

**Міністерство освіти і науки України  
Центральноукраїнський національний технічний університет**

**МЕТОДИ СКЛАДАННЯ ТА СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗАННЯ  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РУХУ ВАНТАЖНОГО ВІЗКА КРАНУ  
(Частина II)**

**Рекомендовано Вченою радою Центральноукраїнського національного  
технічного університету (протокол №9 від 27 травня 2024 року) як  
навчальний посібник для здобувачів спеціальності 133 «Галузеве  
машинобудування» та спеціальності 192 «Будівництво та цивільна  
інженерія»**

**Кропивницький  
ЦНТУ  
2024**

## **Щербак О.В., Хачатурян С.Л.**

Методи складання та способи розв'язання диференціальних рівнянь руху вантажного візка крану (Частина II). – Кропивницький: ЦНТУ, 2024. – 34 с.

Розглянуто чотири методи (теорема про рух центру мас у поєднанні з динамікою відносного руху точки; метод кінетостатики; загальне рівняння динаміки; рівняння Лагранжа другого роду) складання диференціальних рівнянь руху вантажного візка крану на прикладі розрахункової моделі математичного маятника, точка підвісу котрого переміщується горизонтально. Наведені приклади їх розв'язання в різних програмних пакетах (Math LAB; Simulink; Mathcad).

## ВСТУП

Даний методичний посібник багатоплановий, переслідує декілька цілей, які, доповнюючи одна одну, утворюють основу так званої методики «наскрізного» чи «спірального» навчання, «накручуючи» матеріал дисциплін професійної підготовки на стрижень спеціальності.

До компонентів професійної підготовки належить, зокрема, теоретична механіка, котра вивчається на другому курсі технічних університетів.

Ця навчальна дисципліна викликає у студентів певні труднощі, зумовлені, не в останню чергу, високим рівнем абстракцій, характерних для рівнянь, теорем, методів і принципів теоретичної механіки. Як результат – негативне ставлення до теоретичної механіки, що поглиблюється, наразі, до того ж, недостатнім рівнем знань із шкільної програми математики. При вивченні на старших курсах спеціальних дисциплін, таких як «Підйомно-транспортні та транспортуючі машини», «Машини для земляних робіт», «Дорожні машини», студенти стикаються з іншою проблемою, викликаною як раз низьким рівнем знання основ теоретичної механіки, що призводить не тільки до великих часових витрат, але й є причиною багаточисельних помилок при виконанні ними курсових і кваліфікаційних робіт різного рівня.

Даний навчальний посібник має на меті досягнення таких цілей:

- розкрити особливості різних методів складання диференціальних рівнянь руху механічної системи з двома й більше ступенями свободи;
- обґрунтувати припущення, за яких математичний маятник з рухомою точкою підвісу може слугувати розрахунковою схемою системи «кран-візок-канат-вантаж»;
- як демонстраційну модель для кожного методу використовувати один і той же приклад – крановий візок з вантажем, який розгойдується;
- продемонструвати розв'язання отриманих диференціальних рівнянь за допомогою різних сучасних програмних продуктів.

У відповідності до поставлених цілей структура даного навчального посібника складається з двох частин.

Другу частину навчального посібника складають способи розв'язання отриманих диференціальних рівнянь з використанням програмних продуктів Simulink; MathLAB; Mathcad [12-15], які наразі мають найбільше розповсюдження та легко доступні.

Навчальний посібник розрахований на студентів других курсів технічних спеціальностей, а також здобувачів при вивченні динамічних процесів ПТМ і виконанні ними кваліфікаційних робіт освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр» і «Магістр». Він може бути корисним і науковим співробітникам.

Навчальний посібник може бути рекомендований для використання при розробці методичних рекомендацій до курсових, практичних і лабораторних робіт з теоретичної механіки та ПТМ.

Навчальний посібник відповідає робочим програмам з теоретичної механіки, будівельної техніки та виробничої бази будівництва, ПТМ для студентів спеціальностей 133 «Галузеве машинобудування» і 192 «Будівництво та цивільна інженерія».


## ЧАСТИНА II. СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РУХУ КРАНОВОГО ВІЗКА З ВАНТАЖЕМ У ПРОГРАМНИХ ПАКЕТАХ

У даній частині посібника наводяться приклади докладного розв'язання отриманої системи диференціальних рівнянь (1. 21) у найбільш розповсюджених системах моделювання Simulink, MathLab, MathCAD.

### 1. Розв'язання системи диференціальних рівнянь за допомогою програми **Simulink**

Побудова моделі:

Запуск системи Simulink виконується:

- а) або з системи MathLab натисканням на піктограму **Simulink**  (рис. 1. 1, а);
- б) або введенням команди Simulink у командній строчці MATLAB (рис. 1. 1, б).

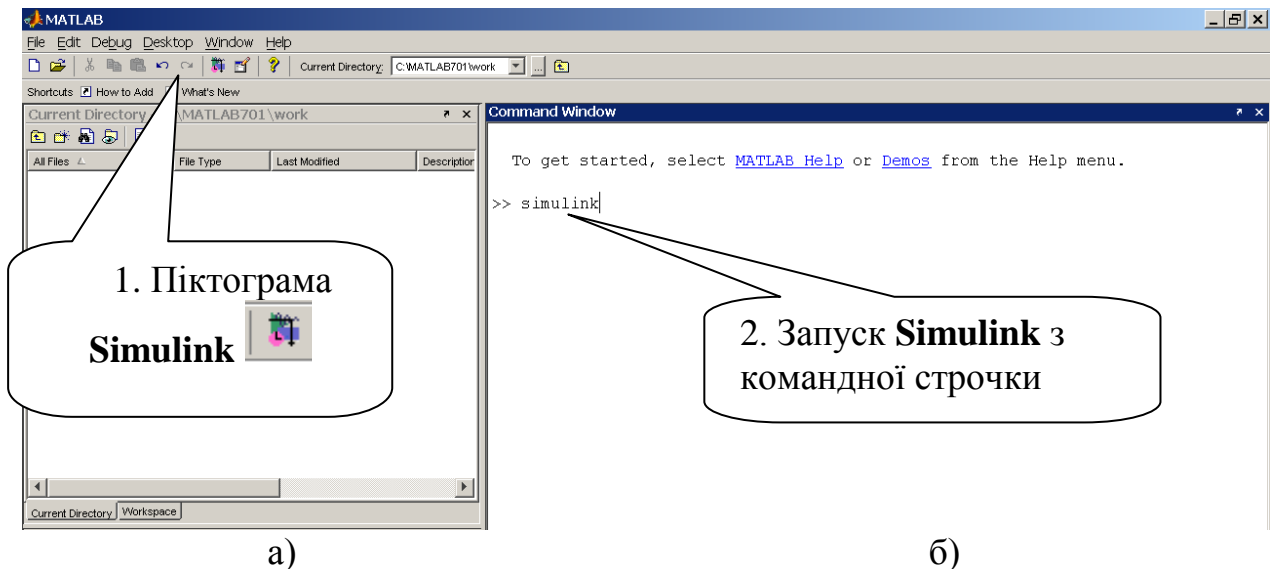


Рис. 1.1. Запуск системи Simulink

Після запуску з'являється вікно (рис. 1. 2) **Simulink Library Browser** (Бібліотечний навігатор Simulink).

Створення вікна нової моделі здійснюється натисканням на піктограму **Create a new model** (рис. 1. 3). За замовчуванням програма створює вікна моделі (рис. 1. 4) без імені (untitled).

**Порада.** При збереженні моделі система MATLAB і Simulink «не розуміє» кирилиці, тому ім'я моделі потрібно задавати латинськими літерами і зберігати модель потрібно на початку роботи над нею.

Побудова моделі здійснюється за допомогою бібліотек програми.

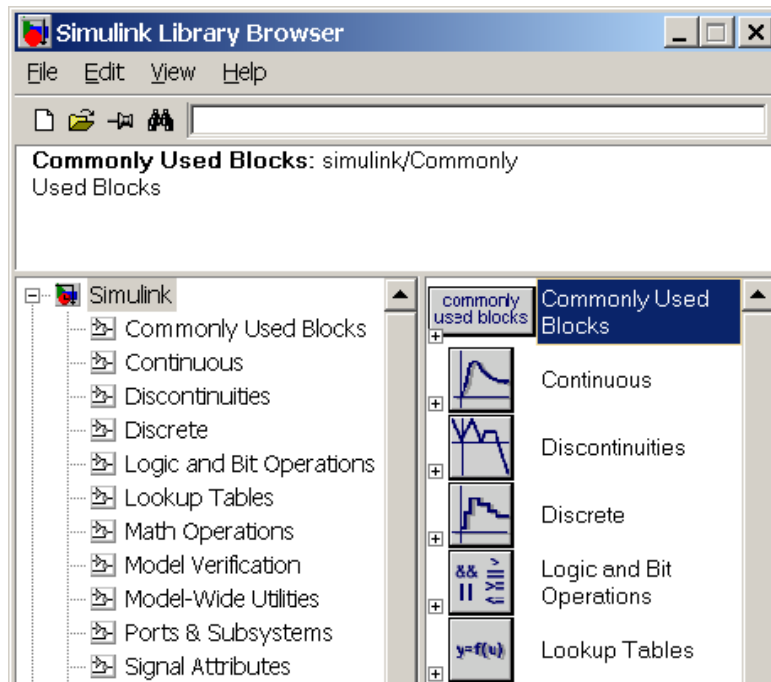


Рис. 1.2. Вікно Simulink Library Browser

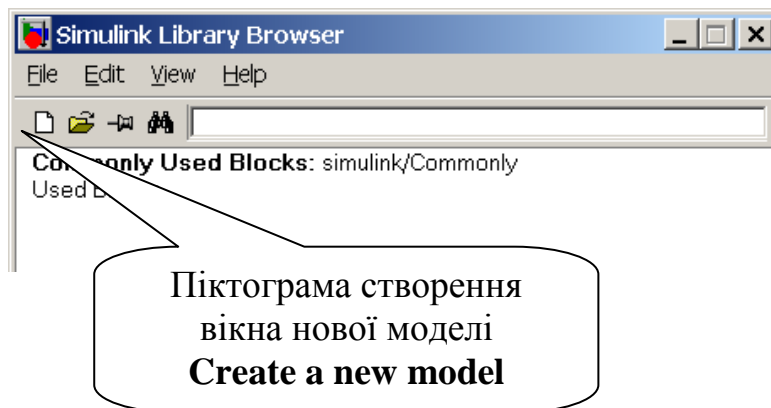


Рис. 1.3. Створення вікна нової моделі

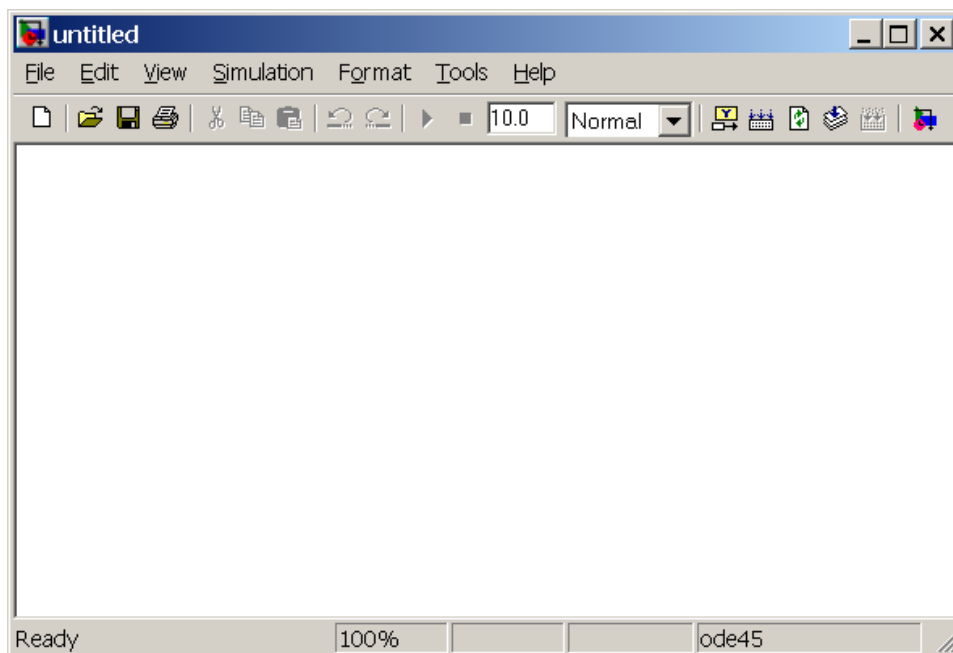


Рис. 1.4. Вікно моделі

Для виводу списків бібліотек блоку (рис. 1. 5) необхідно:

- натиснути на відповідну бібліотеку, при виборі відповідного розділу його вміст відображується в правій частині вікна. У нашому випадку бібліотека – **Commonly Used Blocks** (з'явилась у версії MATLAB 7.0); у цій бібліотеці підібрані блоки, що найбільш часто використовуються при моделюванні;

- вказати курсором миші на необхідний блок і, натиснувши на ліву клавішу миші, «перетягнути» блок у створене раніше вікно. На рис. 1. 6 представлено вікно моделі, що містить декілька блоків. Копіювати однакові блоки можна, використовуючи стандартні прийоми всіх Windows додатків, але найбільш раціональний спосіб – натиснути праву кнопку миші та перетягнути блок у потрібне місце. Для зручності читання моделей блоки краще підписувати. Змінити підпис можна, встановивши курсор на ім'я за умовчуванням і ввівши потрібний підпис.

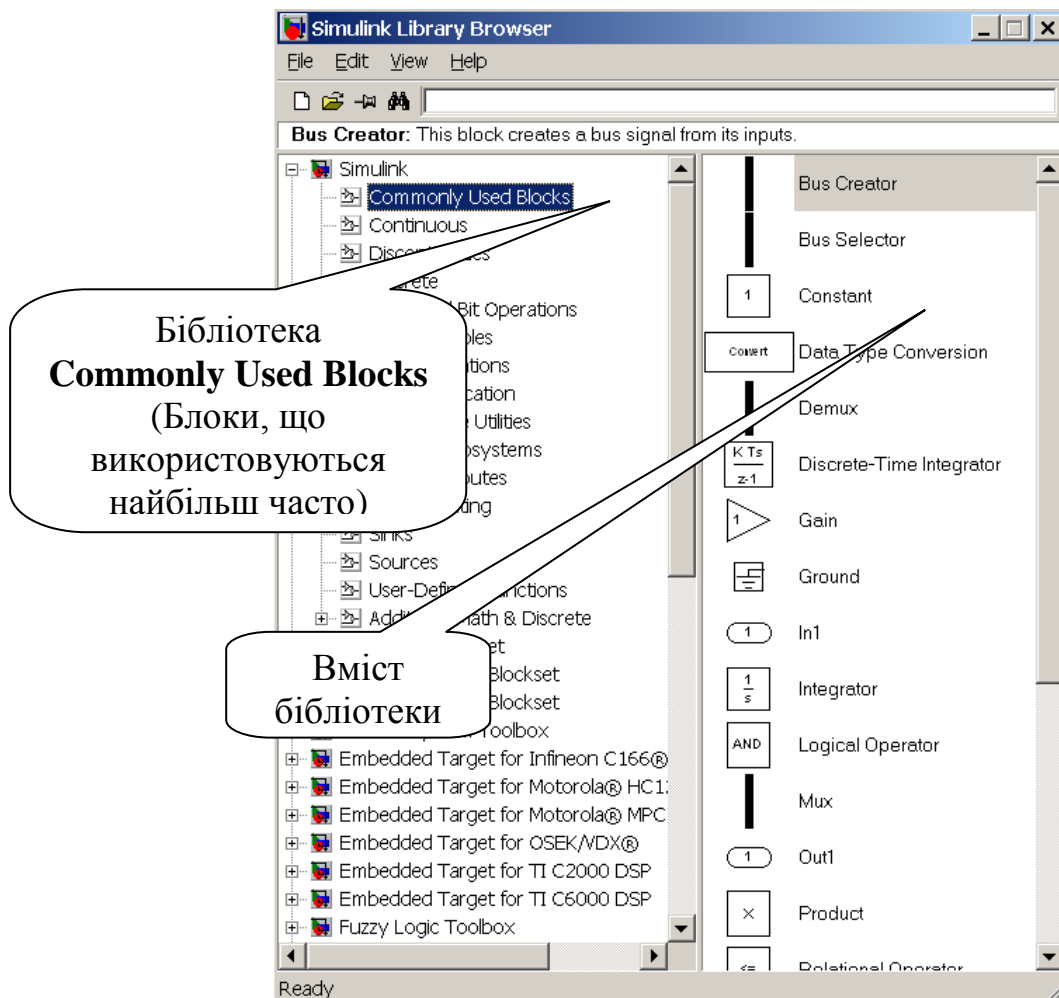


Рис. 1.5

Після установки всіх блоків системи необхідно їх з'єднати лініями зв'язку, тобто «замкнути ланцюг». За аналогією з електричними ланцюгами система не

допускає розривів. За необхідності розриву ланцюга встановлюють заглушку, для чого використовується блок **Terminator**, який знаходиться в бібліотеці **Sinks** – приймачі сигналів.

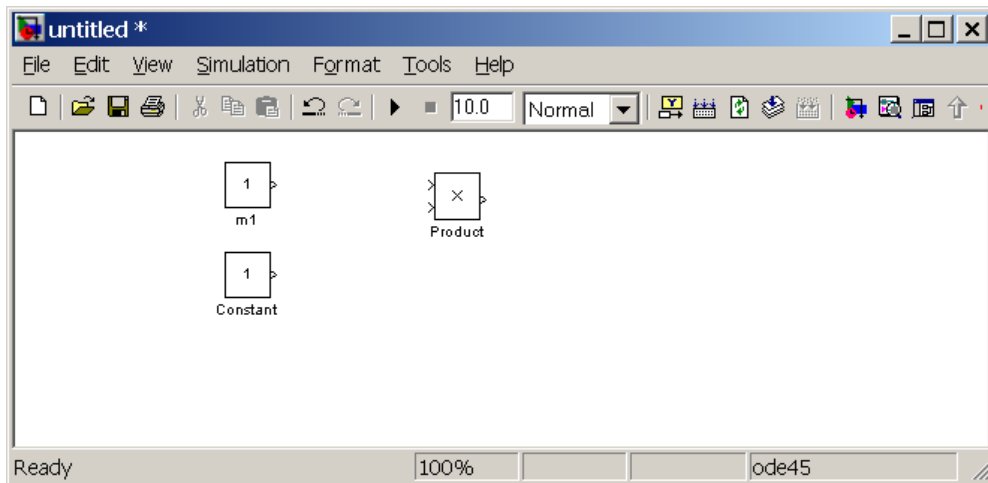


Рис.1.6

Для з'єднання блоків необхідно вказати курсором на вихід блоку, а потім натиснути і, не відпускаючи ліву клавішу миші, провести лінію до входу другого блоку. Після цього відпустити клавішу миші. Блоки при цьому будуть з'єднані суцільною чорною лінією з стрілкою, що вказує напрямок сигналу. Якщо з'єднання не відбулося, лінія буде перервною й червоного кольору (рис. 1. 7).

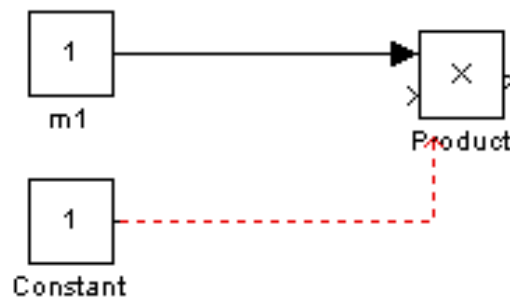


Рис. 1.7.

Існує ще один спосіб побудови ліній зв'язку: спочатку необхідно виділити блок-джерело сигналу, натиснути клавішу **Ctrl** на клавіатурі і, не відпускаючи клавішу, вказати курсором миші на блок-приймач. Для створення точки розгалуження (рис. 1. 8) необхідно підвести курсор у потрібне місце і, натиснувши праву кнопку миші, провести лінію зв'язку до потрібного блоку.

Перед тим, як приступити до створення конкретної комп'ютерної моделі для розв'язання системи диференціальних рівнянь (1. 21), пояснимо загальний принцип побудови комп'ютерних моделей. Складемо диференціальне рівняння

руху візка (рис. 1. 9), котрий рухається під дією сили  $F$ , використовуючи другий закон Ньютона:  $m\bar{a} = \sum F_k$ . Візок прийемо за точку. На точку діють сили  $\bar{F}$  і  $m\bar{g}$  – вага візка. Опір руху не враховуємо. У проекції на вісь  $Ox$  другий закон Ньютона прийме вигляд:  $m\ddot{x} = F$ .

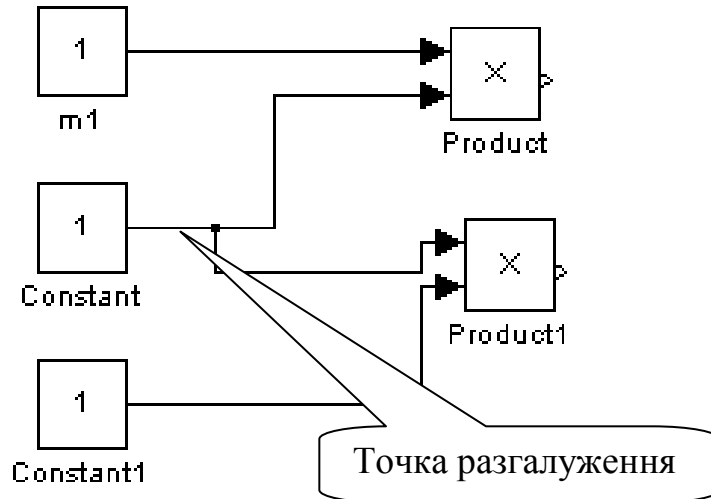


Рис. 1.8

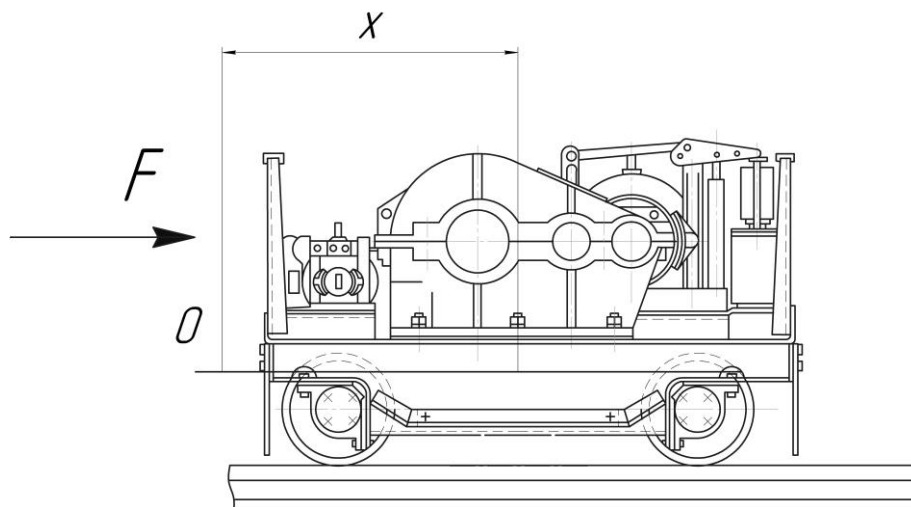


Рис. 1.9. Візок

Звідки

$$\ddot{x} = \frac{F}{m}. \quad (1.1)$$

Структурна схема цього рівняння представлена на рис. 1. 10.

На рис. 1. 11 показана структурна схема, котра дозволяє розрахувати не тільки прискорення, але й швидкість візка (вихідна перемінна інтегратора) та положення візка (вихідна перемінна другого інтегратора).

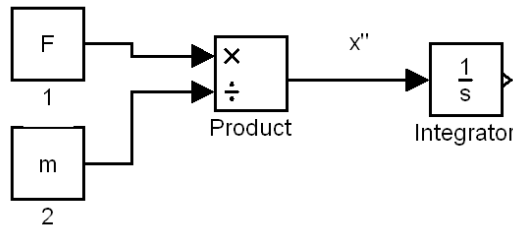


Рис. 10

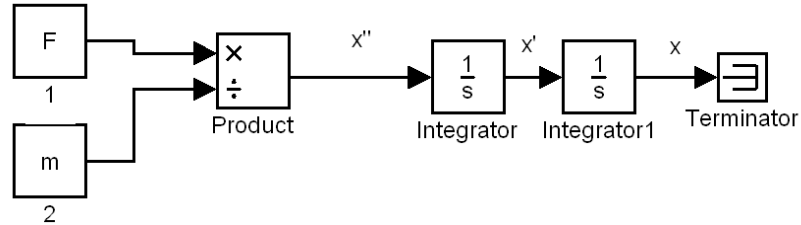


Рис.1.11

Структурну схему рівняння (1. 1) можна представити й у більш простій формі, використовуючи блок **Gain** (рис. 1. 12).

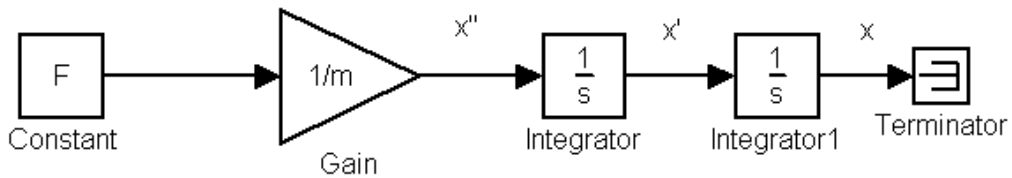


Рис.1.12

Зрозумівши загальний принцип, складемо структурну схему для розв'язання системи рівнянь (1. 21).

Рівняння (1. 21) приводимо до вигляду (1. 1): у лівій частині залишаємо другу похідну, відносно котрої розв'язується рівняння. Отримуємо систему (1. 2).

$$\ddot{x} = \frac{-ml\ddot{\varphi} \cos \varphi + ml\dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi - cx - \mu\dot{x}}{m_1 + m} \quad (1.2)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{-\ddot{x} \cos \varphi - g \sin \varphi}{l}$$

Далі, використовуючи відповідні бібліотеки, будуємо схему розв'язання рівнянь (1. 2).

Приклад побудови показаний на рис. 1. 13. Даний приклад не претендує на найбільш оптимальний з точки зору побудови схеми. Розташування блоків може бути достатньо довільним. На рис. 1. 14 показаний приклад побудови цієї ж схеми, але з дещо іншою компоновкою блоків.

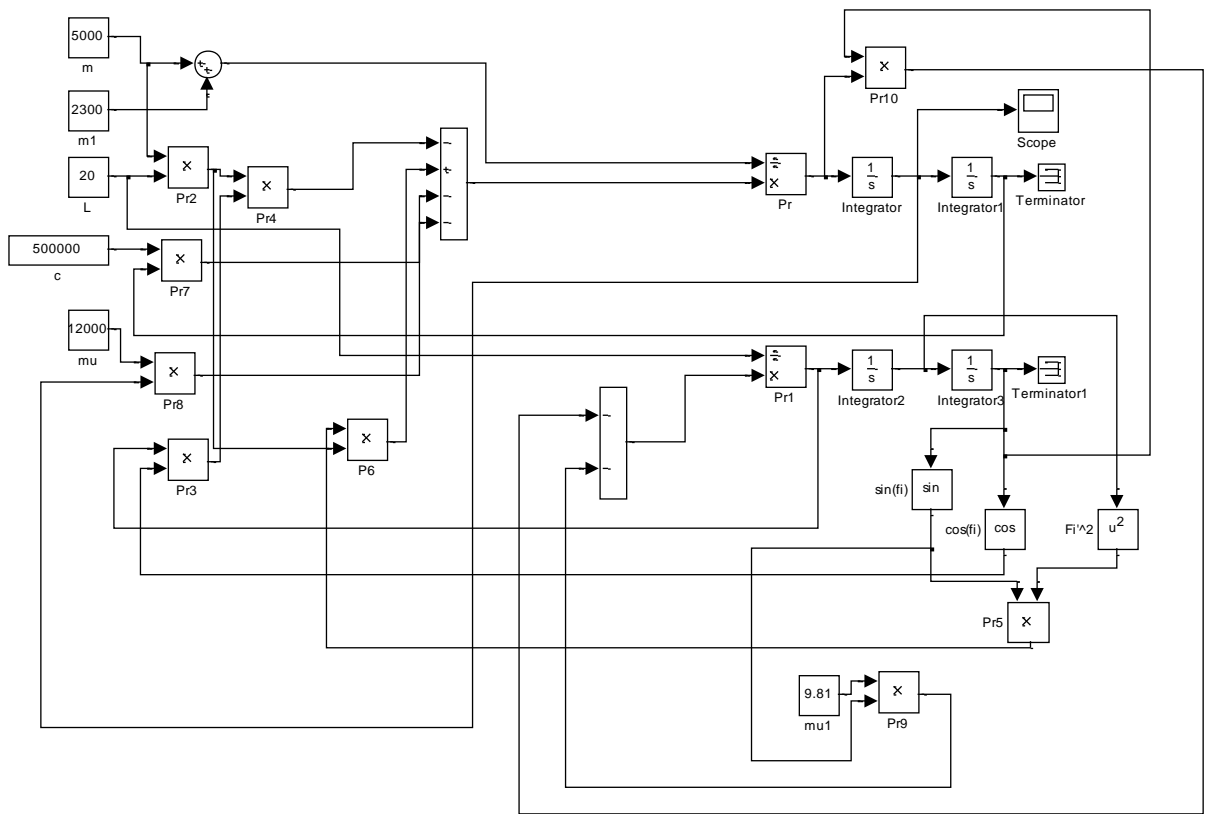


Рис.1. 13. Схема розв'язання системи рівнянь руху візка, що описується системою (1. 2)

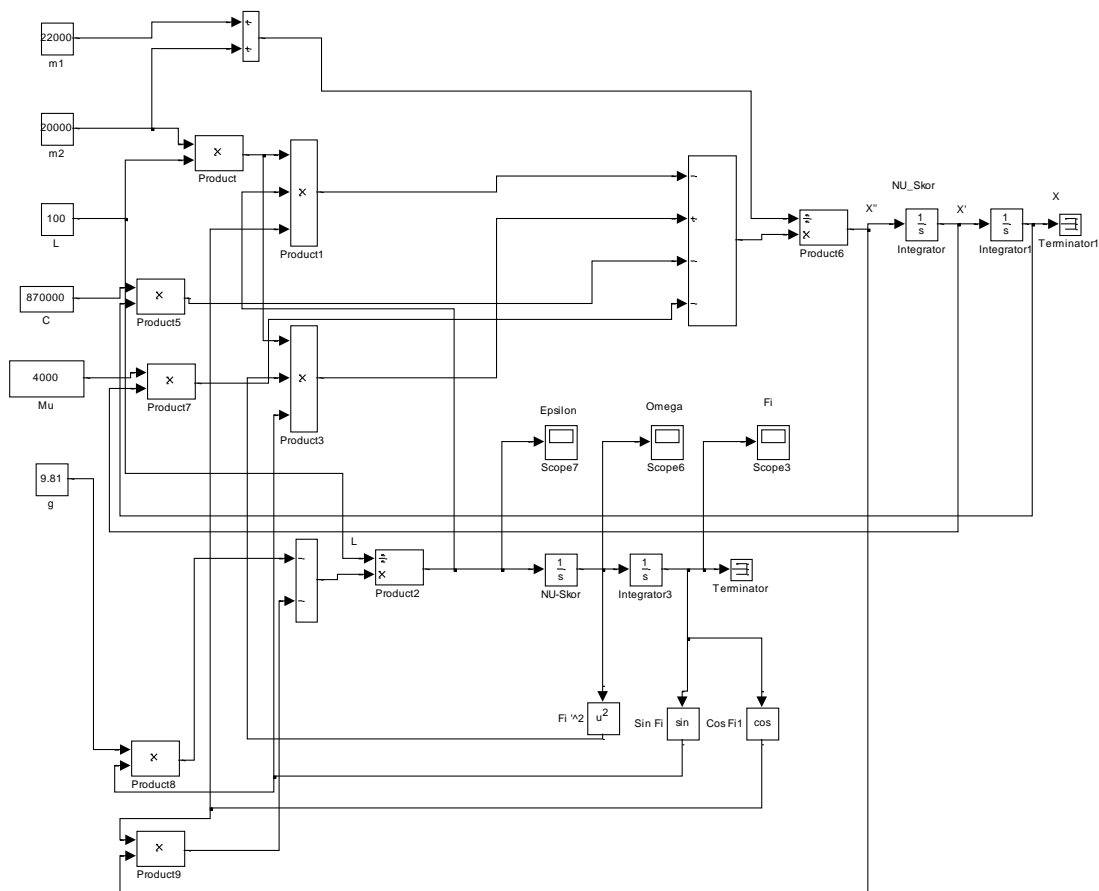


Рис.1.14. Другий варіант схеми

Для побудови даної конкретної схеми нам буде потрібно сім блоків:

1. 1 **Constant** – бібліотека **Commonly Used Blocks**. (Задає постійний за рівнем сигнал: маса вантажу та візка, довжина та жорсткість канату, коефіцієнт демпфування).

Для введення значення необхідно двічі клікнути лівою кнопкою миші.

2. × **Product** – бібліотека **Commonly Used Blocks**. (Виконує розрахунки добутку та частки поточних значень сигналів).

На нашій схемі такий блок позначений Pr. Для задання блоку властивостей необхідно двічі клікнути правою кнопкою миші. У вікні параметрів блоку, що з'явиться (рис. 1. 15), встановити кількість і тип вхідного порту. Множення вводиться «\*» – «зірочкою» (цифра 8 на клавіатурі), ділення – «/» нахилена риска.

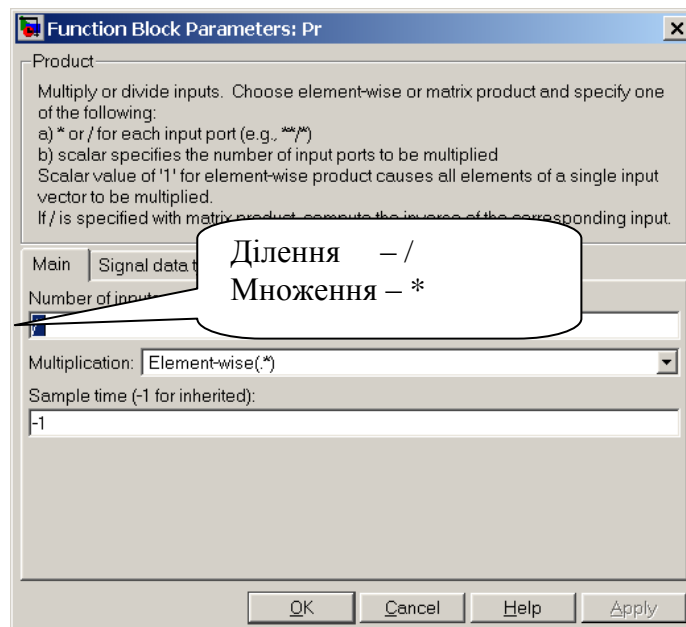


Рис. 1.15. Вікно задання параметрів блоку Product

3. + **Sum** – бібліотека **Commonly Used Blocks**. (Розраховує алгебраїчний вираз, у котрому вхідні перемінні беруть участь тільки в діях додавання та віднімання). Для зручності побудови схем можна змінити вид даного блоку. Для цього необхідно двічі клікнути правою кнопкою миші і у вікні властивостей замінити вид відображення блоку з round – коло на rectangular – прямокутник (рис. 1. 16).

Для задання кількості вхідних сигналів необхідно послідовно ввести або «+», або «-».

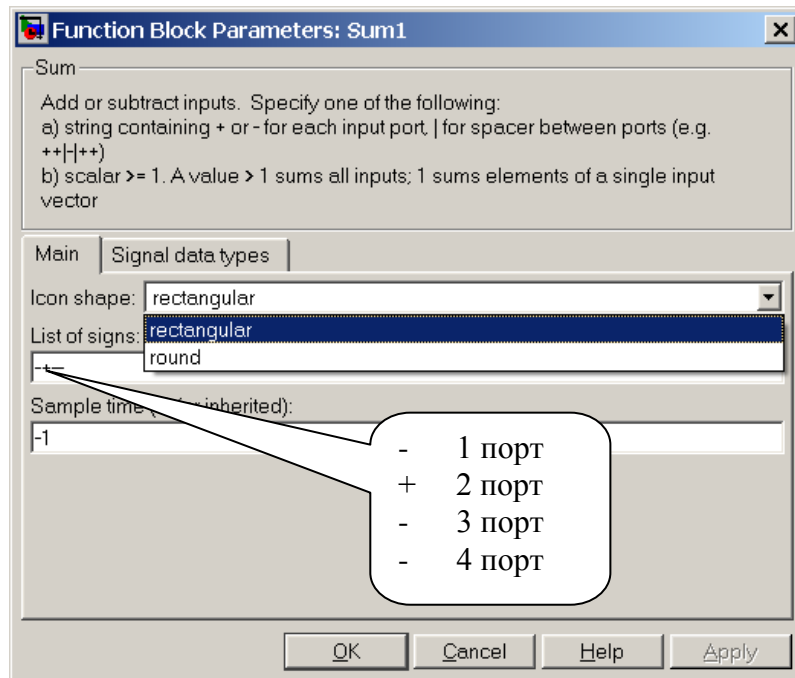





Рис. 1.16. Вікно задання параметрів блоку Sum

4.  **Integrator** – бібліотека **Commonly Used Blocks**. Розраховує значення інтегралу. У нашому випадку дозволяє розрахувати швидкість і положення візка.

5.  **Terminator** – бібліотека **Commonly Used Blocks**. Заглушка. Призначений для з'єднання з вільним вихідним портом, забезпечує цілісність і працездатність моделі.

6.  **Math Function** – бібліотека **Math Operations**. Математична функція. Розраховує значення виразу, котрий визначається функцією. У нашому випадку виконується піднесення до квадрату. Для цього необхідно двічі клікнути правою кнопкою миші і у вікні властивостей (рис. 1. 17) як функцію вибрати **square** (піднесення до квадрату).

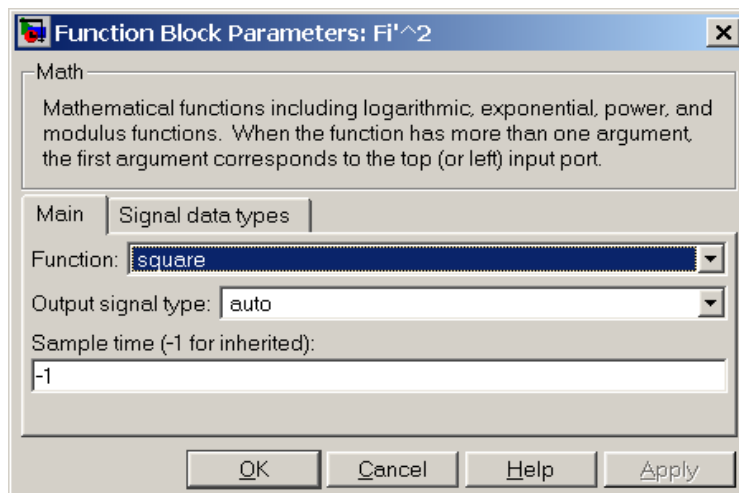



Рис. 1.17. Вікно властивостей **Math Operations**, square (піднесення до квадрату)

7.  **Trigonometric Function** – бібліотека **Math Operations**.

Тригонометрична функція. Розраховує значення тригонометричних функцій. У нашому випадку розраховується **sin** і **cos**. Для цього необхідно двічі клікнути правою кнопкою миші і у вікні властивостей (рис. 1. 18) за функцію вибрати спочатку **sin** для одного блоку та **cos** для другого.

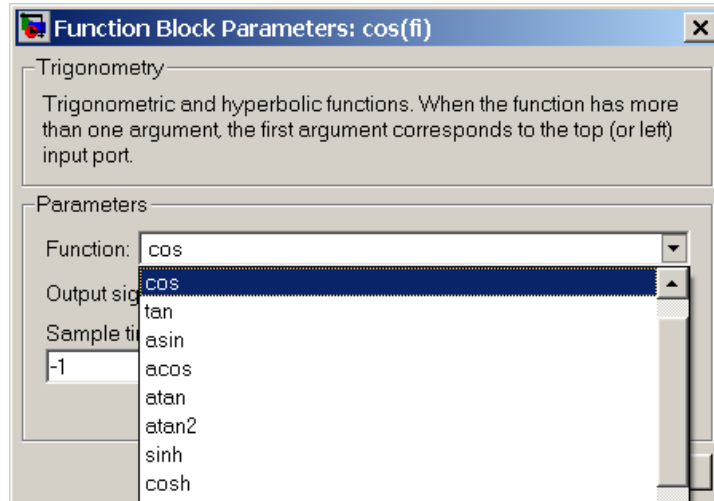




Рис. 1.18. Вікно властивостей **Math Operations**. Тригонометрична функція

Графічне представлення розв'язання.

Для графічного представлення розв'язання використовуємо осцилограф  (**Scope**) – бібліотека **Commonly Used Blocks**. Осцилограф будує графіки функцій, де вхідні перемінні блоку – значення функції, значення аргументу – час.

За замовчуванням осцилограф має один вхідний сигнал. Для розв'язання задач з динаміки зручніше зразу аналізувати прискорення, швидкість і переміщення досліджуваного об'єкту. Тому осцилограф можна налаштувати на 3 вхідних сигналу. Для цього необхідно двічі клікнути правою кнопкою миші на вікні осцилографа  і у вікні властивостей, яке відкрилося, натиснути кнопку параметрів осцилографа (рис. 1. 19). У вікні властивостей (рис. 1. 20) вводимо три входи, тобто три осі. Осцилограф прийме вигляд, показаний на рис. 1. 21.

Модель системи, котра дозволяє реєструвати всі досліджувані параметри, представлена на рис. 1. 22.

Для запуску процесу моделювання залишилося ввести в параметри відповідного інтегратора початкові умови для інтегрування (рис. 1. 23).

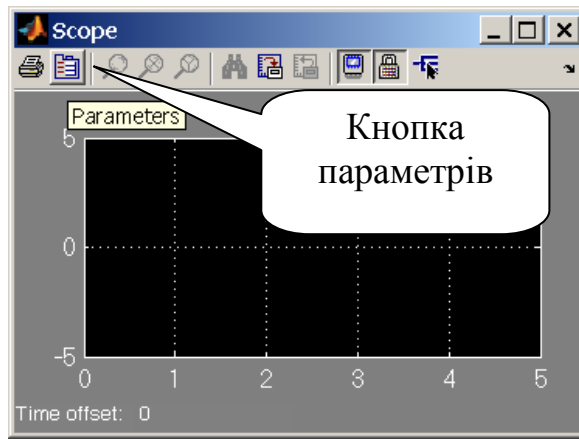


Рис. 1.19. Вікно осцилографу

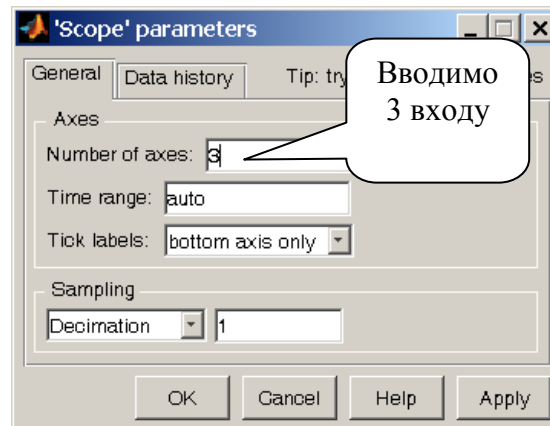


Рис.1.20. Вікно властивостей осцилографу

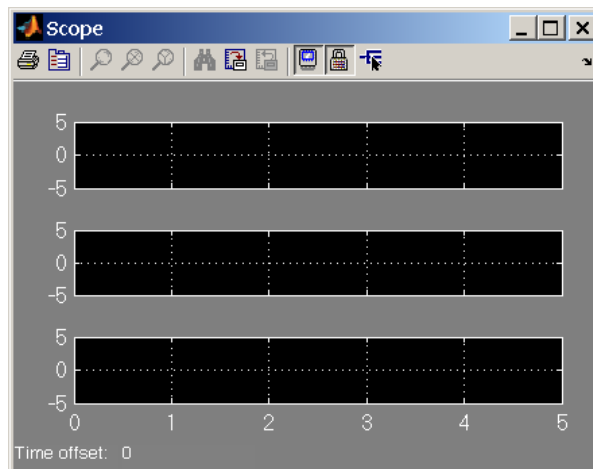


Рис. 1.21. Осцилограф з трьома реєструючими параметрами

Введення початкової швидкості: подвійним натисканням на блок інтегратора викликаємо вікно параметрів (рис. 1. 24), записуємо значення.

Тепер усе готово для запуску моделювання. Воно здійснюється одним з трьох варіантів (рис. 1. 25):

1. Натиснути кнопку **Старт моделювання**.
2. Вибрати меню **Simulation-Start**.
3. Комбінацією клавіш **Ctrl+T**.

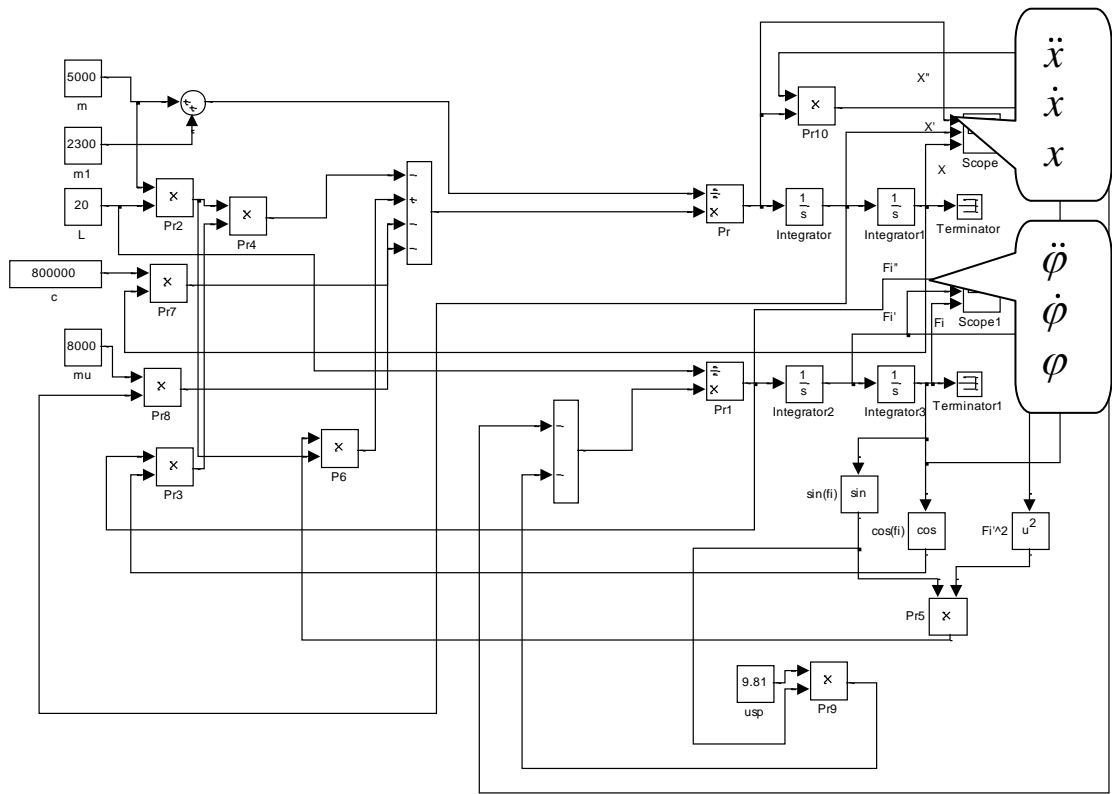


Рис. 1.22. Готова модель

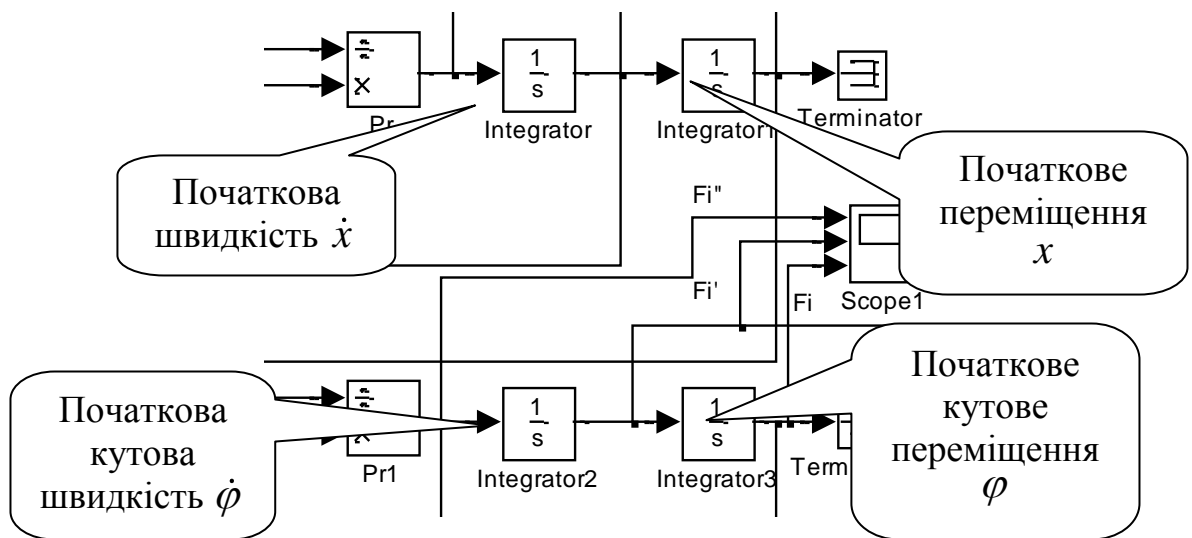


Рис.1.23. Задання початкових умов

Налаштування параметрів моделювання здійснюється натисканням кнопки меню **Simulation\Configuration Parameters** або комбінацією **Ctrl+E**. вікно параметрів показано на рис. 1. 26.

Після успішного моделювання можна отримати шукані результати. На рис. 1. 27 і рис. 1. 28 представлено розв'язання системи рівнянь (1. 2). Рис. 1. 27 зверху вниз – прискорення, швидкість і переміщення візка. Рис. 1. 28 зверху вниз – кутове прискорення, кутова швидкість і кут відхилення канату з вантажем.

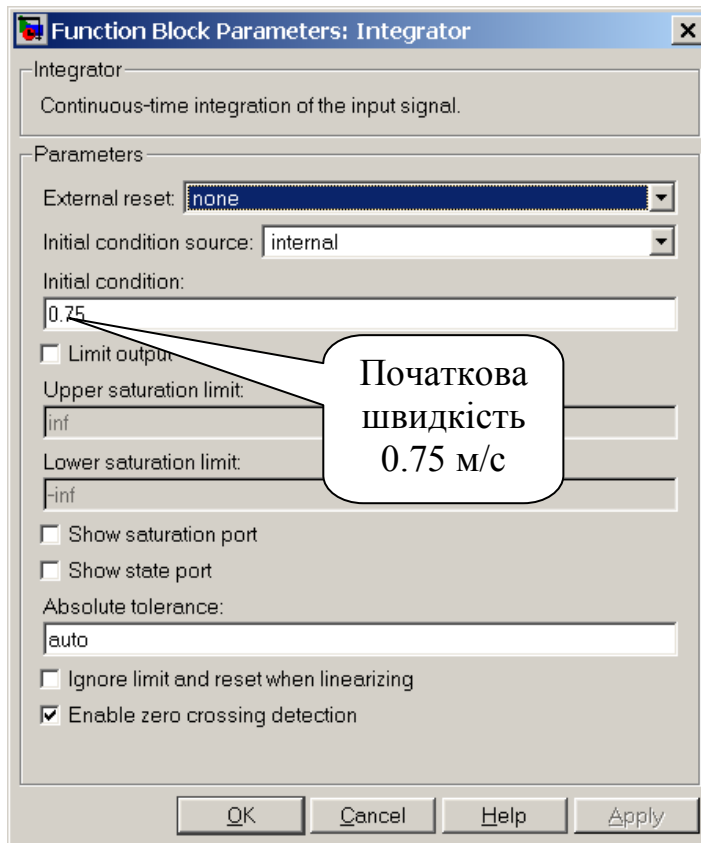


Рис. 1.24. Вікно задання параметрів інтегратора

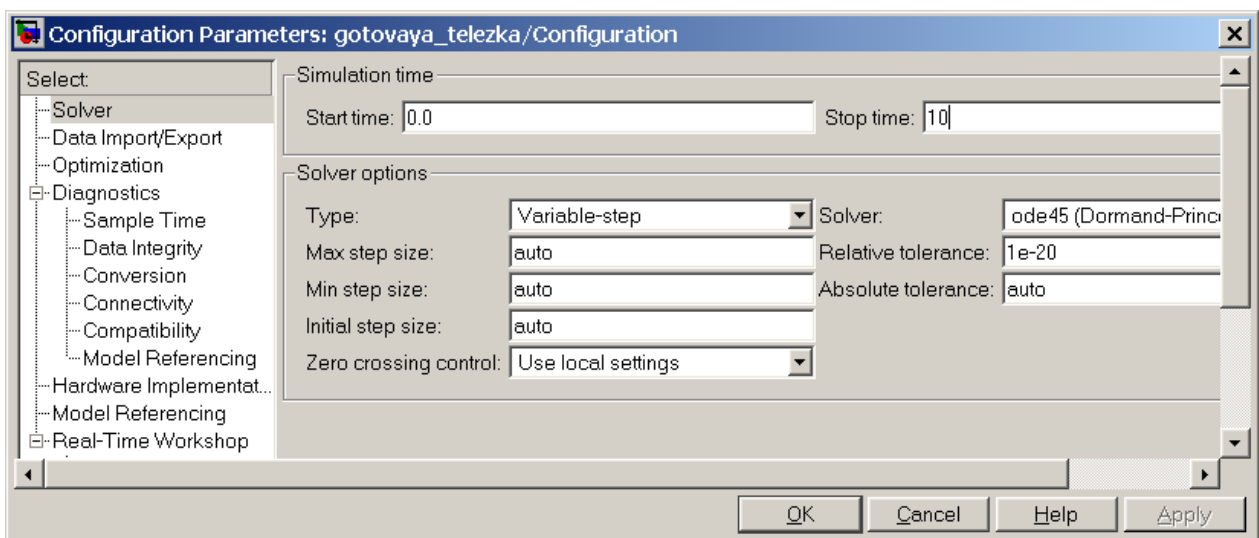
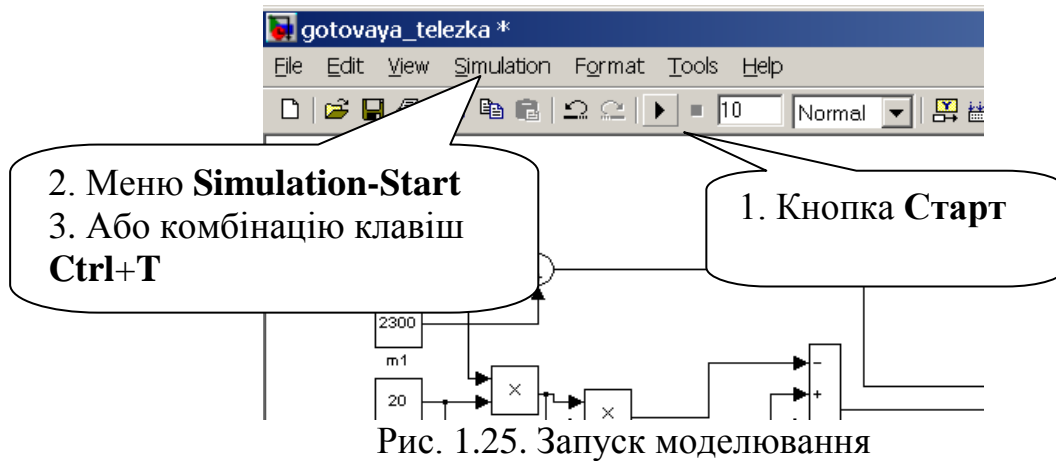


Рис. 1.26. Вікно параметрів (налаштування моделювання)

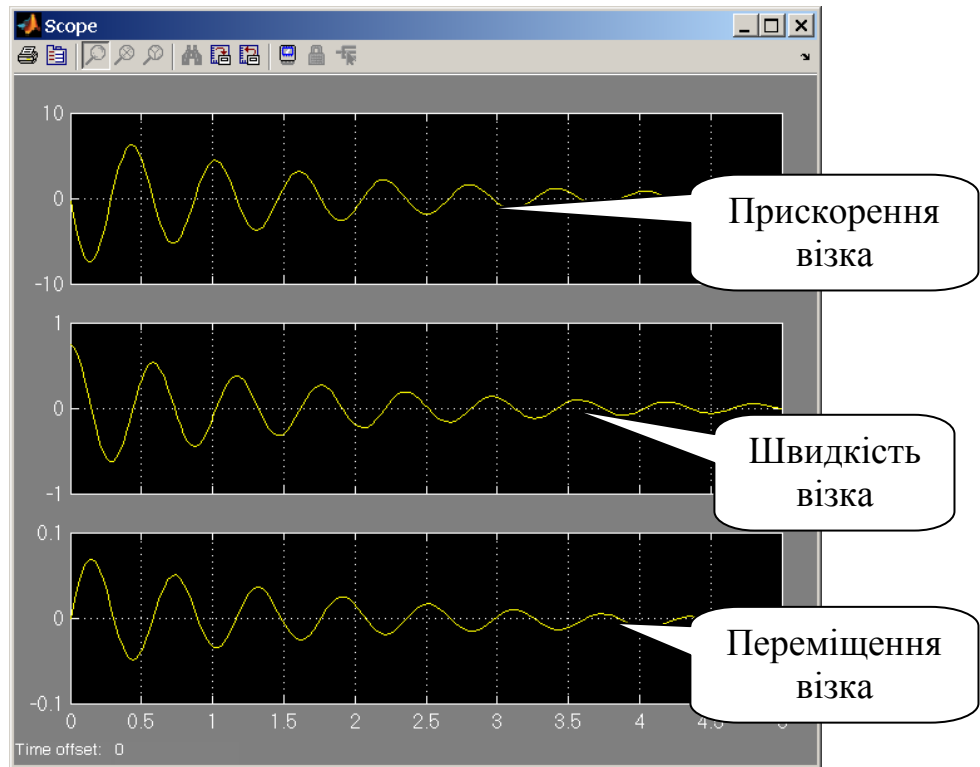


Рис.1.27. Прискорення, швидкість і переміщення візка

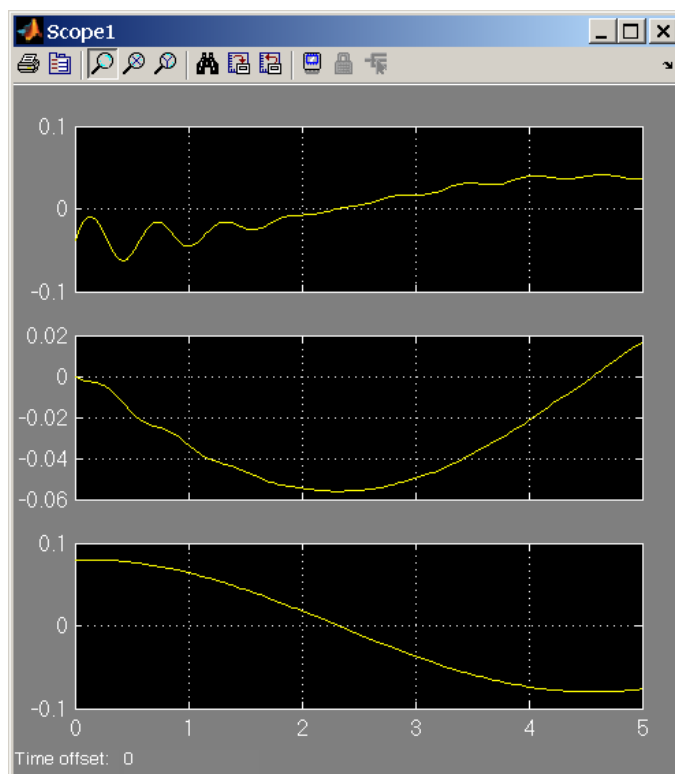


Рис.1.28. Кутове прискорення, кутова швидкість і кут відхилення канату з вантажем

Необхідно відмітити обмежені можливості вікна осцилографа стосовно виводу графіків. Графіки виводяться жовтим кольором на чорному фоні, що втомлює очі. Для розв'язання цієї проблеми в роботі [6] пропонується спосіб

розширити можливості керування осцилографом. Для цього потрібно, використовуючи командне вікно системи MATLAB виконати такі налаштування:

```
set(0,'ShowHiddenHandles','On')
```

```
set(gcf,'menubar','figure')
```

Після чого у вікні блоку Scope з'явиться меню (рис. 1. 29).

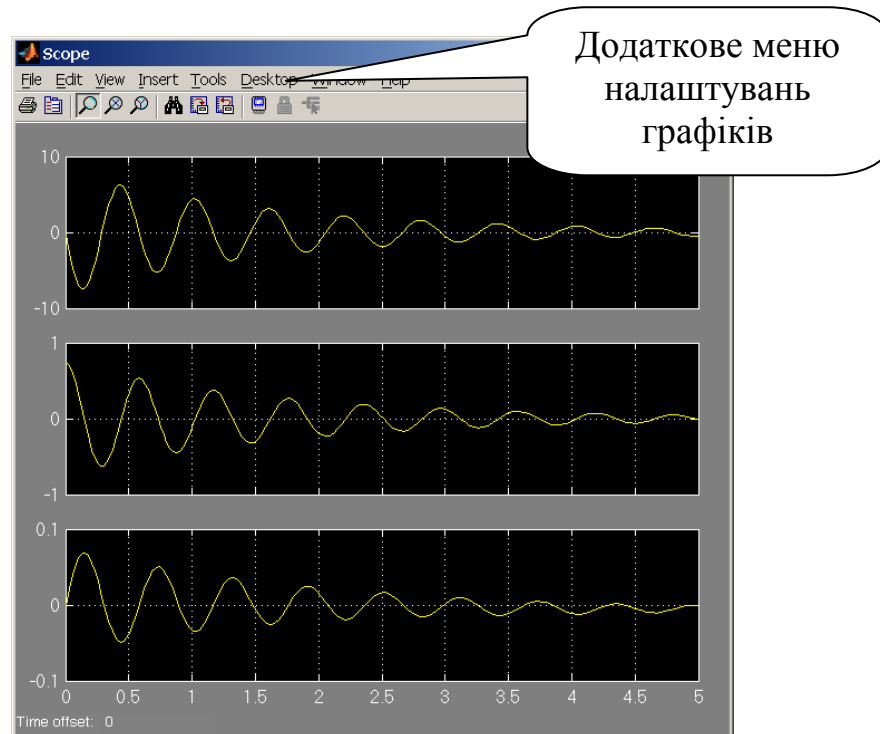


Рис.1.29. Вікно осцилографа з меню для редагування

Використовуючи командне меню Edit, можна змінити зовнішній вигляд вікна, осей і самих графіків за особистим бажанням. Приклад змін вікна осцилографа показаний на рис. 1. 30.

Якщо потрібно моделювання системи з частою зміною констант (пошукове моделювання), доцільно значення констант задати за допомогою MatLab, створивши М-файл (рис. 1. 31). Після створення М-файлу його необхідно запустити, щоб передати данні в робочу область MatLab. Це можна зробити трьома способами (рис. 1. 31).

Модель для роботи з М-файлом має вигляд, представлений на рис. 1. 32. Від двох попередніх вона відрізняється символічним введенням значення констант.

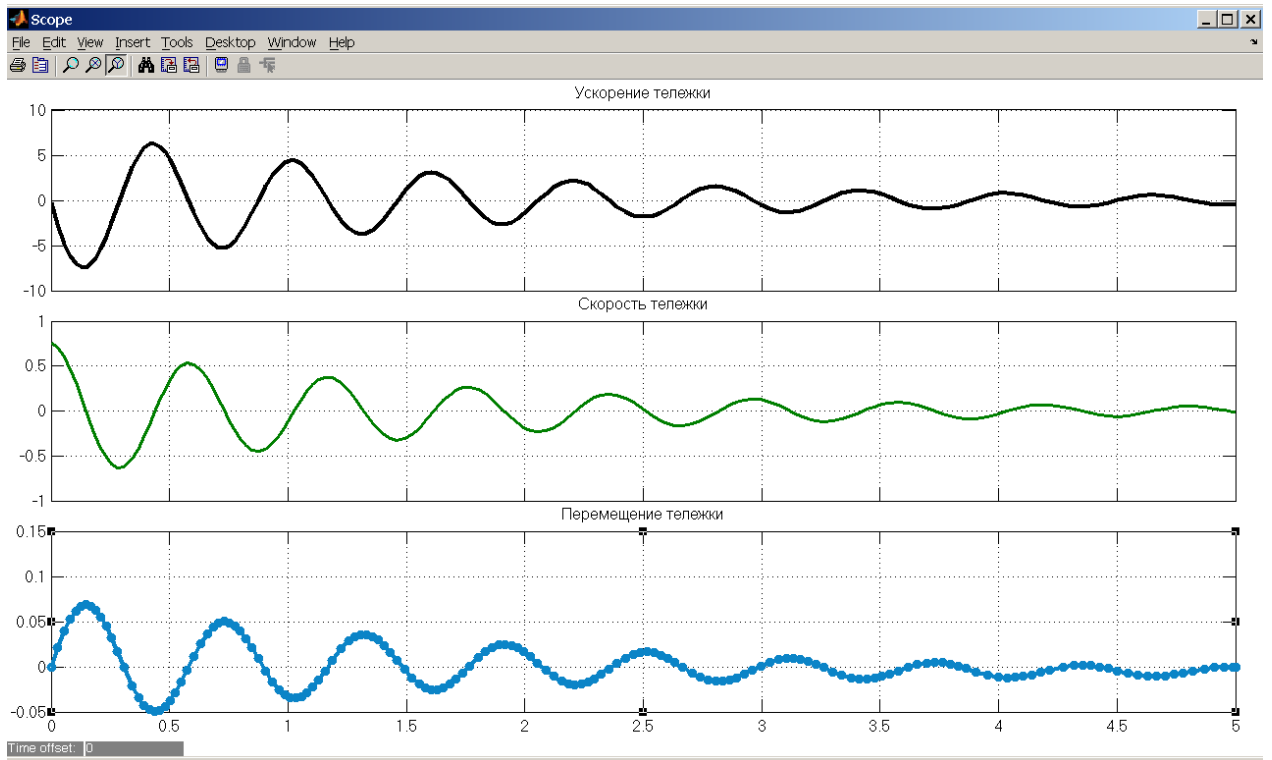


Рис. 1.30. Вікно осцилографа після редагування

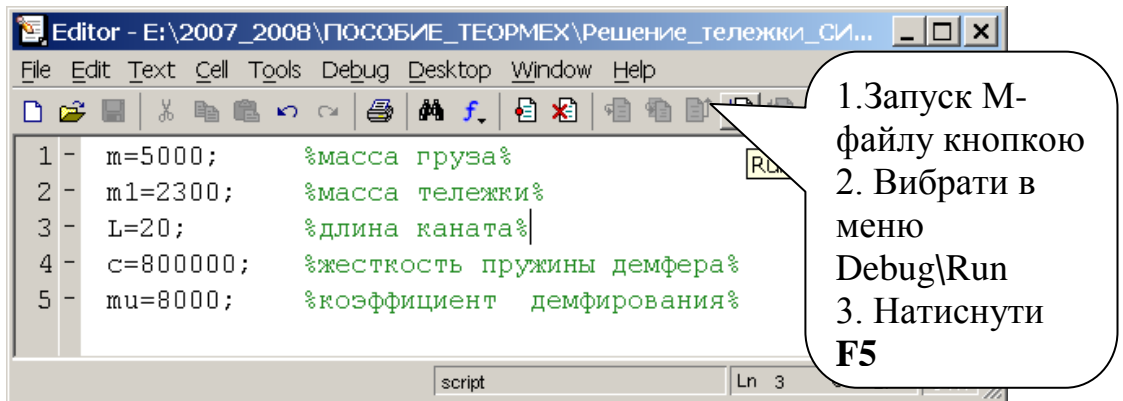


Рис.31. M-файл з вихідними даними

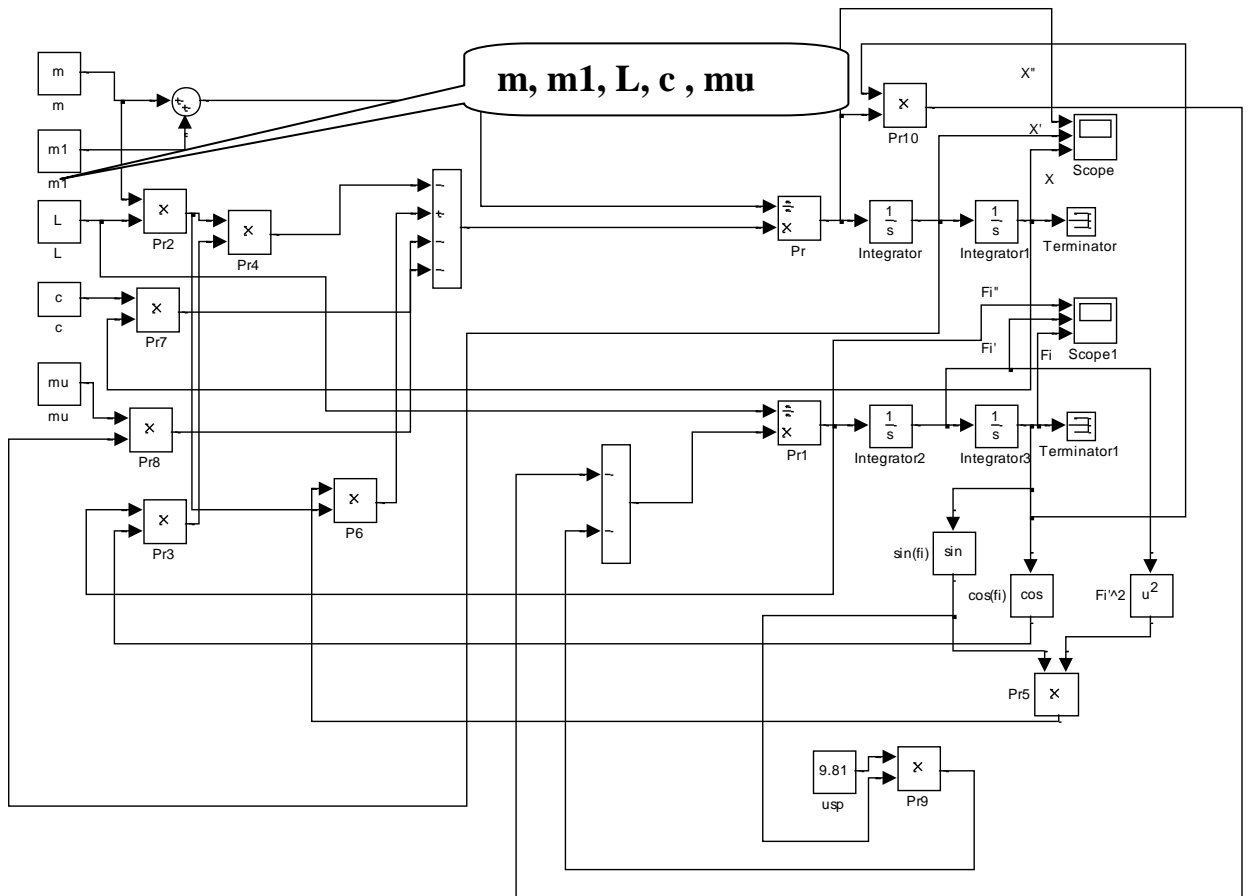


Рис. 1.32. Модель для роботи з М-файлом

## 2. Розв'язання системи диференціальних рівнянь за допомогою програми MATLAB

Підхід до розв'язання диференціальних рівнянь у MATLAB зводиться до розв'язання задачі Коші. Для цього призначені вбудовані функції MATLAB.

Схема розв'язання складається з таких етапів:

1. Приведення диференціальних рівнянь до системи диференціальних рівнянь першого порядку.

Як і в MathCAD систему диференціальних рівнянь необхідно розв'язати відносно других похідних (перше рівняння відносно  $\ddot{x}$ , друге відносно  $\ddot{\varphi}$ ). Для зручності складання матриці коефіцієнтів, перепишемо друге рівняння так, щоб спочатку була записана друга похідна по  $x$ . Нижче буде пояснено, для чого це потрібно.

$$(m_1 + m)\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi = -cx - \mu\dot{x}$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi = -g \sin \varphi$$

Використовуючи символічні розрахунки MATLAB, розв'яжемо представлену нижче систему відносно других похідних.

$$\begin{aligned}(m_1 + m)\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi &= -cx - \mu\dot{x} \\ \ddot{x} \cos \varphi + l\ddot{\varphi} &= -g \sin \varphi\end{aligned}$$

У склад MATLAB входить ToolBox Symbolic Math, призначений для розрахунків у символічному вигляді [13]. Функції ToolBox Symbolic Math реалізують інтерфейс між середовищем MATLAB і бібліотекою функцій, що є розрахунковим ядром Maple.

Символічний об'єкт створюється за допомогою функції `syms`.

Команда `>>syms m1 m L khi khi1 c x mu x1 g` створює 10 символічних перемінних, які присутні в нашій системі. Виконаємо заміну деяких перемінних з тих, які не розуміє мова MATLAB ( $m_1 \rightarrow m1$ ,  $l \rightarrow L$ ,  $\varphi \rightarrow khi$ ,  $\varphi' \rightarrow khi1$ ,  $\mu \rightarrow mu$ ,  $x' \rightarrow x1$ ).

Символічні перемінні нашої системи можуть бути представлені елементами матриці та вектора. Елементи строчок матриць при введенні відділяються пробілами чи комами, і стовпчиків – крапкою з комою, так як і для звичайних матриць. У результаті створюються символічні матриці та вектори, до котрих можуть застосовуватися матричні та поелементні операції та вбудовані функції.

Наше рівняння може бути записано в такому вигляді:

```
>> A=[m1+m m*L*cos(khi);cos(khi) L];
V=[m*L*khi1^2*sin(khi)-c*x-mu*x1;-g*sin(khi)];
```

Для розв'язання систем лінійних рівнянь у MATLAB використовується символ «\». На рис. 2. 1 представлений повний лістинг програми розв'язання рівнянь у символічному вигляді.



### 3. Виклик підходящого солвера.

Розв'яжемо нашу задачу, використовуючи солвер ode45, який реалізує метод Рунге-Кутти 4÷5 порядків. Лістинг файл-програми для розв'язання диференціальних рівнянь представлений на рис. 2. 3.

```
>> %формирование вектора начальных условий
>> Y0=[0;0.75;0;0];
>> % вызов солвера от файл-функции telega
>> % начального и конечного момента времени и вектора начальных условий
>> [T,Y]=ode45('telega',[0 25],Y0);
>> % вывод графика решения ДУ
>> plot(T,Y(:,1),'r')
```

Рис. 2.3. Лістинг файл-програми для розв'язання диференціального рівняння

Графік розв'язання системи диференціальних рівнянь показаний на рис. 2.

4.

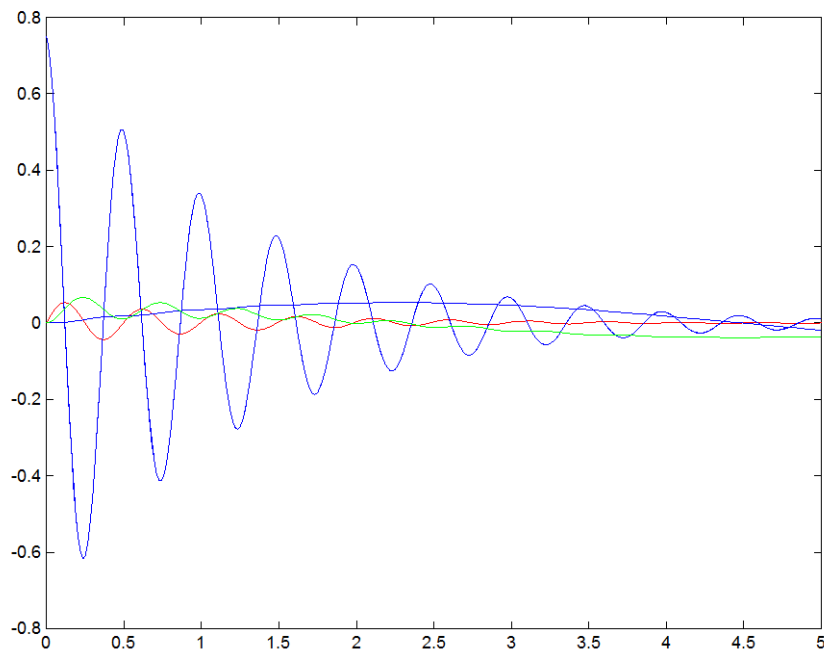


Рис. 2.4. Графічне розв'язання системи рівнянь вантажного візка мостового крану

### 3. Розв'язання системи диференціальних рівнянь за допомогою програми Mathcad

Для чисельного розв'язання системи диференціальних рівнянь приведемо нашу систему двох диференціальних рівнянь (1. 21) до форми Коші:

$$\frac{d}{dt} x = x' ;$$

$$\frac{d}{dt} \varphi = \varphi' ;$$

$$\frac{d}{dt} x' = \frac{(m \cdot \cos(\varphi) \cdot g1 \cdot \sin(\varphi) + m \cdot L \cdot \sin(\varphi) \cdot \varphi'^2 - c \cdot x - \mu \cdot x')}{(m \cdot \sin \varphi'^2 + m1)} ;$$

$$\frac{d}{dt} \varphi' = \frac{(-m \cdot g1 \cdot \sin(\varphi) - \cos(\varphi) \cdot m \cdot L \cdot \sin(\varphi) \cdot \dot{\varphi}'^2 + \cos(\varphi) \cdot c \cdot x + \cos(\varphi) \cdot \mu \cdot x' - g1 \cdot \sin(\varphi) \cdot m1)}{(m \cdot \sin \varphi'^2 + m1) \cdot L} .$$

Перетворивши таким чином кожне з рівнянь, які входять до вихідної системи, ми отримали систему з чотирьох диференціальних рівнянь, але з похідними тільки першого порядку.

Отриману систему, приведену до вигляду Коші, розв'яжемо в системі MathCAD. Для цього замінимо узагальнені перемінні системи (математичні перемінні), перемінними MathCAD (часто їх називають машинними перемінними). Ця операція є рекомендованою, але не обов'язковою, вона необхідна для зручності. Нижче буде показаний приклад без заміни перемінних. Потрібно мати на увазі, що індекси MathCAD змінюються від нульового значення:

$$x_0 = x; \quad x_1 = \varphi; \quad x_2 = x'; \quad x_3 = \varphi'.$$

Для нових перемінних рівняння руху в формі Коші мають вигляд:

$$\frac{d}{dt} x_0 = x_2 ;$$

$$\frac{d}{dt} x_1 = x_3 ;$$

$$\frac{d}{dt} x_2 = \frac{(m \cdot \cos(\varphi) \cdot g1 \cdot \sin(\varphi) + m \cdot L \cdot \sin(\varphi) \cdot \varphi'^2 - c \cdot x - \mu \cdot x')}{(m \cdot \sin^2 \varphi + m1)} ;$$

$$\frac{d}{dt} x_3 = \frac{(-m \cdot g1 \cdot \sin(\varphi) - \cos(\varphi) \cdot m \cdot L \cdot \sin(\varphi) \cdot \varphi'^2 + \cos(\varphi) \cdot c \cdot x + \cos(\varphi) \cdot \mu \cdot x' - g1 \cdot \sin(\varphi) \cdot m1)}{(m \cdot \sin^2 \varphi + m1) \cdot L} .$$

Для розв'язання в MathCAD диференціальних рівнянь у формі Коші вони повинні бути записані в символну функцію. Це функція  $\mathbf{D}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$  (рис. 3. 1), права частина вектору, що має розмірність системи, котра розв'язується, повертає значення в вигляді вектору з n елементів, які містять перші похідні невідомих функцій. Найбільш важка частина розв'язання диференціальних рівнянь в усіх програмних комплексах, за виключенням Simulink, полягає в визначенні функції  $\mathbf{D}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ , особливо, якщо рівняння нелінійні. Якщо «вручну» не вдається розв'язати рівняння відносно першої похідної, то це можна зробити в MathCAD, розв'язавши рівняння в символному вигляді. Замінімо  $\ddot{x} \rightarrow X$ ,  $\ddot{\varphi} \rightarrow \Phi$ ,  $\varphi \rightarrow \phi$ ,  $\dot{\varphi} \rightarrow \omega\phi$ ,  $\dot{x} \rightarrow Vx$ . Нижче представлений приклад розв'язання рівнянь у символному вигляді відносно  $\ddot{x}, \ddot{\varphi}$  (рис. 3. 2).

$$D(t,x) := \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \frac{[m \cdot \cos(x_1) \cdot g1 \cdot \sin(x_1) + m \cdot L \cdot \sin(x_1) \cdot (x_3)^2 - c \cdot x_0 - \mu \cdot x_2]}{(\sin(x_3)^2 \cdot m + m1)} \\ \frac{[-m \cdot g1 \cdot \sin(x_1) - \cos(x_1) \cdot m \cdot L \cdot \sin(x_1) \cdot (x_3)^2 + \cos(x_1) \cdot c \cdot x_0 + \cos(x_1) \cdot \mu \cdot x_2 - g1 \cdot \sin(x_1) \cdot m1]}{(\sin(x_3)^2 \cdot m + m1) \cdot L} \end{bmatrix}$$

Рис. 3.1. Функція  $\mathbf{D}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$

Щоб розв'язати систему рівнянь у символному вигляді, необхідно виконати таке:

⇒ Набрати з клавіатури слово **Given** (рис. 3. 2). MathCAD повідомляє про те, що далі слідує система рівнянь. Це слово можна надрукувати в будь-якому регістрі та шрифті.

Given

$$(m1 + m) \cdot X + m \cdot L \cdot \cos(\phi) \cdot \Phi - m \cdot L \cdot \sin(\phi) \cdot \omega \phi^2 = -c \cdot x - \mu \cdot Vx$$

$$L \cdot \Phi + X \cdot \cos(\phi) = -g1 \cdot \sin(\phi)$$

$$\text{Find}(X, \Phi) \rightarrow \left[ \begin{array}{l} \frac{(m \cdot \cos(\phi) \cdot g1 \cdot \sin(\phi) + m \cdot L \cdot \sin(\phi) \cdot \omega \phi^2 - c \cdot x - \mu \cdot Vx)}{(m \cdot \sin(\phi)^2 + m1)} \\ \frac{(-m \cdot g1 \cdot \sin(\phi) - \cos(\phi) \cdot m \cdot L \cdot \sin(\phi) \cdot \omega \phi^2 + \cos(\phi) \cdot c \cdot x + \cos(\phi) \cdot \mu \cdot Vx - g1 \cdot \sin(\phi) \cdot m1)}{(m \cdot \sin(\phi)^2 + m1) \cdot L} \end{array} \right]$$

Рис. 3.2. Розв'язання в символічному вигляді рівнянь відносно  $\ddot{x}, \ddot{\phi}$

⇒ Далі потрібно набрати рівняння (у будь-якому порядку) нижче слова **Given**. Слід звернути увагу на те, що для ведення знаку « $\Rightarrow$ » потрібно використовувати комбінацію « $[\text{Ctrl}]=$ ». У випадку правильного введення знаку він буде введений жирним шрифтом « $\Rightarrow$ ».

Є можливість введення знаку « $\Rightarrow$ » і з меню Boolean операції (рис. 3. 3).

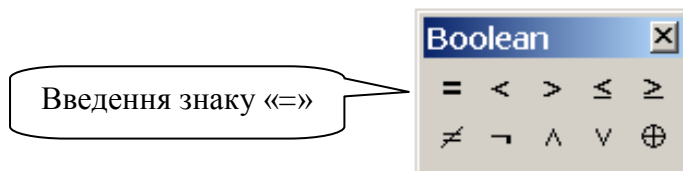


Рис. 3.3. Введення знаку « $\Rightarrow$ » з меню Boolean операції

⇒ Надрукувати слово **Find** у будь-якому регістрі та шрифті. Аргументами функції є перемінні, відносно котрих розв'язується система **Find (X, Φ)**. Тут  $X \rightarrow \ddot{x}, \Phi \rightarrow \ddot{\phi}$ .

⇒ За функцією **Find (X, Φ)** вводиться символічний знак рівності « $\rightarrow$ ».

Для введення « $\rightarrow$ » натисніть  $[\text{Ctrl}]$  і крапку « $\cdot$ » або скористатися меню Symbolic, або меню Evaluation (рис. 3. 4).

⇒ На завершення необхідно клацнути укажчиком миші на функції **Find**. Система виконає розв'язання рівнянь у символічному вигляді.

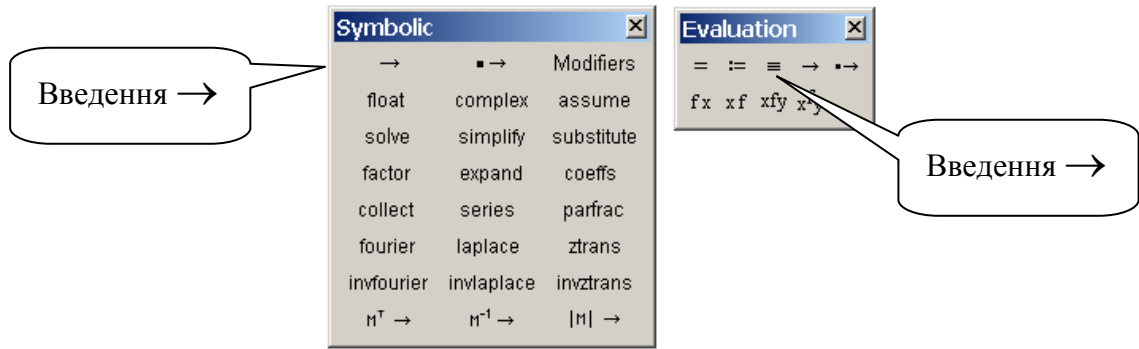


Рис. 3.4. Введення символічного знаку рівності «→»

Константи, що входять до функції  $\mathbf{D}(t, \mathbf{x})$  повинні бути визначені до їх використання.

Вводимо  $m_1=2300\text{кг}$  – маса візка;  $m=5000\text{кг}$  – маса вантажу;  $L=20\text{м}$  – довжина канату;  $c=800000\text{Н/м}$ ;  $\mu=8000$  – коефіцієнт демпфування;  $g_1=9,81$  – прискорення вільного падіння.

Далі визначається вектор початкових умов:

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,75 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \text{початкове переміщення, } x \\ - \text{початкове кутове зміщення, } \varphi \\ - \text{початкова швидкість, } \dot{x} \\ - \text{початкова кутова швидкість, } \dot{\varphi} \end{pmatrix}.$$

Для створення вектора початкових умов необхідно задати матрицю (рис. 3. 5) з одним стовпчиком і чотирма строчками (рис. 3. 6).

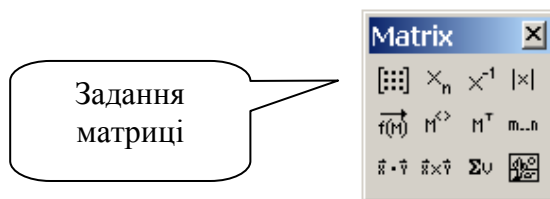


Рис. 3.5. Задання матриці початкових умов

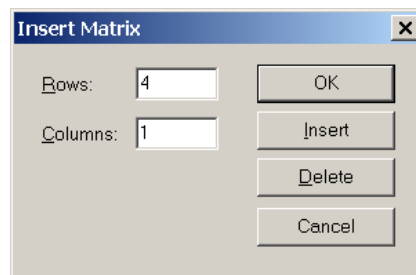


Рис. 3. 6

Отриманий розв'язок у символічному вигляді підставляємо в функцію  $\mathbf{D}(t, \mathbf{x})$  (рис. 3. 7), виконуючи відповідну підстановку:

$\phi \rightarrow x_1, \omega\phi \rightarrow x_3, x \rightarrow x_0, Vx \rightarrow x_2$ . Індекс  $x_0$  необхідно набирати, використовуючи ліву клавішу «[».

$$\text{Find}(X, \Phi) \rightarrow \left[ \begin{array}{c} \frac{(m \cdot \cos(\phi) \cdot g1 \cdot \sin(\phi) + m \cdot L \cdot \sin(\phi) \cdot \omega\phi^2 - c \cdot x - \mu \cdot Vx)}{(m \cdot \sin(\phi)^2 + m1)} \\ \frac{(-m \cdot g1 \cdot \sin(\phi) - \cos(\phi) \cdot m \cdot L \cdot \sin(\phi) \cdot \omega\phi^2 + \cos(\phi) \cdot c \cdot x + \cos(\phi) \cdot \mu \cdot Vx - g1 \cdot \sin(\phi) \cdot m1)}{(m \cdot \sin(\phi)^2 + m1) \cdot L} \end{array} \right]$$

$$D(t, x) := \left[ \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \\ \frac{[m \cdot \cos(x_1) \cdot g1 \cdot \sin(x_1) + m \cdot L \cdot \sin(x_1) \cdot (x_3)^2 - c \cdot x_0 - \mu \cdot x_2]}{(\sin(x_3)^2 \cdot m + m1)} \\ \frac{[-m \cdot g1 \cdot \sin(x_1) - \cos(x_1) \cdot m \cdot L \cdot \sin(x_1) \cdot (x_3)^2 + \cos(x_1) \cdot c \cdot x_0 + \cos(x_1) \cdot \mu \cdot x_2 - g1 \cdot \sin(x_1) \cdot m1]}{(\sin(x_3)^2 \cdot m + m1) \cdot L} \end{array} \right]$$

Рис. 3.7

Для розв'язання системи диференціальних рівнянь застосуємо функцію *rkfixed*, яка використовує для пошуку рішення метод Рунге-Кутта четвертого порядку.

$$Z := \text{rkfixed}(x, t0, t1, N, D),$$

де  $x$  – вектор початкових умов розмірності  $n$ ;

$n$  – порядок диференціального рівняння чи число рівнянь у системі;

$t0, t1$  – граничні точки інтервалу, на котрому шукається розв'язання диференціального рівняння. Початкові умови, задані в векторі  $x$ , є значеннями розв'язання в точці  $t0$ ;

$N$  – число точок (не рахуючи початкової точки), в яких шукається наближене розв'язання.

$D$  – функція, що повертає значення у вигляді вектору з  $n$  елементів, які містять перші похідні невідомих функцій. У нашому випадку шукається розв'язання на інтервалі від 0 до 5с, кількість точок  $N=1000$ , в яких шукається розв'язання.

Розв'язання формується у вигляді матриці  $Z$  (рис. 3. 8), яка містить у стовпчиках:

$t = Z^{<0>}$  – час інтегрування;

$x = Z^{<1>}$  – лінійне переміщення візка;

$\varphi = Z^{<2>}$  – кут відхилення канату;

$Vx = Z^{<3>}$  – швидкість візка;

$\omega\phi = Z^{<4>}$  – кутова швидкість канату.

Для створення верхнього індексу використовуйте комбінацію клавіш [Ctrl]+6.

$t0 := 0$        $t1 := 5$        $N := 1000$   
 $Z := \text{rkfixed}(x, t0, t1, N, D)$

$t := Z^{<0>}$      $x := Z^{<1>}$      $\phi := Z^{<2>}$      $Vx := Z^{<3>}$      $\omega\phi := Z^{<4>}$

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0.75	0
1	$5 \cdot 10^{-3}$	$3.706 \cdot 10^{-3}$	$4.383 \cdot 10^{-6}$	0.732	$1.814 \cdot 10^{-3}$
2	0.01	$7.313 \cdot 10^{-3}$	$1.873 \cdot 10^{-5}$	0.71	$3.981 \cdot 10^{-3}$
3	0.015	0.011	$4.475 \cdot 10^{-5}$	0.685	$6.484 \cdot 10^{-3}$
4	0.02	0.014	$8.409 \cdot 10^{-5}$	0.657	$9.3 \cdot 10^{-3}$
5	0.025	0.017	$1.382 \cdot 10^{-4}$	0.626	0.012
6	0.03	0.02	$2.086 \cdot 10^{-4}$	0.592	0.016
7	0.035	0.023	$2.965 \cdot 10^{-4}$	0.556	0.019
8	0.04	0.026	$4.03 \cdot 10^{-4}$	0.518	0.023

Рис. 3.8. Матриця розв'язання диференціального рівняння

На рисунках 3. 9÷3. 12 представлені результати розв'язання.

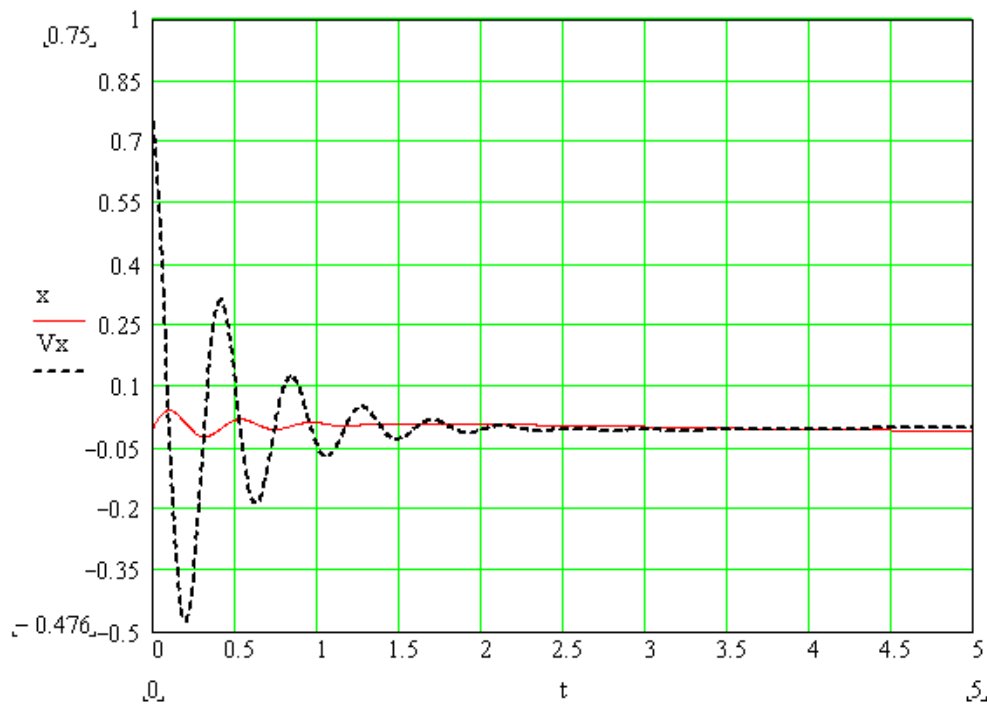


Рис. 3.9. Зміна швидкості (суцільна лінія) та переміщення візка (штрихпунктирна)

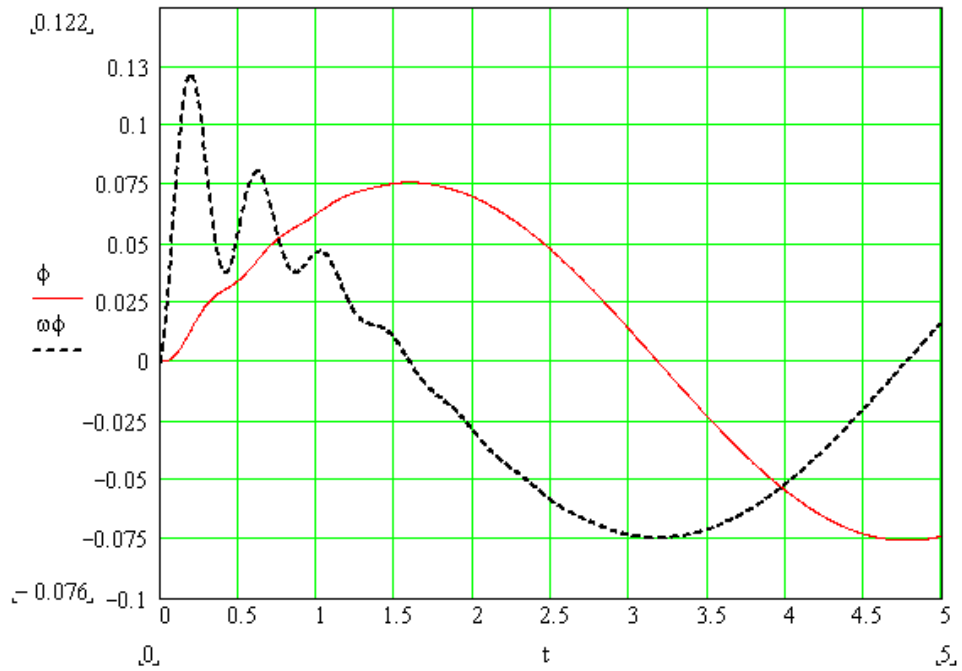


Рис. 3.10. Зміна кутової швидкості (штрихпунктирна) та кута відхилення канату (суцільна лінія)

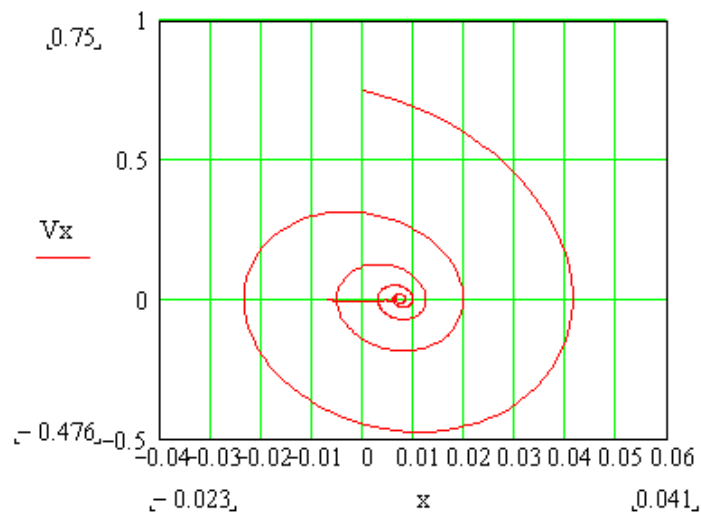


Рис. 3.11. Залежність швидкості пересування візка від його лінійного переміщення

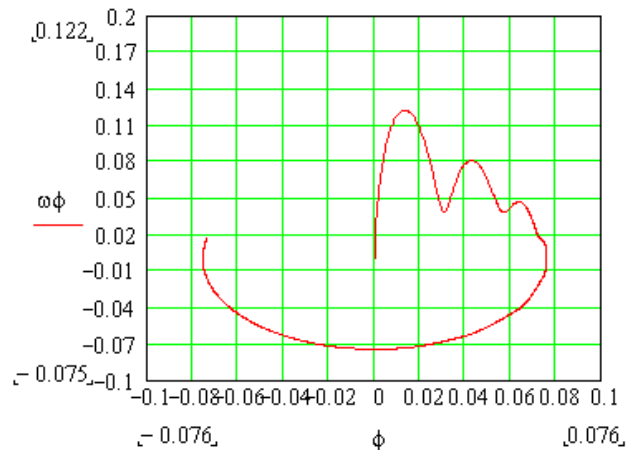


Рис. 3.12. Залежність кутової швидкості розгойдування вантажу на канаті від його кутового переміщення

## ЛІТЕРАТУРА

### Основна

1. Основи інженерної механіки : навчальний посібник / В.І. Зінченко, Л.М. Мамаєв, Ю.С. Постольник – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2004. – 444 с.
2. Яскілко М.Б. Збірник задач для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки / М.Б. Яскілко – К.: Вища школа, 1999. – 362 с.
3. Павловський М.А. Теоретична механіка: підручник / М.А. Павловський – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
4. Теоретична механіка: підручник; Ч1: Кінематика / А.А. Бондаренко, О.О. Дубінін, О.М. Переславцев – К.: Знання, 2004. – 599 с.
5. Теоретична механіка: підручник; Ч2 : Динаміка / А.А. Бондаренко, О.О. Дубінін, О.М. Переславцев – К.: Знання, 2004. – 590 с.
6. Моделювання систем у середовищі MATLAB-SIMULINK: комп'ютерний практикум / М.Д. Гераїмчук, Ю.Ф. Лазарєв, Т.О. Толочко – К.:, 2006. – 175 с.

### Додаткова

7. Омаров М.А. Основи теоретичної механіки. Ч. 1: навчальний посібник / М.А. Омаров – Харків: ХНУРЕ, 2017. – 184 с.
8. Потехін А.Ф. Короткий курс теоретичної механіки в запитаннях та відповідях з аналізом базових понять : навчальний посібник / А.Ф. Потехін. – 2-е вид., випр. – Львів : Новий Світ-2000, 2011. – 200 с.
9. Теоретична механіка : навчальний посібник / [П.К. Штанько та ін. ; за заг. ред. П.К. Штанька]; – Запоріжжя: ЗНТУ, 2013. – 376 с.
10. Романюк О.Д., Теліпко Л.П., Ракша С.В. Теоретична та прикладна механіка. Короткий курс / О.Д. Романюк, Л.П. Теліпко, С.В. Ракша. Кам'янське: ДДТУ, 2021. – 282 с.
11. Федуліна А.І. Теоретична механіка: навчальний посібник / А.І. Федуліна. К. : Вища шк., 2005. – 319 с.
12. Шанайда В.В. Пакет MathCAD в інженерних розрахунках / В.В. Шанайда. Тернопіль : Видавництво ТДТУ, 2001. – 163 с.

13. Петрик М. MathCAD-технології в інженерних задачах теорії розрахунку і конструювання / М. Петрик. Тернопіль: ТДТУ ім. І. Пулюя, 2000. – 154 с.
14. Лазарев Ю.Ф. Довідник з MATLAB: електронний навчальний посібник з курсового і дипломного проектування / Ю.Ф. Лазарев. – К.: НТУУ «КПІ», 2013. – 132 с.
15. Suspension: System Modeling: Control Tutorials for MATLAB&Simulink. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://ctms.engin.umich.edu/>

## ЗМІСТ

Вступ.....	3
Частина II. Способи розв'язання диференціальних рівнянь руху кранового візка з вантажем у програмних пакетах .....	5
1. Розв'язання системи диференціальних рівнянь за допомогою програми Simulink.....	5
2. Розв'язання системи диференціальних рівнянь за допомогою програми MATLAB.....	21
3. Розв'язання системи диференціальних рівнянь за допомогою програми Mathcad.....	24
Література.....	32