+Q(x)}{A(x)[\sigma]} + \frac{\gamma dx}{[\sigma]} - 1.$$

Остаточно після скорочень, з урахуванням (2.35)

$$\frac{dA(x)}{A(x)} = \frac{\gamma dx}{[\sigma]}. \quad (2.36)$$

Інтегрування виразу (2.36) дає:

$$\int_0^l \frac{dA(x)}{A(x)} = \int_0^l \frac{\gamma dx}{[\sigma]},$$

$$\ln A(x) + C_1 = \frac{\gamma x}{[\sigma]} + C_2, \quad (2.37)$$

де  $C_1, C_2$  – постійні інтегрування.

Нехай вираз  $C_2 - C_1 = C$ , тоді вираз (2.37) прийме вигляд

$$\ln A(x) = \frac{\gamma x}{[\sigma]} + C.$$

Звідки

$$A(x) = e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]} + C}. \text{ При } x = 0 \text{ матимемо } A(x) = A_0 = e^C.$$

Остаточно, з урахуванням (2.33):

$$A(x) = A_0 e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]}}; \quad (2.38)$$

$$A(x) = \frac{F}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]}}. \quad (2.39)$$

Вирази (2.38), (2.39) відображають закон зміни площі поперечного перерізу стрижня однакового опору, згідно якого одержують стрижень, приведений на рис. 2.8.

Найбільша його площа в закріпленні, при  $x = l$ :

$$A_{max} = A_0 e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}}, \text{ або } A_{max} = \frac{F}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}}. \quad (2.40)$$

Знайдемо з виразу (2.35) власну вагу відсіченої частини стрижня з урахуванням (2.33)

$$Q(x) = [\sigma]A(x) - F = [\sigma]A_0 e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]}} - F = F \left[ e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]}} - 1 \right]. \quad (2.41)$$

Об'єм матеріалу відсіченої частини

$$V(x) = \frac{Q(x)}{\gamma} = \frac{[\sigma]A_0 e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]}} - F}{\gamma}. \quad (2.42)$$

Повна вага стрижня однакового опору (при  $x = l$ ), з урахуванням (2.41)

$$Q = F \left[ e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} - 1 \right]. \quad (2.43)$$

Знайдемо закон зміни поздовжньої внутрішньої сили з виразів (2.34), (2.41) по довжині

$$N(x) = F + F \left[ e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]}} - 1 \right] = F e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]}}. \quad (2.44)$$

Підставляючи значення, будемо епюру поздовжньої внутрішньої сили (рис.2.8).

Визначимо закон зміни переміщень перерізів. Так як напруження в перерізах  $\sigma(x)=[\sigma]$  (рис.2.8), то

$$\varepsilon = \frac{[\sigma]}{E} = const. \quad (2.45)$$

Абсолютне подовження стрижня з урахуванням (2.13)

$$\Delta l(x) = \varepsilon l(x) = \frac{[\sigma]}{E} l(x). \quad (2.46)$$

Тобто, переміщення довільного перерізу пропорційні відстані  $l(x)$  від закріплення стрижня. Будемо епюру переміщень (рис.2.8).

Рівномісний стрижень нетехнологічний (рис. 2.8). Практично легше виготовити східчастий стрижень, показаний пунктиром на рис. 2.8. Видно, що на межах ділянок нормальні напруження  $\sigma_i=[\sigma]$ . Такий стрижень більш технологічний, але менш економічний по матеріалу в порівнянні з рівномісним стрижнем.

**Раціональне проектування** – створення найбільш досконалої конструкції для заданих умов експлуатації. В процесі раціонального проектування східчастих стрижнів часто виникає необхідність встановити очікувану економію матеріалу від зміни розмірів поперечного перерізу або матеріалу стрижня.

В загальному вигляді економію матеріалу можна порахувати за формулою

$$\eta = \frac{Q_3 - Q_p}{Q_3} \cdot 100\% = \left( 1 - \frac{Q_p}{Q_3} \right) \cdot 100\%, \quad (2.47)$$

де:  $Q_3$  – вага матеріалу, що входить до заданої конструкції стрижня;  $Q_p$  – вага матеріалу, що входить до раціональної конструкції стрижня.

Для стрижня, що має  $n$ -ділянок, з яких  $k$  – підлягає раціональному проектуванню, можна порахувати вагу матеріалу  $i$ -ї ділянки:

$$\text{для заданої} - Q_{3i} = \gamma_{3i} A_{3i} l_{3i};$$

$$\text{для раціональної} - Q_{pi} = \gamma_{pi} A_{pi} l_{pi}.$$

Тут:  $\gamma_{3i}, \gamma_{pi}$  – питома вага матеріалів;  $A_{3i}, A_{pi}$  – площі поперечних перерізів;  $l_{3i}, l_{pi}$  – довжини ділянок.

Підставивши в (2.47), одержимо

$$\eta = \left[ 1 - \frac{\sum_{i=1}^k \gamma_{pi} A_{pi} \rho_{pi}}{\sum_{i=1}^k \gamma_{zi} A_{zi} \rho_{zi}} \right] \cdot 100\%. \quad (2.48)$$

Якщо  $\eta > 0$  – економія матеріалу можлива, при  $\eta < 0$  – економія неможлива.

Для випадку, коли проектується тільки  $i$ -та ділянка, без зміни матеріалу  $i$ -ої довжини, ( $\gamma_{zi} = \gamma_{pi}$ ,  $l_{zi} = l_{pi}$ ), формула (2.48) приймає вигляд

$$\eta = \left[ 1 - \frac{A_{pi}}{A_{zi}} \right] \cdot 100\%. \quad (2.49)$$

Виразимо площі через зусилля і напруження для  $i$ -ї ділянки

$$A_{pi} = \frac{N_i}{[\sigma]}, A_{zi} = \frac{N_i}{\sigma_{zi}}.$$

Тоді для цієї ділянки стрижня економія складає

$$\eta = \left[ 1 - \frac{\sigma_{zi}}{[\sigma]} \right] \cdot 100\%. \quad (2.49)$$

В загальному вигляді раціональне проектування стрижнів можна означити наступними основними етапами:

- 1) пошук небезпечного поперечного перерізу;
- 2) визначення у такому перерізі небезпечних точок;
- 3) складання умов міцності для цих точок;
- 4) визначення розмірів поперечного перерізу, задовольняючих умову міцності.

**Усі перерізи можна умовно поділити на сортаментні (профілі) і несортаментні (розрахункові). Типорозміри профілів зведені в таблиці сортаменту, а для несортаментних перерізів їх необхідно рахувати.**

Порядок раціонального проектування стрижнів сортаментного та розрахункового перерізів відрізняються.

Для сортаментних профілів використовують фіксовані типорозміри, запропоновані стандартами, з умови, що

$$A_c \geq A_p, \quad (2.50)$$

де:  $A_c$  – значення площі поперечного перерізу за таблицями сортаменту;

$A_p = \frac{N}{[\sigma]}$  – розрахункове (раціональне) значення площі поперечного перерізу.

Для розрахункових перерізів можна, наприклад, використати визначальний розмір, а також дані, наведені в таблиці 5 додатку

$$A_p = \alpha \cdot b^2.$$

Звідки

$$b = \sqrt{\frac{A_p}{\alpha}}, \quad (2.51)$$

де:  $b$  – визначальний розмір перерізу;  $\alpha$  – коефіцієнт форми перерізу (табл. 5 додатку).

Поєднавши з формулою проектного розрахунку (табл. 2.1), отримаємо:

$$ab^2 \geq \frac{N}{[\sigma]}.$$

Остаточню визначальний розмір перерізу

$$b \geq \sqrt{\frac{N}{\alpha[\sigma]}}. \quad (2.52)$$

## 2.12. Експериментальне визначення механічних характеристик конструкційних матеріалів

При вивченні осьового розтягу і стиску стрижнів розглянути деякі поняття, що характеризують властивості матеріалу. Це закон Гука, модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, допустиме напруження і т.п. При цьому розрахункові формули були одержані з умов, окреслених прийнятими гіпотезами курсу. Вся ця інформація розглядалася в загальному підході без посилання на конкретний конструкційний матеріал, але може бути завжди перевірена експериментально для окремих матеріалів. Це допомагає отримати для них порівняльні загальні величини певних показників.

**Механічні характеристики матеріалу** – сукупність конкретних показників, одержаних експериментально в результаті випробування зразків даного матеріалу.

Врахування результатів експериментальних випробувань дозволяє забезпечувати міцність елементів та конструкцій, що проектується. Найбільш поширеними являються випробування на осьовий розтяг і стиск. Вони дають можливість отримати найбільш важливі механічні характеристики матеріалів і відрізняються простотою методики.

### 2.12.1. Випробування на розтяг

#### 2.12.1.1. Зразки для випробувань

Щоб результати експерименту можна було порівнювати, дослідні зразки повинні мати стандартні розміри і форму. Один з найбільш поширених типів зразків наведений на рис. 2.9.

Робоча довжина зразка  $l_0$  починається на відстанях  $0,5d_0$  від основи конусної частини для врахування принципу Сен-Венана. Робочі розміри зразка взаємозв'язані:

$$\frac{l_0}{d_0} = 10 \text{ для нормальних зразків;}$$

$$\frac{l_0}{d_0} = 5 \text{ для вкорочених зразків.}$$

Так як площа поперечного перерізу

$$A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4},$$

то

$$d_0 = \sqrt{\frac{4A_0}{\pi}} = 1,13\sqrt{A_0}.$$

Тоді:

$$l_0 = 10d_0 = 11,3\sqrt{A_0} - \text{для нормальних зразків;}$$

$$l_0 = 5d_0 = 5,65\sqrt{A_0} - \text{для вкорочених зразків.}$$

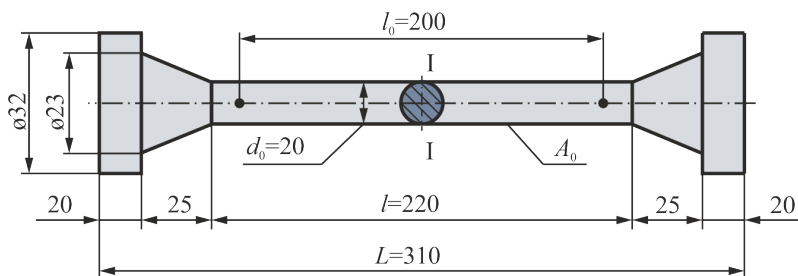


Рис. 2.9

Випробування зразків на розтяг проводять на спеціальних машинах, де їм надають вимушених поздовжніх деформацій. Переміщення супорта машини проводиться плавно зі швидкістю не більше 20 мм/хв. За таких умов випробування навантаження зразка вважають **статичним**.

### 2.12.1.2. Діаграми розтягу

Діаграмний механізм випробувальної машини викреслює графік залежності між розтягуючою силою ( $F$ ) і відповідною їй лінійною деформацією ( $\Delta l$ ) зразка. Такий графік називається **діаграмою розтягу**, або **машинною діаграмою**.

Щоб мати безпосередні дані про механічні властивості матеріалу зразка, виключають вплив абсолютних розмірів зразка, і машинну діаграму будують в інших координатах. При цьому: дані по осі  $\Delta l$  ділять на початкову величину  $l_0$ ; дані по осі  $F$  ділять на початкову площу поперечного перерізу  $A_0$ . Отримується графік (діаграма) залежності між нормальними напруженнями і відносними деформаціями, в координатах ( $\sigma$ - $\epsilon$ ), де:

$$\sigma = \frac{F}{A_0}; \quad (2.53)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} 100\%. \quad (2.54)$$

Так як в (2.53) не враховується зміна абсолютних розмірів, то діаграма ( $\sigma$ - $\varepsilon$ ) є **умовною**.

Умовна діаграма достатньо грубо характеризує механічні властивості матеріалу. Для більш глибокого вивчення властивостей будують **дійсну** діаграму. Тут враховують дійсні напруження шляхом ділення зусиль на дійсну площу поперечного перерізу зразка в даний момент випробувань.

### 2.12.1.3. Діаграми розтягу для низьковуглевої сталі (вміст вуглецю $0,1 \div 0,3 \%$ )

На рис. 2.10 наведена типова машинна діаграма розтягу зразка низьковуглецевої сталі Ст. 3 (вміст вуглецю до 0,22 %), що має відмінні пластичні властивості.

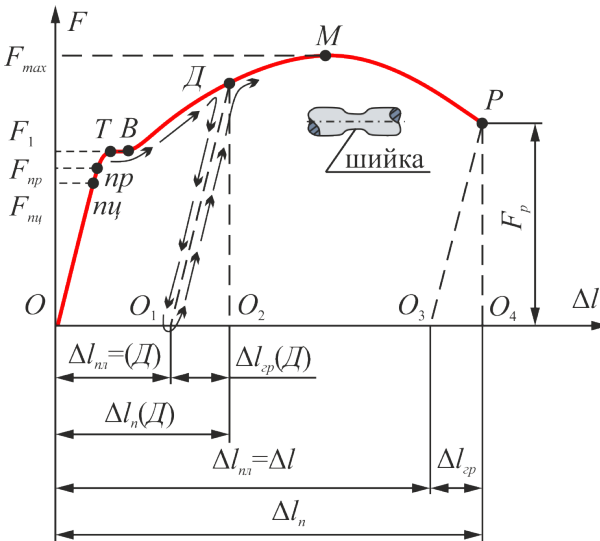


Рис. 2.10

Діаграма може бути умовно поділена на п'ять ділянок.

$O_1O_2$  – ділянка **пропорційності**. Тут матеріал підлягає закону Гука

$$\Delta l = \frac{F l_0}{E A_0}$$

*OP* – ділянка **пружності**. Тобто, при навантаженні зразка до точки *Pr* діаграми, в ньому виникають тільки пружні деформації.

*TB* – ділянка **текучості**, або площадка текучості. Тут відбувається значне збільшення довжини зразка без помітного зростання навантаження. Найявність площадки текучості для різних матеріалів не являється характерною.

*BM* – ділянка **зміцнення**. Наростання деформацій супроводжується зростанням навантажень. В процесі зміцнення матеріалу зразка (**наклепу**) визначається найбільш слабе місце для наступного розриву і починає утворюватися **шийка** – місце звуження зразка.

*MP* – ділянка місцевої текучості, або зменшення діаметра шийки, так як деформація зразка проходить при зменшенні сили. Точка *P* відповідає розриву зразка.

На рис. 2.11 наведені діаграми напружень: умовна і дійсна. Вищевказані ділянки будуть аналогічні і для цих діаграм.

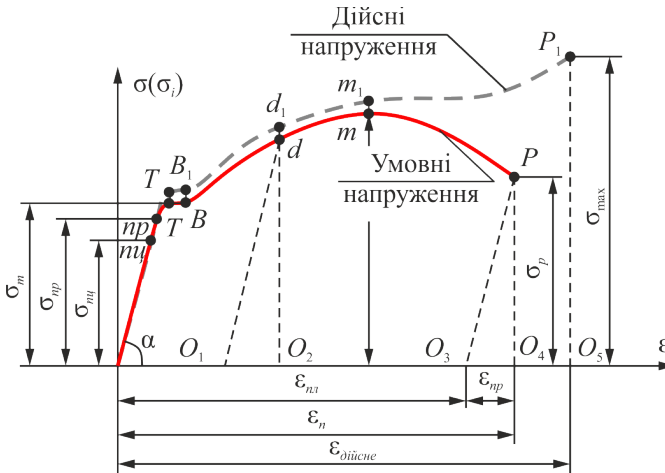


Рис. 2.11

З рис. 2.10 та 2.11 видно, що повна деформація зразка при розриві складається з пластичної і пружної деформацій:

$$\Delta l_n = \Delta l_{пл} + \Delta l_{пр} \text{ – абсолютна (умовна діаграма);}$$

$$\epsilon_n = \epsilon_{пл} + \epsilon_{пр} \text{ – відносна (умовна діаграма).}$$

Аналогічно повна деформація визначається для кожної точки діаграм (рис. 2.10, 2.11), що розташовані вище ділянки пружності.

### 2.12.1.4. Характеристики міцності

Ординати характерних точок умовної діаграми напружень дають можливість визначити умовні **характеристики міцності** випробуваного матеріалу.

**Границя пропорційності** – найбільше напруження, для якого виконується закон Гука

$$\sigma_{nc} = \frac{F_{nc}}{A_0}. \quad (2.55)$$

Для сталі Ст. 3  $\sigma_{nc} = 195 \div 200 \text{ МПа}$ .

Тангенс кута нахилу пропорційної ділянки *ОПц* (рис. 2.11) до осі абсцис являє собою вже відомий модуль поздовжньої пружності (модуль Юнга)

$$E = tg \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (2.56)$$

**Границя пружності** – найбільше напруження, при якому відносні пластичні деформації відсутні, або незначні і характеризуються допустимими значеннями (наприклад:  $0,001 \div 0,005 \%$  і т.д.)

$$\sigma_{np} = \frac{F_{np}}{A_0}. \quad (2.57)$$

Границя пружності для маловуглецевих сталей мало відрізняється від границі пропорційності. В інженерних розрахунках ці характеристики часто ототожнюють. Для сталі марки Ст. 3 границя пружності складає  $\sigma_{np} = 205 \div 210 \text{ МПа}$ .

**Границя текучості** – найменше напруження, при якому виникає збільшення деформацій без помітного зростання навантаження

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}. \quad (2.58)$$

Деформації текучості в 10-20 разів перевищують деформації в межах закону Гука. Для сталі Ст. 3 довжина площадки текучості може складати до 2,5 % повного подовження. Чим жорсткіший матеріал, тим менша площадка текучості. В тих випадках, коли на діаграмі відсутня явно виражена площадка текучості, знаходять **умовну границю текучості**, при якій  $\varepsilon=0,2 \%$ , або  $\varepsilon=0,5 \%$ . Умовну границю текучості позначають, відповідно, через  $\sigma_{0,2}$  або  $\sigma_{0,5}$ . Щоб отримати таку характеристику, необхідно на діаграмі напружень по осі абсцис відкласти задану відносну деформацію ( $\varepsilon=0,2 \%$ , або  $\varepsilon=0,5 \%$ ) і провести пряму, паралельну ділянці пропорційності. Ордината точки перетину прямої з діаграмою і буде шукана величина напруження.

На робочій поверхні зразка текучість проявляється у вигляді сітки полос (лінії Людерса-Чернова), що нахилені під кутом приблизно  $45^\circ$  до осі зразка. Для сталі Ст. 3 границя текучості знаходиться в межах

$$\sigma_T = 215 \div 255 \text{ МПа}.$$

**Границя міцності (тимчасовий опір)** – напруження, що відповідає найбільшому навантаженню, яке витримує зразок

$$\sigma_{mч} = \frac{F_{max}}{A_o}. \quad (2.59)$$

Для сталі Ст. 3 границя міцності

$$\sigma_{mч} = 345 \div 390 \text{ МПа}.$$

До моменту утворення шийки пластичні деформації досягають значень 20÷25 %. Ці та інші процеси приводять до виникнення місцевих мікронапружень, які викликають появу сітки мікротріщин. Інтенсивно розвивається процес злиття мікротріщин у макротріщину, яка розташована перпендикулярно осі зразка. Коли макротріщина досягає критичного розміру, настає процес швидкого неконтрольованого руйнування – розрив зразка.

**Розривне напруження** – напруження у небезпечному перерізі зразка в момент його розриву

$$\sigma_p = \frac{F_p}{A_o}. \quad (2.60)$$

**Дійсне розривне напруження** вище границі міцності на 60-70 % і знаходиться за формулою

$$\sigma_{max} = \frac{F_p}{A_{ш}}. \quad (2.61)$$

де  $A_{ш}$  – площа поперечного перерізу зразка в місці розриву.

### 2.12.1.5. Характеристики пластичності

В інженерній практиці велике значення мають **характеристики пластичності** конструкційного матеріалу.

**Відносне залишкове подовження** при розриві

$$\delta = \frac{l_k - l_o}{l_o} \cdot 100\%, \quad (2.62)$$

де  $l_k$  – довжина робочої частини зразка після розриву. Для сталі Ст. 3  $\delta = 23 \div 27$  % .

**Відносне поперечне звуження** перерізу в місці розриву

$$\psi = \frac{A_o - A_{ш}}{A_o} \cdot 100\%, \quad (2.63)$$

де  $A_{ш}$  – площа поперечного перерізу зразка в місці шийки. Для сталі Ст. 3  $\psi = 60 \div 70$  % .

Чим більші значення характеристик  $\delta$  і  $\psi$ , тим пластичніший конструкційний матеріал.

### 2.12.1.6. Процеси, виникаючі в матеріалах при деформації

Тверді тіла поділяються на аморфні і кристалічні. Всі конструкційні сталі складаються з множини хаотично розташованих

кристаликів, мають полікристалічну структуру. В кристалі атоми металу утворюють об'ємну кристалічну решітку, де між ними існують сили взаємодії. Відомо, що при великій відстані між двома атомами виникає сила взаємного притягання, при малій – відштовхування.

Під дією зовнішніх сил кристалічна решітка деформується, атоми зміщуються, сили взаємодії між ними змінюються. При пропорційній залежності між зміщенням точок тіла і зовнішніми силами має місце закон Гука. Пружні властивості пояснюються тим, що після припинення дії зовнішніх сил атоми знову займають в кристалічній решітці вихідне положення, а геометричні розміри тіла повністю відновлюються.

Утворення пластичних деформацій зв'язане з критичним зсувом в кристалічній решітці. Як уже відмічалось, при досягненні границі текучості, гладка поверхня зразка покривається **сіткою полос ковзання** (рис. 2.12).

Напрямок полос ковзання близький  $45^\circ$  до поздовжньої осі зразка, що практично співпадає з площинами максимальних дотичних напружень (викладено в теорії напруженого стану).

Наряду з пластичними деформаціями працює і інший механізм – виникнення і розвиток тріщин. В результаті одночасної дії таких двох механізмів настає руйнування зразка – розрив.

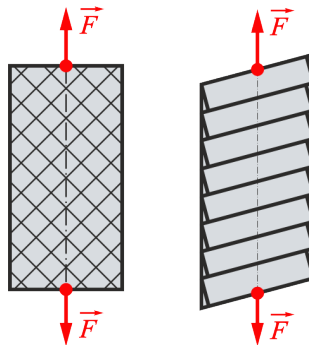


Рис. 2.12

### 2.12.1.7. Закон розвантаження

Звернемось до процесу, що відображений діаграмою на рис. 2.10. Якщо зразок навантажити до стану, що відповідає точці  $D$  діаграми, не допускаючи виникнення сітки, то процес розвантаження піде уже по прямій  $DO$ , паралельно ділянці  $OP_{ц}$  діаграми. У зв'язку з цим видно, що деформація при такому розвантаженні повністю не зникає, вона тільки зменшується на величину пружної частини подовження –  $\Delta l_{пр}(D)$ .

Відрізок  $OO_1$  являє собою пластичне подовження. Тобто відрізок  $OO_2$  відповідає повній деформації розтягу для точки  $D$  діаграми,

$$\Delta l_n(D) = \Delta l_{np}(D) + l_{nl}(D),$$

або у відносних деформаціях

$$\frac{\Delta l_n(D)}{l_0} = \frac{\Delta l_{np}(D)}{l_0} + \frac{l_{nl}(D)}{l_0}.$$

Тобто

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{np} + \varepsilon_{nl}.$$

При усіх навантаженнях і розвантаженнях в межах ділянки  $OP$  виникають тільки пружні деформації ( $\Delta l_{nl}=0$ ). Діаграма повторного навантаження починається з точки  $O_1$  і приймає вид кривої  $O_1DMP$ , тобто вкорочена діаграма. Відрізок  $O_2D$  відповідає силі попереднього навантаження і значно більший відрізку  $OP$ . Тобто, в результаті попередньої витяжки матеріал зміцнюється і набуває властивості сприймати більші навантаження. Таке явище називається **наклепом** і широко використовується як технологічна операція. Наприклад, такій обробці піддають арматуру бетонних плит (напружений бетон), троси, ланцюги, торсіони і т.д.

### 2.12.1.8. Робота, витрачена на деформацію

Для визначення роботи, витраченої на деформацію зразка, розглянемо діаграму ( $F - \Delta l$ ) в довільний момент випробувань (рис. 2.13).

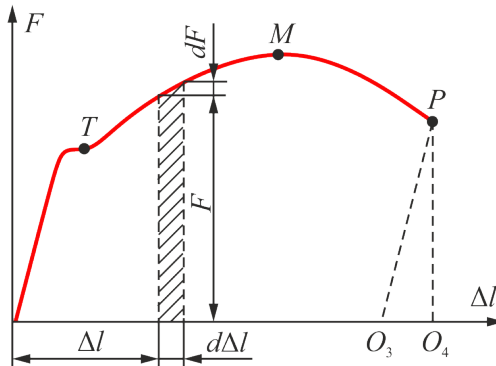


Рис. 2.13

За час приросту деформації на величину  $d\Delta l$  в зразку буде зберігатися осьова сила опору  $N \approx F$  (змінюючи силу на  $dF$  нехтуємо). Для отримання

такого приросту деформації необхідно виконати елементарну роботу (рівну елементарній заштрихованій площі, окресленій діаграмою).

$$dW = Fd\Delta l = dA.$$

Очевидно, що на протязі випробування на розтяг, необхідна робота буде:

$$W = \int_0^{\Delta l} Fd\Delta l = A. \quad (2.64)$$

Тобто, графічно цей інтеграл (а значить повна робота) являє собою площу, обмежену діаграмою  $OTMPO_4$ . При цьому, площа трикутника  $PO_3O_4$  – це є робота, витрачена на пружну деформацію, а інша частина – робота, витрачена на пластичну деформацію зразка.

В межах ділянки пружності діаграми повна робота деформації визначається площею заштрихованого трикутника (рис. 2.14, а)

$$W_{np} = F\Delta l/2. \quad (2.65)$$

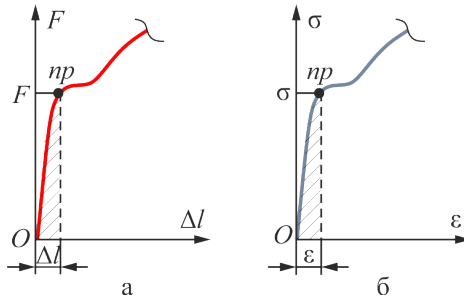


Рис. 2.14

В пружно-деформованому стрижні, за рахунок переміщень точок перерізів, накопичується потенціальна енергія, яка за модулем дорівнює роботі зовнішніх сил

$$U_{np} = W_{np} = \frac{F\Delta l}{2}. \quad (2.66)$$

Для внутрішніх сил при

$$N = F, \quad \Delta l = \frac{Nl_0}{EA_0},$$

потенціальна енергія пружних деформацій (по модулю) дорівнює

$$U_{np} = \frac{N}{2} \cdot \frac{Nl_0}{EA_0} = \frac{N^2 l_0}{2EA_0}. \quad (2.67)$$

**Питома робота деформацій** – така, що витрачена на деформування одиниці об'єму матеріалу робочої частини зразка

$$w = \frac{W}{V_0}, \quad V_0 = A_0 l_0.$$

**Питома потенціальна енергія** – потенціальна енергія, віднесена до початкового об'єму матеріалу робочої частини зразка

$$u = \frac{U}{V_0} = \frac{W}{V_0}.$$

Тоді для пружно-деформованого стану

$$u_{\text{пр}} = w_{\text{пр}} = \frac{\frac{1}{2}F\Delta l}{A_0 l_0} = \frac{\sigma \epsilon}{2}. \quad (2.68)$$

Тобто, питома робота (питома потенціальна енергія) деформації у межах пружності – це  $\epsilon$  за модулем площа трикутника на діаграмі ( $\sigma$ – $\epsilon$ ) (рис. 2.14, б).

Для внутрішніх сил питома потенціальна енергія (за модулем)

$$u_{\text{пр}} = \frac{\frac{N^2 l_0}{2EA_0}}{A_0 l_0} = \frac{N^2}{2EA_0^2} = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (2.69)$$

Слід підкреслити, що підрахунок питомої роботи за формулою (2.68) буде справедливим за умови, що деформація розподіляється по об'єму робочої частини зразка рівномірно.

### 2.12.2. Випробування на стиск

Цей вид випробування вивчає поведінку матеріалів при одноосному стиску. Має практичне значення для будівельних матеріалів (камінь, цегла, бетон, деревина і т.д.). Застосовується, також, для випробування металевих і полімерних матеріалів, наприклад, таких, що використовуються в підшипниках ковзання, або для виготовлення елементів конструкцій, працюючих на стиск.

Для випробування на стиск застосовуються спеціальні зразки, форма і розмір яких залежать від матеріалу і мети випробування. Для випробування металів на стиск застосовуються циліндричні зразки з відношенням висоти до діаметра ( $d_0 = 10 \div 20$  мм), (рис. 2.15, а).

$$h_0/d_0 = 1 \div 3.$$

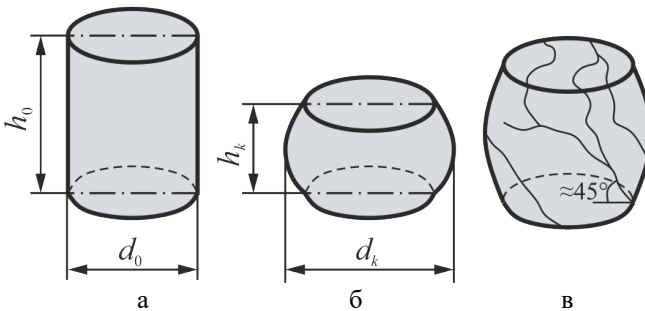


Рис. 2.15

Тертя між плитами випробувальної машини і торцями зразка суттєво впливає на його вигляд, викликаючи при цьому бочкоподібну форму (рис. 2.15 б, в). На рис. 2.15, б наведений деформований зразок маловуглецевої сталі після випробувань. Чавунний зразок руйнується внаслідок відносного зсуву частин матеріалу (рис. 2.15, в).

При випробуванні на стиск в загальному випадку як і при розтягу, можуть бути визначені: границі пропорційності, текучості, міцності; величини остатнього відносного вкорочення (усадки) і т.д.

На рис. 2.16 наведені машинні діаграми стиску пластичного матеріалу (маловуглецевої сталі – крива 1) і крихкого матеріалу (сірий чавун – крива 2).

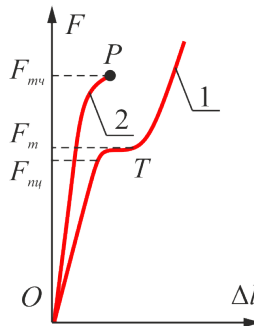


Рис. 2.16

На діаграмі стиску сталі (рис. 2.16, крива 1), як і при розтягу, має місце характерна прямолінійна ділянка  $OP_{\text{ц}}$ , площадка текучості  $T$  з послідовним переходом в ділянку зміцнення. Але в подальшому навантаження не зменшується, як при розтягу, а наростає. Це відбувається тому, що площа поперечного перерізу стисненого зразка збільшується. Довести зразок з пластичного матеріалу стисканням до руйнування практично не вдається. Границя міцності при стиску для таких матеріалів не може бути визначена.

Для пластичного матеріалу при стиску можна визначити межу пропорційності.

$$\sigma_{\text{пц}} = \frac{F_{\text{пц}}}{A_0}$$

Так як при випробуванні на стиск сталі на діаграмі (рис. 2.16, крива 1) немає явної ділянки текучості, то навантаження можна визначити умовно, як таке, що викликає вкорочення зразка на 0,2% від початкової висоти  $h_0$ , ( $F_T = F_{0,2}$ ). Тому умовна границя текучості

$$\sigma_T = \sigma_{0,2} = \frac{F_{0,2}}{A_0} \quad (2.70)$$

Типовим представником крихкого конструкційного матеріалу є чавун. При стиску чавунний зразок приймає незначну бочкоподібну форму і руйнується з утворенням однієї або кількох тріщин, розташованих наближено під кутом  $45^\circ$  до поздовжньої осі зразка. З характеристик міцності для таких матеріалів визначається тільки границя міцності (тимчасовий опір)

$$\sigma_{mч} = \frac{F_{mч}}{A_o}.$$

Для випробування на стиск будівельних матеріалів застосовують зразки кубічної форми. Труби випробовують на стиск для оцінки їх здатності протистояти сплюсненню.

Співставлення границі міцності крихких матеріалів при розтягу  $\sigma_{mч}^P$  з границею їх міцності при стиску  $\sigma_{mч}^C$  показує, що вони мають більш високі показники міцності при стиску. Так, для чавуну

$$\frac{\sigma_{mч}^C}{\sigma_{mч}^P} = 2,5 \div 5,0.$$

Для пластичних матеріалів співставлення характеристик міцності проводиться за границями текучості ( $\sigma_m^P$  і  $\sigma_m^C$ ). В загальному випадку прийнято вважати, що  $\sigma_m^P \approx \sigma_m^C$  (сталі ст.2, ст.3, ст.5).

### **2.12.3. Основні методи випробувань машинобудівельних матеріалів**

Основна вимога до міцності полягає в тому, щоб деталі конструкцій і механізмів не давали пластичних деформацій при роботі. Щоб попередити виникнення таких деформацій, конструктор повинен знати напруження, безпечні для даного матеріалу, тобто повинен визначати необхідний комплекс механічних характеристик, користуючись довідниками або експериментальним шляхом.

Чисельні значення механічних характеристик матеріалів в значній мірі залежать від прийнятої методики та умов випробування, апаратури, форми і розмірів зразків, швидкості навантаження, температури середовища і т.д.

Нормальними умовами випробувань вважаються: температура зовнішнього середовища  $20^\circ\text{C}$ ; незначна швидкість зміни навантажень і деформацій  $0,01 \div 3 \text{ хв}^{-1}$ .

У відповідності до умов експлуатації проєктованої деталі, характеру навантаження, яке вона буде випробовувати, розрізняють наступні основні методи випробовування конструкційних матеріалів.

1. Статичні випробування на: розтяг, стиск, згин, кручення, зріз, повзучість і тривалу міцність.

2. Випробовування на втомленість від циклічних навантажень.

3. Випробовування при дії ударних навантажень. Сюди можна віднести: ударний розтяг (або стиск), ударне кручення, ударна в'язкість, випробовування на масштабних зразках, імітуючих конструкцію.

4. Випробовування на твердість, які служать для визначення опору матеріалу зразка місцевим деформаціям від проникнення стандартного індентора.

5. Технологічні випробування, які встановлюють придатність конструкційного матеріалу для певного технологічного процесу: на оброблюваність різанням, на зварюваність, на гнучкість і т.д.

6. Випробування на зношування.

Перераховані види механічних випробувань не вичерпують усіх існуючих методів, що застосовуються лабораторною практикою, яка постійно вдосконалюється.

### 2.13. Допустимі напруження

Аналіз процесу розтягу і стиску для пластичних і крихких металів показує наступне. Для пластичного матеріалу напруження, які досягають границі текучості, викликають значні залишкові деформації, що не допускаються машинобудівними стандартами. Крихкий матеріал при незначних деформаціях зазнає руйнування при досягненні границі міцності. Отже, для пластичних конструкційних матеріалів небезпечними напруженнями ( $\sigma_n$ ) можна вважати границю текучості  $\sigma_n = \sigma_T$ , а для крихких конструкційних матеріалів – границю міцності  $\sigma_n = \sigma_{mч}$ .

Для створення нормальних умов експлуатації слід зменшити небезпечні напруження до значень, менших за границю пружності – **допустимих напружень**  $[\sigma]$ . Тоді:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_n}{n}, \quad (2.71)$$

де  $n$  – коефіцієнт запасу міцності, який показує, в скільки разів треба зменшити небезпечне напруження, щоб мати допустиме його значення.

На прикладі рис. 2.17 показана графічна інтерпретація сказаного: для пластичного (рис. 2.17, а) і крихкого (рис. 2.17, б) матеріалів.

Тоді для пластичних матеріалів формула (2.71) приймає вигляд

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{n_m}, \quad (2.72)$$

а для крихких матеріалів

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{mч}}{n_{mч}}, \quad (2.73)$$

Іноді для пластичних матеріалів використовують і формулу (2.73).

На практиці прийняті такі значення коефіцієнтів запасу:

$n_m=1,4 \dots 4,6$  (при розтягу або стиску сталей);

$n_{mч}=1,4 \dots 3,0$  (при розтягу крихких металів).

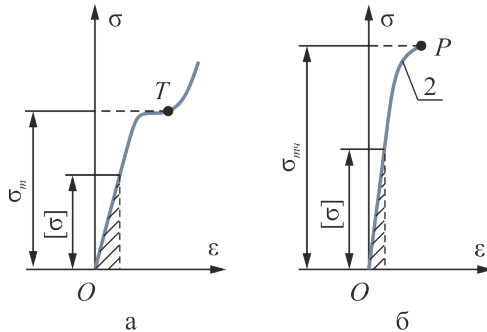


Рис. 2.17

Враховуючі, що крихкі матеріали краще чинять опір стиску, ніж розтягу, для них розрізняють:

$[\sigma_p]$  – допустимі напруження на розтяг;

$[\sigma_c]$  – допустимі напруження на стиск.

Причому, за абсолютною величиною

$$[\sigma_c] > [\sigma_p].$$

Коефіцієнти запасу для них:  $n_{mч}^p = 1,4 \div 3,0$ ;  $n_{mч}^c = 2,5 \div 5,5$ .

Для деяких пластичних матеріалів прийнято, що (за абсолютною величиною, наприклад, сталі Ст. 2, Ст. 3, Ст. 5):

$$[\sigma] = [\sigma_p] = [\sigma_c].$$

## 2.14. Розрахунок статично невизначених систем при розтягу, стиску

### 2.14.1. Поняття статичної невизначеності

Розглянемо, як виникає статична невизначеність на прикладі шарнірно-стрижньової системи (рис. 2.18).

**Статично невизначена система** – така, що має "зайві" в'язі.

**Ступінь статичної невизначеності** – кількість "зайвих" в'язей, визначається за формулою:

$$C = H - P, \quad (2.74)$$

де:  $H$  – загальна кількість невідомих в'язей (реакцій) системи;  $P$  – кількість можливих для даної системи рівнянь статичної рівноваги (рівнянь статики).

Етапи розв'язку задач для статично невизначених систем:

1) виявляють усі в'язі системи і складають можливі рівняння статyki; визначають ступінь статичної невизначеності (кількість "зайвих" в'язей);

2) розглядають систему в умовно-деформованому стані, встановлюючи зв'язок між деформаціями або переміщеннями окремих елементів системи; складають додаткові рівняння сумісності (нерозривності) деформацій з тими ж невідомими, що і рівняння статyki (кількість додаткових рівнянь дорівнює ступеню статичної невизначеності);

3) розв'язують систему з рівнянь статyki та сумісності деформацій, знаходять невідомі зусилля (реакції в'язей) – статична невизначеність розкрита.

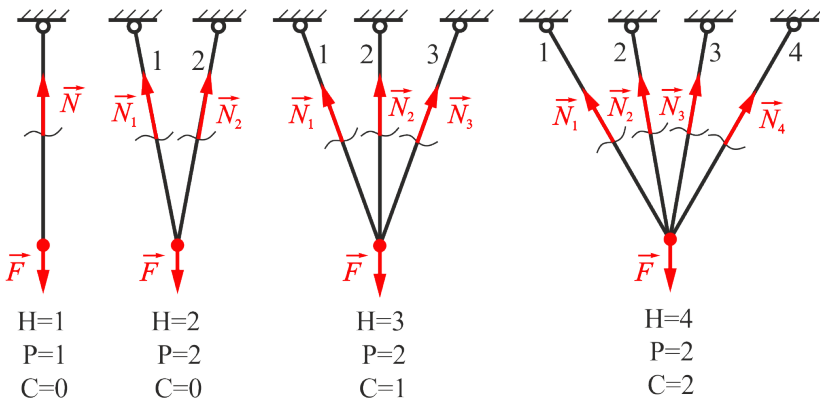


Рис. 2.18

## 2.14.2. Приклади розв'язку задач для статично невизначених систем

### 2.14.2.1. Стрижень, закріплений кінцями і деформований зовнішньою силою

Для східчастого стрижня, зображеного на рис. 2.19, а, розкрити статичну невизначеність.

1. Загальна кількість в'язей системи, можливі рівняння статyki:  
 $H = 2;$

$$\sum X = 0, R_D + R_B - F = 0, \quad (1)$$

Тоді  $C=1$ , при  $k$  – заданому співвідношенні площ поперечних перерізів стрижнів.

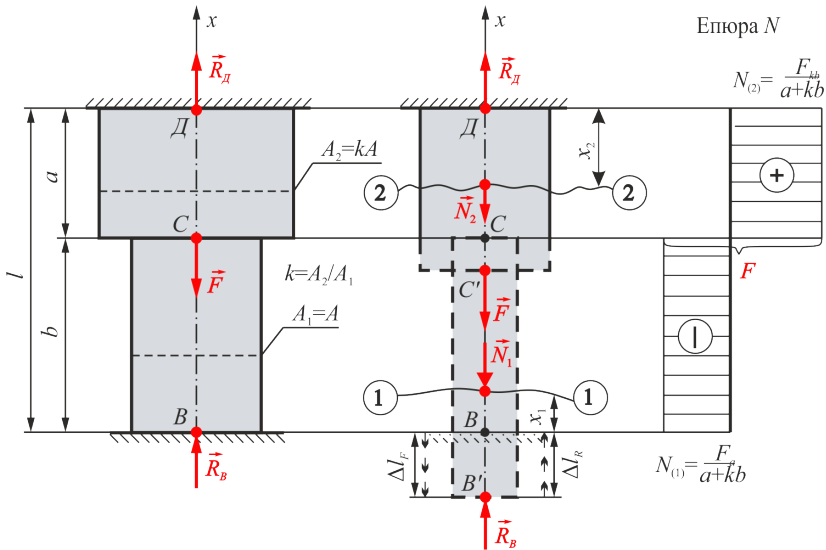


Рис. 2.19

2. На рис. 2.19, б зображено стрижень в деформованому стані. Щоб торець  $B$  залишився на місці, необхідно, аби усі його переміщення склали:

$$\sum \delta_i = 0,$$

або

$$\Delta l_F + \Delta l_R = 0 - \text{рівняння сумісності деформацій.} \quad (2)$$

Використавши формулу (2.23), отримаємо

$$\Delta l_F = \frac{Fa}{EkA}, \quad \Delta l_R = -\left(\frac{R_B b}{EA} + \frac{R_B a}{EkA}\right) = -\frac{R_B}{EkA}(kb + a).$$

Можна записати, що

$$\frac{Fa}{EkA} - \frac{R_B}{EkA}(kb + a) = 0, \quad \frac{1}{EkA} \neq 0.$$

Після скорочень і перетворень рівняння деформацій приймає вигляд:

$$Fa - R_B(a + kb) = 0. \quad (3)$$

3. Розв'язуючи систему рівнянь (1) і (3), знаходять невідомі реакції защемлення. З рівняння (3) знаходимо

$$R_B = \frac{Fa}{a + kb}.$$

Підставивши в рівняння (1), отримаємо

$$R_D = F - R_B = F - \frac{Fa}{a + kb} = F \frac{a + kb - a}{a + kb} = \frac{Fkb}{a + kb}.$$

Статична невизначеність розкрита.

Щоб побудувати епюру (рис. 2.19, в) поздовжніх внутрішніх зусиль, ділимо стрижень на ділянки, застосовуємо метод перерізів:

$$N_{(1)} = R_B = \frac{Fa}{a+kb} \text{ (стиск);}$$

$$N_{(2)} = R_D = \frac{Fkb}{a+kb} \text{ (розтяг).}$$

### 2.14.2.2. Абсолютно жорсткий брус, зафіксований шарнірно-стрижневою системою

Для шарнірно-стрижневої системи, наведеної на рис. 2.20, а, знайти площі поперечних перерізів стрижнів 1 та 2, виготовлених з різних матеріалів, із заданим співвідношенням площ поперечних перерізів і модуль пружності:

$$\frac{A_1}{A_2} = k, \quad \frac{E_1}{E_2} = n.$$

1. Загальна кількість в'язей системи (рис. 2.20, б)  $H = 4$ .

Можливі рівняння статки:

$$\sum X = 0, X_B - N_2 \cos \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y = 0, Y_B + N_1 + N_2 \sin \alpha - F = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_B = 0, N_1 a + N_2 L \sin \alpha - FL = 0. \quad (3)$$

Рівняння (1) і (2) включають реакції опори  $B$ , які не потрібні при вирішенні даної задачі, достатньо розглянути тільки рівняння (3). При цьому ступінь статичної невизначеності системи не зміниться.

Так з урахуванням, що  $H=4$  і кількості рівнянь  $P=3$ ,  $C=4-3=1$ . В той же час без  $X_B$ ,  $Y_B$ , тобто, при  $H=2$  і кількості рівнянь  $P=1$ ,  $C=2-1=1$ , що і треба було довести. Такий підхід дозволяє різко зменшити об'єм обчислень.

2. На рис. 2.20, в зображена система в реальному деформованому стані. Виходячи з гіпотези малих деформацій, можна припустити, що:

$$\gamma_1 \rightarrow 0, \quad \gamma_2 \rightarrow 0.$$

Це дає можливість прийняти спрощення, що стрижні 1 та 2 при деформації системи переміщуються паралельно самі собі. В результаті, для подальшого розрахунку можна прийняти модель (умовно деформовану), приведено на рис. 2.20, г. Похибка результатів обчислень при цьому не перевищує 5%.

Встановимо взаємозв'язок між деформаціями або переміщеннями в системі. З подібності трикутників рівняння сумісності деформацій:

$$\Delta BDD' \approx \Delta BCC',$$

$$\frac{DD'}{CC'} = \frac{BD}{BC} \quad \text{або} \quad \frac{\delta_D}{\Delta l_1} = \frac{a+b}{a}. \quad (4)$$

Знаючи, що з  $\Delta DD'D''$

$$\delta_D = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}.$$

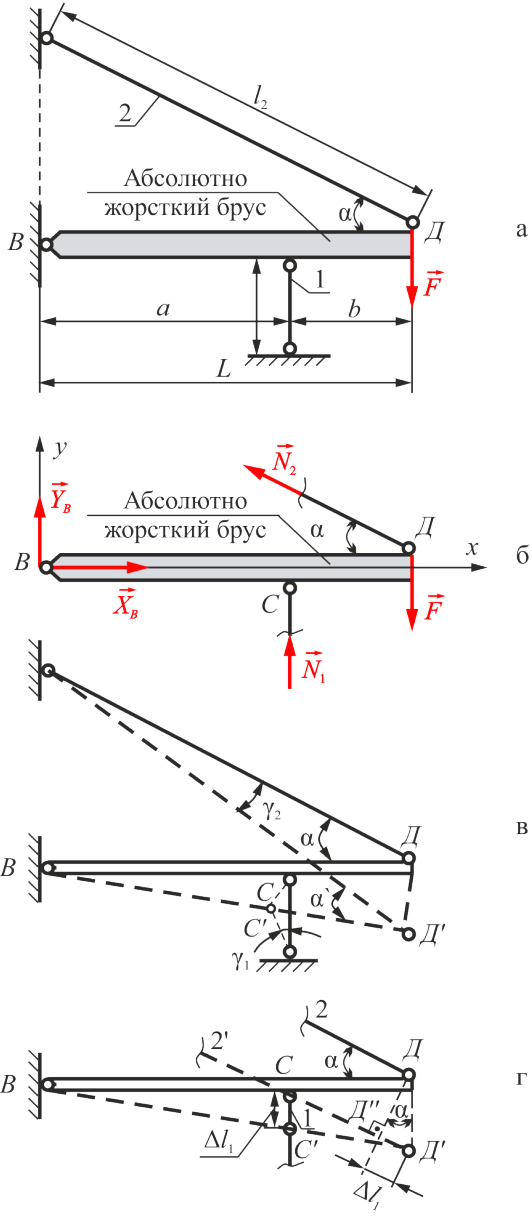


Рис.2.20

можна записати рівняння (4) у вигляді

$$\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \frac{a+b}{a} \cdot \sin \alpha. \quad (5)$$

Від рівняння (5) треба перейти до такого, яке б містило ті ж невідомі, що й і рівняння (3), а тому, взявши до уваги формулу Гука (2.23), отримаємо:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{N_1 l_1}{n E_2 k A_2}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}.$$

Після підстановки в рівняння (5), перетворень і скорочень, отримаємо:

$$\frac{\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}}{\frac{N_1 l_1}{n E_2 k A_2}} = a \left( 1 + \frac{b}{a} \right) \sin \alpha, \quad \frac{1}{E_2 A_2} \neq 0.$$

Остаточою одна з невідомих реакцій

$$N_2 = \frac{a \left( 1 + \frac{b}{a} \right) l_1 \sin \alpha}{k n l_2} \cdot N_1. \quad (6)$$

3. Розв'язуючи систему рівнянь (3) та (6), що мають спільні невідомі, розкривають статичну невизначеність шарнірно-стрижневої конструкції. Оскільки задача розглядається в загальному вигляді, то нехай для рівняння (6)

$$\frac{a \left( 1 + \frac{b}{a} \right) l_1 \sin \alpha}{k n l_2} = m, \quad \text{або} \quad N_2 = m N_1.$$

Підставивши в рівняння (3), маємо

$$N_1 a + m N_1 L \sin \alpha - FL = 0,$$

звідки:

$$N_1 = \frac{FL}{a + mL \sin \alpha},$$

$$N_2 = \frac{mFL}{a + mL \sin \alpha}.$$

Статична невизначеність розкрита.

Доберемо площі поперечних перерізів стрижнів 1 і 2, виходячи з урахування умови міцності для кожного з них і співвідношення площ їх поперечних перерізів.

Можна виконати розрахунок сподіваної величини співвідношення  $k'$  площ поперечних перерізів стрижнів 1 і 2 в залежності від властивостей їх матеріалу і співвідношення діючих внутрішніх зусиль  $N_1, N_2$ :

$$k' = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{N_1}{[\sigma]_{(1)}}}{\frac{N_2}{[\sigma]_{(2)}}} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{[\sigma]_{(2)}}{[\sigma]_{(1)}} = \frac{[\sigma]_{(2)}}{m[\sigma]_{(1)}}.$$

Можливі два етапи розрахунку стрижнів 1 і 2.

Якщо  $k' \neq k$ , то розв'язується звичайний тип задачі – проектний розрахунок:

$$A_1 = \frac{N_1}{[\sigma]_{(1)}}, A_2 = \frac{N_2}{[\sigma]_{(2)}}.$$

Якщо  $k \neq k$ , то перший етап доповнюється дотриманням заданого співвідношення площ, з яким виконувались усі попередні розрахунки. При цьому необхідна зміна однієї з площ проводиться тільки в бік її збільшення. В такому випадку дійсні напруження будуть менші за допустиме, а стрижень матиме надлишковий запас міцності.

### 2.14.2.3. Вплив неточності розмірів елементів при монтажі статично невизначених систем, монтажні напруження

Абсолютно жорсткий брус (рис. 2.21, а) необхідно закріпити трьома стрижнями. Стрижні виготовлені з одного матеріалу, з площами поперечного перерізу  $A$  і довжиною  $l$ . Другий стрижень виявився коротшим на величину, яка дуже мала у порівнянні з довжинами. Знайти монтажні зусилля і напруження, виникаючі в стрижнях.

До монтажу стрижня 2 система зі стрижнями 1, 3 є статично визначеною (рис. 2.21, а). Систему можна зібрати, прикладаючи певні зусилля, що приведе до деформації усіх стрижнів.

**Монтажні (початкові) зусилля і напруження** – такі, що виникають в елементах статично невизначених систем після їх монтажу (рис. 2.21, б).

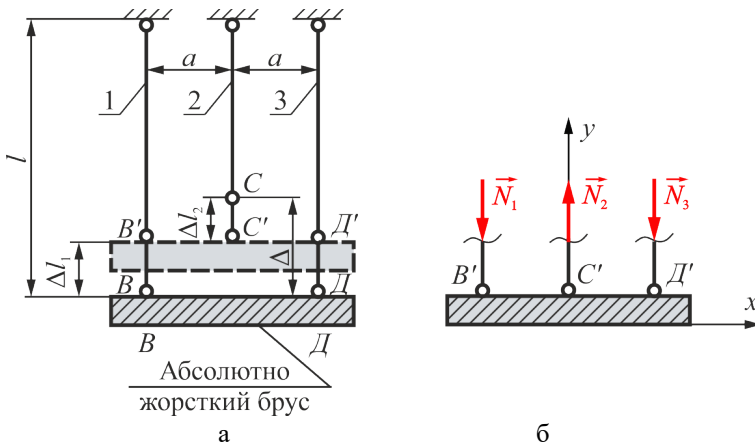


Рис. 2.21

1. Після монтажу системи абсолютно жорсткий брус займає проміжне положення  $B'C'D'$ . Очевидно, що стрижні 1 і 3 стиснуть, а стрижень 2 розтягнеться. Кількість в'язей системи  $H = 3$ .

Можливі рівняння статyki:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \\ \sum Y &= 0, -N_1 + N_2 - N_3 = 0; \\ \sum M_{(C')} &= 0, N_1 a - N_3 a = 0; \\ N_1 &= N_3; \\ N_2 &= 2N_1. \end{aligned} \quad (1) \quad (2)$$

Тоді

$$C = 3 - 2 = 1.$$

2. З рис. 2.21, а видно, що рівняння сумісності деформацій:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta. \quad (3)$$

В області дії закону Гука (2.23):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA}.$$

Після підстановки в (3) і перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{N_1 l}{EA} + \frac{N_2 l}{EA} &= \Delta, \\ \frac{l}{EA} (N_1 + N_2) &= \Delta, \\ N_1 + N_2 &= \frac{\Delta EA}{l}. \end{aligned} \quad (4)$$

3. Розв'язуємо систему з трьох рівнянь (1), (2), (4). З рівняння (4)

$$N_1 = \frac{\Delta EA}{l} - N_2;$$

підставивши в (2)

$$\begin{aligned} N_2 &= 2 \left( \frac{\Delta EA}{l} - N_2 \right), \quad 3N_2 = \frac{2\Delta EA}{l}, \\ N_2 &= \frac{2\Delta EA}{3l} \quad (\text{розтяг}), \\ N_1 &= \frac{1\Delta EA}{3l} \quad (\text{стиск}). \end{aligned}$$

Статична невизначеність розкрита.

Обчислюємо напруження в стрижнях:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A} = -\frac{1}{3} \frac{\Delta E}{l}, \quad \sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A} = \frac{2}{3} \frac{\Delta E}{l}.$$

Для прикладу розглянемо, до чого приведе незначна неточність, допущена в довжині стрижня 2. Нехай:  $l=2$  м;  $E=2 \cdot 10^5$  МПа;  $\Delta=2 \cdot 10^{-3}$  м; матеріал сталь Ст. 3;  $[\sigma]=160$  МПа.

Тоді:

$$\begin{aligned} \sigma_{(1)} &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta E}{l} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5}{2} = -66,7 \text{ МПа}; \\ \sigma_{(2)} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta E}{l} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5}{2} = 133,3 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Отже, навіть невелика неточність спричиняє значні монтажні напруження.

### 2.14.2.4. Вплив температури на зусилля і напруження в статично невизначених системах

Приведений на рис. 2.22, а, стрижень нагрівається. Визначити напруження, якщо опори абсолютно неподатливі.

Тут:

$t_n^0$  – початкова температура стрижня;

$t_k$  – кінцева температура стрижня (стрижень рівномірно нагрівається по довжині).

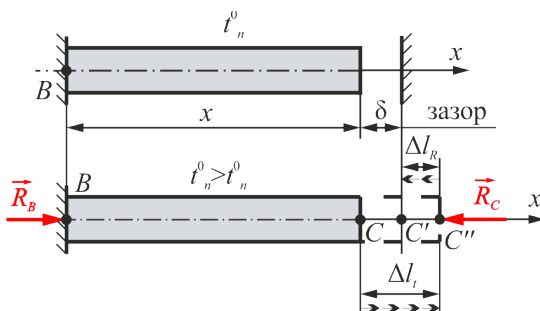


Рис. 2.22

1. До закриття зазору стрижень статично визначений. Після закриття зазору і виникненні тиску на опорі, стрижень статично невизначений. Кількість в'язей такого стрижня  $H = 2$ . Рівняння статичної рівноваги

$$\sum X = 0, R_B - R_C = 0, \quad R_B = R_C. \quad (1)$$

Тоді

$$C = 2 - 1 = 1.$$

2. З рис. 2.22, б видно, що для деформованого стану рівняння деформацій має вигляд:

$$\sum \Delta l_i = \delta, \quad \Delta l_t + \Delta l_R = \delta. \quad (2)$$

Враховуючи, що:

$$\Delta t^{\circ} = t_k^{\circ} - t_n^{\circ}, \quad \Delta l_t = \alpha l \Delta t^{\circ}, \Delta l_R = -\frac{R_B l}{EA} \text{ (стиск)}.$$

3. Підставивши в (2), отримаємо:

$$\alpha l \Delta t^{\circ} - \frac{R_B l}{EA} = \delta,$$

звідки

$$R_B = \frac{(\alpha \Delta t^\circ - \delta) EA}{l} = \left( \alpha \Delta t^\circ - \frac{\delta}{l} \right) EA.$$

Статична невизначеність розкрита.

Напруження у довільному поперечному перерізі стрижня після закриття зазору і при максимальному тиску на опори (рис. 2.23):

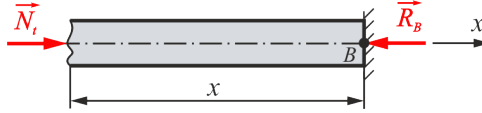


Рис. 2.23

$$\sum X = 0, N_t - R_B = 0;$$

$$N_t = R_B = EA \left( \alpha \Delta t - \frac{\delta}{l} \right) \text{ (стиск);}$$

$$\sigma_t = \frac{N_t}{A} = -E \left( \alpha \Delta t^\circ - \frac{\delta}{l} \right) \text{ (стиск).}$$

Нехай для сталюго стрижня:  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $\alpha=125 \cdot 10^{-7} \text{ град}^{-1}$ ;  $l=0,5 \text{ м}$ ;  $\delta=0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ;  $\Delta t^0=40^\circ$ ;  $[\sigma]=160 \text{ МПа}$  (для сталі Ст. 3).

Тоді

$$\sigma_t = -2 \cdot 10^5 \left( 125 \cdot 10^{-7} \cdot 40 - \frac{0,1 \cdot 10^{-3}}{0,5} \right) = -60 \text{ МПа.}$$

## 2.15. Контрольні запитання

1. Дати означення осевого розтягу та стиску.
2. Як визначаються нормальні та дотичні напруження при розтязі і стиску? Правило знаків для нормальних напружень.
3. В чому полягають особливості застосування методу перерізів?
4. Назвати порядок побудови епюр  $N$ ,  $\sigma$ ,  $\delta$ .
5. Які  $N$  та  $\sigma$  виникають в поперечному перерізі стрижня, навантаженого зовнішніми зосередженими силами?
6. Чим відрізняються епюри  $N$  та  $\sigma$  при дії власної ваги від тих же епюр попереднього пункту?
7. Записати вираз для умови міцності при дії зосередженої сили і власної ваги.
8. Що таке допустимі напруження, небезпечний переріз?
9. Три типи задач при дії зовнішніх зосереджених сил.
10. Три типи задач при дії власної ваги.
11. Що являють собою гранично допустима та критична довжини стрижня?

12. Яка різниця між абсолютною і відносною поздовжніми деформаціями?
13. Чим відрізняються абсолютна та відносна поперечні деформації?
14. Що характеризує коефіцієнт Пуассона? Значення його для сталі, чавуну, каучуку.
15. Сформулювати закон Гука і записати математичний вираз.
16. Що характеризує модуль Юнга? Значення його для сталі, чавуну, міді.
17. Записати формулу Гука для абсолютних деформацій стрижня зовнішніми зосередженими силами.
18. Чим відрізняються жорсткість поперечного перерізу та жорсткість стрижня?
19. Чим різняться формула Гука для абсолютних деформацій при дії зовнішніх зосереджених сил та власної ваги?
20. Який порядок визначення температурних деформацій в стрижні?
21. Чим переміщення перерізів відрізняються від деформації стрижня?
22. Чим відрізняються епюри переміщень при зосереджених та розподілених навантаженнях?
23. Що являє собою східчастий стрижень? Порядок визначення поздовжніх сил, нормальних напружень, деформацій, переміщень перерізів.
24. Що являє собою рівномісний стрижень?
25. В чому суть раціонального проектування? Який переріз більш раціональний – прямокутний, чи круглий?
26. Чим відрізняються порядок раціонального проектування сортаментних та розрахункових перерізів?
27. Що являють собою механічні характеристики матеріалів?
28. Який вигляд і розміри мають зразки для випробувань на розтяг?
29. Яка різниця між машинною, умовною та дійсною діаграмами розтягу?
30. Охарактеризувати характерні ділянки машинної діаграми.
31. Умовні і дійсні характеристики міцності. Формули для їх обчислення.
32. Характеристики пластичності. Формули для їх обчислення.
33. Охарактеризувати процеси, виникаючі в матеріалі при деформації.
34. В чому полягає закон розвантаження? Продемонструвати його на діаграмі розтягу.
35. Вказати на діаграмі розтягу пружну, пластичну та повну деформації.
36. Чим характеризується робота, витрачена на деформацію зразка, робота пружних сил, потенціальна енергія деформацій, питома робота деформацій, питома потенціальна енергія?

37. Охарактеризувати випробування на стиск. Чим вони відрізняються для пластичних і крихких матеріалів?
38. Перерахувати характеристики міцності матеріалів при стиску.
39. Основні методи випробувань матеріалів.
40. Обчислення допустимих напружень для пластичних і крихких матеріалів.
41. Як виникає статична невизначеність системи?
42. Що таке статично невизначена система, ступінь статичної невизначеності?
43. Етапи розв'язку статично невизначених систем.
44. Розв'язати задачу для статично невизначеного стрижня із закріпленими кінцями.
45. Розв'язати аналогічну задачу для абсолютно жорсткого шарнірно закріпленого бруса.
46. Як виникають монтажні напруження? Визначення їх величини.
47. Який вплив температури на зусилля і напруження в статично невизначених системах?

### 3. Основи теорії напруженого та деформаційного стану. Критерії міцності. Критерій Мора

#### 3.1. Поняття напруженого стану

Розглянемо тіло, яке складається, згідно гіпотези про суцільність матеріалу, з безлічі взаємодіючих частинок. Виділимо елемент об'єму у вигляді паралелепіпеда нескінченної малізми в околі такої частинки тіла (рис. 3.1, а).

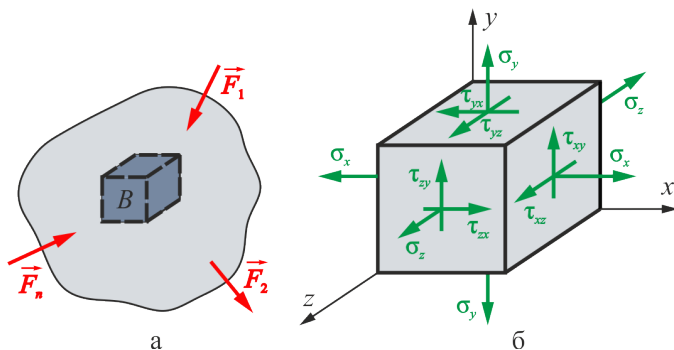


Рис. 3.1

На гранях елемента (рис. 3.1, б) прийнято показувати проєкції напружень у вигляді нормальних і дотичних складових. Внаслідок малізми граней можна вважати, що напруження розподілені на них рівномірно (принцип Сен-Венана).

Нормальні напруження мають індекс осі, вздовж якої вони напрямлені. Дотичні напруження мають подвійний індекс: перший відповідає осі, нормальній до даної грані; другий – осі, вздовж якої діє напруження.

Змінюючи орієнтацію граней в околі виділеної частинки, змінюють величини напружень, та їх напрями. Можна отримати випадок, коли на гранях дотичні напруження будуть відсутні. **Головні площадки** -на яких діють тільки нормальні напруження. **Головні напруження** - які діють на головних площадках. **Головні напрями** напружень (**головні осі** в даній точці) – напрями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . При цьому повинна виконуватись нерівність з таким алгебраїчним змістом

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \quad (3.1)$$

Розрізняють три види напруженого стану: **лінійний (одновісний)**; **плоский (двовісний)**; **об'ємний (тривісний)**.

### 3.2. Лінійний (одновісний) напружений стан

Виникає у випадку, коли:  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_z = 0$ ;  $\tau_{xy} = 0$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yx} = 0$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ,  $\tau_{zx} = 0$ ,  $\tau_{zy} = 0$ . Тобто, площадки, де діють нормальні напруження, є головними.

Розглянемо стержень, навантажений осьовою силою (рис.3.2, а).

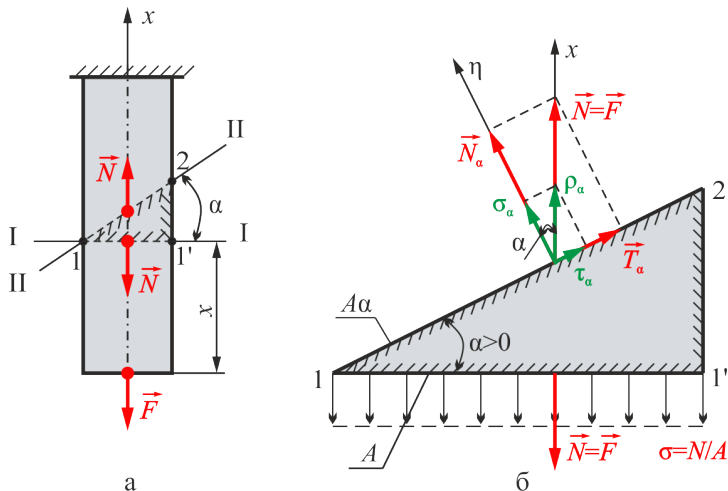


Рис. 3.2

З рис. 3.2, б видно, що:

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}, \quad N_\alpha = N \cdot \cos \alpha, \quad T_\alpha = N \cdot \sin \alpha; \quad (3.2)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{A_\alpha} = \frac{N \cos^2 \alpha}{A} = \sigma \cos^2 \alpha; \quad (3.3)$$

$$\tau_\alpha = \frac{T_\alpha}{A_\alpha} = \frac{N \sin \alpha \cos \alpha}{A} = \frac{\sigma}{2} \sin 2 \alpha; \quad (3.4)$$

повне напруження

$$\rho_\alpha = \sqrt{\sigma_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}. \quad (3.5)$$

Аналіз отриманих виразів дозволяє побудувати граничні залежності (рис.3.3, а, б). Видно, що найбільші нормальні напруження будуть на площадках, перпендикулярних поздовжній осі ( $\alpha=0$ ,  $\alpha=180^\circ$ ). Це головні площадки, так як дотичні напруження тут відсутні.

Найбільші напруження виникають на площадках, розташованих під кутом  $45^\circ$  до головних площадок. Нормальні напруження тут досягають значень:

$$\sigma_{\alpha=45^\circ} = \sigma \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\sigma}{2}. \quad (3.6)$$

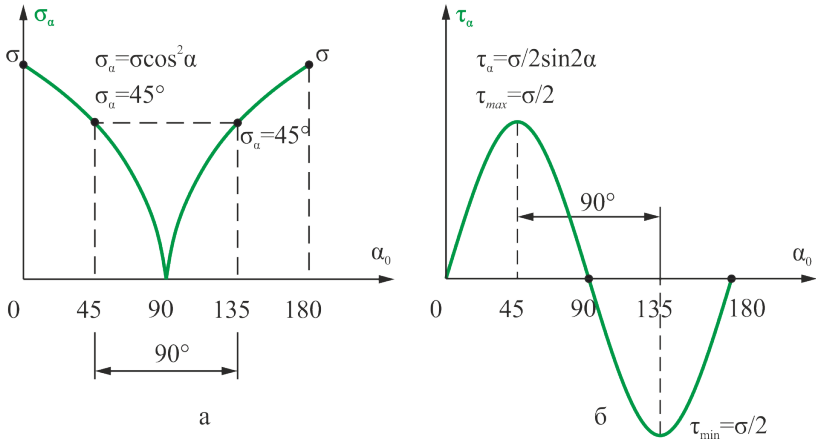


Рис. 3.3

Правило знаків для  $\alpha$  і  $\tau$  :

- 1)  $\alpha > 0$ , якщо відкладений проти ходу годинникової стрілки;
- 2)  $\tau > 0$ , якщо обертають елемент за ходом годинникової стрілки ( $\tau_{max}$ ) і  $\tau < 0$  - якщо проти ( $\tau_{min}$ ).

З рис. 3.3, б видно, що  $\tau_{max}$ ,  $\tau_{min}$  діють на взаємно перпендикулярних площадках. При цьому можливі варіанти, наведені на рис. 3.4, а, б.

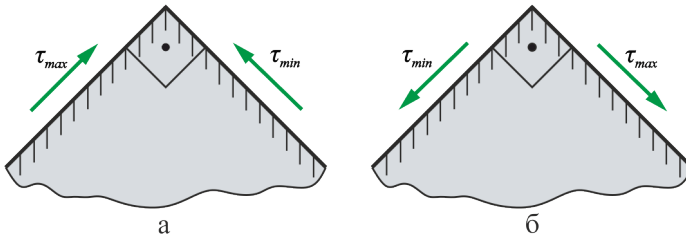


Рис. 3.4

Для того, щоб елемент знаходився у стані рівноваги, необхідна рівність

$$\tau_{max} = |-\tau_{min}|, \quad (3.7)$$

яка виражає закон парності дотичних напружень – дотичні напруження на двох будь-яких взаємно перпендикулярних площадках протилежно напрямлені і однакові за модулем.

### 3.3. Плоский (двовісний) напружений стан

Такий напружений стан найчастіше виникає в елементах конструкцій при зсуві, крученні, згині, складному опорі.

Умови виникнення:  $\sigma_x \neq 0$ ,  $\sigma_y \neq 0$ ,  $\sigma_z = 0$ ;  $\tau_{xy} = \tau_y$ ,  $\tau_{yx} = \tau_x$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ,  $\tau_{zx} = 0$ ,  $\tau_{zy} = 0$ .

Залишимо у силі всі визначення та правила, наведені в попередньому розділі. Розглянемо елементарний об'єм матеріалу у вигляді паралелепіпеда (рис.3.5, а), на гранях якого діють довільні нормальні та дотичні напруження.

Умова рівноваги відсіченого елемента (рис.3.5, б)

$$\sum M_B = 0; \quad -dT_x \cdot \frac{dy}{2} - dT_y \cdot \frac{dx}{2} = 0. \quad (3.8)$$

Площі граней паралелепіпеда:

$$dA_x = dy \cdot dz, \quad dA_y = dx \cdot dz.$$

Елементарні зусилля, що там діють:

$$dT_x = \tau_x \cdot dA_x = \tau_x \cdot dy \cdot dz,$$

$$dT_y = \tau_y \cdot dA_y = \tau_y \cdot dx \cdot dz.$$

Підставивши в рівняння (3.8), після скорочень та перетворень:

$$\tau_x = |-\tau_y|, \quad (3.9)$$

що являє собою уже відомий закон парності дотичних напружень.

Далі з умови рівноваги того ж елемента отримаємо:

$$\sum \eta = 0, \quad dN_\alpha - dN_x \cos \alpha - dN_y \sin \alpha - \\ -dT_x \cos \alpha + dT_y \sin \alpha = 0; \quad (3.10)$$

знаючи, що

$$dA_x = dA_\alpha \cdot \cos \alpha, \quad dA_y = dA_\alpha \cdot \sin \alpha,$$

можемо записати вираз (3.10) у вигляді

$$\sigma_\alpha dA_\alpha - \sigma_x dA_\alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sigma_y dA_\alpha \sin^2 \alpha - \\ -\tau_x dA_\alpha \sin \alpha \cos \alpha + \tau_y dA_\alpha \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Після скорочень та перетворень остаточно отримаємо вираз для напружень, діючих на нахилених площадках:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_x \sin 2\alpha; \quad (3.11)$$

на перпендикулярних їм площадках (при  $\beta = \alpha \pm 90^\circ$ )

$$\sigma_\beta = \sigma_y \cos^2 \alpha + \sigma_x \sin^2 \alpha + \tau_x \sin 2\alpha. \quad (3.12)$$

Для ще однієї умови рівноваги отримаємо:

$$\sum t = 0, \quad dT_\alpha - dN_x \sin \alpha + dN_y \cos \alpha - \\ -dT_x \sin \alpha - dT_y \cos \alpha = 0.$$

Остаточно, після перетворень та скорочень, отримаємо:

$$\tau_\alpha dA_\alpha - \sigma_x dA_\alpha \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_y dA_\alpha \sin \alpha \cos \alpha - \\ -\tau_x dA_\alpha \sin^2 \alpha - \tau_y dA_\alpha \cos^2 \alpha = 0;$$

звідки

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \\ \tau_{\alpha} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha.\end{aligned}\quad (3.13)$$

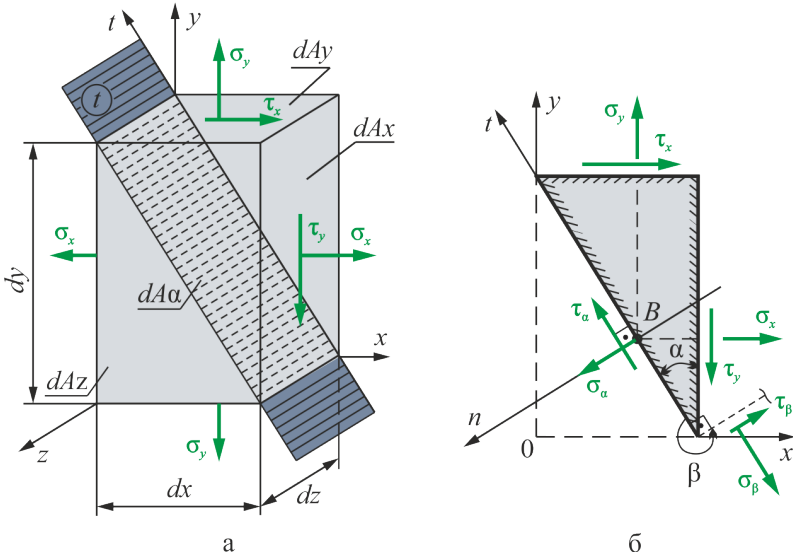


Рис. 3.5.

Необхідно відзначити таку властивість нормальних напружень:

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_x + \sigma_y = \dots = \text{const}, \quad (3.14)$$

тобто, **сума нормальних напружень на двох взаємно перпендикулярних площадках елемента інваріантна до кута нахилу (повороту).**

### 3.3.1. Положення головних площадок. Величини головних напружень

Аналіз величини напружень на довільній площадці, в залежності від кута, дає графік, зображений на рис.3.6, а.

Використаємо залежність (3.11) і дослідимо функцію  $\sigma_{\alpha}$  на екстремум:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} &= -\sigma_x \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_y \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha - 2\tau_x \cos 2\alpha = 0, \\ &-(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha - 2\tau_x \cos 2\alpha = 0;\end{aligned}$$

$\alpha = \alpha_0$  – площадка, де діє  $\sigma_{\text{max}}$ .

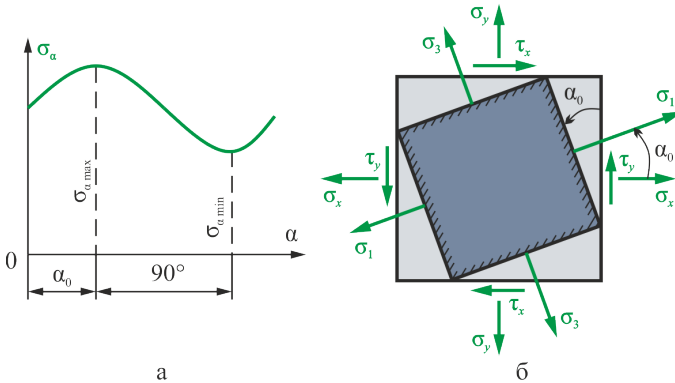


Рис. 3.6

Остаточно

$$tg2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\tau_x}{\sigma_y - \sigma_x}. \quad (3.15)$$

Формула визначає єдине значення **головного кута** ( $\alpha_0$ ), на який треба повернути довільні площадки, щоб отримати головні. Як відомо, дотичні напруження на головних площадках відсутні (рис.3.6, б).

Величини головних напружень можна визначити за формулами (3.11), (3.12), якщо знати  $\alpha_0$ . Використавши формули (3.11) та (3.15), можна отримати простішу формулу для визначення головних напружень:

$$\sigma_{min}^{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}; \quad (3.16)$$

або, більш конкретно, з урахуванням умови (3.1)

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_{max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}, \quad \sigma_2 = 0, \\ \sigma_3 = \sigma_{min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Для частинного випадку плоского напруженого стану, коли  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\sigma_y = 0$ ;  $\tau_x = \tau$ ,  $\tau_y = \tau$ ,  $\tau_x = -\tau_y$ , формули (3.17) приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}), \quad \sigma_2 = 0, \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

### 3.3.2. Площинки зсуву, взаємозв'язок з головними площадками . Екстремальні дотичні напруження

Побудуємо графік  $\tau_\alpha$  (рис. 3.7), використавши залежність (3.13), дослідимо функцію на екстремум:

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 2 \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - 2\tau_x \sin 2\alpha = 0,$$

$\alpha = \alpha_1$  для таких площадок. Розв'язавши останнє рівняння відносно  $\alpha_1$

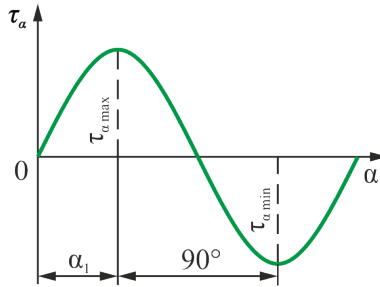


Рис. 3.7

Отримаємо

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_x}. \quad (3.19)$$

Видно, що:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_1 &= -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_0} = -\operatorname{ctg} 2\alpha_0, \\ \operatorname{ctg}(90 - 2\alpha_1) &= -\operatorname{ctg} 2\alpha_0, \quad 90 - 2\alpha_1 = 2\alpha_0, \\ \alpha_1 &= \alpha_0 \pm 45^\circ, \end{aligned} \quad (3.20)$$

якщо рахувати від головних площадок. Тобто площадки зсуву розташовані під кутом  $45^\circ$  до головних.

Екстремальні напруження отримаємо з формули (3.13), рахуючи від головних площадок, коли:

$$\sigma_1 \neq 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 \neq 0, \quad \tau_x = 0, \quad \alpha_1 = 45^\circ.$$

Тоді

$$\tau_{min}^{max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (3.21)$$

Підставивши в (3.21) значення (3.17), отримаємо:

$$\tau_{min}^{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}, \quad (3.22)$$

або

$$\tau_{min}^{max} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}. \quad (3.23)$$

Для частинного випадку плоского напруженого стану, коли  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_x = \tau$ ,  $\tau_y = \tau$

$$\tau_{min}^{max} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (3.24)$$



З останньої формули видно, що на площадках, паралельних головному напруженню  $\sigma_2$  і нахилених під кутом  $45^\circ$  до головних напружень  $\sigma_1$  та  $\sigma_3$ , завжди діють екстремальні дотичні напруження

$$\tau_{min}^{max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (3.31)$$

При дослідженні пластичних деформацій розглядають частинний випадок, коли елементарний об'єм утворений з куба.

**Октаедрична площадка** – рівнонахилена до всіх головних напрямів. Нормаль до такої площадки має однакові кути з головними осями  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ . Так як

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1. \quad (3.32)$$

то

$$\cos^2 \alpha = 1/3, \quad (3.33)$$

звідки

$$\cos \alpha = 1/\sqrt{3}. \quad (3.34)$$

Октаедричні напруження після спрощення формул (3.28), (3.30) мають вигляд:

$$\sigma_{окт} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (3.35)$$

і є середнім напруженням для даного об'ємного напруженого стану

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (3.36)$$

Якщо з формули (3.28) визначити довільні нормальні напруження  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ , то зберігається властивість інваріантності суми напружень відносно нахилу площадок

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = const. \quad (3.37)$$

## 3.5. Деформації при об'ємному напруженому стані

### 3.5.1. Положення головних площадок. Величини головних напружень

Виділимо з тіла елементарний об'єм у вигляді паралелепіеда (рис. 3.9), грані якого є головними площадками. Згідно принципу суперпозиції загальна відносна деформація в головному напрямі:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''',$$

де складові переміщення

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_1'' = -\mu \frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_1''' = -\mu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Остаточно:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)];$$

аналогічно для інших головних напрямів

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \quad (3.38)$$

Отримані формули являють **узагальнений закон Гука** для об'ємного напруженого стану.

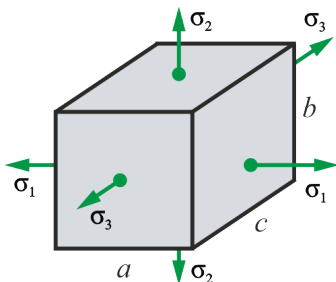


Рис. 3.9.

Враховуючи, що дотичні напруження викликають лише кутові деформації, аналогічні формули можна отримати для випадку, коли грані паралелепіпеда не співпадають з головними площинами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Формули (3.38), (3.39) застосовні при напруженнях, що не перевищують границі пропорційності матеріалу.

### 3.5.2. Положення головних площадок. Величини головних напружень

Початковий об'єм елементарного паралелепіпеда (рис. 3.9)

$$V_0 = abc.$$

Кінцевий об'єм в деформованому стані:

$$\begin{aligned} V_K &= (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = \\ &= abc \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) \left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) \left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) = \\ &= V_0 (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3). \end{aligned}$$

Знехтувавши добутками малих відносних деформацій, остаточно отримаємо відносну зміну об'єму

$$\varepsilon_v = \frac{V_K - V_0}{V_0} = \frac{V_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (3.40)$$

Використавши формули (3.38) для (3.40) отримаємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_v = & \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] + \\ & + \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \end{aligned} \quad (3.41)$$

### 3.5.3. Положення головних площадок. Величини головних напружень

Згідно принципу суперпозиції при об'ємному напруженому стані питома потенціальна енергія

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 + u_3 = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2}, \\ u &= \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Використавши формули узагальненого закону Гука (3.38), отримаємо:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left\{ \sigma_1 \cdot \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \sigma_2 \cdot \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] + \right. \\ & \quad \left. + \sigma_3 \cdot \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \right\} = \\ &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Питома потенціальна енергія, в свою чергу має складові

$$u = u_v + u_\phi. \quad (3.44)$$

де:  $u_v$  – питома потенціальна енергія зміни об'єму;  $u_\phi$  – питома потенціальна енергія зміни форми.

Ці складові визначаються формулами:

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (3.45)$$

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (3.46)$$

## 3.6. Критерії міцності, їх необхідність

Задачі на міцність при осьовому розтягу і стиску розв'язуються просто:

$$\sigma_1 \leq [\sigma_p], \quad \text{або} \quad |\sigma_3| \leq [\sigma_c]. \quad (3.47)$$

Аналогічно при крученні:

$$\tau \leq [\tau].$$

При складному напруженому стані головні напруження  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  в загальному випадку не дорівнюють нулю. Будемо їх пропорційно збільшувати до досягнення матеріалом граничного стану (початку руйнування або текучості):

$$\sigma_{1cp} = n_p \sigma_1; \quad \sigma_{2cp} = n_p \sigma_2; \quad \sigma_{3cp} = n_p \sigma_3. \quad (3.48)$$

Коефіцієнт  $n_p$  показує, в скільки разів треба збільшити компоненти напруженого стану  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , щоб він став граничним. Називається **реальним коефіцієнтом запасу міцності**. У просторі  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  граничним станам відповідає деяка поверхня відгуку  $\Phi(\sigma_{1,p}, \sigma_{2,p}, \sigma_{3,p})=0$ , яка є механічною характеристикою матеріалу. На практиці важко її знайти, тому виникає задача наближеного визначення умов, при яких напружений стан стає граничним.

Такі наближені умови називаються **критеріями міцності**, а їх обґрунтування – **теоріями міцності**.

### 3.6.1. Класичні теорії міцності

**Перша теорія міцності, або критерій найбільших нормальних напружень.**

За цією теорією граничний стан досягається тоді, коли найбільше головне напруження  $\sigma_1$  досягає небезпечного значення при осьовому розтягу ( $\sigma_m$  та  $\sigma_{m(p)}$ ), або найменше головне напруження  $\sigma_3$  досягає за модулем небезпечного напруження на стиск ( $\sigma_m$  та  $\sigma_{m(c)}$ ):

$$\sigma_1 = \sigma_{m(p)}, \quad |\sigma_3| = \sigma_{m(c)}. \quad (3.49)$$

Для крихких матеріалів

$$\sigma_{m(p)} = \sigma_{m(c)} = \sigma_m;$$

для пластичних –

$$\sigma_{m(p)} \approx \sigma_{m(c)} = \sigma_m.$$

Умова міцності з коефіцієнтом запасу міцності  $n$  має вигляд:

$$\sigma_{EKVI} = \sigma_1 \leq [\sigma_p], \quad \sigma_{EKVI} = |\sigma_3| \leq [\sigma_c]; \quad (3.50)$$

тут

$$[\sigma_{p/c}] = \frac{\sigma_{m(p)/m(c)}}{n}. \quad (3.51)$$

Цей критерій має суто теоретичне значення, бо на практиці тільки більш-менш задовольняється для дуже крихких матеріалів – каменю, цегли, кераміки, інструментальної сталі і т.п.

**Друга теорія міцності, або критерій найбільших лінійних деформацій.**

За цією теорією припускається, що напружений стан стає граничним, коли найбільше лінійне подовження  $\varepsilon_{max}$  досягає небезпечного значення  $\varepsilon_n$ . Причому, останнє визначається при осьовому розтягу:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_n; \quad \varepsilon_{max} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \quad \varepsilon_n = \frac{\sigma_n}{E}.$$

Тоді умова досягнення небезпечного стану:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_n,$$

аналогічно, умова міцності з коефіцієнтом запасу  $n$

$$\sigma_{EKVI} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (3.52)$$

Тут  $\sigma_{EKVII}$  – еквівалентне нормальне напруження за другою теорією міцності, а сама формула – другий критерій міцності.

Друга теорія, як і перша має тільки теоретичне значення.

**Третя теорія міцності, або критерій найбільших дотичних напружень.**

За цією теорією припускається, що граничний стан виникає тоді, коли найбільше дотичне напруження  $\tau_{max}$  досягає небезпечного значення  $\tau_n$ , причому останнє визначається при простому розтягу зразків. Тоді умова граничного стану

$$\tau_{max} = \tau_n,$$

а умова міцності

$$\tau_{max} \leq [\tau] = \frac{\tau_n}{n}, \quad [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Але

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3).$$

Тому критерій міцності за третьою теорією приймає вигляд:

$$\sigma_{EKVIII} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (3.53)$$

Третя теорія міцності добре підтверджується для пластичних матеріалів

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{n}.$$

але її недоліком є неврахування головного напруження  $\sigma_2$ .

**Четверта теорія міцності, або критерій питомої енергії деформації зміни форми.**

За цією теорією небезпечний стан виникає тоді, коли питома потенціальна енергія зміни форми приймає найбільше граничне значення, яке визначається при розтязі, коли настає текучість:

$$u_{\phi} = u_{\phi(\tau)}; \quad u_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2];$$

$$u_{\phi(m)} = \frac{1+\mu}{6E} \sigma_m^2; \quad (\sigma_1 = \sigma_m, \sigma_2 = \sigma_3 = 0); \quad [\sigma] = \frac{\sigma_m}{n}.$$

Умова досягнення граничного стану

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}.$$

Тоді критерій міцності за четвертою теорією:

$$\sigma_{EKIV} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]. \quad (3.54)$$

Критерій добре підтверджується для пластичних матеріалів і забезпечує більшу точність, ніж третій критерій міцності.

### 3.6.2. Критерій Мора

В теорії міцності Мора наближено будується гранична поверхня  $\Phi(\sigma_{1n}, \sigma_{2n}, \sigma_{3n})=0$ , причому робиться припущення, що функція  $\Phi$  не

залежить від  $\sigma_{2H}$ . Таке припущення, згідно експериментам, вносить похибку не більше 15%. Але це припущення дозволяє зображати будь-який граничний напружений стан кругом Мора на площині  $\sigma, \tau$  (рис.3.10, а).

На практиці легко побудувати тільки граничні круги, що відповідають осьовому розтягу і стиску. Але це дозволяє замість обвідних використовувати лінії, дотичні до цих двох кіл (рис. 3.10, б).

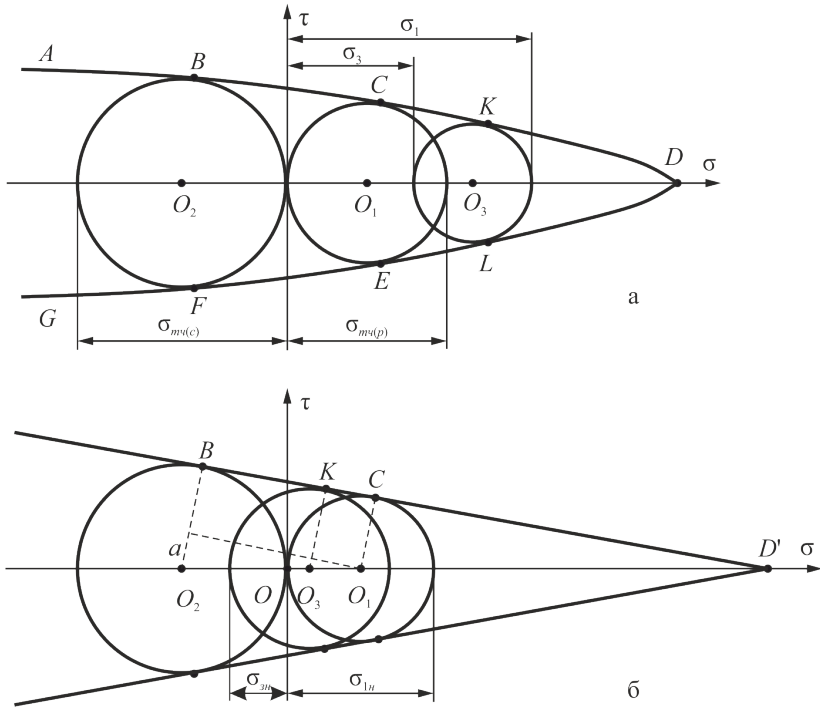


Рис. 3.10

Обвідна  $A, B, C, G$  граничних кругів Мора є механічною характеристикою матеріалу. Точки  $B, F$  – відповідають осьовому стиску;  $C, E$  – осьовому розтягу; точка  $D$  - всебічному розтягу;  $C, E$  – деякому напруженому стану, в якому  $(\sigma_1, \sigma_3) > 0$ . Точок, що відповідають всебічному стиску немає, бо матеріал може витримати будь-який всебічний стиск.

Припустимо, що визначені радіуси граничних кругів Мора – це функції вигляду

$$R_H = \Phi\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right).$$

Тут точка

$$\frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2}. \quad (3.55)$$

на осі  $\sigma$  визначається центр граничного круга Мора радіусом  $R_n$ .

Напруженням  $\sigma_1, \sigma_3$  відповідає в дійсності круг радіусом

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (3.56)$$

Для забезпечення міцності необхідно, щоб виконувалась умова

$$R \leq R_n. \quad (3.57)$$

Заміняючи обвідну прямими лініями, шукаємо  $R_n$  у вигляді лінійної функції вигляду

$$R_n(x) = kx + b,$$

де сталі  $k, b$  – потрібно визначити. Для визначення  $k, b$  використовуємо те що:

$$\begin{aligned} \text{при } x = \frac{\sigma_{m\psi(p)}}{2}: R_n &= \frac{k\sigma_{m\psi(p)}}{2} + b = \frac{\sigma_{m\psi(p)}}{2}; \\ \text{при } x = -\frac{\sigma_{m\psi(c)}}{2}: R_n &= -\frac{k\sigma_{m\psi(c)}}{2} + b = \frac{\sigma_{m\psi(c)}}{2}. \end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, одержуємо:

$$m = \frac{\sigma_{m\psi(p)}}{\sigma_{m\psi(c)}}; \quad k = -\frac{1-m}{1+m}; \quad b = \sigma_{m\psi(p)} \frac{1}{1+m}. \quad (3.58)$$

Тоді

$$R_n(x) = -\frac{1-m}{1+m}x + \sigma_{m\psi(p)} \frac{1}{1+m}. \quad (3.59)$$

Умова (3.56) приймає вигляд:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq -\frac{1-m}{1+m} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \sigma_{m\psi(p)} \frac{1}{1+m};$$

або після перетворень

$$\sigma_1 - m\sigma_3 \leq \sigma_{m\psi(p)}, \quad m = \frac{\sigma_{m\psi(p)}}{\sigma_{m\psi(c)}}.$$

Щоб умова міцності виконувалась із запасом  $n$ , необхідно щоб

$$\sigma_{EKBM} = \sigma_1 - m\sigma_3 \leq [\sigma_p], \quad [\sigma_p] = \frac{\sigma_{m\psi(p)}}{n}, \quad m = \frac{\sigma_{m\psi(p)}}{\sigma_{m\psi(c)}}. \quad (3.60)$$

Тут  $\sigma_{EKBM}$  – еквівалентні напруження за теорією міцності Мора. Це і є **критерій міцності Мора**.

Критерій міцності Мора доцільно застосовувати для розрахунків на міцність крихких матеріалів – для них він дає задовільні результати. У разі пластичних матеріалів  $m=1$  і критерій міцності Мора співпадає з третім критерієм міцності. Тому його можна застосовувати в розрахунках на міцність і для пластичних матеріалів.

### 3.7. Застосування критеріїв міцності в деяких випадках плоского напруженого стану

Розглянемо деякий плоский напружений стан з напруженнями  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$  (рис. 3.11, а).

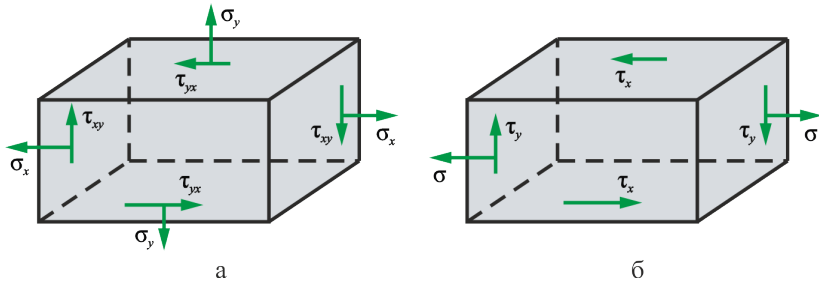


Рис. 3.11

Головні напруження визначаються за формулами (3.17):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[ \sigma_x + \sigma_y + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right]; \quad \sigma_2 = 0;$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \left[ \sigma_x + \sigma_y - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right].$$

Найбільші дотичні напруження

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (3.61)$$

При багатьох видах навантажень стержнів напруження такі, що (рис. 3.11, б):

$$\sigma_x = \sigma; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\tau_{yx} = \pm\tau. \quad (3.62)$$

Тоді:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}); \quad \sigma_2 = 0;$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} (\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \quad (3.63)$$

Еквівалентні напруження і умови міцності за різними теоріями набувають такого вигляду після перетворень:

а) за першою теорією

$$\sigma_{EKBI} = \sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) \leq [\sigma]; \quad (3.64)$$

б) за другою теорією ( $\sigma_2=0$ )

$$\sigma_{EKBI} = \sigma_1 - \mu\sigma_3 = \frac{1-\mu}{2} \sigma + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (3.65)$$

в) за третьою теорією

$$\sigma_{EKBI} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (3.66)$$

г) за четвертою теорією

$$\sigma_{EKBI} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (3.67)$$

д) за теорією міцності Мора

$$\sigma_{EKBI} = \sigma_1 - m\sigma_3 = \frac{1-m}{2} \cdot \sigma + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma_p], \quad (3.68)$$

де  $m = \sigma_{mч(p)} / \sigma_{mч(c)}$ .

### 3.8. Контрольні запитання

1. Поняття напруженого стану.
2. Головні площадки, напруження, напрями (осі).
3. Які умови виникнення лінійного (одновісного) напруженого стану?
4. Коли виникають найбільші нормальні і дотичні напруження при лінійному напруженому стані?
5. Правила знаків для напружень, закон парності дотичних напружень.
6. Які умови виникнення плоского (двовісного) напруженого стану?
7. Яка величина нормальних напружень на довільних площинках?
8. Яка величина дотичних напружень на довільних площинках?
9. В чому полягає інваріантність нормальних напружень?
10. Значення головного кута.
11. Формули для визначення головних напружень.
12. Площадки зсуву, їх взаємозв'язок з головними площадками?
13. Як визначаються екстремальні дотичні напруження?
14. Коли виникає об'ємний (тривісний) стан?
15. Як визначити нормальні напруження на довільній площинці?
16. Повне напруження на довільній площинці.
17. Дати визначення поняттям: головні осі; октаедрична площадка.
18. Записати формули для визначення октаедричних нормальних та середніх напружень.
19. Записати формули узагальненого закону Гука.
20. Як визначається відносна зміна об'єму матеріалу?
21. У чому полягає перша теорія міцності? Коефіцієнт запасу міцності.
22. Критерій найбільших лінійних деформацій.
23. Третя теорія міцності.
24. Записати розрахункові формули четвертої теорії міцності.
25. Критерій Мора та його застосування у розрахунках на міцність.
26. Чим відрізняються розрахункові формули критеріїв міцності для частинних випадків напруженого стану?

## 4. Зсув

### 4.1. Чистий зсув

#### 4.1.1. Умови виникнення

Розглянемо частинний випадок плоского напруженого стану при якому мають місце наступні умови (рис. 4.1):

$$\sigma_1 > 0, \sigma_3 < 0, \sigma_1 = |\sigma_3|, \sigma_2 = 0, \tau = 0.$$

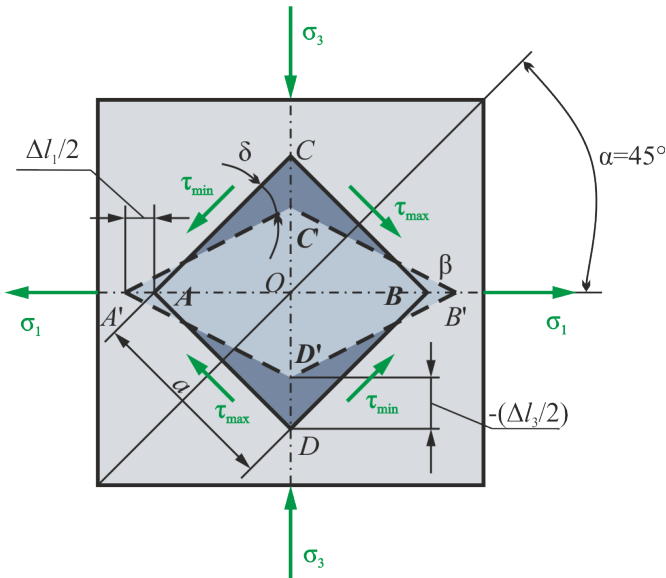


Рис. 4.1

Напруження на довільних площадках (відрахунок від головних площадок) визначається згідно формул (3.11), (3.13):

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + (-\sigma_3) \sin^2 \alpha = \sigma_1 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha); \quad (4.1)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - (-\sigma_3)}{2} \cdot \sin 2\alpha = \sigma_1 \cdot \sin 2\alpha. \quad (4.2)$$

Видно, що при  $\alpha = \pm 45^\circ$ :

$$\sigma_\alpha = 0; \quad \tau_\alpha = \tau_{\max}; \quad \tau_\alpha = \tau_{\min}, \quad \text{де } \tau_{\max} = \sigma_1, \quad \tau_{\min} = -\sigma_3. \quad (4.3)$$

**Чистий зсув** – випадок плоского напруженого стану, коли в матеріалі можна виділити елементарний паралелепіпед з бічними гранями, на яких діють тільки найбільші дотичні напруження.

#### 4.1.2. Закон Гука при чистому зсуві

Характер руйнування сталі при зсуві і при розриві відрізняється. При зсуві площина руйнування гладка, при розриві – має кристалічний, рваний вигляд. На рис. 4.2 зображена типова **діаграма зсуву** для пластичних матеріалів – залежність між напруженням та відносною деформацією при зсуві.

Видно, що в межах пружності

$$tg\alpha = \frac{\tau}{\gamma} = G,$$

або

$$\tau = \gamma G. \quad (4.4)$$

Тут  $G$  – модуль пружності при зсуві (модуль пружності другого роду).

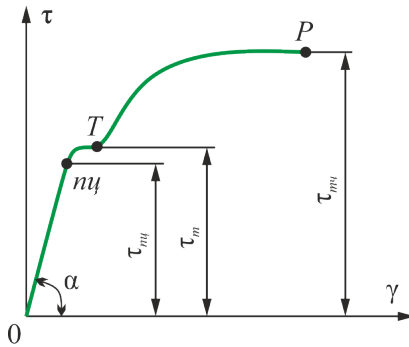


Рис. 4.2

Головні відносні деформації, згідно узагальненого закону Гука (3.38) та формул (4.3):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(-\sigma_3)] = \frac{\sigma_1}{E} (1 + \mu) = \frac{\tau_{max}}{E} (1 + \mu),$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\mu}{E} [\sigma_1 + (-\sigma_3)] = 0,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [-\sigma_3 - \mu\sigma_1] = -\frac{\sigma_3}{E} (1 + \mu) = \frac{\tau_{min}}{E} (1 + \mu). \quad (4.5)$$

З рис. 4.3 видно, що відносна деформація (кут зсуву), з урахуванням гіпотези мализни деформацій:

$$tg\gamma \approx \frac{\Delta S}{a} \approx \gamma. \quad (4.6)$$

де  $\Delta S$  – абсолютний зсув.

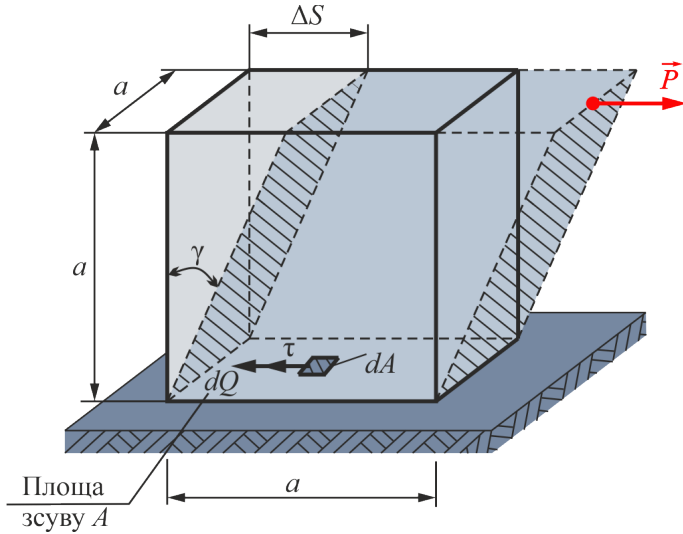


Рис. 4.3

#### 4.1.3. Робота і питома потенціальна енергія при чистому зсуві

З формул (4.4), (4.6)

$$\Delta S = a\gamma = \frac{\tau}{G}a. \quad (4.7)$$

В той же час, за умови рівномірного розподілення дотичних напружень по перерізу  $A$  (принцип Сен-Венана)

$$dQ = \tau dA.$$

Тоді внутрішня зсуваюча (поперечна) сила:

$$Q = P, \quad Q = \int_A \tau dA, \quad \text{або} \quad Q = \tau A, \quad \tau = \frac{Q}{A}. \quad (4.8)$$

Робота зовнішніх та внутрішніх сил для пружних деформацій:

$$W = \frac{1}{2} P \cdot \Delta S = \frac{Q^2 a}{2GA} = \frac{\tau^2 \cdot A \cdot a}{2G} = \frac{\tau^2 V}{2G}, \quad (4.9)$$

де  $V$  – об'єм деформованого матеріалу.

Питома потенціальна енергія

$$u = \frac{W}{V} = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (4.10)$$

В той же час, виходячи з головних напружень, питома потенціальна енергія зміни об'єму

$$u_v = \frac{1 - 2\mu}{6E} [\sigma_1 + (-\sigma_3)]^2 = 0.$$

Питома потенціальна енергія формозміни, а одночасно і повна питома потенціальна енергія

$$u = u_{\varphi} = \frac{1 + \mu}{3E} \cdot [\sigma_1^2 + (-\sigma_3)^2 - \sigma_1(-\sigma_3)] = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_1^2 = \frac{1 + \mu}{E} \tau^2. \quad (4.11)$$

Зіставляючи формули (4.10), (4.11), отримаємо залежність між трьома константами для ізотропних матеріалів:

$$\frac{\tau^2}{2G} = \frac{1 + \mu}{E} \tau^2,$$

звідки остаточно

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (4.12)$$

Наприклад для сталі:  $\mu=1,25$ ;  $E=2 \cdot 10^5$  МПа;  $G=0,8 \cdot 10^5$  МПа.

В таблиці 5 додатку наведені значення модулів пружності другого роду деяких конструкційних матеріалів.

Зіставивши (4.7), (4.8), отримаємо для величини абсолютного зсуву:

$$\Delta S = \frac{\tau \cdot a}{G} = \frac{Qa}{GA}. \quad (4.13)$$

Тепер встановимо взаємозв'язок між деформаціями зсуву на рис. 4.1 і 4.3. З рис. 4.1 видно, що

$$\begin{aligned} tg\beta &= tg(45^\circ - \theta) = oc'/ob' = \\ &= \frac{oc - \Delta l_3/2}{ob + \Delta l_1/2} = \frac{a\sqrt{2}/2 - \Delta l_3/2}{a\sqrt{2}/2 + \Delta l_1/2} = \frac{a\sqrt{2} - \Delta l_3}{a\sqrt{2} + \Delta l_1}. \end{aligned}$$

Знаючи, що

$$\Delta l_1 = \varepsilon_1 a\sqrt{2}, \quad \Delta l_3 = \varepsilon_3 a\sqrt{2},$$

можемо записати

$$tg(45^\circ - \theta) = \frac{a\sqrt{2} - \varepsilon_3 a\sqrt{2}}{a\sqrt{2} + \varepsilon_1 a\sqrt{2}} = \frac{1 - \varepsilon_3}{1 + \varepsilon_1}.$$

Використаємо тригонометричну функцію різниці двох аргументів

$$tg(45^\circ - \theta) = \frac{tg45^\circ - tg\theta}{1 + tg45^\circ \cdot tg\theta} = \frac{1 - tg\theta}{1 + tg\theta}.$$

Співставивши дві останні формули, можна сказати, що

$$\begin{aligned} -tg\theta &= \varepsilon_3 = \tau_{min} \frac{1 + \mu}{E} = \frac{\mu_{min}}{2G}, \\ tg\theta &= \varepsilon_1 = \tau_{max} \frac{1 + \mu}{E} = \frac{\tau_{max}}{2G}. \end{aligned}$$

Так, як з (4.12)

$$\frac{E}{1 + \mu} = 2G, \quad \tau_{max} = |\tau_{min}| = \tau,$$

то остаточно з урахуванням (4.4), (4.6) можна записати, що

$$\begin{aligned} 2tg\theta &= \frac{\tau}{G} = tg\gamma, \\ 2\theta &= \gamma \quad \text{або} \quad \theta = \gamma/2. \end{aligned}$$

#### 4.1.4. Допустимі напруження при зсуві

При чистому зсуві має місце частинний випадок напруженого стану, коли згідно (4.3):

$$\sigma_1 \neq 0; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 \neq 0; \quad \sigma_1 = [-\sigma_3], \quad \sigma_1 = \tau_{\max} = \tau; \quad \sigma_3 = \tau_{\min} = -\tau.$$

Згідно другій теорії міцності

$$\sigma_1 - \mu \sigma_3 \leq [\sigma],$$

тобто

$$\tau(1 + \mu) \leq [\sigma],$$

звідки

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{1 + \mu}. \quad (4.14)$$

Тоді допустиме дотичне напруження

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{1 + \mu}. \quad (4.15)$$

Так, наприклад, якщо для різних металів коефіцієнт Пуассона змінюється у межах

$$\mu = 0,23 \dots 0,42;$$

то

$$[\tau] = (0,70 \dots 0,81)[\sigma]. \quad (4.16)$$

Згідно третій теорії міцності

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad \text{або} \quad 2\tau \leq [\sigma],$$

звідки

$$\tau \leq 0,5 [\sigma]. \quad (4.17)$$

Допустиме дотичне напруження

$$[\tau] = 0,5 [\sigma]. \quad (4.18)$$

Згідно четвертій теорії міцності

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3} \leq [\sigma],$$

тоді

$$\tau \sqrt{3} \leq [\sigma],$$

або

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}, \quad \tau \leq 0,6[\sigma]. \quad (4.19)$$

Допустиме дотичне напруження

$$[\tau] \approx 0,6[\sigma]. \quad (4.20)$$

Для пластичних матеріалів найбільш застосовною є формула (4.20).

## 4.2. Умови міцності при зсуві (зрізі), зминанні

З усього сказаного вище **зсувом (зрізом)** можна назвати випадок деформації, яка виникає при дії на матеріал близько розташованих протилежно напрямлених зусиль. На практиці деформація чистого

зсуву зустрічається рідко. Більшість деталей працює на зріз. На рис. 4.4, а зображені умови, які з достатнім ступенем наближення приводять до виникнення деформації зрізу.

Для довільного перерізу однієї з відсічених частин (рис. 4.4, б) згідно (4.8) можна записати умову міцності на зсув (зріз)

$$\tau = \frac{Q}{A_{зр}} \leq [\tau], \quad (4.21)$$

де  $A_{зр}$  – площа зсуву (зрізу).

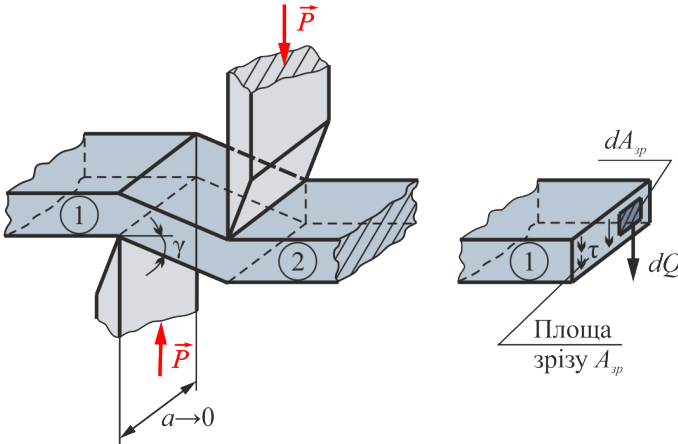


Рис. 4.4

**Зминання** – пластична деформація, яка виникає на поверхнях контактуючих елементів. Умова міцності на зминання має вигляд

$$\sigma_{зм} = \frac{N}{A_{зм}} \leq [\sigma_{зм}], \quad (4.22)$$

де  $N$  – зминаюче зусилля;  $\sigma_{зм}$  – напруження зминання;  $A_{зм}$  – площа зминання.

При контакті циліндричних поверхонь – це площа проекції поверхні контакту на діаметральну площину.

Допустиме напруження на зминання визначається з умови

$$[\sigma_{зм}] = (2 \div 2.5)[\sigma_c]. \quad (4.23)$$

В техніці найбільш типовими з'єднаннями, які працюють на зріз і зминання, є болтові, заклепкові, шпонкові, шліцьові і т.п.

На зріз працюють зварні з'єднання. На рис. 4.5 показані елементи болтового (заклепкового) з'єднання листів.

Необхідно звернути увагу на те, що в машинобудуванні з'єднання умовно поділяють на **роз'ємні** (болтові, шпонкові, шліцьові і т.д.), та **нероз'ємні** (заклепкові, зварні, клейові).

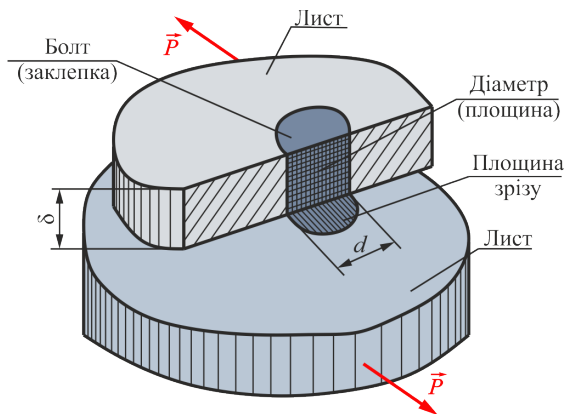


Рис. 4.5

### 4.3. Розрахунки на міцність болтових та заклепкових з'єднань

Такі з'єднання рахуються з умов міцності на зріз і на зминання.

Нехай болт (заклепку) поставлено без зазору (рис. 4.6, а, б).

Використаємо умову міцності на зріз (4.21)

$$\tau = N/A_{zp} \leq [\tau], \quad N = P, \quad N_1 + N_3 = P.$$

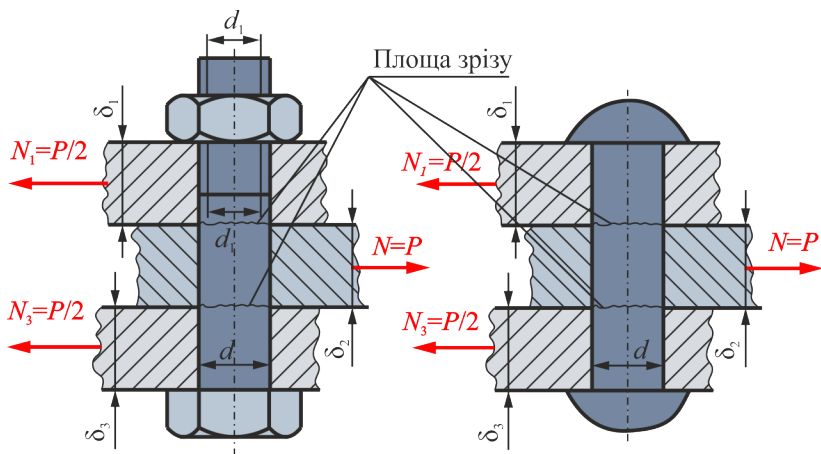


Рис. 4.6

Враховуючи, що для випадку з'єднання одним болтом ( $k=1$ ) трьох листів ( $n=3$ ) кількість площин зрізу  $n-1=2$ . Можна для загального випадку записати, що повна площа зрізу

$$A_{зр} = k(n-1)A_{зр(1)} = k(n-1)\frac{\pi d^2}{4}. \quad (4.24)$$

Тут  $A_{зр(1)}$  – площа однієї площини зрізу.

Тоді загальна умова міцності на зріз

$$\tau = \frac{4P}{k(n-1)\pi d^2} \leq [\tau]. \quad (4.25)$$

З умови (4.25) можна визначити будь-яку величину. В проектному розрахунку найчастіше визначається діаметр болта

$$d \geq \sqrt{\frac{4P}{k(n-1)\pi[\tau]}}. \quad (4.26)$$

На підставі умови міцності на зминання для болта (4.22) маємо

$$\sigma_{зм} = \frac{N}{A_{зм}} \leq [\sigma_{зм}].$$

Небезпека зминання болта може виникати від його контакту з найтоншим листом, де діє найбільше зминаюче зусилля  $N$ . Величину такого зусилля можна визначити за формулами:

$$N = \frac{2P}{n} - \text{для парної кількості листів}; \quad (4.27)$$

$$N = \frac{2P}{n-1} - \text{для непарної кількості листів}. \quad (4.28)$$

Площа зминання для одного болта

$$A_{зм(1)} = \delta d. \quad (4.29)$$

Тут  $\delta$  – товщина найтоншого листа.

Тоді умова міцності:

$$\sigma_{зм} = \frac{2P}{kn\delta d} \leq [\sigma_{зм}] - \text{для парної кількості листів}; \quad (4.30)$$

$$\sigma_{зм} = \frac{2P}{k(n-1)\delta d} \leq [\sigma_{зм}] - \text{для непарної кількості листів}. \quad (4.31)$$

Можливі значення діаметра болта

$$d \geq \frac{2P}{kn\delta[\sigma_{зм}]}, \quad d \geq \frac{2P}{k(n-1)\delta[\sigma_{зм}]}. \quad (4.32)$$

За результатами розрахунків на зріз і зминання приймають більший діаметр болта, округливши його до стандартного значення.

Якщо болт поставлено із зазором, то тільки значною затяжкою болта забезпечується достатня сила тертя між стисненими листами, яка попереджає їх взаємний зсув і перекося болта.

У цьому випадку кожен болт розраховують на зусилля затяжки

$$Q = N/fk, \quad (4.33)$$

де  $N$  – зсуваюча сила, що діє на окремий лист, визначається за формулами (4.27), (4.28);  $f$  – коефіцієнт тертя між листами;  $k$  – кількість болтів.

Для сталевих і чавунних сухих поверхонь (без змащування)

$$f = 0,15 \div 0,2. \quad (4.34)$$

Тоді умова міцності затягнутого (розтягнутого) болта

$$\sigma_p = \frac{Q}{A_1} \leq [\sigma_p]. \quad (4.35)$$

Тут в (4.35)  $A_1$  – площа поперечного перерізу болта по впадинам різьби;  $[\sigma_p]$  – допустиме напруження на розтяг.

Підставивши у (4.35) значення формул (4.27), (4.28), (4.33), отримаємо умову міцності у загальному випадку для болта із зазором:

$$\sigma_p = \frac{4N}{fk\pi d_1^2} \leq [\sigma_p], \quad (4.36)$$

або

$$\sigma_p = \frac{8P}{fk\pi d_1^2} \leq [\sigma_p] \text{ – для парної кількості листів; } \quad (4.37)$$

$$\sigma_p = \frac{8P}{fk(n-1)\pi d_1^2} \leq [\sigma_p] \text{ – для непарної кількості листів; } \quad (4.38)$$

В проєктному розрахунку найчастіше визначається внутрішній діаметр різьби болта:

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{8P}{fk\pi[\sigma_p]}}, \quad d_1 \geq \sqrt{\frac{8P}{fk(n-1)\pi[\sigma_p]}}, \quad (4.39)$$

який округлюється до ближнього стандартного.

В місці отворів під болти або заклепки листи ослаблені, тому їх необхідно перевіряти на розрив в найбільш ослаблених перерізах (найменша товщина листа  $\delta$ ; найбільша кількість  $k$  отворів заданого діаметра  $d$ ; найбільша зсуваюча сила  $N$ ).

Умова міцності розтягнутого листа для загального випадку болтового або заклепкового з'єднання має вигляд:

$$\sigma_p = \frac{N}{A_{min}} \leq [\sigma_p], \quad (4.40)$$

де  $N$  – зсуваюча сила, яка в свою чергу розтягує окремих лист (визначається з формул (4.27), (4.28)).

Мінімальна (ослаблена) площа поперечного перерізу листа:

$$A_{min} = A - A_{min} = \delta(b - kd), \quad (4.41)$$

де  $b$  – ширина листа,  $k$  – кількість однакових отворів,  $d$  – діаметр отвору.

Підставивши усі значення в (4.40), отримаємо умови міцності:

$$\sigma_p = \frac{2P}{n\delta(b-kd)} \leq [\sigma_p] \text{ – для парної кількості листів; } \quad (4.42)$$

$$\sigma_p = \frac{2P}{(n-1)\delta(b-kd)} \leq [\sigma_p] \text{ – для непарної кількості листів. } \quad (4.43)$$

**Рекомендації** до болтових та заклепкових з'єднань:

1. для багаторядного розташування отворів крок між ними в ряду

$$t = (3 \div 6) d; \quad (4.44)$$

2. відстань від осі отвору до вільної кромки листа

$$t_1 = (1,5 \div 2,0) d; \quad (4.45)$$

3. відстань між рядами отворів

$$t_2 = (2 \div 3) d. \quad (4.46)$$

#### 4.4. Розрахунки на міцність зварних з'єднань

Зварний шов повинен забезпечувати механічні властивості, близькі до тих же властивостей основних матеріалів, що поєднуються у конструкцію (рис. 4.7).

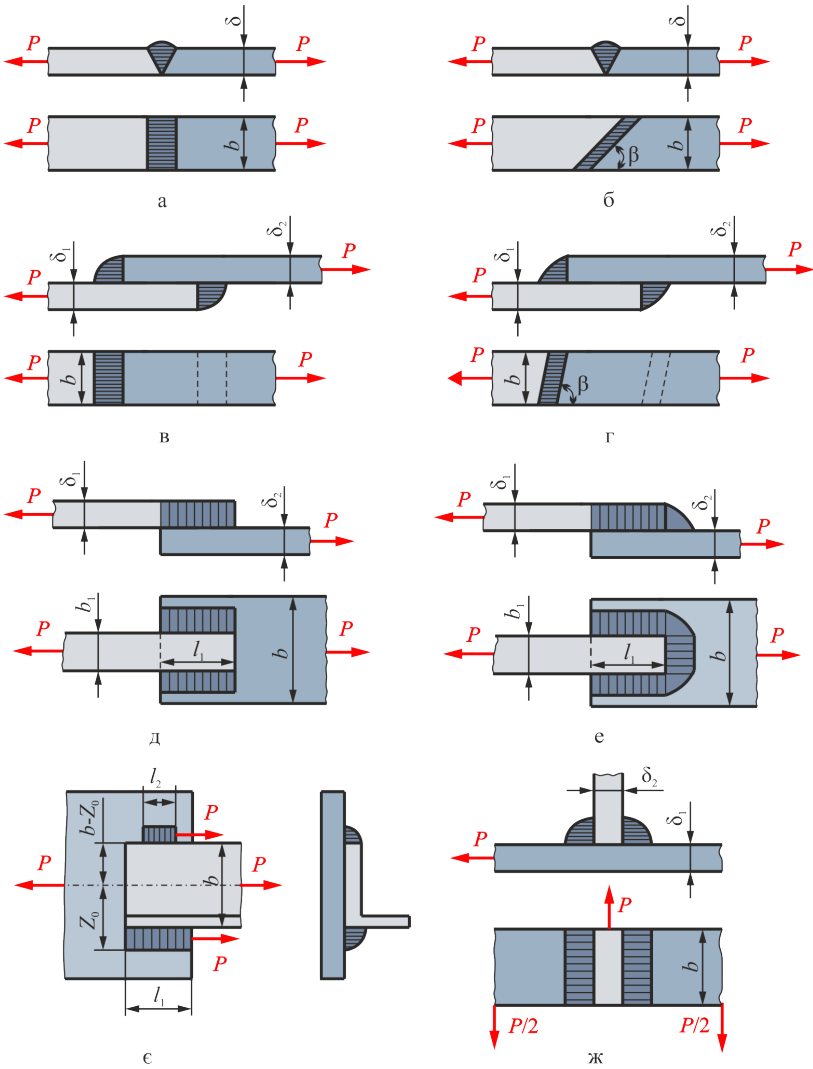


Рис. 4.7

Найпоширенішими в практичному застосуванні є наступні зварні з'єднання:

- 1) стикове з'єднання з лобовим (торцевим) прямим швом (рис. 4.7, а);
- 2) стикове з'єднання з лобовим (торцевим) косим швом (рис. 4.7, б);
- 3) напускове з'єднання з лобовим (торцевим) прямим швом (рис. 4.7, в);
- 4) напускове з'єднання з лобовим (торцевим) косим швом (рис. 4.7, г);
- 5) напускове з'єднання елементів фланговим (боковим) швом (рис. 4.7, д);
- 6) напускове комбіноване з'єднання (рис. 4.7, е);
- 7) напускове з'єднання несиметричних елементів (рис. 4.7, є);
- 8) таврове з'єднання елементів (рис. 4.7, ж).

За катет ( $k$ ) зварного шва приймають менший катет вписаного у переріз шва нерівнобічного прямокутного трикутника (рис. 4.8, а) або катет рівнобічного (рис. 4.8, б).

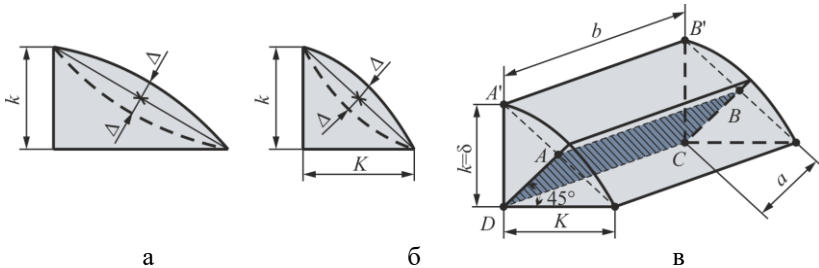


Рис. 4.8

Випуклість (посилення), або ввігнутість (ослаблення) зварного шва не повинні перевищувати 2-3 мм. Для стикових і непускових зварних з'єднань розрахункову товщину шва приймають рівною товщині листа  $k = \delta$ , а можливі напливи не враховують. З рис.4.8, в видно, що у спрощеному вигляді зварний шов має вигляд рівнобедреної призми. Руйнування зрізу має відбуватися по площині  $ABCD$ , висотою

$$a = \delta \cos 45^\circ \approx 0,7\delta, \quad (4.47)$$

і площею

$$A = ab \approx 0,7\delta b. \quad (4.48)$$

Умова міцності стикового з'єднання з прямим швом на розтяг (стик)

$$\sigma_p = \frac{P}{A_u} \leq [\sigma'], \quad (4.49)$$

де  $P$  – розтягуюча (або стискаюча) сила;  $\sigma_p$  – нормальні напруження;  $[\sigma']$  – допустиме напруження на розтяг (стик) для зварних швів при

статичному навантаженні;  $A_{ш} = \delta b$  – площа небезпечного перерізу лобового шва.

З урахуванням формули (4.49) отримаємо

$$\sigma_p = \frac{P}{\delta b} \leq [\sigma']. \quad (4.50)$$

Аналогічно для стикового з'єднання з косим швом

$$\sigma_p = \frac{P \sin \beta}{\delta b} \leq [\sigma']. \quad (4.51)$$

Для зварних з'єднань, зображених на рис. 4.7 (в, д, ж,) враховують тільки зріз шва, тоді умова міцності

$$\tau_{зр} = \frac{P}{A_{зр}} \leq [\tau'_{зр}]. \quad (4.52)$$

Враховуючи, що загальна площа зрізу є двостороння подвійна площа (4.48)

$$A_{зр} = 2A = 1,4\delta b,$$

можна остаточно записати

$$\tau_{зр} = \frac{P}{1,4\delta b} \leq [\tau'_{зр}], \quad (4.53)$$

де  $[\tau'_{зр}]$  – допустиме напруження на зріз для зварних швів.

Тоді для з'єднання на рис. 4.7, г

$$\tau_{зр} = \frac{P \sin \beta}{1,4\delta b} \leq [\tau'_{зр}]. \quad (4.54)$$

Для комбінованих з'єднань (рис. 4.7, е) умова міцності (4.52) матиме вигляд

$$\tau_{зр} = \frac{P}{0,7\delta(2l_1 + b_1)} \leq [\tau'_{зр}], \quad (4.55)$$

якщо врахувати периметр зварних швів.

Для з'єднання несиметричних елементів (рис. 4.7, е) зусилля, діючі на кожен відрізок шва, розподіляються з умови статичної рівноваги

$$P_1 = P \frac{b - z_o}{b}, \quad P_2 = P \frac{z_o}{b}. \quad (4.56)$$

Тоді умови міцності для кожного відрізка шва:

$$\begin{aligned} \tau_{зр} &= \frac{P_1}{0,7\delta b_1} \leq [\tau'_{зр}]; \\ \tau_{зр} &= \frac{P_2}{0,7\delta b_2} \leq [\tau'_{зр}]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Припускається випадок  $l_1 = l_2$ .

З формул (4.51) – (4.57) можна визначити будь-який параметр зварного з'єднання.

На практиці розрахункова довжина зварного шва штучно збільшується на деяку нормовану величину (10 мм). Отримується дійсна довжина, яка враховує знижену якість шва на його початку і в кінці

$$l_2 = (l_1 + 10) \text{ мм}. \quad (4.58)$$

В таблиці 6 додатку наведені рекомендовані значення допустимих напружень для зварних швів в машинобудівних конструкціях при статичних навантаженнях.

## 4.5. Контрольні запитання

1. Які умови виникнення чистого зсуву?
2. Що являє собою чистий зсув?
3. Закон Гука при чистому зсуві.
4. Робота пружних сил.
5. Питома потенціальна енергія.
6. Взаємозв'язок між трьома пружними константами.
7. Чому дорівнює величина абсолютного зсуву?
8. Чому дорівнює допустиме дотичне напруження зсуву за другою теорією міцності?
9. Чому дорівнює допустиме дотичне напруження зсуву за третьою теорією міцності?
10. Чому дорівнює допустиме дотичне напруження зсуву за четвертою теорією міцності?
11. Що таке зминання?
12. Які з'єднання ви знаєте?
13. Яка різниця між болтовим та заклепковим з'єднаннями?
14. Що таке площина зрізу?
15. Що таке поверхня зминання?
16. Як визначається діаметр болта або заклепки?
17. Залежність зусилля зминання від кількості листів.
18. В чому різниця розрахунків болта без зазору і з зазором?
19. Як визначається діаметр болта, поставленого із зазором?
20. Чому лист з отворами під болти, або заклепки перевіряється на міцність при розтягу?
21. Які типи зварних з'єднань є найбільш поширеними в практичному застосуванні?
22. Що таке катет зварного шва?
23. Де знаходиться площина зрізу у зварному шві?
24. Яка різниця в розрахунку флангових та фронтальних зварних швів?
25. Як враховуються скошені торці зварюваних елементів?

## 5. Геометричні характеристики плоских перерізів стержнів

### 5.1. Загальні означення

**Абсолютні геометричні характеристики** – величини яких не залежать від вибору системи координат. Абсолютні характеристики можна поділити на **основні** та **похідні**. Першими є основні розміри поперечного перерізу. Похідні геометричні характеристики завжди можна подати через основні.

**Лінійний розмір перерізу** – це абсолютна геометрична характеристика, яка задає відстань між двома характерними точками цього перерізу, або довжину контура цього перерізу.

**Площа плоского перерізу** – чисельна абсолютна геометрична характеристика розміру перерізу.

Якщо плоский переріз розбити на  $n$  окремих площ  $A_i$ , то із властивості адитивності випливає, що загальна площа

$$A = \sum_{i=1}^n A_i, \quad (cm^2, m^2; A > 0). \quad (5.1)$$

При збільшенні кількості окремих частин і одночасному зменшенні їх площ сума перейде в інтеграл виду

$$A = \int_A dA. \quad (5.2)$$

**Відносними** називають геометричні характеристики, величини яких залежить від вибору системи координат. Надалі розглянемо плоску систему взаємоперпендикулярних осей  $Y, Z$ , – які утворюють праву систему координат (рис. 5.1).

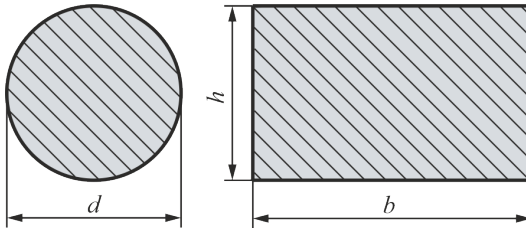


Рис. 5.1

**Статичними моментами площі** перерізу відносно осей  $Y$  або  $Z$  (рис. 5.2) називають інтеграли виду:

$$S_y = \int_A z dA, \quad S_z = \int_A y dA, \quad (cm^3, m^3, S_y < 0, S_z > 0), \quad (5.3)$$

де  $z, y$  – відстані від центра елементарної площадки  $dA$  до осей  $Y, Z$ , відповідно.

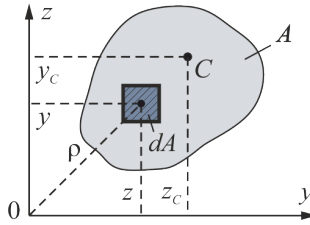


Рис. 5.2

Якщо відомі статичні моменти площі та самі площі, то **координати центра ваги** перерізу відносно будь-яких осей  $Y$  та  $Z$  визначаються за формулами:

$$S_y = z_c A, \quad S_z = y_c A, \quad y_c = \frac{S_z}{A}, \quad z_c = \frac{S_y}{A}, \quad (\text{см}, \text{м}). \quad (5.4)$$

Розіб'ємо переріз на  $n$  частин площею  $A_i$  кожна, тоді:

$$S_y = \sum_{i=1}^n z_i A_i, \quad S_z = \sum_{i=1}^n y_i A_i, \quad (5.5)$$

де  $y_i, z_i$  – відстань від центра ваги  $i$ -ої частини перерізу до осей  $Z$  та  $Y$ , відповідно.

Поділивши ліві та праві частини формул (5.5) на  $A$ , отримаємо:

$$z_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n z_i A_i}{A}, \quad y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{A}. \quad (5.6)$$

**Центральна вісь** – така, що проходить через центр ваги перерізу. В перерізі можна провести безліч центральних осей.

## 5.2. Моменти та радіуси інерції перерізу

**Осьовими (екваторіальними) моментами інерції** перерізу відносно осей  $Y$  та  $Z$  називаються інтеграли виду:

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA, \quad (I_{y/z} > 0, \text{см}^4, \text{м}^4). \quad (5.7)$$

**Полярним моментом інерції** перерізу називається інтеграл виду

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA, \quad (I_\rho > 0, \text{см}^4, \text{м}^4). \quad (5.8)$$

З рис. 5.2 видно, що  $\rho^2 = y^2 + z^2$ , тоді

$$I_\rho = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA.$$

Остаточно

$$I_\rho = I_y + I_z. \quad (5.9)$$

Це формула взаємозв'язку між осьовими та полярним моментами інерції.

**Відцентровим моментом інерції** перерізу відносно осей  $Y$  та  $Z$  називається інтеграл виду

$$I_{yz} = \int_A yz dA, \quad (\text{см}^4, \text{м}^4). \quad (5.10)$$

Радіусами інерції перерізу відносно осей  $y$  та  $z$  називаються величини:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad (i_{y/z} > 0, \text{ см, м}). \quad (5.11)$$

## 5.3. Властивості геометричних характеристик перерізів

### 5.3.1. Геометричні властивості складних (складених) перерізів

У багатьох практичних задачах складні (складені) перерізи можна подати у вигляді сукупності більш простих перерізів, для яких геометричні характеристики визначаються відносно легко (рис. 5.3)

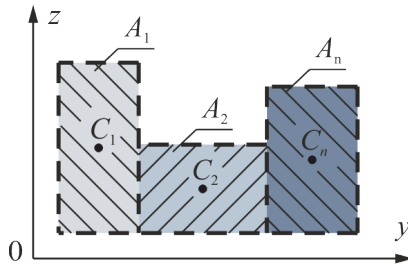


Рис. 5.3

Нехай таких простих перерізів  $n$  і їх геометричні характеристики вже знайдені. Тоді для складного (складеного) перерізу можна записати:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + \dots + A_n, \\ S_y &= S_y^{A_1} + S_y^{A_2} + \dots + S_y^{A_n}, \quad S_z = S_z^{A_1} + S_z^{A_2} + \dots + S_z^{A_n}, \\ I_y &= I_y^{A_1} + I_y^{A_2} + \dots + I_y^{A_n}, \quad I_z = I_z^{A_1} + I_z^{A_2} + \dots + I_z^{A_n}, \\ I_{yz} &= I_{yz}^{A_1} + I_{yz}^{A_2} + \dots + I_{yz}^{A_n}, \quad I_p = I_p^{A_1} + I_p^{A_2} + \dots + I_p^{A_n}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Слід зауважити, що отвір в перерізі можна вважати також складовим перерізом, але з умовно від'ємними геометричними характеристиками у формулах (5.12).

### 5.3.2. Формули перетворення при паралельному переносі координатних осей

Нехай осі  $Y'$ ,  $Z'$  і точка  $O'$  визначають стару систему координат (рис. 5.4). Нова система координат, що визначається осями  $Y$ ,  $Z$  і точкою  $O$ , отримується паралельним переносом попередніх осей на координати  $a$ ,  $b$ .

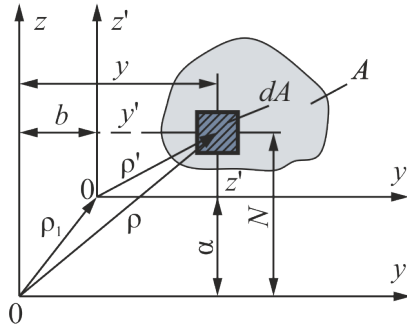


Рис. 5.4

Виразимо моменти інерції перерізу відносно нових осей  $Y, Z$ , якщо вони були відомі відносно попередніх осей  $Y', Z'$ . Зв'язок між координатами нової та старої систем координат:

$$y = y' + b, \quad z = z' + a. \quad (5.13)$$

Тоді

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 dA = \int_A (z' + a)^2 dA = \\ &= \int_A z'^2 dA + 2a \int_A z' dA + a^2 \int_A dA = I_{y'} + 2aS_{y'} + a^2 A. \end{aligned}$$

Аналогічні перетворення будуть і для інших моментів інерції. Остаточоно:

$$\begin{aligned} I_y &= I_{y'} + 2aS_{y'} + a^2 A, \quad I_z = I_{z'} + 2bS_{z'} + b^2 A; \\ I_{yz} &= I_{y'z'} + aS_{y'} + bS_{z'} + abA; \quad I_\rho = I_\rho + 2aS_{y'} + 2bS_{z'} + \rho_0^2 A; \\ \rho_0^2 &= a^2 + b^2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Якщо перехід необхідно здійснити від осей  $Y', Z'$ , що є центральними, то у формулах (5.14) випадають складові, які включають статичні моменти площ ( $S_{y'}=0, S_{z'}=0$ ).

### 5.3.3. Формули перетворення при повороті координатних осей

Нехай осі  $Y_1, Z_1$  одержані з осей  $Y', Z'$  поворотом на додатній кут  $\alpha$  (рис. 5.5).

Виразимо моменти інерції перерізу відносно нових осей через відомі відносно старих осей. Координати елементарної площі:

$$y_1 = y \cos \alpha + z \sin \alpha, \quad z_1 = z \cos \alpha - y \sin \alpha. \quad (5.15)$$

Розглянемо:

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dA =$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos^2 \alpha \int_A z^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA - \sin 2\alpha \int_A yz dA = \\
 &= I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha.
 \end{aligned}$$

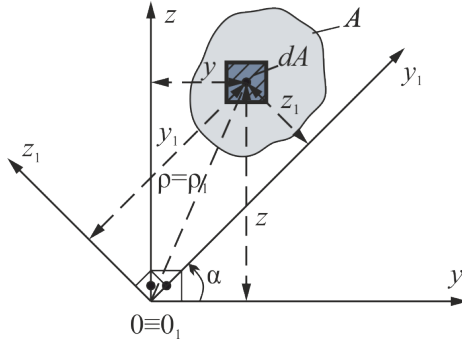


Рис. 5.5

Остаточно після аналогічних перетворень:

$$\begin{aligned}
 I_{y_1} &= I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha, \\
 I_{z_1} &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha; \\
 I_{y_1 z_1} &= \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha, \quad I_{\rho_1} = I_{\rho}.
 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Видно, що сума осьових моментів інерції відносно взаємно-перпендикулярних осей при їх повороті є постійною:

$$I_{y'} + I_{z'} = I_{y_1} + I_{z_1} = I_{\rho_1} = I_{\rho} = \text{const.} \quad (5.17)$$

## 5.4. Головні осі інерції

З формул (5.17) видно, що при повороті координатної системи осьові моменти інерції змінюються як показано на рис. 5.6. Видно, що для деяких значень кута  $\alpha$  осьові моменти інерції досягають екстремальних значень з інтервалом  $90^\circ$ . Це **головні моменти інерції**.

**Головні осі** – відносно яких осьові моменти є головними. Якщо при цьому вони проходять через центр ваги – **головні центральні осі**.

Дослідимо функцію  $I_{y_1} = f(\alpha)$  на екстремум:

$$\frac{dI_{y_1}}{d\alpha} = -I_y \cdot 2 \sin \alpha + I_z \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha - I_{yz} 2 \cos 2\alpha.$$

Прирівнявши до нуля, одержимо:

$$\left. \frac{dI_{y_1}}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} = -(I_y - I_z) \sin 2\alpha_0 - 2I_{yz} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Тут  $\alpha_0$  – кут, на який треба повернути координатні осі  $Y, Z$ , щоб вони стали головними, які позначимо як  $U, V$ .

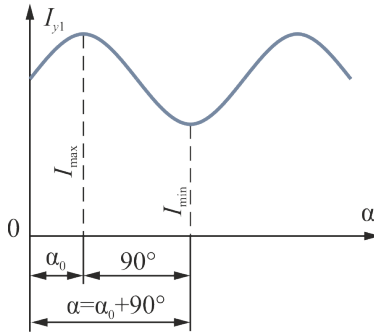


Рис. 5.6

З попередньої формули:

$$tg 2\alpha_0 = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}. \quad (5.18)$$

## 5.5. Величини головних моментів інерції

Знайдемо величини головних моментів інерції. Знаючи кут  $\alpha_0$ , можна скористатись формулами (5.16):

$$I_u = I_y \cos^2 \alpha_0 + I_z \sin^2 \alpha_0 - I_{yz} \sin 2\alpha_0;$$

$$I_v = I_z \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 + I_{yz} \sin 2\alpha_0.$$

Враховавши, що

$$\cos^2 \alpha_0 = \frac{1 + \cos 2\alpha_0}{2}, \quad \sin^2 \alpha_0 = \frac{1 - \cos 2\alpha_0}{2}, \quad (5.19)$$

після ряду перетворень остаточно отримаємо:

$$I_{min}^{max} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}. \quad (5.20)$$

Розглянемо переріз, що має вісь симетрії  $U$  (обов'язково проходить через центр ваги). Проведемо через центр ваги вісь  $V$ , перпендикулярну осі  $U$  і довільну вісь  $V_1$ , також перпендикулярну осі  $U$  (рис. 5.7). Доведемо, що осі  $U, V$  та  $U, V_1$  є головними осями інерції.

В силу симетрії загальна площа

$$A' = A'', \quad A = A' + A''$$

і її завжди можна поділити на елементарні площадки, симетричні відносно осі  $U$ . Тоді:

$$I_{uv'} = \int_{A/2} UV' dA', \quad I_{uv''} = \int_{A/2} UV'' dA''.$$

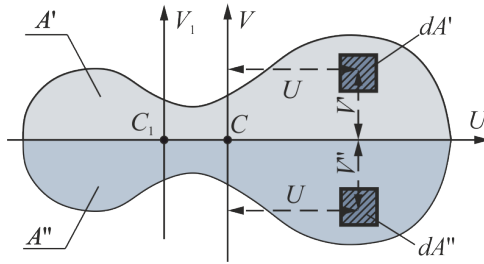


Рис. 5.7

Видно, що

$$I_{uv} = I_{uv'} + I_{uv''} = \int_{A/2} UV' dA' + \int_{A/2} UV'' dA''.$$

Враховуючи, що

$$V' = -V'', \quad dA' = dA'',$$

остаточно отримаємо

$$I_{uv} = \int_A U(-V'') dA' + \int_{A''} UV'' dA'' = 0.$$

Отже осі  $U, V$  – головні центральні осі. Аналогічно отримаємо, що

$$I_{uv_1} = 0,$$

вісь  $V_1$  – просто головна.

## 5.6. Моменти опору перерізів

В інженерних розрахунках приймаються до уваги тільки геометричні характеристики відносно головних центральних осей. Нехай осі  $V, U$  – головні центральні осі деякого перерізу (рис. 5.8, а, б).

В силу симетрії загальна площа

$$A' = A'', \quad A = A' + A''$$

і її завжди можна поділити на елементарні площадки, симетричні відносно осі  $U$ . Тоді:

$$I_{uv'} = \int_{A/2} UV' dA', \quad I_{uv''} = \int_{A/2} UV'' dA''.$$

**Осьовим моментом опору** перерізу називається частка від ділення головного моменту інерції на відстань від осі до найбільш віддаленої точки перерізу:

$$W_u = \frac{I_u}{v_{max}}, \quad W_v = \frac{I_v}{u_{max}}, \quad (W_{uv} > 0, \text{ см}^3, \text{ м}^3). \quad (5.21)$$

**Полярним моментом опору** перерізу називається частка від ділення полярного моменту інерції на відстань від центра ваги до найбільш віддаленої точки перерізу (рис. 5.8, в).

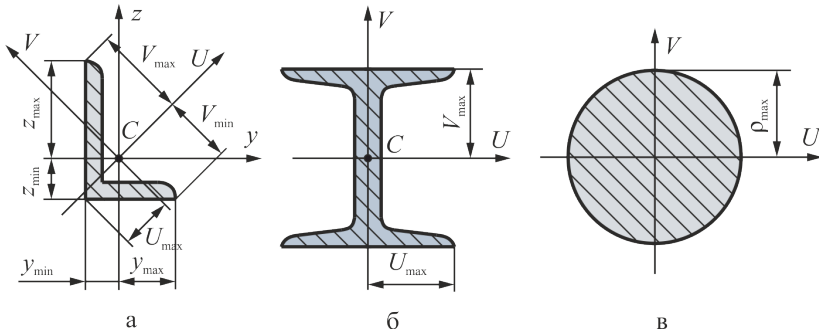


Рис. 5.8

З означення випливає, що

$$W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{\rho_{max}}, \quad (W_{\rho} > 0, \text{ см}^3, \text{ м}^3). \quad (5.22)$$

Полярні моменти опору мають найбільше практичне застосування для круглих, кільцевих поперечних перерізів.

## 5.7. Приклади обчислення геометричних характеристик перерізів

### 5.7.1. Рівнобічні та нерівнобічні сортаментні кутики

**Приклад 1.** Застосування формул переходу від головних центральних осей.

Нехай є довільний кутик (рис. 5.9, а). Проведемо центральні осі  $Y, Z$ , паралельні його полицям. Треба довести, що відцентровий момент інерції такого кутика відносно осей  $Y, Z$ , можна знайти за формулою

$$I_{yz} = \pm \frac{I_{max} - I_{min}}{2} \sin 2\alpha_0, \quad (5.23)$$

де  $I_{max}, I_{min}$  – головні моменти інерції кутика;  $\alpha_0$  – кут з таблиці сортаменту, що визначає положення головної центральної осі (для рівнобічного кутика  $\alpha_0 = 45^\circ, \sin 2\alpha_0 = 1$ ).

Знак кута  $\alpha_0$  “+”, якщо кінці кутика лежать у першій та третій чвертях; знак “-”, якщо у другій та четвертій чвертях (система  $YCZ$ ).

**Доведення.** Вважаємо осі  $Y, Z$  новими. Крім них будемо розглядати головні центральні осі  $U, V$ , які вважаємо старими. Тоді за формулою переходу від головних осей маємо ( $I_{uv}=0$ )

$$I_{yz} = \frac{I_u - I_v}{2} \sin 2\alpha, \quad (5.24)$$

де  $\alpha$  – кут між осями  $U$  і  $Y$ .

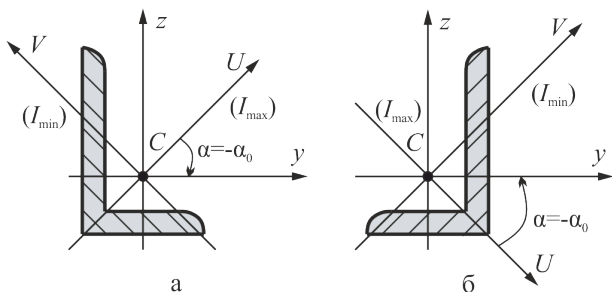


Рис. 5.9

Нехай кутик розташований як показано на рис. 5.9, а. Доведення будемо вести методом послідовного добору положень кутика:

- 1) проводимо осі  $Y, Z$ ;
- 2) проводимо дві, прями, що співпадають з головними центральними осями кутика і позначаємо ту, що утворює з віссю  $Y$  найменший кут  $\alpha$  як  $U$ , іншу, їй перпендикулярну – як  $V$ ;
- 3) вказуємо напрямки осей  $U$  та  $V$  так, щоб кут  $\alpha$  між додатними напрямками осей  $U$  та  $Y$  був гострим;
- 4) встановлюємо, яка з осей  $U$  та  $V$  є вісь максимумів, а яка – мінімумів

$$I_u = I_{max}, \quad I_v = I_{min};$$

- 5) знаходимо між осями  $U$  та  $Y$  кут з його знаком

$$\alpha = -\alpha_0;$$

- 6) знаходимо відцентровий момент інерції за формулою (5.23):

$$I_{yz} = \frac{I_{max} - I_{min}}{2} \sin(-2\alpha_0) = -\frac{I_{max} - I_{min}}{2} \sin(2\alpha_0),$$

що підтверджує придатність формули (5.23).

Для іншого розташування кутика маємо:

$$I_u = I_{max}, \quad I_v = I_{min}, \quad \alpha = \alpha_0, \quad I_{yz} = \frac{I_{max} - I_{min}}{2} \sin 2\alpha_0.$$

Отже формула (5.24) має місце. Усього різних розташувань нерівнобічного кутика можна одержати вісім.

Перші чотири положення кутика можна одержати, якщо повернути на рис. 5.9, б кутик навколо точки  $C$  на кути  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  та  $270^\circ$ . Чотири положення кутика одержимо при його повороті на  $180^\circ$  навколо полиці. Придатність формули (5.23) для нерозглянутих розташувань кутиків доводиться аналогічно. Видно що:

- 1) якщо кутик рівнобокий, то формула (5.23) спрощується:

$$I_{yz} = \pm \frac{I_{max} - I_{min}}{2}; \quad (5.25)$$

- 2) для нерівнобічних кутиків в таблицях сортаменту немає  $I_{max}$ , але є  $I_y, I_z$  та  $I_{min}$ ; оскільки

$$I_{max} + I_{min} = I_y + I_z,$$

то

$$I_{max} = I_y + I_z - I_{min}. \quad (5.26)$$

**Приклад 2.** Застосування формул переходу до головних центральних осей.

Нехай є довільний кутик. Проведемо центральні осі  $Y, Z$ , що паралельні його полицям. Тоді

$$I_{yz} = \pm \frac{I_y - I_z}{2 \operatorname{tg} 2\alpha_0}, \quad (5.27)$$

де  $I_y, I_z$  – осьові моменти інерції з таблиць сортаменту; кут  $\alpha_0$  і правила знаків для нього такі ж, як і в формулі (5.23).

**Зауваження:** формулу (5.27) можна довести, якщо скористатися формулою перетворення відцентрового моменту інерції при переході до головних осей (5.16)

$$I_{uv} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{yz} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Тут:  $U, V$  – головні центральні осі, що вважаються новими;  $\alpha_0$  – кут між осями  $Y$  та  $U$ .

### 5.7.2. Круглий переріз

Розглянемо круглий переріз, діаметром  $d$ . Розіб'ємо його на елементарні кільцеві площі  $dA$ , як показано на рис. 5.10, а. Тоді

$$A = \int_A dA.$$

З рис. 5.10, б видно, що

$$dA = 2\pi\rho d\rho, \quad \text{де } 0 \leq \rho \leq \frac{d}{2}.$$

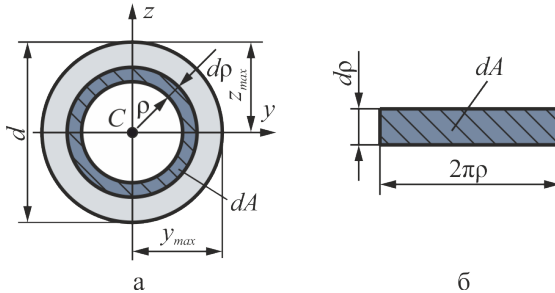


Рис. 5.10

Враховуючи це, переходимо від інтегралу по  $A$  до інтегралу по  $\rho$ :

$$A = \int_0^{d/2} 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^{d/2} \rho d\rho = 2\pi \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{d/2} = \frac{\pi d^2}{4}. \quad (5.28)$$

Аналогічно знаходимо полярний момент інерції

$$I_{\rho} = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 2\pi\rho d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (5.29)$$

Так як  $I_{\rho} = I_y + I_z$  і для круглого перерізу  $I_y = I_z$ , то  $I_{\rho} = 2I_y = 2I_z$ , звідки знаходимо осьові моменти інерції

$$I_y = I_z = \frac{I_{\rho}}{2} = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (5.30)$$

За означеннями знаходимо:

$$i_y = i_z = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{4}{\pi d^2}} = \sqrt{\frac{d^2}{16}} = \frac{d}{4}, \quad (5.31)$$

$$i_{\rho} = \sqrt{\frac{I_{\rho}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{4}{\pi d^2}} = \sqrt{\frac{d^2}{8}} = \frac{d}{2\sqrt{2}}; \quad (5.32)$$

$$W_y = W_z = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{\pi d^4}{64} \frac{2}{d} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (5.33)$$

$$W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{\rho_{max}} = \frac{\pi d^4}{32} \frac{2}{d} = \frac{\pi d^3}{16}. \quad (5.34)$$

Видно, що  $W_{\rho} = 2W_y = 2W_z$ .

### 5.7.3. Кільцевий переріз

Розглянемо кільцевий переріз, зображений на рис. 5.11. Вважаємо, що він складений з двох круглих перерізів діаметром  $D$  і  $d$ , відповідно.

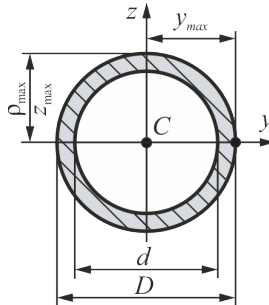


Рис. 5.11

Геометричні характеристики отвору (ті, що мають властивість адитивності) вважаємо від'ємними. Тоді:

$$A = A^D - A^d = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4} (1 - c^2); \quad (5.35)$$

$$I_y = I_z = I_y^D - I_y^d = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - c^4); \quad (5.36)$$

$$I_{\rho} = I_{\rho}^D - I_{\rho}^d = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4). \quad (5.37)$$

де  $c = d/D$ .

Інші характеристики знаходимо за означеннями:

$$i_y = i_z = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\pi D^4}{64} (1 - c^4) \cdot \frac{4}{\pi D^2 (1 - c^2)}} = \frac{\sqrt{1+c^2}}{4} D; \quad (5.38)$$

$$i_{\rho} = \sqrt{\frac{I_{\rho}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi D^4 (1-c^4)}{32} \cdot \frac{4}{\pi D^2 (1-c^2)}} = \sqrt{\frac{1+c^2}{8}} D; \quad (5.39)$$

$$W_y = W_z = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - c^4) \frac{2}{D} = \frac{\pi D^3}{32} (1 - c^4); \quad (5.40)$$

$$W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{\rho_{max}} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - c^4) \frac{2}{D} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4). \quad (5.41)$$

### 5.7.4. Прямокутний переріз

Розглянемо прямокутний переріз, зображений на рис. 5.12, для якого  $h/b = k$ . Розіб'ємо його на елементарні площі  $dA$ , тоді

$$A = \int_A dA.$$

З рис. 5.12 видно, що

$$dA = b dz, \quad -h/2 \leq z \leq h/2.$$

Переходячи від інтегралу по  $A$  до інтегралу по  $z$ , одержуємо

$$A = \int_{-h/2}^{h/2} b dz = b z \Big|_{-h/2}^{h/2} = bh. \quad (5.42)$$

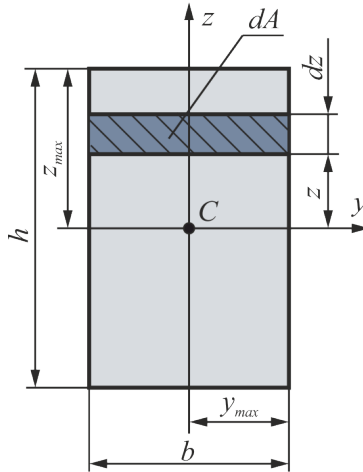


Рис. 5.12

Аналогічно знаходимо осьові моменти інерції:

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 b dz = \frac{bz^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}. \quad (5.43)$$

Замінивши для  $I_y$ ,  $b$  і  $h$  місцями, одержуємо

$$I_z = \frac{hb^3}{12}. \quad (5.44)$$

Полярний момент інерції  $I_p$  для прямокутного перерізу в загальному випадку не використовується.

Останні характеристики знаходимо за означеннями:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12} \cdot \frac{1}{bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}, \quad i_z = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}; \quad (5.45)$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}, \quad W_z = \frac{hb^2}{6}. \quad (5.46)$$

Тут  $i_z$ ,  $W_z$  знайдені по аналогії з  $i_y$ ,  $W_y$ . Слід зауважити, що для прямокутного перерізу:

$$\frac{i_y}{i_z} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{hb^3}{12}} = \left(\frac{h}{b}\right)^2 = k^2. \quad (5.47)$$

$$\frac{W_y}{W_z} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{h}{b} = k. \quad (5.48)$$

### 5.7.5. Коробчастий переріз

Коробчастий переріз вважаємо складеним з двох прямокутних перерізів (рис. 5.13). Тоді

$$A = A_1 - A_2 = bh - b'h'; \quad 2t = b - b'; \quad 2t = h - h'.$$

В багатьох важливих, з точки зору практики, випадках вважаються задалегідь заданими величини:

$$k = \frac{h}{b'}, \quad c = \frac{b'}{b}.$$

Нехай  $b$  – незалежний розмір. Виразимо через нього площу перерізу:

$$h = kb, \quad b' = cb,$$

$$A = b^2 \left[ \frac{h}{b} - \frac{b'}{b} \cdot \frac{h'}{b} \right] = b^2 \left[ k - c \frac{h'}{b} \right];$$

$$\frac{h'}{b} = \frac{h-2t}{b} = \frac{h-(b-b')}{b} = k + c - 1;$$

$$A = [k - c(k + c - 1)]b^2 = (k + c)(1 - c)b^2.$$

Аналогічно:

$$\begin{aligned} I_y = I_y^{A_1} - I_y^{A_2} &= \frac{bh^3}{12} - \frac{b'(h')^3}{12} = \frac{b^4}{12} \left[ \frac{h^3}{b^3} - \frac{b'}{b} \left(\frac{h'}{b}\right)^3 \right] = \\ &= \frac{k^3 - c(k + c - 1)^3}{12} b^4; \end{aligned}$$

$$I_z = I_z^{A_1} - I_z^{A_2} = \frac{hb^3}{12} - \frac{h'(b')^3}{12} = \frac{b^4}{12} \left[ \frac{h}{b} - \frac{h'}{b'} \left( \frac{b'}{b} \right)^3 \right] = \frac{k - c^3(k + c - 1)}{12} b^4.$$

Величини  $I_p$ ,  $i_y$ ,  $i_z$ ,  $i_p$  – для коробчастого перерізу практичного значення не мають.

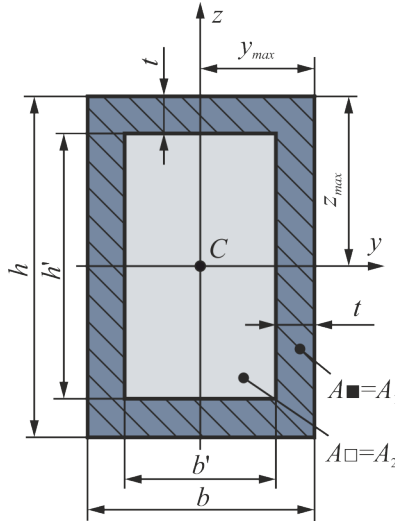


Рис. 5.13

Далі за означеннями:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{k^3 - c(k + c - 1)^3}{12} b^4 \frac{2}{h} = \frac{k^2 - c(k + c - 1)^3}{6K} b^3;$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{k - c^3(k + c - 1)}{12} b^4 \frac{2}{b} = \frac{k - c^3(k + c - 1)^3}{6} b^3.$$

Позначимо

$$\frac{W_y}{W_z} = k'.$$

В загальному випадку

$$k' \neq k.$$

В ряді випадків між розмірами перерізу існують заздалегідь відомі співвідношення. Причому незалежним являється тільки один розмір – **визначальний**, через який геометричні характеристики перерізу можуть бути подані у вигляді:

$$A = \alpha a^2; I_y = \mu a^4; I_z = \nu a^4; W_y = \beta a^3; W_z = \gamma a^3;$$

$$k' = \frac{W_y}{W_z} = \frac{\beta}{\gamma}; \frac{\beta}{\alpha} = \psi; \frac{W_y}{A} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot a = \psi \cdot a. \quad (5.49)$$

Тут  $a$  – визначальний розмір і  $\alpha, \dots, \nu, \dots$  – коефіцієнти форми перерізу, що заздалегідь відомі. Для деяких перерізів ці коефіцієнти знайдені і зведені у таблицю 7 додатку.

Слід мати на увазі, що:

1. для коробчастих профілів, які випускає промисловість  
 $k = 1,0 \div 2,5; c = 0,5 \div 0,95;$
2. для стандартних кільцевих (трубчастих) профілів, які випускає промисловість  
 $c = 0,5 \div 0,95;$
3. для коробчастих перерізів, складених з двох стандартних швелерів  
 $k = 1,0 \div 1,8; c = 0,7 \div 0,93;$
4. для коробчастих перерізів, що складені з двох стандартних кутиків (рівнобічних або нерівнобічних)  
 $k = 1,0 \div 1,6; c = 0,6 \div 0,9.$

## 5.8. Контрольні запитання

1. Абсолютні геометричні характеристики.
2. Лінійний розмір перерізу.
3. Основна сукупність розмірів, та основний розмір.
4. Основні та похідні геометричні характеристики.
5. Відносні геометричні характеристики
6. Що називається статичним моментом площі відносно осі, його розмірність і чи може бути він від'ємним?
7. Що називається осьовим, полярним і відцентровим моментами інерції перерізу? Які їх розмірності та знаки?
8. Яка залежність між статичним моментом площі відносно двох паралельних осей?
9. Чому дорівнює статичний момент площі відносно центральної осі?
10. Як визначаються координати центра ваги простого та складного(складеного) перерізів?
11. Чому дорівнює сума осьових моментів інерції перерізу відносно двох взаємоперпендикулярних осей?
12. Як відображається на знаку відцентрового моменту інерції перерізу зміна напрямків однієї або двох координатних осей?
13. В якому випадку можна зразу помітити, що відцентровий момент інерції перерізу рівний нулю?
14. Чому дорівнюють осьові моменти інерції прямокутного перерізу відносно осі, співпадаючої з однією з його сторін?

15. Чому дорівнює осьовий момент інерції прямокутного перерізу відносно осі, співпадаючої з однією з його сторін ?
16. Чому дорівнюють власні осьові та полярний моменти інерції круглого перерізу ?
17. Чому дорівнюють власні осьові та полярний моменти інерції кільцевого перерізу ?
18. Яка залежність між осьовими моментами інерції перерізу для паралельних осей ?
19. Яка залежність між відцентровими моментами інерції для паралельних осей ?
20. Яка залежність між полярними моментами інерції для паралельних осей ?
21. Відносно яких осей, проведених паралельно в площині перерізу, осьовий момент інерції найменший?
22. Записати формули зміни осьових моментів інерції перерізу при повороті координатних осей.
23. Записати формулу зміни відцентрового та полярного моментів інерції при повороті координатних осей.
24. Як змінюється сума осьових моментів інерції при повороті взаємоперпендикулярних осей ?
25. Які осі є головними і головними центральними ?
26. Що являють собою головні і головні центральні моменти інерції ?
27. Чому рівний відцентровий момент інерції відносно головних і головних центральних осей ?
28. В яких випадках без обчислення можна встановити положення головних центральних осей ?
29. Записати формулу для визначення положення головних центральних осей.
30. Записати формулу для визначення величин головних моментів інерції.
31. Чому при визначенні геометричних характеристик складний (складений) переріз попередньо розбивають на більш прості частини ?
32. Яка послідовність визначення головних центральних моментів інерції складного (складеного) перерізу ?
33. Що таке осьові та полярний моменти опору, одиниці виміру ?
34. Осьові моменти опору прямокутного перерізу.
35. Осьові та полярний моменти опору круглого перерізу.
36. Осьові та полярний моменти опору кільцевого перерізу.
37. Що таке радіус інерції, одиниці виміру ?
38. Радіуси інерції прямокутного перерізу.
39. Радіуси інерції круглого перерізу.

40. Радіуси інерції кільцевого перерізу.
41. Відцентровий момент інерції довільного кутика та визначення його знаку.
42. Визначальний розмір та коефіцієнти форми перерізу.

## 6. Згин

### 6.1. Опір згину, основні поняття та означення

Розглянемо призматичний стрижень з прямою віссю, на який діє зрівноважена система сил (рис. 6.1, а). Серед цих сил є активні і реакції в'язей. Усі сили вважаються відомими.

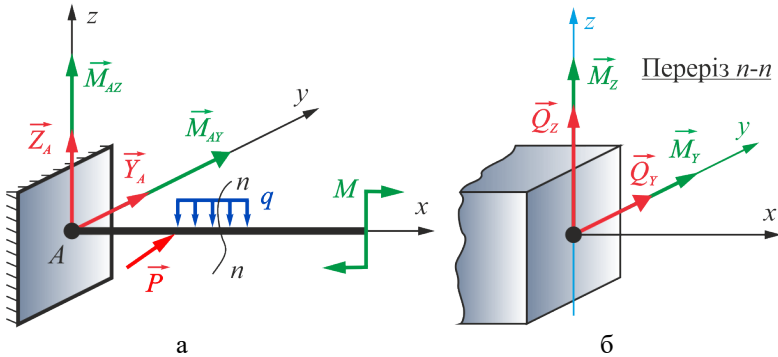


Рис. 6.1.

Нехай за допомогою методу перерізів знайдені внутрішні силові фактори. Вважається, що стрижень зазнає **опір згину**, якщо у кожному його поперечному перерізі з шести внутрішніх силових факторів виникають тільки чотири (рис. 6.1, б):

$$Q_y, Q_z, M_y, M_z, \quad (6.1)$$

тобто, поперечні сили та згинальні моменти (осі  $Y, Z$  – головні центральні).

**Балкою** називається стрижень з прямою віссю, що зазнає опір згину.

Узагальнена **сила є згинальною**, якщо тільки при її врахуванні в кожному поперечному перерізі балки з шести внутрішніх силових факторів виникають чотири, що наведені в (6.1). Наприклад, згинальними є зосереджена сила, момент і розподілене навантаження, лінії дії яких перпендикулярні осі і перетинають цю вісь.

Балка зазнає **опір плоскому (прямому) згину**, якщо в кожному поперечному перерізі балки з шести внутрішніх силових факторів виникає тільки два:

$$Q_y, M_z \text{ або } Q_z, M_y. \quad (6.2)$$

Такий вид опору, наприклад, буде, якщо всі згинаючі сили, що прикладені до балки, лежать в її головній площині (рис. 6.2, а, б).

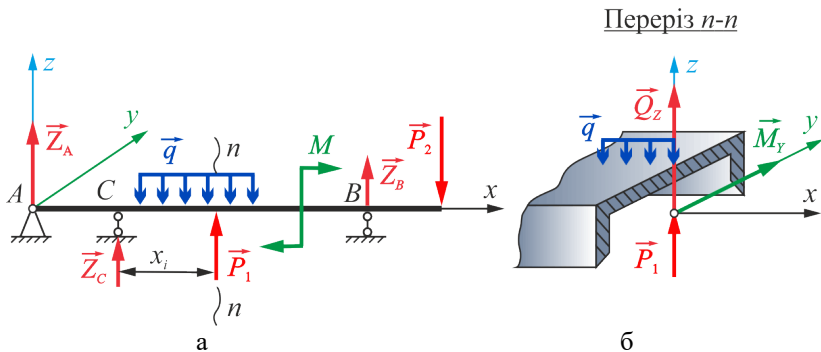


Рис. 6.2

Експерименти показують, що при прямому згині пружна лінія балки після деформації залишається в головній площині. Тому при опорі плоскому згину часто кажуть, що балка зазнає **деформації плоского згину**.

Балка зазнає **опір чистому згину**, якщо в кожному її поперечному перерізі виникають тільки два внутрішніх силових фактори:

$$M_y, M_z, \quad (6.3)$$

що є згинальними моментами.

Такий опір буде, наприклад, відбуватися, якщо до балки прикладені тільки зовнішні згинальні моменти (рис. 6.3, а, б).

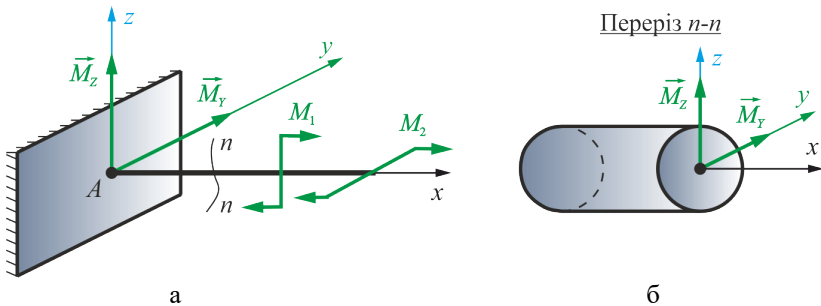


Рис. 6.3

Балка зазнає **опір плоскому чистому згину**, якщо з шести внутрішніх силових факторів виникає тільки один згинальний момент:

$$M_y \text{ або } M_z. \quad (6.4)$$

В ряді випадків сили, що прикладені до балки, лежать в одній площині, яка називається **силовою**.

Експерименти показують, що якщо силова площина не є головною, то **пружна лінія** балки при деформації з нею не співпадає. В цьому випадку напрямки прогинів балки не збігаються з напрямком діючих сил. Тому цей тип згину називається **косим**.

В цьому розділі розглядається тільки плоский згин.

## 6.2. Балки та їх опори

Балку у просторі підтримують опори (в'язі), які можна поділити на три основні типи:

1. шарнірно-рухомі опори (рис. 6.4, а);
2. шарнірно-нерухомі опори (рис. 6.4, б);
3. жорстко-затискаючі опори (рис. 6.4, в).

Шарнірно-рухома опора перешкоджає вертикальному переміщенню балки; шарнірно-нерухома – вертикальному і горизонтальному переміщенням; жорстко-затискаюча опора – вертикальному, горизонтальному і кутовому переміщенням. В цих напрямках і виникають відповідні реакції опор (в'язей).

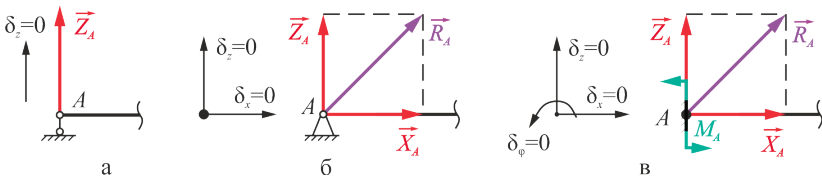


Рис. 6.4

Відстань між двома суміжними опорами балки називається **прольотом** (рис. 6.2, а).

Звисаючий кінець балки називається **консольним кінцем** (рис. 6.2, а). Балка, затиснена (защемлена) одним кінцем, називається **консоллю** (рис.6.3, а).

Балки, для яких усі реакції опор можуть бути визначені з рівнянь статки, називаються **статично визначеними**. А решта балок є **статично невизначеними**.

На рис. 6.1, а показано статично визначена, а на рис.6.2, а – статично невизначена балки.

Нагадаємо, що для плоскої системи сил можна скласти тільки три рівняння статки. Для плоскої системи паралельних сил – тільки два. Оскільки при плоскому згині до балки прикладена плоска система паралельних сил, то для визначення опорних реакцій можна скласти тільки два незалежних рівняння.

### 6.3. Особливості визначення внутрішніх силових факторів при згині та побудова їх епюр

Розглянемо балку, що зазнає опір плоскому згину (рис. 6.2, а). Внутрішні силові фактори визначаються в такій послідовності.

1. Балка ділиться на ділянки.
2. До кожної ділянки застосовується метод перерізів (для визначення внутрішніх силових факторів):
  - балка поділяється на дві частини на відстані  $x_i$  від початку  $i$ -ої ділянки;
  - до відсіченої частини в перерізі  $n$ - $n$  прикладається внутрішня поперечна сила  $Q(x_i)$  і внутрішній загальний момент  $M(x_i)$  (індекси біля  $Q$ ,  $M$  при плоскому згині прийнято опускати); додатні напрямки цих факторів показані на рис. 6.5, а, б.

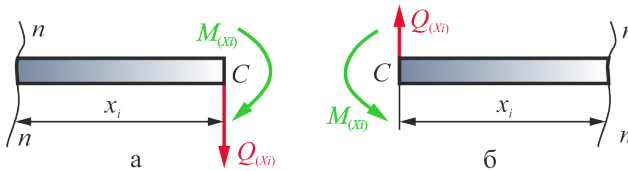


Рис. 6.5

Для визначення  $Q(x_i)$  і  $M(x_i)$  треба скористатися формулами:

$$Q(x_i) = \sum_j \pm F_j, \quad M(x_i) = \sum_j \pm M_c(F_j). \quad (6.5)$$

Тут у виразі для  $Q(x_i)$  праворуч стоїть сума всіх сил  $F_j$ , що діють на відсічену частину. Причому  $F_j > 0$ , якщо сила обертає цю частину навколо перерізу  $n$ - $n$  за стрілкою годинника і  $F_j < 0$  – у протилежному випадку.

У виразі для  $M(x_i)$  праворуч стоїть сума моментів всіх сил, що діють на відсічену частину, знайдена відносно перерізу. Причому  $M_c(F_j) > 0$ , якщо сила  $F_j$  вигинає відсічену частину опуклістю вгору, в протилежному випадку  $M_c(F_j) < 0$ .

Для кожної ділянки будуються **епюри** (графіки) розподілу внутрішніх силових факторів  $Q$ ,  $M$  по довжині цих ділянок. Для чого знаходяться значення цих факторів на початку, у кінці, а при необхідності і в проміжних точках ділянки балки. Ці значення відкладаються від пружної лінії балки вгору чи вниз, одержані точки з'єднуються суцільною лінією.

Можна перекопати, що за наведеною методикою еюра згинального моменту  $M$  будеться на стиснених або розтягнених волокнах балки.

#### 6.4. Диференційна залежність між згинальним моментом, поперечною силою та розподілим навантаженням

Розглянемо балку, що зазнає опір плоскому згину (рис. 6.6, а).

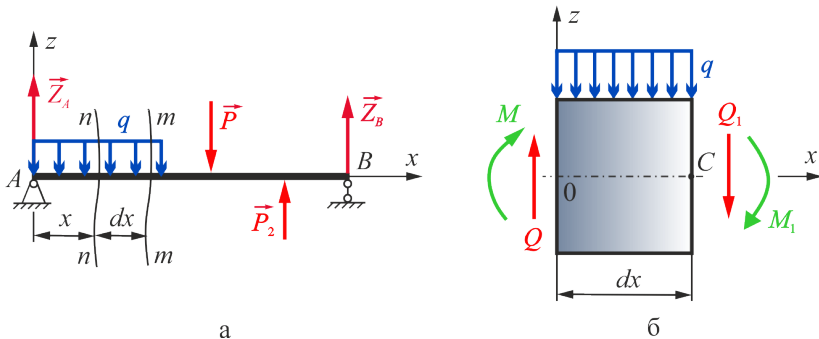


Рис. 6.6

Нехай на балку діє розподілене навантаження інтенсивністю  $q$ . Розглянемо на відстані  $x$  від лівої опори переріз  $n-n$ . Щоб елементарна частина балки (рис. 6.6, б) знаходилась у рівновазі, до її лівого і правого перерізу треба прикласти внутрішні фактори  $Q$ ,  $M$  і  $Q_1$ ,  $M_1$ . Очевидно, що  $Q$  і  $Q_1$ ,  $M$  і  $M_1$  повинні бути протилежно напрямлені для взаємного зрівноваження.

Для плоскої системи паралельних сил можна скласти тільки два незалежних рівняння статки. Рівняння проекції всіх сил на вісь  $Z$  дає:

$$Q - Q_1 - qdx = 0 \text{ або } Q_1 - Q = -qdx \text{ чи } dQ = -qdx, \text{ де } dQ = Q_1 - Q.$$

Звідки, при  $dx \rightarrow 0$ , отримаємо

$$\frac{dQ}{dx} = -q. \quad (6.6)$$

Рівняння статки для моментів відносно точки  $C$  перерізу  $m-m$  дає:

$$-M + M_1 - Qdx + \frac{q(dx)^2}{2} = 0 \text{ або } dM = Qdx - \frac{q(dx)^2}{2},$$

де  $dM = M_1 - M$ . При  $dx \rightarrow 0$ , одержимо, що

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (6.7)$$

Залежності (6.6), (6.7) складають теорему Д.І. Журавського:

– похідна від внутрішньої поперечної сили  $Q$  по абсцисі  $x$  перерізу балки дорівнює інтенсивності зовнішнього розподіленого навантаження в тому ж перерізі зі своїм знаком;

– похідна від внутрішнього згинального моменту по абсцисі  $x$  перерізу балки дорівнює поперечній силі в тому ж перерізі зі своїм знаком.

Безпосередньо з теореми Д. І. Журавського можна одержати такий зв'язок між факторами:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q. \quad (6.8)$$

## 6.5. Наслідки з теореми Журавського про зв'язок між $M$ , $Q$ та $q$

З теореми Журавського випливають наступні наслідки.

1. На ділянках, де немає розподіленого навантаження ( $q=0$ ), епюри поперечних сил  $Q$  обмежені прямими, паралельними пружній лінії балки (базі), а епюри згинального моменту  $M$  в загальному випадку є похилими прямими.

2. На ділянках, де до балки прикладене рівномірно розподілене навантаження  $q$ , епюра  $Q$  обмежена похилими прямими, а епюра  $M$  – квадратичними параболою.

3. В перерізах, де поперечна сила  $Q=0$ , дотична до епюри  $M$  паралельна базі епюри.

4. На ділянках, де  $Q>0$ , при русі по них зліва направо момент  $M$  зростає, а при  $Q<0$  – спадає.

5. В перерізах, де до балки прикладені зосереджені сили:

- на епюрі  $Q$  – стрибки на величину цих сил в напрямку їх дії;
- на епюрі  $M$  – ламані прямі.

6. В перерізах, де до балки прикладені зосереджені моменти, на епюрі  $M$  мають місце стрибки на величину цих моментів в напрямку їх дії.

## 6.6. Чистий плоский згин

### 6.6.1. Обчислення напружень

Розглянемо балку, що навантажена на кінці згинальним моментом  $M_{зоб}$  (рис. 6.7, а, б).

Вважаємо, що пари сил, утворюючі моменти, лежать в головній площині  $XOZ$  балки. Тоді в кожному перерізі із шести внутрішніх

силових факторів виникає тільки момент  $M_y$  – чистий згин (далі просто  $M$ ). Його величина постійна вздовж осі балки  $M(x)=M=M_{306}$ .

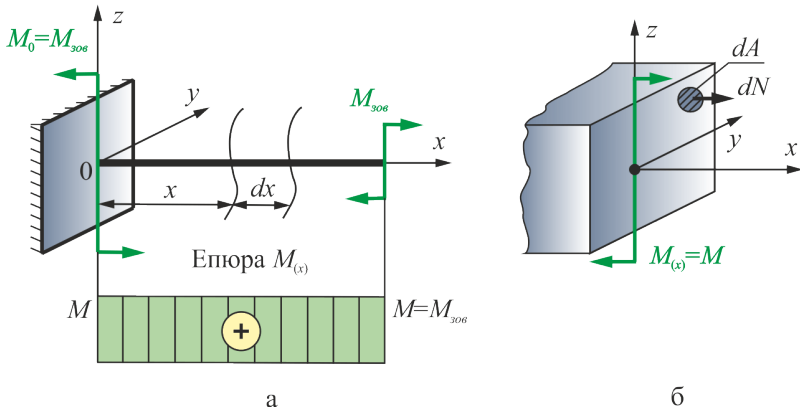


Рис. 6.7

Розіб'ємо балку на декілька рівних частин (рис. 6.8), однаково навантажених і однаково деформованих. Пружна лінія балки після деформації стає дугою кола радіуса  $r$ , а поперечні перерізи балки після деформації залишаються плоскими. Тобто, має місце гіпотеза плоских перерізів (інакше частинки балки не стикувалися б в одну балку). При чистому плоскому згині деформації балки виникають шляхом взаємних поворотів поперечних перерізів.

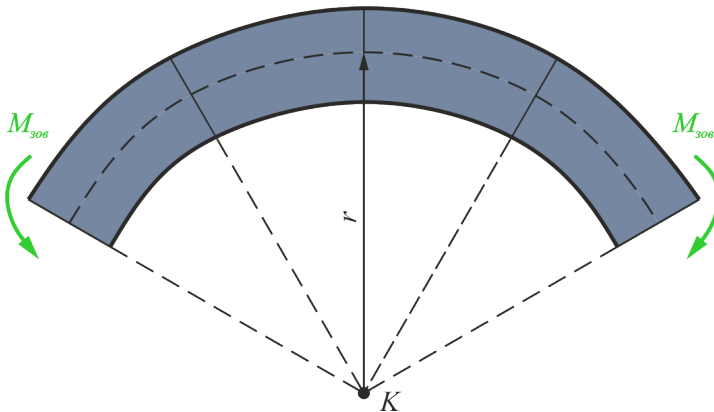


Рис. 6.8

Розглянемо два суміжні перерізи, що знаходяться на відстані  $dx$  один від одного (рис. 6.9).

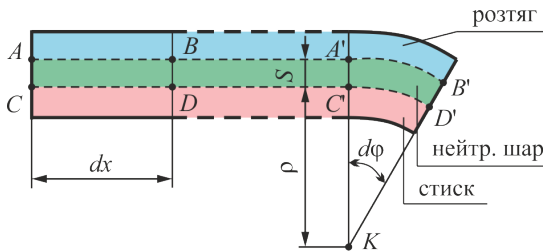


Рис. 6.9

Приймаємо лівий переріз за умовно нерухомий, при повороті правого перерізу на кут  $d\varphi$  верхній шар подовжується, а нижній скорочується. При такій деформації в поперечних перерізах балки виникають тільки нормальні напруження  $\sigma$  від розтягу і стиску. Існує якийсь проміжний шар, в якому взагалі відсутні лінійні деформації і напруження. Назвемо його **нейтральним** і позначимо на рисунку як  $CD'$ . Його довжина  $dx = \rho d\varphi$ , де  $\rho$  – радіус кривизни нейтрального шару.

Знайдемо нормальні напруження в поперечних перерізах балки. Будь-які волокна  $AB$ , що на відстані  $S$  від нейтрального шару, після деформації мають довжину  $A'B' = (\rho + S)d\varphi$  і відносну деформацію:

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(\rho + S)d\varphi - \rho d\varphi}{dx} = S \frac{d\varphi}{dx}.$$

За законом Гука  $\sigma = \varepsilon E$ , звідки

$$\sigma = SE \frac{d\varphi}{dx}. \quad (6.9)$$

Зауважимо, що  $E$  і  $\frac{d\varphi}{dx}$  не залежать від відстані  $S$ . Тоді з (6.9) випливає, що  $\sigma$  лінійно залежить від  $S$ . Але тоді лінійно залежить і від координати  $z$ :  $\sigma = K_1 z + K_2$ . Знайдемо константи  $K_1, K_2$ . Для цього знайдемо внутрішні силові фактори в поперечному перерізі (рис. 6.7, б):

$$\begin{aligned} N &= \int_A dN = \int_A \sigma dA = \int_A (K_1 z + K_2) dA = \\ &= K_1 \int_A z dA + K_2 \int_A dA = K_1 S_y + K_2 A; \\ M &= \int_A dM = \int_A z \sigma dA = \int_A z (K_1 z + K_2) dA = \\ &= K_1 \int_A z^2 dA + K_2 \int_A z dA = K_1 I_y + K_2 S_y. \end{aligned}$$

Оскільки  $N=0, S_y=0$ , то з першого рівняння  $K_2=0$ . Тоді з другого рівняння  $M=K_1 I_y$ , звідси  $K_1 = \frac{M}{I_y}$ . Тоді

$$\sigma = \frac{M}{I_y} z. \quad (6.10)$$

Це формула для обчислення нормальних напружень при чистому плоскому згині.

З формули (6.10) випливає, що нейтральний шар знаходиться в головній площині  $XU$  балки.

**Нейтральною лінією** називається лінія, що утворюється при перетині нейтрального шару з поперечним перерізом балки.

З означення випливає, що нормальні напруження на нейтральній лінії дорівнюють нулю. З формули (6.10) випливає, що нейтральна лінія лежить на головній центральній осі  $Y$ .

### 6.6.2. Рівняння пружної лінії

Розглянемо консоль, що зазнає опір чистому плоскому згину під дією від'ємного зовнішнього моменту  $M_e$ . З рис. 6.10 видно, що

$$tg\varphi = \frac{dv}{dx},$$

де  $v(x)$  – рівняння пружної лінії балки.

При малих деформаціях  $|\varphi| \ll 1$  і  $tg\varphi \approx \varphi$ . Тому в силу гіпотези малості деформацій можна вважати, що  $dv/dx = \varphi$ .

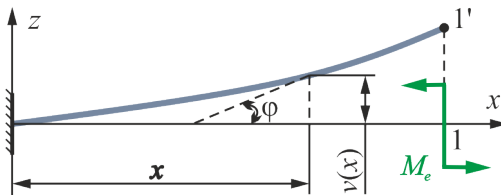


Рис.6.10

Візьмемо від лівої і правої частини похідну по  $x$ :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx}.$$

З (6.9), при  $S=z$ , одержуємо:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sigma}{SE} = \frac{\sigma}{zE}.$$

Підставляючи  $\sigma$  з (6.10) одержуємо (при  $M=M_e$ ):

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{EI_y}.$$

Тоді рівняння пружної лінії

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI_y}. \quad (6.11)$$

Це диференціальне рівняння другого порядку. Граничні умови  
 $v(0) = 0, v'(0) = \varphi(0) = 0.$  (6.12)  
 відсутності прогину і повороту защемленого перерізу.

Якщо балка має дві опори, то граничні умови такі:  
 $v(0) = 0, v(l) = 0.$  (6.13)

Вони виражають умови відсутності прогинів балки в опорах ( $l$  – відстань між опорами, початок осі  $X$  в лівій опорі).

Знак “+” кута вказує, що переріз обертається проти годинникової стрілки; знак “+” прогину – про переміщення перерізу вгору. **Стріла прогину** – найбільший прогин балки.

## 6.7. Поперечний згин, визначення напружень, формула Журавського

Розглянемо балку, що зазнає опір плоскому згину (рис. 6.11, а).

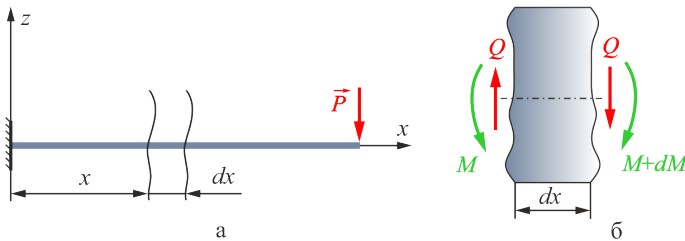


Рис. 6.11

Вилучимо з цієї балки частину, довжиною  $dx$  (рис. 6.11, б). В кожному перерізі діють два внутрішніх силових фактора  $Q_z, M_y$  (далі  $Q, M$ ). Під їх дією в перерізі виникають, відповідно, дотичні та нормальні напруження. Оскільки деформації малі і підпорядковуються закону Гука, то ці напруження за принципом незалежності дії сил можна визначити окремо, тобто  $\sigma$  як наслідок дії моменту  $M$ , а  $\tau$  – дії поперечної сили  $Q$ . Нормальні напруження визначаються формулою (6.10). Знайдемо тепер наближено дотичні напруження. У вилученій частині балки  $dx$  на відстані  $z$  від нейтрального шару проведемо горизонтальний переріз  $n-n$  (рис. 6.12, а). Розглянемо рівновагу відсіченої (перерізом  $n-n$ ) частини. Сили (напруження), що діють на грані цієї частини, показані на рис. 6.12, б. Видно, що

$$N = \int_{\bar{A}} \sigma dA = \frac{M}{I_y} \int_{\bar{A}} z dA = \frac{MS_y^{6.4.}}{I_y}..$$

Тут  $S_y^{6.4.}$  – статичний момент відсіченої частини  $A$  поперечного перерізу балки відносно осі  $Y$ . Аналогічно

$$N + dN = [(M + dM)S_y^{6.4.}]/I_y.$$

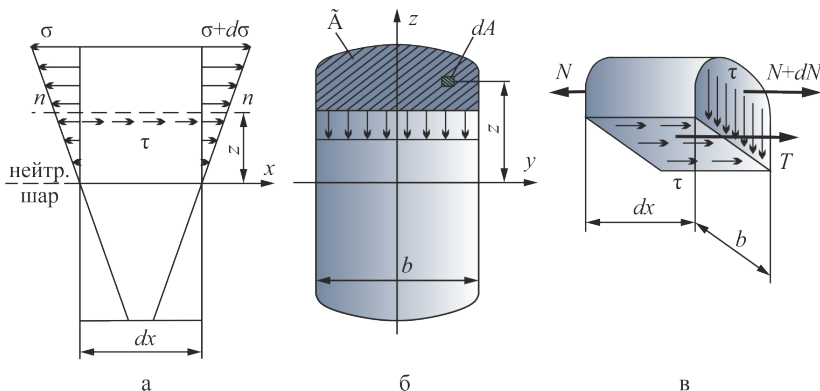


Рис. 6.12

Для визначення сили  $F$  прийемо, що дотичні напруження розподілені рівномірно по перерізу  $n$ - $n$ :  $T = \tau b dx$ , де  $b$  – товщина поперечного перерізу на відстані  $z$  від нейтральної лінії. Склавши рівняння рівноваги  $\sum X = 0$ , знайдемо:

$$N + dN - N + T = \frac{(M + dM)}{I_y} \cdot S_y^{6.4.} - \frac{M}{I_y} S_y^{6.4.} + \tau b dx = 0.$$

Звідки дотичні напруження

$$\tau = -\frac{dM}{dx} \cdot \frac{S_y^{6.4.}}{b I_y}.$$

Враховуючи формулу (6.7) (теорема Журавського) та ознак з момента з рис. 6.11, отримаємо формулу для обчислення дотичних напружень

$$\tau = \frac{Q S_y^{6.4.}}{b I_y}. \quad (6.14)$$

Слід зауважити, що за законом парності дотичних напружень ця формула дозволяє наблизно визначити дотичні напруження в поперечному перерізі на відстані  $z$  від нейтральної лінії. Формула (6.14) була вперше одержана Д.І.Журавським і носить його ім'я.

## 6.8. Розрахунки балок при плоскому згині

### 6.8.1. Аналіз напруженого стану

Розглянемо, наприклад, балку швелерного перерізу, що зазнає опір плоскому згину (рис. 6.13). Вилучимо її довільний переріз  $n$ - $n$ , де одночасно виникають згинальний момент  $M$  і поперечна сила  $Q$ .

Користуючись тим, що напруження  $\tau$  і  $\sigma$ , виникаючі в перерізі, залежать тільки від відстані  $z$  від осі  $Y$  (нейтральної лінії), побудуємо епюри їх розподілу по висоті перерізу балки (рис. 6.14).

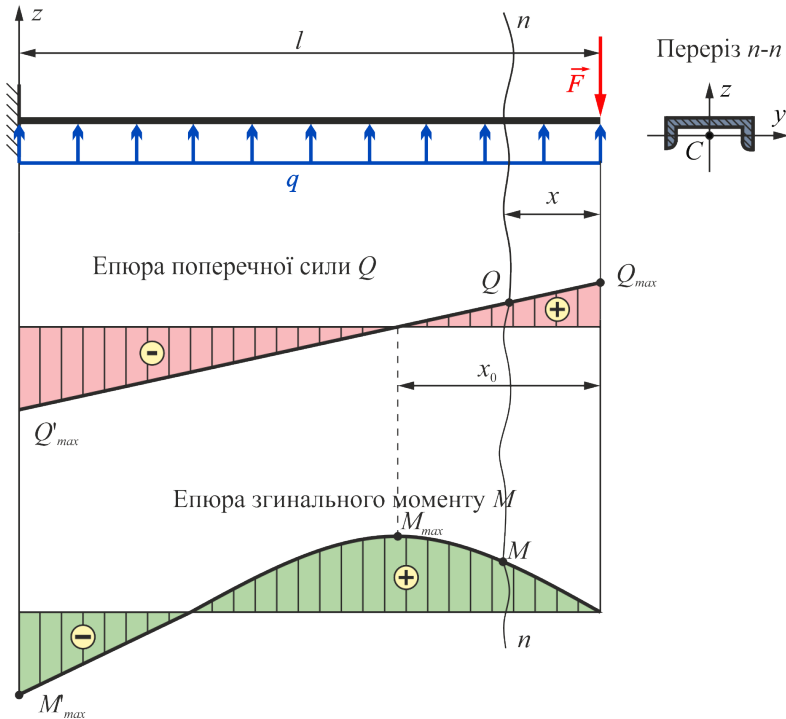


Рис. 6.13

За формулою (6.10) епюра  $\sigma$  має лінійний вид, причому на нейтральній лінії  $\sigma=0$ , а в найбільш віддалених точках перерізу  $\sigma$  приймає найбільше  $\sigma_{max}$  (додатне) та найменше  $\sigma_{min}$  (від'ємне) значення.

Оскільки знак  $\tau$  не має фізичного змісту, то вважаємо, що ці напруження додатні. Із формули (6.14) видно, що найбільшого значення дотичні напруження  $\tau$  приймають на нейтральній лінії. При цьому статичний момент відсіченої частини  $S_y^{e,y}$  приймає найбільше значення і в розрахунках позначається як  $S_{y_{max}}$ , чи  $S_y^{n-n}$  – статичний момент половини перерізу. При зростанні  $z$  по від'ємному напрямку  $S_z^{e,y}$  прямує до нуля, а товщина перерізу  $b=2t$  практично залишається сталою. Тому при зростанні  $z$  дотичні напруження прямують до нуля. Теж саме відбувається при зростанні  $z$  в додатному напрямку. Тільки на відстані  $z_3$ , де стрибком збільшується товщина перерізу  $b=H$ , стрибком

зменшується величина  $\tau$ . Будемо позначати через  $\tau'$  величину напружень до стрибка, а через  $\tau''$  – після.

Отже, точки у поперечному перерізі знаходяться в стані неоднорідного плоского напруженого стану. Серед цих точок вилучаємо такі характерні (рис. 6.14):

- точка 1 – небезпечні на розтяг;
- точка 2 – небезпечні на стиск;
- точка 3 – небезпечні на зсув;
- точка 4 – небезпечні по **еквівалентним** напруженням (повним).

В точках 4 одночасно виникають значні дотичні і нормальні напруження. Тому для розрахунків треба визначити еквівалентні напруження, користуючись однією з теорій міцності.

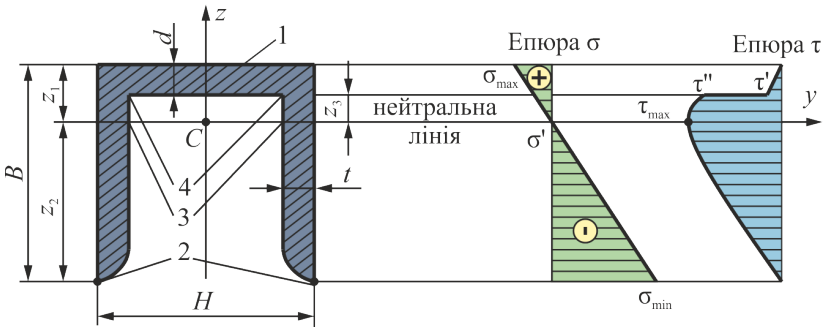


Рис. 6.14

Аналіз напруженого стану в поперечному перерізі дозволяє зробити такі висновки:

1. перерізи балки, де згинальний момент  $M$  досягає найбільших значень, небезпечні по нормальним напруженням;
2. перерізи балки, де поперечна сила  $Q$  досягає найбільших значень, небезпечні по дотичним напруженням;
3. перерізи, де згинальний момент  $M$  і поперечна сила  $Q$  одночасно мають великі значення, небезпечні по еквівалентним напруженням.

### 6.8.2. Розрахунки балок на міцність

Розрахунки балок на міцність, тобто перевірка міцності, проєктний розрахунок, визначення найбільших допустимих навантажень, необхідно послідовно проводити для всіх трьох типів небезпечних перерізів. Практичний досвід показує, що найбільш небезпечні точки 1, 2, де матеріал працює на розтяг і стиск. Тому розрахунки на міцність треба, починати саме для цих точок.

Умови міцності для несиметричних перерізів, небезпечних на розтяг-стиск мають згідно (6.10) вигляд:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_y} z_1 \leq [\sigma_p]; \quad (6.15)$$

$$|\sigma_{min}| = \left| \frac{M_{max}}{I_y} z_2 \right| \leq [\sigma_c]. \quad (6.16)$$

Для симетричних перерізів з умов (6.15), (6.16) залишається тільки одна:

$$\sigma_{min}^{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \leq [\sigma_p]. \quad (6.17)$$

Тут  $M_{max}$  – найбільший за модулем згинальний момент. Для пластичних матеріалів  $[\sigma_p] \approx [\sigma_c] = [\sigma]$  і тому з двох умов міцності (6.15), (6.16) також залишається тільки одна, яка записана для найбільших за модулем нормальних напружень.

За формулами (6.15) – (6.17) проводять відповідний розрахунок на міцність: перевіряють міцність; обирають розміри поперечного перерізу балки; визначають величину найбільших допустимих навантажень. Потім, незалежно від типу розрахунків на міцність, перевіряють умови міцності для перерізів, небезпечних по дотичним і повним напруженням.

Для перерізів, небезпечних по дотичним напруженням (наприклад, рис. 6.14, точки 3) умова міцності має вигляд:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_y^{II}}{b I_y} z_1 \leq [\tau]. \quad (6.18)$$

Для перерізів, небезпечних по повним напруженням, (наприклад, рис. 6.14, точки 4) міцність треба перевіряти за однією з теорій міцності. При плоскому напруженому стані головні напруження визначаються за формулами:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} [\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}]; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} [\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}].$$

Підставляючи їх у відповідні теорії (критерії), після перетворень, одержимо:

– для теорії Мора (крихкі матеріали)

$$\sigma_{екв.M} = \frac{1-m}{2} \sigma + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]_p, \quad (6.19)$$

де  $m = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}$ ;

– для третьої теорії міцності (пластичні матеріали)

$$\sigma_{екв.III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (6.20)$$

– для четвертої теорії міцності (пластичні матеріали)

$$\sigma_{екв.IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (6.21)$$

Якщо міцність в небезпечних точках (наприклад, рис. 6.14, точки 3, 4) гарантована, то розрахунки закінчують. Коли одна з умов міцності не

виконується і перенапруження перевищують 5%, то в залежності від типу розрахунків, виконують наступне.

1. При перевірці міцності роблять висновок, що міцність балки не гарантована.

2. При проектному розрахунку дещо збільшують розміри переріза, знову перевіряють умови міцності по дотичним та еквівалентним напруженням і т.д., до виконання цих умов (метод послідовного добору розмірів поперечного перерізу балки).

3. При визначенні найбільшого навантаження, його величину уточнюють з умови міцності.

### 6.8.3. Розрахунки на жорсткість

Розрахунки на жорсткість проводять для деяких характерних перерізів балки, для яких встановлено, що максимальний прогин (стріла прогину) або кут повороту перерізу не повинні перевищувати деякого найбільшого допустимого стандартами значення:

$$v_{max} \leq [v]. \quad (6.22)$$

$$\phi_{max} \leq [\phi]. \quad (6.23)$$

Прогин  $v_{max}$  і кут повороту  $\phi_{max}$  визначаються шляхом інтегрування диференційного рівняння (6.11), при початкових умовах (6.12), (6.13), або за методом початкових параметрів. Як і розрахунки на міцність, розрахунки на жорсткість бувають трьох типів: перевірка жорсткості; проектний розрахунок з умови жорсткості; визначення необхідної жорсткості. Допустимі кутові  $[\phi]$  і лінійні  $[v]$  переміщення характерного перерізу визначаються на підставі експлуатаційних даних про роботу балки. Так, наприклад, допустимий прогин балок приймають у межах

$$[f] = \left( \frac{1}{100} \div \frac{1}{1000} \right) L,$$

де  $L$  – загальна довжина балки.

## 6.9. Визначення переміщень перерізів балок (Метод початкових параметрів)

Розглянемо елемент балки завдовжки  $l$ , навантажений, як показано на рис. 6.15.

Розподілене навантаження змінюється за законом трапеції з інтенсивністю

$$q(x) = q_c + k(x - c),$$

де  $k$  – тангенс кута нахилу дотичної

$$k = tg\beta = \frac{q_d - q_c}{d - c}.$$

Поперечні сили  $Q_L$  та згинальні моменти  $M_L$  замінюють дію відкинутої частини балки.

Напрямки навантажень викликають додатні згинальні моменти.

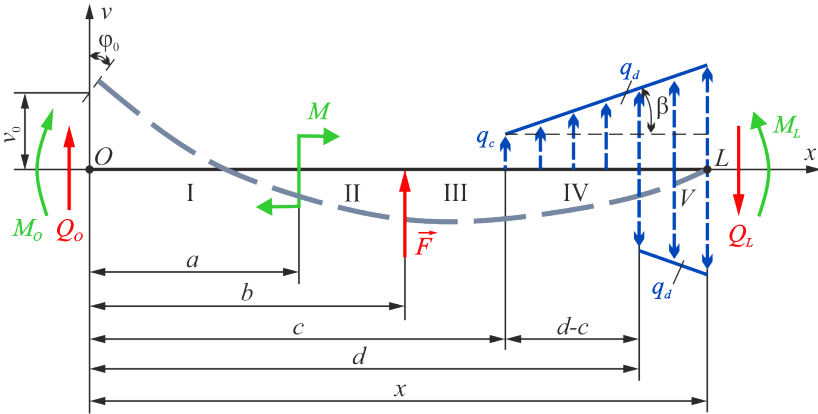


Рис. 6.15

При складанні диференціальних рівнянь пружної лінії балки та інтегруванні необхідно виконувати наступні вимоги.

1. Початок  $O$  координат  $XV$  повинен бути загальним для всіх ділянок і розташованим в крайньому лівому перерізі балки.

2. Рівняння внутрішнього згинального моменту  $M(x)$  треба скласти, враховуючи зовнішні моменти і моменти зовнішніх сил, що розташовані зліва від розглядуваного перерізу.

3. Зовнішній зосереджений момент  $M$  включається в рівняння з множником  $(x-a)=1$ , де  $a$  – абсциса перерізу, в якому діє момент.

4. Розподілене навантаження умовно подовжують до розглядуваного перерізу, компенсуючи це подовження протилежним подовженням (на рис. 6.15 вказані пунктиром).

5. Розбивати трапецієвидне розподілене навантаження на трикутне та прямокутне.

6. Не розкривати дужок, інтегруючи рівняння на всіх ділянках.

Внутрішній згинальний момент для ділянки 5:

$$M(x) = M_0 + Q_0x + M(x-a) + F(x-b) + q_c \frac{(x-c)^2}{2} - q_d \frac{(x-d)^2}{6} + k \frac{(x-c)^3}{6} - k \frac{(x-d)^3}{6}.$$

В перерізі, що збігається з початком координат, діють згинальний момент  $M_0$  та поперечна сила  $Q_0$  – **статичні початкові параметри**.

Використавши (6.11), складемо диференціальне рівняння пружної лінії для ділянки 5:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left[ M_0 + Q_0x + M(x-a) + F(x-b) + q_c \frac{(x-c)^2}{2} - q_d \frac{(x-d)^2}{6} + k \frac{(x-c)^3}{6} - k \frac{(x-d)^3}{6} \right].$$

Проінтегрувавши обидві частини рівняння двічі без відкривання дужок, отримаємо для ділянки 5:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{dv(x)}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ M_0x + Q_0 \frac{x^2}{2} + M(x-a) + F \frac{(x-b)^2}{2} + q_c \frac{(x-c)^3}{6} - q_d \frac{(x-d)^3}{6} + k \frac{(x-c)^4}{24} - k \frac{(x-d)^4}{24} + C_5 \right]; \\ v(x) &= \frac{1}{EI} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + F \frac{(x-b)^3}{6} + q_c \frac{(x-c)^4}{24} - q_d \frac{(x-d)^4}{24} + k \frac{(x-c)^5}{120} - k \frac{(x-d)^5}{120} + C_5x + d_5 \right]. \end{aligned}$$

Підставивши  $x=0$ , знайдемо:

$$\phi(x) = \phi_0 = \frac{C_5}{EI}, \quad V(x) = V_0 = \frac{D_5}{EI}.$$

Тобто, довільні сталі  $C_5$  і  $D_5$  є, відповідно, кут повороту та прогин на початку координат. Прогин  $v_0$  та кут  $\phi_0$  – це **геометричні початкові параметри**.

Врахувавши це, а також випадок кількох моментів і сил, можемо записати для довільного перерізу балки **універсальне рівняння пружної лінії**:

$$\begin{aligned} v(x) &= v_0 + \phi_0x + \frac{1}{EI} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + \sum M \frac{(x-a)^2}{2} + \right. \\ &+ \sum F \frac{(x-b)^3}{6} + \sum q_c \frac{(x-c)^4}{24} - \sum q_d \frac{(x-d)^4}{24} + \\ &\left. + \sum k \frac{(x-c)^5}{120} - \sum k \frac{(x-d)^5}{120} \right]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Диференціюючи рівняння (6.24), отримаємо **універсальне рівняння кутів повороту перерізів**:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_0 + \frac{1}{EI} \left[ M_0 \frac{x}{1!} + Q_0 \frac{x^2}{2!} + \sum M \frac{(x-a)}{1!} + \right. \\ &+ \sum F \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q_c \frac{(x-c)^3}{6!} - \sum q_d \frac{(x-d)^3}{6!} + \\ &\left. + \sum k \frac{(x-c)^4}{6!} - \sum k \frac{(x-d)^4}{6!} \right]. \end{aligned} \quad (6.25)$$

## 6.10. Контрольні запитання

1. Чим відрізняються прямий і косий згини?
2. Чим відрізняються чистий і поперечний згини?
3. Правила знаків для поперечних сил та згинальних моментів.
4. Як визначається поперечна сила в поперечних перерізах балки при згині?
5. Як визначається згинальний момент в поперечних перерізах балки?
6. Типи опор балок, визначення опорних реакцій та перевірка їх правильності.
7. Порядок побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів, що діють в перерізах балки.
8. Диференційна залежність між поперечною силою в перерізі та інтенсивністю зовнішнього розподіленого навантаження.
9. Диференційна залежність між згинальними моментами і поперечними силами в перерізах балки.
10. За якими законами змінюються поперечна сила і згинальний момент по довжині осі балки при відсутності зовнішнього розподіленого навантаження?
11. Коли згинальний момент в поперечному перерізі балки досягає екстремальних значень?
12. За яким законом змінюється епюра згинальних моментів на ділянках балки, де в перерізах поперечна сила відсутня?
13. Як змінюється поперечна сила в перерізах, де на балки діють зосереджені зовнішні сили?
14. Як змінюється згинальний момент в перерізах, де на балку діють зовнішні зосереджені моменти?
15. В чому полягає перевірка епюр поперечних сил і згинальних моментів?
16. Що таке розтягнені або стиснені волокна?
17. Як зв'язана зміна величини згинального моменту в перерізі балки з площею епюри поперечних сил?
18. Як визначається екстремальне значення згинального моменту в перерізі балки?
19. Що таке нейтральний шар і нейтральна лінія та їх розташування в поперечному перерізі балки?
20. Залежність між кривизною балки і згинальним моментом при чистому згині.
21. Формула для визначення нормальних напружень в поперечному перерізі балки при чистому згині і закон їх зміни по висоті перерізу.
22. За якої умови балка, поперечний переріз якої не має осей симетрії, знаходиться в умовах чистого згину?

23. По якій формулі визначаються нормальні напруження в симетричному і несиметричному поперечних перерізах балки при прямому поперечному згині?
24. Формула для визначення дотичних напружень в поперечних перерізах балки при прямому поперечному згині.
25. Вид епюри дотичних напружень по висоті двотаврового перерізу.
26. Вид епюри дотичних напружень по ширині швелерного перерізу.
27. Який вигляд має епюра дотичних напружень для прямокутного і круглого перерізів балки?
28. Види напружених станів шарів матеріалу по висоті перерізу балки.
29. Формули для визначення головних напружень при прямому згині.
30. Як напрямлені головні площадки в шарах матеріалу, що прилягають до периферії перерізу балки?
31. За якою формулою обчислюється питома потенціальна енергія деформації згину?
32. Які форми поперечних перерізів балки є більш раціональними при прямому згині (для пластичного та крихкого матеріалів)?
33. Три типи задач в розрахунках на міцність при прямому згині?
34. Коли проводиться перевірка по нормальним і дотичним напруженням?
35. Формули третього, четвертого і Мора критеріїв міцності для прямого згину.
36. Небезпечний переріз при прямому згині і повна перевірка його міцності.
37. Які переміщення мають перерізи балки при прямому згині? Стріла прогину, знаки переміщень.
38. Точне диференціальне рівняння зігнутої осі балки. Чому його можна замінити наближеним (основним) рівнянням пружної лінії?
39. Диференціальна залежність між прогинами і кутами повороту перерізів балки.
40. Як з основного диференційного рівняння зігнутої осі балки отримати вирази для кутів повороту і прогинів перерізів?
41. Постійні інтегрування. З яких умов вони визначаються?
42. Як визначити найбільшу величину прогину - стрілу прогину?
43. Метод початкових параметрів та його вимоги.
44. Рівняння прогинів методу початкових параметрів, особливості користування.
45. Рівняння кутів повороту методу початкових параметрів.
46. Умова жорсткості балки.

## 7. Кручення

### 7.1. Умови виникнення деформацій, їх види. Основні означення. Дотичні напруження

**Кручення** – деформація, викликана моментом, діючим у площині, перпендикулярній повздовжній осі стержня. При цьому в поперечних перерізах виникає тільки один силовий фактор – крутний (скручуючий) момент.

**Вали** – стержні, які працюють на кручення.

При крученні сталюого зразка круглого чи кільцевого поперечного перерізу зберігається пропорційна залежність між деформацією і деяким значенням крутного моменту  $M_{пц}$ , що відповідає межі ( $\tau_{пц}$ ) пропорційності. Тобто, в цьому інтервалі деформація зразка підпорядкована закону Гука. На рис. 7.1 показані діаграми кручення для сталюого (рис. 7.1, а) та чавунного (рис. 7.1, б) зразків. Величина  $\phi$  – **кута закручування** поперечного перерізу стержня аналогічна абсолютній деформації при осьовому розтягу (стиску).

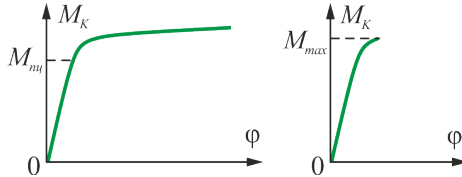


Рис. 7.1

Видно, що при крученні чавунного зразка відсутня пропорційна залежність між крутним моментом і деформацією зразка.

Розглянемо процес кручення вала круглого поперечного перерізу (рис. 7.2).

В поперечних перерізах вала діє постійний крутний момент

$$T = M_x.$$

Для елемента довжиною  $dx$  виділимо елементарну циліндричну поверхню трубчастого (кільцевого) поперечного перерізу (рис. 7.2 б, в) з радіусами  $\rho$  і  $(\rho + d\rho)$ .

В подальшому аналізі будемо опиратися на гіпотезу Бернуллі, прийнявши, що при крученні такого стержня поперечні перерізи зберігаються плоскими і обертаються відносно один одного (зсуваються) на деякий кут закручування.

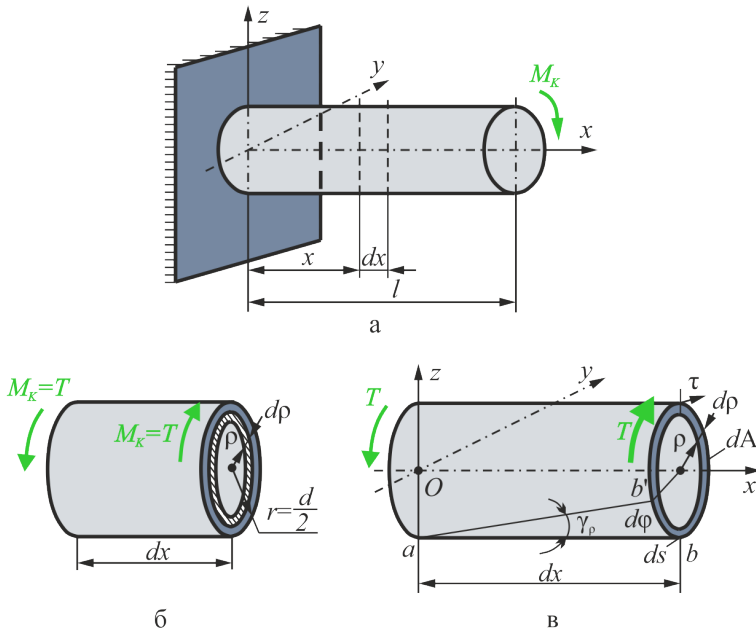


Рис. 7.2

Розглядаючи статичну сторону задачі, можна записати для виділеного елементарного циліндра (рис. 7.2, в):

$$\sum M_x = 0, \quad \int_A \rho \tau dA - T = 0,$$

звідки

$$\int_A \rho \tau dA = T. \quad (7.1)$$

Тут  $\tau$  – дотичне напруження, яке діє на елементарній площадці  $dA$ .

Кут  $\gamma$  – кут зсуву циліндричної поверхні (або кут відносного зсуву). Тоді (рис. 7.2, в):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma_\rho &= \frac{bb'}{dx} = \frac{dS}{dx} = \frac{(\rho + d\rho)d\phi}{dx} = \\ &= \frac{\rho d\phi + d\rho d\phi}{dx} \approx \rho \frac{d\phi}{dx}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Величина  $\frac{d\phi}{dx}$  називається **відносним кутом закручування** і позначається  $\theta$ . Величина кута  $\theta$  аналогічна відносній деформації  $\epsilon$  при осьовому розтягу (стиску).

Враховуючи, що для незначних переміщень

$$\operatorname{tg} \gamma_\rho \approx \gamma_\rho$$

вираз (7.2) можна подати у вигляді

$$\gamma_\rho = \rho \theta. \quad (7.3)$$

Підставивши (7.3) у формулу Гука при зсуві, отримаємо для дотичного напруження в поперечному перерізі вала

$$\tau_{\rho} = G\gamma_{\rho} = G\theta\rho. \quad (7.4)$$

Формули (7.3), (7.4) показують, що кути зсуву циліндричної поверхні та дотичні напруження в поперечному перерізі вала при крученні змінюються пропорційно радіусу  $\rho$ . Очевидно, що при  $\rho_{max}$  максимальні дотичні напруження будуть діяти на периферії поперечних перерізів, тобто на поверхні вала:

$$\tau_{max} = G\theta r. \quad (7.5)$$

Підставивши напруження  $\tau$  з виразів (7.4) в (7.1) та інтегруючи по всій площі поперечного перерізу вала, отримаємо

$$T = \int_A G\theta\rho^2 dA = G\theta \int_A \rho^2 dA. \quad (7.6)$$

Інтеграл являє вже відому геометричну характеристику – полярний момент інерції перерізу  $I_p$ . Таким чином (7.6) приймає вигляд

$$T = G\theta I_p,$$

звідки для вала круглого перерізу

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{GI_p}. \quad (7.7)$$

Величину  $GI_p$  називають **жорсткістю поперечного перерізу стержня** при крученні.

З (7.7) видно, що величина кута закручування поперечного перерізу:

$$d\phi = \theta dx = \frac{T dx}{GI_p}. \quad (7.8)$$

звідки

$$\phi = \int_0^l \theta dx = \int_0^l \frac{T dx}{GI_p}. \quad (7.9)$$

Тут  $l$  – відстань між поперечними перерізами, для яких визначається кут закручування (повороту)  $\phi$ .

При незмінних крутному моменті та жорсткості стержня в межах циліндричного відрізка вала завдовжки  $l$ :

$$\phi = \theta l = \frac{Tl}{GI_p}; \quad \theta = \frac{\phi}{l} = \frac{T}{GI_p}. \quad (7.10)$$

Для дотичних напружень, поєднавши (7.4) і (7.7), отримаємо

$$\tau_{\rho} = \frac{T}{I_p} \cdot \rho. \quad (7.11)$$

Таким чином, додатково до сказаного для (7.5), можна стверджувати, що дотичні напруження в поперечному перерізі вала розподілені вздовж радіуса за лінійним законом. Епюра дотичних напружень в поперечному перерізі круглого вала показана на рис. 7.3.

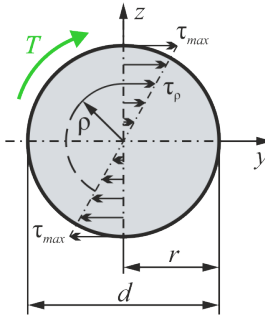


Рис. 7.3.

При  $\rho_{max} = r$  та з урахуванням (7.5), формула (7.11) приймає вигляд:

$$\tau_{max} = \frac{T}{I_p} r = \frac{T}{W_p}. \quad (7.12)$$

Так як при крученні нормальні напруження відсутні, то виникає напружений стан чистого зсуву.

## 7.2. Потенціальна енергія пружних деформацій. Величина зовнішніх скручуючих моментів

Робота крутних моментів дорівнює потенціальній енергії, накопиченій деформованим елементом і визначається аналогічно тому, як це робилося для розтягу в межах пружності:

$$dW = dU = \frac{1}{2} T \cdot d\varphi. \quad (7.13)$$

Підставивши в (7.13) вираз (7.8), маємо

$$dU = \frac{T^2 dx}{2GI_p}. \quad (7.14)$$

В межах пружності енергія, накопичена в стержні довжиною  $l$

$$U = \int_0^l \frac{T^2 dx}{2GI_p}. \quad (7.15)$$

при незмінних  $T$  і  $GI_p$  по довжині стержня

$$U = \frac{T^2 l}{2GI_p}. \quad (7.16)$$

Часто виникає потреба у визначенні зовнішніх скручуючих моментів по споживаній потужності і частоті обертання вала.

Нехай елементарна механічна робота зовнішнього скручуючого моменту

$$dW = M_\kappa d\omega, \quad (7.17)$$

$d\omega$  – елементарне кутове переміщення точки поверхні вала при його рівномірному обертанні.

Нехай вал робить  $n$  обертів на хвилину, тоді кутова частота обертання вала радіанів за секунду

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

Повна механічна робота за секунду

$$W = \int_0^\omega M_\kappa d\omega = \frac{M_\kappa \pi n}{30}. \quad (7.18)$$

Потужність  $N$ , яка передається валом, тобто робота скручуючого моменту  $M_\kappa$  за секунду

$$N = \frac{W}{t} = \frac{M_\kappa \pi n}{30},$$

звідки

$$M_\kappa = \frac{30 \cdot N}{\pi n} = \frac{N}{\omega}. \quad (7.19)$$

або

$$M_\kappa = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{N}{n} = 9,55 \frac{N}{n}. \quad (7.20)$$

Тут:  $N$  – потужність,  $\kappa Bm$ ,  $M_\kappa$  – скручуючий момент,  $\kappa Hm$ .

### 7.3. Розрахунок суцільних і порожнистих валів на міцність і жорсткість при крученні

Умова міцності при крученні

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} \leq [\tau]. \quad (7.21)$$

Допустиме напруження при крученні залежить від властивостей конструкційного матеріалу та прийнятого коефіцієнта запасу міцності:

– для пластичних матеріалів

$$[\tau] = \frac{\tau_H}{[k]} = \frac{\tau_m}{k_m}. \quad (7.22)$$

– для крихких матеріалів

$$[\tau] = \frac{\tau_H}{[k]} = \frac{\tau_{mч}}{k_{mч}}, \quad (7.23)$$

де  $\tau_m$ ,  $\tau_{mч}$  – границі текучості та міцності, відповідно, пластичних та крихких матеріалів;  $k_T$ ,  $k_{mч}$  – регламентовані коефіцієнти запасу міцності.

З умови (7.21) можливі наступні три типи задач:

– перевірка напружень

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p}, \quad \tau_{max} \geq [\tau];$$

– проектний розрахунок

$$W_p \geq \frac{T}{[\tau]}; \quad (7.24)$$

– визначення найбільшого навантаження

$$[T_{max}] \leq W_p[\tau]. \quad (7.25)$$

Умова жорсткості з урахуванням (7.10)

$$\theta_{max} = \frac{T}{G I_p} \leq [\theta], \quad (7.26)$$

де  $[\theta]$  – допустимий відносний кут закручування:

для статичних навантажень  $[\theta]=0,3 \text{ град/м}=5,236 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}$ ;

для ударних  $[\theta]=0,5 \text{ град/м}=8,727 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}$ ;

для циклічних  $[\theta]=0,25 \text{ град/м}=4,363 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}$ .

### 7.3.1. Розрахунок на міцність і жорсткість валів суцільного круглого поперечного перерізу

З розділу 5 полярні моменти інерції та опору

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}, \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Тоді на підставі виразу (7.24) можна записати, що

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}}, \quad (7.27)$$

а з умови жорсткості (7.26)

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32T}{\pi G[\theta]}}. \quad (7.28)$$

З двох значень діаметра приймають більше і округлюють до ближнього стандартного.

### 7.3.2. Розрахунок на міцність і жорсткість порожнистих валів

Для товстостінних валів кільцевого (трубчастого) поперечного перерізу, з урахуванням рекомендацій умови (7.24), можна записати розрахункові формули:

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4), \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4), \quad c = \frac{d}{D};$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau](1-c^4)}} \text{ або } d \geq \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi(1-c^4)}}, \quad (7.29)$$

з умови жорсткості (7.26)

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32T}{\pi G[\theta](1-c^4)}} \text{ або } d \geq \sqrt[4]{\frac{32\theta_{max}}{\pi(1-c^4)}}. \quad (7.30)$$

**Тонкостінний стержень** – поперечний переріз якого обмежено поверхнями, відстані між якими малі у порівнянні з розмірами цих поверхонь. Стержень можна вважати тонкостінним, якщо співвідношення  $d/\delta \geq 20$ . Тут:  $d$  – внутрішній діаметр труби;  $\delta$  – товщина її стінки.

**Усреднена поверхня** тонкостінного стержня – геометричне місце середин товщин.

**Серединна лінія поперечного перерізу стержня** – лінія перетину усередненої поверхні з поперечним перерізом.

В силу тонкостінності перерізу різниця в значеннях дотичних напружень, для точок внутрішнього контура поперечного перерізу ( $\tau_0$ ), точок середньої лінії ( $\tau_c$ ) і точок зовнішнього контура ( $\tau_3$ ) не може бути значною. Тому дотичні напруження практично можна вважати рівномірно розподіленими по товщині стінки поперечного перерізу ( $\delta$ ).

Мало, також, відрізняються радіуси внутрішньої і зовнішньої поверхонь труби, тому в розрахунках можна скористатись значенням середнього радіуса трубчастого перерізу (при  $\delta = const$  по усьому контуру) (рис. 7.4).

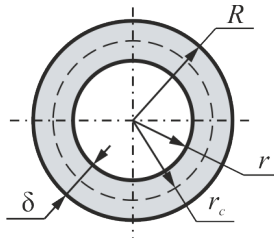


Рис. 7.4

$$r_c = \frac{r+R}{2}. \quad (7.31)$$

Тоді полярний момент інерції такого перерізу

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = r_c^2 2\pi r_c \delta = 2\pi r_c^3 \delta, \quad (7.32)$$

а полярний момент опору

$$W_p = \frac{I_p}{r_c} = 2\pi r_c^2 \delta. \quad (7.33)$$

Середнє значення дотичного напруження в стінці труби

$$\tau_c = \frac{T}{W_p} = \frac{T}{2\pi r_c^2 \delta}. \quad (7.34)$$

Виходячи з умови (7.24) та виразу (7.33), можна записати

$$r_c \geq \sqrt{\frac{T}{2\pi\delta[\tau]}}. \quad (7.35)$$

З урахуванням умови жорсткості (7.26) і формули (7.32) величина середнього радіуса

$$r_c \geq \sqrt{\frac{T}{2\pi\delta[\theta]G}}. \quad (7.36)$$

При двох значеннях  $r_c$  приймають більше і округлюють до ближнього стандартного.

Визначимо найменшу величину співвідношення  $c$  для тонкостінних труб, врахувавши, що  $\delta \leq d/20$ :

$$c \geq \frac{d}{D} = \frac{D-2\delta}{D} = 1 - \frac{2 \cdot \frac{d}{20}}{D}, \text{ або } c \geq 1 - 0.1c.$$

Після перетворень

$$c \geq \frac{1}{1,1} = 0,909. \quad (7.37)$$

Тоді з формули (7.31) можна визначити один з радіусів:

$$2r_c = r + R, \quad \frac{2r_c}{R} = \frac{r}{R} + 1, \quad R = \frac{2r_c}{c+1}. \quad (7.38)$$

## 7.4. Епюри крутних моментів, кутів закручування та відносних кутів закручування

Розглянемо приклад вала, на який діють статичні зовнішні скручуючі моменти зовнішніх сил (рис. 7.5, а). Для визначення внутрішнього силового фактора – крутного моменту  $T$ , поділимо вал на ділянки і застосуємо метод перерізів. Частину ділянок можна розглядати зліва, а частину справа. При цьому зовнішні скручуючі моменти (а значить і кути закручування) вважаються додатними, якщо вони при погляді на поперечній переріз з вільного торця вала спрямовані проти ходу годинникової стрілки.

**Ділянка 1** (погляд зліва):  $0 \leq x_1 \leq l_1 = 0,2 \text{ м};$   
 $T_1 = 0.$

**Ділянка 2** (погляд зліва):  $0 \leq x_2 \leq l_2 = 0,5 \text{ м};$   
 $T_2 = -M_{k1} = -1,1 \text{ кНм}.$

**Ділянка 3** (погляд справа):  $0 \leq x_3 \leq l_3 = 0,6 \text{ м};$   
 $T_3 = -M_{k3} + M_{k4} = -2,0 + 1,5 = -0,5 \text{ кНм}.$

**Ділянка 4** (погляд справа):  $0 \leq x_4 \leq l_4 = 0,5 \text{ м};$   
 $T_4 = M_{k4} = 1,5 \text{ кНм}.$

Будуємо епюру крутних моментів  $T$  (рис. 7.5, б).

Використовуючи формули (7.27), (7.28) для небезпечної ділянки 4, доберемо діаметр вала при

$$G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad [\tau] = 40 \text{ МПа}, \quad [\theta] = 5,236 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м};$$

– з умови міцності

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 5,76 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

– з умови жорсткості

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32T}{\pi G[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 5,236 \cdot 10^{-3}}} = 7,77 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

За результатами двох розрахунків слід обрати більший діаметр і округлити його до ближнього стандартного. Остаточно приймаємо  $d = 80 \text{ мм} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

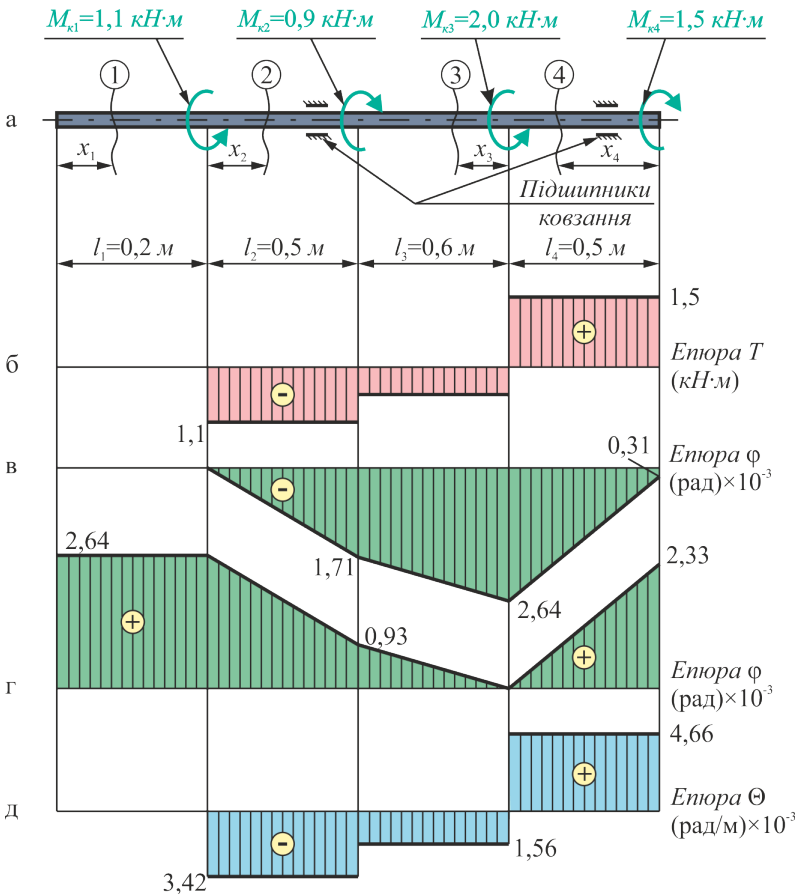


Рис. 7.5

Тепер визначимо для кожної ділянки кут закручування  $\varphi$  та відносні кути закручування  $\theta$  перерізів, побудуємо відповідні еюри (рис. 7.5, в, г). При відсутності защемлення, один з поперечних перерізів вала приймається за умовно нерухомий. Якщо, наприклад, вважати нерухомим переріз, де діє момент  $M_{K1}$  ( $\varphi_1 = 0$ ), то переріз, де діє момент  $M_{K2}$  повернеться на кут

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_{12}.$$

З формули (7.9) випливає, що кут закручування на розглядуваному відрізку завжди змінюється за лінійним законом. Тоді

$$\phi_{12} = \frac{T_2 l_2}{GI_p} = \frac{-1,1 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{321536} = -1,71 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Тут жорсткість даного поперечного перерізу при крученні

$$GI_p = G \frac{\pi d^4}{32} = 0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot \frac{3,14 \cdot (8 \cdot 10^{-2})^4}{32} = 321536 \text{ Н}\cdot\text{м}^2.$$

Тоді

$$\phi_2 = 0 - 1,71 \cdot 10^{-3} = -1,71 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Аналогічно, для перерізів, де діють  $M_{K3}$  та  $M_{K4}$ :

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \phi_2 + \phi_{23} = \\ &= \phi_2 + \frac{T_3 l_2}{GI_p} = -1,71 \cdot 10^{-3} - \frac{0,5 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{321536} = -2,64 \cdot 10^{-3} \text{ рад}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_4 &= \phi_3 + \phi_{34} = \\ &= \phi_3 + \frac{T_4 l_2}{GI_p} = -2,64 \cdot 10^{-3} + \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{321536} = -0,31 \cdot 10^{-3} \text{ рад.} \end{aligned}$$

Якщо тепер вважати нерухомим переріз, де діє момент  $M_{K3}$ , то для побудови епюри кутів закручування достатньо в епюрі  $\phi$  (рис. 7.5, в) провести горизонтальну лінію на рівні відповідаючому нерухомому перерізу  $M_{K3}$  (рис. 7.5, г). Перераховуються значення кутів закручування.

Тепер побудуємо епюру відносних кутів закручування  $\theta$  (рис. 7.4, д), знаючи, що в межах кожної ділянки  $\theta = const$ :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0; \\ \theta_2 &= \frac{T_2}{GI_p} = \frac{-1,1 \cdot 10^3}{321536} = -3,42 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}; \\ \theta_3 &= \frac{T_3}{GI_p} = \frac{-0,5 \cdot 10^3}{321536} = -1,56 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}; \\ \theta_4 &= \frac{T_4}{GI_p} = \frac{1,5 \cdot 10^3}{321536} = 4,66 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}. \end{aligned}$$

## 7.5. Кручення прямих стержнів некруглого поперечного перерізу

### 7.5.1. Вихідні твердження

Узагальнивши результати, отримані методами теорії пружності, приймемо ряд вихідних тверджень, які можна застосувати для розв'язку задач опору матеріалів.

1. На відміну від стержнів круглого (кільцевого) поперечного перерізу, при крученні стержнів з перерізами іншої форми гіпотеза Бернуллі неприйнята. Такі перерізи помітно викривлюються **депланують**.

2. Дотичні напруження в поперечних перерізах довільної форми для точок поблизу контура спрямовані по дотичній до контура. Контур перерізу являє собою траєкторію дотичних напружень.

3. У випадку, коли поперечний переріз має по контуру кутові переходи, то в них дотичні напруження відсутні.

4. У випадку замкнутого контура, розподілення дотичних напружень по товщині профіля близьке до рівномірного.

5. В незамкнутому контурі дотичні напруження розподілені лінійно по його товщині.

6. Дотичні напруження в стержні з перерізом незамкнутого контура майже незмінні, якщо контур перерізу спрямити. Тобто, дотичні напруження в криволінійному відкритому контурі будуть наблизно такими ж, як і в спрямованому контурі з прямокутним перерізом при співвідношенні сторін  $h/b > 10$ .

7. По аналогії з крученням стержнів круглого або кільцевого поперечного перерізів, для стержнів некруглого перерізу розрахункові формули мають вигляд:

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_k}; \quad (7.39)$$

$$\phi = \frac{Tl}{GI_k}; \quad (7.40)$$

$$\theta = \frac{T}{GI_k}. \quad (7.41)$$

Тут геометричні характеристики (умовні):  $I_k$  – момент інерції при крученні;  $W_k$  – момент опору при крученні.

Нижче розглядається методика визначення таких геометричних характеристик для різних випадків некруглих перерізів.

### 7.5.2. Стержні прямокутного поперечного перерізу

Для таких перерізів геометричні характеристики при крученні:

$$W_k = \alpha b^2 h; \quad I_k = \beta b^3 h, \quad (7.42)$$

де  $b$  – менша,  $h$  – більша сторони прямокутного поперечного перерізу;  $\alpha, \beta$  – коефіцієнти, які залежать від співвідношення сторін  $k = h/b$ .

Найбільші дотичні напруження виникають біля контура поперечного перерізу посередині його довгих сторін, а менші дотичні напруження – посередині коротких сторін (рис. 7.6).

Для визначення  $\tau_{min}$ , застосовують формулу (7.39). Тоді:

$$\tau_{min} = \gamma \tau_{max}, \quad (7.43)$$

де  $\gamma$  – коефіцієнт, який залежить від співвідношення сторін прямокутного перерізу.

З урахуванням формул (7.39) – (7.43), можна записати умови міцності і жорсткості:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha b^2 h} \leq [\tau]; \quad (7.44)$$

$$\theta = \frac{T}{G \beta b^3 h} \leq [\theta]. \quad (7.45)$$

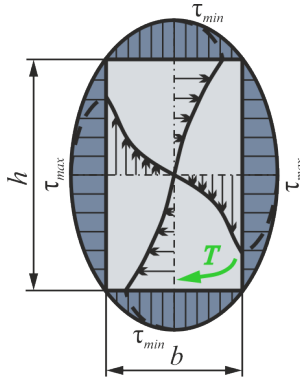


Рис. 7.6

В табл. 8 додатку наведені значення коефіцієнтів  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  при різних співвідношеннях сторін прямокутного перерізу ( $k = h/b$ ).

### 7.5.3. Стержні еліптичного поперечного перерізу

Геометричні характеристики (умовні) такого перерізу при крученні визначаються за формулами:

$$W_K = \frac{\pi b^2 a}{16}. \quad (7.46)$$

$$I_K = \frac{\pi a b}{64} (a^2 + b^2). \quad (7.47)$$

Тут  $a$ ,  $b$  – відповідно, велика і мала осі еліпса.

На рис. 7.7 показана закономірність розподілення дотичних напружень по перерізу. Найбільші напруження виникають в точках контура, розташованих на кінцях малої осі.

Напруження на великій осі еліптичного контура:

$$\tau_{\min} = \tau_{\max}/n \quad \text{при} \quad n = a/b. \quad (7.48)$$

Для еліптичного перерізу  $n > 1$ . Для круглого перерізу  $n=1$  і формули (7.46), (7.47) перетворюються у вже відомі формули, коли  $I_K = I_p$ ,  $W_K = W_p$ .

Умови міцності і жорсткості можна записати, врахувавши формули (7.39), (7.41), (7.46), (7.47):

$$\tau_{\max} = \frac{16T}{\pi b^2 a} \leq [\tau]; \quad (7.49)$$

$$\theta_{\max} = \frac{64T}{G \pi a b (a^2 + b^2)} \leq [\theta]. \quad (7.50)$$

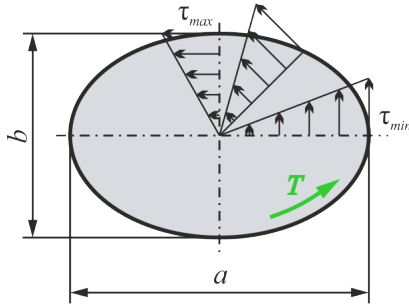


Рис. 7.7

### 7.5.4. Тонкостінні стержні замкнутого контуру

Розглянемо довільний поперечний переріз такого типу (рис. 7.8).

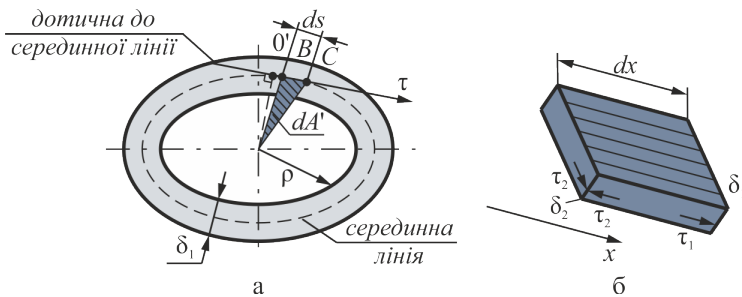


Рис. 7.8

Враховуємо твердження, що дотичні напруження рівномірно розподілені по товщині стінки стержня.

Виділимо із стержня елементарну призму довжиною  $dx$  (рис. 7.8,б). Умова рівноваги для неї

$$\sum X = 0, \quad \tau_1 \delta_1 dx - \tau_2 \delta_2 dx = 0,$$

звідки

$$\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2 = \tau_\mu \delta_\mu = \tau \delta = \text{const.}$$

Тобто, на ділянках з меншою товщиною стінки дотичні напруження будуть більшими, щоб добуток  $\tau \delta$  не змінювався.

Елементарний момент контура довжиною  $ds$  (рис. 7.8, а) відносно центра  $O$

$$d\Gamma = \tau \rho \delta ds.$$

Враховуємо, що  $\tau\delta = \text{const}$  і що добуток  $\rho ds$  являє собою подвоєну площу заштрихованого трикутника  $OBC$ , обмежену серединною лінією перерізу. Тоді:

$$T = \int_s \tau \rho \delta ds = \tau \delta \int_s \rho ds = \tau \delta \cdot 2A' = 2\tau \delta A', \quad (7.51)$$

тут  $A'$  – площа, окреслена серединною лінією перерізу.

З формули (7.51) витікає, що при відомому внутрішньому крутному моменті:

$$\tau = \frac{T}{2\delta A'}. \quad (7.52)$$

Умова міцності на ділянці контура найменшої товщини:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2\delta_{\min} A'} \leq [\tau]. \quad (7.53)$$

Визначимо кутові переміщення поперечних перерізів тонкостінних замкнених стержнів. Враховуючи вираз для питомої потенціальної енергії при зсуві, матимемо:

$$u = \frac{\tau^2}{2q}.$$

Енергія деформації, накопичена в елементарному об'ємі  $dV$  матеріалу стінки стержня з розмірами  $ds$ ,  $dx$ ,  $\delta$ , рівна

$$dU = u dv = \frac{\tau^2}{2G} \delta dx ds.$$

Останній вираз інтегрується по довжині стержня (якщо він є однорідним по довжині  $l$ ) і по дузі замкненого контура

$$U = \frac{l}{2G} \int_s \tau^2 \delta ds = \frac{l\tau^2 \delta^2}{2G} \int_s \frac{ds}{\delta}.$$

Інтеграл відображає закон зміни товщини стінки по дузі контура. Знаючи, що з (7.52)

$$\tau \delta = \frac{T}{2A'},$$

де  $T$  – внутрішній крутний момент, матимемо

$$U = \frac{T^2 l}{8G(A')^2} \int_s \frac{ds}{\delta}. \quad (7.54)$$

В той же час, з виразу (7.13) випливає, що

$$U = \frac{1}{2} T \phi. \quad (7.55)$$

Об'єднавши вирази (7.53), (7.54), отримаємо, що

$$\phi = \frac{Tl}{4G(A')^2} \int_s \frac{ds}{\delta}. \quad (7.56)$$

При незмінній товщині стінки стержня по дузі контура кут закручування

$$\phi = \frac{Tls}{4G(A')^2 \delta}. \quad (7.57)$$

тут  $s$  – довжина замкненого контура поперечного перерізу стержня.

Відносний кут закручування

$$\theta = \frac{\phi}{l} = \frac{T s}{4G(A')^2 \delta}. \quad (7.58)$$

В формулах (7.52), (7.58) умовними геометричними характеристиками є

$$W_k = 2\delta A', \quad I_k = \frac{4(A')^2 \delta}{S}, \quad (7.59)$$

які для частинного випадку тонкостінного трубчастого перерізу приймають вже відомий у (7.32) і (7.3) вигляд (при  $r_c = \rho$ ):

$$W_k = W_p = 2\delta A' = 2\pi r_c^2 \delta;$$

$$I_k = I_p = \frac{4(A')^2 \delta}{S} = \frac{4(\pi r_c^2)^2 \delta}{2\pi r_c} = 2\pi r_c^3 \delta.$$

### 7.5.5. Тонкостінні стержні відкритих (розімкнених) профілів

Приклади таких профілів показані на рис. 7.9.

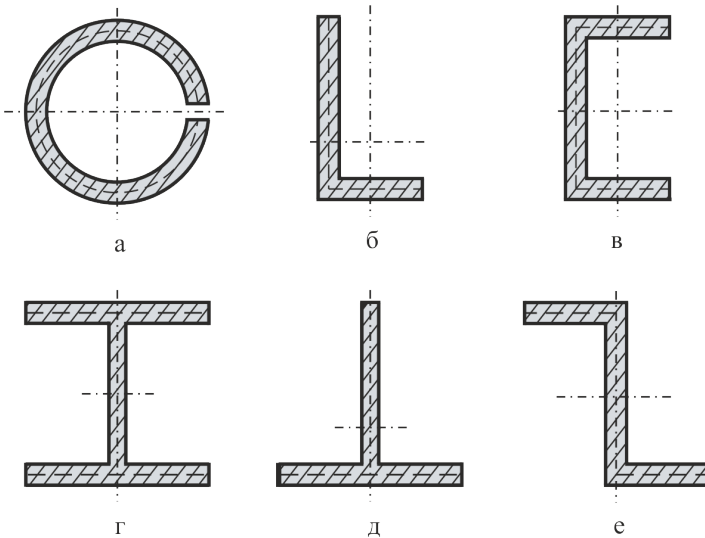


Рис. 7.9

**Відкритим (розімкненим)** називається поперечний переріз тонкостінного стержня, серединна лінія якого незамкнена.

Розглянемо випадок, коли тонкостінний відкритий профіль є складним і може бути розгорнений у прямокутник (рис. 7.9, а, б, в, е).

При  $k=h/b=\infty$  для прямокутного перерізу (табл. 8 додатку):  $\alpha=\beta=0,333=1/3$ . Тоді формули (7.44) та (7.45) приймають вигляд:

$$\tau_{max} = \frac{3T}{\delta^2 s} \leq [\tau]; \quad (7.60)$$

$$\phi = \frac{3Tl}{G\delta^3 s}; \quad (7.61)$$

$$\theta_{max} = \frac{3T}{G\delta^3 S} \leq [\theta]. \quad (7.62)$$

Тут  $\delta$  – менша сторона прямокутного перерізу (аналог розміру  $b$ ), тобто товщина профіля;  $s$  – більша сторона прямокутного перерізу (аналог розміру  $h$ ), тобто довжина контура поперечного перерізу. Видно, що формули (7.60), (7.61) не залежать від форми профіля, якщо він може бути розгорнений у прямокутник.

З формул (7.60), (7.61) видно, що геометричні характеристики для таких профілів при крученні:

$$W_k = \frac{\delta^2 s}{3}; \quad (7.63)$$

$$I_k = \frac{\delta^3 s}{3}; \quad \delta = \frac{I_k}{W_k}. \quad (7.64)$$

Тепер проаналізуємо випадок, коли тонкостінний відкритий профіль є складеним, не може бути розгорнутим у витягнений прямокутник, але який можна розділити на  $n$  окремих прямокутних елементів, для яких  $S/\delta_i \geq 10$  і умовні геометричні характеристики  $W_{ki}$ ,  $I_{ki}$  (рис. 7.9, г, д).

Такий профіль складено з окремих елементів, але на даній ділянці стержня всі вони мають однаковий відносний кут закручування:

$$\theta = \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_\mu = \dots = \theta_n. \quad (7.65)$$

Якщо  $T_i$  – частина внутрішнього крутного момента, що сприймається  $i$ -им елементом складного профіля, то для  $n$  елементів

$$T = \sum_{i=1}^n T_\mu = T_1 + T_2 + \dots + T_n. \quad (7.66)$$

З формули (7.62) випливає, що для  $i$ -го елемента розглядуваного поперечного перерізу

$$T_i = \frac{\theta_i G \delta_i^3 s_i}{3}. \quad (7.67)$$

Тоді формула (7.66) набирає вигляду

$$T = \frac{\theta G}{3} (\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \dots + \delta_n^3 s_n),$$

звідки, з урахуванням (7.64), отримаємо:

$$\theta = \frac{T}{3T} = \frac{T}{G(\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \dots + \delta_n^3 s_n)} = \frac{T}{G(I_{k1} + I_{k2} + \dots + I_{kn})} = \frac{T}{G \sum_{i=1}^n I_{ki}} = \frac{T}{GI_k}. \quad (7.68)$$

де

$$I_k = \sum_{i=1}^n I_{ki} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \delta_i^3 s_i. \quad (7.69)$$

Вияснимо, як розподіляється загальний крутний момент в поперечному перерізі між його елементами. Для цього об'єднаємо формули (7.62), (7.64) і (7.65):

$$\theta = \frac{T}{GI_k} = \frac{T_1}{GI_{k1}} = \frac{T_2}{GI_{k2}} = \frac{T_n}{GI_{kn}}. \quad (7.70)$$

Видно, що співвідношення між крутним моментом в перерізі і його складовими в елементах цього перерізу, пропорційно їх жорсткостям:

$$T_1 = T \cdot \frac{I_{k1}}{I_k}; T_2 = T \cdot \frac{I_{k2}}{I_k}; \dots; T_n = T \cdot \frac{I_{kn}}{I_k}. \quad (7.71)$$

Для окремо взятого елемента поперечного перерізу дотичні напруження, згідно формул (7.39) і (7.71):

$$\tau = \frac{T_i}{W_{ki}} = \frac{T \cdot \frac{I_{ki}}{I_k}}{W_{ki}} = \frac{T}{I_k} \left( \frac{I_{ki}}{W_{ki}} \right). \quad (7.72)$$

Найбільші дотичні напруження виникатимуть там, де величина співвідношення в дужках найбільша. Приймаючи до уваги формулу (7.64) отримаємо:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_k} \delta_{\max}. \quad (7.73)$$

З урахуванням (7.69) і (7.73) можна записати, що

$$W_k = \frac{I_k}{\delta_{\max}} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^3 s_i}{3 \delta_{\max}}. \quad (7.74)$$

Тоді в загальному вигляді умови міцності та жорсткості:

$$\tau_{\max} = \frac{3T \cdot \delta_{\max}}{\sum_{i=1}^n \delta_i^3 s_i} \leq [\tau]. \quad (7.75)$$

$$\theta_{\max} = \frac{3T}{G \sum_{i=1}^n \delta_i^3 s_i} \leq [\theta]. \quad (7.76)$$

В практичних розрахунках в знаменник формул (7.75), (7.76) вводять корегувальний коефіцієнт  $\eta$ , який враховує особливості реального профіля при розрахунку на кручення тонкостінних стержнів з стандартних профілів (див. табл. 9 додатку).

## 7.6. Рациональна форма поперечного перерізу

### 7.6.1. Застосування порожнинних (трубчастих) валів

Ефективним засобом зниження ваги є вилучення в поперечних перерізах валів малонавантаженої внутрішньої частини матеріалу.

Визначимо для одного східця можливу економію ( $\eta$ ) конструкційного матеріалу (тобто зменшення площі поперечного перерізу) при заміні суцільного круглого перерізу на кільцевий (при  $c < 0,909$  – товстостінний переріз).

Застосуємо вже відому формулу (2.45) (при незмінних  $\gamma, l$ ):

$$\eta = \left( 1 - \frac{A_p}{A_z} \right) \cdot 100\%.$$

Тут:  $A_p, A_z$  – відповідно, площі раціонального (кільцевого) і заданого (суцільного круглого) поперечних перерізів.

Використавши відомі формули, знайдемо:

$$\begin{aligned} \frac{A_p}{A_3} &= \frac{\frac{\pi D_p^2}{4}(1-c^2)}{\frac{\pi d_3^2}{4}} = \frac{D_p^2}{d_3^2}(1-c^2) = \\ &= \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{16T}{\pi|\tau|(1-c^4)}\right)^2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{16T}{\pi|\tau|}\right)^2}}(1-c^2) = \sqrt[3]{\frac{(1-c^2)^3}{(1-c^4)^2}} = \sqrt[3]{\frac{1-c^2}{(1+c^2)^2}}. \end{aligned}$$

Тоді можлива економія досягає

$$\eta = \left(1 - \sqrt[3]{\frac{1-c^2}{(1+c^2)^2}}\right) \cdot 100\%. \quad (7.77)$$

При  $c < 0,909$

$$\eta < \left(1 - \sqrt[3]{\frac{1-0,909^2}{(1+0,909^2)^2}}\right) \cdot 100\%, \quad \eta = 62,7\%.$$

Часто стає питання про заміну заданого суцільного вала діаметром  $d_3$  порожнистим рівномічним валом із зовнішнім діаметром  $D$ . Тоді можна записати для обох валів

$$\tau_{max(d)} = \tau_{max(D)},$$

або

$$\frac{16T}{\pi d_3^3} = \frac{16T}{\pi D^3(1-c^4)}, \quad (7.78)$$

звідки необхідне співвідношення

$$c = \sqrt[4]{1 - \left(\frac{d_3}{D}\right)^3}. \quad (7.79)$$

Якщо задано співвідношення (7.79), то (7.78) дає зовнішній діаметр порожнинного рівномічного вала:

$$D = d_3 \sqrt[3]{\frac{1}{1-c^4}}. \quad (7.80)$$

При  $c < 0,909$

$$D < d_3 \sqrt[3]{\frac{1}{1-0,909^4}} = 1,466d_3. \quad (7.81)$$

### 7.6.2. Оцінка раціональності форми перерізу

При заданому навантаженні серед поперечних перерізів, маючих однаковий момент опору крученню, раціональним буде такий, що має найменшу площу. Виходячи з цього, раціональність форми поперечного перерізу можна оцінити безрозмірною характеристикою, яка називається **питомим моментом опору**:

$$\omega_k = \frac{W_k}{\sqrt{A^3}}. \quad (7.82)$$

Застосування такої характеристики є особливо зручним для оцінки сортаментних профілів з готовими даними.

В табл. 10 додатку наведені значення питомого моменту опору для деяких форм перерізів.

## 7.7. Статично невизначені задачі при крученні

Вище йшла мова тільки про **статично визначені** стержні, для яких значення внутрішніх крутних моментів в поперечних перерізах можна визначити з рівнянь статичної рівноваги.

**Статично невизначеними** є такі стержні, для яких внутрішні крутні моменти в поперечних перерізах не можуть бути знайдені з рівнянь статичної рівноваги.

Особливості розв'язку статично невизначеного стержня розглянемо на прикладі.

**Приклад.** При якому співвідношенні розмірів ділянок східчастого вала (рис. 7.10, а) обидві його ділянки будуть рівномісними (рівнонебезпечними).

1. Складемо розрахункову схему (модель) (рис. 7.10, б). Невідомі крутні моменти в защемленнях позначимо  $M_A, M_B$ . Єдине рівняння статичної рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum M_x &= 0, -M_A + M - M_B = 0, \\ M_A + M_B &= M. \end{aligned} \quad (1)$$

Стержнева система має дві в'язі, тобто один раз статично невизначена  $C=H-P=2-1=1$ .

2. Відкинемо одне із закріплень, наприклад, праве і замінимо його дію на стержень моментом  $M_B$  (рис. 7.10, в). Розглядаючи деформацію стержня, складемо додаткове рівняння – **рівняння сумісності деформацій**. Так як торець  $B$  стержня повинен залишатись нерухомим, то можна записати:

$$\phi_B = 0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \phi_B &= \phi_{B(M)} + \phi_{B(M_B)} = 0; \\ \phi_B &= \phi_{B(M)} + (\phi_{B(M_B)}^b + \phi_{B(M_B)}^c) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Розглянемо складові, які входять до рівняння (3):

$$\phi_{B(M)} = \frac{M \cdot b}{GI_{k_1}}; \quad \phi_{B(M_B)}^b = -\frac{M_B \cdot b}{GI_{k_1}}; \quad \phi_{B(M_B)}^c = -\frac{M_B \cdot c}{GI_{k_2}}.$$

Підставивши в рівняння (3), отримаємо:

$$\frac{M \cdot b}{GI_{k_1}} - \frac{M_B \cdot b}{GI_{k_1}} - \frac{M_B \cdot c}{GI_{k_2}} = 0. \quad (4)$$

Визначимо геометричні характеристики згідно (5.28) та (5.42):

- для квадрата

$$I_{k_1} = \beta a^4 = 0,141a^4; \quad (5)$$

- для круглого перерізу

$$I_{\kappa_2} = \frac{\pi d^4}{32} = \psi d^4 = 0,098 d^4. \quad (6)$$

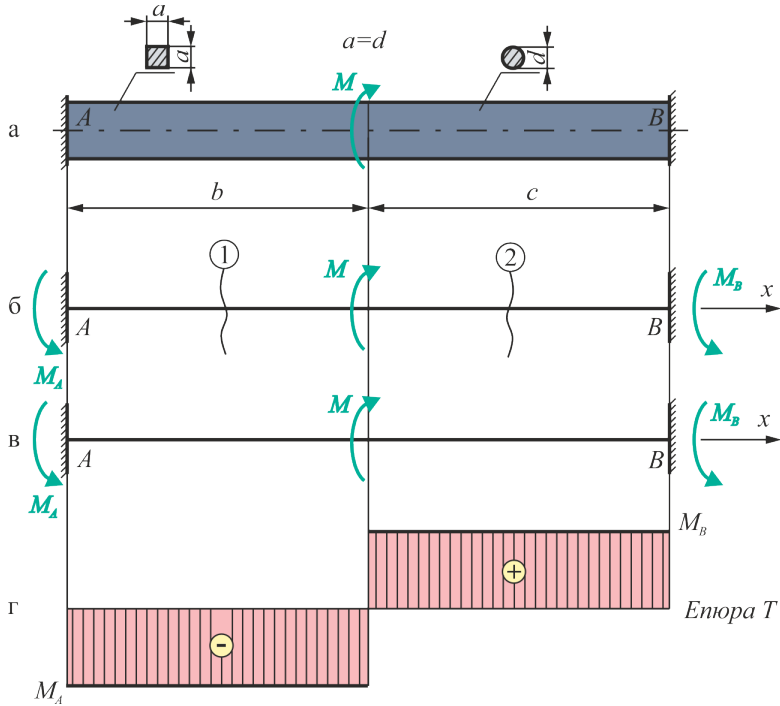


Рис. 7.10

Тоді рівняння (4) після скорочень і спрощень приймає вигляд:

$$\frac{M \cdot b}{\beta} - \frac{M_B \cdot b}{\beta} - \frac{M_B \cdot c}{\psi} = 0,$$

звідки

$$M_B = \frac{b}{b + \frac{\beta}{\psi} c} \cdot M. \quad (7)$$

3. Розв'язуємо систему рівнянь (1), (7):

з рівняння (1)

$$M_A = M - M_B = \left( 1 - \frac{b}{b + \frac{\beta}{\psi} c} \right) \cdot M. \quad (8)$$

Статична невизначеність розкрита.

4. Визначаємо внутрішні крутні моменти на ділянках стержня:

$$T_1 = M_A; T_2 = M_B.$$

Будуємо епюру крутних моментів (рис. 7.10, г).

5. Умова рівномірності ділянок:

$$\tau_{max(1)} = \tau_{max(2)};$$

або

$$\frac{T_1}{W_{\kappa_1}} = \frac{T_2}{W_{\kappa_2}}. \quad (9)$$

Геометричні характеристики, згідно формул (5.28) та (5.42):

- для квадрата

$$W_{\kappa_1} = \alpha a^3 = 0,208a^3; \quad (10)$$

- для круглого перерізу

$$W_{\kappa_2} = \frac{\pi d^3}{16} = \phi d^3 = 0,196d^3. \quad (11)$$

Підставивши в (9), отримаємо:

$$\frac{T_1}{\alpha} = \frac{T_2}{\phi};$$
$$\left(1 - \frac{b}{b + \frac{\beta}{\psi} \cdot c}\right) \cdot \frac{M}{\alpha} = \frac{b}{b + \frac{\beta}{\psi} \cdot c} \cdot \frac{M}{\phi}.$$

Після скорочень і перетворень отримаємо (при  $n = c/b$ ):

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta}{\psi} \cdot n\right) \cdot \phi} + \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta}{\psi} \cdot n\right) \cdot \alpha};$$

або

$$\frac{\beta}{\psi} \cdot n = \alpha \left(\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\alpha}\right) - 1;$$

остаточно

$$n = \frac{\alpha}{\phi} \cdot \frac{\psi}{\beta}. \quad (12)$$

6. Підставивши в (12) значення коефіцієнтів, отримаємо необхідне співвідношення розмірів ділянок стержня:

$$n = \frac{0,208 \cdot 0,098}{0,196 \cdot 0,141} = 0,737.$$

## Додатки

**Таблиця 1. Допустимі напруження при статичному навантаженні**

Матеріал	Значення $[\sigma]$ , МПа	
	при розтягу	при стиску
Сталь ст. 3	160	160
Чавун сірий	28 ÷ 80	120 ÷ 150
Мідь	30 ÷ 120	30 ÷ 120
Алюміній	30 ÷ 80	30 ÷ 80
Латунь	70 ÷ 140	70 ÷ 140
Деревина, вздовж волокон	9 ÷ 13	13 ÷ 15
Бетон	0,1 ÷ 0,7	8,0 ÷ 9,0

**Таблиця 2. Коефіцієнти Пуассона**

Матеріал	$\mu$
Сталь	0,25 ÷ 0,33
Чавун	0,25
Каучук, гума	0,47 ÷ 0,5
Бетон	0,2
Цегляна кладка	0,25
Деревина вздовж волокон	0,5
Деревина поперек волокон	0,02

**Таблиця 3. Модулі Юнга**

Матеріал	Модуль $E$ , МПа
Сталь вуглецева	$(1,9 \div 2,1) \cdot 10^5$
Сталь легована	$2,1 \cdot 10^5$
Чавун	$(1,15 \div 1,6) \cdot 10^5$
Мідь	$(0,84 \div 1,1) \cdot 10^5$
Латунь	$(0,91 \div 1,0) \cdot 10^5$
Деревина вздовж волокон	$0,11 \cdot 10^5$
Деревина поперек волокон	$(0,005 \div 0,01) \cdot 10^5$
Бетон	$(0,18 \div 0,23) \cdot 10^5$
Каучук	$0,0008 \cdot 10^5$

**Таблиця 4. Коефіцієнти лінійного розширення**

<b>Матеріал</b>	<b><math>\alpha</math>, град<sup>-1</sup></b>
Сталь	$127 \cdot 10^{-7}$
Мідь	$165 \cdot 10^{-7}$
Чавун сірий	$115 \cdot 10^{-7}$
Латунь	$95 \cdot 10^{-7}$
Дюралюміній	$70 \cdot 10^{-7}$
Бетон	$(14 \div 40) \cdot 10^{-7}$
Дерево сухе	$(9 \div 11) \cdot 10^{-7}$

**Таблиця 5. Модулі пружності другого роду**

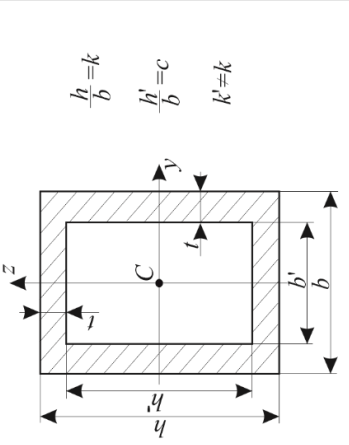
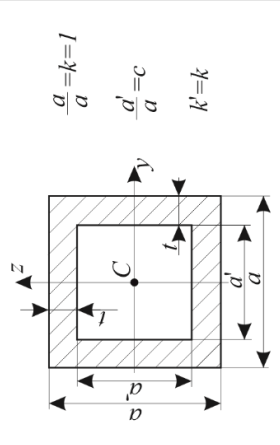
<b>Матеріал</b>	<b><math>G</math>, МПа</b>
Сталі	$(0,8 - 0,81) \cdot 10^5$
Чавун сірий	$0,45 \cdot 10^5$
Мідь	$(0,4 - 0,49) \cdot 10^5$
Бронза	$(0,4 - 0,42) \cdot 10^5$
Латунь	$(0,35 - 0,37) \cdot 10^5$
Алюміній	$(0,26 - 0,27) \cdot 10^5$
Деревина (вдовж волокон)	$0,0055 \cdot 10^5$

**Таблиця 6. Допустимі напруження для зварних швів  
(в долях від допустимих напружень для основного металу)**

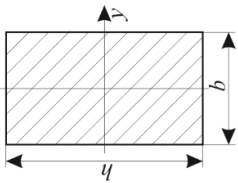
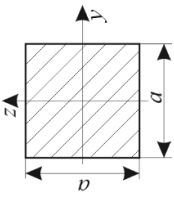
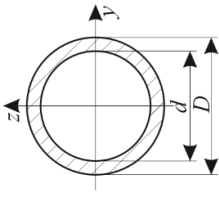
<b>Зварка</b>	<b><math>[\sigma'_p]</math></b>	<b><math>[\sigma'_c]</math></b>	<b><math>[\tau'_c]</math></b>
електродами Е42	$0,9 [\sigma_p]$	$[\sigma_p]$	$0,6 [\sigma_p]$
електродами Е42А	$[\sigma_p]$	$[\sigma_p]$	$0,65 [\sigma_p]$

Таблиця 5.1

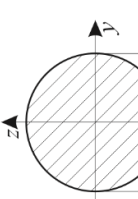
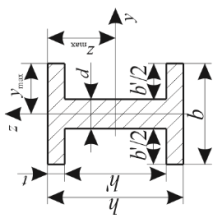
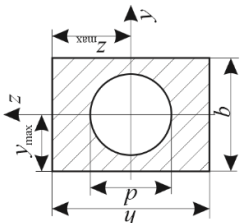
Коефіцієнти форми деяких перерізів

№ п/п	Види перерізів, деякі співвідношення	Визначальний розмір	α	β	γ	μ	ν	ψ	κ'
1	 <p style="text-align: center;"> <math>\frac{h}{b} = k</math>  <math>\frac{h'}{b'} = c</math>  <math>k' \neq k</math> </p>	b	4	5	6	7	8	9	10
1			$(k+c)(1-c)$	$\frac{k^3-c(k+c-1)^3}{6k}$	$\frac{k-c^3(k+c-1)}{6}$	$\frac{k^3-c(k+c-1)^3}{12}$	$\frac{k-c^3(k+c-1)}{12}$	$\frac{1-c^4}{12}$	$\frac{1-c^4}{12}$
2	 <p style="text-align: center;"> <math>\frac{a}{a} = k=1</math>  <math>\frac{a'}{a} = c</math>  <math>k' = k</math> </p>	a	4	5	6	7	8	9	10
2			$1-c^2$	$\frac{1-c^4}{6}$	$\frac{1-c^4}{6}$	$\frac{1-c^4}{12}$	$\frac{1-c^4}{12}$	$\frac{1-c^4}{12}$	$\frac{1-c^4}{12}$

Продолжения табл. 5.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	 <p> <math>\frac{h}{b} = k</math>  <math>c = 0</math>  <math>k' = k</math> </p>	$b$	$k$	$\frac{6}{k^2}$	$\frac{6}{k}$	$\frac{12}{k^3}$	$\frac{12}{k}$	$\frac{6}{k}$	$k$	
4	 <p> <math>\frac{a}{a} = k = 1</math>  <math>c = 0</math>  <math>k' = k</math> </p>	$a$	1	$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{12}{1}$	$\frac{12}{1}$	$\frac{6}{1}$	1	
5	 <p> <math>\frac{d}{D} = c</math> </p>	$D$	$\frac{\pi}{4} (1 - c^2)$	$\frac{\pi}{4} (1 - c^4)$	$\frac{\pi}{32} (1 - c^4)$	$\frac{\pi}{64} (1 - c^4)$	$\frac{\pi}{64} (1 - c^4)$	$\frac{\pi}{32} (1 - c^4)$	$\frac{1 + c^2}{8}$	1

Продолжения табл. 5.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	 <p> <math>d=0</math>  <math>\frac{d}{D}=c=0</math> </p>	D	$\frac{4}{\pi}$	$\frac{32}{\pi}$	$\frac{32}{\pi}$	$\frac{64}{\pi}$	$\frac{64}{\pi}$	$\frac{1}{8}$	1
7	 <p> <math>\frac{h}{b}=c</math>  <math>\frac{b'}{b}=c</math>  <math>\frac{h'}{h}=n</math> </p>	b	$k(1-cn)$	$\frac{6}{k^2}k(1-cn^3)$	$\frac{6}{k}[1-(n-u)+n(1-c)^3]$	$\frac{12}{k^2}k(1-cn^3)$	$\frac{12}{k}[1-(n-u)+n(1-c)^3]$	$\frac{6(1-cn)}{k(1-cn^3)}$	$\frac{(1-n)+n(1-c)^3}{k(1-cn^3)}$
8	 <p> <math>\frac{d}{b}=c</math>  <math>\frac{h}{b}=k</math> </p>	b	$k - \frac{\pi c^2}{4}$	$\frac{6}{k^2} - \frac{32k}{\pi c^4}$	$\frac{6}{k} - \frac{\pi c^4}{32}$	$\frac{6}{k^2} - \frac{\pi c^4}{64}$	$\frac{6}{k} - \frac{\pi c^4}{64}$	$\frac{32k^2-6\pi c^4}{48(4k-\pi c^4)}$	$\frac{32k^2-6\pi c^4}{32k-6\pi c^4}$

**Таблиця 8. Значення коефіцієнтів  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  при різних співвідношеннях сторін прямокутного перерізу ( $k = h/b$ )**

k	1	1.5	1.75	2	2.5	3
$\alpha$	0.208	0.231	0.239	0.246	0.256	0.267
$\beta$	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263
$\gamma$	1.0	0.859	—	0.795	—	0.753
k	4.0	6.0	8.0	10.0	$\infty$	
$\alpha$	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333	
$\beta$	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333	
$\gamma$	0.745	0.743	0.743	0.743	0.743	

**Таблиця 9. Значення корегувального коефіцієнта  $\eta$**

Вид профіля	$\eta$
Кутиковий	1,0
Швелерний	1,12
Коритний	1,12
Тавровий	1,15
Двотавровий	1,20

**Таблиця 10. Значення питомого моменту опору**

Форма перерізу	Розрахункова формула	$\omega_k$
Круглий суцільний	$\omega_k = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$	0,282
Круглий кільцевий (товстостінний) ( $c < 0.909$ )	$\omega_k < \frac{1 + c^2}{2\sqrt{\pi(1 - c^2)}}$	$< 1,236$
Круглий кільцевий (тонкостінний) ( $c \geq 0.909$ )	$\omega_k \geq \frac{\sqrt{1 + c}}{2\sqrt{\pi(1 + c)}}$	$\geq 1,292$
Прямокутний: $k = 1; \alpha = 0.208$ $k = 1.5; \alpha = 0.231$ $k = 2.0; \alpha = 0.246$ $k = 10; \alpha = 0.313$	$\omega_k = \frac{\alpha}{\sqrt{k}}$	0,208 0,189 0,174 0,099
Швелерний (коритний)	---	0,04 – 0,05
Двотавровий	---	0,05 – 0,07

**Примітка.** Найбільш раціональними при крученні є перерізи з більшою характеристикою  $\omega_k$  – тонкостінні стержні замкненого контура. Нераціональними – тонкостінні стержні відкритого контура.

## Список використаної літератури

### Базова

1. *Писаренко Г.С.* **Опір матеріалів:** підручник для вузів. – К.: Вища школа, 2004. – 656 с.
2. *Зозуля В.В., Мартиненко А.В., Лукін А.Н.* **Механіка матеріалів.** – Харьков: НУВД, 2001. – 404 с.
3. *Шваб'юк В.І.* **Опір матеріалів:** Підручник. – К.: Знання, 2016. – 400 с.
4. *Корнілов О.А.* **Опір матеріалів.** – К.: Лотос, 2000. – 551с.
5. *Божидарник В.В., Сулим Г.Т.* **Елементи теорії пластичності та міцності:** Навч. посібник. – Львів: Світ, 1999. – 945 с.
6. *Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С.* **Опір матеріалів.** – К.: Вища школа, 2004. – 655 с.

### Допоміжна

7. *Горик О.В.* **Основи розрахунку інженерних конструкцій:** навч. посібник. – Полтава: ПДТУ, 2000. – 286 с.
8. *Ковтун В.В., Павлов В.С., Дорофєєв О.А.* **Опір матеріалів. Розрахункові роботи:** навч. посібник. – Львів: Афіша, 2002. – 280 с.
9. *Ольховий І.М., Стасюк Б.М., Станкевич В.З.* **Короткий курс опору матеріалів:** навч. посібник. – Серія «Дистанційне навчання». – Львів: Вид-во «Національний університет «Львівська політехніка», 2004. – 196 с.

## Предметний покажчик

		абсолютна поперечна	32
		відносна поздовжня	32
		відносна поперечна	32
		змішана	16
		лінійна	36
		пластична	16
		плоского згину	116
		пружна	16
		силова	16
		складна	21
		температурна	16
		<b>деформований стан</b>	16
		<b>Е</b>	
		<b>елемент</b>	16
		<b>енергія</b>	
		питома потенціальна	51
		<b>епюра</b>	25, 118
		<b>Ж</b>	
		<b>жорсткість</b>	16
		поперечного перерізу	34
		стрижня	34
		<b>З</b>	
		<b>закон</b>	
		Гука	21, 33
		<b>звуження</b>	
		відносне поперечне	48
		<b>згин</b>	21
		косий	117
		<b>зминання</b>	90
		<b>зовнішні фактори</b>	16
		<b>зсув</b>	20, 89
		чистий	85
		<b>зусилля</b>	
		монтажне	62
<b>Б</b>			
<b>балка</b>	115		
статично визначена	117		
статично невизначена	117		
<b>брус</b>	19		
<b>В</b>			
<b>вали</b>	134		
<b>вісь</b>			
головна	102		
центральна	99		
центральна головна	102		
<b>Г</b>			
<b>гіпотеза</b>			
Бернуллі	20		
ідеальної пружності	18		
незалежності дії сил	18		
однорідності	18		
плоских перерізів	20		
про невзаємодію паралельних шарів	19		
Сен-Венана	18		
суцільності	19		
<b>границя</b>			
міцності	48		
пропорційності	47		
пружності	47		
текучості	47		
<b>граничний стан</b>			
елемента	16		
конструкції	16		
<b>Д</b>			
<b>деформація</b>	16		
абсолютна поздовжня	32		

<b>К</b>		пружності	33
		Юнга	33
<b>коефіцієнт</b>		<b>момент</b>	
Пуассона	33	інерції відцентровий	99
<b>консоль</b>	117	інерції головний	102
<b>конструкція</b>	16	інерції осьовий	
<b>координата</b>		(екваторіальний)	99
центра ваги	99	інерції полярний	99
<b>критерій</b>		опору осьовий	104
міцності Мора	82	опору полярний	104
найбільших дотичних		площі статичний	98
напружень	80		
найбільших лінійних		<b>Н</b>	
деформацій	79	<b>навантаження</b>	16
найбільших нормальних		динамічне	18
напружень	79	статичне	18
питомої енергії деформації		<b>напруження</b>	24
зміни форми	80	головне	68
<b>кручення</b>	21, 134	дійсне розривне	48
<b>кут</b>		допустиме	30
закручування	134	монтажне	62
закручування відносний	135	розривне	48
зсуву	135	<b>небезпечний</b>	
		переріз	25
<b>Л</b>			
<b>лінія</b>		<b>О</b>	
нейтральна	123	<b>об'єкт</b>	
		реальний	21
<b>М</b>		<b>оболонка</b>	19
<b>масивне тіло</b>	19	<b>опір</b>	
<b>матеріал</b>		згину	115
анізотропний	19	плоскому (прямому) згину	115
ізотропний	19	плоскому чистому згину	116
<b>метод</b>		чистому згину	116
перерізів	22	<b>опір матеріалів</b>	16
<b>міцність</b>	16		
<b>модель</b>	17	<b>П</b>	
математична	17	<b>питома робота</b>	
розрахункова	22	деформацій	51
фізична	17	<b>пластина</b>	19
<b>моделювання</b>	17	<b>площадка</b>	
<b>модуль</b>			

головна	68
октаедрична	76
<b>площина</b>	
силова	116
<b>подовження</b>	
відносне залишкове	48
<b>принцип</b>	
початкових розмірів	21
суперпозиції	18
<b>проектування</b>	
раціональне	41
<b>прольот</b>	117
<b>пружність</b>	19

## Р

<b>радіус</b>	
інерції	100
<b>розвантаження</b>	16
<b>розтяг</b>	20
осьовий	26
<b>руйнування</b>	16

## С

<b>сила</b>	
внутрішня	17
згинальна	115
зовнішня	17
<b>система</b>	
статично визначена	152

статично невизначена	56
<b>стиск</b>	20
осьовий	26
<b>стійкість</b>	17
<b>стрижень</b>	19
однакового опору	39
рівноміцний	39

## Т

<b>теорія міцності</b>	
друга	79
перша	79
третя	80
четверта	80

## Х

<b>характеристика</b>	
абсолютна геометрична	98
відносна геометрична	98
міцності	47
пластичності	48

## Ш

<b>шар</b>	
нейтральний	122

Навчальне видання

*Філімоніхін Геннадій Борисович*  
*Пирогов Володимир Васильович*  
*Олійніченко Любов Сергіївна*

## **ОПІР МАТЕРІАЛІВ**

### **ЧАСТИНА 1**

**Навчальний посібник**

Технічний редактор – В.В. Пирогов

Комп'ютерний набір  
кафедра ДМ та ПМ  
т. (0522) 390-547

Підп. до друку 2024 Формат 60x84 1/16 (А5). Папір друк №3. Друк офсетний.  
Умов. друк. арк. Ум.фарбо-відб. Облік.-вид.арк. . Тираж 100 прим.

Зам.№

---

Центральноукраїнський національний технічний університет  
25030, м. Кропивницький. пр. Університетський, 8

## Автори:



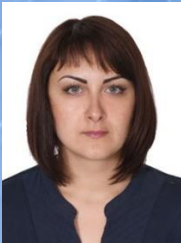
доктор технічних наук, професор,  
**Філімоніхін Геннадій Борисович**\*,  
професор кафедри деталей машин та прикладної механіки,

doctor of technical sciences, professor,  
**Filimonikhin Gennadiy Borisovich**,  
professor of the chair of machine parts and applied mechanics  
filimonikhin@ukr.net;



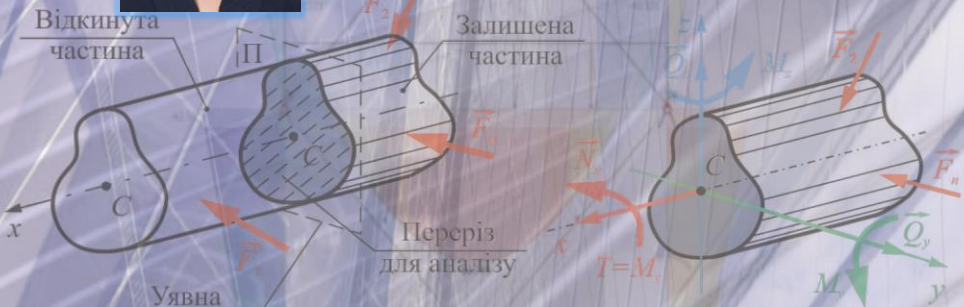
кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
**Пірогов Володимир Васильович**,  
доцент кафедри деталей машин та прикладної механіки,

candidate of physical and mathematical sciences, associate professor  
**Pirogov Vladimir Vasilyevich**,  
associate professor of the chair of machine parts and applied  
mechanics,  
pirogovvv@ukr.net;



кандидат технічних наук,  
**Олійніченко Любов Сергіївна**\*,  
старший викладач кафедри деталей машин та прикладної  
механіки.

candidate of technical sciences,  
**Oliijnichenko Lubov Sergijivna**,  
senior lecturer of the chair of machine parts and applied mechanics,  
loga\_lubov@ukr.net.



\*Централноукраїнський національний технічний університет,  
Проспект університетський, 8, м. Кропивницький, 25030, Україна,  
т.: (+380522) 390-547

Central ukrainian national technical university,  
Prospekt universitetskij, 8, city Kropivnitskij, 25030, Ukraine,  
t.: (+380522) 390-547