

**ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Кафедра вищої математики та фізики

**ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ
ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ТА ДЕЯКІ
ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ
ІНТЕГРАЛІВ**

Навчальний посібник

**КРОПИВНИЦЬКИЙ
2020**

УДК 51

Рецензенти:

доктор технічних наук, професор Г. Б. Філімоніхін
кандидат фіз.-мат наук, доцент С. Д. Парашук

Інтегральне числення функції однієї змінної та деякі застосування визначених інтегралів. Навчальний посібник. Укл.: С.М.Якименко, М.С.Якименко, В.І.Гуцул – Кропивницький: ЦНТУ, 2020 р. – 174 с.

Укладачі:

Якименко Сергій Миколайович	- канд. фіз.-матем. наук, доц.
Якименко Микола Сергійович	- канд. фіз.-матем. наук, доц
Гуцул Василь Іванович	- канд. техн. наук, доц.

Навчальний посібник складається з розділів «Невизначений інтеграл», «Визначений інтеграл», «Застосування визначених інтегралів», «Невласні інтеграли» курсу «Вища математика». Посібник містить індивідуальні завдання та зразок їх виконання. Призначений для студентів денної та заочної форм навчання.

Рекомендовано до друку
Вченою радою ЦНТУ
Міністерства освіти та
науки України.
Протокол № 6 від
02.03.2020 р.

© С.М.Якименко
© М.С.Якименко
© В.І.Гуцул
© ЦНТУ, 2020

Невизначений інтеграл	4
Невизначений інтеграл та його властивості	4
Методи інтегрування	9
Інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен	14
Інтегрування раціональних дробів	18
Інтегрування деяких тригонометричних функцій	25
Інтегрування деяких ірраціональних функцій	33
Інтегрування біноміальних диференціалів	35
Квадратичні ірраціональності. Тригонометрична підстановка	36
Інтегралів, що не виражаються через елементарні функції	38
Визначений інтеграл	40
Визначений інтеграл та його властивості	40
Обчислення визначеного інтеграла	47
Наближене обчислення визначеного інтеграла	54
Застосування визначених інтегралів	62
Обчислення площ плоских фігур	62
Обчислення довжини дуги кривої	66
Обчислення об'єму тіла по відомих площах його паралельних перетинів	69
Обчислення об'єму тіл обертання	71
Обчислення площі поверхні тіла обертання	73
Обчислення роботи та деякі задачі механіки рідин	75
Обчислення статичних моментів і моментів інерції плоских дуг і фігур	79
Обчислення координат центру мас	81
Невласні інтеграли	83
Невласні інтеграли з нескінченими межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду)	83
Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду)	86
Ознаки порівняння невластних інтегралів	89
Зразок виконання індивідуального домашнього завдання	92
Індивідуальні завдання	113
Література	172

Невизначений інтеграл

Невизначений інтеграл та його властивості.

Первісна і невизначений інтеграл.

Раніше ми розглядали таку задачу: для заданої функції $F(x)$ знайти її похідну $f(x)$. Основна задача диференціального числення – це задача про знаходження похідної і безпосередньо зв'язана з нею задача про знаходження диференціалу заданої функції. Похідна від будь-якої елементарної функції обчислюється за стандартними правилами і є елементарною функцією.

Основна задача інтегрального числення – це задача про знаходження первісної для заданої функції, тобто про знаходження функції по заданій її похідній. Ця задача складніша, ніж задача диференціювання.

Означення: Функція $F(x)$ називається **первісною** від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо в будь-якій точці цього відрізка виконується рівність:

$$F'(x) = f(x).$$

Наприклад, для функції $\cos x$ первісною на всій числовій осі служить функція $\sin x$, тому що $(\sin x)' = \cos x$.

Зауважимо, що якщо для заданої функції $f(x)$ існує первісна, то вона не єдина.

Нехай функція $f(x)$ має дві первісні $F_1(x)$, $F_2(x)$, тоді за означенням

$$F_1'(x) = f(x), \quad F_2'(x) = f(x).$$

Віднявши, одержимо

$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0, \quad [F_1'(x) - F_2'(x)]' = 0,$$

$$F_1(x) - F_2(x) = \text{const}, \quad F_1(x) = F_2(x) + \text{const}.$$

Таким чином, будь-які дві первісних до однієї і тієї ж функції відрізняються друг від друга на постійну величину. Первісних для однієї й тієї ж функції може бути нескінченно багато. Вони будуть відрізнятися друг від друга на деяке постійне число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Означення: Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x) + C$ називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функцію $f(x)$ називають підінтегральною функцією, $f(x)dx$ - підінтегральним виразом, змінна x - змінна інтегрування.

Відновлення функції по її похідній, або, що теж саме, знаходження невизначеного інтегралу по заданій підінтегральній функції, називається інтегруванням цієї функції.

Умовою існування невизначеного інтеграла на деякому відрізку є неперервність функції на цьому відрізку.

Для того, щоб перевірити, чи правильно виконано інтегрування, потрібно продиференціювати результат і одержати при цьому підінтегральну функцію.

Основні властивості невизначеного інтегралу.

Із означення невизначеного інтегралу безпосередньо випливають наступні властивості:

1. Похідна від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральній

функції:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

2. Диференціал від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральному виразу:

$$d \left(\int f(x) dx \right) = \left(\int f(x) dx \right)' dx = f(x) dx.$$

3. Невизначений інтеграл від диференціалу деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної постійної:

$$\int dF(x) = \int F'(x) dx = F(x) + C.$$

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох або декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

5. Постійний множник можна виносити за знак невизначеного інтегралу:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx, \quad k = \text{const.}$$

При обчисленні невизначених інтегралів іноді корисно знати наступні правила. Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, то

$$1) \int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C;$$

$$2) \int f(x + b) dx = F(x + b) + C;$$

$$3) \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C,$$

де a , b - постійні величини. Ці рівності доводяться диференціюванням лівих і правих частин.

Знаходження значення невизначеного інтеграла зв'язано

головним чином зі знаходженням первісної функції. Для деяких функцій це досить складна задача. Нижче будуть розглянуті способи знаходження невизначених інтегралів для основних класів функцій - раціональних, ірраціональних, тригонометричних, показникових і ін.

Для зручності значення невизначених інтегралів більшості елементарних функцій зібрані в спеціальні таблиці інтегралів, які бувають іноді досить об'ємними. У них включені різні комбінації функцій, що найбільш часто зустрічаються. Але більшість представлених у цих таблицях формул є наслідками один одного, тому нижче приведемо таблицю основних інтегралів, за допомогою якої можна одержати значення невизначених інтегралів різних функцій.

Таблиця основних інтегралів.

$$(\alpha, a, C = \text{const})$$

$$1. \int a \cdot dx = ax + C. \quad 2. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1).$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \quad 4. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 1). \quad 6. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C. \quad 8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C. \quad 10. \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C.$$

$$11. \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C. \quad 12. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C. \quad 16. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$17. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C. \quad 18. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$19. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \quad 20. \int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$21. \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C. \quad 22. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$23. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

Приклад. Знайти невизначені інтеграли:

- 1) $\int (4x^3 - 3 \sin x + 1) dx = 4 \int x^3 dx - 3 \int \sin x \, dx + \int dx =$
 $= x^4 + 3 \cos x + x + C.$
- 2) $\int \frac{dx}{x^2 + 5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$
- 3) $\int \frac{dx}{\sin^2 7x} = -\frac{1}{7} \operatorname{ctg} 7x + C.$
- 4) $\int \cos(3x + 4) dx = \frac{1}{3} \sin(3x + 4) + C.$
- 5) $\int \frac{dx}{x-5} = \ln|x-5| + C.$

Методи інтегрування

Безпосереднє інтегрування.

Для обчислення інтегралу необхідно, якщо це можливо, користуючись тими або іншими способами, привести його до табличного інтегралу і таким чином знайти шуканий результат. Обчислення інтегралів за допомогою безпосереднього використання таблиці інтегралів та основних властивостей невизначеного інтегралу називається безпосереднім інтегруванням.

Приклад. Знайти невизначені інтеграли:

$$\begin{aligned} 1) \int \left(\frac{x-2}{x} \right)^3 dx &= \int \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3} dx = \\ &= \int \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2} - \frac{8}{x^3} \right) dx = x - 6 \ln|x| - \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} + C. \end{aligned}$$

$$2) \int t g^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = t g x - x + C.$$

Зауважимо, що на відміну від диференціювання, де для знаходження похідної використовувалися чіткі прийоми й методи знаходження похідних, для інтегрування такі методи недоступні. Якщо при знаходженні похідної ми користувалися, так сказати, конструктивними методами, які, базуючись на певних правилах, приводили до результату, то при знаходженні первісної доводиться в основному опиратися на знання таблиці похідних і таблиці інтегралів.

Що стосується методу безпосереднього інтегрування, то його можна застосовувати тільки для деяких досить обмежених класів функцій. Функцій, для яких можна з ходу знайти первісну дуже мало.

Тому в більшості випадків застосовуються способи, описані нижче.

Спосіб підстановки (заміни змінних) в невизначеному інтегралі.

В багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дає можливість звести знаходження заданого інтегралу до знаходження табличного інтегралу, тобто перейти до безпосереднього інтегрування. Такий метод називається методом підстановки або методом заміни змінної.

Нехай потрібно обчислити інтеграл $\int f(x)dx$, де $f(x)$ - складна функція. Зробимо заміну змінної $x = \phi(t)$, де $\phi(t)$ - неперервна функція з неперервною похідною, яка має обернену функцію. Знайдемо диференціал $dx = \phi'(t)dt$. Доведемо, що

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt. \quad (*)$$

Покажемо, що рівні похідні лівої і правої частин.

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

Праву частину про диференціюємо по x як складну функцію

$$\begin{aligned} x'_t = \phi'(t), \quad t'_x = \frac{1}{\phi'(t)}, \\ \left(\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt \right)'_x = \left(\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt \right)'_t \cdot t'_x = \\ = f[\phi(t)]\phi'(t) \cdot \frac{1}{\phi'(t)} = f[\phi(t)] = f(x). \end{aligned}$$

Так як похідні по x від лівої і правої частин рівні, отже, виконується рівність (*)

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned} 1) \int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sin x, \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int \sqrt{t} \, dt = \\ &= \int t^{\frac{1}{2}} \, dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{x^4 \, dx}{6 + x^5} &= \left| \begin{array}{l} t = 6 + x^5, \\ dt = 5x^4 \, dx, \quad x^4 \, dx = \frac{dt}{5} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5} \ln|t| + C = \frac{1}{5} \ln|6 + x^5| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int e^{\cos^2 x} \sin 2x \, dx &= \\ &= \left| \begin{array}{l} t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x} \cdot 2 \cos x \sin x \, dx = \\ = -\sin 2x \cdot e^{\cos^2 x} \, dx \end{array} \right| = \\ &= - \int dt = -t + C = -e^{\cos^2 x} + C. \end{aligned}$$

Зауваження. Одним з варіантів методу заміни змінної є спосіб підведення під знак диференціала, що полягає в перетворенні:

$$\int f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt = \int f(\phi) \, d\phi.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$1) \int \frac{\ln^4 x \, dx}{x} = \int \ln^4 x \cdot (\ln x)' \, dx = \int \ln^4 x \, d \ln x = \frac{\ln^5 x}{5} + C.$$

$$2) \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot (\operatorname{tg} x - 7)} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x - 7)}{\operatorname{tg} x - 7} = \ln|\operatorname{tg} x - 7| + C.$$

Інтегрування частинами в невизначеному інтегралі.

Спосіб інтегрування частинами заснований на відомій формулі диференціалу добутку двох функцій:

$$d(uv) = u dv + v du$$

Проінтегрувавши, одержуємо: $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$, а відповідно до наведених вище властивостей невизначеного інтеграла, маємо

$$uv = \int u dv + \int v du$$

або

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Одержали формулу інтегрування частинами, що дозволяє знаходити інтеграли багатьох елементарних функцій. Ця формула дозволяє звести задачу обчислення інтеграла $\int u dv$ до обчислення інтеграла $\int v du$, який може виявитися простішим. За функцію u , як правило, береться така функція, яка при диференціюванні краще спрощується, а за dv - та частина (остальна) підінтегрального виразу, інтеграл від якої відомий або може бути знайденим. Не можна вибирати u й dv довільно, інакше можна одержати ще більш складний інтеграл. Метод інтегрування частинами дозволяє обчислювати, наприклад, інтеграли типу

(а) $\int x^k \sin x \, dx$, $\int x^k \cos x \, dx$, $\int x^k e^x \, dx$;

(б) $\int x^k \arcsin x \, dx$, $\int x^k \arctg x \, dx$, $\int x^k \ln x \, dx$;

(с) $\int e^x \sin x \, dx$, $\int e^x \cos x \, dx$,

а також подібні їм. У випадку (а) варто взяти за $u = x^k$; у випадку (б) – $dv = x^k dx$; у випадку (с) – $u = e^x$. При цьому для інтегралів виду (а) і (б) потрібно рівно k раз застосовувати формулу інтегрування

частинами, а для інтегралів виду (с) потрібне дворазове застосування формули.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned} 1) \int x \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x; \quad dv = x dx; \\ du = \frac{1}{x} dx; \quad v = \frac{x^2}{2}; \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int x^2 \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \sin x \, dx; \\ du = 2x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \cos x \, dx; \\ du = dx; \quad v = \sin x \end{array} \right| = \\ &= -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x \, dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + \\ &+ 2 \cos x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int e^x \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = e^x; \quad du = e^x dx; \\ dv = \cos x \, dx; \quad v = \sin x \end{array} \right| = \\ &= e^x \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x; \quad du = e^x dx; \\ dv = \sin x \, dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= e^x \sin x - \left[-e^x \cos x - \int -\cos x \cdot e^x dx \right] \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int \cos x \, e^x dx \end{aligned}$$

Видно, що в результаті повторного застосування інтегрування частинами функцію не вдалося спростити до табличного вигляду. Однак, останній отриманий інтеграл нічим не відрізняється від заданого. Тому перенесемо його в ліву частину рівності.

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x (\sin x + \cos x)$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C.$$

$$4) I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При $n = 1$ маємо табличний інтеграл.

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \left| \begin{array}{l} u = (x^2 + 1)^{-n}; \quad dv = dx; \\ du = -\frac{2nxdx}{(x^2 + 1)^{n+1}}; \quad v = x \end{array} \right| = \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Перетворимо інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^{n+1}} &= \int \frac{x^2 + 1 - 1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} - \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}} \\ &= I_n - I_{n+1}. \end{aligned}$$

Тоді $I_n = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$. Звідси одержимо

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2 + 1)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n.$$

Ця формула зводить обчислення інтеграла I_{n+1} до обчислення інтеграла I_n з меншим на одиницю показником степеня. Формули такого типу називають рекурентними.

Інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен

а) Розглянемо інтеграл

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Виділивши повний квадрат в знаменнику

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = \\
 &= a \left[x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] = \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right], \text{ де } k^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2},
 \end{aligned}$$

одержимо

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2} = \left| t = x + \frac{b}{2a}; \right| dt = dx = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}.$$

Тобто заданий інтеграл привели до табличних інтегралів.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25} &= \int \frac{dx}{x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 + 25} = \int \frac{dx}{(x - 3)^2 + 16} = \\
 &= \left| t = x - 3; \right| dt = dx = \int \frac{dt}{t^2 + 4^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t}{4} + C = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left(\frac{x - 3}{4} \right) + C.
 \end{aligned}$$

б) Розглянемо інтеграл

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Виділимо в чисельнику похідну знаменника

$$\begin{aligned}
 \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right)}{ax^2 + bx + c} dx = \\
 &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.
 \end{aligned}$$

Другий інтеграл обчислювати вміємо. В першому інтегралі, зробивши заміну, одержимо

$$\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \left| \frac{t = ax^2 + bx + c;}{dt = (2ax + b)dx} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|ax^2 + bx + c| + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{(3x - 2)}{5x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{\frac{3}{10}(10x - 3) - 2 + \frac{9}{10}}{5x^2 - 3x + 2} dx =$$

$$= \frac{3}{10} \int \frac{10x - 3}{5x^2 - 3x + 2} dx - \frac{11}{10} \int \frac{dx}{5x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{10} \ln|5x^2 - 3x + 2| -$$

$$- \frac{11}{10 \cdot 5} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}} = \frac{3}{10} \ln|5x^2 - 3x + 2| -$$

$$- \frac{11}{50} \int \frac{dx}{x^2 - 2 \cdot \frac{3}{10}x + \left(\frac{3}{10}\right)^2 - \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \frac{2}{5}} = \frac{3}{10} \ln|5x^2 - 3x + 2| -$$

$$- \frac{11}{50} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{31}{100}} = \frac{3}{10} \ln|5x^2 - 3x + 2| -$$

$$- \frac{11}{5\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{10x - 3}{\sqrt{31}} + C.$$

в) Розглянемо інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Виділяючи під радикалом повний квадрат, як це було в п. а),
прийдемо до одного з табличних інтегралів вигляду

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} \quad \text{при } a > 0, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} \quad \text{при } a < 0.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x - 1 + 9}} = \\ &= \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9 - (x+1)^2}} = \left| \begin{matrix} x+1 = t; \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{3} + C = \arcsin \frac{x+1}{3} + C. \end{aligned}$$

г) Розглянемо інтеграл

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Виділяючи в чисельнику, похідну підкореневого виразу, аналогічно п. б), одержимо два інтеграли.

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \\ &+ \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \end{aligned}$$

Другий інтеграл розглядали в п. в). А в першому інтегралі зробивши заміну, одержимо

$$\begin{aligned} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx &= \left| \begin{matrix} t = ax^2 + bx + c; \\ dt = (2ax + b)dx \end{matrix} \right| = \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ax^2 + bx + c} + C. \end{aligned}$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+4}{\sqrt{7+6x-x^2}} dx &= \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}} dx = \left| \begin{matrix} u = x-3; du = dx; \\ x = u+3 \end{matrix} \right| = \\
&= \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}} du = 3 \int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} + 13 \int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = \\
&= -3\sqrt{16-u^2} + 13 \arcsin \frac{u}{4} + C = \\
&= -3\sqrt{7-x^2-6x} + 13 \arcsin \frac{x-3}{4} + C.
\end{aligned}$$

Інтегрування раціональних дробів

Прості (елементарні) раціональні дроби та їх інтегрування.

Важливий клас функцій, інтеграли від яких завжди виражаються через елементарні функції, утворюють раціональні функції, тобто функції, які можна представити у вигляді дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$, $Q(x)$ - многочлени.

Якщо степінь многочлена в чисельнику нижче степеня многочлена в знаменнику, то дріб називається правильним, в протилежному випадку – неправильним.

Якщо дріб неправильний, то виконавши ділення многочленів (чисельник на знаменник), одержимо

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = f(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

де $f(x)$ - деякий многочлен, $\frac{R(x)}{Q(x)}$ - правильний дріб.

Інтегрування многочленів виконується просто. Основна трудність при інтегруванні раціональних дробів заключається в інтегруванні правильних раціональних дробів.

Означення. Правильні раціональні дробу вигляду:

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \frac{A}{x-a}; & \text{II. } \frac{A}{(x-a)^m}; \\ \text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; & \text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}. \end{array}$$

де m, n – натуральні числа ($m \geq 2; n \geq 2$) і $q - \frac{p^2}{4} > 0$, називаються простими (елементарними) дробами відповідно I, II, III, IV типів.

Розглянемо інтеграли від простих дробів. Інтегрування простих дробів I, II типів не викликає труднощів.

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^m} &= A \int (x-a)^{-m} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C = \\ &= \frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C. \end{aligned}$$

Інтеграл $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ - обчислювали в попередній лекції.

Розглянемо тепер методи інтегрування простих дробів IV типу.

Виділимо в чисельнику похідну виразу, який стоїть в знаменнику в дужках, і розіб'ємо на два інтеграли.

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}. \end{aligned}$$

Обчислимо перший інтеграл.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx &= \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} = \\ &= \frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + C. \end{aligned}$$

Обчислимо другий інтеграл, виділивши в знаменнику в дужках повний квадрат.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n} &= \int \frac{dx}{\left[\left(x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} \right) + q - \frac{p^2}{4} \right]^n} = \\
 &= \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + q - \frac{p^2}{4} \right]^n} = \frac{1}{\left(q - \frac{p^2}{4} \right)^n} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \right)^2 + 1 \right]^n} = \\
 &= \left| \begin{array}{l} t = \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}; \quad x = t \cdot \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2}; \\ dx = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} dt \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{\left(q - \frac{p^2}{4} \right)^n} \int \frac{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} dt}{(t^2 + 1)^n} = \frac{1}{\left(q - \frac{p^2}{4} \right)^{n-\frac{1}{2}}} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}.
 \end{aligned}$$

Для обчислення цього інтегралу застосовують рекурентну формулу попередньої лекції.

Зауваження. При практичному обчисленні інтегралу від простого дробу IV типу заміну

$$t = \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}.$$

можна застосувати на самому початку обчислення.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned}
& \int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x-1}{\sqrt{5-1}} = \frac{x-1}{2}; \\ x = 2t+1; \quad dx = 2dt \end{array} \right| = \\
& = \int \frac{5(2t+1)+3}{[(2t+1)^2-2(2t+1)+5]^2} 2dt = \frac{1}{4} \int \frac{5t+4}{(t^2+1)^2} dt = \\
& = \frac{5}{4} \int \frac{tdt}{(t^2+1)^2} + \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{5}{8} \int (t^2+1)^{-2} d(t^2+1) + \\
& + \frac{t}{2(t^2+1)} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{t^2+1} + \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \arctg t + \\
& + C = \frac{4t-5}{8(t^2+1)} + \frac{1}{2} \arctg t + C = \frac{2x-7}{2(x^2-2x+5)} + \frac{1}{2} \arctg \frac{x-1}{2} + C.
\end{aligned}$$

Розклад правильного раціонального дробу на прості.

Розглянемо правильний раціональний дріб $\frac{R(x)}{Q(x)}$. Будемо вважати, що коефіцієнти дійсні і що даний дріб не скорочується, тобто чисельник і знаменник не мають спільних коренів. Розкладемо многочлен в знаменнику на множники з дійсними коефіцієнтами першого і другого степеня відповідної кратності.

$$Q(x) = a_0(x-a)^\alpha \dots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\lambda \dots (x^2+rx+s)^\mu.$$

Теорема: Будь-який правильний раціональний дріб можна представити єдиним чином у вигляді суми простих раціональних дробів

$$\begin{aligned}
\frac{R(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1}{(x-b)} + \\
&+ \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \\
&+ \dots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \dots + \frac{P_1x+S_1}{x^2+rx+s} +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{P_2 x + S_2}{(x^2 + rx + s)^2} + \dots + \frac{P_\mu x + S_\mu}{(x^2 + rx + s)^\mu}.$$

де $A_i, B_i, M_i, N_i, P_i, S_i$ – деякі постійні величини, які потрібно знайти.

Знайдемо невідомі коефіцієнти. Звівши дробу до спільного знаменника, одержимо тотожні многочлени в чисельниках зліва і справа. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів $A_i, B_i, M_i, N_i, P_i, S_i$. Цей метод знаходження коефіцієнтів називається методом невизначених коефіцієнтів.

Інтегрування раціональних дробів.

Нехай необхідно обчислити інтеграл $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$. Якщо даний дріб неправильний, то необхідно представити його у вигляді суми многочлена $f(x)$ і правильного раціонального дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Правильний раціональний дріб необхідно представити у вигляді суми простих (елементарних) дробів.

Таким чином, інтегрування будь-якого раціонального дробу зводиться до інтегрування многочлена і скінченного числа простих дробів, інтеграли від яких обчислювати вміємо.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx$.

Раціональний дріб правильний, тому розкладемо підінтегральну функцію на суму простих дробів:

$$\frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2}.$$

В правій частині зведемо дроби до спільного знаменника

$$\frac{A(x-1)(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x-1)}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^3 + (A+B-2C+D)x^2 + (2B+C-2D)x - 2A+2B+D}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в чисельниках ліворуч і праворуч, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (відносно A, B, C, D):

$$\begin{array}{rcl} x^3 & A + C & = 0 \\ x^2 & A + B - 2C + D & = 1 \\ x & 2B + C - 2D & = -5 \\ 1 & -2A + 2B + D & = 9 \end{array}$$

Розв'язавши систему рівнянь, знайдемо

$$A = -\frac{7}{5}, \quad B = 1, \quad C = \frac{7}{5}, \quad D = \frac{21}{5}.$$

Повернемось до обчислення інтеграла:

$$\int \frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} dx = -\frac{7}{5} \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} +$$

$$+ \frac{7}{5} \int \frac{xdx}{x^2+2x+2} + \frac{21}{5} \int \frac{dx}{x^2+2x+2} = -\frac{7}{5} \ln |x-1| -$$

$$-\frac{1}{x-1} + \frac{7}{10} \ln(x^2+2x+2) + \frac{14}{5} \arctg(x+1) + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx.$

Так як дріб неправильний, то виділимо цілу частину, поділивши чисельник на знаменник. Одержимо

$$\begin{array}{r}
\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^5 - 4x^3} \quad \left| \begin{array}{l} x^3 - 4x \\ x^2 + x + 4 \end{array} \right. \\
- \frac{x^4 + 4x^3 - 8}{x^4 - 4x^2} \\
- \frac{4x^3 + 4x^2 - 8}{4x^3 - 16x} \\
4x^2 + 16x - 8
\end{array}$$

Тоді інтеграл перепишеться

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} \right) dx.$$

Спочатку розкладемо знаменник одержаного дробу на множники, а потім правильний раціональний дріб розкладемо на прості дробі.

$$\begin{aligned}
\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} &= \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \\
&= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{x^2(A+B+C) + x(2B-2C) - 4A}{x(x-2)(x+2)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B+C=4; \\ 2B-2C=16; \\ -4A=-8. \end{cases}$$

$$A=2; \quad B=5; \quad C=-3.$$

Повернемось до обчислення інтеграла:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} \right) dx = \\
&= \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \ln|x| + \\
&+ 5 \ln|x-2| - 3 \ln|x+2| + C = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + C.
\end{aligned}$$

Інтегрування деяких тригонометричних функцій

Інтегралів від тригонометричних функцій може бути нескінченно багато. Більшість із цих інтегралів взагалі не можна обчислити аналітично, тому розглянемо деякі найголовніші типи функцій, які можуть бути проінтегровані завжди.

Універсальна тригонометрична підстановка.

Розглянемо інтеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$. де R - позначення деякої раціональної функції від аргументів $\sin x$ і $\cos x$. Інтеграли такого вигляду приводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$$t = tg \frac{x}{2}.$$

Виразимо $\sin x$ і $\cos x$ через $tg \frac{x}{2}$ і знайдемо dx :

$$\sin x = \frac{2 tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$
$$x = 2 \arctg t; \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Таким способом прийдемо до інтеграла від раціональної функції:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2}{1 + t^2} dt.$$

Безумовним досягненням цієї підстановки є те, що з її допомогою завжди можна перетворити тригонометричну функцію в раціональну й обчислити відповідний інтеграл. Але на практиці можна

одержати досить складну раціональну функцію, інтегрування якої займе багато часу й сил. Тому корисно знати і інші частинні підстановки, при застосуванні яких іноді простіше обчислити інтеграл.

Однак при неможливості застосувати більше раціональну заміну змінної цей метод є єдино результативним.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} &= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad x = 2 \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2 \int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = \\ &= -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} + C. \end{aligned}$$

Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

Якщо $R(\sin x, \cos x)$ - непарна функція відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то незважаючи на можливість обчислення такого інтеграла за допомогою універсальної тригонометричної підстановки, раціональніше застосувати підстановку $t = \cos x$.

Взагалі кажучи, для застосування цього методу необхідна тільки непарність функції щодо синуса, а степінь косинуса, що входить у функцію може бути будь-який, як цілий, так і дробовий.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx &= \left| \begin{array}{l} \cos x = t; \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right| = - \int \frac{1 - t^2}{2 + t} dt = \\
 &= \int \frac{t^2 + 4t + 4 - 4t - 5}{t + 2} dt = \int \left[\frac{(t + 2)^2 - 4t - 5}{t + 2} \right] dt = \\
 &= \int \left[t + 2 - \frac{4t}{t + 2} - \frac{5}{t + 2} \right] dt = \int t dt + \int 2 dt - 4 \int \frac{t dt}{t + 2} - \\
 &\quad - 5 \int \frac{dt}{t + 2} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5 \ln|t + 2| - 4 \int \frac{t}{t + 2} dt = \\
 &= \frac{t^2}{2} + 2t - 5 \ln|t + 2| + 8 \int \frac{dt}{t + 2} - 4 \int dt = \\
 &= \frac{t^2}{2} + 2t - 5 \ln|t + 2| + 8 \ln|t + 2| - 4t + C = \\
 &= \frac{t^2}{2} - 2t + 3 \ln|t + 2| + C = \\
 &= \frac{\cos^2 x}{2} - 2 \cos x + 3 \ln(\cos x + 2) + C.
 \end{aligned}$$

Якщо $R(\sin x, \cos x)$ - непарна функція відносно $\cos x$, тобто $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то раціональніше застосувати підстановку $t = \sin x$.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\cos^5 x \, dx}{\sin^4 x} &= \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x \, dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right| = \int \frac{(1 - t^2)^2}{t^4} dt = \\
 &= \int \frac{1 - 2t^2 + t^4}{t^4} dt = \int \frac{dt}{t^4} - 2 \int \frac{dt}{t^2} + \int dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{2}{t} + t + C = \\
 &= -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x + C.
 \end{aligned}$$

Якщо $R(\sin x, \cos x)$ - парна функція відносно $\sin x$ і $\cos x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то раціональніше застосувати підстановку $t = \operatorname{tg} x$.

Тоді

$$x = \arctg t; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}; \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 16 \cos^2 x} &= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg} x - 16} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = d(\operatorname{tg} x) = dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \\ &= \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 3 - 5}{\operatorname{tg} x + 3 + 5} \right| + C = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 8} \right| + C. \end{aligned}$$

Інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

Якщо число m - непарне, то раціональніше застосувати підстановку $t = \cos x$, якщо ж n - непарне, то робиться підстанова $t = \sin x$.

Якщо m, n - парні додатні числа, то необхідно за допомогою відомих формул

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x; \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

понизити показники степеня до першого степеня і обчислити інтеграли вигляду $\int \cos k x dx$.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^5 x dx &= \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x; \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| = \\ &= \int t^4 (1 - t^2)^2 dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = \frac{t^5}{5} - 2 \cdot \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \\ &= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C.\end{aligned}$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^4 x dx &= \int (\sin x \cos x)^4 dx = \frac{1}{16} \int (\sin^2 2x)^2 dx = \\ &= \frac{1}{16} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{64} \int (1 - 2 \cos 4x + \cos^2 4x) dx = \\ &= \frac{1}{64} \left(x - \frac{1}{2} \sin 4x + \int \frac{1 + \cos 8x}{2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{64} \left(x - \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{16} \sin 8x \right) + C = \\ &= \frac{1}{64} \left(\frac{3}{2} x - \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{16} \sin 8x \right) + C.\end{aligned}$$

Інтеграли вигляду

$$\int \cos m x \cos n x dx, \quad \int \sin m x \cos n x dx, \quad \int \sin m x \sin n x dx.$$

Щоб обчислити інтеграли такого вигляду необхідно за

допомогою відомих формул перетворити добутки тригонометричних функцій в їх суму (різницю).

$$\begin{aligned}\int \cos m x \cos n x dx &= \int \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right] + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sin m x \cos n x dx &= \int \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right] + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sin m x \sin n x dx &= \int \frac{1}{2} [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right] + C.\end{aligned}$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned}\int \sin 5 x \sin 2 x dx &= \frac{1}{2} \int \cos 3 x dx - \frac{1}{2} \int \cos 7 x dx = \\ &= \frac{1}{6} \sin 3 x - \frac{1}{14} \sin 7 x + C.\end{aligned}$$

Інтеграли вигляду $\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$, де n - ціле
додатнє число.

Для обчислення цих інтегралів поступово знижуємо показник степеня за допомогою формул:

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1; \quad ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned} \int tg^5 x \, dx &= \int tg^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x} dx - \int tg^3 x \, dx = \\ &= \int tg^3 x \, d(tg x) - \int tg x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{tg^4 x}{4} - \int tg x \, d(tg x) + \\ &+ \int tg x \, dx = \frac{1}{4}tg^4 x - \frac{1}{2}tg^2 x - \ln|\cos x| + C. \end{aligned}$$

Інтеграли вигляду $\int tg^m x \sec^n x \, dx, \int ctg^m x \operatorname{cosec}^n x \, dx,$

де n - парне додатнє число.

Такі інтеграли знаходяться аналогічно за допомогою попередніх формул.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned} \int ctg^7 x \cdot \operatorname{cosec}^4 x \, dx &= \int ctg^7 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = \\ &= \int ctg^7 x \cdot (ctg^2 x + 1) d(-ctg x) = - \int (ctg^9 x + ctg^7 x) d(ctg x) = \\ &= -\frac{1}{10}ctg^{10} x - \frac{1}{8}ctg^8 x + C. \end{aligned}$$

Інтеграли вигляду $\int \sec^{2p+1} x \, dx, \quad \int \operatorname{cosec}^{2p+1} x \, dx.$

Такі інтеграли знаходяться за рекурентними формулами.
Виведемо їх.

$$\begin{aligned}
 \int \sec^{2p+1} x \, dx &= \int \frac{dx}{\cos^{2p+1} x} = \int \frac{dx}{\cos^{2p-1} x \cdot \cos^2 x} = \\
 &= \left| u = \frac{1}{\cos^{2p-1} x}; \quad dv = \frac{dx}{\cos^2 x}; \right. \\
 &\quad \left. du = (2p-1) \frac{\sin x}{\cos^{2p} x} dx; \quad v = \operatorname{tg} x \right| = \frac{\sin x}{\cos^{2p} x} - \\
 &- (2p-1) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^{2p+1} x} dx = \frac{\sin x}{\cos^{2p} x} - (2p-1) \int \frac{dx}{\cos^{2p+1} x} + \\
 &\quad + (2p-1) \int \frac{dx}{\cos^{2p-1} x}. \\
 \int \sec^{2p+1} x \, dx &= \frac{1}{2p} \frac{\sin x}{\cos^{2p} x} + \left(1 - \frac{1}{2p}\right) \int \sec^{2p-1} x \, dx.
 \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\int \operatorname{cosec}^{2p+1} x \, dx = -\frac{1}{2p} \frac{\cos x}{\sin^{2p} x} + \left(1 - \frac{1}{2p}\right) \int \operatorname{cosec}^{2p-1} x \, dx.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned}
 \int \sec^3 x \, dx &= \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \left| u = \frac{1}{\cos x}; \quad dv = \frac{dx}{\cos^2 x}; \right. \\
 &\quad \left. du = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx; \quad v = \operatorname{tg} x \right| = \\
 &= \frac{1}{\cos x \cos x} - \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \\
 &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.
 \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Далеко не кожна ірраціональна функція може мати інтеграл, виражений елементарними функціями. Для знаходження інтеграла від ірраціональної функції варто застосувати підстановку, що дозволить перетворити функцію в раціональну, інтеграл від якої може бути знайдений.

Розглянемо деякі прийоми для інтегрування різних типів ірраціональних функцій.

Інтеграли

від лінійних і дробово-лінійних ірраціональностей.

Розглянемо інтеграл

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_r}{n_r}}\right) dx,$$

де R - раціональна функція вказаних аргументів. Зробимо заміну $x = t^s$, $dx = st^{s-1}dt$, де s - спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}; \frac{m_2}{n_2}; \dots, \frac{m_r}{n_r}$. Тоді кожний дробовий степінь x матиме вираз через цілий степінь t і, отже, підінтегральна функція перетвориться у раціональну функцію від t . Після інтегрування за змінною t повертаємось до змінної x : $t = \sqrt[s]{x}$.

Раціоналізація інтегралу

$$\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, (ax+b)^{\frac{m_r}{n_r}}\right) dx$$

здійснюється за допомогою підстановки

$$ax+b = t^s; \quad t = \sqrt[s]{ax+b}; \quad adx = st^{s-1}dt.$$

Аналогічна підстановка робиться в випадку

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_r}{n_r}}\right) dx,$$

тобто

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s; \quad x = \frac{dt^s - b}{a - ct^s}; \quad dx = \left(\frac{dt^s - b}{a - ct^s}\right)' dt.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}} &= \left| x = t^4; \quad t = \sqrt[4]{x}; \quad dx = 4t^3 dt \right| = \int \frac{4t^3}{t + t^2} dt = 4 \int \frac{t^2}{t + 1} dt = \\ &= \int \left(t - 1 + \frac{1}{t + 1} \right) dt = \frac{t^2}{2} - t + \ln|t + 1| + C = \\ &= \frac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt[4]{x} + \ln|\sqrt[4]{x} + 1| + C. \end{aligned}$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}{(x-1)(1 + \sqrt[6]{x-1})} dx &= \left| \sqrt[12]{x-1} = t; \quad x-1 = t^{12}; \quad dx = 12t^{11} dt; \right| = \\ &= \int \frac{(t^4 + t^3)12t^{11} dt}{t^{12}(1 + t^2)} = 12 \int \frac{t^3 + t^2}{t^2 + 1} dt = \\ &= 12 \left(\int \frac{t^3}{t^2 + 1} dt + \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt \right) = \\ &= 12 \left(\int \left(t - \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt + \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \right) = \\ &= 12 \int t dt - 12 \int \frac{t dt}{t^2 + 1} + 12 \int dt - 12 \int \frac{dt}{1 + t^2} = \\ &= 6t^2 + 12t - 6 \ln(t^2 + 1) - 12 \operatorname{arctg} t + C = \\ &= 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1} - 6 \ln(\sqrt[6]{x-1} + 1) - 12 \operatorname{arctg} \sqrt[12]{x-1} + C. \end{aligned}$$

Інтегрування біноміальних диференціалів

Означення: Біноміальним диференціалом називається вираз

$$x^m(a + bx^n)^p dx$$

де m , n і p – раціональні числа.

Як було доведено академіком Чебышевым П.Л. (1821-1894), інтеграл від біноміального диференціала може бути виражений через елементарні функції тільки в наступних трьох випадках:

- 1) Якщо p – ціле число, то інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $t = \sqrt[\lambda]{x}$, де λ – спільний знаменник m і n .
- 2) Якщо $\frac{m+1}{n}$ – ціле число, то інтеграл раціоналізується підстановкою $t = \sqrt[s]{a + bx^n}$, де s – знаменник числа p .
- 3) Якщо $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число, то використовується підстанова $t = \sqrt[s]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$, де s – знаменник числа p .

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

Перепишемо заданий інтеграл

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}} (1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx.$$

Це інтеграл від диференціального бінома, де $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$;

$\frac{m+1}{n} = 2$. Отже, має місце випадок 2) інтегрованості.

Підстановка $1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3$ дає:

$$x = (t^3 - 1)^4, \quad dx = 12t^2(t^3 - 1)^3 dt.$$

Тому

$$\begin{aligned} I &= \int x^{-\frac{1}{2}} (1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx = 12 \int \frac{t^3(t^3 - 1)^3}{(t^3 - 1)^2} dt = 12 \int (t^6 - t^3) dt = \\ &= \frac{12}{7} t^7 - 3t^4 + C = \frac{12}{7} (1 + \sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}} - 3(1 + \sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}} + C. \end{aligned}$$

Квадратичні ірраціональності.

Тригонометрична підстановка

Розглянемо інтеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$. Існує кілька способів інтегрування такого роду функцій. Залежно від вигляду виразу, що стоїть під знаком радикала, застосовують той або інший спосіб. Розглянемо обчислення таких інтегралів за допомогою тригонометричних підстановок.

Як відомо, квадратний тричлен шляхом виділення повного квадрата може бути приведений до вигляду:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right).$$

Зробимо заміну

$$t = x + \frac{b}{2a}; \quad dt = dx; \quad ax^2 + bx + c = at^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right).$$

Розглянемо випадки:

- 1) $a > 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Введемо позначення

$$a = m^2, \quad c - \frac{b^2}{4a} = n^2, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 + n^2}.$$

В цьому випадку підстановка $t = \frac{n}{m} tg z$ або $t = \frac{n}{m} ctg z$ приводить до інтегралу від раціональної функції відносно $\sin x$ і $\cos x$.

2) $a > 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} < 0$. Введемо позначення

$$a = m^2, \quad c - \frac{b^2}{4a} = -n^2, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 - n^2}.$$

В цьому випадку підстановка $t = \frac{n}{m} \sec z$ або $t = \frac{n}{m} \operatorname{cosec} z$ приводить до інтегралу від раціональної функції відносно $\sin x$ і $\cos x$.

3) $a < 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Введемо позначення

$$a = -m^2, \quad c - \frac{b^2}{4a} = n^2, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{n^2 - m^2 t^2}.$$

В цьому випадку підстановка $t = \frac{n}{m} \sin z$ або $t = \frac{n}{m} \cos z$ приводить до інтегралу від раціональної функції відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Приклад: Обчислити

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{9+x^2}} &= \left| x = 3 tg z; \quad dx = \frac{3}{\cos^2 z} dz; \right| = \int \frac{3 \cos z dz}{\cos^2 z 3^4 tg^4 z 3} = \\ &= \int \frac{\cos^3 z dz}{3^4 \sin^4 z} = \frac{1}{81} \int \frac{(1 - \sin^2 z) d(\sin z)}{\sin^4 z} = \\ &= -\frac{1}{3 \cdot 81 \sin^3 z} + \frac{1}{81 \sin z} + C = \\ &= \left| \sin z = \sqrt{1 - \frac{9}{9+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} \right| = -\frac{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}{243x^3} + \frac{\sqrt{9+x^2}}{81x} + C. \end{aligned}$$

Приклад: Обчислити

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^2-4)^{\frac{5}{2}}} &= \left| x = 2 \sec z = \frac{2}{\cos z}; dx = \frac{2 \sin z}{\cos^2 z} dz; \right. \\ &\quad \left. \sqrt{x^2-4} = 2 \operatorname{tg} z \right| = \\ &= -\frac{1}{32} \int \operatorname{ctg}^2 z d(\operatorname{ctg} z) - \frac{1}{32} \int \operatorname{ctg}^2 z dz = \\ &= -\frac{1}{96} \operatorname{ctg}^3 z - \frac{1}{32} \int \left(\frac{1}{\sin^2 z} - 1 \right) dz = \\ &= -\frac{1}{96} \operatorname{ctg}^3 z + \frac{1}{32} \operatorname{ctg} z + \frac{z}{32} + C = \left| \operatorname{ctg} z = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}} \right| = \\ &= -\frac{1}{12(x^2-4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{16\sqrt{x^2-4}} + \frac{1}{32} \arccos \frac{2}{x} + C.\end{aligned}$$

Приклад: Обчислити

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2} dx &= \left| x = a \sin z; z = \arcsin \frac{x}{a}; \right. \\ &\quad \left. dx = a \cos z dz. \right| = \\ &= \int \sqrt{a^2-a^2 \sin^2 z} a \cos z dz = \int a^2 \cos^2 z dz = \\ &= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2z) dz = \frac{a^2 z}{2} + \frac{a^2}{4} \sin 2z + C = \\ &= \frac{a^2 z}{2} + \frac{a^2}{2} \sin z \cos z + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C.\end{aligned}$$

Інтегралів, що не виражаються через елементарні функції

Всі елементарні функції диференційовні і їхні похідні знову є елементарними функціями. Про інтегрування функцій цього сказати не можна. Існують елементарні функції, інтеграли від яких не виражаються через елементарні функції (кажуть: “не інтегруються в

кінцевому вигляді”).

До таких інтегралів відносяться:

- 1) $\int e^{-x^2} dx$ - інтеграл Пуассона (Сімеон Дені Пуассон – французький математик (1781-1840));
- 2) $\int \sin x^2 dx$; $\int \cos x^2 dx$ - інтеграли Френеля (Жан Огюстен Френель – французький учений (1788-1827) - теорія хвильової оптики й ін.);
- 3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ - інтегральний логарифм;
- 4) $\int \frac{e^x}{x} dx$ - зводиться до інтегрального логарифма;
- 5) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ - інтегральний синус;
- 6) $\int \frac{\cos x}{x} dx$ - інтегральний косинус.

Визначений інтеграл

Визначений інтеграл та його властивості

Задачі, які приводять до поняття визначеного інтегралу.

Нехай відомий закон зміни миттєвої швидкості $V = V(t)$ при русі точки. Знайдемо пройдений шлях за деякий проміжок часу $[\alpha, \beta]$. Рух нерівномірний, тому неможливо обчислити шлях як добуток швидкості на час.

Розіб'ємо весь проміжок часу на на велике число малих, не обов'язково рівних друг другу інтервалів часу

$$\alpha = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \dots \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = \beta,$$

де $t_1, t_2, \dots \dots t_n$ - деякі моменти часу. Якщо ці інтервали достатньо малі, то без великої помилки можна вважати на кожному інтервалі рух рівномірним, і наближено шлях буде дорівнювати

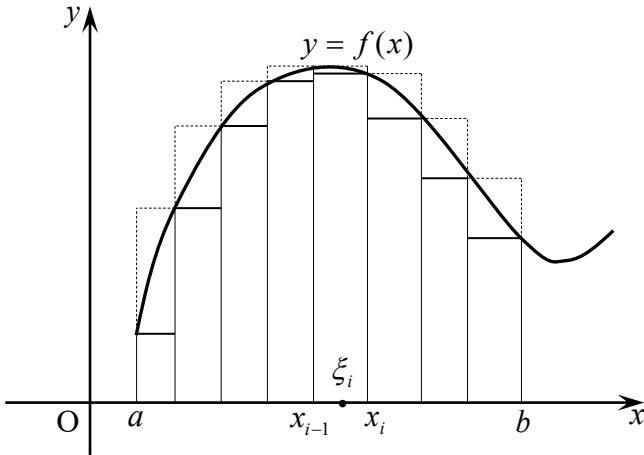
$$l = V_1 \Delta t_1 + V_2 \Delta t_2 + \dots \dots \dots + V_n \Delta t_n = \sum_{k=1}^n V_k \Delta t_k,$$

де $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, V_k - швидкість на k -тому інтервалі часу. Ця формула тим точніша, чим більше число розбивок проміжку часу $[\alpha, \beta]$. Щоб одержати точну формулу, потрібно перейти до границі, прийнявши, що розбивок нескінченно багато, а $\max \Delta t_k \rightarrow 0$

$$l = \lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n V_k \Delta t_k.$$

Розглянемо геометричний приклад. Нехай необхідно обчислити площу криволінійної трапеції, яка обмежена зверху

неперервної функцією $y = f(x) \geq 0$, знизу віссю Ox , зліва і справа відповідно прямими $x = a$ і $x = b$, $a < b$.



Позначимо m і M найменше й найбільше значення функції на відрізку $[a, b]$.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n частин (не обов'язково однакових).

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Позначимо найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ через m_i , M_i .

Складемо суми:

$$\underline{S}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

$$\overline{S}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

які називаються відповідно нижньою і верхньою інтегральними

сумами або нижньою і верхньою сумами Дарбу. Якщо $f(x) \geq 0$, то нижня інтегральна сума чисельно дорівнює площі “вписаної” ступінчатої фігури, а верхня інтегральна сума чисельно дорівнює площі “описаної” ступінчатої фігури.

Властивості сум Дарбу:

а) так як $m_i \leq M_i$ для будь-якого i , то звідси випливає

$$\underline{S}_n \leq \overline{S}_n.$$

б) так як $m_i \geq m$ для будь-якого i , то звідси випливає

$$\begin{aligned} \underline{S}_n &= m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n \geq m \Delta x_1 + m \Delta x_2 + \dots + \\ &+ m \Delta x_n = m(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = m(b - a), \end{aligned}$$

тобто $\underline{S}_n \geq m(b - a)$.

в) так як $M_i \leq M$ для будь-якого i , то звідси випливає

$$\begin{aligned} \overline{S}_n &= M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n \leq M \Delta x_1 + M \Delta x_2 + \dots + \\ &+ M \Delta x_n = M(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = M(b - a), \end{aligned}$$

тобто $\overline{S}_n \leq M(b - a)$.

$$\text{Отже. } m(b - a) \leq \underline{S}_n \leq \overline{S}_n \leq M(b - a).$$

Визначений інтеграл, як границя інтегральних сум.

В кожному із відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ візьмемо точку ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Знайдемо значення функції в цих точках і складемо суму

$$S_n = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

яка називається інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Так як на будь-якому відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ виконується

$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i, \quad \Delta x_i > 0$, то

$$m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i,$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

$$\underline{S_n} \leq S_n \leq \overline{S_n}.$$

Геометрично це означає наступне: графік функції $f(x)$ обмежений зверху “описаною” ламаною лінією, а знизу – “вписаною” ламаною лінією.

Сума S_n залежить від способу розбивки відрізка $[a, b]$ на відрізки $[x_{i-1}, x_i]$ і від вибору точок ξ_i всередині цих відрізків. Чим більше розбивок, тим точніша площа криволінійної трапеції (Δx_i - зменшується і прямує до нуля).

Збільшуючи число розбивок і переходячи до границі при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, тобто максимальний із відрізків прямує до нуля, (кількість розбивок прямує до нескінченості), одержимо площу криволінійної трапеції.

Означення. Границя (якщо вона існує), до якої прямує інтегральна сума S_n , коли $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Числа a і b - називаються нижньою і верхньою межами інтегрування, x - змінна інтегрування, $[a, b]$ - відрізок інтегрування.

Якщо для функції $f(x)$ існує дана границя, то функцію $f(x)$ називають інтегрованою на відрізку $[a, b]$.

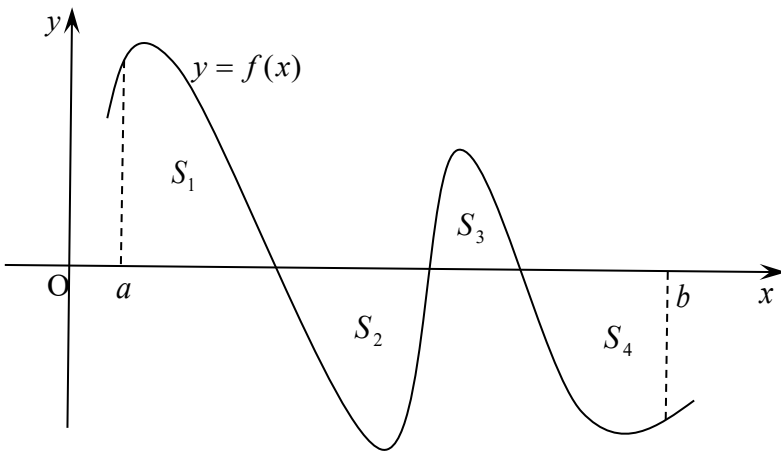
Так як нижня і верхня суми Дарбу є частинними випадками

інтегральної суми, тому якщо $f(x)$ інтегровна, то нижня і верхня суми Дарбу прямують до тієї ж самої границі

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Якщо побудувати графік підінтегральної функції $y = f(x)$, то в випадку $f(x) \geq 0$ інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ буде чисельно дорівнювати площі криволінійної трапеції, яка обмежена вказаною кривою, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю Ox .



Якщо підінтегральна функція від'ємна або змінює знак, то в інтегральну суму деякі члени ввійдуть зі знаком мінус. В границі одержимо, що інтеграл дорівнюватиме алгебраїчній сумі площ частин криволінійної трапеції, причому площі частин, які лежать вище (нижче) осі Ox , беруться зі знаком плюс (мінус).

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3 - S_4.$$

На початку було розглянуто пройдений шлях

$$l = \lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n V_k \Delta t_k = \int_a^\beta V(t)dt.$$

Властивості визначеного інтеграла.

- 1) Визначений інтеграл був введений для $a < b$. Якщо межі інтегрування співпадають, то визначений інтеграл дорівнює нулю, тобто $\int_a^a f(x)dx = 0$.

- 2) При перестановці меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

- 3) Для будь-яких чисел a, b, c має місце рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- 4) Постійний множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

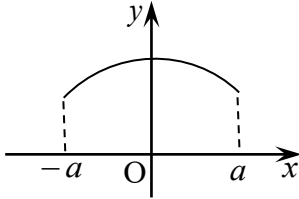
- 5) Визначений інтеграл від алгебраїчної суми двох або декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

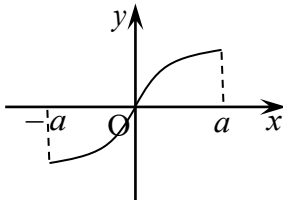
- 6) Якщо m і M - відповідно найменше й найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

- 7) Інтегрування в симетричних межах в деяких випадках можна спростити за формулами:



$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx, \text{ якщо } f(x) - \text{парна функція,}$$



$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0, \text{ якщо } f(x) - \text{непарна функція.}$$

Теорема про середнє.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то на цьому відрізку існує точка c така, що

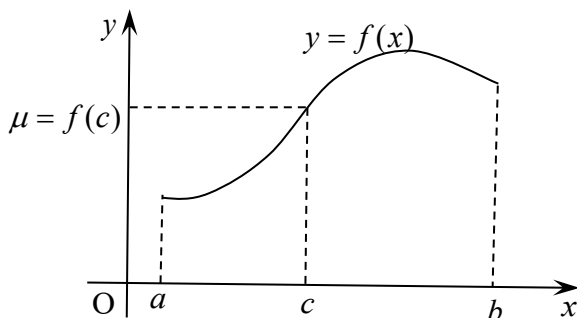
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Доведення. У відповідності із властивістю 6:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Так як функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона приймає на

цьому відрізку всі значення від m до M . Інакше кажучи, існує таке число $c \in [a, b]$, що якщо $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu$ і $\mu = f(c)$, а $a \leq c \leq b$, тоді $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$. Теорема доведена.



Зауваження. Теорема про середнє має геометричний зміст: Величина визначеного інтегралу при $f(x) \geq 0$ дорівнює площі прямокутника, який має висоту $f(c)$ і основу $(b-a)$.

Обчислення визначеного інтеграла

Теорема про похідну інтеграла по верхній межі.

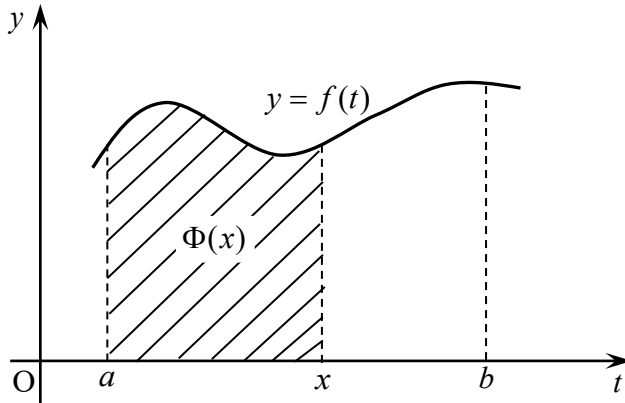
Раніше ми розглядали визначений інтеграл з постійними межами інтегрування a і b . Якщо змінювати верхню межу так, щоб не вийти за межі відрізка $[a, b]$, то величина визначеного інтеграла буде змінюватися, тобто буде представляти функцію своєї верхньої межі.

Позначимо цю функцію

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

і назвемо її інтегралом зі змінною верхньою межею.

Геометрично функція $\Phi(x)$ представляє собою площу заштрихованої на малюнку криволінійної трапеції, якщо $f(t) > 0$.



Теорема. Похідна визначеного інтегралу від неперервної функції по змінній верхній межі існує і дорівнює значенню підінтегральної функції в точці, яка дорівнює верхній межі, тобто

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

Доведення. Для будь-якого $x \in [a, b]$ задамо приріст $\Delta x \neq 0$ так, щоб $x + \Delta x \in [a, b]$. Тоді функція $\Phi(x)$ одержить нове значення

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Згідно властивості 3)

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Знайдемо приріст функції $\Phi(x)$

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Застосуємо теорему про середнє

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = f(c)\Delta x,$$

де c - число, яке знаходиться між x і $x + \Delta x$.

Розділимо обидві частини рівності на Δx , і, якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $c \rightarrow x$ і, в силу неперервності функції $f(t)$ на $[a, b]$, $f(c) \rightarrow f(x)$.

$$\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(c),$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x).$$

$$\Phi'(x) = f(x)$$

Зауваження. Нами встановлено, що будь-яка неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ має на цьому відрізку первісну, а саме, функцію $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$. Оскільки всяка інша первісна для функції $f(x)$ може відрізнятись від $\Phi(x)$ тільки на постійну, то встановлений зв'язок між невизначеним і визначеним інтегралами у вигляді

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Формула Ньютона-Лейбніца.

Обчислення визначених інтегралів методом, який заснований на означенні інтеграла як границі інтегральної суми, як правило, зв'язаний з великими труднощами. Існує більш зручний метод.

Функція $f(x)$, неперервна на відрізку $[a, b]$, має на цьому відрізку первісні. Дві будь-які первісні відрізняються на постійну. Нехай $F(x)$ - одна із первісних.

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \quad a \leq x \leq b.$$

Для визначення постійної C покладемо $x = a$

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C, \quad 0 = F(a) + C, \quad C = -F(a).$$

Тобто для будь-якого $x \in [a, b]$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

В цій формулі покладемо $x = b$

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Замінивши позначення змінної інтегрування, одержимо формулу Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Теорему доведено.

Формула Ньютона-Лейбніца дає простий і зручний метод обчислення визначеного інтегралу: визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює різниці значень будь-якої її первісної, обчисленої для верхньої і нижньої межі інтегрування.

Приклад. Знайти визначений інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад. Знайти визначений інтеграл

$$\int_{-1}^0 (4x^3 + 2x - 1)dx = (x^4 + x^2 - x) \Big|_{-1}^0 = 0 - (1 + 1 + 1) = -3.$$

При обчисленні визначених інтегралів застосовують подібні

прийоми і методи, які були розглянуті вище при обчисленні невизначених інтегралів.

Точно так само застосовуються методи підстановки (заміни змінної), метод інтегрування частинами, ті ж прийоми знаходження первісних для тригонометричних, ірраціональних і трансцендентних функцій. Особливістю є тільки те, що при застосуванні цих прийомів треба поширювати перетворення не тільки на підінтегральну функцію, але й на межі інтегрування. Заміняючи змінну інтегрування, не забути змінити відповідно межі інтегрування.

Метод підстановки (заміни змінних) у визначеному інтегралі.

Теорема. Нехай заданий інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ – неперервна функція на відрізьку $[a, b]$. Тоді якщо

- 1) $x = \phi(t)$ - диференційовна функція на $[\alpha, \beta]$ і $\phi'(t)$ - неперервна функція на $[\alpha, \beta]$.
- 2) $\phi(\alpha) = a, \quad \phi(\beta) = b$.
- 3) $f[\phi(t)]$ - визначена і неперервна функція на $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\phi(t)]\phi'(t)dt \quad (*)$$

Доведення. За формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ - первісна. З іншої сторони, розглянемо на $[\alpha, \beta]$ складну функцію від t : $\Phi(t) = F[\phi(t)]$. Знайдемо похідну

$$\Phi'(t) = F'[\phi(t)]\phi'(t) = f[\phi(t)]\phi'(t).$$

Звідси випливає, що функція $\Phi(t)$ є первісною для функції $f[\phi(t)]\phi'(t)$, яка неперервна на $[\alpha, \beta]$, і за формулою Ньютона-Лейбніца одержимо

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f[\phi(t)]\phi'(t)dt &= \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F[\phi(\beta)] - F[\phi(\alpha)] = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

Теорема доведена.

Формула (*) називається формулою заміни змінної або підстановки у визначеному інтегралі.

Зауваження. При обчисленні визначеного інтегралу за формулою (*) не потрібно повертатись до старої змінної (на відміну від невизначеного інтегралу), так як потрібно знайти число, яке згідно доведеної теореми дорівнює значенню кожного із розглянутих інтегралів.

Приклад. Обчислити

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}} &= \left| \begin{array}{l} 2+4x = t^2; \quad 4dx = 2tdt; \\ dx = \frac{tdt}{2}; \quad x = \frac{t^2-2}{4}; \\ x=1 \Rightarrow t = \sqrt{6}; \\ x=4 \Rightarrow t = 3\sqrt{2} \end{array} \right| = \int_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} \frac{(t^2-2)t}{8t} dt = \\ &= \frac{1}{8} \int_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} (t^2-2)dt = \frac{1}{8} \left(\frac{t^3}{3} - 2t \right) \Big|_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{27 \cdot 2\sqrt{2}}{3} - 2 \cdot 3\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{6}}{3} + 2\sqrt{6} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Приклад. Обчислити

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sin t; \quad dx = \cos t \, dt; \\ t = \arcsin x; \\ x = 0 \Rightarrow t = 0; \quad x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ - диференційовані функції від x . Тоді

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

Проінтегрувавши обидві частини рівності у межах від a до b , маємо

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx.$$

Оскільки $\int (uv)' dx = uv + C$, тому $\int_a^b (uv)' dx = uv|_a^b$. Рівність може бути записана у вигляді $uv|_a^b = \int_a^b v du + \int_a^b u dv$, або остаточно

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Одержали формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln^2 x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x; \quad dv = dx; \\ du = 2 \ln x \frac{1}{x} dx; \quad v = x \end{array} \right| = x \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x; \quad dv = dx; \\ du = \frac{1}{x} dx; \quad v = x \end{array} \right| = x \ln^2 x \Big|_1^e - 2x \ln x \Big|_1^e + 2 \int_1^e dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x) \Big|_1^e = \\
&= e \ln^2 e - 2e \ln e + 2e - \ln^2 1 + 2 \ln 1 - 2 = e - 2.
\end{aligned}$$

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \arctg x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arctg x; \, dv = dx; \\ du = \frac{dx}{1+x^2}; \, v = x \end{array} \right| = x \arctg x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} = \\
&= x \arctg x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \arctg x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \\
&= \arctg 1 - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln(1+0) = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Наближене обчислення визначеного інтеграла

Нехай потрібно обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ від неперервної функції $f(x)$. Бувають випадки, що знаходження первісної функції досить складне, крім того існує багато функцій, інтеграл від яких не може бути виражений через елементарні функції. Для знаходження інтегралів від подібних функцій застосовуються різноманітні наближені методи, суть яких полягає в тому, що підінтегральна функція замінюється “близькою” до неї функцією, інтеграл від якої виражається через елементарні функції.

Формула прямокутників.

Розглянемо функцію $f(x)$, яка неперервна на відрізку $[a, b]$. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин довжиною $\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ за допомогою точок $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$. Складемо інтегральні суми:

$$\begin{aligned} & f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x; \\ & f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x. \end{aligned}$$

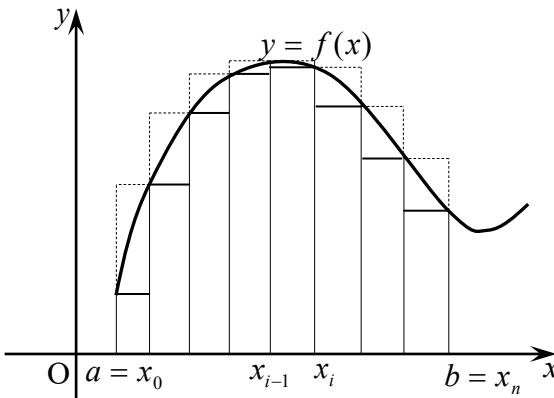
Тоді

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

або

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

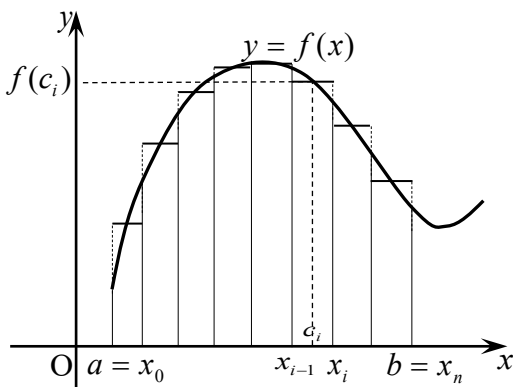
Отримані формули називаються загальними формулами прямокутників. Кожна із них може застосовуватися для наближеного обчислення визначеного інтеграла й.



Взявши в кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ точку $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, побудуємо прямокутник площа якого $f(c_i)\Delta x$. Склавши інтегральну суму $f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \dots + f(c_n)\Delta x$ одержимо формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(f(c_1) + f(c_2) + \dots + f(c_n)) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(c_i), (*)$$

яка називається формулою середніх прямокутників.



Абсолютна похибка наближеної рівності (*) оцінюється за допомогою слідуючої формули:

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3 \cdot N_2}{24n^2},$$

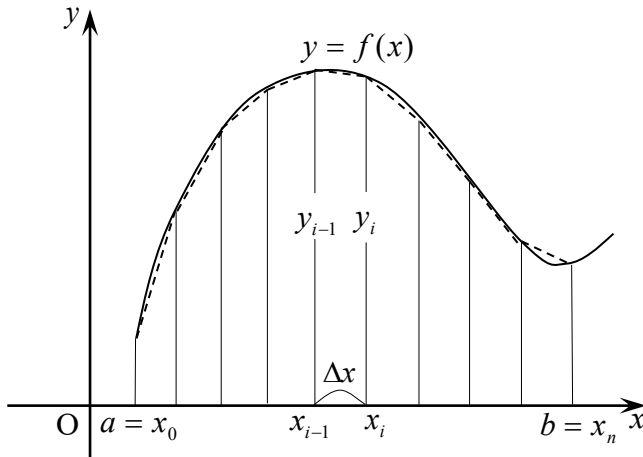
де N_2 - найбільше значення $|f''(x)|$ на відрізку $[a, b]$,

$$|R_n| = \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(c_i) \right|$$

Зауважимо, що для лінійної функції $(f(x) = kx + b)$ формула (*) дає точну відповідь, тому що в цьому випадку $f''(x) = 0$.

Формула трапецій.

Формула трапецій є більш точною в порівнянні з формулою прямокутників. Формулу трапецій одержують аналогічно формулі прямокутників: на кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ криволінійна трапеція замінюється звичайною трапецією. Очевидно, що чим більше взяти точок n розбивки інтервалу, тим з більшою точністю буде обчислений інтеграл.



Площі трапецій обчислюються за формулами:

$$\frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x; \quad \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x; \quad \dots, \quad \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \Delta x,$$

де $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $\dots$, $y_n = f(x_n)$, y_{i-1} , y_i - основи

трапецій, $\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ - висота кожної трапеції.

Тоді інтеграл наближено буде дорівнювати

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \Delta x.$$

Після приведення подібних доданків одержимо формулу трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right).$$

Абсолютна похибка R_n наближення, одержаного за формулою трапецій, оцінюється за допомогою формули

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3 \cdot N_2}{12n^2},$$

де N_2 - найбільше значення $|f''(x)|$ на відрізку $[a, b]$. Для лінійної функції формула трапецій також буде точною.

Формула парабол

(формула Сімпсона або квадратурна формула).

Розіб'ємо відрізок інтегрування $[a, b]$ на $2n$ рівних відрізків довжиною $h = \frac{b-a}{2n}$ точками $x_i = x_0 + ih$, $(i = 0, 1, 2, \dots, 2n)$. В точках розбивки $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n} = b$ обчислимо значення підінтегральної функції $y_i = f(x_i)$. Площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x)$, замінімо на площу криволінійної трапеції, обмеженою параболою другого ступеня з віссю симетрії, яка паралельна осі Oy і проходить через точки кривої, зі значеннями $f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2})$. Для кожної пари відрізків побудуємо таку параболу.

Рівняння цих парабол мають вигляд $Ax^2 + Bx + C$, де коефіцієнти A, B, C можуть знайдені за трьома точками перетину парабол з заданою кривою.

$$y_0 = Ax_0^2 + Bx_0 + C,$$

$$y_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C,$$

$$y_2 = Ax_2^2 + Bx_2 + C.$$

Площа криволінійної трапеції, обмежена параболою, запишеться

$$S = \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C)dx = \left[A \frac{x^3}{3} + B \frac{x^2}{2} + Cx \right] \Big|_{x_0}^{x_2}$$

Якщо прийняти $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$, то $S = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)$.

Тоді значення функції приймуть вигляд:

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C, \quad y_1 = C, \quad y_2 = Ah^2 + Bh + C.$$

С врахуванням цього:

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C, \quad S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Звідси одержимо: $S_1 = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$.

Аналогічно знайдемо

$$S_2 = \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

.....

$$S_n = \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Складаючи ці вирази, одержуємо формулу Сімпсона:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n} [y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})].$$

Чим більше взяти число n , тим більш точне значення інтеграла буде одержано.

Абсолютна похибка обчислення за формулою Сімпсона оцінюється співвідношенням

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^5 \cdot N_4}{180 \cdot (2n)^4},$$

де $N_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{IV}(x)|$. Зауважимо, що формула Сімпсона дає точне

значення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ в усіх випадках, коли $f(x)$ - многочлен, степінь якого менший або дорівнює трьом (тоді $f^{IV}(x) = 0$).

Крім розглянутих вище способів, існують і інші методи наближеного обчислення визначених інтегралів.

Приклад. Обчислити наближено $\int_{-1}^9 \sqrt{2x^3 + 3} dx$.

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок інтегрування на 10 частин.

Складемо таблицю

n	0	1	2	3	4	5
x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	1,7321	2,2361	4,3589	7,5498	11,4455

n	6	7	8	9	10
x	5	6	7	8	9
$f(x)$	15,9060	20,8567	26,2488	32,0468	38,2230

Обчислимо наближено цей інтеграл.

а) за формулою прямокутників $((b-a)/n = (9+1)/10 = 1)$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^9 \sqrt{2x^3 + 3} dx &\approx 1 \cdot (1 + 1,7321 + 2,2361 + 4,3589 + 7,5498 + \\ &+ 11,4455 + 15,906 + 20,8567 + 26,2488 + 32,0468) \approx 123,381. \end{aligned}$$

б) за формулою середніх прямокутників:

$$\frac{b-a}{n} = \frac{9 - (-1)}{10} = 1; \quad c_1 = -0,5; \quad c_2 = 0,5; \quad c_3 = 1,5; \quad c_4 = 2,5;$$

$$c_5 = 3,5; \quad c_6 = 4,5; \quad c_7 = 5,5; \quad c_8 = 6,5; \quad c_9 = 7,5; \quad c_{10} = 8,5.$$

$$f(-0,5) \approx 1,6583; \quad f(0,5) \approx 1,8028; \quad f(1,5) \approx 3,1225;$$

$$f(2,5) \approx 5,8523; \quad f(3,5) \approx 9,4207; \quad f(4,5) \approx 13,6107;$$

$$f(5,5) \approx 18,3235; \quad f(6,5) \approx 23,5; \quad f(7,5) \approx 29,099;$$

$$f(8,5) \approx 35,0892.$$

$$\int_{-1}^9 \sqrt{2x^3 + 3} dx \approx 1 \cdot (1,6583 + 1,8028 + 3,1225 + 5,8523 + 9,4207 + \\ + 13,6107 + 18,3235 + 23,5 + 29,099 + 35,0892) \approx 141,479.$$

в) за формулою трапецій:

$$\int_{-1}^9 \sqrt{2x^3 + 3} dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) = \\ = 1 \cdot \left(\frac{1 + 38,223}{2} + 1,7321 + 2,2361 + 4,3589 + 7,5498 + 11,4455 + \\ + 15,906 + 20,8567 + 26,2488 + 32,0468 \right) \approx 141,992$$

г) за формулою Сімпсона:

$$\int_{-1}^9 \sqrt{2x^3 + 3} dx \approx \frac{10}{30} [y(-1) + y(9) + 2[y(1) + y(3) + y(5) + y(7)] + \\ + 4[y(0) + y(2) + y(4) + y(6) + y(8)]] = \frac{1}{3} [1 + 38,223 + 2[2,2361 + \\ + 7,5498 + 15,906 + 26,2488] + 4[1,7321 + 4,3589 + \\ + 11,4455 + 20,8567 + 32,0468]] \approx 141,621.$$

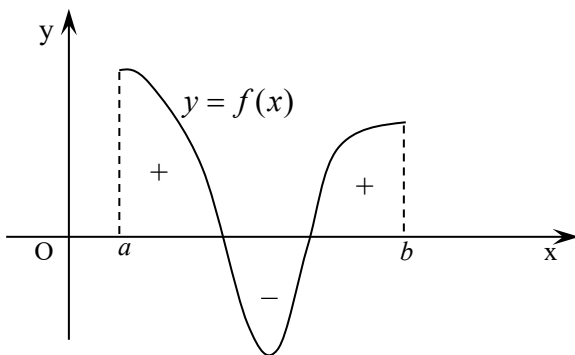
Обчислення інтегралу в Mathcad дає результат

$$\int_{-1}^9 \sqrt{2x^3 + 3} dx = 141,6596673422 \dots$$

Застосування визначених інтегралів

Обчислення площ плоских фігур

Відомо, що визначений інтеграл на відрізку $[a, b]$ представляє собою площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x) \geq 0$. Якщо графік розташований нижче осі Ox , тобто $f(x) \leq 0$, то і визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

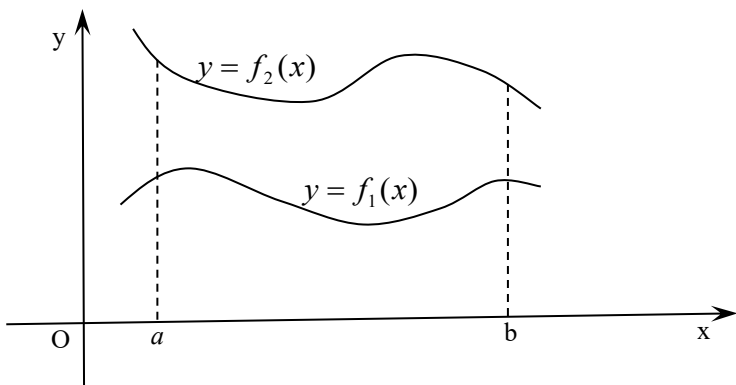


Для знаходження сумарної площі використовується формула

$$S = \int_a^b |f(x)|dx.$$

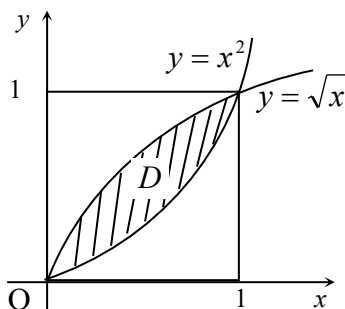
Якщо фігура обмежена знизу і зверху графіками функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$, $a \leq x \leq b$, то площа фігури буде дорівнювати

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$



Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = \sqrt{x}$ і $y = x^2$.

Розв'язання. Зробимо малюнок.



Знаходимо точки перетину кривих:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = x^2. \end{cases}$$

Звідси: $\sqrt{x} = x^2$; $x = x^4$,
 $x^4 - x = 0$; $x(x^3 - 1) = 0$.

Отже, $x_1 = 0$ і $x_2 = 1$.

Тоді

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left. \frac{2}{3} x^{3/2} \right|_0^1 - \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ (од}^2\text{)}.$$

Знайдемо площу криволінійної трапеції у випадку, коли крива задана рівняннями у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \phi(t); \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

де $\alpha \leq t \leq \beta$ і $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$. Нехай ці рівняння визначають деяку функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і, отже, площа, криволінійної трапеції може бути обчислена за розглянутою вище формулою. Зробимо заміну змінної:

$$x = \phi(t), dx = \phi'(t)dt.$$

Тоді одержимо

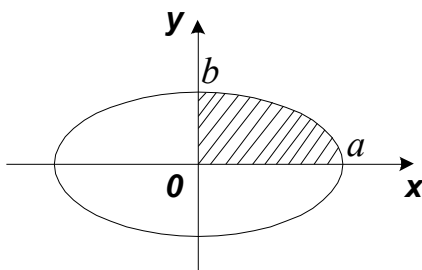
$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \phi'(t) dt.$$

Це і є формула для обчислення площі криволінійної трапеції, коли крива задана рівняннями у параметричній формі.

Приклад. Обчислити площу еліпса

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Розв'язання. Зробимо малюнок.

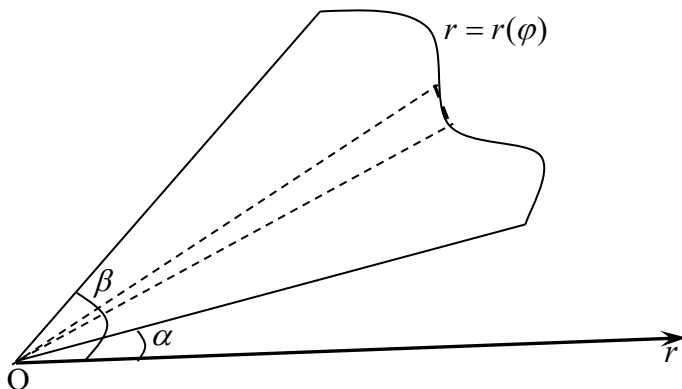


Обчислимо площу четвертої частини еліпса і помножимо на 4:

$$\begin{aligned} S_{\text{ел}} &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t (a \cos t)' dt = \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \end{aligned}$$

$$= 2ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi ab \text{ (од}^2\text{)}.$$

Площа криволінійного сектора в полярній системі координат.



Розглянемо в полярній системі координат криву $r = r(\phi)$, $\alpha \leq \phi \leq \beta$. Обчислимо площу криволінійного сектора, обмеженого кривою $r = r(\phi)$ і радіус-векторами $\phi = \alpha$, $\phi = \beta$. Розіб'ємо сектор на n частин

$$\alpha = \phi_0 < \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_n = \beta.$$

Позначимо через $\tilde{r}_i$ довжину радіус-вектора, який відповідає якому-небудь куту $\tilde{\phi}_i \in [\phi_{i-1}, \phi_i]$. Площа маленьких секторів буде дорівнювати

$$S_i = \frac{1}{2} \tilde{r}_i^2 \Delta\phi_i, \quad \Delta\phi_i = \phi_i - \phi_{i-1}.$$

Просумувавши, одержимо площу “ступінчатого” сектора

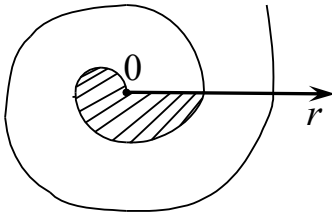
$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i^2 \Delta\phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [r(\tilde{\phi}_i)]^2 \Delta\phi_i.$$

Ця сума буде інтегральною сумою для функції $[r(\phi)]^2$ на відрізку $[\alpha, \beta]$, а границя при $\max \Delta \phi_i \rightarrow 0$ буде визначеним інтегралом. Тобто площа криволінійного сектора буде обчислюватися за формулою

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r(\phi)]^2 d\phi.$$

Приклад. Обчислити площу, яка обмежена першим витком спіралі Архімеда $r = a\phi$.

Розв'язання. Зробимо малюнок.

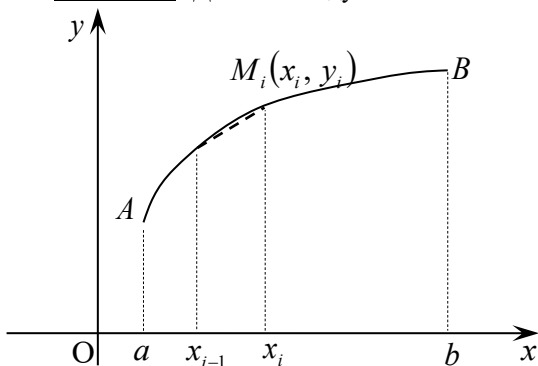


$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\phi)^2 d\phi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \phi^2 d\phi \\ &= \frac{a^2}{2} \frac{\phi^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{a^2}{2} \frac{8\pi^3}{3} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 (\phi^2). \end{aligned}$$

Обчислення довжини дуги кривої

Нехай потрібно обчислити довжину дуги кривої AB , яка задана рівнянням $y = f(x)$. Розіб'ємо дугу кривої на n довільних частин. Одержимо ламану, границя якої буде прямувати до кривої.

Означення. Довжиною дуги AB називається границя, до якої



прямує довжина
вписаної ламаної,
при умові, що
довжина її
найбільшої ланки
прямує до нуля.

Позначимо координати кожної точки $M_i(x_i, y_i)$. Тоді довжина кожної ланки ламаної буде дорівнювати

$$l_i = \sqrt{(x_{i-1} - x_i)^2 + (y_{i-1} - y_i)^2}.$$

За теоремою Лагранжа маємо

$$f(x_{i-1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)(x_{i-1} - x_i), \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i.$$

Тоді $l_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Довжина всієї ламаної буде дорівнювати

$$L_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i.$$

Права частина представляє собою інтегральну суму для функції $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Отже, довжина дуги кривої обчислюється

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} L = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Зауваження 1. Якщо рівняння кривої задане в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \phi(t); \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

то одержуємо

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Зауваження 2. Якщо крива задана в полярних координатах рівнянням $r = r(\phi)$, $\alpha \leq \phi \leq \beta$, то одержуємо

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r(\phi)]^2 + [r'(\phi)]^2} d\phi.$$

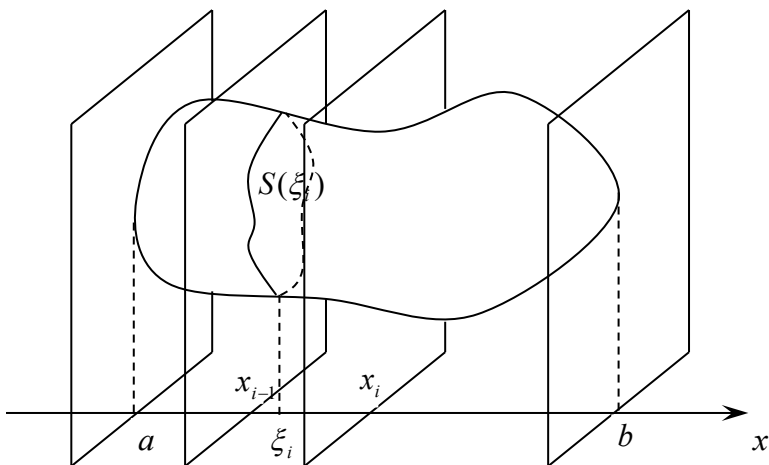
Приклад: Знайти довжину дуги кривої $y = \ln x$ від точки $\sqrt{3}$ до точки $\sqrt{8}$.

Розв'язання. Знайдемо похідну $y' = \frac{1}{x}$ і використаємо формулу

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} x = tg\,t; \, t = \arctg\,x; \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t}; \\ x = \sqrt{3}, \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}, \\ x = \sqrt{8}, \Rightarrow t = \arctg\,\sqrt{8}. \end{array} \right] = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\arctg\,\sqrt{8}} \frac{\sqrt{tg^2 t + 1}}{tg\,t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\arctg\,\sqrt{8}} \frac{dt}{\sin t \cdot \cos^2 t} = \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\arctg\,\sqrt{8}} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cdot \cos^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\arctg\,\sqrt{8}} \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{\sin t} \right) dt = \\ &= \left(\frac{1}{\cos t} + \ln \left| tg\,\frac{t}{2} \right| \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\arctg\,\sqrt{8}} = \\ &= \frac{1}{\cos(\arctg\,\sqrt{8})} + \ln \left| tg\,\frac{\arctg\,\sqrt{8}}{2} \right| - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} - \ln \left| tg\,\frac{\pi}{6} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\cos\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{1+8}}\right)} + \ln \left| \frac{1 - \cos(\operatorname{arctg} \sqrt{8})}{\sin(\operatorname{arctg} \sqrt{8})} \right| - 2 - \ln \frac{\sqrt{3}}{3} = \\
&= 3 + \ln \left| \frac{1 - \cos\left(\arccos \frac{1}{3}\right)}{\sin\left(\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)} \right| - 2 - \ln \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 + \ln \frac{1}{\sqrt{2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{3}} = \\
&= 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Обчислення об'єму тіла по відомих площах його паралельних перетинів



Розглянемо деяке трьохмірне тіло. Обчислимо об'єм цього тіла, якщо відома площа будь-якого перетину цього тіла площиною, яка перпендикулярна до осі Ox . Площа цього перетину буде функцією від x :

$$S = S(x).$$

Розіб'ємо тіло поперечними перетинами, що проходять через точки x_i розбивки відрізка $[a, b]$. В кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ виберемо довільну точку ξ_i і побудуємо циліндричні тіла, твірні яких паралельні осі Ox , а напрямні представляють собою контури перетину тіла площиною $x = \xi_i$.

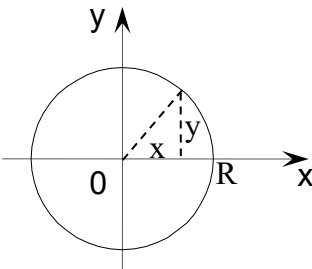
Об'єм одного такого циліндра дорівнює $V_i = S(\xi_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а об'єм всіх циліндрів $V_n = \sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i$.

V_n - представляє собою інтегральну суму для функції $S(x)$. Границя цієї суми при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ називається об'ємом тіла і обчислюється за формулою

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} V = \sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx.$$

Зауваження. Недоліком цієї формули є те, що для знаходження об'єму необхідно знати функцію $S(x)$, що досить проблематично для складних тіл.

Приклад: Знайти об'єм кулі радіуса R .



Розв'язання. У поперечних перетинах кулі одержуємо кола змінного радіуса y . Залежно від змінної координати x цей радіус виражається формулою $\sqrt{R^2 - x^2}$.

Тоді функція площ перетинів має

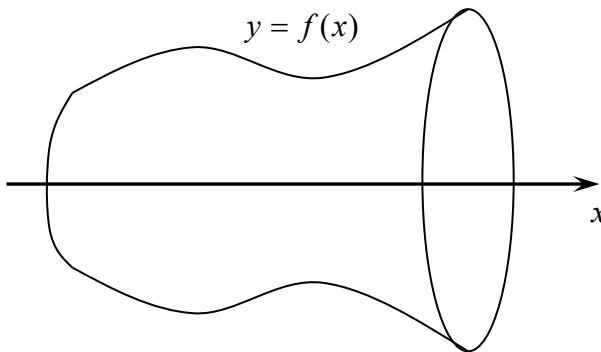
вигляд: $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$.

Обчислимо об'єм кулі:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-R}^R \pi(R^2 - x^2) dx = \pi(R^2 x - \frac{x^3}{3}) \Big|_{-R}^R = \\
 &= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - \pi \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4\pi R^3}{3}.
 \end{aligned}$$

Обчислення об'єму тіл обертання

Розглянемо криву, задану рівнянням $y = f(x)$. Припустимо, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. Якщо відповідну їй криволінійну трапецію обернути навколо осі Ox , то одержимо так зване тіло обертання.



Площа довільного перетину тіла площиною, яка перпендикулярна до осі Ox , є площа круга $S = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2$. Застосувавши формулу попереднього параграфа, одержимо формулу для обчислення об'єму тіла обертання

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

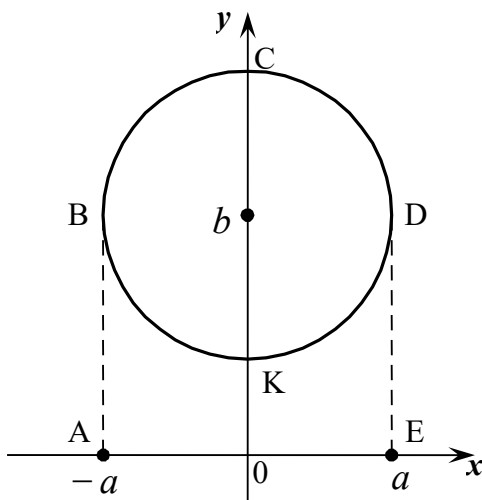
Приклад: Дуга синусоїди $y = \sin x$ від $x = 0$ до $x = \pi$ обертається навколо осі Ox . Знайти об'єм тіла обертання.

Розв'язання. Застосувавши попередню формулу, одержимо

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} (\text{од.}^3)$$

Приклад. Обчислити об'єм тора. (Тором називається тіло, що одержується при обертанні кола радіуса a навколо осі, що лежить у його площині на відстані b від центра кола ($b \geq a$).)



Розв'язання.

Розглянемо коло радіуса a , яке обертається навколо осі Ox .

Об'єм тора можна представити як різницю об'ємів тіл, отриманих від обертання криволінійних трапецій $ABKDE$ і $ABKDE$ навколо осі

Ox .

Рівняння кола із центром у точці $(0; b)$ й радіуса a має вигляд

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2.$$

При цьому рівняння верхнього півкола BCD

$$y = y_1(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2},$$

а рівняння нижнього півкола BKD

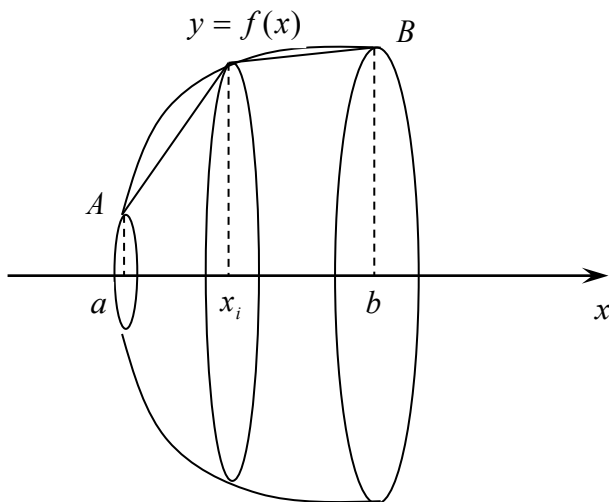
$$y = y_2(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Використовуючи формулу для обчислення об'єму тіла обертання, одержуємо формулу для обчислення об'єму тора

$$\begin{aligned} V_{\text{тора}} &= 2\pi \int_0^a y_1^2(x) dx - 2\pi \int_0^a y_2^2(x) dx = \\ &= 2\pi \int_0^a \left[\left(b + \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 \right] dx = \\ &= 8\pi b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left. \begin{aligned} &x = a \sin t, \quad t = \arcsin \frac{x}{a}, \\ &dx = a \cos t dt, \\ &x = 0, \Rightarrow t = 0, \\ &x = a, \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right| = \\ &= 8\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = 8\pi a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= 8\pi a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 4\pi a^2 b \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 a^2 b \text{ (од.}^3\text{)}. \end{aligned}$$

Обчислення площі поверхні тіла обертання

Означення: Площею поверхні обертання кривої AB навколо заданої осі називається границя, до якої прямують площі поверхонь обертання ламаних, вписаних у криву AB , при прямуванні до нуля найбільшої довжини ланки цієї ламаної.



Якщо крива задана в прямокутній декартовій системі координат рівнянням $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, то площа поверхні тіла обертання обчислюється за формулою

$$S_{\text{пов. об.}} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, то площа поверхні тіла обертання обчислюється за формулою

$$S_{\text{пов. об.}} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Якщо крива задана в полярній системі координат рівнянням $r = r(\phi)$, $\alpha \leq \phi \leq \beta$, то площа поверхні тіла обертання обчислюється за формулою

$$S_{\text{пов. об.}} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\phi) \sqrt{[r(\phi)]^2 + [r'(\phi)]^2} d\phi.$$

Обчислення роботи та деякі задачі механіки рідин

Нехай матеріальна точка переміщується під дією змінної сили $F(x)$ вздовж осі Ox . Обчислимо роботу, виконану цією силою по переміщенню матеріальної точки вздовж осі Ox із точки a до точки b . Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n частин. Якщо довжина відрізка мала, то значення сили в точках відрізка $[x_{i-1}, x_i]$ мало відрізняються від її значення в будь-якій точці $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Тому роботу A_i , виконану силою F на $[x_{i-1}, x_i]$, можна вважати наближено рівною роботі, виконану на тому ж відрізку постійною силою $F(\xi_i)$, тобто

$$A_i \approx F(\xi_i)\Delta x_i.$$

Роботу сили на відрізку $[a, b]$ наближено можна записати

$$A \approx \sum_{i=1}^n F(\xi_i)\Delta x_i.$$

Перейшовши до границі отримуємо точне значення для роботи:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i)\Delta x_i.$$

Сума в останній рівності є інтегральною сумою для функції $F(x)$. Тому робота сили $F(x)$ на переміщенні $[a, b]$ обчислюється за формулою

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

Приклад. Яку роботу потрібно витратити, щоб розтягнути пружину на 5 см, якщо сила 100 Н розтягує пружину на 1 см.

Розв'язання. Згідно з законом Гука $F = kx$, де x – розтягнення пружини в метрах, F – сила в ньютонах. Підставивши задані значення F

і x , знайдемо коефіцієнт пропорційності k і запишемо закон Гука у явному вигляді:

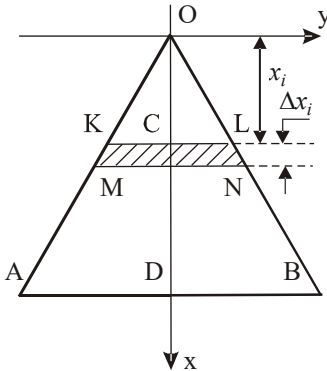
$$100 = k \cdot 0.01, k = 10000, F = 10000 x.$$

Застосувавши отриману вище формулу, маємо

$$A = \int_0^{0,05} 10000x dx = 5000x^2 \Big|_0^{0,05} = 12,5 \text{ Дж.}$$

Наступний приклад ілюструє *метод інтегральних сум*, який часто застосовується в теорії визначеного інтеграла.

Приклад. Пластина у вигляді правильного трикутника зі стороною a занурена вертикально у рідину, причому одна з вершин



трикутника розміщена на поверхні рідини, а основа паралельна їй. Визначити величину сили тиску рідини на цю пластину.

Розв'язання. Систему координат Oxy обираємо у відповідності з рисунком. Задану пластину розіб'ємо на n вузьких горизонтальних смуг, товщини яких позначимо через Δx_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Розглянемо i -ту смугу (чотирикутник $MKLN$). Оскільки Δx_i є малою величиною, то площу ΔS_i , цієї смуги можна приблизно обчислити як площу прямокутника:

$$\Delta S_i \approx KL \cdot \Delta x_i = \frac{2x_i}{\sqrt{3}} \cdot \Delta x_i; \quad KL = 2CL = 2 \cdot OC \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2x_i}{\sqrt{3}}.$$

Згідно з *законом Паскаля* тиск рідини P на площадку визначається формулою $P = \rho ghS$, де ρ – густина, g – прискорення вільного падіння, h – глибина занурення, S площа площадки. Знайдемо

тиск на i -ту смугу (глибина занурення $h = x_i$):

$$P_i = \rho g x_i \Delta S_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \rho g x_i^2 \Delta x_i.$$

Просумувавши всі P_i , одержимо наближене значення сили тиску рідини на всю пластину:

$$P \approx \sum_{i=1}^{i=n} P_i = \sum_{i=1}^n \frac{2}{\sqrt{3}} \rho g x_i^2 \Delta x_i.$$

Нехай $\lambda = \max(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$. Здійснивши граничний перехід в останній рівності при $\lambda \rightarrow 0$, одержимо точну формулу (отримаємо границю інтегральної суми). Враховуючи, що $OD = OB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, можемо записати

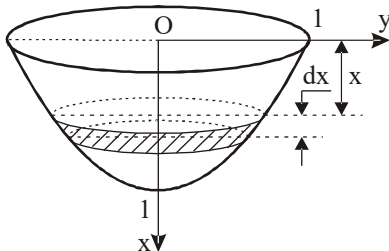
$$P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{2}{\sqrt{3}} \rho g x_i^2 \Delta x_i = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \frac{2}{\sqrt{3}} \rho g x^2 dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \rho g \frac{x^3}{3} \bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{a^3 \rho g}{4}.$$

На наступних двох прикладах розглянемо метод, який по своїй суті подібний до методу інтегральних сум, але формально дещо відрізняється від нього.

Приклад. Поверхня ями, яка до країв наповнена водою, є поверхнею обертання дуги параболи $y = \sqrt{1-x}$ ($0 \leq x \leq 1$) навколо осі Ох. Знайти роботу, витрачену на викачування води з цієї ями.

Розв'язання. Двома площинами, перпендикулярними осі Ох, на глибині x виділяємо елементарний шар води малої товщини dx (див.рис.). Враховуючи, що dx є малою величиною, об'єм dV вказаного елементарного шару з точністю до нескінченно малих більш високого порядку малості можна обчислити як об'єм циліндра з радіусом основи

$\sqrt{1-x}$ і висотою dx :



$$dV = \pi(\sqrt{1-x})^2 dx = \pi(1-x)dx.$$

Знайдемо масу dm елементарного шару:

$$dm = \rho dV = \rho\pi(1-x)dx.$$

Елементарна робота dA , яка витрачається на підняття виділеного шару на висоту x , дорівнює добутку сили тяжіння $F = gdm$ на пройдений шлях x , тобто

$$dA = g\rho\pi(1-x)xdx.$$

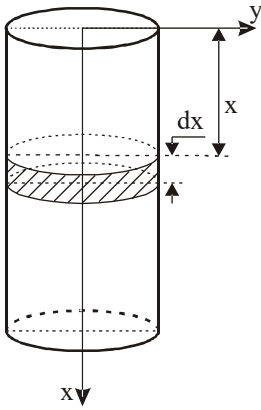
Проінтегрувавши останню рівність знайдемо роботу, яка витрачається на викачування всієї води ($\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$, $\pi \approx 3,14$):

$$A = \int_0^1 g\rho\pi x(1-x)dx = g\rho\pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 \approx 5128,7 \text{ Дж.}$$

Приклад. За який час вода, яка наповнює циліндричну посудину з площею основи $S = 100 \text{ см}^2$ і висотою $H = 20 \text{ см}$, витече через отвір на дні площею $S_0 = 1 \text{ см}^2$.

Розв'язання. При розв'язанні цієї задачі використовується закон Торічеллі: швидкість стікання води з малого отвору на відстані h

від вільної поверхні визначається формулою $v = \mu\sqrt{2gh}$, де $\mu \approx 0,6$, g – прискорення вільного падіння.



Нехай в деякий момент часу вільна поверхня води знаходиться на відстані x від верхнього краю посудини. Виділяємо елементарний шар води товщиною dx і об'ємом $dV = Sdx$. Якщо цей шар витікає за проміжок часу dt зі швидкістю стікання v , то очевидно, що повинна виконуватися рівність $dV = vS_0dt$. Використовуючи формулу Торічеллі можемо записати (у нашому випадку відстань від вільної поверхні

$$h = H - x)$$

$$dt = \frac{dV}{S_0v} = \frac{Sdx}{S_0\mu\sqrt{2g(H-x)}}.$$

Обчислюємо час витікання всієї води (інтегруємо):

$$\begin{aligned} t &= \int_0^H \frac{Sdx}{S_0\mu\sqrt{2g(H-x)}} = \frac{S}{S_0\mu\sqrt{2g}} \int_0^H (H-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= -\frac{S}{S_0\mu\sqrt{2g}} \cdot 2(H-x)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^H = \frac{S}{S_0\mu} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 33,7 \text{ с.} \end{aligned}$$

Обчислення статичних моментів і моментів інерції плоских дуг і фігур

Нехай на площині Oxy задана система матеріальних точок

$A_i(x_i, y_i)$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ з масами відповідно m_i .

Означення. Статичним моментом M_x (M_y) системи матеріальних точок відносно осі Ox (Oy) називається сума добутків мас цих точок на їх відстані до відповідної осі, тобто

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad \left(M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i \right).$$

Означення. Моментом інерції I_x (I_y) системи матеріальних точок відносно осі Ox (Oy) називається сума добутків мас цих точок на квадрати їх відстані до відповідної осі, тобто

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2, \quad \left(I_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2 \right).$$

Будемо вважати, що маса рівномірно розподілена вздовж дуги і фігури з густиною $\gamma = 1$.

За статичні моменти і моменти інерції пласких дуг і фігур приймаються відповідні моменти умовних мас, рівномірно розподілених вздовж цих дуг і фігур з густиною (лінійною або площинною), рівною одиниці.

Статичні моменти і моменти інерції дуги плоскої кривої $y = f(x)$, $(a \leq x \leq b)$ обчислюються за формулами:

$$M_x = \int_a^b y dL, \quad M_y = \int_a^b x dL, \quad I_x = \int_a^b y^2 dL, \quad I_y = \int_a^b x^2 dL,$$

де $dL = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ - диференціал дуги кривої.

Статичні моменти і моменти інерції криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox і двома прямими $x = a$ і $x = b$ обчислюються за формулами

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y dS = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b x dS = \int_a^b xy dx,$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b y^3 dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 dS = \int_a^b x^2 y dx,$$

де $dS = y dx$ - диференціал площі криволінійної трапеції.

Обчислення координат центру мас

Координати центру мас однорідної дуги плоскої кривої $y = f(x)$, ($a \leq x \leq b$) обчислюються за формулами

$$x_c = \frac{1}{L} \int_a^b x dL = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}, \quad x_c = \frac{M_y}{L},$$

$$y_c = \frac{1}{L} \int_a^b y dL = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}, \quad y_c = \frac{M_x}{L}.$$

Координати центру мас однорідної криволінійної трапеції обчислюються за формулами

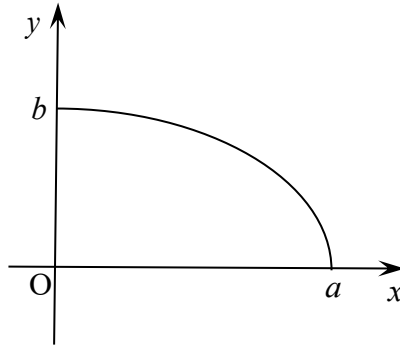
$$x_c = \frac{1}{S} \int_a^b x dS = \frac{1}{S} \int_a^b x y dx = \frac{\int_a^b x y dx}{\int_a^b y dx}, \quad x_c = \frac{M_y}{S},$$

$$y_c = \frac{1}{2S} \int_a^b y dS = \frac{1}{2S} \int_a^b y^2 dx = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}, \quad y_c = \frac{M_x}{S}.$$

Ці формули справедливі для будь-яких однорідних (які мають постійну густину в усіх точках) плоских дуг і фігур.

Приклад. Знайти координати центру мас однорідної фігури, яка обмежена дугою еліпса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, яка розміщена в першій четверті і осями координат.

Розв'язання. Зробимо малюнок.



$$x_c = \frac{1}{S} \int_0^a xy dx = \frac{1}{S} \int_{\pi/2}^0 a \cos t \cdot b \sin t \cdot (-a \sin t) dt =$$

$$= \frac{a^2 b}{S} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t dt = \frac{a^2 b}{S} \frac{1}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^2 b}{3S} = \frac{4a}{3\pi}.$$

$$y_c = \frac{1}{2S} \int_0^a y^2 dx = \frac{1}{2S} \int_{\pi/2}^0 b^2 \sin^2 t (-a \sin t) dt =$$

$$= \frac{2ab^2}{\pi ab} \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 t) d(\cos t) = \frac{2b}{\pi} \left(\cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right) \Big|_{\pi/2}^0 = \frac{4b}{3\pi}.$$

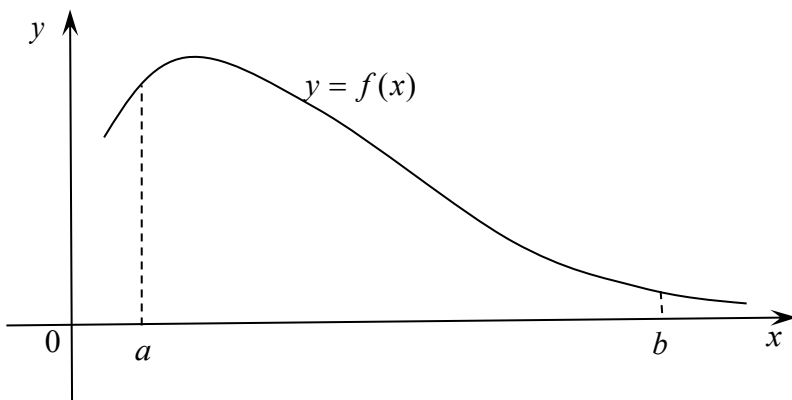
Координати центру мас $\left(\frac{4a}{3\pi}; \frac{4b}{3\pi} \right)$.

Невласні інтеграли

Вводячи визначений інтеграл як границю інтегральних сум, ми вважали, що відрізок інтегрування скінчений, а підінтегральна функція обмежена на цьому відрізку. Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то прийняте раніше означення визначеного інтегралу втрачає зміст. Але можна узагальнити означення визначеного інтегралу.

Невласні інтеграли з нескінченими межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду)

Розглянемо функцію $y = f(x)$ на проміжку $[a, +\infty)$.



Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена на $[a, +\infty)$ і інтегровна на будь-якому відрізку $[a, b]$, тобто існує визначений

інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ при будь-якому $b > a$. Тоді, якщо існує скінчена границя $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$, то її називають невласним інтегралом з нескінченною межею інтегрування (невласним інтегралом першого роду) і позначають

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

В цьому випадку кажуть, що невласний інтеграл існує або збігається. Якщо ж ця границя не існує або дорівнює нескінченності, то тоді невласний інтеграл не існує або розбігається.

Аналогічно вводиться невласний інтеграл на $(-\infty, b]$.

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Аналогічними міркуваннями можна прийти до невласних інтегралів з двома нескінченними межами інтегрування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx,$$

де c - будь-яке число, при цьому вважається, що обидва невласні інтеграли існують.

Розглянемо геометричний зміст невласних інтегралів першого роду. Нехай $f(x) \geq 0$. Тоді невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ виражає скінчену площу нескінченної області, яка обмежена зверху кривою $y = f(x)$, знизу віссю Ox , зліва прямою $x = a$.

Зауваження. При розв'язуванні задач, пов'язаних з невласними інтегралами першого роду допускається такий формальний запис:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(+\infty) - F(a),$$

де позначено $F(+\infty) = \lim_{a \rightarrow +\infty} F(x)$.

Приклад. Обчислити невластний інтеграл першого роду: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$,

де n - будь-яке число.

Розв'язання. Розглянемо два випадки.

а) Якщо $n \neq 1$, то

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^n} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-n}}{1-n} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{1-n} - 1}{1-n} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{1-n}, & \text{при } n > 1, \text{ інтеграл збігається,} \\ \infty, & \text{при } n < 1, \text{ інтеграл розбігається.} \end{cases} \end{aligned}$$

б) Якщо $n = 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = \infty.$$

Інтеграл розбігається.

Приклад. Обчислити невластний інтеграл першого роду: $I =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctg x dx}{1+x^2}.$$

Розв'язання. Розіб'ємо інтеграл на два інтеграли:

$$I = \int_{-\infty}^0 \frac{\arctg x dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x dx}{1+x^2}.$$

Обчислимо перший інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{\arctg x dx}{1+x^2} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{\arctg x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg^2 x \Big|_a^0 = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg^2 a = -\frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

Обчислимо другий інтеграл:

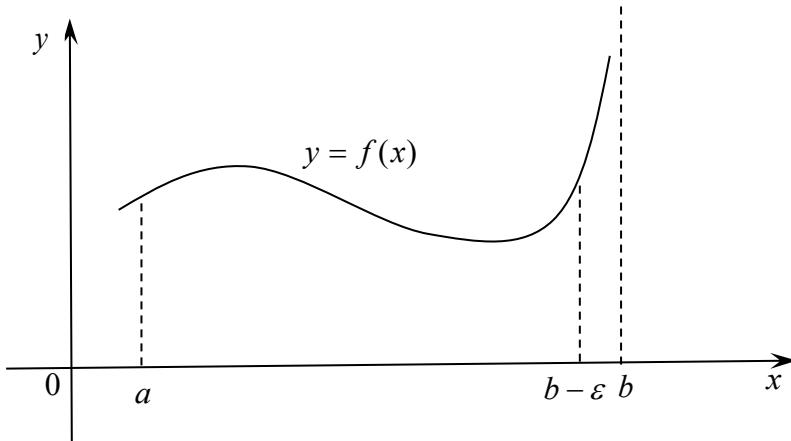
$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{\arctg x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg^2 x \Big|_0^b =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}^2 b = \frac{\pi^2}{8}.$$

Тоді $I = -\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} = 0$. Отже, невластний інтеграл збігається і дорівнює нулю.

Невластні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду)

Розглянемо функцію $y = f(x)$ на проміжку $[a, b)$. Точка $x = b$



називається особливою, якщо функція необмежена в будь-якому околі цієї точки, але обмежена на будь-якому відрізку $[a, b - \varepsilon]$, який знаходиться в $[a, b)$. Нехай на будь-якому відрізку $[a, b - \varepsilon]$ функція $y = f(x)$ інтегровна, тобто існує визначений інтеграл $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ при будь-якому $\varepsilon > 0$, такому, що $b - \varepsilon > a$. Тоді, якщо існує скінчена

границя

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

то її називають невласним інтегралом від необмеженої функції (невласним інтегралом другого роду) і позначають

$$\int_a^b f(x) dx.$$

В цьому випадку кажуть, що невласний інтеграл існує або збігається. Якщо ж ця границя не існує або дорівнює нескінченості, то тоді невласний інтеграл не існує або розбігається.

Аналогічно вводиться невласний інтеграл другого роду, якщо $x = a$ - особлива точка.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Якщо функція необмежена в околі особливої точки $c \in [a, b]$, то при умові існування обох інтегралів, одержимо

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Якщо a і b - особливі точки, одержимо

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^l f(x) dx + \int_l^b f(x) dx,$$

де l - будь-яка точка, яка належить відріzkу $[a, b]$, при умові, що обидва інтеграли в правій частині формули існують.

Приклад. Обчислити невласний інтеграл другого роду: $\int_0^1 \frac{dx}{x^n}$, де $n > 0$ - число.

Розв'язання. Особлива точка $x = 0$. Розглянемо два випадки.

а) Якщо $n \neq 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{x^{1-n}}{1-n} \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1 - \varepsilon^{1-n}}{1-n} =$$

$$= \begin{cases} \infty, & \text{при } n > 1, \text{ інтеграл розбігається,} \\ \frac{1}{1-n}, & \text{при } 0 < n < 1, \text{ інтеграл збігається.} \end{cases}$$

б) Якщо $n = 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (-\ln \varepsilon) = \infty.$$

Інтеграл розбігається.

Приклад. Обчислити невластний інтеграл другого роду: $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Розв'язання. Особлива точка $x = 1$.

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{1+\varepsilon}^e (\ln x)^{\frac{1}{2}} d(\ln x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} 2\sqrt{\ln x} \Big|_{1+\varepsilon}^e =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} 2 \left(1 - \sqrt{\ln(1+\varepsilon)} \right) = 2.$$

Інтеграл збігається.

Приклад. Обчислити невластний інтеграл другого роду: $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$.

Розв'язання. Особлива точка $x = 1$, яка знаходиться всередині відрізка інтегрування $[0, 2]$. Тому потрібно розглянути окремо інтеграли $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ і $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$. Обчислимо перший інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln|x-1| \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln \varepsilon = -\infty.$$

Так як цей інтеграл розбігається (не існує), то другий інтеграл можна не обчислювати, зробивши висновок, що заданий інтеграл $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ розбігається.

Ознаки порівняння невластних інтегралів

В багатьох випадках буває достатньо встановити, збігається чи розбігається заданий невластний інтеграл, і оцінити його значення.

Перша ознака порівняння. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $[a, +\infty)$ і задовольняють на ньому умові $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Зауваження. Аналогічну ознаку порівняння для невластних інтегралів другого роду можна сформулювати таким чином: якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $(a, b]$ і для всіх точок x із деякого інтервала $(a, a + \varepsilon)$ виконується умова $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^b g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^b g(x)dx$.

Друга ознака порівняння. Якщо існує скінчена границя $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$, то невластні інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int_b^{+\infty} g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно (хоча в випадку збіжності їх значення можуть суттєво відрізнятися, навіть якщо $A = 1$ і $a = b$).

Приклад. Дослідити на збіжність невластний інтеграл першого роду: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$.

Розв'язання. Порівняємо підінтегральну функцію $\frac{1}{x^2(1+e^{-x})}$ з функцією $\frac{1}{x^2}$ на проміжку $[1, +\infty)$:

$$\frac{1}{x^2(1+e^{-x})} < \frac{1}{x^2}.$$

Так як невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ збігається (розглядали раніше), то збігається і заданий інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$.

Приклад. Дослідити на збіжність невласний інтеграл першого роду: $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ і порівняємо її з підінтегральною функцією.

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x+x} \leq \frac{\sqrt{x}}{1+x}, \quad (1 \leq x < +\infty).$$

Так як невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ розбігається (розглядали раніше), то розбігається і заданий інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$.

Раніше ми розглядали невласні інтеграли від невід'ємних функцій. Для випадку підінтегральної функції, яка змінює знак, сформулюємо теорему.

Теорема. Якщо невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, який буде називатися абсолютно збіжним.

Означення. Якщо невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбігається, а інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то будемо мати

неабсолютну збіжність.

Приклад. Дослідити на збіжність невластний інтеграл першого роду: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^3}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція знакозмінна, тому розглянемо інтеграл $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^3} \right| dx$. Порівняємо підінтегральну функцію з функцією $\left| \frac{1}{x^3} \right|$ на проміжку $[1, +\infty)$.

$$\left| \frac{\sin x}{x^3} \right| \leq \left| \frac{1}{x^3} \right|.$$

Так як невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ збігається (розглядали раніше), то збігається і інтеграл $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^3} \right| dx$ (за першою ознакою порівняння). Так як збігається інтеграл $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^3} \right| dx$, то за теоремою буде збігатися і заданий інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^3}$.

Зразок виконання індивідуального домашнього завдання

Завдання 1. Знайти інтеграли, користуючись таблицею інтегралів і найпростішими правилами інтегрування:

а) $\int \left(5 \sin x - \frac{3}{\cos^2 x} + 7 \cdot 4^x \right) dx.$

Розв'язування. Скористаємось властивостями невизначеного інтегралу і таблицею інтегралів:

$$\begin{aligned} \int \left(5 \sin x - \frac{3}{\cos^2 x} + 7 \cdot 4^x \right) dx &= \\ &= \int 5 \sin x dx - \int \frac{3}{\cos^2 x} dx + \int 7 \cdot 4^x dx = \\ &= 5 \int \sin x dx - 3 \int \frac{dx}{\cos^2 x} + 7 \int 4^x dx = \\ &= -5 \cos x - 3 \operatorname{tg} x + \frac{7 \cdot 4^x}{\ln 4} + C. \end{aligned}$$

б) $\int \left(\frac{3}{x^4} - \left(x^3 - \frac{2}{x} \right)^2 \right) dx.$

Розв'язування. Спочатку піднесемо до квадрату, а потім скористаємось властивостями невизначеного інтегралу і таблицею інтегралів:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{3}{x^4} - \left(x^3 - \frac{2}{x} \right)^2 \right) dx &= \int \left(\frac{3}{x^4} - x^6 + 4x^2 - \frac{4}{x^4} \right) dx = \\ &= \int (-x^6 + 4x^2 - x^{-4}) dx = - \int x^6 dx + 4 \int x^2 dx - \int x^{-4} dx = \\ &= -\frac{x^7}{7} + \frac{4x^3}{3} + \frac{1}{3x^3} + C. \end{aligned}$$

в) $\int (\operatorname{ctg}(3x - 7) + 2e^{4x}) dx.$

Розв'язування. Розіб'ємо на два інтеграли і застосуємо метод внесення виразу під знак диференціала:

$$\begin{aligned}\int (ctg(3x - 7) + 2e^{4x})dx &= \\&= \frac{1}{3} \int ctg(3x - 7) d(3x - 7) + 2 \cdot \frac{1}{4} \int e^{4x} d(4x) = \\&= \frac{1}{3} \ln \sin(3x - 7) + \frac{1}{2} e^{4x} + C.\end{aligned}$$

г) $\int \left(x^2 \cdot 5^{x^3} + \frac{5x^5}{2+x^6} \right) dx.$

Розв'язування. Розіб'ємо на два інтеграли і застосуємо метод внесення виразу під знак диференціала:

$$\begin{aligned}\int \left(x^2 \cdot 5^{x^3} + \frac{5x^5}{2+x^6} \right) dx &= \frac{1}{3} \int 5^{x^3} d(x^3) + 5 \cdot \frac{1}{6} \int \frac{d(2+x^6)}{2+x^6} = \\&= \frac{5^{x^3}}{3 \ln 5} + \frac{5}{6} \ln(2+x^6) + C.\end{aligned}$$

д) $\int 5x^4(9 - 4x^5)^7 dx$

Розв'язування. Застосовуємо метод підстановки:

$$\begin{aligned}\int 5x^4(9 - 4x^5)^7 dx &= \left| \begin{array}{l} t = 9 - 4x^5, \\ dt = -20x^4 dx, \\ x^4 dx = -\frac{dt}{20} \end{array} \right| = -\frac{5}{20} \int t^7 dt = \\&= -\frac{1}{4} \cdot \frac{t^8}{8} + C = -\frac{1}{32} (9 - 4x^5)^8 + C\end{aligned}$$

е) $\int \frac{6x dx}{x+5}.$

Розв'язування. Винесемо постійний множник за знак інтеграла і перетворимо підінтегральний вираз:

$$\begin{aligned}\int \frac{6x dx}{x+5} &= 6 \int \frac{x+5-5}{x+5} dx = 6 \int \left(1 - \frac{5}{x+5}\right) dx = \\ &= 6 \left(\int dx - 5 \int \frac{dx}{x+5} \right) = 6x - 30 \ln|x+5| + C\end{aligned}$$

є) $\int \frac{(\ln 3x+2)dx}{x}$.

Розв'язування. Застосовуємо метод підстановки:

$$\begin{aligned}\int \frac{(\ln 3x+2)dx}{x} &= \left| \begin{array}{l} z = \ln 3x+2, \\ dz = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int z dz = \frac{z^2}{2} + C \\ &= \frac{1}{2}(\ln 3x+2)^2 + C\end{aligned}$$

ж) $\int \frac{dx}{2-3x^2}$.

Розв'язування. Зведемо даний інтеграл до табличного:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2-3x^2} &= \int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}x)}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}x)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x + \sqrt{2}}{\sqrt{3}x - \sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x + \sqrt{2}}{\sqrt{3}x - \sqrt{2}} \right| + C.\end{aligned}$$

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами:

а) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}} dx$.

Розв'язування. Застосуємо формулу інтегрування частинами $\int u dv = uv - \int v du$:

$$\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}} dx = \left| \begin{array}{l} u = \arccos x, \quad dv = \frac{dx}{\sqrt{1+x}}, \quad du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ v = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \int (1+x)^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{1+x} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \arccos x \cdot \sqrt{1+x} + 2 \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \arccos x \cdot \sqrt{1+x} + \\
&+ 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2 \arccos x \cdot \sqrt{1+x} - 4\sqrt{1-x} + C.
\end{aligned}$$

б) $\int (x^2 + x) \cdot e^{-x} dx$.

Розв'язування. Тут формулу інтегрування частинами застосуємо двічі:

$$\begin{aligned}
\int (x^2 + x) \cdot e^{-x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 + x, \quad dv = e^{-x} dx \\ du = (2x + 1) dx, \quad v = -e^{-x} \end{array} \right| = \\
&= -(x^2 + x)e^{-x} + \int (2x + 1)e^{-x} dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} u = 2x + 1, \quad dv = e^{-x} dx \\ du = 2 dx, \quad v = -e^{-x} \end{array} \right| = -(x^2 + x)e^{-x} - \\
&-(2x + 1)e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = -(x^2 + x)e^{-x} - (2x + 1)e^{-x} - 2e^{-x} \\
&+ C.
\end{aligned}$$

в) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$.

Розв'язування. Спочатку зробимо заміну змінної, а потім застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx &= \left| \begin{array}{l} x = t^2, \quad t = \sqrt{x} \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = 2 \int \frac{\arcsin t \cdot t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \\
&= \left| \begin{array}{l} u = \arcsin t, \quad dv = \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ du = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad v = -\sqrt{1-t^2} \end{array} \right| = -2\sqrt{1-t^2} \arcsin t + 2 \int dt = \\
&= -2\sqrt{1-t^2} \arcsin t + 2t + C = -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.
\end{aligned}$$

Завдання 3. Знайти інтеграли від функцій, які вміщують квадратний тричлен:

$$a) \int \frac{dx}{4x^2 - 5x + 4}.$$

Розв'язування. Зробимо коефіцієнт при x^2 рівним одиниці, а потім в знаменнику виділимо повний квадрат, щоб одержати табличний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4x^2 - 5x + 4} &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{5}{4}x + 1} = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 - 2 \cdot \frac{5}{8}x + \left(\frac{5}{8}\right)^2 - \left(\frac{5}{8}\right)^2 + 1} = \frac{1}{4} \int \frac{d\left(x - \frac{5}{8}\right)}{\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{39}{64}} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{8\left(x - \frac{5}{8}\right)}{\sqrt{39}} + C = \frac{2}{\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{8x - 5}{\sqrt{39}} + C. \end{aligned}$$

$$б) \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 7x - 3x^2}}$$

Розв'язування. Зробимо коефіцієнт при x^2 рівним мінус одиниці, а потім в підкореновому виразі виділимо повний квадрат, щоб одержати табличний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 7x - 3x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{5}{3}\right)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2 + 2 \cdot \frac{7}{6}x + \left(\frac{7}{6}\right)^2 - \left(\frac{7}{6}\right)^2 - \frac{5}{3}\right)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\left(x + \frac{7}{6}\right)}{\sqrt{-\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{109}{36}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arcsin} \frac{6\left(x + \frac{7}{6}\right)}{\sqrt{109}} + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arcsin} \frac{6x + 7}{\sqrt{109}} + C \end{aligned}$$

$$в) \int \frac{x-3}{4x^2+2x-3} dx$$

Розв'язування. Виділимо в чисельнику похідну знаменника і розіб'ємо на два інтеграли:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{4x^2+2x-3} dx &= \int \frac{\frac{1}{8}(8x+2) - \frac{1}{4} - 3}{4x^2+2x-3} dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{(8x+2)}{4x^2+2x-3} dx - \frac{13}{4} \int \frac{dx}{4x^2+2x-3}. \end{aligned}$$

Обчислимо окремо ці два інтеграли:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \int \frac{(8x+2)}{4x^2+2x-3} dx &= \left| \begin{matrix} t = 4x^2+2x-3, \\ dt = (8x+2)dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{1}{8} \ln|t| + C_1 = \frac{1}{8} \ln|4x^2+2x-3| + C_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{13}{4} \int \frac{dx}{4x^2+2x-3} &= \frac{13}{8} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{13}{8} \int \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{4}} = \frac{13}{8} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{4}\right)}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{13}{16}} = \\ &= \frac{13}{8} \cdot \frac{4}{2\sqrt{13}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4}}{x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4}} \right| + C_2 = \frac{\sqrt{13}}{4} \ln \left| \frac{4x + 1 - \sqrt{13}}{4x + 1 + \sqrt{13}} \right| + C_2. \end{aligned}$$

Запишемо відповідь:

$$\int \frac{x-3}{4x^2+2x-3} dx = \frac{1}{8} \ln|4x^2+2x-3| - \frac{\sqrt{13}}{4} \ln \left| \frac{4x+1-\sqrt{13}}{4x+1+\sqrt{13}} \right| + C,$$

де $C = C_1 + C_2$.

$$г) \int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx$$

Розв'язування. Виділимо в чисельнику похідну підкореневого виразу і розіб'ємо на два інтеграли:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x+3) - \frac{15}{2} + 2}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} - \frac{11}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}.\end{aligned}$$

Обчислимо окремо ці два інтеграли:

$$\begin{aligned}\frac{5}{2} \int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} &= \left| \begin{matrix} t = x^2 + 3x - 4, \\ dt = (2x+3)dx \end{matrix} \right| = \frac{5}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\ &= 5\sqrt{t} + C_1 = 5\sqrt{x^2+3x-4} + C_1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{11}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} &= \frac{11}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4}} = \\ &= \frac{11}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}}} = \frac{11}{4} \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} \right| + C_2.\end{aligned}$$

Запишемо відповідь:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx &= \\ &= 5\sqrt{x^2+3x-4} - \frac{11}{4} \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2+3x-4} \right| + C,\end{aligned}$$

де $C = C_1 + C_2$.

Завдання 4. Знайти інтеграли від раціональних дробів:

а) $\int \frac{2x^6+x^2}{x^2+3} dx$

Розв'язування. Так як дріб неправильний, то виділимо цілу частину, поділивши чисельник на знаменник. Одержимо

$$\frac{2x^6+x^2}{2x^6+6x^4} \quad \left| \frac{x^2+3}{2x^4-6x^2+19} \right|$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{-6x^4 + x^2}{-6x^4 - 18x^2} \\
& - \frac{19x^2}{19x^2 + 57} \\
& - 57
\end{aligned}$$

Тоді інтеграл перепишеться

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^6 + x^2}{x^2 + 3} dx &= \int \left(2x^4 - 6x^2 + 19 - \frac{57}{x^2 + 3} \right) dx = \\
&= \frac{2}{5}x^5 - 2x^3 + 19x - 19\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{3} + C.
\end{aligned}$$

б) $\int \frac{6x-2}{(x+3)(x-1)^2} dx$

Розв'язування. Дріб правильний, розкладемо його на суму простих дробів:

$$\begin{aligned}
\frac{6x-2}{(x+3)(x-1)^2} &= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \\
&= \frac{A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1) + C(x+3)}{(x+3)(x-1)^2} = \\
&= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 + 2Bx - 3B + Cx + 3C}{(x+3)(x-1)^2}
\end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в чисельниках ліворуч і праворуч, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (відносно A, B, C):

$$\begin{array}{l|l}
x^2 & A + B = 0 \\
x & -2A + 2B + C = 6 \\
x^0 & A - 3B + 3C = -2
\end{array}$$

Розв'язавши систему рівнянь, знайдемо

$$A = -\frac{5}{4}, \quad B = \frac{5}{4}, \quad C = 1.$$

Повернемось до обчислення інтеграла:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-2}{(x+3)(x-1)^2} dx &= \int \left(\frac{-\frac{5}{4}}{x+3} + \frac{\frac{5}{4}}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \\ &= -\frac{5}{4} \ln|x+3| + \frac{5}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C = \frac{5}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| - \frac{1}{x-1} + C. \end{aligned}$$

в) $\int \frac{x^2-2x+15}{(x-2)(x^2-2x+5)} dx$

Розв'язування. Раціональний дріб правильний, тому розкладемо підінтегральну функцію на суму простих дробів:

$$\frac{x^2 - 2x + 15}{(x-2)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2 - 2x + 5}.$$

В правій частині зведемо дробі до спільного знаменника

$$\begin{aligned} \frac{A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)(x - 2)}{(x-2)(x^2 - 2x + 5)} &= \\ &= \frac{Ax^2 - 2Ax + 5A + Bx^2 + Cx - 2Bx - 2C}{(x-2)(x^2 - 2x + 5)}. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в чисельниках ліворуч і праворуч, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (відносно A, B, C):

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A + B = 1 \\ x & -2A - 2B + C = -2 \\ x^0 & 5A - 2C = 15 \end{array}$$

Розв'язавши систему рівнянь, знайдемо

$$A = 3, \quad B = -2, \quad C = 0.$$

Повернемось до обчислення інтеграла:

$$\int \frac{x^2 - 2x + 15}{(x-2)(x^2 - 2x + 5)} dx = 3 \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{2x dx}{x^2 - 2x + 5} =$$

$$= 3 \ln|x-2| - \ln|x^2 - 2x + 5| - \arctg \frac{x+1}{2} + C.$$

г) $\int \frac{x^3+4x^2+9}{x^3+3x^2} dx$

Розв'язування. Так як дріб неправильний, то, виділивши цілу частину, одержимо:

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 + 9}{x^3 + 3x^2} dx = \int \frac{x^3 + 3x^2 - 3x^2 + 4x^2 + 9}{x^3 + 3x^2} dx =$$

$$= \int \left(1 + \frac{x^2 + 9}{x^3 + 3x^2} \right) dx = x + \int \frac{x^2 + 9}{x^3 + 3x^2} dx$$

Правильний дріб розкладемо на суму простих дробів:

$$\frac{x^2 + 9}{x^3 + 3x^2} = \frac{x^2 + 9}{x^2(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3} =$$

$$= \frac{A(x^2 + 3x) + B(x+3) + Cx^2}{x^2(x+3)} = \frac{Ax^2 + 3Ax + Bx + 3B + Cx^2}{x^2(x+3)}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в чисельниках ліворуч і праворуч, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (відносно A, B, C):

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A + C = 1 \\ x & 3A + B = 0 \\ x^0 & 3B = 9 \end{array}$$

Розв'язавши систему рівнянь, знайдемо

$$A = -1, \quad B = 3, \quad C = 2.$$

Повернемось до обчислення інтеграла:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x^3 + 4x^2 + 9}{x^3 + 3x^2} dx = x + \int \frac{x^2 + 9}{x^3 + 3x^2} dx = \\
& = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x+3} \right) dx = -\ln|x| - \frac{3}{x} + 2 \ln|x+3| + C = \\
& = \ln \left| \frac{(x+3)^2}{x} \right| - \frac{3}{x} + C.
\end{aligned}$$

Завдання 5. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

a) $\int \frac{dx}{\sin x + 3 \cos x + 5}$

Розв'язування. Для знаходження інтегралу застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{\sin x + 3 \cos x + 5} = \left| \begin{array}{l} t = tg \frac{x}{2}, \quad x = 2 \arctg t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \\
& = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int \frac{2dt}{2t + 3(1-t^2) + 5(1+t^2)} = \\
& = \int \frac{dt}{t^2 + t + 4} = \int \frac{dt}{t^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}t + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4} = \\
& = \int \frac{d\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} = \frac{2}{\sqrt{15}} \arctg \frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} + C = \\
& = \frac{2}{\sqrt{15}} \arctg \frac{2tg \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{15}} + C
\end{aligned}$$

б) $\int \frac{\sin^3 x dx}{2 \cos x + \sin^2 x + 2}$

Розв'язування. Підінтегральна функція є непарною відносно $\sin x$, тому зручно застосувати частинну підстановку $t = \cos x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x \, dx}{2 \cos x + \sin^2 x + 2} &= \left| t = \cos x, \, dt = -\sin x \, dx, \right| = \\ &= \int \frac{-(1-t^2)dt}{2t + (1-t^2) + 2} = \int \frac{(t^2-1)dt}{-t^2 + 2t + 3} = - \int \frac{(t-1)(t+1)dt}{(t+1)(t+3)} = \\ &= - \int \frac{t-1}{t+3} dt = - \int \frac{(t+3)-4}{t+3} dt = - \int \left(1 - \frac{4}{t+3} \right) dt = \\ &= -t + 4 \ln|t+3| + C = -\cos x + 4 \ln|\cos x + 3| + C. \end{aligned}$$

в) $\int \sin^4 2x \, dx$

Розв'язування. Використаємо формулу зниження степеня:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 2x \, dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 4x + \cos^2 4x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(\int dx - 2 \int \cos 4x dx + \int \frac{1 + \cos 8x}{2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{64} \sin 8x + C = \\ &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 8x + C. \end{aligned}$$

г) $\int tg^7 x \, dx$

Розв'язування. Використаємо тригонометричну формулу $tg^2 x =$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \sec^2 x - 1:$$

$$\begin{aligned} \int tg^7 x \, dx &= \int tg^5 x \, tg^2 x \, dx = \int tg^5 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \int tg^5 x \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int tg^3 x \, tg^2 x \, dx = \int tg^5 x \, d(tg x) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int tg^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{1}{6} tg^6 x - \int tg^3 x d(tg x) + \int tg^3 x dx = \\
& = \frac{1}{6} tg^6 x - \frac{1}{4} tg^4 x + \int tg x tg^2 x dx = \frac{1}{6} tg^6 x - \frac{1}{4} tg^4 x + \\
& + \int tg x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{1}{6} tg^6 x - \frac{1}{4} tg^4 x + \frac{1}{2} tg^2 x + \ln |\cos x| + C
\end{aligned}$$

д) $\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx$

Розв'язування. Перетворимо добуток тригонометричних функцій в суму і обчислимо інтеграл:

$$\begin{aligned}
\int \sin 5x \cos 3x dx &= \int \frac{1}{2} [\sin(5+3)x + \sin(5-3)x] dx = \\
&= \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin 2x) dx = -\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{4} \cos 2x + C
\end{aligned}$$

Завдання 6. Знайти інтеграли від ірраціональних функцій:

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

Розв'язування. Щоб звільнитись від ірраціональності, зробимо заміну $x+1 = t^2$, а потім обчислимо інтеграл:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} &= \left| \begin{matrix} x-1 = t^2, & x = t^2+1, \\ t = \sqrt{x-1}, & dx = 2t dt \end{matrix} \right| = \int \frac{2t dt}{(t^2+1)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = \\
&= 2 \arctg t + C = 2 \arctg \sqrt{x-1} + C
\end{aligned}$$

б) $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}$

Розв'язування. Щоб звільнитись від ірраціональності, зробимо заміну $x = t^6$, а потім обчислимо інтеграл:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} &= \left| x = t^6, \quad t = \sqrt[6]{x}, \quad dx = 6t^5 dt \right| = \int \frac{t^2 6t^5 dt}{t^6(t^3 + t^2)} = 6 \int \frac{dt}{t(t+1)} = \\
&= 6 \int \frac{dt}{t^2 + t} = 6 \int \frac{dt}{t^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}t + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 6 \int \frac{d\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \\
&= 6 \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln \left| \frac{t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right| + C = 6 \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + C = 6 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x} + 1} \right| + C
\end{aligned}$$

в) $\int \frac{\sqrt{3-x^2} dx}{x^2}$

Розв'язування. Щоб звільнитись від ірраціональності, зробимо заміну

$x = \sqrt{3} \sin t$ (можна також $x = \sqrt{3} \cos t$), а потім обчислимо інтеграл:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{3-x^2} dx}{x^2} &= \left| x = \sqrt{3} \sin t, \quad t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad dx = \sqrt{3} \cos t dt \right| = \\
&= \int \frac{\sqrt{3-3\sin^2 t} \sqrt{3} \cos t dt}{3 \sin^2 t} = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \\
&= \int \operatorname{ctg}^2 t dt = \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = -\operatorname{ctg} t - t + C = \\
&= -\operatorname{ctg} \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} \right) - \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{1/4}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$

Розв'язування. Застосуємо метод підстановки:

$$\int_{1/4}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{t}, \quad t = \frac{1}{x}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}, \\ x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 4, \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \int_4^1 \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{1+4 \frac{1}{t^2}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 4}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 + 4} \right| \Big|_1^4 = \\
&= \ln |4 + 2\sqrt{5}| - \ln |1 + \sqrt{5}| = \ln \left| \frac{4 + 2\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right|.
\end{aligned}$$

б) $\int_2^3 x \ln(x-1) dx$

Розв'язування. Застосуємо формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі:

$$\begin{aligned}
\int_2^3 x \ln(x-1) dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln(x-1), \quad dv = x dx, \\ du = \frac{dx}{x-1}, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln|x-1| \Big|_2^3 - \\
&- \int_2^3 \frac{x^2 dx}{2(x-1)} = \frac{x^2}{2} \ln|x-1| \Big|_2^3 - \frac{1}{2} \int_2^3 \left(x+1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = \\
&= \frac{9}{2} \ln 2 - 2 \ln 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| \right) \Big|_2^3 = \frac{9}{2} \ln 2 - \\
&- \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} + 3 + \ln 2 - 2 - 2 - \ln 1 \right) = 4 \ln 2 - \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

в) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$

Розв'язування. Застосуємо метод підстановки:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx &= \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t^2, \quad x = \ln|t^2 + 1|, \\ t = \sqrt{e^x - 1}, \quad dx = \frac{2t dt}{t^2 + 1}, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \\ x = \ln 5 \Rightarrow t = 2 \end{array} \right| = \\
&= \int_0^2 \frac{(t^2 + 1)t}{t^2 + 1 + 3} \cdot \frac{2t dt}{t^2 + 1} = 2 \int_0^2 \frac{t^2}{t^2 + 4} dt = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2 + 4} \right) dt = \\
&= 2 \left(t - 4 \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{t}{2} \right) \Big|_0^2 = 2(2 - 2 \arctg 1 - 0 + 2 \arctg 0) = 4 - \pi
\end{aligned}$$

$$г) \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

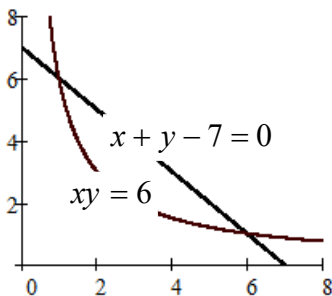
Розв'язування. Внесемо x під знак диференціалу:

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}} &= \left(-\frac{1}{2}\right) \int_1^{\sqrt{2}} (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(4-x^2) = \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot \sqrt{4-x^2} \Big|_1^{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Завдання 8. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями:

а) $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.

Розв'язування. Побудуємо в прямокутній декартовій системі координат



графіки функцій та знайдемо абсциси точок перетину цих графіків.

$$\begin{cases} y = \frac{6}{x}, \\ y = 7 - x. \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{x} = 7 - x,$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 6.$$

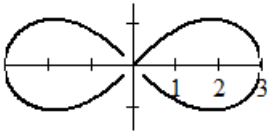
Площа даної фігури дорівнює різниці площ криволінійних

трапецій, утворених прямою $x + y - 7 = 0$ і гіперболою $xy = 6$ на відрізку $[1; 6]$. Використаємо формулу обчислення площі криволінійної трапеції за допомогою визначеного інтегралу:

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx = \int_1^6 \left(7 - x - \frac{6}{x}\right) dx = \left(7x - \frac{x^2}{2} - 6 \ln x\right) \Big|_1^6 \\ &= 42 - 18 - 6 \ln 6 - 7 + \frac{1}{2} + 6 \ln 1 = 17\frac{1}{2} - 6 \ln 6. \end{aligned}$$

а) $r = 3\sqrt{\cos 2\phi}$.

Розв'язування. Побудуємо графік функції в полярній системі координат.



Врахувавши симетрію, встановимо межі інтегрування $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$. Використаємо формулу обчислення площі криволінійного сектора в полярній системі координат:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r(\phi)]^2 d\phi = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 9 \cdot (\sqrt{\cos 2\phi})^2 d\phi = \\ &= 18 \int_0^{\pi/4} \cos 2\phi d\phi = 9 \sin 2\phi \Big|_0^{\pi/4} = 9 \sin \frac{\pi}{2} - 9 \sin 0 = 9(\text{од.})^2 \end{aligned}$$

Завдання 9. Обчислити довжину дуги кривої:

а) $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \leq x \leq 1/4$.

Розв'язування. Знайдемо похідну функції $y' = -\frac{2x}{1-x^2}$ і підставимо її в формулу для обчислення довжини дуги кривої:

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \\ &= \int_0^{1/4} \sqrt{1 + \left(-\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} dx = \int_0^{1/4} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \\ &= \int_0^{1/4} \left(-1 + \frac{2}{1-x^2}\right) dx = \left(-x + \ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) \Big|_0^{1/4} = \\ &= -\frac{1}{4} + \ln \frac{5}{3} + 0 - \ln 1 = \ln \frac{5}{3} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$6) \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Розв'язування. Функція задана в параметричному вигляді, то довжина дуги кривої обчислюється за формулою:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Знайдемо похідні і підставимо у вказану формулу:

$$x'(t) = 2t \sin t + (t^2 - 2) \cos t + 2 \cos t - 2t \sin t = t^2 \cos t,$$

$$y'(t) = -2t \cos t - (2 - t^2) \sin t + 2 \sin t + 2t \cos t = t^2 \sin t.$$

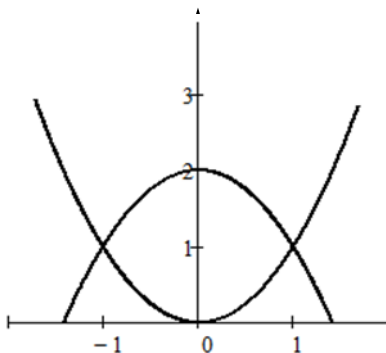
$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \sqrt{(t^2 \cos t)^2 + (t^2 \sin t)^2} dt = \int_0^\pi \sqrt{t^4 \cos^2 t + t^4 \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^\pi t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^\pi = \frac{\pi^3}{3} \end{aligned}$$

Завдання 10. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої заданими лініями, навколо осі Ox :

$$y = 2 - x^2, \quad y = x^2.$$

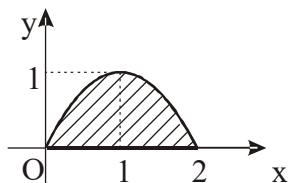
Розв'язування. Зробимо малюнок та знайдемо точки перетину графіків: $(-1,1)$; $(1,1)$. Врахувавши симетрію та використавши формулу для знаходження об'єму тіла обертання: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$, одержимо:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (x^2)^2] dx = 2\pi \int_0^1 (4 - 4x^2) dx = \\ &= 2\pi \left(4x - \frac{4}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(4 - \frac{4}{3} \right) = \frac{16}{3} \pi (\text{од.})^3. \end{aligned}$$



Завдання 11. Знайти координати центру ваги плоскої фігури, яка обмежена дугою параболи $y = 2x - x^2$ та віссю Ox .

Розв'язання. Так як фігура симетрична відносно прямої $x = 1$, то $x_c =$



1. Використовуючи формулу $y_c = M_x/S$, отримуємо:

$$S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3};$$

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} x^3 - x^4 + \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{15}; \quad y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{4} = 0,4. \end{aligned}$$

Завдання 12. Обчислити наближено довжину дуги кривої $y = 2x^3$ $0 \leq x \leq 2$ (розбити заданий проміжок на 10 частин і значення

підінтегральної функції обчислювати з точністю до четвертого знаку після коми): а) за формулою трапецій; б) за формулою Сімпсона.

Розв'язування. Застосувавши формулу для обчислення довжини дуги, отримуємо

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + 36x^4} dx.$$

Знайдемо потрібні значення підінтегральної функції $f(x) = \sqrt{1 + 36x^4}$:

i	0	1	2	3	4	5
x _i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y _i	1	1,0284	1,3862	2,3803	3,9681	6,0828

i	6	7	8	9	10
y _i	1,2	1,4	1,6	1,8	2
f(x _i)	8,6977	11,8024	15,3925	19,4657	24,0208

а) Застосовуємо формулу трапецій ($n = 10$)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right).$$

Отримуємо

$$l \approx \frac{2-0}{10} \left(\frac{1 + 24,0208}{2} + 1,0284 + 1,3862 + 2,3803 + 3,9681 + \right. \\ \left. + 6,0828 + 8,6977 + 11,8024 + 15,3925 + 19,4657 \right) = 16,5429.$$

б) Застосовуємо формулу Сімпсона ($n = 5$):

$$l \approx \frac{2}{30} [y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)] = \\ = \frac{1}{15} [1 + 24,0208 + 2(1,3862 + 3,9681 + 8,6977 + 15,3925) + \\ + 4(1,0284 + 2,3803 + 6,0828 + 11,8024 + 19,4657)] \approx 16,4632.$$

Завдання 13. Обчислити невластні інтеграли першого та другого роду або встановити їх розбіжність:

а) $\int_0^{+\infty} x^3 \cdot e^{-x^2} dx$.

Розв'язування. За означенням невластного інтегралу першого роду маємо:

$$\int_0^{+\infty} x^3 \cdot e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x^3 \cdot e^{-x^2} dx.$$

Для обчислення визначеного інтегралу застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x^3 \cdot e^{-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad dv = x \cdot e^{-x^2} dx, \\ du = 2x dx, \quad v = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-x^2} \Big|_0^b + \int_0^b x \cdot e^{-x^2} dx \right] = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-x^2} \Big|_0^b - \frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^b \right] = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} b^2 \cdot e^{-b^2} - \frac{1}{2} e^{-b^2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Невластний інтеграл збігається.

б) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$.

Розв'язування. Точка $x = 1$ є особливою точкою, тому що підінтегральна функція $\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ має в ній нескінченний розрив. За означенням невластного інтегралу другого роду маємо:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x-1 = t^2, \quad x = t^2 + 1, \\ t = \sqrt{x-1}, \quad dx = 2t dt, \\ x = 1 + \varepsilon \Rightarrow t = \varepsilon, \\ x = 2 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{(t^2 + 1) 2t dt}{t} = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 (t^2 + 1) dt = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left(\frac{t^3}{3} + t \right) \right]_{\varepsilon}^1 = \\
&= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} + 1 - \frac{\varepsilon^3}{3} - \varepsilon \right) = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Невласний інтеграл збігається.

Індивідуальні завдання до розділу “Інтегральне числення функції однієї змінної”

Завдання 1. Знайти інтеграли, користуючись таблицею інтегралів і найпростішими правилами інтегрування:

1. а) $\int \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x}} dx$

б) $\int \frac{e^{3x} + 2e^{2x}}{e^{2x}} dx$

в) $\int \frac{1 + 3 \operatorname{tg}^2 x}{\sin^2 x} dx$

г) $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$

д) $\int \frac{(4x-1)^2}{x^3} dx$

е) $\int 5^x \left(1 + \frac{5^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$

є) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x \sin x} dx$

ж) $\int \frac{1 + 3 \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$

2. а) $\int \left(\frac{3}{x^2 - 9} - \frac{1}{2x^2 + 8} \right) dx$

б) $\int \left(\frac{4^x}{1 + 5x^2} - \frac{4^{2x}}{7} \right) 4^{-x} dx$

$$\text{B)} \int \frac{e^x + \sqrt{x^2 + 4}}{e^x \sqrt{x^2 + 4}} dx$$

$$\text{Г)} \int \left(\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}} - \frac{4}{2x^2 + 16} \right) dx$$

$$\text{Д)} \int \frac{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{е)} \int \left(2^x - \frac{5}{\sqrt{4 - x^2}} \right) dx$$

$$\text{е)} \int (\cos(2x + 9) - 3(2 - 5x)^4) dx \quad \text{ж)} \int (6x - 7)^3 dx$$

$$3. \text{ а)} \int 4^{1-2x} dx$$

$$\text{б)} \int \cos(3x - 1) dx$$

$$\text{B)} \int \frac{2dx}{\sqrt{3x+12}}$$

$$\text{Г)} \int \left(\frac{3^x}{2+7x^2} - \frac{3^{2x}}{5} \right) 3^{-x} dx$$

$$\text{Д)} \int \frac{dx}{\sin^2(4x-3)}$$

$$\text{е)} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x-3)^2}}$$

$$\text{е)} \int e^x \left(\frac{5}{e^x \sqrt{9-x^2}} - \frac{3 \cdot e^{-x}}{x^2 + 4} \right) dx \quad \text{ж)} \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

$$4. \text{ а)} \int \left(\frac{5}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{2}{\sin^2 x} + 7^x \right) dx \quad \text{б)} \int \left(3x^2 - x\sqrt[4]{x} - \frac{2}{x^3} \right) dx$$

$$\text{B)} \int \left(e^{4x+1} + \frac{3}{\cos^2 3x} \right) dx \quad \text{Г)} \int \left(\frac{2}{\sqrt{2-9x^2}} + \sin(1-5x) \right) dx$$

$$\text{Д)} \int 7x^6(3+x^7)^5 dx \quad \text{е)} \int \left(x^2 \cos(1-4x^3) + \frac{3}{x \ln^5 x} \right) dx$$

$$\text{е)} \int \frac{x}{3x^2+1} dx \quad \text{ж)} \int \frac{1-\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$$

$$5. \text{ а)} \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{3}{\cos^2 x} + e^x \right) dx \quad \text{б)} \int \left((2 + \sqrt[3]{x})^2 + \frac{2}{x^5} \right) dx$$

$$\text{B)} \int ((3+5x)^9 - 4^{1-2x}) dx \quad \text{Г)} \int \left(\frac{2}{1+9x^2} - \frac{3}{2-4x} \right) dx$$

$$\text{Д)} \int 6x^5 \sin(x^6 + 5) dx \quad \text{е)} \int \left(\frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} + \frac{\operatorname{ctg}^6 x}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$\text{е)} \int e^{-x^2} \cdot x dx \quad \text{ж)} \int \frac{dx}{x(\ln^2 x + 9)}$$

$$6. \text{ а) } \int \left(\frac{2}{x} - 3 \sin x + 2 \cdot 5^x \right) dx \quad \text{б) } \int \left(x^3 - \sqrt{x^3} + \frac{4}{x^9} \right) dx$$

$$\text{в) } \int \left(e^{3x-1} + \frac{3}{\sin^2(1-2x)} \right) dx \quad \text{г) } \int \left(\frac{3}{5+16x^2} - \cos(5x) \right) dx$$

$$\text{д) } \int 3x^2 e^{x^3} dx \quad \text{е) } \int \left(\frac{x}{5x^2-4} + \frac{e^x}{1+e^{2x}} \right) dx$$

$$\text{е) } \int \frac{dx}{x \cdot \ln x} \quad \text{ж) } \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{1+\operatorname{ctg} x}}$$

$$7. \text{ а) } \int \left(2 \cos x - \frac{2}{\sin^2 x} + 4e^x \right) dx \quad \text{б) } \int \left((3 - \sqrt{x})^3 + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$\text{в) } \int \left(\frac{4}{3x+2} - \sin(1-4x) \right) dx \quad \text{г) } \int \left(\frac{2}{\sqrt{9x^2+5}} - 4^{1-3x} \right) dx$$

$$\text{д) } \int (5x^4(3+x^5)^7) dx \quad \text{е) } \int \left(\frac{3}{x \ln^5 x} + \frac{x^2}{\cos^2 x^3} \right) dx$$

$$\text{е) } \int 5^{\sin 2x} \cdot \cos 2x dx \quad \text{ж) } \int \frac{x+2}{x^2+16} dx$$

$$8. \text{ а) } \int \left(\frac{1}{4+x^2} - 3e^x + \frac{4}{x} \right) dx \quad \text{б) } \int \left((2x^2+1)^3 - \frac{4}{x^5} \right) dx$$

$$\text{в) } \int (\sin(3x) - 3(1-4x)^8) dx \quad \text{г) } \int \left(\frac{5}{4x^2-9} - 3^{2-5x} \right) dx$$

$$\text{д) } \int 7x^6 \cos x^7 dx \quad \text{е) } \int \left(\frac{x^4}{\sin^2(1+2x^5)} - \right.$$

$$\left. \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$\text{е) } \int \frac{x^2}{3x^3+5} dx$$

$$\text{ж) } \int \frac{x-3}{2x^2+4} dx$$

$$\begin{array}{ll}
9. \text{ а) } \int \left(3 \sin x + 4^x - \frac{2}{x^2+1} \right) dx & \text{б) } \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right)^2 dx \\
\text{в) } \int \left(\frac{2}{\cos^2(4x)} - \frac{3}{1-5x} \right) dx & \text{г) } \int \left(\frac{3}{\sqrt{1-25x^2}} + (3+4x)^4 \right) dx \\
\text{д) } \int \frac{5x^4}{3+x^2} dx & \text{е) } \int \left(x^3 \cos(1-2x^4) + \frac{ctg^4 x}{\sin^2 x} \right) dx \\
\text{е) } \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{tg x + 4}} & \text{ж) } \int \frac{x^3}{(x^4+2)^2} dx
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
10. \text{ а) } \int \left(5 \cdot 3^x - 2 \cos x + \frac{4}{\sqrt{9-x^2}} \right) dx & \text{б) } \int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} \right)^3 dx \\
\text{в) } \int \left(e^{2x+3} - \frac{3}{\sin^2(1-2x)} \right) dx & \text{г) } \int \left(3 \sin x + 4^x - \frac{2}{x^2+1} \right) dx \\
\text{д) } \int 9x^8(1+x^9)^5 dx & \text{е) } \int \left(\frac{2^x}{3+2^x} + \frac{x^3}{\cos^2(x^4+1)} \right) dx \\
\text{е) } \int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx & \text{ж) } \int \frac{dx}{\cos^2 x(4+tg^2 x)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
11. \text{ а) } \int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sin^2 x} - 4^x \right) dx & \text{б) } \int \left(\frac{5}{x^3} + 2x^2 \cdot \sqrt{x} \right) dx \\
\text{в) } \int (\cos(4x-3) + 3e^{3x}) dx & \text{г) } \int \left(\frac{5}{4x^2+9} + (5x-3)^4 \right) dx \\
\text{д) } \int \frac{x^4+x+2}{x^2-9} dx & \text{е) } \int \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)^2} dx \\
\text{е) } \int \frac{x^2+5}{(x-3)(x^2-4x+10)} dx & \text{ж) } \int \frac{x^4+4}{x^4-x^2} dx
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
12. \text{ а) } \int \frac{x^3+5}{x^2+4} dx & \text{б) } \int \frac{3x-1}{(x+2)(2x-1)^2} dx \\
\text{в) } \int \frac{9x+1}{(x-4)(x^2+6x+12)} dx & \text{г) } \int \frac{x^3+1}{x^3-3x^2+2x} dx
\end{array}$$

$$\text{д)} \int \frac{2x^2+x+1}{x^2-1} dx$$

$$\text{е)} \int \frac{3x-5}{(x+1)(x^2-8x+17)} dx$$

$$\text{е)} \int \frac{x^3+2x+8}{x^3+x^2} dx$$

$$\text{ж)} \int \frac{x^5+x^2-3}{x^2+9} dx$$

$$13. \text{ а)} \int \frac{x^2+1}{(3x-1)(x+1)^2} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{x+4}{(x-2)(x^2+10x+26)} dx$$

$$\text{в)} \int \frac{2x^4+3}{x^4-1} dx \quad \text{г)} \int \frac{x^4+x^3+2}{x^2-4} dx$$

$$\text{д)} \int \frac{3x+5}{(4x+1)(x+2)^2} dx$$

$$\text{е)} \int \frac{x^2+3}{(x-3)(x^2+2x+8)} dx$$

$$\text{е)} \int \frac{4x^3+2x^2+5}{x^3+7x^2} dx$$

$$\text{ж)} \int \frac{3x^3+5}{x^2+16} dx$$

$$14. \text{ а)} \int \frac{7x+1}{(2x+3)(x+4)^2} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{x+3}{(x-1)(x^2-4x+9)} dx$$

$$\text{в)} \int \frac{x^3+4x^2+5}{x^3-5x^2+6x} dx$$

$$\text{г)} \int \frac{x^2+3x+1}{x^2-3} dx$$

$$\text{д)} \int \frac{5x+3}{(3x+1)(x+5)^2} dx$$

$$\text{е)} \int \frac{x^2+3x-1}{(x-2)(x^2-x+2)} dx$$

$$\text{е)} \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$$

$$\text{ж)} \int \frac{x^4+4}{x^2+5} dx$$

$$15. \text{ а)} \int \frac{x^2+1}{(4x-3)(x+4)^2} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{2x+5}{(x+4)(x^2-2x+5)} dx$$

$$\text{в)} \int \frac{x^3+1}{x^3+x^2} dx \quad \text{г)} \int \frac{x^3+x^2+6}{x^2-16} dx$$

$$\text{д)} \int \frac{3x+7}{(3x-1)(x+1)^2} dx$$

$$\text{е)} \int \frac{x^2+2}{(x-5)(x^2-3x+3)} dx$$

$$\text{е)} \int \frac{x^4-8}{x^4-4x^2} dx$$

$$\text{ж)} \int \frac{x^2+3x+1}{x^2+7} dx$$

$$16. \text{ а) } \int \frac{5}{(4x-1)(x+3)^2} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{x^2-8}{(x-1)(x^2-4x+5)} dx$$

$$\text{в) } \int \frac{2x^3-3}{x^3-4x^2+3x} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{3x^3+1}{x^2-7} dx$$

$$\text{д) } \int \frac{x+1}{(3x+1)(x-5)^2} dx$$

$$\text{е) } \int \frac{x-2}{(x+3)(x^2+4x+6)} dx$$

$$\text{е) } \int \frac{x^3+8}{x^3+4x^2+4x} dx$$

$$\text{ж) } \int \frac{x^4+5}{x^2+8} dx$$

$$17. \text{ а) } \int \frac{2x-1}{(4x+1)(x+1)^2} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{x+3}{(x-2)(x^2-3x+5)} dx$$

$$\text{в) } \int \frac{x^3+5}{x^3+2x^2+x} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{x^2+2x}{x^2-4} dx$$

$$\text{д) } \int \frac{3x+2}{(2x-3)(x-2)^2} dx$$

$$\text{е) } \int \frac{x^2-5}{(x+2)(x^2+3x+4)} dx$$

$$\text{е) } \int \frac{2x^3-x+1}{x^3-x^2} dx$$

$$\text{ж) } \int \frac{2x^3-x+1}{x^2+9} dx$$

$$18. \text{ а) } \int \frac{x-4}{(x+3)(x-1)^2} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{x-6}{(x+3)(x^2-2x+5)} dx$$

$$\text{в) } \int \frac{x^4-1}{x^3-2x^2} dx \quad \text{г) } \int \frac{x^4+5}{x^2-9} dx$$

$$\text{д) } \int \frac{3x-5}{(x+4)(x+1)^2} dx$$

$$\text{е) } \int \frac{3x-7}{(x+1)(x^2-x+3)} dx$$

$$\text{е) } \int \frac{x^3-x-4}{x^3+8x^2+16x} dx$$

$$\text{ж) } \int \frac{4x^2+3}{x^2+2} dx$$

$$19. \text{ а) } \int \frac{2x+3}{(3x-1)(x+3)^2} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{5x+4}{(x+4)(x^2+x+2)} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{3x^3-1}{x^3+9x^2} dx \quad \text{Г)} \int \frac{2x^4+x+3}{x^2+9} dx$$

$$\text{Д)} \int \frac{3x-1}{(x+1)(x-2)^2} dx \quad \text{Е)} \int \frac{2x^2+5}{(x+3)(x^2-3x+10)} dx$$

$$\text{Є)} \int \frac{3x^4+5}{x^3+2x^2+x} dx \quad \text{Ж)} \int \frac{3x^3+4}{x^2-4} dx$$

$$20. \text{ а)} \int \frac{2x+1}{(x-2)(2x+1)^2} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{7x-1}{(x-3)(x^2-5x+12)} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{2x^3-11}{x^3+4x^2+4x} dx$$

$$\text{Г)} \int \frac{3x^2-x+2}{x^2+1} dx$$

$$\text{Д)} \int \frac{3x-4}{(x+3)(x-4)^2} dx$$

$$\text{Е)} \int \frac{2x+5}{(x-1)(x^2-7x+17)} dx$$

$$\text{Є)} \int \frac{4x^3+5}{x^3-4x^2} dx$$

$$\text{Ж)} \int \frac{2x^5-x^2+2}{x^2-9} dx$$

$$21. \text{ а)} \int \frac{3x^2-1}{(3x+1)(x-1)^2} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{2x+4}{(x+2)(x^2+9x+25)} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{2x^3+7}{x^3-6x^2+9x} dx$$

$$\text{Г)} \int \frac{3x^4+2x^3+1}{x^2+4} dx$$

$$\text{Д)} \int \frac{2x-5}{(4x-1)(x-2)^2} dx$$

$$\text{Е)} \int \frac{5x^2-2}{(x+3)(x^2-x+8)} dx$$

$$\text{Є)} \int \frac{2x^3+x+1}{x^3+6x^2} dx$$

$$\text{Ж)} \int \frac{2x^3+7}{x^2-16} dx$$

$$22. \text{ а)} \int \frac{6x-1}{(2x-3)(x-4)^2} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{2x+5}{(x+1)(x^2+3x+9)} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{5x^3+1}{x^3-8x^2+16x} dx$$

$$\text{Г)} \int \frac{3x^2+x-1}{x^2+3} dx$$

$$\text{Д)} \int \frac{5x-2}{(3x-1)(x-5)^2} dx$$

$$\text{Е)} \int \frac{2x^2-3x+1}{(x+2)(x^2+x+2)} dx$$

$$\text{е)} \int \frac{4x^3+5}{x^3-4x^2} dx$$

$$\text{ж)} \int \frac{2x^4-3}{x^2-5} dx$$

$$23. \text{ а)} \int \frac{3x^2+5}{(4x+3)(x-4)^2} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{2x-3}{(x-4)(x^2+x+5)} dx$$

$$\text{в)} \int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+4} dx \quad \text{г)} \int \frac{3x^3+x^2-5}{x^2+16} dx$$

$$\text{д)} \int \frac{2x+1}{(3x+1)(x+2)^2} dx \quad \text{е)} \int \left(x^6 \cos(2x^7 - 9) + \frac{5 \ln^5 x}{x} \right) dx$$

$$\text{е)} \int \frac{8x^3-x+1}{x^3+5x^2} dx$$

$$\text{ж)} \int \frac{x^2+x+3}{x^2-7} dx$$

$$24. \text{ а)} \int \frac{5x-1}{(4x+1)(x-3)^2} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{x^2+6}{(x-3)(x^2+3x+5)} dx$$

$$\text{в)} \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx$$

$$\text{г)} \int \frac{2x^3-1}{x^2+7} dx$$

$$\text{д)} \int \frac{2x-5}{(3x-1)(x+5)^2} dx$$

$$\text{е)} \int \frac{3x+1}{(x-3)(x^2-3x+6)} dx$$

$$\text{е)} \int \frac{3x^2+x-4}{x^3+8x^2} dx$$

$$\text{ж)} \int \frac{5x^4+1}{x^2-8} dx$$

$$25. \text{ а)} \int \frac{3x+1}{(4x-1)(x-1)^2} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{2x-5}{(x+2)(x^2+2x+5)} dx$$

$$\text{в)} \int \frac{3x^3+1}{x^3+6x^2+9x} dx \quad \text{г)} \int \frac{2x^2+1}{x^2+4} dx$$

$$\text{д)} \int \frac{2x-3}{(2x+3)(x+2)^2} dx$$

$$\text{е)} \int \frac{x^2+5}{(x-2)(x^2-3x+4)} dx$$

$$\text{е)} \int \frac{x^3+7}{x^3-x^2-x+1} dx$$

$$\text{ж)} \int \frac{3x^3+2x+4}{x^2-9} dx$$

$$26. \text{ а) } \int \frac{2x-9}{(x-3)(x+1)^2} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{x^2+4x}{(x-3)(x^2-x+2)} dx$$

$$\text{в) } \int \frac{x^3-1}{x^3+x^2} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{\sqrt{7x-12-x^2}}$$

$$\text{д) } \int \frac{5x+2}{2x^2-12x+3} dx$$

$$\text{е) } \int \frac{7x+1}{\sqrt{-x^2+2x+4}} dx$$

$$\text{е) } \int \frac{dx}{3x^2+42x+1}$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{\sqrt{5x-4-x^2}}$$

$$27. \text{ а) } \int \frac{6x-5}{x^2+4x+5} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{5x-4}{\sqrt{x^2+10x+29}} dx$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{x^2-12x+32}$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{\sqrt{3x+4-x^2}}$$

$$\text{д) } \int \frac{4x+1}{4x^2+16x+3} dx$$

$$\text{е) } \int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-16x+65}} dx$$

$$\text{е) } \int \frac{dx}{x^2+4x-5}$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}$$

$$28. \text{ а) } \int \frac{3x+2}{2x^2-2x+1} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{9x-2}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{4x^2+24x+1}$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$$

$$\text{д) } \int \frac{7x-4}{x^2-5x+2} dx$$

$$\text{е) } \int \frac{8x+3}{\sqrt{x^2-4x-12}} dx$$

$$\text{е) } \int \frac{dx}{x^2-4x+3}$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$$

$$29. \text{ а) } \int \frac{2x+5}{3x^2+5x-3} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+4}} dx$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{4x^2-8x+1}$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$$

$$\text{д) } \int \frac{3x+4}{x^2+3x-4} dx$$

$$\text{е) } \int \frac{5x+2}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx$$

$$\epsilon) \int \frac{dx}{9x^2+6x+1}$$

$$\text{ж}) \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$$

$$30. \text{ а) } \int \frac{x-5}{2x^2+6x-2} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{4x-3}{\sqrt{4x^2+12x+8}} dx$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{5x^2-10x-1}$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{\sqrt{7x-12-x^2}}$$

$$\text{д) } \int \frac{5x+4}{x^2-6x+10} dx$$

$$\text{е) } \int \frac{2x-3}{\sqrt{-6x-x^2-5}} dx \quad \epsilon)$$

$$\epsilon) \int \frac{dx}{2x^2-4x+1}$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{\sqrt{5x-x^2-4}}$$

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами:

$$1. \text{ а) } \int \frac{dx}{3x^2-42x-1}$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$$

$$\text{в) } \int \frac{5x-6}{x^2-4x+3} dx$$

$$2. \text{ а) } \int \frac{4x-5}{\sqrt{x^2-10x+29}} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{x^2+16x+65}$$

$$\text{в) } \int \frac{x \cdot \arccotg x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$3. \text{ а) } \int \frac{x+4}{4x^2-16x+1} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{5x-3}{\sqrt{x^2-12x+32}} dx$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{x^2-4x+5}$$

$$4. \quad \text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{10x-x^2-16}} \qquad \text{б) } \int (3x+x^2) \cdot \cos x \, dx$$

$$\text{B) } \int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-3x-7}} dx$$

$$5. \quad \text{a) } \int \left(\frac{x}{2} + 5\right) \cos 4x \, dx \quad \text{б) } \int \left(1 + \frac{x^2}{4}\right) \cdot e^x \, dx$$

$$\text{B) } \int x \arctg x \, dx$$

$$6. \quad \text{a) } \int x^3 \ln x \, dx \qquad \text{б) } \int (3x^2 - x) \cos \frac{x}{4} \, dx$$

$$\text{B) } \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} \, dx$$

$$7. \quad \text{a) } \int \left(1 - \frac{x}{3}\right) \sin x \, dx \quad \text{б) } \int \left(\frac{x^2}{3} - 3\right) \cdot 4^x \, dx$$

$$\text{B) } \int e^{\arccos x} \, dx$$

$$8. \quad \text{a) } \int \arccos \frac{x}{3} \, dx \qquad \text{б) } \int \frac{1-x^2}{5^x} \, dx$$

$$\text{B) } \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$$

$$9. \quad \text{a) } \int (2 - 5x) \cos x \, dx \quad \text{б) } \int \frac{x^2+5}{e^{2x}} \, dx$$

$$\text{B) } \int \frac{x \, dx}{\cos^2 x}$$

$$10. \quad \text{a) } \int 9x 5^{2-x} \, dx \qquad \text{б) } \int 6x^2 \sin \frac{x}{5} \, dx$$

$$\text{B)} \int \cos(\ln x) dx$$

$$11. \text{ a) } \int 3x \ln(x+1) dx \quad \text{б) } \int (x^2 + 1) \sin \frac{x}{2} dx$$

$$\text{B)} \int \sqrt{1-x^2} dx$$

$$12. \text{ a) } \int x^2 \ln x dx \quad \text{б) } \int (1-x^2) \cos \frac{x}{4} dx$$

$$\text{B)} \int \operatorname{arccotg} \sqrt{x} dx$$

$$13. \text{ a) } \int (4+5x) 2^{x+3} dx \quad \text{б) } \int 2x^2 \cdot e^{3x} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$14. \text{ a) } \int x \operatorname{arctg} 2x dx \quad \text{б) } \int \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) \sin 2x dx$$

$$\text{B)} \int e^{4x} \sin x dx$$

$$15. \text{ a) } \int \ln x \cdot (3x+2) dx \quad \text{б) } \int (5+x^2) \sin 4x dx$$

$$\text{B)} \int e^{3x} \cos x dx$$

$$16. \text{ a) } \int (4x-1) e^{-3x} dx \quad \text{б) } \int (x^2-2) \sin \frac{x}{3} dx$$

$$\text{B)} \int x \operatorname{arcctg} x dx$$

$$17. \text{ a) } \int 5x \log_2 x dx \quad \text{б) } \int (x^2+4) \cdot 3^x dx$$

$$\text{B)} \int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$18. \text{ a)} \int \frac{x}{4} \arctg$$

$$\text{б)} \int 4x^2 \cdot e^{-2x} dx$$

$$\text{B)} \int e^x \sin 3x dx$$

$$19. \text{ a)} \int (9 - 3x) 9^{1-2x} dx \quad \text{б)} \int (1 - 2x^2) \cos \frac{x}{3} dx$$

$$\text{B)} \int \lg(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$$

$$20. \text{ a)} \int (\frac{1}{2}x - 1) 5^{x+2} dx \quad \text{б)} \int (\frac{x^2}{3} - 1) \cdot 4^x dx$$

$$\text{B)} \int \frac{x dx}{\sin^2 x}$$

$$21. \text{ a)} \int (2x - 1) e^{-3x} dx \quad \text{б)} \int 3x^2 \sin 5x dx$$

$$\text{B)} \int \sin(\ln x) dx$$

$$22. \text{ a)} \int (1 - x) \cos 3x dx \quad \text{б)} \int (2 - 3x^2) \cos \frac{x}{3} dx$$

$$\text{B)} \int \sqrt{4 + x^2} dx$$

$$23. \text{ a)} \int 5x \sin 3x dx \quad \text{б)} \int (5 - 2x^2) \cdot 2^x dx$$

$$\text{B)} \int \arctg x dx$$

$$24. \text{ a)} \int (2x - 4) 3^x dx \quad \text{б)} \int (2 + 3x^2) \sin 2x dx$$

$$\text{в)} \int \operatorname{arcctg} x \, dx$$

$$25. \text{ а)} \int (3x + 7)e^{4x} dx \quad \text{б)} \int (x^2 + 3x + 1) \cdot e^{-x} dx$$

$$\text{в)} \int e^{5x} \cos x \, dx$$

$$26. \text{ а)} \int (2 - 3x) \sin x \, dx \quad \text{б)} \int (x^2 + 2x) \cos 4x \, dx$$

$$\text{в)} \int e^x \sin 5x \, dx$$

$$27. \text{ а)} \int x \ln 3x \, dx$$

$$\text{б)} \int (1 - x - 2x^2) \sin 2x \, dx$$

$$\text{в)} \int \operatorname{arcctg} x \, dx$$

$$28. \text{ а)} \int \operatorname{arctg} 2x \, dx$$

$$\text{б)} \int (3 - 2x^2) \cdot 5^{-x} \, dx$$

$$\text{в)} \int \sqrt{9 - x^2} \, dx$$

$$29. \text{ а)} \int \arcsin 5x \, dx$$

$$\text{б)} \int (2x + x^2) \cdot e^{x+3} \, dx$$

$$\text{в)} \int x \operatorname{arcctg} x \, dx$$

$$30. \text{ а)} \int \ln(x + 2) \, dx$$

$$\text{б)} \int \frac{5x^2 - 1}{4^x} \, dx$$

$$\text{в)} \int \arccos x \, dx$$

Завдання 3. Знайти інтеграли від функцій, які вміщують квадратний тричлен:

$$1. \quad \text{a)} \int \frac{4x^3+5}{x^3-4x^2} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{3x^2-1}{(3x+1)(x-1)^2} dx$$

$$2. \quad \text{a)} \int \frac{2x^3+7}{x^3-6x^2+9x} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{2x-5}{(4x-1)(x-2)^2} dx$$

$$3. \quad \text{a)} \int \frac{2x^3+x+1}{x^3+6x^2} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{6x-1}{(2x-3)(x-4)^2} dx$$

$$4. \quad \text{a)} \int \frac{5x^3+1}{x^3-8x^2+16x} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{5x-2}{(3x-1)(x-5)^2} dx$$

$$5. \quad \text{a)} \int \frac{4x^3+5}{x^3-4x^2} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{3x^2+5}{(4x+3)(x-4)^2} dx$$

$$6. \quad \text{a)} \int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+4} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{2x+1}{(3x+1)(x+2)^2} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{2x^5-x^2+2}{x^2-9} dx$$

$$\text{г)} \int \frac{2x+4}{(x+2)(x^2+9x+25)} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{3x^4+2x^3+1}{x^2+4} dx$$

$$\text{г)} \int \frac{5x^2-2}{(x+3)(x^2-x+8)} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{2x^3+7}{x^2-16} dx$$

$$\text{г)} \int \frac{2x+5}{(x+1)(x^2+3x+9)} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{3x^2+x-1}{x^2+3} dx$$

$$\text{г)} \int \frac{2x^2-3x+1}{(x+2)(x^2+x+2)} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{2x^4-3}{x^2-5} dx$$

$$\text{г)} \int \frac{2x-3}{(x-4)(x^2+x+5)} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{3x^3+x^2-5}{x^2+16} dx$$

$$\text{г)} \int \frac{4x^2+7}{(x+5)(x^2+2x+3)} dx$$

$$7. \quad \text{a)} \int \frac{8x^3 - x + 1}{x^3 + 5x^2} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{5x - 1}{(4x + 1)(x - 3)^2} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{x^2 + x + 3}{x^2 - 7} dx$$

$$\text{г)} \int \frac{x^2 + 6}{(x - 3)(x^2 + 3x + 5)} dx$$

$$8. \quad \text{a)} \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{2x - 5}{(3x - 1)(x + 5)^2} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 7} dx$$

$$\text{г)} \int \frac{3x + 1}{(x - 3)(x^2 - 3x + 6)} dx$$

$$9. \quad \text{a)} \int \frac{3x^2 + x - 4}{x^3 + 8x^2} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{3x + 1}{(4x - 1)(x - 1)^2} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{5x^4 + 1}{x^2 - 8} dx$$

$$\text{г)} \int \frac{2x - 5}{(x + 2)(x^2 + 2x + 5)} dx$$

$$10. \quad \text{a)} \int \frac{3x^3 + 1}{x^3 + 6x^2 + 9x} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{2x - 3}{(2x + 3)(x + 2)^2} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 4} dx$$

$$\text{г)} \int \frac{x^2 + 5}{(x - 2)(x^2 - 3x + 4)} dx$$

$$11. \quad \text{a)} \int \frac{x^3 + 7}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{2x - 9}{(x - 3)(x + 1)^2} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{3x^3 + 2x + 4}{x^2 - 9} dx$$

$$\text{г)} \int \frac{x^2 + 4x}{(x - 3)(x^2 - x + 2)} dx$$

$$12. \quad \text{a)} \int \frac{x^3 - 1}{x^3 + x^2} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{5x + 2}{2x^2 - 12x + 3} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{7x - 12 - x^2}}$$

$$\text{г)} \int \frac{7x + 1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 4}} dx$$

$$13. \text{ a) } \int \frac{dx}{3x^2+42x+1}$$

$$\text{B) } \int \frac{6x-5}{x^2+4x+5} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{5x-4-x^2}}$$

$$\text{г) } \int \frac{5x-4}{\sqrt{x^2+10x+29}} dx$$

$$14. \text{ a) } \int \frac{dx}{x^2-12x+32}$$

$$\text{B) } \int \frac{4x+1}{4x^2+16x+3} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{3x+4-x^2}}$$

$$\text{г) } \int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-16x+65}} dx$$

$$15. \text{ a) } \int \frac{dx}{x^2+4x-5}$$

$$\text{B) } \int \frac{3x+2}{2x^2-2x+1} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}$$

$$\text{г) } \int \frac{9x-2}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$$

$$16. \text{ a) } \int \frac{dx}{4x^2+24x+1}$$

$$\text{B) } \int \frac{7x-4}{x^2-5x+2} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$$

$$\text{г) } \int \frac{8x+3}{\sqrt{x^2-4x-12}} dx$$

$$17. \text{ a) } \int \frac{dx}{x^2-4x+3}$$

$$\text{B) } \int \frac{2x+5}{3x^2+5x-3} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$$

$$\text{г) } \int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+4}} dx$$

$$18. \text{ a) } \int \frac{dx}{4x^2-8x+1}$$

$$\text{B) } \int \frac{3x+4}{x^2+3x-4} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$$

$$\text{г) } \int \frac{5x+2}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx$$

$$19. \text{ a) } \int \frac{dx}{9x^2+6x+1}$$

$$\text{B) } \int \frac{x-5}{2x^2+6x-2} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$$

$$\text{г) } \int \frac{4x-3}{\sqrt{4x^2+12x+8}} dx$$

$$20. \text{ a) } \int \frac{dx}{5x^2-10x-1}$$

$$\text{B) } \int \frac{5x+4}{x^2-6x+10} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{7x-12-x^2}}$$

$$\text{г) } \int \frac{2x-3}{\sqrt{-6x-x^2-5}} dx$$

$$21. \text{ a) } \int \frac{dx}{2x^2-4x+1}$$

$$\text{B) } \int \frac{4x-5}{2x^2+12x+10} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{5x-x^2-4}}$$

$$\text{г) } \int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+12x+27}} dx$$

$$22. \text{ a) } \int \frac{dx}{x^2-5x+1}$$

$$\text{B) } \int \frac{5x+6}{3x^2+6x+1} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$$

$$\text{г) } \int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2-8x+32}} dx$$

$$23. \text{ a) } \int \frac{dx}{x^2+16x+17}$$

$$\text{B) } \int \frac{2x-3}{4x^2-24x-2} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}$$

$$\text{г) } \int \frac{x+7}{\sqrt{x^2-3x+4}} dx$$

$$24. \text{ a) } \int \frac{dx}{x^2-5x+3}$$

$$\text{B) } \int \frac{9x-4}{5x^2-20x+1} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+7}}$$

$$\text{г) } \int \frac{5x-6}{\sqrt{x^2+10x+34}} dx$$

$$25. \text{ a) } \int \frac{dx}{x^2+4x+20}$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{12-4x-x^2}}$$

$$\text{B)} \int \frac{9x-2}{3x^2-18x-1} dx$$

$$\text{Г)} \int \frac{4x+3}{\sqrt{2-2x-x^2}} dx$$

$$26. \text{ а)} \int \frac{dx}{5x^2+10x+2}$$

$$\text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

$$\text{B)} \int \frac{3x-8}{x^2-12x+40} dx$$

$$\text{Г)} \int \frac{4x-3}{\sqrt{x^2-4x+3}} dx$$

$$27. \text{ а)} \int \frac{dx}{4-2x-x^2}$$

$$\text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{6x-5-x^2}}$$

$$\text{B)} \int \frac{2x+5}{2x^2+12x+1} dx$$

$$\text{Г)} \int \frac{6x+1}{\sqrt{x^2-14x+40}} dx$$

$$28. \text{ а)} \int \frac{dx}{3x^2-42x-1}$$

$$\text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$$

$$\text{B)} \int \frac{5x-6}{x^2-4x+3} dx$$

$$\text{Г)} \int \frac{4x-5}{\sqrt{x^2-10x+29}} dx$$

$$29. \text{ а)} \int \frac{dx}{x^2+16x+65}$$

$$\text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2-15}}$$

$$\text{B)} \int \frac{x+4}{4x^2-16x+1} dx$$

$$\text{Г)} \int \frac{5x-3}{\sqrt{x^2-12x+32}} dx$$

$$30. \text{ а)} \int \frac{dx}{x^2-4x+5}$$

$$\text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{10x-x^2-16}}$$

$$\text{B)} \int \frac{2x+3}{2x^2+2x-1} dx$$

$$\text{Г)} \int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-3x-7}} dx$$

Завдання 4. Знайти інтеграли від раціональних дробів:

1. а) $\int \frac{x^4+x+2}{x^2-9} dx$

б) $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)^2} dx$

в) $\int \frac{x^2+5}{(x-3)(x^2-4x+10)} dx$

г) $\int \frac{x^4+4}{x^4-x^2} dx$

2. а) $\int \frac{x^3+5}{x^2+4} dx$

б) $\int \frac{3x-1}{(x+2)(2x-1)^2} dx$

в) $\int \frac{9x+1}{(x-4)(x^2+6x+12)} dx$

г) $\int \frac{x^3+1}{x^3-3x^2+2x} dx$

3. а) $\int \frac{2x^2+x+1}{x^2-1} dx$

б) $\int \frac{4x+5}{(x-3)(x+4)^2} dx$

в) $\int \frac{3x-5}{(x+1)(x^2-8x+17)} dx$

г) $\int \frac{x^3+2x+8}{x^3+x^2} dx$

4. а) $\int \frac{x^5+x^2-3}{x^2+9} dx$

б) $\int \frac{x^2+1}{(3x-1)(x+1)^2} dx$

в) $\int \frac{x+4}{(x-2)(x^2+10x+26)} dx$

г) $\int \frac{2x^4+3}{x^4-1} dx$

5. а) $\int \frac{x^4+x^3+2}{x^2-4} dx$

б) $\int \frac{3x+5}{(4x+1)(x+2)^2} dx$

в) $\int \frac{x^2+3}{(x-3)(x^2+2x+8)} dx$

г) $\int \frac{4x^3+2x^2+5}{x^3+7x^2} dx$

6. а) $\int \frac{3x^3+5}{x^2+16} dx$

б) $\int \frac{7x+1}{(2x+3)(x+4)^2} dx$

$$\text{B)} \int \frac{x+3}{(x-1)(x^2-4x+9)} dx$$

$$\text{Г)} \int \frac{x^3+4x^2+5}{x^3-5x^2+6x} dx$$

$$7. \text{ a)} \int \frac{x^2+3x+1}{x^2-3} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{5x+3}{(3x+1)(x+5)^2} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{x^2+3x-1}{(x-2)(x^2-x+2)} dx$$

$$\text{Г)} \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$$

$$8. \text{ a)} \int \frac{x^4+4}{x^2+5} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{x^2+1}{(4x-3)(x+4)^2} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{2x+5}{(x+4)(x^2-2x+5)} dx$$

$$\text{Г)} \int \frac{x^3+1}{x^3+x^2} dx$$

$$9. \text{ a)} \int \frac{x^3+x^2+6}{x^2-16} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{3x+7}{(3x-1)(x+1)^2} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{x^2+2}{(x-5)(x^2-3x+3)} dx$$

$$\text{Г)} \int \frac{x^4-8}{x^4-4x^2} dx$$

$$10. \text{ a)} \int \frac{x^2+3x+1}{x^2+7} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{5}{(4x-1)(x+3)^2} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{x^2-8}{(x-1)(x^2-4x+5)} dx$$

$$\text{Г)} \int \frac{2x^3-3}{x^3-4x^2+3x} dx$$

$$11. \text{ a)} \int \frac{3x^3+1}{x^2-7} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{x+1}{(3x+1)(x-5)^2} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{x-2}{(x+3)(x^2+4x+6)} dx$$

$$\text{Г)} \int \frac{x^3+8}{x^3+4x^2+4x} dx$$

$$12. \text{ a) } \int \frac{x^4+5}{x^2+8} dx$$

$$\text{B) } \int \frac{x+3}{(x-2)(x^2-3x+5)} dx$$

$$13. \text{ a) } \int \frac{x^2+2x}{x^2-4} dx$$

$$\text{B) } \int \frac{x^2-5}{(x+2)(x^2+3x+4)} dx$$

$$14. \text{ a) } \int \frac{2x^3-x+1}{x^2+9} dx$$

$$\text{B) } \int \frac{x-6}{(x+3)(x^2-2x+5)} dx$$

$$15. \text{ a) } \int \frac{x^4+5}{x^2-9} dx$$

$$\text{B) } \int \frac{3x-7}{(x+1)(x^2-x+3)} dx$$

$$16. \text{ a) } \int \frac{4x^2+3}{x^2+2} dx$$

$$\text{B) } \int \frac{5x+4}{(x+4)(x^2+x+2)} dx$$

$$17. \text{ a) } \int \frac{2x^4+x+3}{x^2+9} dx$$

$$\text{B) } \int \frac{2x^2+5}{(x+3)(x^2-3x+10)} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{2x-1}{(4x+1)(x+1)^2} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{x^3+5}{x^3+2x^2+x} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{3x+2}{(2x-3)(x-2)^2} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{2x^3-x+1}{x^3-x^2} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{x-4}{(x+3)(x-1)^2} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{x^4-1}{x^3-2x^2} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{3x-5}{(x+4)(x+1)^2} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{x^3-x-4}{x^3+8x^2+16x} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{2x+3}{(3x-1)(x+3)^2} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{3x^3-1}{x^3+9x^2} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{3x-1}{(x+1)(x-2)^2} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{3x^4+5}{x^3+2x^2+x} dx$$

$$18. \text{ a) } \int \frac{3x^3+4}{x^2-4} dx$$

$$\text{B) } \int \frac{7x-1}{(x-3)(x^2-5x+12)} dx$$

$$19. \text{ a) } \int \frac{3x^2-x+2}{x^2+1} dx$$

$$\text{B) } \int \frac{2x+5}{(x-1)(x^2-7x+17)} dx$$

$$20. \text{ a) } \int \frac{2x^5-x^2+2}{x^2-9} dx$$

$$\text{B) } \int \frac{2x+4}{(x+2)(x^2+9x+25)} dx$$

$$21. \text{ a) } \int \frac{3x^4+2x^3+1}{x^2+4} dx$$

$$\text{B) } \int \frac{5x^2-2}{(x+3)(x^2-x+8)} dx$$

$$22. \text{ a) } \int \frac{2x^3+7}{x^2-16} dx$$

$$\text{B) } \int \frac{2x+5}{(x+1)(x^2+3x+9)} dx$$

$$23. \text{ a) } \int \frac{3x^2+x-1}{x^2+3} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{2x+1}{(x-2)(2x+1)^2} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{2x^3-11}{x^3+4x^2+4x} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{3x-4}{(x+3)(x-4)^2} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{4x^3+5}{x^3-4x^2} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{3x^2-1}{(3x+1)(x-1)^2} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{2x^3+7}{x^3-6x^2+9x} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{2x-5}{(4x-1)(x-2)^2} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{2x^3+x+1}{x^3+6x^2} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{6x-1}{(2x-3)(x-4)^2} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{5x^3+1}{x^3-8x^2+16x} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{5x-2}{(3x-1)(x-5)^2} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{2x^2-3x+1}{(x+2)(x^2+x+2)} dx$$

$$\Gamma) \int \frac{4x^3+5}{x^3-4x^2} dx$$

$$24. \text{ a)} \int \frac{2x^4-3}{x^2-5} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{3x^2+5}{(4x+3)(x-4)^2} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{2x-3}{(x-4)(x^2+x+5)} dx$$

$$\Gamma) \int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+4} dx$$

$$25. \text{ a)} \int \frac{3x^3+x^2-5}{x^2+16} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{2x+1}{(3x+1)(x+2)^2} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{4x^2+7}{(x+5)(x^2+2x+3)} dx$$

$$\Gamma) \int \frac{8x^3-x+1}{x^3+5x^2} dx$$

$$26. \text{ a)} \int \frac{x^2+x+3}{x^2-7} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{5x-1}{(4x+1)(x-3)^2} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{x^2+6}{(x-3)(x^2+3x+5)} dx$$

$$\Gamma) \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx$$

$$27. \text{ a)} \int \frac{2x^3-1}{x^2+7} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{2x-5}{(3x-1)(x+5)^2} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{3x+1}{(x-3)(x^2-3x+6)} dx$$

$$\Gamma) \int \frac{3x^2+x-4}{x^3+8x^2} dx$$

$$28. \text{ a)} \int \frac{5x^4+1}{x^2-8} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{3x+1}{(4x-1)(x-1)^2} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{2x-5}{(x+2)(x^2+2x+5)} dx$$

$$\Gamma) \int \frac{3x^3+1}{x^3+6x^2+9x} dx$$

$$29. \text{ а) } \int \frac{2x^2+1}{x^2+4} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{2x-3}{(2x+3)(x+2)^2} dx$$

$$\text{в) } \int \frac{x^2+5}{(x-2)(x^2-3x+4)} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{x^3+7}{x^3-x^2-x+1} dx$$

$$30. \text{ а) } \int \frac{3x^3+2x+4}{x^2-9} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{2x-9}{(x-3)(x+1)^2} dx$$

$$\text{в) } \int \frac{x^2+4x}{(x-3)(x^2-x+2)} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{x^3-1}{x^3+x^2} dx$$

Завдання 5. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

$$1. \text{ а) } \int \frac{dx}{3-2 \sin x}$$

$$\text{б) } \int \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\text{в) } \int \sin^4 \frac{5x}{4} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+2}}$$

$$\text{д) } \int \cos 3x \cdot \sin x dx$$

$$2. \text{ а) } \int \sqrt{25-x^2} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt{x} dx}{x+10}$$

$$\text{в) } \int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx \quad \text{г) } \int x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$\text{д) } \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$$

$$3. \text{ а) } \int \frac{dx}{4-\sin x}$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{(25+x^2)^{3/2}}.$$

$$\text{в) } \int \sin^2 \frac{x}{3} dx$$

$$\text{г) } \int \operatorname{ctg}^3 x dx$$

$$\text{Д)} \int \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}.$$

$$4. \text{ а)} \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x-2}}$$

$$\text{б)} \int \sqrt[5]{\cos^3 2x} \cdot \sin^3 2x \, dx$$

$$\text{в)} \int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$$

$$\text{г)} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-2}}$$

$$\text{д)} \int \cos 5x \cdot \cos 3x \, dx$$

$$5. \text{ а)} \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx.$$

$$\text{б)} \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^3 x}} dx$$

$$\text{в)} \int \sin^4 \frac{5x}{8} dx$$

$$\text{г)} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

$$\text{д)} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+6}}$$

$$6. \text{ а)} \int \frac{dx}{3 \cos x - 4 \sin x}$$

$$\text{б)} \int \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x \, dx$$

$$\text{в)} \int \frac{dx}{3 + \sqrt{x-6}}$$

$$\text{г)} \int \operatorname{tg}^4 x \, dx$$

$$\text{д)} \int \frac{x^4 dx}{(2-x^2)^{3/2}}.$$

$$7. \text{ а)} \int \frac{dx}{2 + \sqrt{x-8}}$$

$$\text{б)} \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$$

$$\text{в)} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}.$$

$$\text{г)} \int \frac{dx}{2 + \sqrt{x+3}}$$

$$\text{д)} \int \cos 4x \cdot \cos 3x \, dx$$

$$8. \text{ а) } \int \sqrt{36 - x^2} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x+3}}$$

$$\text{в) } \int \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \sin^2 \frac{x}{2} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}.$$

$$\text{д) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-3}}$$

$$9. \text{ а) } \int \frac{dx}{4+3 \sin x}$$

$$\text{б) } \int \sin^3 2x \cdot \cos^2 2x dx$$

$$\text{в) } \int x^2 \sqrt{16 - x^2} dx.$$

$$\text{г) } \int \frac{x \cdot dx}{2+\sqrt{x+4}}$$

$$\text{д) } \int \cos 7x \cdot \cos 4x dx$$

$$10. \text{ а) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}} dx$$

$$\text{в) } \int x^2 \sqrt{49 - x^2} dx.$$

$$\text{г) } \int \operatorname{tg}^6 x dx$$

$$\text{д) } \int \cos 2x \cdot \cos 3x dx$$

$$11. \text{ а) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2 - \sqrt{2x+1}}}$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}.$$

$$\text{д) } \int \sin x \cdot \cos 2x dx$$

$$12. \text{ а) } \int \frac{dx}{3-\cos x}$$

$$\text{б) } \int \sin^4 x \cdot \cos^3 x dx$$

$$\text{в) } \int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx.$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$$

$$д) \int \sin 2x \cdot \cos x \, dx$$

$$13. \text{ а) } \int \frac{x^4 dx}{(16-x^2)^{3/2}}.$$

$$в) \int x^2 \sqrt{9-x^2} \, dx.$$

$$д) \int \sin x \cdot \sin 2x \, dx$$

$$б) \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx$$

$$г) \int \operatorname{ctg}^3 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$$

$$14. \text{ а) } \int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x}$$

$$в) \int \sin^4 \frac{x}{3} \, dx$$

$$д) \int \cos x \cdot \cos 2x \, dx$$

$$б) \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$г) \int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x \, dx$$

$$15. \text{ а) } \int \frac{dx}{2 \cos x - 3 \sin x}$$

$$в) \int \cos^4 \frac{3x}{2} \, dx$$

$$д) \int \sin 3x \cdot \cos 2x \, dx$$

$$б) \int \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} \, dx$$

$$г) \int \operatorname{ctg}^4 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$$

$$16. \text{ а) } \int \frac{dx}{3 \cos x + 5 \sin x}$$

$$в) \int \sin^2 4x \, dx$$

$$д) \int \cos 3x \cdot \cos 2x \, dx$$

$$б) \int \frac{3 \cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx$$

$$г) \int \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x \, dx$$

$$17. \text{ а) } \int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} \, dx$$

$$в) \int \sin^4 3x \, dx$$

$$б) \int \sin^5 x \cdot \sqrt[5]{\cos^3 x} \, dx$$

$$г) \int \operatorname{ctg}^5 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$$

$$д) \int \sin 3x \cdot \sin 2x dx$$

$$18. а) \int \frac{dx}{1+4 \sin x}$$

$$б) \int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx$$

$$в) \int \cos^2 \frac{x}{4} dx$$

$$г) \int tg^5 x \sec^2 x dx$$

$$д) \int \sin 3x \cdot \cos 5x dx$$

$$19. а) \int \frac{dx}{4-\cos x}$$

$$б) \int \sin^3 3x \cdot \cos^2 3x dx$$

$$в) \int \cos^2 2x \cdot \sin^2 2x dx$$

$$г) \int ctg^2 x dx$$

$$д) \int \sin 5x \cdot \cos 2x dx$$

$$20. а) \int \frac{dx}{2+5 \sin x}$$

$$б) \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$$

$$в) \int \sin^2 4x dx$$

$$г) \int tg^2 x dx$$

$$д) \int \sin 7x \cdot \cos 5x dx$$

$$21. а) \int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x}$$

$$б) \int \cos^3 3x \cdot \sin^2 3x dx$$

$$в) \int \sin^4 \frac{x}{3} dx$$

$$г) \int ctg^3 x dx$$

$$д) \int \sin 3x \cdot \sin 5x dx$$

$$22. а) \int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}$$

$$б) \int \sqrt[5]{\sin^4 x} \cdot \cos^3 x \cdot dx$$

$$в) \int \sin^2 \frac{x}{4} \cdot \cos^2 \frac{x}{4} dx$$

$$г) \int tg^2 x \sec^2 x dx$$

$$д) \int \sin x \cdot \sin 6 x dx$$

$$23. а) \int \frac{dx}{2 \cos x + 5 \sin x}$$

$$б) \int \cos^3 x \cdot \sin^8 x dx$$

$$в) \int \sin^2 \frac{x}{3} \cdot \cos^2 \frac{x}{3} dx$$

$$г) \int \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x(1 + \sqrt[6]{x})} dx$$

$$д) \int \cos x \cdot \cos 3 x dx$$

$$24. а) \int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x}$$

$$б) \int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx$$

$$в) \int \cos^2 \frac{x}{8} \cdot \sin^2 \frac{x}{8} dx$$

$$г) \int \operatorname{tg}^3 x dx$$

$$д) \int \cos 2 x \cdot \cos 5 x dx$$

$$25. а) \int \frac{dx}{4 + 3 \cos x}$$

$$б) \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} dx$$

$$в) \int \cos^4 \frac{x}{8} dx$$

$$г) \int \operatorname{ctg}^4 x dx$$

$$д) \int \cos 5 x \cdot \sin 5 x dx$$

$$26. а) \int \frac{dx}{1 - 2 \sin x}$$

$$б) \int \sqrt[5]{\sin^3 2 x} \cdot \cos^3 2 x \cdot dx$$

$$в) \int \sin^4 \frac{x}{8} dx$$

$$г) \int \operatorname{tg}^4 x dx$$

$$д) \int \sin 4 x \cdot \cos 6 x dx$$

$$27. а) \int \frac{dx}{6 + 5 \cos x}$$

$$б) \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$$

$$в) \int \sin^4 \frac{5x}{2} dx$$

$$г) \int \operatorname{ctg}^5 x dx$$

$$д) \int \sin 4x \cdot \cos 7x dx$$

$$28. а) \int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}} dx$$

$$б) \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$$

$$в) \int \sin^4 \frac{3x}{8} dx$$

$$г) \int \operatorname{tg}^5 x dx$$

$$д) \int \sin 2x \cdot \cos 5x dx$$

$$29. а) \int \frac{dx}{\cos x - 3 \sin x}$$

$$б) \int \frac{3 \sin^3 x}{\cos^4 x} dx$$

$$в) \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}} dx$$

$$г) \int \operatorname{ctg}^6 x dx$$

$$д) \int \sin 5x \cdot \cos 6x dx$$

$$30. а) \int \frac{dx}{2 \cos x + 3 \sin x}$$

$$б) \int \sin^5 x \cos^4 x dx$$

$$в) \int \cos^4 \frac{3x}{2} dx$$

$$г) \int \operatorname{tg}^6 x dx$$

$$д) \int \cos 3x \cdot \sin 8x dx$$

Завдання 6. Знайти інтеграли від ірраціональних функцій:

$$1. а) \int \frac{x+1}{x+\sqrt{x}} dx$$

$$б) \int \frac{\sqrt{x}}{x-4\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$в) \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$2. \quad \text{a)} \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\text{B)} \int \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}.$$

$$\text{б)} \int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})} \, dx$$

$$3. \quad \text{a)} \int \frac{\sqrt{x} \, dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\text{B)} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}.$$

$$\text{б)} \int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}} \, dx$$

$$4. \quad \text{a)} \int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$$

$$\text{B)} \int \frac{x^2-9}{x^4} \, dx.$$

$$\text{б)} \int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt{x^2}} \, dx$$

$$5. \quad \text{a)} \int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$$

$$\text{B)} \int \sqrt{4-x^2} \, dx.$$

$$\text{б)} \int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} \, dx$$

$$6. \quad \text{a)} \int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$$

$$\text{B)} \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} \, dx.$$

$$\text{б)} \int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})} \, dx$$

$$7. \quad \text{a)} \int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}} \, dx$$

$$\text{б)} \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} \, dx$$

$$\text{B)} \int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}.$$

$$8. \text{ a)} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-7}}$$

$$\text{б)} \int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{x^4 dx}{(4-x^2)^{3/2}}.$$

$$9. \text{ a)} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-4}}$$

$$\text{б)} \int \frac{\sqrt{x}}{4x-\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

$$10. \text{ a)} \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$$

$$\text{б)} \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{(x+1) \cdot (1+\sqrt[3]{x+1})} dx$$

$$\text{B)} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$11. \text{ a)} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+2}}$$

$$\text{б)} \int \frac{1+\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1}) \cdot \sqrt{x+1}} dx$$

$$\text{B)} \int \sqrt{25-x^2} dx.$$

$$12. \text{ a)} \int \frac{\sqrt{x} dx}{x+10}$$

$$\text{б)} \int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$$

$$\text{B)} \int x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$13. \text{ a) } \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$$

$$\text{B) } \int \frac{dx}{(25+x^2)^{3/2}}.$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}} dx$$

$$14. \text{ a) } \int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$$

$$\text{B) } \int \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}.$$

$$\text{б) } \int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}+1}{\sqrt[6]{x^5}} dx$$

$$15. \text{ a) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$$

$$\text{B) } \int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$$

$$\text{б) } \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$$

$$16. \text{ a) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-2}}$$

$$\text{B) } \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx$$

$$17. \text{ a) } \int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}} dx$$

$$\text{B) } \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[6]{x-1}} dx$$

$$18. \text{ a) } \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+6}}$$

$$\text{B) } \int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt{x-1} - 2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}} dx$$

$$19. \text{ a) } \int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$$

$$\text{B) } \int \frac{x^4 dx}{(2-x^2)^{3/2}}.$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}} dx$$

$$20. \text{ a) } \int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$$

$$\text{B) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}.$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}} dx$$

$$21. \text{ a) } \int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$$

$$\text{B) } \int \sqrt{36-x^2} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}} dx$$

$$22. \text{ a) } \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x+3}}$$

$$\text{B) } \int \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}.$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}} dx$$

$$23. \text{ a) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-3}}$$

$$\text{B) } \int x^2 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}} dx$$

$$24. \text{ a) } \int \frac{x \cdot dx}{2+\sqrt{x+4}}$$

$$\text{B) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{(x+1)(1+\sqrt[3]{x+1})} dx$$

$$25. \text{ a) } \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+1}}$$

$$\text{B) } \int x^2 \sqrt{49 - x^2} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt{x}-1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} dx$$

$$26. \text{ a) } \int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}} dx$$

$$\text{B) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}} dx$$

$$27. \text{ a) } \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}$$

$$\text{B) } \int \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}.$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2 - \sqrt{2x+1}}}$$

$$28. \text{ a) } \int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3} dx$$

$$\text{B) } \int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1} dx$$

$$29. \text{ a) } \int \frac{dx}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{B) } \int \frac{x^4 dx}{(16-x^2)^{3/2}}.$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}} dx$$

$$30. \text{ a) } \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$$

$$\text{B) } \int x^2 \sqrt{9 - x^2} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}} dx$$

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

1. а) $\int_0^1 x^6 (1 + x^7)^5 dx$ б) $\int_0^1 x \cdot 2^x dx$

в) $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt[4]{x^3}}$ г) $\int_1^0 \frac{x^3 dx}{1 + x^8}$

2. а) $\int_0^1 \left(\frac{2}{1+9x^2} + \frac{3}{2-4x} \right) dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 2x dx$

в) $\int_1^{2^{12}} \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + 3 \cdot \sqrt[6]{x}}$ г) $\int_{\pi/4}^0 \sin^3 2x dx$

3. а) $\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$ б) $\int_1^2 x^3 \ln 2x dx$

в) $\int_1^{2^8} \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + 4 \cdot \sqrt[8]{x}}$ г) $\int_{\pi/6}^{\pi/18} \operatorname{ctg} 3x dx$

4. а) $\int_0^1 x^4 (x^5 - 1) dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 - x^2) \sin x dx$

в) $\int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{1+8x}}$ г) $\int_{\sqrt{3}}^1 x \cdot \sqrt[3]{1+x^2} dx$

5. а) $\int_0^1 5^{2x+1} dx$ б) $\int_1^2 x^5 \ln 3x dx$

в) $\int_1^{2^{12}} \frac{dx}{2 \cdot \sqrt[6]{x} + \sqrt[9]{x}}$ г) $\int_2^0 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+4}}$

$$6. \quad \text{a)} \int_0^1 \frac{x^4}{3+x^5} dx$$

$$\text{б)} \int_0^1 x \cdot 5^{2x} dx$$

$$\text{B)} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[6]{x+2} \cdot \sqrt[9]{x^2}}$$

$$\text{r)} \int_2^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

$$7. \quad \text{a)} \int_0^1 x^8 (1+x^9)^5 dx$$

$$\text{б)} \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$$

$$\text{B)} \int_1^{64} \frac{dx}{4 \cdot \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}}$$

$$\text{r)} \int_8^3 \sqrt{1+x} dx$$

$$8. \quad \text{a)} \int_1^{-1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$\text{б)} \int_0^{\pi/3} (2-5x) \sin x dx$$

$$\text{B)} \int_1^{64} \frac{dx}{2 \cdot \sqrt{x+3} \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$$\text{r)} \int_{\pi/2}^{\pi/6} \sin^3 x \cdot \cos x dx$$

$$9. \quad \text{a)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$$

$$\text{б)} \int_0^1 x e^{5x} dx$$

$$\text{B)} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$$

$$\text{r)} \int_e^1 \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$10. \quad \text{a)} \int_0^1 \frac{dx}{1+2x}$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2+3x) \sin 2x dx$$

$$\text{B)} \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+2} \cdot \sqrt[4]{x}}$$

$$\text{r)} \int_1^0 x^3 \cdot \sqrt{4+5x^4} dx$$

$$11. \quad \text{a)} \int_0^1 x^7 (1+x^8)^5 dx$$

$$\text{б)} \int_0^1 x^2 \cdot 4^x dx$$

$$\text{B)} \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x+3} \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{r)} dx \int_e^1 \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$

$$12. \quad \text{a) } \int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^2}$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 4x dx$$

$$\text{B) } \int_1^{16} \frac{dx}{3 \cdot \sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt[4]{x}}$$

$$\text{г) } \int_1^0 x^2 (e^{x^3}) dx$$

$$13. \quad \text{a) } \int_0^1 x^3 e^{x^4} dx$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{5}} x \cos 5x dx$$

$$\text{B) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$$

$$\text{г) } \int_{\pi/2}^1 \sin x \cdot \cos^2 x dx$$

$$14. \quad \text{a) } \int_0^1 x^5 (x^6 - 1)^9 dx$$

$$\text{б) } \int_0^2 x^2 \ln 3x dx$$

$$\text{B) } \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}$$

$$\text{г) } \int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{dx}{1 - \cos^2 x}$$

$$15. \quad \text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \tan^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{б) } \int_1^2 x^3 \log_4 2x dx$$

$$\text{B) } \int_1^{2^8} \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + 4 \cdot \sqrt[8]{x^3}}$$

$$\text{г) } \int_{\pi^2}^{\pi^2/9} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$16. \quad \text{a) } \int_0^1 \frac{x^5}{4+x^6} dx$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos 6x dx$$

$$\text{B) } \int_1^{2^{18}} \frac{dx}{\sqrt[6]{x} + 3 \cdot \sqrt[9]{x}}$$

$$\text{г) } \int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$$

$$17. \quad \text{a) } \int_0^1 x^9 (2 + x^{10})^4 dx$$

$$\text{б) } \int_0^1 x \cdot 7^{2x} dx$$

$$\text{B) } \int_1^{2^{18}} \frac{dx}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[9]{x^2}}$$

$$\text{г) } \int_{\sqrt{3}}^0 \frac{12x^5 dx}{\sqrt{x^6+9}}$$

18. a) $\int_0^1 x^4 \cdot 3x^5 dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + 3x) \cos 3x dx$
 б) $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+6} \cdot \sqrt[6]{x}}$ г) $\int_e^1 \frac{1+\ln x}{x} dx$
19. a) $\int_0^1 \sqrt{4+5x} dx$ б) $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx$
 б) $\int_1^{64} \frac{dx}{2 \cdot \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ г) $\int_1^0 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$
20. a) $\int_0^1 \sqrt[3]{1+7x} dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2+x) \sin 3x dx$
 б) $\int_1^{2^{12}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3} \cdot \sqrt[4]{x}}$ г) $\int_{\pi/2}^{\pi/6} \sin x \cdot \cos^3 x dx$
21. a) $\int_0^1 x^8 (x^9 - 1)^7 dx$ б) $\int_0^1 (1+2x) e^{4x} dx$
 б) $\int_1^{16} \frac{dx}{4 \cdot \sqrt{x} + 3 \cdot \sqrt[4]{x}}$ г) $\int_{\sqrt[4]{\pi}}^0 \frac{x dx}{\cos^2(x^2)}$
22. a) $\int_0^1 \sqrt[4]{1-x} dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2+x) \sin 3x dx$
 б) $\int_1^{64} \frac{dx}{2 \cdot \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ г) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$
23. a) $\int_0^1 x^4 \cdot e^{x^5} dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-7x) \cos 2x dx$
 б) $\int_1^{16} \frac{dx}{3 \cdot \sqrt{x} + 5 \cdot \sqrt[4]{x}}$ г) $\int_{\pi}^{-\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$

24. a) $\int_0^1 x^7 (x^8 - 1)^5 dx$ б) $\int_0^1 (3 + 4x) \cdot 5^x dx$
 B) $\int_1^{2^{12}} \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + 2 \cdot \sqrt[6]{x}}$ r) $\int_{\sqrt{e}}^1 \frac{dx}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}}$
25. a) $\int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin 5x dx$ б) $\int_1^2 x^9 \ln 2x dx$
 B) $\int_1^{2^8} \frac{dx}{6 \cdot \sqrt[4]{x} + 5 \cdot \sqrt[8]{x}}$ r) $\int_0^{-1} \frac{dx}{4x^2 - 9}$
26. a) $\int_0^1 \frac{x^8}{2 + x^9} dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4 - 5x) \cos 3x dx$
 B) $\int_1^{2^8} \frac{dx}{3 \cdot \sqrt[4]{x} + 4 \cdot \sqrt[8]{x}}$ r) $\int_{\pi/2}^0 \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x}$
27. a) $\int_0^1 x^3 (2 - 3x^4)^5 dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 6x dx$
 B) $\int_1^{2^{18}} \frac{dx}{2 \cdot \sqrt[6]{x} + 3 \cdot \sqrt[9]{x}}$ r) $\int_5^2 \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$
28. a) $\int_0^1 x^2 \cdot 2^{x^3} dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 1) \cos x dx$
 B) $\int_1^{2^{12}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2 \cdot \sqrt[4]{x}}$ r) $\int_{\sqrt{3}}^1 \frac{x^2 dx}{1 + x^6}$
29. a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + 3x}}$ б) $\int_0^1 (1 + 3x) e^{2x} dx$
 B) $\int_1^{16} \frac{dx}{2 \cdot \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$ r) $\int_{\sqrt{2}}^1 \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

$$30. \quad \text{a) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+7x}}$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 4x dx$$

$$\text{в) } \int_1^{2^8} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+4} \cdot \sqrt[8]{x}}$$

$$\text{г) } \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^2}$$

Завдання 8. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями:

$$1. \quad \text{a) } y = \sqrt{x}, \quad y = 2 - x, \quad y = 0$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$$

$$2. \quad \text{a) } y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{-x}, \quad y = 1$$

$$\text{б) } \rho = 2 \cos \phi, \quad \rho = \cos \phi$$

$$3. \quad \text{a) } y = e^x, \quad y = 1 - x, \quad x = 1$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 4(t - \sin t), & y = 0, \\ y = 4(1 - \cos t), & 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$4. \quad \text{a) } y = \ln x, \quad y = 1 - x, \quad y = 1$$

$$\text{б) } \rho = 3 \sin 3\phi$$

$$5. \quad \text{a) } y = -\sqrt{x}, \quad y = -\frac{1}{2}x$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

$$6. \quad \text{a) } y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{2}x$$

$$\text{б) } \rho = 2(1 + \cos \phi)$$

$$7. \quad \text{a) } y = \frac{1}{x}, \quad y = x, \quad y = 2$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$$

$$8. \quad \text{a) } y = \frac{1}{x}, \quad y = x, \quad x = 2$$

$$\text{б) } \rho = 6 \cos \phi$$

$$9. \quad \text{a) } y = e^x, y = 1 - x, y = e$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 4 \cos^3 t \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases}$$

$$10. \quad \text{a) } y = x^3, \quad y = 2 - x, \quad y = 0$$

$$\text{б) } \rho = 2 \sin 3\varphi$$

$$11. \quad \text{a) } y = x^2, \quad y = x + 2$$

$$\text{б)} \begin{cases} x = t - \sin t, & y = 0, \\ y = 1 - \cos t, & 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$12. \text{ а) } y = x^2, \quad y = x + 6$$

$$\text{б) } \rho = 2 \sin \phi, \rho = \sin \phi$$

$$13. \text{ а) } y = x^3, \quad y = -x, \quad y = 1$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$14. \text{ а) } y = x^2, \quad y = x, \quad x = 2$$

$$\text{б) } \rho = 4 \cos 3 \phi$$

$$15. \text{ а) } y = -x^2, \quad y = x - 2$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

$$16. \text{ а) } y = -x^3, \quad y = -x^2$$

$$\text{б) } \rho = 4(1 + \cos \phi)$$

$$17. \text{ а) } y = \sqrt{x}, \quad y = 2 - x, \quad y = 0$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$$

$$18. \text{ a) } y = 2^x, \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad y = 2$$

$$\text{б) } \rho = 6 \sin 4\phi$$

$$19. \text{ a) } y = x^3, \quad y = -x, \quad x = -1$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 2(t - \sin t), & y = 0, \\ y = 2(1 - \cos t), & 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$20. \text{ a) } y = 3^x, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad y = 3$$

$$\text{б) } \rho = 6(1 - \cos \phi)$$

$$21. \text{ a) } y = x^3, \quad y = -x, \quad y = -1$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$$

$$22. \text{ a) } y = \frac{1}{x^2}, \quad y = x, \quad y = 4$$

$$\text{б) } \rho = 4 \cos \phi, \quad \rho = 2 \cos \phi$$

$$23. \text{ a) } y = -x^3, \quad y = x, \quad x = 1$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 9 \cos t \\ y = 9 \sin t \end{cases}$$

$$24. \text{ a) } y = \frac{1}{x^2}, \quad y = -x, \quad y = 4$$

$$б) \rho = 4 \sin 2 \phi$$

$$25. \text{ a) } y = -x^3, \quad y = x, \quad x = -1$$

$$б) \begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \sin^3 t \end{cases}$$

$$26. \text{ a) } y = e^x, \quad y = \left(\frac{1}{e}\right)^x, \quad y = e$$

$$б) \rho = 8 \cos 2 \phi$$

$$27. \text{ a) } y = \frac{1}{x^3}, \quad y = x, \quad y = 8$$

$$б) \begin{cases} x = 6(t - \sin t), & y = 0, \\ y = 6(1 - \cos t), & 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$28. \text{ a) } y = -x^3, \quad y = x, \quad y = 1$$

$$б) \rho = 4(1 + \cos \phi)$$

$$29. \text{ a) } y = \frac{1}{x^3}, \quad y = x, \quad y = -8$$

$$б) \begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$30. \text{ a) } y = -x^3, \quad y = x, \quad y = -1$$

$$б) \rho = 4 \sin \phi, \rho = 2 \sin \phi$$

Завдання 9. Обчислити довжину дуги кривої:

1. а) $y = 12 + e^x, \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$

б) $\begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t), \\ y = 8(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/4$

2. а) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \quad 1 \leq x \leq 2$

б) $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

3. а) $y = 1 - e^{-x}, \ln \frac{3}{4} \leq x \leq \ln \frac{3}{\sqrt{7}}$

б) $\begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t), \\ y = 8(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/4$

4. а) $y = -\ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

б) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 3\pi/2$

5. а) $y = \frac{1}{4} \cdot (e^{2x} + e^{-2x} + 3), \quad 0 \leq x \leq 2$

б) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

$$6. a) \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{10}$$

$$б) \quad \begin{cases} x = 4(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$7. a) \quad y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (x^2 - \ln x), \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$б) \quad \begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$8. a) \quad y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (x^2 - \ln x), \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$б) \quad \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 3\pi$$

$$9. a) \quad y = 1 - \ln(x^2 - 1), \quad 3 \leq x \leq 9$$

$$б) \quad \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/4$$

$$10. a) \quad y = \frac{1}{9} \cdot (x^2 + 6)^{\frac{3}{2}}, \quad 3 \leq x \leq 6$$

$$б) \quad \begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \pi/6 \leq t \leq \pi/4$$

$$11. a) \quad y = 6 + e^{2x}, \frac{1}{4} \ln 2 \leq x \leq \frac{1}{4} \ln 6$$

$$б) \quad \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$12. \text{ a) } y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x - x^2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$13. \text{ a) } y = 2 \ln \left(1 - \frac{x^2}{4}\right), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$14. \text{ a) } y = 1 - \frac{1}{2} \cdot \ln \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$15. \text{ a) } y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{3}{4}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$16. \text{ a) } y = \frac{1}{4} \ln x - \frac{1}{2} x^2, \quad 1 \leq x \leq 9$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$17. \text{ a) } y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{x}, \quad \frac{1}{9} \leq x \leq 1$$

$$6) \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi \leq t \leq 2\pi$$

$$18. a) \quad y = \ln \sin x, \quad \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$6) \begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t, \\ y = 2 \sin t - \sin 2t, \end{cases} \quad \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3$$

$$19. a) \quad y = (4 - \sqrt[3]{x^2})^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 8$$

$$6) \begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/3$$

$$20. a) \quad y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}), \quad \sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{26}$$

$$6) \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/3$$

$$21. a) \quad y = 2 + \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}), \quad 0 \leq x \leq \ln 3$$

$$6) \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/3$$

$$22. a) \quad y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{7}{9}$$

$$6) \begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \pi/2 \leq t \leq \pi$$

$$23. \text{ a) } y = \ln \cos x + 2, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 2,5(t - \sin t), \\ y = 2,5(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi/2 \leq t \leq \pi$$

$$24. \text{ a) } y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 3,5(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$25. \text{ a) } y = \frac{2}{3} \cdot (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}, \quad 3 \leq x \leq 6$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t), \\ y = 6(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$26. \text{ a) } y = 2 - e^x, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$27. \text{ a) } y = \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \quad \frac{1}{4} \leq x \leq 1$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/6$$

$$28. \text{ a) } y = \ln \left(\frac{5}{2x} \right), \sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{15}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$29. \text{ а) } y = \sqrt{1-x^2} - \arccos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{9}{16}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3$$

$$30. \text{ а) } y = 7 - \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/3$$

Завдання 10. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої заданими лініями, навколо осі Ox :

$$1. y = e^{0,5x}, y = e^x, x = 1$$

$$2. y = e^x - 1, y = 1, x = 1$$

$$3. y = e^{x^2} \cdot \sqrt{x}, y = e, x = 0$$

$$4. y = \operatorname{tg} x, y = 1, x = 0$$

$$5. y = \sin x, y = \cos x, 0 \leq x \leq 0,25\pi$$

$$6. y = 2x - x^2, y = 2 - x$$

$$7. y = 2 + x^3, y = 1, x = 1$$

$$8. y = e^{1-x}, y = 0, 0 \leq x \leq 1$$

$$9. y = -x^2 + 5x - 6, y = 0$$

$$10. y = 5 \cos x, y = \cos x, -0,5\pi \leq x \leq 0$$

$$11. y = \sqrt{x^3}, y = x$$

12. $y = x^2, y = \sqrt{x}$
13. $y = 3 \cos x, y = \cos x, 0 \leq x \leq 0,5\pi$
14. $y = x^2, y = \sqrt[3]{x}$
15. $y = (x - 1)^2, e = 1$
16. $y = e^{2x}, y = 1, x = 1$
17. $y = 2 - x^2, y = x, x = 0$
18. $y = \sin x, y = 2 \sin x, 0 \leq x \leq \pi$
19. $y = e^x, y = e, x = 0$
20. $x^2 + 4y^2 = 4, x + 2y = 2$
21. $y = \sin^2 x, y = 0, x = 0,5\pi$
22. $y = x^2 + 2, y = 1 - x^2, 0 \leq x \leq 1$
23. $x^2 + (y - 2)^2 = 1$
24. $y = x^2, y = 1$
25. $y = x \cdot e^x, y = 0, x = 1$
26. $y = \sqrt{x}, y = x$
27. $y = \sqrt[3]{x}, y = x$
28. $y = 1, y = \sin 0,5x, 0 \leq x \leq \pi$
29. $y = \sqrt{x}, y = 2, x = 1$
30. $y = \sqrt{2 - x}, y = x, y = 0$

Завдання 11. Розв'язати задачі фізики та механіки за допомогою визначених інтегралів.

1. Резервуар циліндричної форми заповнений водою до верхнього краю. Обчислити роботу, яку необхідно затратити для того, щоб викачати воду з цього резервуару, якщо його висота дорівнює 5 м, а радіус основи – 3 м.

2. Знайти координати центру ваги плоскої фігури, обмеженої параболою $y^2 = 2x - 2$ і прямою $y = x - 1$.

3. Трикутна пластина опущена вертикально у воду так, що її основа паралельна поверхні води, а протилежна вершина знаходиться на поверхні води. Обчислити силу, з якою вода давить на цю пластину, якщо основа трикутника дорівнює 3 м, а висота – 8 м.

4. Стискання пружини пропорційне прикладеній силі. Обчислити роботу сили при стисканні пружини на 5 см, якщо сила, рівна 0,5 Н стискає її на 1 см.

5. Знайти статичний момент прямокутника зі сторонами a і b відносно його сторін.

6. Резервуар має форму півциліндра і заповнений водою до верхнього краю (резервуар розміщено так, що площина перерізу циліндра паралельна поверхні землі). Обчислити роботу, яку необхідно затратити для того, щоб викачати воду з цього резервуару, якщо радіус основи циліндра дорівнює 2 м, а висота – 6 м.

7. Передня частина дамби має форму параболи з вершиною вниз; основа дамби (верхній край) дорівнює 2 м, а висота – 1 м. Обчислити тиск води на дамбу, якщо вода доходить до верхнього краю дамби.

8. Знайти координати центру ваги однорідної фігури, обмеженої дугою синусоїди $y = \sin x$ і відрізком осі Ox від точки $x = 0$

до точки $x = \pi$.

9. Обчислити центр ваги однорідної фігури, обмеженої дугою косинусоїди $y = \cos x$ і відрізком осі Ox від точки $x = -\pi/2$ до точки $x = \pi/2$.

10. Резервуар має форму півкулі і заповнений водою до верхнього краю (резервуар розміщено так, що площина перерізу кулі паралельна поверхні землі). Обчислити роботу, яку необхідно затратити для того, щоб викачати воду з цього резервуару, якщо радіус кулі дорівнює 8 м.

11. Знайти координати центру ваги однорідної фігури, обмеженої лініями $y^2 = 8x$ і $x^2 = 8y$.

12. Розтяг пружини пропорційний прикладеній силі. Обчислити роботу сили при розтягуванні пружини на 6 см, якщо сила, рівна 2 Н розтягує її на 1 см.

13. Знайти момент інерції відносно осі Ox однорідної плоскої фігури, обмеженої дугою синусоїди $y = \sin x$ і відрізком осі Ox від точки $x = 0$ до точки $x = \pi$.

14. Знайти момент інерції відносно осі Ox однорідної плоскої фігури, обмеженої дугою косинусоїди $y = \cos x$ і відрізком осі Ox від точки $x = -\pi/2$ до точки $x = \pi/2$.

15. Знайти координати центру ваги плоскої фігури, обмеженої першою аркою циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) і віссю Ox .

16. Обчислити роботу, необхідну для викачування масла з вертикального циліндричного резервуара, висота якого дорівнює 6 м і радіус основи – 2 м. Густина масла дорівнює $0,9 \text{ кг/м}^3$.

17. Знайти статичні моменти відносно осей Ox , Oy і координати

центру ваги трикутника, утвореного прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

18. Пластина у вигляді півкруга занурена вертикально у воду так, що верхній діаметр лежить на поверхні води. Знайти тиск на цю пластину, якщо радіус дорівнює 5 м.

19. Знайти координати центру ваги однорідного параболічного сегмента, обмеженого параболою $y^2 = 8x$ і прямою $x = 2$.

20. Знайти координати центру ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями $x^2 + 4y - 16 = 0$ і $y = 0$.

21. Знайти момент інерції відносно осі Оу плоскої фігури, обмеженої лініями $x = 2$, $y = x^2$ і $y = 0$.

22. Визначити тиск води на вертикальний півкруг, діаметр якого $2R$ розміщений на поверхні води.

23. Обчислити роботу, яку необхідно витратити на викачування води з ями у формі конуса (вершина на дні). Висота конуса дорівнює 2 м, а радіус основи – 0,5 м.

24. За який час вода витече з конічної лійки висотою $h = 40$ см, радіусом нижньої основи $r = 0,3$ см і верхньої $R = 6$ см.

25. Знайти координати центру ваги дуги, однієї арки циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

26. Знайти момент інерції відносно осі Оу плоскої фігури, обмеженої лініями $x = 1$, $y = x^3$ і $y = 0$.

27. Вертикальна гребля має форму трапеції. Обчислити силу тиску води на греблю, якщо відомо, що верхня і нижня основи греблі відповідно дорівнюють 40 м і 30 м, а висота – 10 м.

28. Знайти координати центру ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями $y = 4x - x^2$ і $y = x$.

29. Знайти координати центру ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями $y = 4 - x^2$ і $y = 0$.

30. Обчислити момент інерції відносно осі Ox плоскої фігури, обмеженої прямими $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = x + 2$.

Завдання 12. Обчислити наближено довжину дуги кривої $y = Ax^3 + Bx^2$, $0 \leq x \leq 2$ (розбити заданий проміжок на 10 частин і значення підінтегральної функції обчислювати з точністю до четвертого знаку після коми): а) за формулою трапецій; б) за формулою Сімпсона.

№ вар.	A	B	№ вар.	A	B	№ вар.	A	B
1	2	1	11	1	3	21	1	5
2	3	1	12	2	3	22	2	5
3	4	1	13	4	3	23	3	5
4	5	1	14	5	3	24	4	5
5	6	1	15	6	3	25	6	5
6	1	2	16	1	4	26	1	6
7	3	2	17	2	4	27	2	6
8	4	2	18	3	4	28	3	6
9	5	2	19	5	4	29	4	6
10	6	2	20	6	4	30	5	6

Завдання 13. Обчислити невластні інтеграли першого та другого роду або встановити їх розбіжність:

1. а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{(1+3 \ln x)^3}}$

б) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 2x}$

$$2. \quad \text{a) } \int_1^{\infty} x^{-2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2x} dx$$

$$\text{б) } \int_{-2}^0 \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$3. \quad \text{a) } \int_1^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{б) } \int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$$

$$4. \quad \text{a) } \int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{8x^3+1}$$

$$\text{б) } \int_0^1 x^{-2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx$$

$$5. \quad \text{a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (5 \ln x + 1)}$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$6. \quad \text{a) } \int_1^{\infty} x^3 \cdot e^{1-x^4} dx$$

$$\text{б) } \int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$$

$$7. \quad \text{a) } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{4x^4+25}$$

$$\text{б) } \int_1^e \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$8. \quad \text{a) } \int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{25x^4-9}}$$

$$\text{б) } \int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$$

$$9. \quad \text{a) } \int_0^{\infty} x \cdot 3^{-x^2} dx$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x}$$

$$10. \quad \text{a) } \int_1^{\infty} x^2 \cdot 5^{x^3-1} dx$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+x^2}}$$

$$11. \quad \text{a) } \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot e^{4x^3-1} dx$$

$$\text{б) } \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 \sin x - 1}$$

$$12. \quad \text{a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+1}$$

$$\text{б) } \int_{0,2}^{0,4} \frac{dx}{\sqrt{4-25x^2}}$$

$$13. \quad \text{a) } \int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^4+16}$$

$$\text{б) } \int_1^e \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^{0,75}}$$

$$14. \quad \text{a) } \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{(\arcsin x)^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15. \quad \text{a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x + 1)^3}$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} 2x dx$$

$$16. \quad \text{a) } \int_{-\infty}^{-1/3} \frac{dx}{9x^2+6x+2}$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$17. \quad \text{a) } \int_0^{\infty} \frac{(x+1)dx}{2x+1}$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{x^5-1}}$$

$$18. \quad \text{a) } \int_{0,5}^{\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$$

$$\text{б) } \int_2^4 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$19. \quad \text{a) } \int_{-\infty}^0 \frac{e^x dx}{\sqrt{16 \cdot e^{2x} + 9}}$$

$$\text{б) } \int_0^{0,25} \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$$

$$20. \quad \text{a) } \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x-8}}$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$21. \quad \text{a) } \int_{-0,75}^{\infty} \frac{dx}{16x^2+8x+5}$$

$$\text{б) } \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1-2 \cos x}$$

$$22. \quad \text{a) } \int_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{x \cdot \sqrt{4 + \ln^2 x}}$$

$$\text{б) } \int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$$

$$23. \quad \text{a) } \int_3^{\infty} x^{-3} \cdot e^{\frac{2}{x^2}} dx$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\sin^2 3x}$$

$$24. \quad \text{a) } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{9x^4 + 1}$$

$$\text{б) } \int_1^e \frac{dx}{\sqrt[3]{(\ln x)^2}}$$

$$25. \quad \text{a) } \int_0^{\infty} \frac{(\arctg x)^3 dx}{x^2 + 1}$$

$$\text{б) } \int_0^{1,5} \frac{x dx}{9 - 4x^2}$$

$$26. \quad \text{a) } \int_1^{\infty} \frac{e^x dx}{(1 - e^x)^3}$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\cos 2x}}$$

$$27. \quad \text{a) } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 4}}$$

$$\text{б) } \int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$$

$$28. \quad \text{a) } \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{(x^2 + 4)^{1,5}}$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$$

$$29. \quad \text{a) } \int_1^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) \cdot \frac{dx}{x^2}$$

$$\text{б) } \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$30. \quad \text{a) } \int_0^{\infty} x \cdot 2^{-x^2} dx$$

$$\text{б) } \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1980, 1988.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Задачник. - М.:

Наука, 1982.

3. Виленкин Н.Я., Шварцбурд С.К. Математический анализ. - М.: Просвещение, 1973.
4. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. - М.: Просвещение, 2002.
5. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т. 1,2. - М.: Наука, 1981. – 687 с.
6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. - М.: Высшая школа, 1998.
7. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу (ч.1 и 2). - М.: Высшая школа, 1998.
8. Миносцев В.Б. Курс высшей математики. - М.: РИЦ МГИУ, 2001.
9. Миносцев В.Б. Сборник типовых расчётов по высшей математике. - М.: РИЦ МГИУ, 2002.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1,2. - М.: Наука, 1985. – 480с.
11. Архипов Г.И. Лекции по математическому анализу. - М.: Высшая школа, 2000.
12. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990. – 624с.
13. Ильин В.А, Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. - М.: Высшая школа, 1994.
14. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике (типовые расчёты). Учебное пособие для втузов. - М.: Вышш. шк., 1983.
15. Мантуров О.В. Матвеев Н.М. Курс высшей математики. - М.: Высшая школа, 1996.
16. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - М.: Наука, 1967.

17. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука. 1985. – 383с.
18. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах. – М.: URSS, 2001. – 696с.
19. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Наука, 1967. – 360с.
20. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 222с.
21. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 ч./ Под ред. А.П. Рябушко. – М.: Высшая школа, 1991. – 270с.
22. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. – М.: Высш. шк., 1986.
23. Каплан И.А. Практические задания по высшей математике. – Харьковский университет, 1971.
24. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1985.
25. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Ч. 1,2. – К.: Техніка, 2000.
26. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука. – Т.1. -1966. - 608с., Т.2. – 1966. – 800с., Т.3. – 1969. – 656с.
27. Тевяшев А.Д., Литвин А.Г. Высшая математика. Общий курс. Сборник задач и упражнений. – Харьков: Рубикон, 1999.