МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРОЕКТУВАННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИН
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Методичні вказівки для студентів технічних та економічних спеціальностей

КІРОВОГРАД
2016

Приклади розв’язання завдань для самостійної роботи з теорії ймовірностей та математичної статистики. Методичні вказівки для студентів технічних спеціальностей/ Укл.: Гончаров В.В., Гончарова С.Я. – Кіровоград: КНТУ, 2016.– 79 с.

Методичні вказівки містять приклади розв’язання завдань для самостійної роботи за темою «Комплексні числа».

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики та фізики.
Протокол № 2
від 23.09.2016 р.

Задача 1.

Приклад 1.

В лотереї з 100 білетів 10 виграшних. Яка ймовірність того, що серед 5 навмання куплених білетів 2 виявляться виграшними?

Розв'язок. Запишемо коротку умову задачі за допомогою наступної схеми:

Всього	Виграшних	Невиграшних
100	10	90
Купили		
5	2	3

Нехай A – випадкова подія "серед 5 навмання куплених білетів 2 виявляться виграшними".

За класичним означенням імовірності

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де n – кількість всіх рівноможливих несумісних результатів випробування, m – кількість сприятливих події A результатів випробування.

Кількість всіх результатів випробування дорівнює кількості способів навмання вибрати 5 білетів із 100, тобто кількості сполучень із 100 по 5, а саме $n = C_{100}^{5}$.

Визначимо кількість сприятливих події A результатів випробування – 2 білети серед 5 навмання куплених виявляться виграшними. 2 виграшних білети можна вибрати з 10 виграшних C_{10}^{2} способами, при цьому ті, що залишилися $5-2=3$ білети повинні бути невиграшними, і взяти їх можна з $100-10=90$ невиграшних білетів C_{90}^{3} способами. Таким чином, за основним принципом комбінаторики (правилом добутку) $m = C_{10}^{2} \cdot C_{90}^{3}$.

Отримаємо:

$$P(A)=\frac{C_{10}^{2}\cdot C_{90}^{3}}{C_{100}^{5}}=\frac{\frac{10!}{2!\cdot(10-2)!}\cdot\frac{90!}{3!\cdot(90-3)!}}{\frac{100!}{5!\cdot(100-5)!}}=\frac{\frac{10!}{2!\cdot 8!}\cdot\frac{90!}{3!\cdot 87!}}{\frac{100!}{5!\cdot 95!}}=\frac{\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}\cdot\frac{90\cdot 89\cdot 88}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 86}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}}=$$

$$=\frac{5\cdot 9\cdot 30\cdot 89\cdot 44}{5\cdot 33\cdot 49\cdot 97\cdot 86}=\frac{3\cdot 30\cdot 89\cdot 22}{11\cdot 49\cdot 97\cdot 43}=\frac{176220}{2248169}\approx 0{,}0784.$$

Відповідь: $P(A)\approx 0{,}0784$. ◀

Приклад 2.

З семи карток розрізної абетки “а”, “і”, “о”, “з”, “к”, “н”, “ч” навмання беруть 4 картки. Яка ймовірність, що з вибраних карток можна скласти слово ”ніч”?

Розв’язок. Нехай A – випадкова подія “з вибраних карток можна скласти слово ”ніч””.

За класичним означенням імовірності:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

де n – кількість всіх рівноможливих несумісних результатів випробування, m – кількість сприятливих події A результатів випробування.

Кількість всіх результатів випробування дорівнює кількості способів навмання вибрати 4 картки із 7, тобто кількості сполучень із 7 по 4, а саме $n=C_7^4$.

Кількість сприятливих події A результатів випробування m рівна 4, так як сприятливими будуть набори з чотирьох букв:

“н”, “і”, “ч”, “а”;

“н”, “і”, “ч”, “о”;

“н”, “і”, “ч”, “з”;

“н”, “і”, “ч”, “к”.

Отримаємо:

$$P(A)=\frac{4}{C_7^4}=\frac{4}{\frac{7!}{4!(7-4)!}}=\frac{4}{\frac{7!}{4!3!}}=\frac{4}{\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2}}=\frac{4}{7\cdot5}=\frac{4}{35}.$$

Відповідь: $P(A)=\frac{4}{35}$. ◀

Приклад 3.

З восьми карток розрізної абетки “а”, “о”, “і”, “г”, “н”, “р”, “с”, “ь” навмання беруть 5 карток і складають їх в порядку вибирання. Яка ймовірність отримання слова ”осінь”?

Розв’язок. Нехай A – випадкова подія “отримаємо слово ”осінь””.

За класичним означенням імовірності:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

де n – кількість всіх рівноможливих несумісних результатів випробування, m – кількість сприятливих події A результатів випробування.

Кількість всіх результатів випробування дорівнює кількості способів навмання вибрати 5 карток із 8 і скласти їх в порядку вибирання, тобто, кількості впорядкованих 5-елементних підмножин з 8-елементної множини карток – кількості розміщень з 8 по 5, а саме $n=A_8^5$.

Кількість сприятливих події A результатів випробування m рівна 1.

Отримаємо:

$$P(A)=\frac{1}{A_8^5}=\frac{1}{\frac{8!}{(8-5)!}}=\frac{1}{\frac{8!}{3!}}=\frac{1}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}=\frac{1}{6720}\approx0{,}00015.$$

Відповідь: $P(A)\approx0{,}00015$. ◀

Приклад 4.

В рівносторонній трикутник зі стороною a вписано круг. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана в трикутнику точка попаде в круг.

Розв’язок. Нехай A – випадкова подія “навмання вибрана в трикутнику точка попаде в круг”.

За означенням геометричної ймовірності:

$$P(A) = \frac{s}{S},$$

де S – площа всієї області, якій належить точка;

s – площа заданої частини області, якій належить точка.

Площа S всієї області, якій належить точка дорівнює площі трикутника, а площа s заданої частини області – дорівнює площі круга.

Отримаємо:

$$P(A) = \frac{s}{S} = \frac{\pi r^2}{S} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{2S}{p}\right)^2}{S} = \frac{\frac{4\pi S^2}{p^2}}{S} = \frac{4\pi S}{p^2} = \frac{4\pi \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin 60^0}{(3a)^2} = \frac{2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{9} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9},$$

де r – радіус вписанного круга,

p – периметр трикутника.

Відповідь: $P(A) = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$. ◀

Задача 2.

Приклад 1.

Три стрільці проводять по одному пострілу в ціль, імовірність влучення в яку для першого стрільця рівна $0{,}6$, для другого – $0{,}7$, для третього – $0{,}8$. Знайти ймовірність того, що:

1) всі стрільці влучать в ціль;
2) всі стрільці не влучать в ціль;
3) один стрілець влучить в ціль;
4) два стрільці влучать в ціль;
5) хоча б один стрілець влучить в ціль.

Розв’язок. Нехай випадкові події:

A – “перший стрілець влучить в ціль”,

B – “другий стрілець влучить в ціль”,

C – “третій стрілець влучить в ціль”.

Протилежні до цих подій:

$\overline{A}$ – “перший стрілець не влучить в ціль”,

$\overline{B}$ – “другий стрілець не влучить в ціль”,

$\overline{C}$ – “третій стрілець не влучить в ціль”.

За умовою задачі $P(A)=0{,}6$, $P(B)=0{,}7$, $P(C)=0{,}8$.

Тоді

$$P(\overline{A})=1-0{,}6=0{,}4,$$

$$P(\overline{B})=1-0{,}7=0{,}3,$$

$$P(\overline{C})=1-0{,}8=0{,}2.$$

При розв’язанні задачі скористаємось знаками:

$\bigcap$ – означає добуток або суміщення чи перетин подій, тобто, що події відбудуться одночасно;

$\bigcup$ – означає суму або об’єднання подій, тобто, що відбудеться принаймні одна з цих подій.

1) Випадкова подія “всі стрільці влучать в ціль” полягає в тому, що відбудуться одночасно події $A,B,C,$ тобто $A\bigcap B\bigcap C$.

З умови задачі події A,B,C незалежні, тому ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P=P\left(A\bigcap B\bigcap C\right)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}336.$$

Відповідь: $P=0{,}336$. $\triangleleft$

2) Випадкова подія “всі стрільці не влучать в ціль” полягає в тому, що відбудуться одночасно події $\overline{A},\overline{B},\overline{C},$ тобто $\overline{A}\bigcap \overline{B}\bigcap \overline{C}$.

З умови задачі події $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ незалежні, тому ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P=P\left(\overline{A}\bigcap \overline{B}\bigcap \overline{C}\right)=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C})=0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}024.$$

Відповідь: $P=0{,}024$. $\triangleleft$

3) Випадкова подія “один стрілець влучить в ціль” полягає в тому, що

відбудуться несумісні між собою події “перший стрілець влучить в ціль і другий – не влучить, і третій – не влучить” або “перший стрілець не влучить в ціль і другий – влучить, і третій не влучить”, або “перший стрілець не влучить в ціль і другий – не влучить, і третій влучить”, що можна записати за допомогою знаків суміщення та об’єднання подій у вигляді

$$(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C).$$

Знайдемо шукану ймовірність, використовуючи аксіому ймовірності суми несумісних подій:

$$P=P((A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C))=P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})+P(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})+$$
$$+P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C).$$

З умови задачі події $A, B, C, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ незалежні в сукупності, тому за означенням ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей.

Отримаємо:

$$P=0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}036+0{,}056+0{,}096=0{,}188.$$

Відповідь: $P=0{,}188$. $\lhd$

4) Випадкова подія “два стрільці влучать в ціль” полягає в тому, що відбудуться несумісні між собою події “перший стрілець влучить в ціль і другий – влучить, і третій не влучить” або “перший стрілець влучить в ціль і другий – не влучить, і третій – влучить”, або “перший стрілець не влучить в ціль і другий – влучить, і третій – влучить”, що можна записати у вигляді

$$(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C).$$

Знайдемо шукану ймовірність, використовуючи аксіому ймовірності суми несумісних подій:

$$P=P((A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C))=P(A\cap B\cap\overline{C})+P(A\cap\overline{B}\cap C)+$$
$$+P(\overline{A}\cap B\cap C).$$

Отримаємо:

$$P=0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8+0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}084+0{,}144+0{,}224=0{,}452.$$

Відповідь: $P=0{,}452$. $\lhd$

5) *1 спосіб.*

Випадкова подія “хоча б один стрілець влучить в ціль” полягає в тому, що відбудуться несумісні між собою події “один стрілець влучить в ціль” або “два стрільці влучать в ціль”, або “три стрільці влучать в ціль”.

З пунктів 3), 4), 1) знайдемо шукану ймовірність:

$$P = 0{,}188 + 0{,}452 + 0.336 = 0{,}976.$$

2 спосіб.

Нехай G – випадкова подія “хоча б один стрілець влучить в ціль”, тоді $\overline{G}$ – протилежна до неї подія “всі стрільці не влучать в ціль”.

Ймовірність події G рівна

$$P(G) = 1 - P(\overline{G}).$$

Використавши пункт 2), знайдемо шукану ймовірність:

$$P(G) = 1 - 0{,}024 = 0{,}976 .$$

Відповідь: $P = 0{,}976$.

Зауваження. Очевидно, другий спосіб розв’язання коротший. Цей спосіб називають способом розв’язання від протилежної події. ◀

Приклад 2.

Скільки раз потрібно кинути гральний кубик, щоб імовірність появи одного зерна хоча б один раз була більшою 0,9?

Розв’язок. Нехай A – випадкова подія “одне зерно з’явиться хоча б один раз”. Тоді $\overline{A}$ – “одне зерно не з’явиться жодного разу” – протилежна до неї подія.

Ймовірність події $\overline{A}$ рівна

$$P(\overline{A}) = q^n,$$

де q ймовірність того, що одне зерно не з’явиться при одному підкиданні грального кубика, n – шукане число.

Ймовірність події A рівна

$$P(A) = 1 - q^n.$$

За умовою задачі $P(A) > 0{,}9$.

За класичним означенням імовірності $q = \frac{5}{6}$.

Таким чином,

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0{,}9,$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}1,$$

$$\ln\left(\frac{5}{6}\right)^n < \ln 0{,}1,$$

$$n \ln\left(\frac{5}{6}\right) < \ln 0{,}1,$$

$$n > \frac{\ln 0{,}1}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx \frac{-2{,}3}{-0{,}18} \approx 12,(7).$$

Звідки отримаємо $n = 13$.

Відповідь: $n = 13$. ◀

Приклад 3.

Кинуто три гральних кубики. Яка ймовірність того, що на всіх кубиках випаде різна кількість зерен?

Розв'язок. Нехай випадкові події

A – "кількість зерен, що випали на першому кубику",

B –"кількість зерен, що випали на другому кубику",

C – "кількість зерен, що випали на третьому кубику".

За умовою задачі події A, B, C залежні.

За формулою множення шукана ймовірність рівна

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B / A) \cdot P(C / (A \cap B)).$$

На першому кубику може випасти довільна кількість зерен, тому за класичним означенням імовірності $P(A)=\frac{6}{6}=1$.

На другому кубику не може випасти та кількість зерен, що випала на першому кубику, тому за класичним означенням імовірності $P(B/A)=\frac{5}{6}$.

На третьому кубику не може випасти та кількість зерен, що випала на першому кубику і та – що випала на другому, тому за класичним означенням імовірності $P(C/(A\cap B))=\frac{4}{6}$.

Отримаємо:

$$P(A\cap B\cap C)=1\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{5}{9}.$$

Відповідь: $P(A\cap B\cap C)=\frac{5}{9}$. ◀

Приклад 4.

В урні містяться 5 однакових кульок з номерами від 1 до 5. Навмання витягають по одній 3 кульки. Знайти ймовірність того, що послідовно з'являться кульки з номерами 1, 2, 3, якщо кульки витягають:

а) без повернення;

б) з поверненням.

Розв'язок. Нехай випадкові події

A – "з'явиться кулька з номером 1",

B –" з'явиться кулька з номером 2",

C – "з'явиться кулька з номером 3".

а) За умовою задачі події A, B, C залежні.

За формулою множення шукана ймовірність рівна

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/(A\cap B)).$$

За класичним означенням імовірності першою з'явиться кулька з номером 1 з ймовірністю $P(A)=\frac{1}{5}$.

Умовна ймовірність того, що другою з’явиться кулька з номером 2, при умові що вже витягли першу кульку з номером 1, рівна $P(B/A)=\frac{1}{4}$, так як в урні залишилось чотири кульки і одна з них з номером 2.

Третьою з’явиться кулька з номером 3, при умові, що першою з’явиться кулька з номером 1 і другою з’явиться кулька з номером 2, з умовною ймовірністю $P(C/(A\bigcap B))=\frac{1}{3}$, так як в урні залишилось три кульки і одна з них з номером 3.

Отримаємо:

$$P(A\bigcap B\bigcap C)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{60}.$$

Відповідь: $P(A\bigcap B\bigcap C)=\frac{1}{60}$. ◁

б) За умовою задачі події A, B, C незалежні.

За формулою множення шукана ймовірність рівна

$$P(A\bigcap B\bigcap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C).$$

За класичним означенням імовірності першою з’явиться кулька з номером 1 з ймовірністю $P(A)=\frac{1}{5}$.

Другою з’явиться кулька з номером 2 з ймовірністю $P(B)=\frac{1}{5}$, так як в урну повернули першу кульку і серед п’яти кульок – одна з номером 2.

Третьою з’явиться кулька з номером 3 з ймовірністю $P(C)=\frac{1}{5}$, так як в урну повернули другу кульку і серед п’яти кульок – одна з номером 3.

Отримаємо:

$$P(A\bigcap B\bigcap C)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{125}.$$

Відповідь: $P(A\bigcap B\bigcap C)=\frac{1}{125}$. ◀

Задача 3.

Приклад 1.

Пасажир для придбання квитка може навмання звернутись до однієї з трьох кас. Ймовірності наявності квитка в касах відповідно рівні $0{,}6$, $0{,}7$, $0{,}8$. Яка ймовірність того, що придбаний квиток буде з першої каси?

Розв'язок. Нехай випадкові події:

A – "пасажир придбає квиток",

H_1 – "пасажир вибере для купівлі квитка першу касу",

H_2 – "пасажир вибере для купівлі квитка другу касу",

H_3 – "пасажир вибере для купівлі квитка третю касу".

За умовою задачі події H_1, H_2, H_3 утворюють повну групу, так як вичерпують всі можливі результати в даному випробуванні, а отже,

$$\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 1.$$

Також, за умовою задачі події H_1, H_2, H_3 рівноможливі, тобто, жодна з подій не має переваг появи при випробуванні, тому вони мають однакові ймовірності:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

За умовою задачі умовні ймовірності

$P(A/H_1) = 0{,}6$ – "пасажир придбає квиток при умові, що він вибере для купівлі першу касу",

$P(A/H_2) = 0{,}7$ – "пасажир придбає квиток при умові, що він вибере для купівлі другу касу",

$P(A/H_3) = 0{,}8$ – "пасажир придбає квиток при умові, що він вибере для купівлі третю касу".

За формулою повної ймовірності

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A/H_i)=\frac{1}{3}\cdot 0{,}6+\frac{1}{3}\cdot 0{,}7+\frac{1}{3}\cdot 0{,}8=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(0{,}6+0{,}7+0{,}8)=\frac{2{,}1}{3}=0{,}7.$$

Імовірність події "придбаний квиток буде з першої каси" знайдемо за формулою Байєса:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}6}{0{,}7}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{7}{10}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{10}{7}=\frac{2}{7}.$$

Відповідь: $P(H_1/A)=\frac{2}{7}$. ◄

Приклад 2.

Три автомати виготовляють однакові деталі, які подаються на спільний конвеєр. Продуктивність першого автомата в 2 рази більша продуктивності другого, а продуктивність другого автомата в 3 рази більша продуктивності третього. Перший автомат виготовляє в середньому 90 % деталей відмінної якості, другий – 95 %, а третій – 99 %, Яка ймовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь виготовлена другим автоматом, якщо вона має відмінну якість ?

Розв'язок. Нехай випадкові події

A – "взяли деталь відмінної якості",

H_1 – "деталь виготовлена першим автоматом",

H_2 – "деталь виготовлена другим автоматом",

H_3 – "деталь виготовлена третім автоматом".

За умовою задачі події H_1, H_2, H_3 – гіпотези – утворюють повну групу, так як вичерпують всі можливі результати в даному випробуванні, а отже,

$$P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1.$$

Позначивши через N продуктивність третього автомата, запишемо кількість деталей, що подаються на конвеєр, за допомогою наступної схеми:

$$\left.\begin{array}{l}\text{I автомат - } 6\text{N деталей}\\ \text{II автомат - } 3\text{N деталей}\\ \text{III автомат - } \text{N деталей}\end{array}\right\} 10N \text{ деталей.}$$

За класичним означенням імовірності гіпотез рівні

$$P(H_1) = \frac{6N}{10N} = \frac{6}{10} = 0{,}6,$$

$$P(H_2) = \frac{3N}{10N} = \frac{3}{10} = 0{,}3,$$

$$P(H_3) = \frac{N}{10N} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

Перевірка. $0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1$.

За умовою задачі умовні ймовірності рівні

$$P(A/H_1) = \frac{90}{100} = 0{,}9,$$

$$P(A/H_2) = \frac{95}{100} = 0{,}95,$$

$$P(A/H_3) = \frac{99}{100} = 0{,}99.$$

За формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$
$$= 0{,}6 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}95 + 0{,}1 \cdot 0{,}99 = 0{,}54 + 0{,}285 + 0{,}099 = 0{,}924.$$

Імовірність події “взята з конвеєра деталь відмінної якості виготовлена другим автоматом” знайдемо за формулою Байєса:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}95}{0{,}924} = \frac{3 \cdot 95}{924} = \frac{95}{308}.$$

Відповідь: $P(H_2/A) = \frac{95}{308}$. ◄

Приклад 3.

В урні було 6 чорних і 4 білих кульки. З неї випадковим чином вийняли 3 кульки. Яка ймовірність того, що вийняті після цього 2 кульки виявляться білими?

Розв'язок. Введемо позначення "Б" – вийняли білу кульку, "Ч" – вийняли чорну кульку.

Нехай випадкові події

A – "вийняті в кінці 2 кульки виявляться білими",

H_1 – "БББ",

H_2 – "ЧББ" або "БЧБ", або "ББЧ",

H_3 – "ЧЧБ" або "ЧБЧ", або "БЧЧ"

H_4 – "ЧЧЧ".

За умовою задачі події H_1, H_2, H_3, H_4 – гіпотези – утворюють повну групу, так як вичерпують всі можливі результати в даному випробуванні, а отже, $\sum_{i=1}^{4} P(H_i) = 1$.

Знайдемо ймовірності гіпотез за формулою множення:

$$P(H_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{24}{720},$$

$$P(H_2) = 3 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{216}{720},$$

$$P(H_3) = 3 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{360}{720},$$

$$P(H_4) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{120}{720}.$$

Перевірка. $\frac{24}{720} + \frac{216}{720} + \frac{360}{720} + \frac{120}{720} = \frac{720}{720} = 1.$

Аналогічно, знайдемо умовні ймовірності:

$$P(A/H_1) = \frac{1}{7} \cdot 0 = 0,$$

$$P(A/H_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{42},$$

$$P(A/H_3) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42},$$

$$P(A/H_4)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{12}{42}.$$

За формулою повної ймовірності

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(H_i)P(A/H_i)=\frac{24}{720}\cdot 0+\frac{216}{720}\cdot\frac{2}{42}+\frac{360}{720}\cdot\frac{6}{42}+\frac{120}{720}\cdot\frac{12}{42}=$$

$$=\frac{9}{30}\cdot\frac{1}{21}+\frac{15}{30}\cdot\frac{3}{21}+\frac{5}{30}\cdot\frac{6}{21}==\frac{84}{30\cdot 21}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}.$$

Відповідь: $P(A)=\frac{2}{15}$. ◀

Задача 4.

Приклад 1.

Стрілець виконує 6 пострілів по мішені. Знайти ймовірність хоча б двох влучень в мішень, якщо ймовірність влучення при одному пострілі рівна $0{,}8$.

Розв'язок. Нехай випадкова подія A – "стрілець влучить у мішень при одному пострілі".

За умовою задачі $P(A)=p=0{,}8$.

Протилежна до неї подія $\overline{A}$ – "стрілець не влучить у мішень при одному пострілі", тоді

$$P(\overline{A})=q=1-0{,}8=0{,}2.$$

Випадкова подія "стрілець влучить у мішень хоча б два рази" означає, що він влучить у мішень не менше двох раз – або два, або три, або чотири, або п'ять, або шість раз.

Позначимо шукану ймовірність $P_6(k\geq 2)$.

Використовуючи формулу Бернуллі, знайдемо

$$P_6(k\geq 2)=P_6(2)+P_6(3)+P_6(4)+P_6(5)+P_6(6)=$$

$$=C_6^2\cdot p^2\cdot q^{6-2}+C_6^3\cdot p^3\cdot q^{6-3}+C_6^4\cdot p^4\cdot q^{6-4}+C_6^5\cdot p^5\cdot q^{6-5}+C_6^6\cdot p^6\cdot q^{6-6}=$$

$$=C_6^2\cdot p^2\cdot q^4+C_6^3\cdot p^3\cdot q^3+C_6^4\cdot p^4\cdot q^2+C_6^5\cdot p^5\cdot q^1+C_6^6\cdot p^6\cdot q^0=$$

$$=\frac{6!}{2!\cdot(6-2)!}\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^4+\frac{6!}{3!\cdot(6-3)!}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^3+\frac{6!}{4!\cdot(6-4)!}\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^2+$$

$$+\frac{6!}{5!\cdot(6-5)!}\cdot 0{,}8^5\cdot 0{,}2^1+1\cdot 0{,}8^6\cdot 1=$$

$$=\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^4+\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^3+\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^2+\frac{6!}{5!\cdot 1!}\cdot 0{,}8^5\cdot 0{,}2^1+0{,}8^6=$$

$$=\frac{6\cdot 5}{2}\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^4+\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^3+\frac{6\cdot 5}{2}\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^2+6\cdot 0{,}8^5\cdot 0{,}2^1+0{,}8^6=$$

$$=0{,}01536+0{,}08192+0{,}24576+0{,}393216+0{,}262144=0{,}9984.$$

Відповідь: $P_6\{k\geq 2\}=0{,}9984$. ◀

Приклад 2.

Скільки потрібно придбати лотерейних білетів, щоб імовірність хоча б одного виграшу була не меншою 0,4, якщо ймовірність випадання виграшу на один білет рівна 0,004.

Розв'язок. Нехай випадкова подія A – “випаде хоча б один виграш”.

Протилежна до неї подія $\overline{A}$ – “не випаде ні один виграш”.

Тоді

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

Якщо ймовірність випадання виграшу на один білет рівна $p=0{,}004$, то ймовірність того, що виграш на цей білет не випаде, рівна

$$q=1-0{,}004=0{,}996\ .$$

За формулою Бернуллі ймовірність того, що виграш не випаде на n білетів, рівна

$$P(\overline{A})=C_n^n q^n p^0=q^n,$$

де n шукане число.

Зауваження. Очевидно, що останню формулу можна отримати за правилом множення ймовірностей незалежних випадкових подій.

За умовою задачі

$$P(A)\geq 0{,}4.$$

Отримаємо:

$$1-q^n \ge 0{,}4,$$

$$q^n \le 0{,}6,$$

$$\ln q^n \le \ln 0{,}6,$$

$$n\ln 0{,}996 \le \ln 0{,}6,$$

$$n \ge \frac{\ln 0{,}6}{\ln 0{,}996},$$

$$n \ge \frac{-0{,}511}{-0{,}004008},$$

$$n \ge 127{,}495.$$

Звідки отримаємо $n = 128$.

Відповідь: $n = 128$. ◀

Задача 5.

Приклад 1.

При штампуванні автоматом цвяхів імовірність появи бракованого цвяха рівна $0{,}002$. Знайти ймовірність того, що в партії з 5000 цвяхів буде 5 бракованих.

Розв'язок. Нехай випадкова подія A – "при штампуванні автоматом появиться бракований цвях".

За умовою задачі $P(A) = p = 0{,}002$.

Так як $p = 0{,}002 < 0{,}1$ і в партії велика кількість цвяхів – 5000, то для знаходження шуканої ймовірності скористаємось формулою Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

де $\lambda = np$.

За умовою задачі $n = 5000$, $k = 5$.

Знайдемо $\lambda = 0{,}002 \cdot 5000 = 10$.

Тоді

$$P_{5000}(5) \approx \frac{10^5 e^{-10}}{10!}.$$

Для обчислення e^{-10} скористаємось таблицею 1 додатків:

$$e^{-10} = \left(e^{-2}\right)^5 = 0{,}135^5 = 0{,}00004484.$$

Отримаємо:

$$P_{5000}(5) \approx \frac{100000 \cdot 0{,}00004484}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10000 \cdot 0{,}00004484}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{0{,}4484}{362880} = 0{,}000001235.$$

Відповідь: $P_{5000}(5) \approx 0{,}000001235$. ◄

Приклад 2.

Знайти ймовірність того, що деяка подія відбудеться 130 раз при 200 випробуваннях, якщо ймовірність її появи в одному окремому випробуванні рівна 0,8.

Розв'язок. За умовою задачі $p = 0{,}8$ – ймовірність появи деякої події в одному випробуванні, тоді $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ – ймовірність протилежної події.

Для розв'язання задачі скористаємось локальною теоремою Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

де $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$,

$\varphi(x)$ – функція Гауса.

За умовою $n = 200$, $k = 130$.

Знайдемо значення x:

$$x = \frac{130 - 200 \cdot 0{,}8}{\sqrt{200 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \approx \frac{-130}{5{,}65685} \approx -22{,}98.$$

Для обчислення $\varphi(x)$ скористаємось таблицею 2 додатків.

Так як $-22{,}98 < -4$, то $\varphi(x) \approx 0$.

Отримаємо шукану ймовірність:

$$P_{200}(130) \approx \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \cdot 0 = 0.$$

Відповідь: $P_{200}(130) \approx 0$. ◀

Приклад 3.

У відділ технічного контролю надійшла партія деталей. Знайти ймовірність того, що з 200 перевірених деталей стандартних буде не менше 170, якщо ймовірність стандартності навмання взятої деталі рівна $0{,}9$.

Розв'язок. За умовою задачі $p = 0{,}9$ – ймовірність того, що навмання взята деталь стандартна, тоді $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ – ймовірність протилежної події.

Для розв'язання задачі скористаємось інтегральною теоремою Лапласа:

$$P(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$,

$\Phi(x)$ – функція Лапласа.

За умовою $n = 200$, $k_1 = 170$, $k_2 = 200$.

Знайдемо значення x_1, x_2:

$$x_1 = \frac{170 - 200 \cdot 0{,}9}{\sqrt{200 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \approx \frac{-10}{4{,}24264} \approx -2{,}36,$$

$$x_2 = \frac{200 - 200 \cdot 0{,}9}{\sqrt{200 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \approx \frac{20}{4{,}24264} \approx 4{,}71.$$

За таблицею 3 додатків знайдемо:

$$\Phi(-2{,}36) = -\Phi(2{,}36) = -0{,}49086 .$$

Так як $4{,}71 > 4$, то

$$\Phi(4{,}71) \approx 0{,}5 .$$

Отримаємо шукану ймовірність:

$$P(170, 200) \approx 0{,}5 - (-0{,}49086) = 0{,}99086 \approx 0{,}99 .$$

Відповідь: $P(170, 200) \approx 0{,}99$. ◀

Задача 6.

Приклад 1.

На шахівниці довільним чином ставиться кінь. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості клітин, що потрапляють під удар коня.

Розв’язок. Проілюструємо розв’язок задачі на рисунках.

Клітинки, що потрапляють під удар коня зафарбовані сірим кольором.

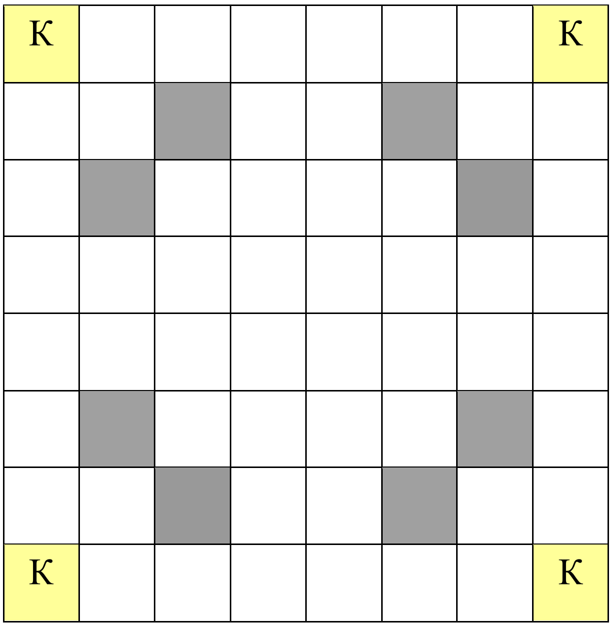


Рис. 1.

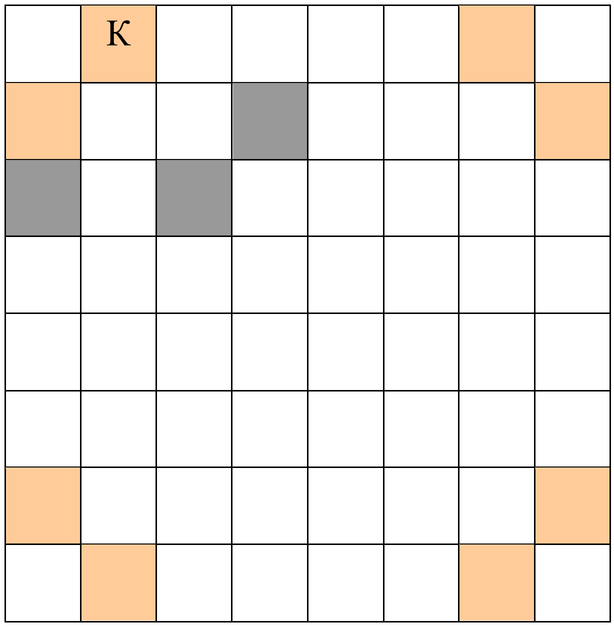


Рис. 2.

На рис. 1 розташування коня зображено жовтим кольором. Таких клітин 4 з 64 можливих клітин шахівниці і при такому розташуванні під удар попадає 2 клітинки, а отже випадкова величина $X=2$ і за класичним означенням імовірності:

$$P(X=2)=\frac{4}{64}.$$

На рис. 2 розташування коня зображено оранжевим кольором. Таких клітин 8 з 64 можливих і при такому розташуванні під удар попадає 3 клітинки, а отже випадкова величина $X=3$ і

$$P(X=3)=\frac{8}{64}.$$

Аналогічно визначаємо, яка кількість клітин попадає під удар коня при всіх інших можливих його розташуваннях на шахівниці.

Таким чином отримаємо, що випадкова величина X в кожній клітині шахівниці набуває значень, які вказані на рис. 3.

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

Рис. 3.

Отже, для випадкової величини X шуканий закон розподілу має вигляд:

X	2	3	4	6	8
P	$\frac{4}{64}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{16}{64}$	$\frac{16}{64}$

Перевірка.

$$\frac{4}{64}+\frac{8}{64}+\frac{20}{64}+\frac{16}{64}+\frac{16}{64}=\frac{64}{64}=1. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.

Кидають два гральних кубики. Знайти закон розподілу випадкової величини X – суми зерен, що випали на обох кубиках.

Розв'язок. Проілюструємо розв'язок за допомогою схеми:

I кубик	II кубик
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6

Очевидно, що випадкова величина X – сума зерен, що випали на обох кубиках – прийматиме значення від 2 до 12.

Кількість всіх рівноможливих несумісних результатів випробування за основним принципом комбінаторики рівна $6 \cdot 6 = 36$.

За класичним означенням імовірності:

$$P(X=2)=\frac{1}{36}, \quad P(X=3)=\frac{2}{36},$$

$$P(X=4)=\frac{3}{36}, \quad P(X=5)=\frac{4}{36},$$

$$P(X=6)=\frac{5}{36}, \quad P(X=7)=\frac{6}{36},$$

$$P(X=8)=\frac{5}{36}, \quad P(X=9)=\frac{4}{36},$$

$$P(X=10)=\frac{3}{36}, \quad P(X=11)=\frac{2}{36},$$

$$P(X=12)=\frac{1}{36}.$$

Отже, для випадкової величини X шуканий закон розподілу має вигляд:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Перевірка. $\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{36}{36}=1.$

Зауваження. Розподіл отриманого вигляду називають симетричним. ◄

Приклад 3.

З повного набору доміно витягають одну кісточку. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості зерен на кісточці.

Розв'язок. Проілюструємо розв'язок задачі за допомогою схеми. Для цього запишемо кількість зерен на половинках кісточок набору доміно:

00 01 02 03 04 05 06

11 12 13 14 15 16

22 23 24 25 26

33 34 35 36

44 45 46

55 56

66

Очевидно, кісточок набору доміно 28 і випадкова величина X – кількість зерен на кісточці – може приймати значення від 0 до 12.

За класичним означенням імовірності:

$$P(X=0)=\frac{1}{28},\quad P(X=1)=\frac{1}{28},\quad P(X=2)=\frac{2}{28},$$

$$P(X=3)=\frac{2}{28},\quad P(X=4)=\frac{3}{28},\quad P(X=5)=\frac{3}{28},$$

$$P(X=6)=\frac{4}{28},\quad P(X=7)=\frac{3}{28},\quad P(X=8)=\frac{3}{28},$$

$$P(X=9)=\frac{2}{28},\quad P(X=10)=\frac{2}{28},\quad P(X=11)=\frac{1}{28},$$

$$P(X=12)=\frac{1}{28}.$$

Отже, для випадкової величини X шуканий закон розподілу має вигляд:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

Перевірка.

$$\frac{1}{28}+\frac{1}{28}+\frac{2}{28}+\frac{2}{28}+\frac{3}{28}+\frac{3}{28}+\frac{4}{28}+\frac{3}{28}+\frac{3}{28}+\frac{2}{28}+\frac{2}{28}+\frac{1}{28}+\frac{1}{28}=\frac{28}{28}=1. \blacktriangleleft$$

Приклад 4.

В кожній з двох урн є 6 чорних і 4 білі кульки. Спочатку з першої урни навмання переклали одну кульку в другу, а потім з другої урни вийняли три кульки. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості білих кульок серед вийнятих.

Розв'язок. Введемо позначення "Б" – вийняли білу кульку, "Ч" – вийняли чорну кульку.

Нехай випадкові події

H_1 – "з першої урни в другу переклали білу кульку",

H_2 – "з першої урни в другу переклали чорну кульку",

A_0 – "з другої урни ЧЧЧ",

A_1 – "з другої урни БЧЧ" або "з другої урни ЧБЧ", або"з другої урни ЧЧБ",

A_2 – "з другої урни ББЧ" або "з другої урни БЧБ", або "з другої урни ЧББ",

A_3 – "з другої урни БББ".

За умовою задачі події H_1, H_2 – гіпотези – утворюють повну групу, так як вичерпують всі можливі результати в даному випробуванні, а отже,

$$\sum_{i=1}^{2} P(H_i) = 1.$$

Знайдемо ймовірності гіпотез за класичним означенням імовірності:

$$P(H_1) = \frac{6}{10},$$

$$P(H_2) = \frac{4}{10}.$$

Перевірка. $\frac{6}{10} + \frac{4}{10} = 1.$

Знайдемо умовні ймовірності, скориставшись формулою множення ймовірностей залежних подій:

$$P(A_0 / H_1) = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9},$$

$$P(A_0 / H_2) = \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9},$$

$$P(A_1 / H_1) = 3 \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9},$$

$$P(A_1 / H_2) = 3 \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9},$$

$$P(A_2 / H_1) = 3 \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9},$$

$$P(A_2 / H_2) = 3 \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9},$$

$$P(A_3 / H_1) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9},$$

$$P(A_3 / H_2) = \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}.$$

За формулою повної ймовірності:

$$P(X = 0) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i) P(A_0 / H_i) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} =$$

$$= \frac{720}{9900} + \frac{940}{9900} = \frac{1560}{9900};$$

$$P(X=1)=\sum_{i=1}^{2}P(H_i)P(A_1/H_i)=\frac{6}{10}\cdot 3\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}+\frac{4}{10}\cdot 3\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}=$$

$$=\frac{2700}{9900}+\frac{2016}{9900}=\frac{4716}{9900};$$

$$P(X=2)=\sum_{i=1}^{2}P(H_i)P(A_2/H_i)=\frac{6}{10}\cdot 3\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}+\frac{4}{10}\cdot 3\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=$$

$$=\frac{2160}{9900}+\frac{1008}{9900}=\frac{3168}{9900};$$

$$P(X=3)=\sum_{i=1}^{2}P(H_i)P(A_3/H_i)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=$$

$$=\frac{360}{9900}+\frac{96}{9900}=\frac{456}{9900}.$$

Отже, для випадкової величини X шуканий закон розподілу має вигляд:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1560}{9900}$	$\frac{4716}{9900}$	$\frac{3168}{9900}$	$\frac{456}{9900}$

Перевірка. $\frac{1560}{9900}+\frac{4716}{9900}+\frac{3168}{9900}+\frac{456}{9900}=\frac{9900}{9900}=1.$ ◄

Задача 7. В прикладі 1 задачі 6 для випадкової величини X:

1) побудувати многокутник розподілу;
2) знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Розв'язок.

1) Побудуємо многокутник розподілу на рис. 4:

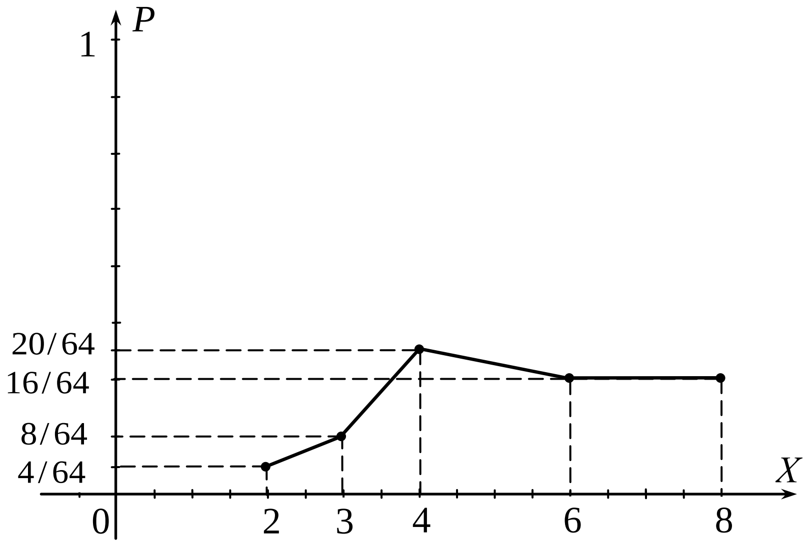


Рис. 4.

◁

2) а) Математичне сподівання випадкової величини X шукатимемо за формулою:

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i .$$

Отримаємо:

$$MX = 2 \cdot \frac{4}{64} + 3 \cdot \frac{8}{64} + 4 \cdot \frac{20}{64} + 6 \cdot \frac{16}{64} + 8 \cdot \frac{16}{64} = \frac{336}{64} = \frac{21}{4} = 5{,}25.$$

б) Дисперсію випадкової величини X шукатимемо за формулою:

$$DX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - (MX)^2 .$$

Отримаємо:

$$DX = 2^2 \cdot \frac{4}{64} + 3^2 \cdot \frac{8}{64} + 4^2 \cdot \frac{20}{64} + 6^2 \cdot \frac{16}{64} + 8^2 \cdot \frac{16}{64} - \left(\frac{21}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{2008}{64} - \frac{441}{16} = \frac{61}{16} = 3{,}8125 .$$

Середнє квадратичне відхилення рівне $\sigma X = \sqrt{DX}$.

Отже, $\sigma X = \sqrt{3{,}8125} \approx 1{,}95$. ◀

Задача 8.

Приклад 1.

Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x<0,\\ c\left(\dfrac{2x^3}{3}+3x\right) & при\ \ 0\le x\le 3,\\ 1 & при\ \ x>3.\end{cases}$$

Знайти:

1) множник c;

2) щільність розподілу $p(x)$;

3) математичне сподівання випадкової величини X;

4) дисперсію випадкової величини X;

5) середнє квадратичне відхилення випадкової величини X;

6) імовірність попадання випадкової величини X в інтервал (a,b) при $a=1,\ b=2$.

7) Побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу.

Розв'язок. 1), 2) Щільність розподілу рівна першій похідні від функції розподілу:

$$p(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x<0,\\ c\left(\dfrac{2}{3}\cdot 3\cdot x^2+3\right) & при\ \ 0\le x\le 3,\\ 0 & при\ \ x>3.\end{cases}=\begin{cases}0 & при\ \ x<0,\\ c(2x^2+3) & при\ \ 0\le x\le 3,\\ 0 & при\ \ x>3.\end{cases}$$

Множник c шукатимемо, скориставшись властивістю щільності розподілу випадкової величини X:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1.$$

За межами відрізка $[0,3]$ функція $p(x)=0$, тому

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_{0}^{3}c(2x^2+3)dx=$$

$$=c\left(\frac{2x^3}{3}+3x\right)\Bigg|_0^3=c\left(\left(\frac{2\cdot 3^3}{3}+3\cdot 3\right)-\left(\frac{2\cdot 0^3}{3}+3\cdot 0\right)\right)=c\cdot 27=1.$$

Знайдемо $c=\frac{1}{27}$.

Тоді щільність розподілу рівна

$$p(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x<0,\\ \frac{1}{27}\cdot(2x^2+3) & при\ \ 0\le x\le 3,\\ 0 & при\ \ x>3.\end{cases}\ \triangleleft$$

3) Математичне сподівання випадкової величини X шукатимемо за формулою

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx.$$

Отримаємо

$$MX=\int_0^3 x\cdot\frac{1}{27}\cdot(2x^2+3)dx=\frac{1}{27}\int_0^3(2x^3+3x)dx=\frac{1}{27}\cdot\left(2\cdot\frac{x^4}{4}+3\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=\frac{1}{27}\cdot\left(\left(\frac{2\cdot 3^4}{4}+\frac{3\cdot 3^2}{2}\right)-\left(\frac{2\cdot 0^4}{4}+\frac{3\cdot 0^2}{2}\right)\right)=\frac{1}{3^3}\cdot\frac{3^4+3^3}{2}=\frac{3^3(3+1)}{2}=\frac{4}{2}=2.\ \triangleleft$$

4) Дисперсію випадкової величини X шукатимемо за формулою

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)dx-(MX)^2.$$

Отримаємо

$$DX=\int_0^3 x^2\cdot\frac{1}{27}\cdot(2x^2+3)dx-2^2=\frac{1}{27}\int_0^3(2x^4+3x^2)dx-4=$$

$$=\frac{1}{27}\cdot\left(2\cdot\frac{x^5}{5}+3\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3-4=\frac{1}{27}\cdot\left(\left(\frac{2\cdot 3^5}{5}+3^3\right)-\left(\frac{2\cdot 0^5}{5}+0^3\right)\right)-4=$$

$$=\frac{1}{27}\cdot\left(\frac{2\cdot 3^5}{5}+3^3\right)-4=\frac{1}{3^3}\left(\frac{2\cdot 3^3\cdot 3^2}{5}+3^3\right)-4=\frac{3^3}{3^3}\left(\frac{2\cdot 3^2}{5}+1\right)-4=\frac{18}{5}+1-4=\frac{3}{5}.$$

$\lhd$

5) Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X шукатимемо за формулою $\sigma X=\sqrt{DX}$.

Отримаємо

$$\sigma X=\sqrt{\frac{3}{5}}\approx 0{,}7746.\ \lhd$$

6) Імовірність попадання випадкової величини X в інтервал (a,b) знайдемо за формулою

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a).$$

При $a=1,\ b=2$ отримаємо

$$P(1<X<2)=F(2)-F(1)=\frac{1}{27}\left(\frac{2x^3}{3}+3x\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{1}{27}\left(\left(\frac{2\cdot 2^3}{3}+3\cdot 2\right)-\left(\frac{2\cdot 1^3}{3}+3\cdot 1\right)\right)=$$

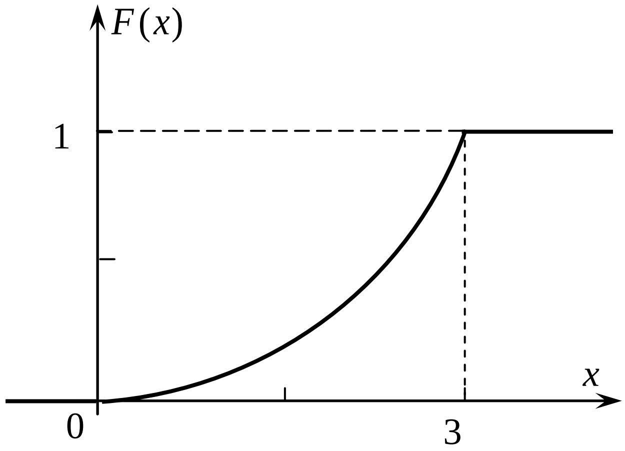
$$=\frac{1}{27}\cdot\left(\frac{16}{3}+6-\frac{2}{3}-3\right)=\frac{1}{27}\cdot\left(\frac{14}{3}+3\right)=\frac{1}{27}\cdot\frac{23}{3}=\frac{23}{81}.\ \lhd$$

7) Знайдемо значення функції розподілу при $x=0$ і при $x=3$:

$$F(0)=\frac{1}{27}\left(\frac{2x^3}{3}+3x\right)\Bigg|_{x=0}=\frac{1}{27}\left(\frac{2\cdot 0^3}{3}+3\cdot 0\right)=0,$$

$$F(3)=\frac{1}{27}\left(\frac{2x^3}{3}+3x\right)\Bigg|_{x=3}=\frac{1}{27}\left(\frac{2\cdot 3^3}{3}+3\cdot 3\right)=\frac{1}{3}(2+1)=1.$$

Побудуємо графік функції розподілу $F(x)$:

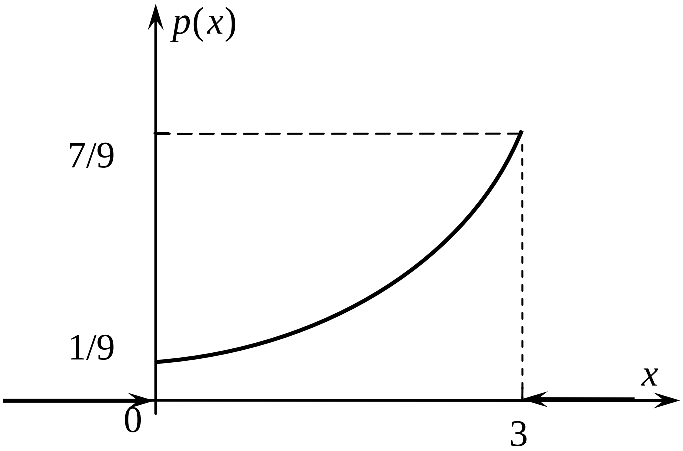


Знайдемо значення щільності розподілу при $x=0$ і при $x=3$:

$$p(0)=\frac{1}{27}\left(2x^2+3\right)\Big|_{x=0}=\frac{1}{27}\left(2\cdot 0^2+3\right)=\frac{3}{27}=\frac{1}{9},$$

$$p(3)=\frac{1}{27}\left(2x^2+3\right)\Big|_{x=3}=\frac{1}{27}\left(2\cdot 3^2+3\right)=\frac{21}{27}=\frac{7}{9}.$$

Побудуємо графік щільності розподілу $p(x)$:



Приклад 2.

Випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$p(x)=\begin{cases} c\left(x+1\right) & при\ \ x\in\left[-1,3\right], \\ 0 & при\ \ x\notin\left[-1,3\right]. \end{cases}$$

Знайти:

1) множник c;

2) функцію розподілу $F(x)$;

3) математичне сподівання випадкової величини X;

4) дисперсію випадкової величини X;

5) середнє квадратичне відхилення випадкової величини X;

6) імовірність попадання випадкової величини X в інтервал (a,b) при $a=0,\ b=1$.

Побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу.

Розв'язок. 1) Множник c шукатимемо, скориставшись властивістю щільності розподілу випадкової величини X:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$$

За межами відрізка $[-1,3]$ функція $p(x)=0$, тому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-1}^{3} p(x)dx = 1,$$

$$\int_{-1}^{3} c(x+1)dx = 1,$$

$$c\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{3} = 1,$$

$$c\left(\left(\frac{3^2}{2}+3\right)-\left(\frac{(-1)^2}{2}+(-1)\right)\right) = 1,$$

$$c\left(\frac{9}{2}+3+\frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$c\cdot 8 = 1,$$

$$c = \frac{1}{8}.$$

Отже, щільність розподілу рівна

$$p(x)=\begin{cases}0 & при \;\; x<-1,\\ \frac{1}{8}(x+1) & при \;\; -1\le x\le 3, \\ 0 & при \;\; x>3.\end{cases} \quad \triangleleft$$

2) Для знаходження функції розподілу застосуємо формулу:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(u)du\,.$$

Якщо $x<-1$, то $p(x)=0$ і

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0du=0\,.$$

Якщо $-1\le x\le 3$, то $p(x)=\frac{1}{8}(x+1)$, і

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-1} 0du+\int_{-1}^{x}\frac{1}{8}(u+1)du=\frac{1}{8}\left(\frac{u^2}{2}+u\right)\Bigg|_{-1}^{x}=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-\left(\frac{(-1)^2}{2}+(-1)\right)\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2}+x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\right).$$

Якщо $x>3$, то $p(x)=0$ і

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-1} 0du+\int_{-1}^{3}\frac{1}{8}(u+1)du+\int_{3}^{x} 0du=$$

$$=0+\frac{1}{8}\left(\frac{u^2}{2}+u\right)\Bigg|_{-1}^{3}+0=\frac{1}{8}\left(\left(\frac{3^2}{2}+3\right)-\left(\frac{(-1)^2}{2}+(-1)\right)\right)=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{9}{2}+3+\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{8}=1\,.$$

Отже, функція розподілу рівна

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \;\; x<-1,\\ \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\right) & при \;\; -1\le x\le 3, \\ 1 & при \;\; x>3.\end{cases} \quad \triangleleft$$

3) Математичне сподівання випадкової величини X шукатимемо за

формулою

$$MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx.$$

Отримаємо

$$MX = \int\limits_{-1}^{3} x \cdot \frac{1}{8} \cdot (x+1)dx = \frac{1}{8}\int\limits_{-1}^{3} (x^2 + x)dx = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{-1}^{3} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(\left(\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} \right) \right) = \frac{1}{8} \cdot \left(9 + \frac{9}{2} - \left(-\frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(9 + 4 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{40}{3} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67. \triangleleft$$

4) Дисперсію випадкової величини X шукатимемо за формулою

$$DX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - (MX)^2.$$

Отримаємо

$$DX = \int\limits_{-1}^{3} x^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot (x+1)dx - \left(\frac{5}{3} \right)^2 = \frac{1}{8}\int\limits_{-1}^{3} (x^3 + x^2)dx - \frac{25}{9} = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{3} - \frac{25}{9} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(\left(\frac{3^4}{4} + \frac{3^3}{3} \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) - \frac{25}{9} = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{81}{4} + 9 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) - \frac{25}{9} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(20 + 9 + \frac{1}{3} \right) - \frac{25}{9} = \frac{1}{8} \cdot \frac{88}{3} - \frac{25}{9} = \frac{11}{3} - \frac{25}{9} = \frac{8}{9}. \triangleleft$$

5) Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X шукатимемо за формулою $\sigma X = \sqrt{DX}$.

Отримаємо

$$\sigma X = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} \approx 0.94. \triangleleft$$

6) Імовірність попадання випадкової величини X в інтервал (a, b) знайдемо за формулою

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

При $a = 0,\ b = 1$ отримаємо

$$P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

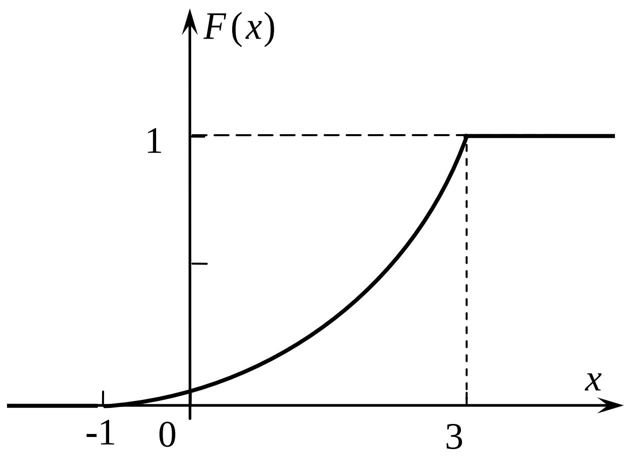
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1^2}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{0^2}{2} + 0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{8} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}. \ \triangleleft$$

7) Знайдемо значення функції розподілу при $x = -1$ і при $x = 3$:

$$F(0) = \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right)\Bigg|_{x=-1} = \frac{1}{8}\left(\frac{(-1)^2}{2} + (-1) + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$F(3) = \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right)\Bigg|_{x=3} = \frac{1}{8}\left(\frac{3^2}{2} + 3 + \frac{1}{2}\right) = \frac{8}{8} = 1.$$

Побудуємо графік функції розподілу $F(x)$:

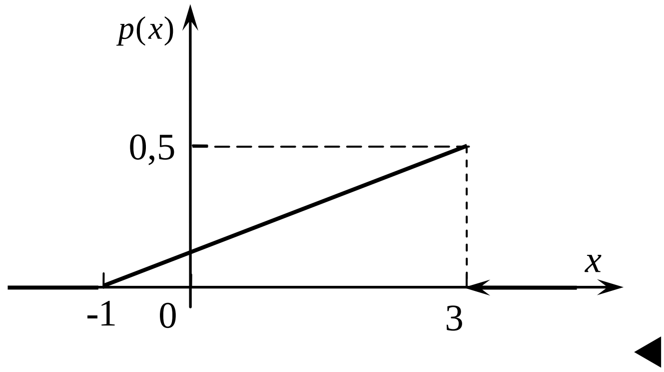


Знайдемо значення щільності розподілу при $x = -1$ і при $x = 3$:

$$p(0) = \frac{1}{8}(x+1)\Bigg|_{x=-1} = 0,$$

$$p(3) = \frac{1}{8}(x+1)\Bigg|_{x=3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Побудуємо графік щільності розподілу $p(x)$:



Задача 9.

Приклад 1.

Всі значення рівномірно розподіленої випадкової величини лежать на відрізку $[4,16]$. Знайти ймовірність попадання даної випадкової величини в інтервал $(5,10)$, її математичне сподівання і дисперсію.

Розв'язок. Щільність рівномірно розподіленої на відрізку $[a,b]$ випадкової величини задається формулою

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{при } x\in[a,b],\\ 0 & \text{при } x\notin[a,b].\end{cases}$$

Для даної випадкової величини, рівномірно розподіленої на відрізку $[4,16]$, матимемо

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{16-4} & \text{при } x\in[4,16]\\ 0 & \text{при } x\notin[4,16]\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{12} & \text{при } x\in[4,16],\\ 0 & \text{при } x\notin[4,16].\end{cases}$$

Імовірність попадання випадкової величини X в інтервал (a,b) знайдемо за формулою

$$P(a<X<b)=\int_a^b p(x)dx.$$

При $a=5,\ b=10$ отримаємо

$$P(5 < X < 10) = \int_5^{10} \frac{1}{12} dx = \frac{1}{12} x \Big|_5^{10} = \frac{1}{12} \cdot (10-5) = \frac{5}{12}.$$

Математичне сподівання рівномірно розподіленої на відрізку $[a,b]$ випадкової величини X знайдемо за формулою

$$MX = \int_a^b xp(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Для даної випадкової величини матимемо $MX = \frac{4+16}{2} = 10$.

Дисперсію рівномірно розподіленої на відрізку $[a,b]$ випадкової величини X знайдемо за формулою

$$DX = \int_a^b x^2 p(x)dx - (MX)^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3-a^3}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} =$$

$$= \frac{4a^2+4ab+4b^2}{12} - \frac{3a^2+6ab+3b^2}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Для даної випадкової величини матимемо

$$DX = \frac{(16-4)^2}{12} = \frac{144}{12} = 12. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.

Ймовірність влучення стрільця в ціль рівна 0,8. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X – кількості влучень стрільця в ціль при 15 пострілах.

Розв'язок. Випадкова величина X має біноміальний розподіл.

Математичне сподівання біноміального розподілу рівне

$$MX = np.$$

За умовою задачі $p = 0{,}8,\ n = 15$.

Отримаємо

$$MX = 15 \cdot 0{,}8 = 12.$$

Дисперсія біноміального розподілу рівна

$$DX = npq,$$

де $q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Отримаємо

$$DX = 15 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 2{,}4. \blacktriangleleft$$

Приклад 3.

Ймовірність безвідмовної роботи деякого елемента розподілена за показниковим законом $p(t) = 0{,}03e^{-0{,}03t}$ при $t \geq 0$ і $p(t) = 0$ при $t < 0$. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини T – часу безвідмовної роботи елемента і ймовірність того, що елемент пропрацює безвідмовно 40 годин.

Розв'язок. Математичне сподівання показникового розподілу $p(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ рівне $MT = \dfrac{1}{\lambda}$.

За умовою задачі $\lambda = 0{,}03$.

Отримаємо

$$MT = \frac{1}{0{,}03} = \frac{100}{3}.$$

Дисперсія показникового розподілу рівна $DT = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Отримаємо:

$$DT = \frac{1}{0{,}03^2} = \frac{1}{0{,}0009} = \frac{10000}{9}.$$

Для обчислення ймовірності безвідмовної роботи елемента застосуємо функцію надійності

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t},$$

де $F(t)$ – функція показникового розподілу.

Отримаємо:

$$R(40) = e^{-0,03\cdot 40} = e^{-1,2}.$$

Значення функції e^{-x} при $x = -1,2$ знайдемо за таблицею 1 додатків, отримаємо:

$$R(40) = 0,302 \blacktriangleleft$$

Приклад 4.

Випадкова величина X – маса вагона – розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням 70 т і середнім квадратичним відхиленням 1 т. Потяг складається із 120 вагонів. Локомотив може везти потяг масою не більшою 8500 т. Знайти ймовірність того, що локомотив зможе везти потяг.

Розв'язок. Випадкова величина $Y = 120X$ – маса потяга – розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням

$$MY = 120 \cdot MX = 120 \cdot 70 = 8400 \text{ т}$$

і середнім квадратичним відхиленням

$$\sigma Y = 120 \cdot \sigma X = 120 \cdot 1 = 120 \text{ т}.$$

За правилом "трьох сигм" майже вірогідно, що маса потяга попадає в інтервал

$$8400 - 3\cdot 120 \le Y \le 8400 + 3\cdot 120 \text{ (т)}$$

або

$$8040 \le Y \le 8720 \text{ (т)}.$$

За умовою локомотив може везти потяг масою не більшою 8500 т, тобто

$$Y \le 8500 \text{ (т)}.$$

Знайдемо ймовірність попадання випадкової величини Y в інтервал $(8040, 8500)$.

Скористаємось формулою

$$P(\alpha < Y < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

– імовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини Y в інтервал (α, β),

де $\Phi(y)$ – функція Лапласа.

Отримаємо

$$P(8040 < Y < 8500) = \Phi\left(\frac{8500 - 8400}{120}\right) - \Phi\left(\frac{8040 - 8400}{120}\right) \approx \Phi(0{,}83) - \Phi(-3) =$$

$$= \Phi(0{,}83) + \Phi(3) = 0{,}29389 + 0{,}49865 = 0{,}79254 \approx 0{,}8. \blacktriangleleft$$

Задача 10. Для нормально розподіленої випадкової величини X з математичним сподіванням a, середнім квадратичним відхиленням σ знайти:

1) ймовірність попадання в інтервал (α, β);
2) ймовірність того, що абсолютна величина відхилення $X - a$ буде меншою за δ,

якщо $a = 3, \sigma = 4, \alpha = 2, \beta = 6, \delta = 7$.

Розв'язок. 1) Імовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини X в інтервал (α, β) знайдемо за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Отримаємо

$$P(2 < X < 6) = \Phi\left(\frac{6-3}{4}\right) - \Phi\left(\frac{2-3}{4}\right) = \Phi\left(\frac{3}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-1}{4}\right) = \Phi(0{,}75) + \Phi(0{,}25).$$

Значення функції $\Phi(x)$ знайдемо за таблицею 3 додатків:

$$\Phi(0{,}75) = 0{,}27337, \ \Phi(0{,}25) = 0{,}09871.$$

Отримаємо

$$P\{2 < X < 6\} = 0{,}27337 + 0{,}09871 = 0{,}37208 . \triangleleft$$

2) Знайдемо ймовірність того, що абсолютна величина відхилення $X - a$ буде меншою за δ, скориставшись формулою ймовірності попадання нормально розподіленої випадкової величини X в інтервал (α, β):

$$P\{|X - a| < \delta\} = P\{-\delta < X - a < \delta\} = P\{a - \delta < X < a + \delta\} =$$

$$= \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right).$$

Так як функція Лапласа непарна, отримаємо

$$P\{|X - a| < \delta\} = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Для даної випадкової величини матимемо

$$P\{|X - 3| < 7\} = 2\Phi\left(\frac{7}{4}\right) = 2\Phi(1{,}75) = 2 \cdot 0{,}45994 = 0{,}91988 . \blacktriangleleft$$

Задача 11.

Приклад 1.

Гральний кубик кидають 700 раз. Оцінити ймовірність того, що середнє арифметичне кількості зерен, які при цьому випадуть, відхилиться від математичного сподівання за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,1.

Розв'язок. Нехай $X_1, X_2, ..., X_n$ – незалежні випадкові величини з однаковим математичним сподіванням $MX_i = a,\ i = \overline{1, n}$, що задають кількість зерен, які випадуть при підкиданні грального кубика в кожному з n підкидань, відповідно. Їхнє середнє арифметичне $X = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ є випадковою величиною.

Ймовірність того, що їхнє середнє арифметичне X відхилиться від математичного сподівання MX за абсолютною величиною не більше, ніж на ε, оцінимо, скориставшись нерівністю Чебишева:

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} .$$

За властивостями математичного сподівання

$$MX = M\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(MX_1 + MX_2 + ... + MX_n\right) = \frac{1}{n} \cdot na = a\,.$$

За властивостями дисперсії, враховуючи незалежність випадкових величин,

$$DX = D\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(DX_1 + DX_2 + ... + DX_n\right).$$

Знайдемо $MX_i,\ i = \overline{1,n}$. Для цього запишемо закон розподілу випадкової величини $X_i,\ i = \overline{1,n}$, – кількості зерен, які випадуть при підкиданні грального кубика:

X_i	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Перевірка. $6 \cdot \frac{1}{6} = 1.$

Тоді

$$MX_i = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}\,.$$

Знайдемо $DX_i,\ i = \overline{1,n}$:

$$DX_i = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - \frac{49}{4} = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{364}{24} - \frac{294}{24} = \frac{70}{24} = \frac{35}{12}.$$

За умовою задачі $n = 700$.

Тоді

$$DX = \frac{1}{700^2} \cdot \frac{35}{12} = \frac{1}{20 \cdot 700} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{168000}\,.$$

Таким чином, з нерівності Чебишева при $\varepsilon = 0{,}1$ отримаємо

$$P\left\{\left|X-\frac{7}{2}\right|<0{,}1\right\}\ge 1-\frac{\frac{1}{168000}}{0{,}1^2}$$

або

$$P\{|X-3{,}5|<0{,}1\}\ge 0{,}999404761,$$

або

$$P\{|X-3{,}5|<0{,}1\}\ge 0{,}9994. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.

Оцінити ймовірність того, що в результаті кидання грального кубика 500 раз, відносна частота появи 5 зерен відхилиться від ймовірності цієї події в одному окремо взятому досліді за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,02.

Розв'язок. За умовою задачі треба зробити оцінку

$$P\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\},$$

де $n=500,\ \varepsilon=0{,}02$,

p – ймовірність появи 5 зерен в одному окремо взятому досліді.

За класичним означенням ймовірності $p=\frac{1}{6}$, тоді $q=1-p=\frac{5}{6}$.

Нехай $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ – незалежні випадкові величини, які набувають значень 1, якщо в i - му досліді з'явиться 5 зерен, та 0 – не з'явиться 5 зерен. Тоді $k=Y_1+Y_2+...+Y_n$.

Для величин $Y_i,\ i=1,...,n,$ закон розподілу має вигляд:

Y_i	1	0
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Тоді

$$MY_i = 1\cdot\frac{1}{6} + 0\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{6},$$

$$DY_i = 1^2\cdot\frac{1}{6} + 0^2\cdot\frac{5}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36}.$$

Отже, випадкові величини $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ мають однакові математичні сподівання $MY_i = p = \frac{1}{6},\ i = 1, 2, ..., n,$ і однакові скінчені дисперсії $DY_i = pq = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{36},\ i = 1, 2, ..., n$.

За властивостями математичного сподівання

$$M\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} M(Y_1 + Y_2 + ... + Y_n) = \frac{1}{n}\cdot n\cdot M_i = p.$$

За властивостями дисперсії, враховуючи незалежність випадкових величин $Y_1, Y_2, ..., Y_n$,

$$D\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D(Y_1 + Y_2 + ... + Y_n) = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot D_i = \frac{pq}{n}.$$

Застосуємо до випадкової величин $\frac{k}{n}$ нерівність Чебишева:

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - M\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{D\left(\frac{k}{n}\right)}{\varepsilon^2},$$

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Отримаємо

$$P\left\{\left|\frac{k}{500} - \frac{1}{6}\right| < 0{,}02\right\} \ge 1 - \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{5}}{500\cdot 0{,}02^2} = 0{,}30(5),$$

$$P\left\{\left|\frac{k}{500} - \frac{1}{6}\right| < 0{,}02\right\} \ge 0{,}3. \blacktriangleleft$$

Приклад 3.

Ймовірність надходження нестандартних деталей рівна 0,05. Оцінити ймовірність того, що в партії з 2000 деталей відхилення кількості нестандартних деталей від 100 не перевищує 5%.

Розв'язок. За умовою задачі треба зробити оцінку

$$P\,|X - MX| \le 5\% \cdot n$$

або

$$P\left\{\left|\frac{X - MX}{n}\right| \le 0{,}05\right\},$$

де X – випадкова величина – кількість нестандартних деталей в партії.

За умовою задачі $n = 2000$, $p = 0{,}05$, $q = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

Випадкова величина X має біноміальний розподіл, тому $MX = np$, $DX = npq$.

Отримаємо

$$MX = 2000 \cdot 0{,}05 = 100,$$

$$DX = 2000 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 95.$$

Застосуємо до випадкової величин $\frac{X}{n}$ нерівність Чебишева:

$$P\left\{\left|\frac{X}{n} - \frac{MX}{n}\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{\frac{1}{n^2}DX}{\varepsilon^2}.$$

Отримаємо

$$P\left\{\left|\frac{X - 100}{2000}\right| < 0{,}05\right\} \ge 1 - \frac{95}{2000^2 \cdot 0{,}05^2}$$

або

$$P\left\{\left|\frac{X - 100}{2000}\right| < 0{,}05\right\} \ge 0{,}9905. \blacktriangleleft$$

Приклад 4.

Ймовірність того, що деталь нестандартна, рівна 0,02. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 400 деталей частота появи нестандартної деталі відхиляється від ймовірності не більше ніж на 0,01.

Розв'язок. З інтегральної теореми Лапласа випливає, що ймовірність відхилення частоти від імовірності в незалежних випробуваннях рівна

$$P\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}=2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon\right),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

За умовою задачі $n=400$, $\varepsilon=0{,}01$, $p=0{,}02$, $q=1-0{,}02=0{,}98$.

Отримаємо:

$$P\left\{\left|\frac{k}{400}-0{,}02\right|\le 0{,}01\right\}=2\Phi\left(\sqrt{\frac{400}{0{,}02\cdot 0{,}98}}\cdot 0{,}01\right)=2\Phi\left(\frac{20}{0{,}14}\cdot 0{,}01\right)\approx 2\Phi(1{,}43).$$

Значення функції Лапласа знайдемо за таблицею 3 додатків.

Отримаємо:

$$2\Phi(1{,}43)=2\cdot 0{,}42384=0{,}84768\ .\ ◄$$

Задача 12. Дискретна випадкова величина X задана розподілом

X	-2	-1	0	1	2	3
P	0,04	0,08	0,12	0,25	0,40	0,11

Знайти:

а) розподіл функції $Y=A\cdot X^2+B$ при $A=2,\ B=1$;

б) математичне сподівання і дисперсію функції Y.

Розв'язок. а) Знайдемо значення функції Y:

$y_1=2\cdot(-2)^2+1=8+1=9$,

$y_2=2\cdot(-1)^2+1=2+1=3$,

$y_3=2\cdot 0^2+1=1$,

$y_4=2\cdot 1^2+1=2+1=3$,

$y_5 = 2 \cdot 2^2 + 1 = 8 + 1 = 9$,

$y_6 = 2 \cdot 3^2 + 1 = 18 + 1 = 19$.

Якщо різним можливим значенням аргументу X відповідають різні можливі значення функції Y, то ймовірності відповідних значень X та Y рівні між собою, якщо ж різним можливим значенням аргументу X відповідають значення Y, серед яких є рівні між собою, то ймовірності значень Y, що повторюються, додаються.

Запишемо шуканий розподіл випадкової величини Y:

Y	1	3	9	19
P	0,12	0,33	0,44	0,11

Перевірка. $0{,}12 + 0{,}33 + 0{,}44 + 0{,}11 = 1$. ◁

б) Знайдемо математичне сподівання і дисперсію функції Y.

Математичне сподівання випадкової величини Y шукатимемо за формулою:

$$MY = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot p_i .$$

Отримаємо:

$MY = 1 \cdot 0{,}12 + 3 \cdot 0{,}33 + 9 \cdot 0{,}44 + 19 \cdot 0{,}11 = 0{,}12 + 0.99 + 3{,}96 + 2{,}09 = 7{,}16$.

Дисперсію випадкової величини Y шукатимемо за формулою:

$$DY = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \cdot p_i - (MY)^2 .$$

Отримаємо:

$$DY = 1^2 \cdot 0{,}12 + 3^2 \cdot 0{,}33 + 9^2 \cdot 0{,}44 + 19^2 \cdot 0{,}11 - (7{,}16)^2 =$$

$$= 0{,}12 + 2{,}97 + 35{,}64 + 39{,}71 - 51{,}2656 = 27{,}1744. \blacktriangleleft$$

Задача 13. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу:

$$p(x)=\begin{cases} c\cdot g(x) & \text{при} \quad x\in(a,b) \\ 0 & \text{при} \quad x\notin(a,b). \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт c;

б) функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X;

в) математичне сподівання і дисперсію функції $Y=\varphi(X)=A\cdot X+B$.

Приклад 1.

$g(x)=x^2,\ a=0,\ b=8,\ A=-3,\ B=5$.

Розв'язок. За умовою

$$p(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ cx^2 & при \quad 0<x<8, \\ 0 & при \quad x\ge 8. \end{cases}$$

а) Множник c шукатимемо, скориставшись властивістю щільності розподілу випадкової величини X:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=1.$$

За межами інтервалу $(0,8)$ функція $p(x)=0$, тому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=\int_0^8 cx^2dx=c\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^8=c\left(\frac{8^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)=c\cdot\frac{512}{3}=1.$$

Знайдемо $c=\dfrac{3}{512}$.

Тоді щільність розподілу рівна

$$p(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ \dfrac{3}{512}x^2 & при \quad 0<x<8, \\ 0 & при \quad x\ge 8. \end{cases} \lhd$$

б) Знайдемо функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X.

Застосуємо формулу:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(u)du\,.$$

Якщо $x \le 0$, то $p(x)=0$ і

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0du = 0\,.$$

Якщо $0<x<8$, то $p(x)=\dfrac{3}{512}x^2$ і

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0du+\int_{0}^{x}\frac{3}{512}u^2du = 0+\frac{3}{512}\cdot\frac{u^3}{3}\Bigg|_0^x=\frac{3}{512}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)=\frac{3}{512}\cdot\frac{x^3}{3}=\frac{x^3}{512}\,.$$

Якщо $x \ge 8$, то $p(x)=0$ і

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0du+\int_{0}^{8}\frac{3}{512}u^2du+\int_{6}^{x}0du = 0+\frac{3}{512}\cdot\frac{u^3}{3}\Bigg|_0^8+0=\frac{3}{512}\cdot\left(\frac{512}{3}-\frac{0^3}{3}\right)=1\,.$$

Отже, функція $F(x)$ має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \;\; x\le 0, \\ \dfrac{3}{512}x^3 & при \;\; 0<x<8, \\ 1 & при \;\; x \ge 8. \end{cases} \;\; \lhd$$

в) Знайдемо математичне сподівання функції $Y=\varphi(X)=-3X+5$.

Застосуємо формулу:

$$MY = M\varphi(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)p(x)dx\,.$$

Так як за межами інтервалу $(0,8)$ функція $p(x)=0$, то

$$MY=\int_{0}^{8}\varphi(x)p(x)dx=\int_{0}^{8}(-3x+5)\cdot\frac{3}{512}x^2dx=\frac{3}{512}\int_{0}^{8}(-3x^3+5x^2)dx=$$

$$=\frac{3}{512}\cdot\left(\frac{-3x^4}{4}+5\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^8=\frac{3}{512}\cdot\left(\frac{-3\cdot 8^4}{4}+\frac{5}{3}\cdot 8^3-0\right)=3\cdot\left(\frac{-3\cdot 8}{4}+\frac{5}{3}\right)=-13\,.$$

Знайдемо дисперсію функції $Y=\varphi(X)=-3X+5$.

Застосуємо формулу:

$$DY=D\varphi(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^2(x)p(x)dx-(MY)^2.$$

Так як за межами інтервалу $(0,8)$ функція $p(x)=0$, то

$$DY=D\varphi(X)=\int_0^8\varphi^2(x)p(x)dx-(MY)^2=\int_0^8(-3x+5)^2\cdot\frac{3}{512}x^2dx-(-13)^2=$$

$$=\frac{3}{512}\int_0^8(9x^2-30x+25)x^2dx-169=\frac{3}{512}\int_0^8(9x^4-30x^3+25x^2)dx-169=$$

$$=\frac{3}{512}\left(\frac{9x^5}{5}-\frac{30x^4}{4}+\frac{25x^3}{3}\right)\Bigg|_0^8-169=\frac{3}{512}\left(\frac{9\cdot 8^5}{5}-\frac{30\cdot 8^4}{4}+\frac{25\cdot 8^3}{3}-0\right)-169=$$

$$=3\left(\frac{9\cdot 64}{5}-\frac{30}{4}+\frac{25}{3}\right)-169=\frac{10368-675+750-5070}{30}=\frac{5373}{30}=179{,}1.\ \blacktriangleleft$$

Приклад 2.

$g(x)=x,\ a=-4,\ b=3,\ A=2,\ B=-1.$

Розв'язок. За умовою

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -4,\\ |cx| & \text{при } -4<x<3,\\ 0 & \text{при } x\ge 3\end{cases}$$

або

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -4,\\ -cx & \text{при } -4<x<0,\\ cx & \text{при } 0\le x<3,\\ 0 & \text{при } x\ge 3.\end{cases}$$

а) Множник c шукатимемо, скориставшись властивістю щільності розподілу випадкової величини X:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$$

За межами інтервалу $(-4,3]$ функція $p(x)=0$, тому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = -\int_{-4}^{0} cxdx + \int_{0}^{3} cxdx = -c\frac{x^2}{2}\bigg|_{-4}^{0} + c\frac{x^2}{2}\bigg|_{0}^{3} = -\frac{c}{2}\left(0^2-(-4)^2\right) + \frac{c}{2}\left(3^2-0^2\right) =$$

$$= -\frac{c}{2}\cdot\left(-16\right) + \frac{c}{2}\cdot 9 = \frac{16c+9c}{2} = c\cdot\frac{25}{2} = 1.$$

Знайдемо $c = \dfrac{2}{25}$.

Тоді щільність розподілу рівна

$$p(x) = \begin{cases} 0 & при \;\; x \le -4, \\ -\dfrac{2}{25}x & при \;\; -4 < x < 0, \\ \dfrac{2}{25}x & при \;\; 0 \le x < 3, \\ 0 & при \;\; x \ge 3. \end{cases} \quad \triangleleft$$

б) Знайдемо функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини *X*.

Застосуємо формулу:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du\,.$$

Якщо $x \le -4$, то $p(x)=0$ і

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0du = 0.$$

Якщо $-4 < x < 0$, то $p(x) = -\dfrac{2}{25}x$ і

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-4} 0du - \int_{-4}^{x} \frac{2}{25}udu = 0 - \frac{2}{25}\cdot\frac{u^2}{2}\bigg|_{-4}^{x} = -\frac{1}{25}\cdot\left(x^2-(-4)^2\right) = -\frac{1}{25}\cdot\left(x^2-16\right).$$

Якщо $0 \le x < 3$, то $p(x) = \dfrac{2}{25}x$ і

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-4}0du-\int_{-4}^{0}\frac{2}{25}udu+\int_{0}^{x}\frac{2}{25}udu=0-\frac{2}{25}\cdot\frac{u^2}{2}\bigg|_{-4}^{0}+\frac{2}{25}\cdot\frac{u^2}{2}\bigg|_{0}^{x}=$$

$$=-\frac{1}{25}\cdot\left(0^2-(-4)^2\right)+\frac{1}{25}\cdot\left(x^2-0^2\right)=\frac{16}{25}+\frac{1}{25}x^2.$$

Якщо $x\geq 3$, то $p(x)=0$ і

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-4}0du-\int_{-4}^{0}\frac{2}{25}udu+\int_{0}^{3}\frac{2}{25}udu+\int_{3}^{x}0du=0-\frac{2}{25}\cdot\frac{u^2}{2}\bigg|_{-4}^{0}+\frac{2}{25}\cdot\frac{u^2}{2}\bigg|_{0}^{3}+0=$$

$$=-\frac{1}{25}\cdot\left(0^2-(-4)^2\right)+\frac{1}{25}\cdot\left(3^2-0^2\right)=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=1.$$

Отже, функція $F(x)$ має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \textit{при}\;\; x\leq -4,\\ -\frac{1}{25}\cdot\left(x^2-16\right) & \textit{при}\;\; -4<x<0,\\ \frac{16}{25}+\frac{1}{25}x^2 & \textit{при}\;\; 0\leq x<3,\\ 1 & \textit{при}\;\; x\geq 3.\end{cases}\quad\triangleleft$$

в) Знайдемо математичне сподівання функції $Y=\varphi(X)=2X-1$.

Застосуємо формулу:

$$MY=M\varphi(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)p(x)dx.$$

Так як за межами інтервалу $(-4,3)$ функція $p(x)=0$, то

$$MY=\int_{-4}^{0}\varphi(x)p(x)dx+\int_{0}^{3}\varphi(x)p(x)dx=\int_{-4}^{0}(2x-1)\cdot\left(-\frac{2}{25}x\right)dx+\int_{0}^{3}(2x-1)\cdot\frac{2}{25}xdx=$$

$$=-\frac{2}{25}\int_{-4}^{0}(2x^2-x)dx+\frac{2}{25}\int_{0}^{3}(2x^2-x)dx=$$

$$=-\frac{2}{25}\cdot\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{-4}^{0}+\frac{2}{25}\cdot\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{0}^{3}=$$

$$=-\frac{2}{25}\cdot\left[\left(\frac{2\cdot 0^3}{3}-\frac{0^2}{2}\right)-\left(\frac{2\cdot(-4)^3}{3}-\frac{(-4)^2}{2}\right)\right]+\frac{2}{25}\cdot\left[\left(\frac{2\cdot 3^3}{3}-\frac{3^2}{2}\right)-\left(\frac{2\cdot 0^3}{3}-\frac{0^2}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{2}{25}\cdot\left(\frac{128}{3}-8+18-\frac{9}{2}\right)=\frac{2}{25}\cdot\left(\frac{128}{3}+10-\frac{9}{2}\right)=\frac{2}{25}\cdot\left(\frac{256+60-27}{6}\right)=\frac{289}{75}.$$

Знайдемо дисперсію функції $Y=\varphi(X)=2X-1$.

Застосуємо формулу:

$$DY=D\varphi(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^2(x)p(x)dx-(MY)^2.$$

Так як за межами інтервалу $(-4,3)$ функція $p(x)=0$, то

$$DY=D\varphi(X)=\int_{-4}^{0}\varphi^2(x)p(x)dx+\int_{0}^{3}\varphi^2(x)p(x)dx-(MY)^2=$$

$$=\int_{-4}^{0}(2x-1)^2\cdot\left(-\frac{2}{25}x\right)dx+\int_{0}^{3}(2x-1)^2\cdot\frac{2}{25}xdx-\left(\frac{289}{75}\right)^2=$$

$$=-\frac{2}{25}\int_{-4}^{0}(4x^2-4x+1)xdx+\frac{2}{25}\int_{0}^{3}(4x^2-4x+1)xdx-\left(\frac{289}{75}\right)^2=$$

$$=-\frac{2}{25}\int_{-4}^{0}(4x^3-4x^2+x)dx+\frac{2}{25}\int_{0}^{3}(4x^3-4x^2+x)dx-\left(\frac{289}{75}\right)^2=$$

$$=-\frac{2}{25}\cdot\left(\frac{4x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_{-4}^{0}+\frac{2}{25}\cdot\left(\frac{4x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{3}-\left(\frac{289}{75}\right)^2=$$

$$=-\frac{2}{25}\cdot\left[0-\left((-4)^4-\frac{4\cdot(-4)^3}{3}\right)\right]+\frac{2}{25}\cdot\left[\left(3^4-\frac{4\cdot3^3}{3}\right)-0\right]-\left(\frac{289}{75}\right)^2=$$

$$=\frac{2}{25}\cdot\left(256+\frac{256}{3}+81-36\right)-\left(\frac{289}{75}\right)^2=\frac{2}{25}\cdot\left(301+\frac{256}{3}\right)-\left(\frac{289}{75}\right)^2=$$

$$=\frac{2}{25}\cdot\frac{1159}{3}-\left(\frac{289}{75}\right)^2=\frac{2318}{75}-\frac{83521}{5625}=\frac{173850-83521}{5625}=\frac{90329}{5625}.\ \blacktriangleleft$$

Задача 14. Розподіл випадкового вектора (X,Y) заданий таблицею:

$X \backslash Y$	-4	-3	-2	-1

1	0,02	0,03	0,08	0,09
2	0,03	0,06	0,11	0,12
3	0,13	0,12	0,13	0,08

Знайти:

а) закони розподілу випадкових величин X та Y;

б) математичні сподівання випадкових величин X та Y;

в) дисперсію випадкових величин X та Y;

г) коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y.

Розв'язок. а) Знайдемо закон розподілу випадкової величини X, просумувавши ймовірності по рядку для кожного її значення.

Отримаємо шуканий розподіл:

X	1	2	3
P	0,22	0,32	0,46

Перевірка. $0,22+0,32+0,46=1$.

Знайдемо закон розподілу випадкової величини Y, просумувавши ймовірності по стовпчику для кожного її значення.

Отримаємо шуканий розподіл:

Y	-4	-3	-2	-1
P	0,18	0,21	0,32	0,29

Перевірка. $0,18+0,21+0,32+0,29=1$. $\lhd$

б) Математичне сподівання випадкової величини X рівне

$$MX=1\cdot 0,22+2\cdot 0,32+3\cdot 0,46=2,24.$$

Математичне сподівання випадкової величини Y рівне

$$MY=-4\cdot 0,18+(-3)\cdot 0,21+(-2)\cdot 0,32+(-1)\cdot 0,29=-2,28. \lhd$$

в) Дисперсія випадкової величини X рівна

$$DX = 1^2 \cdot 0{,}22 + 2^2 \cdot 0{,}32 + 3^2 \cdot 0{,}46 - 2{,}24^2 = 0{,}22 + 1{,}28 + 4{,}14 - 5{,}0176 = 0{,}6224.$$

Дисперсія випадкової величини Y рівна

$$DY = (-4)^2 \cdot 0{,}18 + (-3)^2 \cdot 0{,}21 + (-2)^2 \cdot 0{,}32 + (-1)^2 \cdot 0{,}29 - (-2{,}28)^2 =$$

$$= 2{,}88 + 1{,}89 + 1{,}28 + 0{,}29 - 5{,}1984 = 1{,}1416. \triangleleft$$

г) Коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y шукатимемо за формулою

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}},$$

де $Cov(X,Y)$ – коваріація випадкових величин X та Y, яка обчислюється за формулою

$$Cov(X,Y) = M\left[(X - MX)(Y - MY)\right] = M(XY) - MXMY.$$

Добуток XY може приймати значення, які рівні всім можливим добуткам значень випадкових величин X та Y, а ймовірності цих значень рівні відповідним ймовірностям, заданим сумісним розподілом випадкового вектора (X,Y).

Запишемо закон розподілу добутку XY:

XY	-4	-3	-2	-1	-8	-6	-4	-2	-12	-9	-6	-3
P	0,02	0,03	0,08	0,09	0,03	0,06	0,11	0,12	0,13	0,12	0,13	0,08

або

XY	-4	-3	-2	-1	-8	-6	-12	-9
P	0,13	0,11	0,20	0,09	0,03	0,19	0,13	0,12

Перевірка. $0{,}13 + 0{,}11 + 0{,}20 + 0{,}09 + 0{,}03 + 0{,}19 + 0{,}13 + 0{,}12 = 1.$

Математичне сподівання випадкової величини XY рівне

$$M(XY) = -4 \cdot 0{,}13 + (-3) \cdot 0{,}11 + (-2) \cdot 0{,}20 + (-1) \cdot 0{,}09 + (-8) \cdot 0{,}03 + (-6) \cdot 0{,}19 +$$

$$+(-12)\cdot 0{,}13+(-9)\cdot 0{,}12=$$

$$=-0{,}52-0{,}33-0{,}40-0{,}09-0{,}24-1{,}14-1{,}56-1{,}08=-5{,}36$$

Тоді

$$Cov(X,Y)=-5{,}36-2{,}24\cdot(-2{,}28)=-5{,}36+5{,}1072=-0{,}2528\ .$$

Коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y рівний

$$\rho(X,Y)=\frac{-0{,}2528}{\sqrt{0{,}6224}\sqrt{1{,}1416}}\approx\frac{-0{,}2528}{0{,}7889\cdot 1{,}0685}\approx -0{,}2999\approx -0{,}3.\ ◄$$

Задача 15 Розподіл випадкового вектора (X,Y) заданий таблицею:

$X \backslash Y$	-3	-2	-1	0
2	0,03	0,05	0,07	0,10
3	0,02	0,04	0,13	0,15
4	0,15	0,14	0,07	0,05

Задано випадкову величини $Z=A\cdot X+B\cdot Y$, де $A=-2,\ B=4$.

Знайти:

а) закон розподілу випадкової величини Z;

б) математичне сподівання і дисперсію випадкової величини Z.

Розв'язок. а) Обчислимо всі можливі значення випадкової величини $Z=-2X+4Y$:

$$z_{11}=-2\cdot 2+4\cdot(-3)=-17,$$

$$z_{12}=-2\cdot 2+4\cdot(-2)=-12,$$

$$z_{13}=-2\cdot 2+4\cdot(-1)=-8,$$

$$z_{14}=-2\cdot 2+4\cdot 0=-4,$$

$$z_{21}=-2\cdot 3+4\cdot(-3)=-18,$$

$$z_{22}=-2\cdot 3+4\cdot(-2)=-14,$$

$$z_{23} = -2 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -10,$$

$$z_{24} = -2 \cdot 3 + 4 \cdot 0 = -6,$$

$$z_{31} = -2 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = -20,$$

$$z_{32} = -2 \cdot 4 + 4 \cdot (-2) = -16,$$

$$z_{33} = -2 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) = -12,$$

$$z_{34} = -2 \cdot 4 + 4 \cdot 0 = -8.$$

Імовірності цих значень рівні відповідним ймовірностям, заданим сумісним розподілом випадкового вектора (X,Y).

Запишемо закон розподілу випадкової величини Z:

Z	-17	-12	-8	-4	-18	-14	-10	-6	-20	-16	-12	-8
P	0,03	0,05	0,07	0,10	0,02	0,04	0,13	0,15	0,15	0,14	0,07	0,05

або

Z	-17	-12	-8	-4	-18	-14	-10	-6	-20	-16
P	0,03	0,12	0,12	0,10	0,02	0,04	0,13	0,15	0,15	0,14

$\triangleleft$

б) Обчислимо математичне сподівання випадкової величини Z:

$$MZ = -17 \cdot 0{,}03 + (-12) \cdot 0{,}12 + (-8) \cdot 0{,}12 + (-4) \cdot 0{,}10 + (-18) \cdot 0{,}02 + (-14) \cdot 0{,}04 +$$

$$+ (-10) \cdot 0{,}13 + (-6) \cdot 0{,}15 + (-20) \cdot 0{,}15 + (-16) \cdot 0{,}14 =$$

$$= -0{,}51 - 1{,}44 - 0{,}96 - 0{,}4 - 0{,}36 - 0{,}56 - 1{,}3 - 0{,}90 - 3 - 2{,}24 = -6{,}43\,.$$

Дисперсія випадкової величини Z рівна

$$DZ = (-17)^2 \cdot 0{,}03 + (-12)^2 \cdot 0{,}12 + (-8)^2 \cdot 0{,}12 + (-4)^2 \cdot 0{,}10 + (-18)^2 \cdot 0{,}02 +$$

$$+ (-14)^2 \cdot 0{,}04 + (-10)^2 \cdot 0{,}13 + (-6)^2 \cdot 0{,}15 + (-20)^2 \cdot 0{,}15 + (-16)^2 \cdot 0{,}14 -$$

$$- (-6{,}43)^2 = 8{,}67 + 17{,}28 + 7{,}68 + 1{,}6 + 6{,}48 + 7{,}84 + 13 + 5{,}4 + 60 + 35{,}84 -$$

$$- 41{,}3449 = 122{,}4451.\ \blacktriangleleft$$

Задача 16. Випадковий вектор (X,Y) заданий щільністю розподілу

$$p(x,y)=\begin{cases} C(x+y) & \textit{в області } D, \\ 0 & \textit{за межами області } D. \end{cases}$$

Область D – прямокутник, обмежений прямими $x=0$, $x=5$, $y=0$, $y=4$.

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) імовірність попадання випадкової точки (X,Y) в квадрат G, обмежений прямими $x=1$, $x=3$, $y=1$, $y=2$.

Розв'язок. а) Коефіцієнт C шукатимемо, скориставшись властивістю щільності розподілу випадкового вектора (X,Y):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy=1.$$

За межами області D функція $p(x,y)=0$, тому

$$\iint_D p(x,y)dxdy=1.$$

Отримаємо

$$\int_0^5 dx\int_0^4 C(x+y)dy=1,$$

$$C\int_0^5 dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^4=1,$$

$$C\int_0^5 dx\left(\left(x\cdot 4+\frac{4^2}{2}\right)-\left(x\cdot 0+\frac{0^2}{2}\right)\right)=1,$$

$$C\int_0^5 (4x+8)dx=1,$$

$$C\left(4\cdot\frac{x^2}{2}+8x\right)\Bigg|_0^5=1,$$

$$C(2\cdot 5^2+8\cdot 5-0)=1,$$

$$90C=1.$$

Знайдемо $C=\dfrac{1}{90}$. ◁

б) Імовірність попадання випадкової точки (X,Y) в квадрат G, обмежений прямими $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$ обчислюється за формулою:

$$P\{X\in[a,b],\,Y\in[c,d]\}=\iint\limits_G p(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d p(x,y)dy.$$

Тоді

$$P\{X\in[1,3],\,Y\in[1,2]\}=\int\limits_1^3 dx\int\limits_1^2\frac{1}{90}(x+y)dy=\int\limits_1^3 dx\frac{1}{90}\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{1}{90}\int\limits_1^3 dx\left(\left(x\cdot 2+\frac{2^2}{2}\right)-\left(x\cdot 1+\frac{1^2}{2}\right)\right)=\frac{1}{90}\int\limits_1^3 dx\,(2x+2-x-0{,}5)=$$

$$=\frac{1}{90}\int\limits_1^3(x+1{,}5)dx==\frac{1}{90}\left(\frac{x^2}{2}+1{,}5x\right)\Bigg|_1^3=\frac{1}{90}\left(\left(\frac{3^2}{2}+1{,}5\cdot 3\right)-\left(\frac{1^2}{2}+1{,}5\cdot 1\right)\right)=\frac{1}{90}.$$ ◀

Задача 17. Отримано статистичний розподіл:

Номер інтервалу	1	2	3	4	5	6
Частковий інтервал	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30
Частота	4	12	20	28	24	22

Побудувати:

1) гістограму частот;

2) емпіричну функцію розподілу.

Знайти:

а) вибіркове середнє;

б) вибіркову дисперсію;

в) вибіркове середнє квадратичне відхилення.

Розв'язок. 1) Побудуємо гістограму частот – кусково-сталу функцію, яка приймає на кожному з k рівних інтервалів довжиною h значення $\frac{n_i}{h}$,

де $h = \frac{x_n - x_1}{k}$,

x_i, $i = 1,...,n$,– спостережне значення – варіанта вибірки;

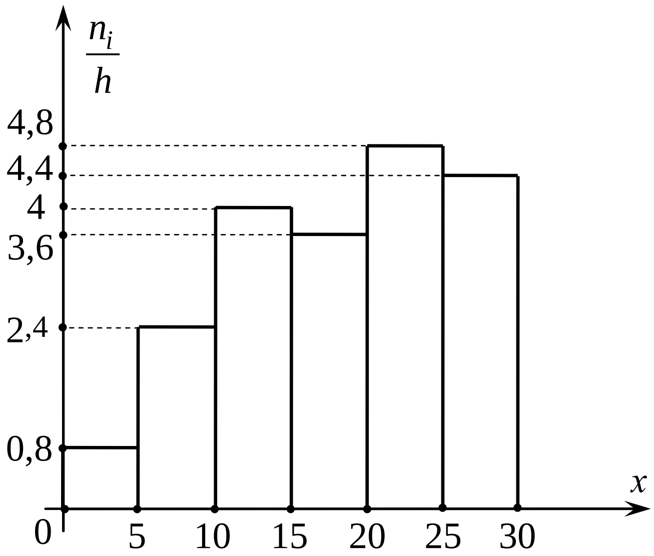
n_i – частота варіанти x_i.

За умовою задачі кількість інтервалів $k = 6$, довжина інтервалу $h = 5$.

Знайдемо значення $\frac{n_i}{h}$ – щільності частот:

Номер інтервалу	1	2	3	4	5	6
Частковий інтервал	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30
Частота	4	12	20	18	24	22
Щільність частоти	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{20}{5}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{24}{5}$	$\frac{22}{5}$

На осі абсцис відкладемо часткові інтервали, а на осі ординат – щільності частот:



Зауваження. Площа фігури, обмеженої гістограмою частот і віссю абсцис, рівна сумі всіх частот, тобто об'єму вибірки. ◁

2) Знайдемо емпіричну функцію розподілу.

Емпіричну функцію розподілу; яка задає для кожного значення x відносну частоту події $\{X < x\}$, визначають співвідношенням:

$$F^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{x_i < x} n_i \, .$$

Знайдемо об'єм вибірки:

$$n = \sum n_i = 4 + 12 + 20 + 18 + 24 + 22 = 100 \, .$$

Так як об'єм вибірки великий і її варіанти розбиті на інтервали, то при знаходженні емпіричної функції розподілу вважатимемо, що на кожному інтервалі значення варіанти рівне середньому арифметичному кінців інтервалу, а саме:

Номер інтервалу	1	2	3	4	5	6
Варіанта x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5

Частота n_i	4	12	20	18	24	22

Найменша варіанта дорівнює $x_1 = 2{,}5$, отже

$$F^*(x) = 0 \text{ при } x \le 2{,}5.$$

Значення $X < 7{,}5$ спостерігалось 4 рази при $x_1 = 2{,}5$, отже

$$F^*(x) = \frac{4}{100} \text{ при } 2{,}5 < x \le 7{,}5.$$

Значення $X < 12{,}5$ спостерігалось 4 рази при $x_1 = 2{,}5$ та 12 разів при $x_2 = 7{,}5$, отже

$$F^*(x) = \frac{4+12}{100} = \frac{16}{100} \text{ при } 7{,}5 < x \le 12{,}5.$$

Значення $X < 17{,}5$ спостерігалось:

4 рази при $x_1 = 2{,}5$,

12 разів при $x_2 = 7{,}5$,

20 разів при $x_3 = 12{,}5$,

отже

$$F^*(x) = \frac{4+12+20}{100} = \frac{36}{100} \text{ при } 12{,}5 < x \le 17{,}5.$$

Значення $X < 22{,}5$ спостерігалось:

4 рази при $x_1 = 2{,}5$,

12 разів при $x_2 = 7{,}5$,

20 разів при $x_3 = 12{,}5$,

18 разів при $x_4 = 17{,}5$,

отже

$$F^*(x) = \frac{4+12+20+18}{100} = \frac{54}{100} \text{ при } 17{,}5 < x \le 22{,}5.$$

Значення $X < 27{,}5$ спостерігалось:

4 рази при $x_1 = 2{,}5$,

12 разів при $x_2 = 7{,}5$,

20 разів при $x_3 = 12{,}5$,

18 разів при $x_4 = 17{,}5$,

24 рази при $x_5 = 22{,}5$,

отже

$$F^*(x) = \frac{4+12+20+18+24}{100} = \frac{78}{100} \text{ при } 22{,}5 < x \le 27{,}5.$$

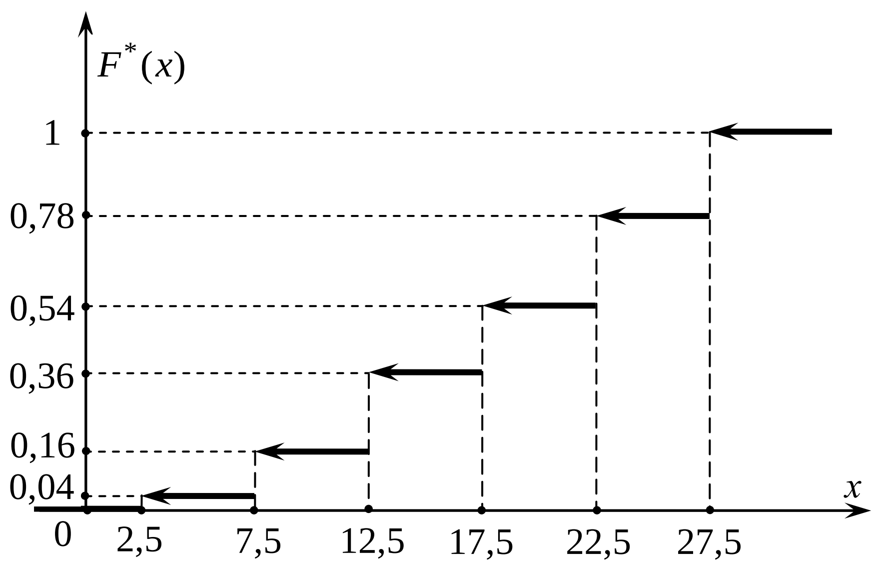
Значення $X = 27{,}5$ – найбільша варіанта, отже

$$F^*(x) = 1 \text{ при } x > 27{,}5.$$

Таким чином, шукана емпірична функція розподілу матиме вигляд:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 2{,}5, \\ 0{,}04, \text{ при } 2{,}5 < x \le 7{,}5, \\ 0{,}16, \text{ при } 7{,}5 < x \le 12{,}5, \\ 0{,}36, \text{ при } 12{,}5 < x \le 17{,}5, \\ 0{,}54, \text{ при } 17{,}5 < x \le 22{,}5, \\ 0{,}78, \text{ при } 22{,}5 < x \le 27{,}5, \\ 1, \text{ при } x > 27{,}5. \end{cases}$$

Побудуємо графік функції $F^*(x)$:



◁

а) Знайдемо вибіркове середнє.

Вибіркове середнє $\overline{x}_B$ – число, яке рівне

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}.$$

Для даної вибірки матимемо:

$$\overline{x}_B = \frac{1}{100} \cdot (2{,}5 \cdot 4 + 7{,}5 \cdot 12 + 12{,}5 \cdot 20 + 17{,}5 \cdot 18 + 22{,}5 \cdot 24 + 27{,}5 \cdot 22) = 18{,}1. \triangleleft$$

б) Знайдемо вибіркову дисперсію.

Вибіркова дисперсія D_B – число, рівне

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_B)^2 n_i}{n}.$$

Для даної вибірки матимемо:

$$D_B = \frac{1}{100} \cdot ((2{,}5 - 18{,}1)^2 \cdot 4 + (7{,}5 - 18{,}1)^2 \cdot 12 + (12{,}5 - 18{,}1)^2 \cdot 20 + (17{,}5 - 18{,}1)^2 \cdot 18 +$$
$$+ (22{,}5 - 18{,}1)^2 \cdot 24 + (27{,}5 - 18{,}1)^2 \cdot 22) = 53{,}64. \triangleleft$$

в) Знайдемо вибіркове середнє квадратичне відхилення за формулою:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

Отримаємо:

$$\sigma_B = \sqrt{53{,}64} \approx 7{,}32. \blacktriangleleft$$

Задача 18. Використовуючи критерій згоди Пірсона, за статистичними даними

Номер інтервалу	1	2	3	4	5	6
Частковий інтервал	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30

Частота	6	10	33	32	11	8

встановити, чи узгоджуються спостереження із законом:

а) рівномірного розподілу;

б) Пуассона;

в) Гауса.

За рівень значущості прийняти $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}1$ відповідно.

Розв'язок. а) Застосуємо критерій Пірсона до перевірки гіпотези H_0 про рівномірний розподіл генеральної сукупності.

1) Так як варіанти вибірки розбиті на інтервали, приймемо на кожному інтервалі значення варіанти рівним середньому арифметичному кінців інтервалу, а саме:

Номер інтервалу	1	2	3	4	5	6
Варіанта x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
Частота n_i	6	10	33	32	11	8

2) Обчислимо імовірності p_i, $i = \overline{1{,}6}$, попадання випадкової величини X в кожний з інтервалів, вважаючи, що гіпотеза H_0 вірна:

$$p_i = \frac{1}{6}.$$

3) В якості критерію перевірки гіпотези вибирають випадкову величину

$$\chi_B^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n},$$

що задає відхилення спостережних частот від гіпотетичних (очікуваних), яка при $n \to \infty$ збігається до розподілу χ^2 незалежно від вигляду закону розподілу випадкової величини X.

Для застосування критерію Пірсона необхідно, щоб об'єм вибірки був $n \geq 50$ і $p_i n \geq 5$, $(i = 1,\ 2,\ ...,\ k)$. Якщо в деяких інтервалах остання умова не виконується, то їх треба об'єднати із сусідніми.

Розв'язок задачі зручно проводити, заповнюючи наступну таблицю:

номер інтервалу	спостережні частоти n_i	імовірність попадання p_i в i - інтервал	очікувані частоти $p_i n$	$n_i - p_i n$	$\frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$
1	6	$\frac{1}{6}$	$\frac{100}{6}$	$-\frac{64}{6}$	6,827
2	10	$\frac{1}{6}$	$\frac{100}{6}$	$-\frac{40}{6}$	2,667
3	33	$\frac{1}{6}$	$\frac{100}{6}$	$\frac{98}{6}$	16,007
4	32	$\frac{1}{6}$	$\frac{100}{6}$	$\frac{92}{6}$	14,107
5	11	$\frac{1}{6}$	$\frac{100}{6}$	$-\frac{34}{6}$	19,267
6	8	$\frac{1}{6}$	$\frac{100}{6}$	$-\frac{52}{6}$	4,507
–	$\sum n_i = 100$	$\sum p_i = 1$	–	–	$\sum \frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$ =63,382

Отже, критерій $\chi_B^2 = 63{,}382$.

4) Гіпотеза H_0 узгоджується з результатами спостережень при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ і приймається, якщо

$$\chi_B^2 < \chi_{1-\alpha}^2 (k - l - 1),$$

де $\chi^2_{1-\alpha}(k-l-1)$ – квантиль розподілу χ^2;

$k=6$ – число інтервалів;

$l=0$ – число невідомих параметрів розподілу, які знаходяться за вибіркою, оскільки нема параметрів, які підлягають оцінці за вибіркою.

Знайдемо за таблицею 5 додатків значення квантиля розподілу χ^2 за рівнем значущості $\alpha=0,05$ і степенях свободи $k-l-1=6-0-1=5$:

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-l-1)=\chi^2_{1-0,05}(5)=\chi^2_{0,95}(5)=11,1.$$

Так як

$$\chi^2_B>\chi^2_{0,95}(5),$$

то гіпотезу H_0 про згоду спостережень із законом рівномірного розподілу треба відхилити. ◁

б) Застосуємо критерій Пірсона до перевірки гіпотези H_0 про розподіл Пуассона генеральної сукупності.

1) Варіанти вибірки розбиті на інтервали.

2) Обчислимо імовірності p_i, $i=\overline{1,6}$, попадання випадкової величини X в кожний з інтервалів, вважаючи, що гіпотеза H_0 вірна.

Імовірності p_i знаходимо за законом Пуассона

$$p_i=P(X=x_i)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!},$$

де оцінка параметра розподілу λ рівна вибірковому середньому даної вибірки

$$\lambda=\bar{x}_B=\frac{\sum_{i=1}^{k}x_in_i}{n}.$$

За умовою задачі $k=6$, об'єм вибірки $n=\sum n_i=100$.

Обчислимо λ, приймаючи на кожному інтервалі значення варіанти рівним середньому арифметичному кінців інтервалу:

$$\lambda = \frac{2{,}5\cdot 6 + 7{,}5\cdot 10 + 12{,}5\cdot 33 + 17{,}5\cdot 32 + 22{,}5\cdot 11 + 27{,}5\cdot 8}{100} = 15{,}3 \approx 15.$$

Знайдемо $e^{-\lambda}$ при $\lambda = 15$.

За таблицею 1 додатків $\mathrm{e}^{-5} = 0{,}0067$, тоді

$$\mathrm{e}^{-15} = (\mathrm{e}^{-5})^3 = 0{,}0067^3 == 3\cdot 10^{-7}.$$

Так як в формулі Пуассона треба, щоб значення варіант були цілими числами, заокруглимо їх до цілих чисел, отримаємо:

Номер інтервалу	1	2	3	4	5	6
Варіанта x_i	3	8	13	18	23	28

Обчислимо імовірності p_i, $i = \overline{1,6}$:

$$p_1 = P(X = 3) = \frac{e^{-15}\cdot 15^3}{3!} = 0{,}0001687,$$

$$p_2 = P(X = 8) = \frac{e^{-15}\cdot 15^8}{8!} = 0{,}019,$$

$$p_3 = P(X = 13) = \frac{e^{-15}\cdot 15^{13}}{13!} = 0{,}094,$$

$$p_4 = P(X = 18) = \frac{e^{-15}\cdot 15^{18}}{18!} = 0{,}069,$$

$$p_5 = P(X = 23) = \frac{e^{-15}\cdot 15^{23}}{23!} = 0{,}013,$$

$$p_6 = P(X = 28) = \frac{e^{-16}\cdot 16^{28}}{28!} = 0{,}0008386.$$

Зауваження. Так як зроблені вище обчислення досить трудомісткі, зручно скористатись, наприклад, програмою Mathcad.

3) Заповнимо таблицю:

номер інтервалу	спостережні частоти n_i	імовірність попадання p_i в i - інтервал	очікувані частоти $p_i n$	$n_i - p_i n$	$\frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$
1	6	0,0001687	0,01687		
2	10	0,019	1,9		
3	33	0,094	9,4		
4	32	0,069	6,9		
5	11	0,013	1,3		
6	8	0,0008386	0,08386		
–	$\sum n_i = 100$	$\sum p_i = 0{,}196 \neq 1$	–	–	$\sum \frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$

Так як для інтервалів $i = 1$, $i = 2$ не виконується умова $p_i n \geq 5$, то результати обчислень величин цих рядків додаються до відповідних величин інтервалу $i = 3$.

Аналогічно, так як для інтервалів $i = 5$, $i = 6$ не виконується умова $p_i n \geq 5$, то результати обчислень величин цих рядків додаються до відповідних величин інтервалу $i = 4$.

Тоді число інтервалів $k = 2$, так як вказані інтервали треба об’єднати.

Число невідомих параметрів розподілу Пуассона $l = 1$, так як визначався один параметр λ за вибіркою.

Число степенів свободи $k - l - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$ – не може бути нульовим.

Так як сума обчислених за формулою Пуассона ймовірностей p_i набагато менша від 1 та число степенів свободи рівне 0, то гіпотезу H_0 про розподіл генеральної сукупності за законом Пуассона відхиляємо. $\triangleleft$

в) Застосуємо критерій Пірсона до перевірки гіпотези H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності.

1) Варіанти вибірки розбиті на інтервали за умовою задачі.

2) Обчислимо імовірності p_i, $i=\overline{1,6}$, попадання випадкової величини X в кожний з інтервалів, вважаючи, що гіпотеза H_0 вірна.

Для оцінки параметрів a і σ^2 нормального розподілу обчислимо вибіркове середнє та виправлену дисперсію, приймаючи на кожному інтервалі значення варіанти рівним середньому арифметичному кінців інтервалу:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{2{,}5\cdot 6 + 7{,}5\cdot 10 + 12{,}5\cdot 33 + 17{,}5\cdot 32 + 22{,}5\cdot 11 + 27{,}5\cdot 8}{100} = 15{,}3;$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x}_B)^2 n_i = \frac{1}{100-1}\cdot[(2{,}5-15{,}3)^2\cdot 6 + (7{,}5-15{,}3)^2\cdot 10 +$$

$$+(12{,}5-15{,}3)^2\cdot 33 + (17{,}5-15{,}3)^2\cdot 32 + (22{,}5-15{,}3)^2\cdot 11 + (27{,}5-15{,}3)^2\cdot 8] =$$

$$= \frac{3766}{99} = 38,(04) \approx 38{,}04.$$

Знайдемо виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{38{,}04} \approx 6{,}17.$$

Замінимо найменшу варіанту 0 даної вибірки на $-\infty$, а найбільшу варіанту 30 – на ∞.

Імовірності p_i знаходимо за формулою:

$$p_i = P(x_{i-1} < X < x_i) = \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_B}{S}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}_B}{S}\right).$$

Скориставшись таблицею 3 додатків для обчислення значень функції $\Phi(x)$, отримаємо:

$$p_1 = P(-\infty < X < 5) = \Phi\left(\frac{5-15,3}{6,17}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-15,3}{6,17}\right) = \Phi(-1,67) - \Phi(-\infty) =$$

$$= -\Phi(1,67) - (-0,5) = -0,45254 + 0,5 = 0,04746 \ ;$$

$$p_2 = P(5 < X < 10) = \Phi\left(\frac{10-15,3}{6,17}\right) - \Phi\left(\frac{5-15,3}{6,17}\right) = \Phi(-0,86) - \Phi(-1,67) =$$

$$= -\Phi(0,86) + \Phi(1,67) = -0,30511 + 0,45254 = 0,14743 \ ;$$

$$p_3 = P(10 < X < 15) = \Phi\left(\frac{15-15,3}{6,17}\right) - \Phi\left(\frac{10-15,3}{6,17}\right) = \Phi(-0,05) - \Phi(-0,86) =$$

$$= -\Phi(0,05) + \Phi(0,86) = -0,01994 + 0,30511 = 0,28517;$$

$$p_4 = P(15 < X < 20) = \Phi\left(\frac{20-15,3}{6,17}\right) - \Phi\left(\frac{15-15,3}{6,17}\right) = \Phi(0,76) - \Phi(-0,05) =$$

$$= \Phi(0,76) + \Phi(0,05) = 0,27637 + 0,01994 = 0,29631 \ ;$$

$$p_5 = P(20 < X < 25) = \Phi\left(\frac{25-15,3}{6,17}\right) - \Phi\left(\frac{20-15,3}{6,17}\right) = \Phi(1,57) - \Phi(0,76) =$$

$$= 0,44179 - 0,27637 = 0,1221;$$

$$p_6 = P(25 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty-15,3}{6,17}\right) - \Phi\left(\frac{25-15,3}{6,17}\right) = \Phi(\infty) - \Phi(1,57) =$$

$$= 0,5 - 0,44179 = 0,05821.$$

3) Заповнимо таблицю:

номер інтервалу	спостережні частоти n_i	імовірність попадання p_i в i - інтервал	очікувані частоти $p_i n$	$n_i - p_i n$	$\frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$
1	6	0,04746	4,746	1,254	

2	10	0,14743	14,743	-4,743	
3	33	0,28517	28,517	4,418	
4	32	0,29631	29,631	2,369	
5	11	0,1221	12,21	-1,21	
6	8	0,05821	5,821	2,179	
–	$\sum n_i = 100$	$\sum p_i = 0{,}84679$	–	–	$\sum \frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$

Так як для інтервалу $i = 1$ не виконується умова $p_i n \geq 5$, то результати обчислень величин $p_i n$ та $n_i - p_i n$ цього рядка додаються до відповідних величин інтервалу $i = 2$:

$$p_i n = 4{,}746 + 14{,}743 = 19{,}489,$$

$$n_i - p_i n = 1{,}254 - 4{,}743 = -3{,}489.$$

Отримаємо:

номер інтервалу	очікувані частоти $p_i n$	$n_i - p_i n$	$\frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$
1	19,489	$-3{,}489$	0,625
2	28,517	4,418	0,684
3	29,631	2,369	0,189
4	12,21	-1,21	0,12
5	5,821	2,179	0,816

–	–	–	$\sum \frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$ =2,434

Отже, критерій $\chi_B^2 = 2{,}434$.

4) Число інтервалів $k = 5$; число невідомих параметрів розподілу $l = 2$, так як за вибіркою оцінювали математичне сподівання і дисперсію нормального розподілу.

Знайдемо за таблицею 5 додатків значення квантиля розподілу χ^2 за рівнем значущості $\alpha = 0{,}1$ і степенях свободи $k - l - 1 = 5 - 2 - 1 = 2$:

$$\chi_{1-\alpha}^2(k - l - 1) = \chi_{1-0{,}1}^2(2) = \chi_{0{,}9}^2(2) = 4{,}61.$$

Так як

$$\chi_B^2 < \chi_{0{,}9}^2(2),$$

то гіпотеза H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності приймається. ◀

Задача 19. За вибіркою, заданою таблицею

X	0	3	6	10	11	15	19
Y	12	11	7	6	2	0	-4

а) визначити коефіцієнт кореляції;

б) при $\alpha = 0{,}05$ перевірити значущість кореляційної залежності;

в) знайти рівняння лінійної регресії $y = kx + b$ і побудувати графік.

Розв'язок. а) Вибірковий коефіцієнт кореляції обчислимо за формулою:

$$\rho_B = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\bar{\sigma}_X \bar{\sigma}_Y},$$

де $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i$ – вибіркове середнє ознаки X,

$\bar{y} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} y_i$ – вибіркове середнє ознаки Y,

n – об'єм вибірки,

$\bar{\sigma}_X^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ – вибіркова дисперсія ознаки X,

$\overline{x^2} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$,

$\bar{\sigma}_Y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2$ – вибіркова дисперсія ознаки Y,

$\overline{y^2} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

Об'єм вибірки $n = 7$.

Обчислимо:

$$\sum_{i=1}^{7} x_i = 0 + 3 + 6 + 10 + 11 + 15 + 19 = 64,$$

$$\sum_{i=1}^{7} y_i = 12 + 11 + 7 + 6 + 2 + 0 - 4 = 34,$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 0^2 + 3^2 + 6^2 + 10^2 + 11^2 + 15^2 + 19^2 = 852,$$

$$\sum_{i=1}^{7} y_i^2 = 12^2 + 11^2 + 7^2 + 6^2 + 2^2 + 0^2 + (-4)^2 = 370.$$

Знайдемо:

$$\bar{x} = \frac{64}{7}, \quad \bar{y} = \frac{34}{7},$$

$$(\bar{x})^2 = \left(\frac{64}{7}\right)^2 = \frac{4096}{49}, \quad (\bar{y})^2 = \left(\frac{34}{7}\right)^2 = \frac{1156}{49},$$

$$\overline{x^2} = \frac{852}{7}, \quad \overline{y^2} = \frac{370}{7},$$

$$\overline{\sigma}_X^2=\frac{852}{7}-\frac{4096}{49}=\frac{1868}{49},\quad \overline{\sigma}_X=\sqrt{\overline{\sigma}_X^2}=\sqrt{\frac{1868}{49}}=\frac{\sqrt{1868}}{7},$$

$$\overline{\sigma}_Y^2=\frac{370}{7}-\frac{1156}{49}=\frac{1434}{49},\quad \overline{\sigma}_Y=\sqrt{\overline{\sigma}_Y^2}=\sqrt{\frac{1434}{49}}=\frac{\sqrt{1434}}{7},$$

$$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=\left(0-\frac{64}{7}\right)\cdot\left(12-\frac{34}{7}\right)+\left(3-\frac{64}{7}\right)\cdot\left(11-\frac{34}{7}\right)+$$

$$+\left(6-\frac{64}{7}\right)\cdot\left(7-\frac{34}{7}\right)+\left(10-\frac{64}{7}\right)\cdot\left(6-\frac{34}{7}\right)+\left(11-\frac{64}{7}\right)\cdot\left(2-\frac{34}{7}\right)+$$

$$+\left(15-\frac{64}{7}\right)\cdot\left(0-\frac{34}{7}\right)+\left(19-\frac{64}{7}\right)\cdot\left(-4-\frac{34}{7}\right)=-\frac{3200}{49}-\frac{1849}{49}-\frac{330}{49}+$$

$$+\frac{48}{49}-\frac{260}{49}-\frac{1394}{49}-\frac{4278}{49}=-\frac{11263}{49},$$

$$\rho_B=\frac{-\frac{11263}{49}}{7\cdot\frac{\sqrt{1868}}{7}\cdot\frac{\sqrt{1434}}{7}}\approx-\frac{11263}{7\cdot 43{,}220\cdot 37{,}868}\approx -0{,}983.$$

Зауваження. Вибірковий коефіцієнт кореляції за своїми властивостями $-1\le\rho_B\le 1$ і $\rho=0$, якщо випадкові величини X та Y незалежні. $\lhd$

б) При $\alpha=0{,}05$ перевіримо значущість кореляційної залежності випадкових величин X та Y, тобто перевіримо нульову гіпотезу $H_0:\ \rho=0$ при альтернативній $H_1:\ \rho\ne 0$.

Для цього треба обчислити спостережне значення критерію

$$t_{спост}=\frac{|\rho_B|}{\sqrt{1-\rho_B^2}}\cdot\sqrt{n-2}.$$

Якщо

$$t_{спост}>t_{1-\alpha/2}(n-2),$$

де $t_{1-\alpha/2}(n-2)$ – квантиль розподілу Стьюдента порядку $1-\alpha/2$ з числом степенів свободи $k=n-2$,

то зв’язок між величинами X та Y при рівні значущості α вважається значущим.

Обчислимо значення критерію:

$$t_{спост} = \frac{|-0{,}983|}{\sqrt{1-(-0{,}983)^2}} \cdot \sqrt{7-2} = \frac{0{,}983}{\sqrt{1-0{,}983^2}} \cdot \sqrt{5} \approx 11{,}972\,.$$

За таблицею 6 додатків знаходимо значення квантиля розподілу Стьюдента за рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ і степенях свободи $k = 7-2 = 5$:

$$t_{1-\alpha/2}(n-2) = t_{1-0{,}05/2}(5) = t_{0{,}975}(5) = 2{,}571\,.$$

Так як

$$t_{спост} > t_{0{,}975}(5),$$

то гіпотезу H_0 відхиляємо і приймаємо гіпотезу H_1.

Отже, кореляційний зв'язок статистично значущий. ◁

в) Знайдемо рівняння лінійної регресії $y = kx + b$.

Для визначення оцінок параметрів лінійної регресії скористаємось формулами:

$$\bar{k} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},$$

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \bar{k}\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Обчислимо:

$$\sum_{i=1}^{7} x_i y_i = 0\cdot 12 + 3\cdot 11 + 6\cdot 7 + 10\cdot 6 + 11\cdot 2 + 15\cdot 0 + 19\cdot(-4) = 81.$$

Отримаємо:

$$\bar{k} = \frac{7\cdot 81 - 64\cdot 34}{7\cdot 852 - 64^2} \approx -0{,}86\,,$$

$$\bar{b} = \frac{34 - (-0{,}86)\cdot 64}{7} = 12{,}72\,.$$

Отже, рівняння регресії матиме вигляд:

$$y = -0{,}86x + 12{,}72 .$$

На координатній площині зобразимо кореляційне поле – позначимо дані за умовою вибіркові точки (x_i, y_i), $i = 1,...,7$, і побудуємо відповідну пряму регресії: