УДК 517.5

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ МЕТОДІВ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

В. Заріцкий, група КБ-24
Центральноукраїнський національний технічний університет

У роботі досліджуються та порівнюються різні методи інтерполяції функцій на прикладі двох елементарних функцій. Особлива увага приділяється многочлену Лагранжа та многочлену, отриманому з ряду Маклорена, з метою визначення їх ефективності при наближенні функцій.

Інтерполяція функцій є важливим математичним інструментом для наближеного обчислення значень функції у точках, які знаходяться між вузлами інтерполяції. Математична постановка задачі інтерполяції полягає в наступному: для заданої функції f(x), визначеної на проміжку [a, b], відомі її значення $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_m)$ у вузлах інтерполяції x_0, x_1, ..., x_m. Потрібно побудувати функцію L(x), яка у цих вузлах приймає ті ж значення, що й функція f(x), тобто виконується умова $L(x_i) = f(x_i)$ для всіх i = 0, 1, ..., m [1].

У даній роботі розглядаються два підходи до інтерполяції: за допомогою многочлена Лагранжа та многочлена, отриманого з ряду Маклорена шляхом відкидання його членів вище заданого степеня. Для побудови многочлена Лагранжа використовувалися допоміжні многочлени:

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_m)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_m)} \quad (1)$$

де k = 0, 1, ..., m. Многочлен Лагранжа представляється у вигляді:

$$L(x) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k) l_k(x) \quad (2)$$

Для дослідження були обрані дві елементарні функції:

1. $f(x) = \cos(x) + 2$
2. $f(x) = e^x + 1$

Для кожної функції було побудовано многочлен Лагранжа восьмого степеня з використанням 9 вузлових точок на проміжку [-4, 4], а також многочлен восьмого степеня, отриманий з ряду Маклорена.

Для функції $f(x) = cos(x) + 2$ многочлен з ряду Маклорена має вигляд:

$$P(x) = 3 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

Для функції $f(x) = e^x + 1$ відповідний многочлен з ряду Маклорена:

$$P(x) = 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320}$$

Для порівняння точності інтерполяції були обчислені відносні похибки обох методів:

- Для многочлена Лагранжа: $\delta(x) = \left|\frac{[f(x) - L(x)]}{f(x)}\right|$
- Для многочлена з ряду Маклорена: $\delta_1(x) = \left|\frac{[f(x) - P(x)]}{f(x)}\right|$

Аналіз отриманих результатів показав, що для обох функцій інтерполяція за допомогою многочлена Лагранжа дає більш точні результати, ніж за допомогою многочлена, отриманого з ряду Маклорена. Особливо це проявляється на кінцях інтервалу [-4, 4], оскільки ряд Маклорена розвивається в околі точки x = 0, і точність наближення зменшується при віддаленні від цієї точки [1].

Графічний аналіз наближення функцій многочленами підтверджує теоретичні висновки. На рисунках 1 і 2 зображено порівняння функцій та їх наближень многочленами, а також відносні похибки цих наближень.

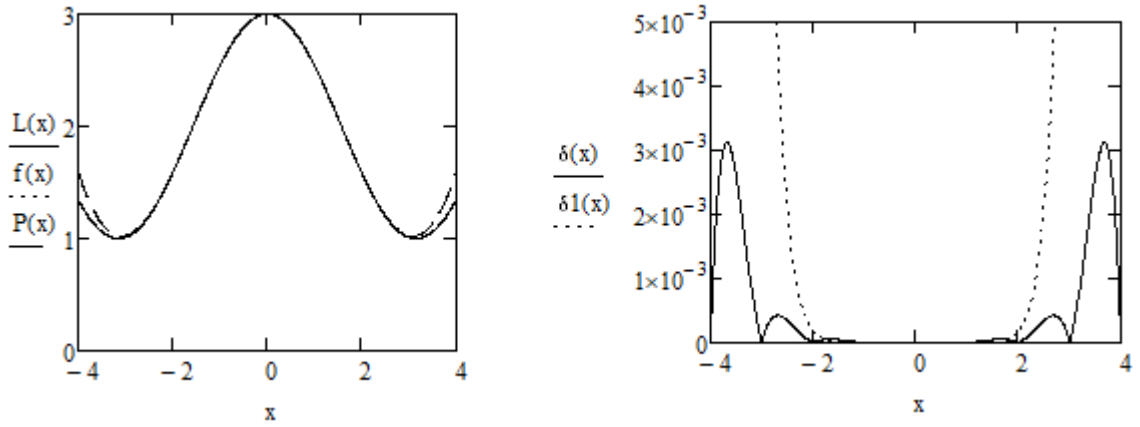


Рисунок 1 – Графік функції $f(x) = cos(x) + 2$ та її наближення многочленами (зліва); графік відносних похибок (справа)

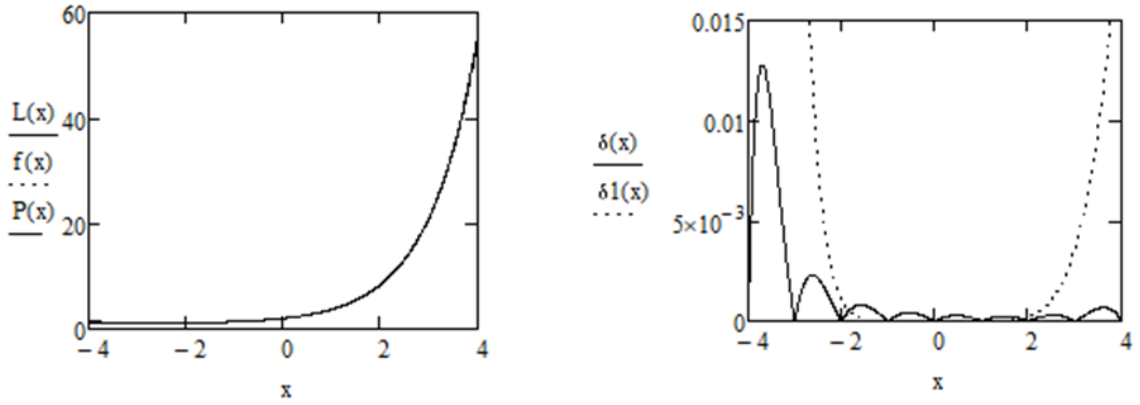


Рисунок 2 – Графік функції $f(x) = e^x + 1$ та її наближення многочленами (зліва); графік відносних похибок (справа)

Результати дослідження підтверджують, що многочлен Лагранжа забезпечує точне співпадіння з функцією у вузлових точках, що гарантує хорошу точність на всьому інтервалі інтерполяції. Многочлен, отриманий з ряду Маклорена, дає найкращу точність в околі точки розкладання (x = 0) і має гіршу точність при віддаленні від цієї точки.

Таким чином, при необхідності інтерполяції функції на заданому інтервалі рекомендується використовувати многочлен Лагранжа, особливо якщо точки, в яких потрібно обчислити значення функції, знаходяться далеко від центра інтервалу.

Список літератури

1. Вища математика: Спеціальні розділи: Підручник. Кн.2 / Кулініч Г.Л., Таран Є.Ю., Бурим Л.Д., Гординський Л.Д., Грисенко М.В., Данилов В.Я. − К.: Либідь, 2003 р. – 368 с..