

И. К. Сенченков, Е. И. Беспалова,
В. И. Козлов, С. Н. Якименко

О ВОЗМОЖНОСТЯХ УТОЧНЕННОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ПЛАНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЧАТЫХ ТЕЛ

В ультразвуковой технике часто возникает необходимость в использовании крупногабаритных пластинчатых волноводов, функционирующих в режиме планарных колебаний [8]. Для усиления амплитуд перемещений рабочих поверхностей и обеспечения равномерного (поршневого) характера их движений волноводам придают форму пластин переменной толщины с вырезами, перпендикулярными рабочей поверхности. Колебательное поведение таких волноводов, в особенности крупногабаритных, является весьма сложным. Оно не поддается аналитическому описанию и требует в общем случае трехмерной постановки задачи и применения численных методов.

Для пластинчатых тел, у которых толщинные размеры существенно меньше размеров в плане, а также некоторой характерной длины волны, могут быть использованы различные двумерные модели, в частности, стандартная модель плоского напряженного состояния. Обзор исследований в этой области дан в монографии [4].

В настоящей работе дается вывод и оценка возможностей уточненных уравнений плоской задачи, в которых по аналогии с теорией стержней Лява [6] введена поправка типа Рэлея, учитывающая инерцию толщинных движений элементов тела. Оценка проводится путем сопоставления резонансных частот и форм колебаний тонкостенного прямоугольного параллелепипеда, рассчитанных в трехмерной и уточненной двумерной постановках.

§ 1. Уточненная постановка задачи. Пусть изотропное линейно-упругое тело занимает область V , ограниченную поверхностью S . Предположим, что на части поверхности S_1 задана нагрузка, а остальная

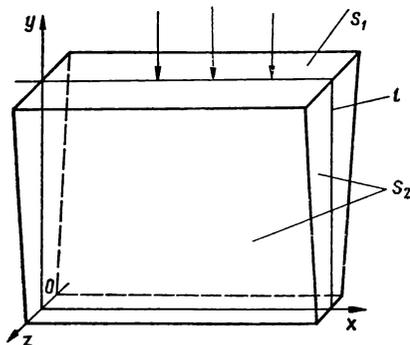


Рис. 1

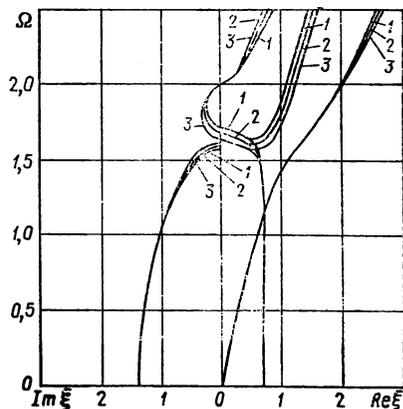


Рис. 2

часть S_2 свободна от напряжений. Введем декартову систему координат $oxyz$ (рис. 1). Тогда постановка задачи трехмерной теории упругости имеет вид

$$\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (i, j = x, y, z); \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (1.2)$$

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right); \quad (1.3)$$

$$\sigma_{ij} n_j = f_1 \text{ на } S_1, \quad \sigma_{ij} n_j = 0 \text{ на } S_2. \quad (1.4)$$

Здесь ρ — плотность; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; σ_{ij} , ε_{ij} и u_i — компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения; n_i — компоненты внешней нормали к поверхности S ; f_i — компоненты поверхностной нагрузки, $f_i = f_i(x, y, z, t)$, $(\dot{\cdot})$, $\dot{\cdot} = \partial(\cdot)/\partial x_i$; $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$.

Соотношения (1.1)–(1.4) необходимо дополнить начальными условиями.

Предположим, что внешние нагрузки действуют в плоскости xoy , т. е.

$$f_x = f_x(x, y, t), \quad f_y = f_y(x, y, t), \quad f_z \equiv 0. \quad (1.5)$$

Относительно силовых и кинематических характеристик принимаем допущения

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0; \quad (1.6)$$

$$u_x = u_x(x, y, t), \quad u_y = u_y(x, y, t). \quad (1.7)$$

Условия (1.6), (1.7) после подстановки в (1.3) дают

$$\gamma_{zz} = - \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = \varepsilon_{zz}(x, y, t), \quad (1.8)$$

откуда после интегрирования по z и дифференцирования по t получаем

$$\dot{u}_z = - \frac{\nu}{1-\nu} (\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy}) z. \quad (1.9)$$

Пусть $z^\pm = z^\pm(x, y)$ — уравнения поверхностей тела в плане. Кинетическая энергия элемента срединного сечения S_m с учетом (1.7) и (1.9) имеет вид

$$d_s K(x, y, t) = \frac{1}{2} ds \int_{z^-(x,y)}^{z^+(x,y)} \rho \left[\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 + \frac{\nu^2}{(1-\nu)^2} (\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy})^2 z^2 \right] dz.$$

Для конфигураций, симметричных относительно плоскости xoy , $z^+(x, y) \equiv -z^-(x, y) \equiv z^*(x, y)$ и

$$d_s K(x, y, t) = \rho \left[(\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2) z^* + \frac{\nu^2}{3(1-\nu)^2} (\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy})^2 z^{*3} \right] ds. \quad (1.10)$$

Для потенциальной энергии деформаций имеем

$$d_s U = \frac{1}{2} ds \int_{-z^*}^{z^*} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dz = 2Gz^* \left[\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 \right] ds. \quad (1.11)$$

Предположим, что поверхности $\pm z^*$ свободны от нагрузки. Тогда с учетом (1.5) работа внешних сил характеризуется равенством

$$I_f = \int_{S_1} f_i u_i ds = \int_l \int_{-z^*}^{z^*} (f_x u_x + f_y u_y) dz dl = 2 \int_l z^* (f_x u_x + f_y u_y) dl, \quad (1.12)$$

где l — контур срединной поверхности.

Действительное движение должно удовлетворять принципу Гамильтона [7]

$$\delta \int_{(t)} (U - K - I_f) dt = 0, \quad (1.13)$$

причем $U = \int_{S_m} d_s U$, $K = \int_{S_m} d_s K$.

Проводя варьирование в (1.13) и опуская промежуточные выкладки, получаем

$$\int_{(t)} dt \int_{S_m} (\sigma_{ij,j}^* - \rho^* \ddot{u}_i) \delta u_i ds + \int_{(t)} dt \int_i (f_i^* - \sigma_{ij} n_j) \delta u_i + \int_{(t)} (...) dt = 0, \quad (1.14)$$

где

$$\sigma_{ij}^* = 2G^* \left(\varepsilon_{ij} + \frac{v}{(1-v)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) + \kappa \ddot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij}; \quad (1.15)$$

$$G^* = Gz^*, \quad \kappa = \rho z^* v^3 / 3 (1-v)^2, \quad \rho^* = \rho z^*, \quad f_i^* = f_i z^*, \quad i, j, k = x, y.$$

Вариационное равенство (1.14) эквивалентно следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^* - \rho^* \ddot{u}_i &= 0; & \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); \\ \sigma_{ij}^* &= 2G^* \left(\varepsilon_{ij} + \frac{v}{1-v} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) + \kappa \ddot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij}; \\ f_i^* &= \sigma_{ij}^* n_j \quad \text{на } l, i, j, k = x, y, \end{aligned} \quad (1.16)$$

а также соответствующим начальным условиям. В отличие от задачи о плоском напряженном состоянии определяющие уравнения содержат поправку, пропорциональную параметру κ , учитывающую инерцию движений в направлении оси oz .

В случае гармонических колебаний

$$u_k = u_k e^{i\omega t}, \quad \sigma_{kl} = \sigma_{kl} e^{i\omega t}, \quad \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl} e^{i\omega t}, \quad f_k = f_k e^{i\omega t}, \quad (1.17)$$

где для амплитуд сохранены те же обозначения, что и для физических величин.

Подстановка (1.17) в соотношения (1.16) приводят к следующим уравнениям:

$$\sigma_{ij,j}^* + \rho^* \omega^2 u_i = 0; \quad (1.18)$$

$$\sigma_{ij}^* = 2G^* \left[\varepsilon_{ij} + \frac{v^*}{1-2v^*} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \delta_{ij} \right],$$

в которых

$$v^* = \frac{v(1-\Delta)}{1+v(1-2\Delta)}, \quad \Delta = \frac{\rho z^* v \omega^2}{6(1-v)G}. \quad (1.19)$$

Таким образом, в рамках принятых допущений планарные колебания класса трехмерных тел описываются уравнениями плоской задачи теории упругости, но с модифицированными плотностью, модулем сдвига и коэффициентом Пуассона. При этом, входящий в выражение для v^* параметр Δ , учитывает инерцию движений, перпендикулярных поверхности S_m . При $\Delta=0$ получаем стандартные уравнения задачи о плоском напряженном состоянии пластинчатых тел переменной толщины.

§ 2. Дисперсия продольных волн в слое конечной толщины. Полезную информацию для оценки эффекта инерции поперечных движений дает анализ дисперсии продольных волн Рэлея—Лэмба в слое $|x| < \infty$, $|y| < b$. При учете конечного размера в направлении оси oz согласно соотношениям (1.18) и (1.19) дисперсионное уравнение сохраняет форму и для симметричных волн имеет вид [4]

$$(2\bar{\xi}^2 - \Omega^2)^2 \cos \frac{\alpha\pi}{2} \sin \frac{\beta\pi}{2} + 4\alpha\beta\bar{\xi}^2 \sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos \frac{\beta\pi}{2} = 0, \quad (2.1)$$

где

$$\alpha = (\Omega^2/k^2 - \bar{\xi}^2)^{1/2}, \quad \beta = (\Omega^2 - \bar{\xi}^2)^{1/2}, \quad k^2 = 2(1 - \nu^*)/(1 - 2\nu^*);$$

$$\nu^* = \nu(1 - \Delta)/[1 + \nu(1 - 2\Delta)], \quad \Omega = 2\omega b/\pi(G/\rho)^{1/2}, \quad \bar{\xi} = 2\xi b/\pi;$$

$$\Delta = \Delta_0\Omega^2, \quad \Delta = \pi^2 z^{*2}\nu/24b^2(1 - \nu).$$

Здесь и ниже расчеты проводились для алюминиевого сплава Д16Т со следующими характеристиками:

$$G = 0,26 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \quad \rho = 0,268 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3, \quad \nu = 0,33. \quad (2.2)$$

На рис. 2 приведены дисперсионные кривые низкочастотной части спектра. Сплошными линиями показаны вещественные и чисто мнимые, а штриховыми — комплексные корни уравнения (2.1). Цифры 1—3 отвечают соответственно $\Delta_0 = 0; 0,1$ и $0,2$. Видно, что инерция толщинных (в направлении оси oz) движений не влияет на частоты запириания, отвечающие толщинно-сдвиговым резонансам ($\Omega_n = 2n$, $n = 1, 2, \dots$), а также на первую распространяющуюся моду. Для второй и третьей мод эффект уже заметен и проявляется в опускании ветвей. Комплексные ветви расходятся лишь вблизи частотного минимума. Таким образом, уточненная модель может дать заметную поправку при расчете колебаний, формируемых нормальными модами, частоты запириания которых связаны с толщинными резонансами слоя ($\Omega_p = (2p - 1)k$, $p = 1, 2, \dots$).

§ 3. Конечно-элементная реализация. Для решения двумерной задачи теории упругости (1.16) используется метод конечных элементов (МКЭ). Соответствующая вариационная формулировка имеет вид

$$\begin{aligned} \delta I = 0; \\ I = \frac{1}{2} \int_S [A_1(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2) + A_2\varepsilon_{xy}^2 + A_3\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} - \rho\omega^2(u_x^2 + u_y^2)] ds - \\ - \int_l (f_x u_x + f_y u_y) dl. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $A_1 = (K + 4G)/3$, $A_2 = 4G$, $A_3 = 2(K + 2G)/3$, K — объемный модуль.

Область S представляется в виде объединения восьмиузловых криволинейных четырехугольников S_i . После изопараметрических отображений областей S_i на $S_i^* = \{\xi, \eta : -1 \leq \xi, \eta \leq 1\}$ выражения для компонент вектора перемещений в пределах четырехугольника записываются в виде

$$u_x = \sum_{i=1}^8 \Phi_i(\xi, \eta) u_{xi}, \quad u_y = \sum_{i=1}^8 \Phi_i(\xi, \eta) u_{yi},$$

где Φ_i — биквадратные полиномы серендипового типа, u_{xi} , u_{yi} — значения неизвестных узловых перемещений.

Применение стандартной процедуры МКЭ [1] приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений

$$\vec{C}\vec{U} - \omega^2 M\vec{U} = \vec{R}. \quad (3.2)$$

Здесь C и M — матрицы жесткости и масс, \vec{R} — узловые значения вектора нагрузки.

Полагая $\vec{R}=0$, получаем обобщенную задачу на собственные значения для определения собственных частот колебаний.

Тестирование программы, реализующей данный подход, осуществлялось на задаче о симметричных колебаниях прямоугольника, для которой получено точное решение [4]. Представление о качестве конечно-элементного решения дают следующие данные. Для прямоугольника $2a \times 2b$ при выполнении соотношения $a/b=3$ значение безразмерной частоты Ω резонанса на моде Ляме равно $\sqrt{2} \approx 1,4142$. Конечно-элементный расчет для прямоугольника $2a=0,4035$ м, $2b=0,1345$ м при равномерной разбивке 7×7 области $a \times 2b$ (176 узловых точек) дает $\Omega=1,4144$.

Совпадение частот в четырех значащих цифрах свидетельствует о точности МКЭ, достаточной для целей настоящей работы.

§ 4. Решение задачи для параллелепипеда. Для оценки возможностей уточненной двумерной модели рассматривается трехмерная задача для области $V+S$, представляющей прямоугольный параллелепипед $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$. Исследованию спектра резонансных характеристик таких тел посвящены работы [5, 9, 10]. В данной статье для определения частот и форм свободных колебаний параллелепипеда рассматривается задача на собственные значения

$$L\vec{u} = \lambda \rho E \vec{u} \text{ в } V, \quad R\vec{u} = 0 \text{ на } S, \quad (4.1)$$

где L — матричный дифференциальный оператор теории упругости; E — единичная матрица; R — оператор граничных условий; λ — искомый параметр, равный квадрату собственной частоты ω .

Основой для решения задачи (4.1) является сочетание методов последовательных приближений (МПП) и полных систем (МПС), описанных в работах [2, 3]. Ниже ограничимся общей схемой решения.

Согласно МПП в варианте обратной итерации со сдвигом спектра собственных значений искомая собственная вектор-функция \vec{u} определяется как предел последовательности векторов $\vec{u}^{(n)}$, являющихся решением вспомогательных краевых задач

$$(L - \tau \rho E) \vec{u}^{(n)} = \rho E \vec{u}^{(n-1)} \text{ в } V, \quad (4.2)$$

$$R\vec{u}^{(n)} = 0 \text{ на } S, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а собственное значение λ находится как предел числовой последовательности $\lambda^{(n)}$ отношений Рэля

$$\lambda^{(n)} = (\vec{u}^{(n)}, \rho E \vec{u}^{(n-1)}) / (\vec{u}^{(n)}, \vec{u}^{(n)}), \quad (4.3)$$

где τ — параметр сдвига, (\cdot) — скалярное произведение.

Задача (4.3) решается МПС в варианте прямого интегрального метода. При этом перемещения $\vec{u}^{(n)} = (u_i^{(n)})$, $i=x, y, z$, на каждом n -м шаге приближения по МПП представляются в виде функций с разделенными переменными

$$u_x^{(n)}(x, y, z) = \sum_{i=1}^I u_{xxi}(x) u_{xyi}(y) u_{xzi}(z);$$

$$u_y^{(n)}(x, y, z) = \sum_{i=1}^I u_{yxi}(x) u_{yyi}(y) u_{yzi}(z);$$

$$u_z^{(n)}(x, y, z) = \sum_{i=1}^I u_{zxi}(x) u_{zyi}(y) u_{zzi}(z),$$

где все компоненты принятого представления, объединенные в три аргументные вектор-функции

$$\vec{X}^{(n)} = (u_{xxi}(x), u_{yxi}(x), u_{zxi}(x)); \quad \vec{y}^{(n)} = (u_{xyi}(y), u_{yyi}(y), u_{zyi}(y)); \\ \vec{z}^{(n)} = (u_{xzi}(z), u_{yzi}(z), u_{zzi}(z)),$$

являются неизвестными.

Для определения введенных неизвестных используется традиционный прием проекционных подходов — процедура интегрирования с весом, имеющая в данном случае вид

$$\vec{P} = (P_x, P_y, P_z); \\ P_x = \left\{ P_{xk}(\cdot) = \int_{-b}^b \int_{-c}^c (\cdot) u_{xyk} u_{xzk} dy dz \right\}; \\ P_y = \left\{ P_{yh}(\cdot) = \int_{-a}^a \int_{-c}^c (\cdot) u_{yxh} u_{yzh} dx dz \right\}; \\ P_z = \left\{ P_{zk}(\cdot) = \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\cdot) u_{zxk} u_{zyk} dx dy \right\} \quad (k = \overline{1, l}). \quad (4.4)$$

В результате ее применения к задаче (4.1) приходим к системе трех взаимосвязанных одномерных задач

$$(L_x - \tau \rho E_x) \vec{X}^{(n)} = \rho E_x \vec{X}^{(n-1)} \quad |x| < a, \quad R_{xj} \vec{X}^{(n)} = 0 \quad x = ja; \quad (4.5)$$

$$(L_y - \tau \rho E_y) \vec{Y}^{(n)} = \rho E_y \vec{Y}^{(n-1)} \quad |y| < b, \quad R_{yj} \vec{Y}^{(n)} = 0 \quad y = jb; \quad (4.6)$$

$$(L_z - \tau \rho E_z) \vec{Z}^{(n)} = \rho E_z \vec{Z}^{(n-1)} \quad |z| < c, \quad R_{zj} \vec{Z}^{(n)} = 0 \quad z = jc \quad (j = -1, 1). \quad (4.7)$$

Эта система при фиксированном n решается итерационно с использованием для отдельной одномерной задачи метода дискретной ортогонализации. Общий итерационный процесс включает решение системы (4.5)—(4.7) и последовательные приближения по МПП вплоть до вычисления $\lambda_n (n = 1, 2, \dots)$ с заданной точностью.

Возможности описанной методики проиллюстрируем на примере плоских сдвиговых (эквивоминимальных) колебаний параллелепипеда со свободной границей. Задача имеет точное аналитическое решение [10]

$$u_x = C \sin \mu_n x \cos \mu_n y, \quad u_y = -C \cos \mu_n x \sin \mu_n y, \quad u_z \equiv 0; \quad (4.8)$$

$$\mu_n = \frac{\pi}{2a} (2n - 1), \quad \Omega_{2n-} = \frac{2\omega a}{\pi \sqrt{G/\rho}} = (2n - 1) \sqrt{2}$$

— для осесимметричных мод и

$$u_x = C \cos \mu_n x \sin \mu_n y, \quad u_y = -C \sin \mu_n x \cos \mu_n y, \quad u_z \equiv 0; \quad (4.9)$$

$$\mu_n = \frac{\pi}{2a} \cdot 2n, \quad \Omega_{2n} = \frac{2\omega a}{\pi \sqrt{G/\rho}} = 2n \cdot \sqrt{2}$$

— для несимметричных мод.

Для каждой из этих мод собственные частоты одинаковы в случаях плоско-напряженного (ПНС) и плоско-деформированного состояний (ПДС). Данный пример позволяет оценить скорость сходимости итера-

ционного процесса и точность получаемых результатов в зависимости от выбора начальных приближений.

Задача (4.1) решается для параллелепипеда со сторонами $2a$, $2a$, $0,1a$ при задании двух типов условий на границах $z=\text{const}$ — условий свободной границы (ПНС) и условий подпирания гладкими жесткими элементами (ПДС). В случае ПНС в качестве начального приближения выбирались разные функции — тригонометрические и степенные.

Результаты расчета первых трех значений безразмерной частоты для ПНС при $a=0,06725$ м приведены в табл. 1 в зависимости от

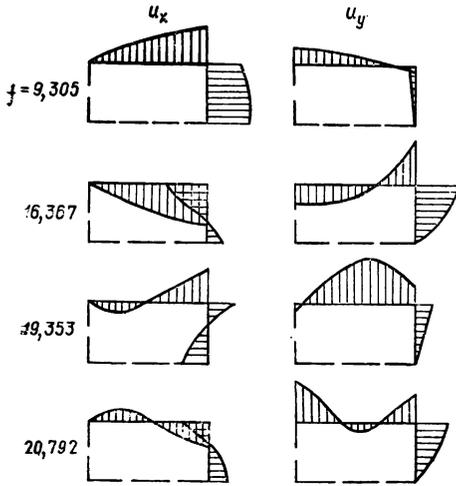


Рис. 3

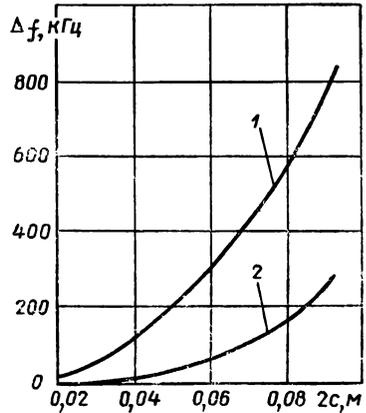


Рис. 4

шага m итерационного процесса решения системы (4.5) — (4.7). Согласно этим данным $6 \div 8$ итераций по МПС обеспечивают определение частот с точностью до пяти значащих цифр. Аналогичные результаты получены и для случая ПДС.

Отметим, что значения частот, определенные по изложенной методике, хорошо согласуются со значениями, полученными по МКЭ. Это иллюстрируется табл. 2, в которой приведены значения первых четырех частот симметричных мод колебаний, рассчитанных в двух- и трехмерной постановках для параллелепипеда $2a=0,2690$ м, $2b=0,1345$ м, $2c=0,01664$ м, причем расчет по МКЭ проводился в предположении плоского напряженного состояния. Соответствующие формам колеба-

Таблица 1

—	m	$\Omega_1 = \sqrt{2} = 1,4142$		$\Omega_2 = 2\sqrt{2} = 2,8284$		$\Omega_3 = 3\sqrt{2} = 4,2427$	
		Аппроксимация					
		тригон.	степен.	тригон.	степен.	тригон.	степен.
Плоско-напряженное состояние	1	1,7004	1,6369	2,8282	2,7962	4,4170	2,2302
	2	1,4155	1,4252	2,8284	2,8285	4,2433	3,9673
	3	1,4145	1,4174	2,8284	2,8284	4,2427	4,2177
	4	1,4143	1,4167	—	2,8284	4,2427	4,5977
	5	1,4142	1,4153	—	—	—	4,2427
	6	1,4142	1,4144	—	—	—	4,2427
	7	—	1,4142	—	—	—	—
	8	—	1,4142	—	—	—	—

Таблица 2

f , кГц	N			
	1	2	3	4
МКЭ	9,306	16,37	19,37	20,80
МПС	9,305	16,37	19,35	20,79

Таблица 3

f , кГц	$2c$, м				
	0,01667	0,03736	0,05310	0,07580	0,09366
МКЭ	20,80	20,71	20,60	20,41	20,24
МПС	20,79	20,71	20,57	20,28	19,95

ний перемещения граничных поверхностей сечения $z=0$ показаны на рис. 3. Их нормированные значения, полученные обоими методами, совпадают в трех — четырех значащих цифрах.

§ 5. Оценка точности двумерной модели. Сравнительный анализ проводился для параллелепипеда сечением $2a \times 2b$, $2a=0,2690$ м, $2b=0,1345$ м со свободной границей. Размер $2c$ в направлении оси oz варьировался. В табл. 3 приведены значения частот четвертого резонанса симметричных колебаний для различных значений $2c$. Эти частоты лежат вблизи стандартной частоты $f=20$ кГц, используемой в технологических установках для сварки пластмасс ультразвуком. Видно, что с увеличением размера тела, а следовательно, и усиления волнового характера движений, в направлении оси oz значение частоты уменьшается. При анализе данных следует иметь в виду, что значение $f=20,80$ кГц, отвечающее малой толщине $2c=0,01664$ м, с точностью до единицы четвертого знака совпадает с частотой для стандартной задачи о плоском напряженном состоянии. На рис. 4 показаны кривые погрешности стандартной (кривая 1) и уточненной (кривая 2) двумерных моделей в зависимости от параметра $2c$. Приведенные результаты показывают, что предлагаемая модель обеспечивает приемлемую точность определения частоты ($\Delta f=100$ Гц) для значений толщинных параметров, характерных для плоских волноводов ($2c \leq 0,07$ м). Видно также, что при $2c \leq 0,04$ м можно ограничиться стандартной моделью ПНС.

Таким образом, использование конечно-элементной реализации уточненной модели позволяет избежать, с одной стороны, больших затрат времени счета ЭВМ, неизбежных при решении задач в трехмерной постановке и, с другой стороны, весьма дорогостоящей механической подгонки размеров волновода, к необходимости которой может привести использование стандартной модели.

SUMMARY. A refined statement of the problem on planar oscillations of the plate bodies is given which considers the inertia of thickness movements. A problem on oscillations of a rectangular parallelepiped is taken to show that a refined model provides an essentially higher accuracy in determination of the resonance frequencies for a range of frequencies and configurations typical of plane waveguides used in the low ultrasonic engineering as against the standard model of the plane stressed state.

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов.— М.: Стройиздат, 1982.— 448 с.
2. Беспалова Е. И. Об одном подходе к исследованию свободных колебаний упругих элементов конструкций // Прикл. механ.— 1988.— 24, № 1.— С. 43—48.
3. Беспалова Е. И. Решение задач теории упругости методами полных систем // Журн. вычислит. математики и математ. физики.— 1989.— 29, № 9.— С. 1346—1353.
4. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.— Киев: Наук. думка, 1981.— 284 с.
5. Жилин П. А., Ильичева Т. П. Спектры и формы колебаний прямоугольного параллелепипеда, полученные на основе трехмерной теории упругости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1980.— № 2.— С. 94—103.
6. Ляв А. Математическая теория упругости.— М.: ОНТИ, 1935.— 674 с.
7. Новацкий В. Теория упругости.— М.: Мир, 1975.— 872 с.
8. Andoh E., Kagawa Y. Finite element simulation of a ultrasonic vibrator for plastic welding // IEEE Ultra Son. Symp. Proc.— 1985.— 1.— P. 563—566.
9. Fromme J A., Leissa W. A. Free vibrations of the rectangular parallelepiped // J. Acoust. Soc. Amer.— 1970.— 48, N 1.— P. 290—298.
10. Gottlieb H. P. W. Uniqueness and properties of an interesting class of natural oscillations of a solid rectangular parallelepiped // J. of Elast.— 1981.— 11, N 1.— P. 425—428.

Ин-т механики АН Украины, Киев

Поступила 25.05.90

УДК 539.375

А. А. Каминский, С. А. Кекух

ДЛИТЕЛЬНОЕ РАЗРУШЕНИЕ ПЛАСТИНЫ ИЗ ОРТОТРОПНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО КОМПОЗИТА С ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ ПОСТОЯННОЙ НАГРУЗКЕ

В настоящей работе на основе модифицированной δ -модели разрушения в рамках концепции постоянства размера области предразрушения у края продвигающейся трещины исследуется длительное разрушение пластины из ортотропного вязкоупругого композита вследствие докритического развития имеющейся в ней сквозной центральной трещины нормального отрыва при постоянной нагрузке. В отличие от работ [2—4, 9, 11] учитываются все виды ползучести материала пластины и вместо упрощающих аппроксимаций используется разработанный ранее эффективный метод расшифровки нерациональных (иррациональных, трансцендентных и т. п.) функций от резольвентных операторов, полученных по принципу Вольтерра в процессе решения задач теории вязкоупругости для анизотропных материалов [8, 10].

Постановка задачи осуществляется в рамках теории Вольтерра для интегральных операторов, описывающих ортотропию вязкоупругих деформационных свойств материала пластины, которые являются резольвентными ограниченными операторами с ядрами произвольного аналитического вида. Получение окончательных искомым выражений производится для резольвентных ограниченных операторов с ядрами в виде дробноэкспоненциальной функции Ю. Н. Работнова.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим разрушение пластины из ортотропного тканевого композита, которая ослаблена сквозной центральной трещиной нормального отрыва длиной $2l_0$ и подвержена растяжению постоянными усилиями p (рис. 1). Оси ортотропии 1 и 2 — соответственно уток (основа) и основа (уток) ткани композита — параллельны координатным x и y .