Центральноукраїнський національний технічний університет
Механіко-технологічний факультет
Кафедра “Машинобудування, мехатроніки і робототехніки”

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри ММіР
к.т.н., доцент
_____ Андрій ГРЕЧКА
«____» _____ 2026 р.

# КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

за другим (магістерським) рівнем вищої освіти

на тему:

**«Дослідження верстата з паралельною кінематикою типу "Дельта"»**

**«Research on a Delta-type machine tool with parallel kinematics»**

Виконав здобувач вищої освіти 2-го року
магістратури групи ГМ-24М-3
ОНП «Галузеве машинобудування»
спеціальності 133 «Галузеве
машинобудування»
_____ Дмитро СИДОРЕНКО

Керівник роботи к.т.н., доцент
_____ ВАЛЯВСЬКИЙ

Рецензент:
_____

Кропивницький – 2026

Форма № Н-9.01

Центральноукраїнський національний технічний університет

| | |
|---|---|
| Факультет | Механіко-технологічний |
| Кафедра | Машинобудування, мехатроніки і робототехніки |
| Рівень вищої освіти | другий (магістерський) |
| Галузь знань | 13 Механічна інженерія |
| Спеціальність | 133 Галузеве машинобудування |
| Освітньо-наукова програма | Галузеве машинобудування |

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри ММР
Андрій ГРЕЧКА

«____» _____ 2026 р.

ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ
ЗА ДРУГИМ (МАГІСТЕРСЬКИМ) РІВНЕМ ВИЩОЇ ОСВІТИ
ЗДОБУВАЧА
Дмитра СИДОРЕНКА
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи: Дослідження верстата з паралельною кінематикою типу "Дельта"
2. Керівник роботи: к.т.н., доц., Іван ВАЛЯВСЬКИЙ
3. Строк подання роботи до захисту « » 2026 р.
4. Мета та завдання кваліфікаційної роботи:

*Метою роботи є:* дослідження верстата з паралельною кінематикою типу «Дельта».

*Завдання:*

- проаналізувати існуючих схем побудови обладнання з паралельною кінематикою типу «Дельта»;

- сформулювати та розв’язати пряму і зворотну задач кінематики для компоновки типу Linear Delta;

- виконати моделювання робочого простору для дослідити рухи виконавчого органу в межах робочого простору.

5. Консультанти по роботі, із зазначенням розділів

| Розділ | Консультант | Підпис, дата | |
|---|---|---|---|
| | | Завдання видав | Завдання прийняв |
| РОЗДІЛ 1 | Іван ВАЛЯВСЬКИЙ | | |
| РОЗДІЛ 2 | Іван ВАЛЯВСЬКИЙ | | |
| РОЗДІЛ 3 | Іван ВАЛЯВСЬКИЙ | | |
| РОЗДІЛ 4 | Ірина ЖУРИЛО | | |
| | | | |

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

| № п/п | Назва етапів роботи | Строк виконання етапів роботи | Примітка |
|---|---|---|---|
| 1 | ВСТУП | Лютий 2026 | |
| 2 | РОЗДІЛ 1 | Лютий 2026 | |
| 3 | РОЗДІЛ 2 | Березень 2026 | |
| 4 | РОЗДІЛ 3 | Березень 2026 | |
| 5 | РОЗДІЛ 4 | Квітень 2026 | |
| 6 | ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ | Квітень 2026 | |
| 7 | ОФОРМЛЕННЯ РОБОТИ | Травень 2026 | |
| 8 | | | |
| | | | |
| | | | |

Дата видачі завдання «_____» _____ 2026 р.

Керівник роботи _____ Іван ВАЛЯВСЬКИЙ
(підпис)

Завдання прийнято до виконання «____» _____ 2026 р.

Здобувач _____ Дмитро СИДОРЕНКО
(підпис)

# Анотація

Дмитро СИДОРЕНКО. Дослідження верстата з паралельною кінематикою типу «Дельта». Кваліфікаційна робота для освітнього ступеня «магістр»: ЦНТУ, 2026. – 74 с. Матеріали презентації 9 аркушів.

*Метою роботи* є дослідження верстата з паралельною кінематикою типу «Дельта».

Для досягнення мети дослідження було вирішено такі задачі: проаналізовано існуючі схеми побудови технологічного обладнання з паралельною кінематикою типу «Дельта»; виконано постановку і розв'язок прямої та зворотної задач кінематики для компоновки типу Linear Delta; виконано моделювання робочого простору та досліджено рухи виконавчого органу в його межах; визначено економічну доцільність впровадження такого верстата шляхом розрахунку економічного ефекту порівняно з базовим аналогом.

*Актуальність.* Верстати з паралельною кінематикою типу «Дельта» дозволяють забезпечити мінімальну рухому масу механізму, досягати надвисоких прискорень та високої структурної жорсткості у всій робочій зоні. Завдяки цим перевагам вони є перспективною базою для операцій фрезерування, свердління та адитивного виробництва, що робить актуальним вдосконалення їх математичних моделей та систем управління.

*Наукова новизна.* Здійснено комплексне дослідження кінематичних залежностей верстата типу Linear Delta, для якого сформульовано точні аналітичні розв'язки зворотної задачі кінематики, що усуває потребу у числових ітераційних методах. Встановлено закономірності впливу геометричних параметрів на розміри та форму робочого простору, а також доведено нелінійний характер горизонтальних та кругових рухів.

*Ключові слова:* верстат з паралельною кінематикою, механізм Дельта, Linear Delta, робочий простір, задачі кінематики.

## Abstract

Dmytro SYDORENKO. Research on a Delta-type machine tool with parallel kinematics. Master's thesis: CNTU, 2026. – 74 p. Presentation materials 9 sheets.

*The aim of the work* is to research a Delta-type machine tool with parallel kinematics.

To achieve the aim of the research, the following tasks were solved: existing design schemes of Delta-type technological equipment with parallel kinematics were analyzed; the forward and inverse kinematics problems for the Linear Delta configuration were formulated and solved; the workspace was modeled and the movements of the end effector within its boundaries were investigated; the economic feasibility of implementing such a machine tool was determined by calculating the economic effect compared to a baseline analog.

*Relevance.* Delta-type machine tools with parallel kinematics provide a minimal moving mass of the mechanism, achieve ultra-high accelerations, and maintain high structural stiffness throughout the workspace. Due to these advantages, they are a promising basis for milling, drilling, and additive manufacturing operations, which makes the improvement of their mathematical models and control systems highly relevant.

*Scientific novelty.* A comprehensive study of the kinematic dependencies of the Linear Delta machine tool was conducted, for which exact analytical solutions of the inverse kinematics problem were formulated, eliminating the need for numerical iterative methods. The regularities of the influence of geometric parameters on the size and shape of the workspace were established, and the nonlinear nature of horizontal and circular movements was proven.



*Keywords:* machine tool with parallel kinematics, Delta mechanism, Linear Delta, workspace, kinematics problems.

ЗМІСТ

ВСТУП ..... 8

РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ТЕХНОЛОГІЧНОГО ОБЛАДНАННЯ З ПАРАЛЕЛЬНОЮ КІНЕМАТИКОЮ ..... 10

1.1. Технологічне обладнання з паралельною кінематикою ..... 10

1.1.1 Загальні відомості ..... 10

1.1.2. Порівняння з обладнанням послідовної кінематики ..... 11

1.2. Технологічне обладнання типу «Дельта» ..... 14

1.3. Конструктивні різновиди механізмів Дельта ..... 17

1.3.1. Дельта з поворотними ланками (Rotary Delta) ..... 17

1.3.2. Дельта з повзунами на лінійних напрямних (Linear Delta) ... 17

1.3.3. Порівняння двох конфігурацій ..... 19

1.4. Існуючі моделі Дельта та їх реалізації ..... 20

1.5. Галузі застосування Дельта-обладнання ..... 24

1.6. Мета і задачі досліджень ..... 26

РОЗДІЛ 2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА ПРОЄКТУВАННЯ ВЕРСТАТА 27

2.1. Опис конструкції досліджуваного верстата ..... 27

2.1.1. Вибір конфігурації та загальна архітектура ..... 27

2.1.2. Геометричні параметри та система координат ..... 28

2.2. Математична модель кінематики ..... 30

2.2.1. Зворотна задача кінематики (Inverse Kinematics) ..... 30

2.2.2. Пряма задача кінематики (Forward Kinematics) ..... 35

РОЗДІЛ 3 РОБОЧИЙ ПРОСТІР ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОСНОВНИХ РУХІВ. 39

3.1. Робочий простір верстата типу «Лінійна дельта» («Linear Delta») .. 39

3.1.1. Робочий простір обладнання з паралельною кінематикою ... 39

3.1.2. Форма та геометричні характеристики робочого простору .. 40

3.1.3. Вплив геометричних параметрів на робочий простір ..... 41

3.2. Побудова робочого простору ..... 43
3.2.1. Алгоритм обчислення меж робочого простору ..... 43
3.2.2. Параметри верстата для дослідження ..... 44
3.2.3. Аналіз перерізів робочого простору ..... 45
3.3. Дослідження рухів уздовж координатних осей ..... 48
3.3.1. Рух уздовж вертикальної осі Z ..... 48
3.3.2. Рух уздовж горизонтальної осі X ..... 50
3.3.3. Рух уздовж горизонтальної осі Y ..... 53
3.4. Дослідження кругового руху виконавчого органу ..... 55
3.5. Узагальнений аналіз отриманих результатів ..... 58
3.5.1. Характер залежностей керуючих координат від положення виконавчого органу ..... 58
3.5.2. Особливості вертикального розподілу кінематичних властивостей ..... 59
3.5.3. Практичні рекомендації щодо використання робочого простору ..... 59

РОЗДІЛ 4 ЕКОНОМІЧНЕ ОБГРУНТУВАННЯ ДОЦІЛЬНОСТІ ВПРОВАДЖЕННЯ ВЕРСТАТІВ З ПАРАЛЕЛЬНОЮ КІНЕМАТИКОЮ ТИПУ «ДЕЛЬТА» ..... 61
4.1. Загальні вихідні дані ..... 61
4.2 Визначення експлуатаційних витрат, які припадають на одиницю продукції в базовому та проектному варіантах ..... 62
4.3 Розрахунок показників економічної ефективності ..... 67
ВИСНОВКИ ..... 70
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ..... 71

# ВСТУП

**Актуальність теми.** Розвиток сучасного виробництва нерозривно пов’язаний із необхідністю підвищення продуктивності, універсальності та надійності технологічного обладнання. Незважаючи на швидке вдосконалення цифрових технологій, загальна ефективність виробничих процесів значною мірою залежить саме від технічних можливостей апаратної частини. У зв’язку з цим удосконалення верстатного обладнання залишається одним із ключових напрямів розвитку промисловості.

Більшість традиційних верстатів базуються на послідовній кінематичній структурі, у якій кожна наступна ланка разом із приводами навантажує попередню. Це призводить до зниження жорсткості конструкції та накопичення похибок у процесі руху. На відміну від таких систем, паралельні механізми забезпечують значно кращі кінематичні та динамічні характеристики. У подібних конструкціях рухома платформа з’єднується з нерухомою основою кількома незалежними кінематичними ланцюгами, завдяки чому навантаження розподіляється між ними більш рівномірно. Розміщення приводів на нерухомій частині механізму дозволяє мінімізувати рухомі маси системи, що забезпечує дуже високі прискорення – до 50g – та значну швидкодію. Додатковою перевагою є відсутність накопичення похибок уздовж кінематичного ланцюга, що позитивно впливає на точність позиціонування.

Особливу увагу серед паралельних механізмів привертають верстати типу «Дельта», зокрема їхня модифікація з лінійними напрямними – Linear Delta. Використання паралелограмних механізмів дає можливість обмежити рух платформи лише трансляційними ступенями свободи, що істотно спрощує побудову алгоритмів керування та планування траєкторій. Вертикальне розміщення лінійних напрямних полегшує моделювання робочого простору, а симетрична конструкція робить такі системи перспективними для виконання операцій фрезерування, свердління та адитивного виробництва. Саме тому

дослідження кінематичних особливостей, робочого простору та методів оптимізації керування верстатами типу Linear Delta є актуальним науково-технічним завданням.

**Метою роботи** є дослідження верстата з паралельною кінематикою типу «Дельта».

Для досягнення мети дослідження було вирішено такі задачі:

- проаналізовано існуючі схеми побудови обладнання з паралельною кінематикою типу «Дельта»;
- виконано постановку і розв’язок прямої та зворотної задач кінематики для компоновки типу Linear Delta і визначено її кінематичні залежності;
- досліджено та виконано моделювання робочого простору, а також проаналізовано рухи виконавчого органу в його межах;
- розраховано техніко-економічні показники доцільності впровадження верстатів з паралельною кінематикою типу «Дельта».

**Елементи наукової новизни роботи:** здійснено комплексне дослідження кінематичних залежностей верстата типу Linear Delta, для якого сформульовано точні аналітичні розв’язки зворотної задачі кінематики, що усуває потребу у числових ітераційних методах. Встановлено закономірності впливу геометричних параметрів на розміри та форму робочого простору, а також доведено нелінійний характер горизонтальних та кругових рухів виконавчого органу.

**Об’єкт дослідження:** верстати з паралельною кінематикою типу «Дельта».

**Предмет дослідження:** конструктивні залежності, кінематичні параметри та робочий простір верстата з паралельною кінематикою типу Linear Delta

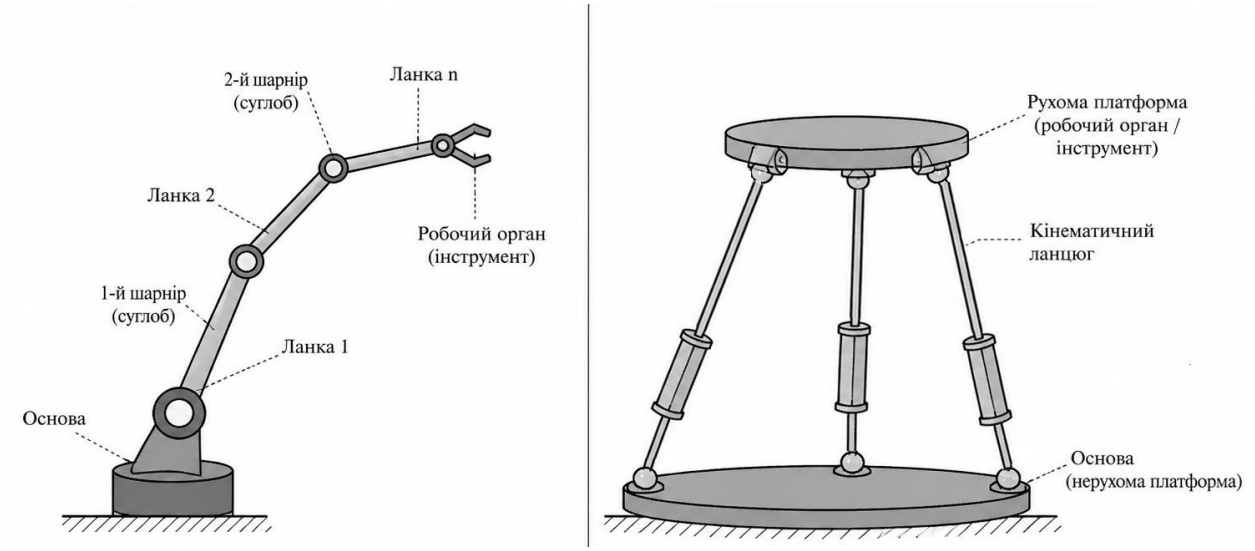
.

# РОЗДІЛ 1
# ОГЛЯД ТЕХНОЛОГІЧНОГО ОБЛАДНАННЯ З ПАРАЛЕЛЬНОЮ КІНЕМАТИКОЮ

## 1.1. Технологічне обладнання з паралельною кінематикою

### 1.1.1. Загальні відомості

Сучасне технологічне обладнання для механічної обробки, складання та інших виробничих операцій традиційно будувалося на принципі послідовної кінематики — кожна наступна ланка спирається на попередню і приводи розташовані на кожній кінематичній ланці (рис. 1.1., а). Починаючи з 1960-х років у робототехніці та верстатобудуванні почали розвиватись альтернативні схеми — механізми з паралельною кінематикою (МПК), в яких рухома платформа (виконавчий орган) з'єднана з нерухомою основою кількома незалежними кінематичними ланцюгами одночасно (рис. 1.1, б) [4, 10].




а) б)

Рис. 1.1. Порівняння кінематичних структур: а) послідовний маніпулятор (ланки з'єднані в ланцюжок); б) паралельний механізм (рухома платформа підтримується кількома ланцюгами)

Концепція паралельної кінематики побудови рухомих механізмів відома ще з XVIII–XIX ст., однак інтерес до неї як до основи технологічного обладнання суттєво зріс у другій половині XX ст. — насамперед через розвиток авіаційних тренажерів, де потрібна висока жорсткість платформи при значних динамічних навантаженнях.

Механізм з паралельною кінематикою в загальному вигляді складається з наступних елементів:

– нерухомої основи (станини) — рами або корпусу, до якого кріпляться приводи;

– рухомої платформи (виконавчого органу) — елемента, який несе робочий орган (інструмент, захват тощо);

– кінематичних ланцюгів — кількох незалежних ланцюгів, що з’єднують платформу з основою та передають рух;

– приводів — двигунів, встановлених на нерухомій основі.

Кількість кінематичних ланцюгів, тип кінематичних пар і характер приводів визначають число ступенів свободи механізму та його кінематичні можливості. Найпоширеніші конфігурації мають три або шість ланцюгів і забезпечують три (лінійні) або шість (три лінійні та три обертання) ступенів свободи рухомої платформи.

### 1.1.2. Порівняння з обладнанням послідовної кінематики

Традиційні верстати та маніпулятори з послідовною кінематикою мають добре вивчену структуру: кожний привід керує відповідним з’єднанням у ланцюзі, а положення виконавчого органу визначається як сума переміщень усіх ланок. Це зумовлює відносну простоту математичної моделі та алгоритмів керування. Водночас у послідовних структурах кожна проміжна ланка несе масу всіх наступних ланок разом із приводами, що знижує жорсткість і точність і призводить до накопичення похибок вздовж усього ланцюга.

В механізмах з паралельною кінематикою навантаження розподіляється між усіма ланцюгами одночасно. Оскільки приводи закріплені на нерухомій основі, рухома маса системи мінімальна — це безпосередньо впливає на динамічні характеристики: прискорення, швидкодію та точність відпрацювання траєкторій. Жорсткість паралельного механізму в робочій точці, як правило, значно вища, ніж у послідовних аналогів з тією ж вантажопідйомністю [4, 21, 29].

Таблиця 1.1

Порівняльна характеристика послідовної та паралельної кінематики

| Характеристика | Послідовна кінематика | Паралельна кінематика |
|---|---|---|
| Розподіл навантаження | Послідовне — кожна ланка несе все | Паралельне — між усіма ланцюгами |
| Маса рухомих частин | Значна (приводи на ланках) | Мала (приводи на основі) |
| Жорсткість конструкції | Знижується зі збільшенням вильоту | Висока у всій робочій зоні |
| Швидкодія / прискорення | Обмежена інерцією ланок | Висока завдяки малій рухомій масі |
| Робочий простір | Великий, простої форми | Обмежений, як правило симетричний, складної форми |
| Математична модель | Відносно проста (пряма задача) | Складна (зворотна задача частіше аналітична, пряма — числова) |
| Накопичення похибок | Є, вздовж ланцюга | Мінімальне |

Переваги механізмів з паралельною кінематикою

**Висока жорсткість.** Оскільки рухома платформа підтримується кількома ланцюгами одночасно, конструкція є значно жорсткішою, ніж послідовний маніпулятор. Жорсткість паралельного механізму визначається сумарним внеском усіх ланцюгів, а не лише найслабшою ланкою (як у послідовних структурах). Це робить МПК привабливими для задач механічної обробки, де потрібно витримувати значні сили різання.

**Висока швидкодія та прискорення.** Завдяки тому, що приводи розташовані на нерухомій основі, рухома маса системи мінімальна. Це дозволяє досягати прискорень виконавчого органу до 50g, що є неможливим для більшості послідовних маніпуляторів.

**Точність.** Відсутність накопичення похибок вздовж кінематичного ланцюга, висока жорсткість і мала рухома маса позитивно позначаються на точності позиціонування. Деформації та зазори в з’єднаннях одного ланцюга не передаються безпосередньо на інші ланцюги в тій же мірі, що й у послідовних механізмах.

**Розподіл навантаження.** Сили, що діють на виконавчий орган (від різання, ваги вантажу тощо), розподіляються між усіма ланцюгами. Це дозволяє використовувати менш потужні приводи порівняно з послідовними аналогами тієї ж вантажопідйомності.

Недоліки механізмів з паралельною кінематикою

**Обмежений робочий простір.** Рухома платформа може переміщуватись лише в межах, визначених довжиною ланок та кутовими обмеженнями шарнірів. Робочий простір МПК, як правило, суттєво менший за робочий простір послідовних маніпуляторів з аналогічними розмірами конструкції, і має складну непостійну форму.

**Складність математичного апарату.** Пряма задача кінематики (визначення положення виконавчого органу за керуючими координатами) для більшості паралельних механізмів не має простого аналітичного розв’язку і вимагає числових методів. Зворотна задача (знаходження керуючих координат за заданим положенням виконавчого органа), навпаки, часто допускає аналітичне вирішення — проте є значно складнішою, ніж для послідовних структур.

**Сингулярності.** У певних конфігураціях паралельний механізм може втрачати жорсткість або набувати додаткових ступенів свободи — це так звані сингулярні положення. Вони потребують ретельного аналізу при проєктуванні та повинні виключатися з робочого простору або обходитися при плануванні траєкторій.

**Складність виготовлення та обслуговування.** Точне виготовлення шарнірів (зокрема просторових — карданних, сферичних) є технологічно складнішим завданням, ніж виготовлення простих обертальних пар. Похибки виготовлення шарнірів безпосередньо впливають на точність позиціонування всього механізму.

## 1.2. Технологічне обладнання типу «Дельта»

Механізм типу «Дельта» був розроблений у 1985 році швейцарським інженером та науковцем Раймоном Клавелем (Reymond Clavel) у Федеральній політехнічній школі Лозанни (EPFL) (рис. 1.2). На створення робота Клавеля надихнуло спостереження за ручним пакуванням шоколаду на швейцарській фабриці та прагнення полегшити повторювану працю за допомогою автоматизації.

Ключовою інновацією Клавеля стало використання паралелограмних ланцюгів, які обмежують рух рухомої платформи виключно трансляційними ступенями свободи — платформа не обертається відносно жодної осі, зберігаючи незмінну орієнтацію. Перший патент на механізм Дельта був

виданий у 1990 році. Надалі конструкція отримала широке промислове поширення завдяки своїм унікальним кінематичним властивостям.

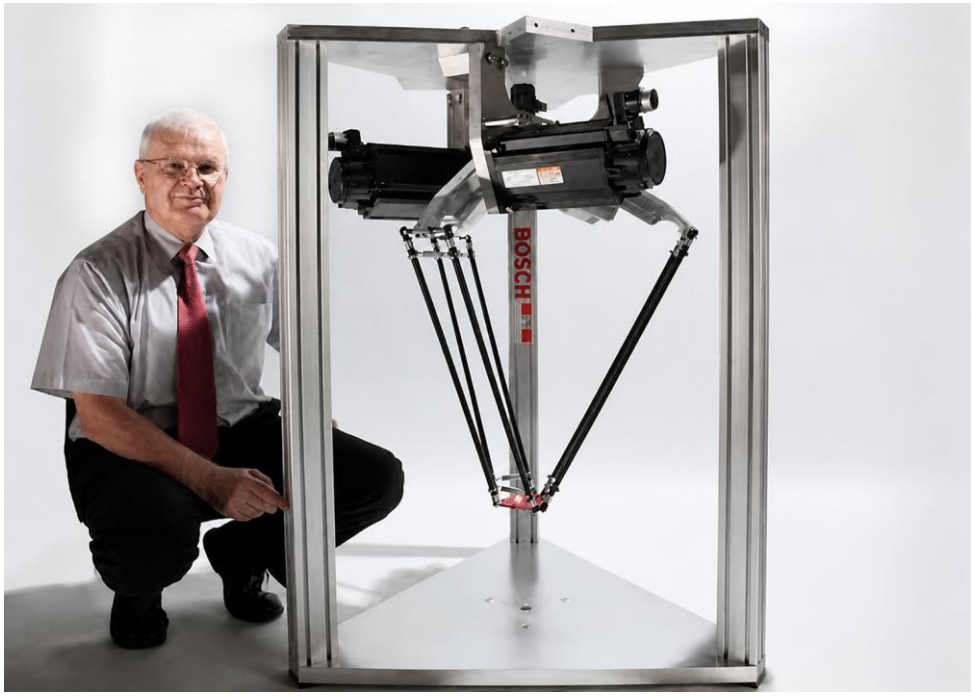



Рис. 1.2. Раймон Клавель з роботом «Дельта»

У 1990-х роках механізм Дельта був комерціалізований компанією Demaurex (Швейцарія), а згодом ліцензований ряду великих виробників промислової робототехніки. Сьогодні Дельта-роботи є стандартним обладнанням у харчовій, фармацевтичній та електронній промисловості.

Класичний механізм Дельта складається з нерухомої верхньої основи (зазвичай трикутної або кругової форми), трьох активних ланок (плечей), трьох паралелограмних пасивних ланцюгів (передпліч) та рухомої нижньої платформи (виконачого органу) (рис. 1.3) [4].

Три приводи встановлено на нерухомій основі та повертають відповідні кінематичні ланки. Кожна активна ланка через пару паралельних стержнів (паралелограм) з’єднана з рухомою платформою сферичними або карданними шарнірами. Геометрія паралелограма є ключовою — саме вона забезпечує те, що рухома платформа завжди залишається паралельною до нерухомої основи, незалежно від положення виконавчого органу в просторі.

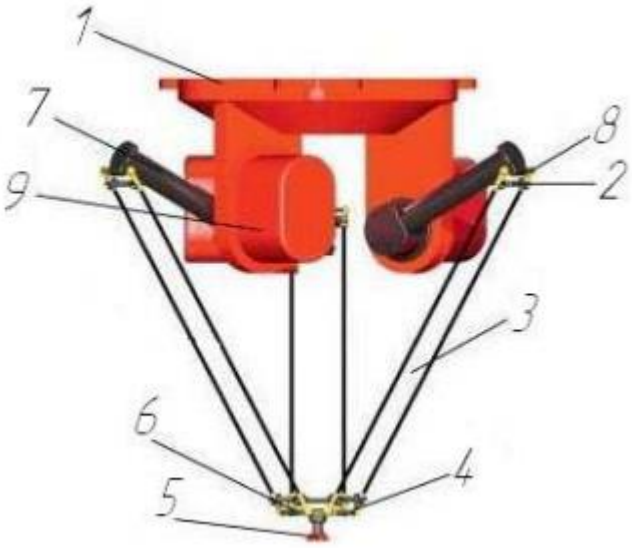



Рис. 1.3. Кінематична схема механізму Дельта з поворотними ланками: 1 – нерухома платформа; 2 – пружина; 3 – паралелограм; 4 – кульовий шарнір; 5 – робочий орган; 6 – рухома платформа; 7 – штанга; 8 – кульовий шарнір; 9 – двигун

Таким чином, рухома платформа механізму Дельта в класичній конфігурації має три ступені свободи — переміщення вздовж осей X, Y та Z.

Механізм Дельта займає особливе місце серед паралельних механізмів завдяки ряду специфічних конструктивних рішень.

На відміну від більшості паралельних механізмів (зокрема, платформи Стюарта–Гофа), Дельта забезпечує лише лінійні ступені свободи без обертання платформи. Це суттєво спрощує алгоритми планування траєкторій та керування орієнтацією виконавчого органу.

Паралелограмна конструкція кінематичної ланки — унікальна особливість механізму Дельта, яка реалізує кінематичне обмеження на обертання платформи без використання додаткових зв’язків. Це конструктивне рішення підвищує жорсткість і спрощує аналіз кінематики.

Всі три приводи розташовані на нерухомій основі, що мінімізує рухому масу та дозволяє досягати надвисоких прискорень виконачого органа.

Три ланцюги рівномірно розподілені під кутом 120° навколо вертикальної осі, що забезпечує кінематичну симетрію у горизонтальній площині.

## 1.3. Конструктивні різновиди механізмів Дельта

### 1.3.1. Дельта з поворотними ланками (Rotary Delta)

У класичній конфігурації Дельта (Rotary Delta або RD) (рис. 1.3) приводами є обертальні двигуни — серводвигуни або крокові двигуни з редукторами — встановлені на нерухомій основі. Кожен двигун повертає активну ланку (плече) відносно горизонтальної (або злегка нахиленої) осі. Пасивне передпліччя утворене двома паралельними стержнями, з'єднаними з плечем та рухомою платформою через сферичні шарніри.

Геометрія механізму визначається такими параметрами:

– радіус нерухомої основи R (відстань від центру до точки кріплення плеча);

– радіус рухомої платформи r (відстань від центру до точки кріплення передпліччя);

– довжина активної ланки (плеча) $L_1$;

– довжина пасивного передпліччя (стержнів паралелограма) $L_2$.

Ці чотири параметри повністю визначають кінематику механізму та форму його робочого простору. Зміна їх співвідношення дозволяє оптимізувати конструкцію для конкретних вимог до робочого простору, швидкодії та вантажопідйомності.

### 1.3.2. Дельта з повзунами на лінійних напрямних (Linear Delta)

У конфігурації Linear Delta (LD) обертальні приводи замінені лінійними кінематичними ланками — кожна активна ланка являє собою повзун, що

переміщується вздовж вертикальної або нахиленої лінійної напрямної. Рухома платформа з’єднана з повзунами через паралелограмні ланцюги з кульовими шарнірами, аналогічно класичній Дельта (рис. 1.4).

У типовій конфігурації три вертикальні колони рівномірно розподілені навколо центральної осі конструкції під кутом 120° одна до одної. На кожній колоні розміщено лінійну напрямну з повзунами, а від кожного повзуна відходять дві паралелограмні тяги, що з’єднуються з рухомою платформою.

Геометрія лінійного Дельта визначається такими параметрами:

– радіус розташування колон Rc (відстань від центральної осі до колони);

– радіус рухомої платформи r (відстань від центру до точки кріплення тяги);

– довжина тяг (стержнів паралелограма) L;

– хід повзуна по напрямній (визначає діапазон переміщення по осі Z).

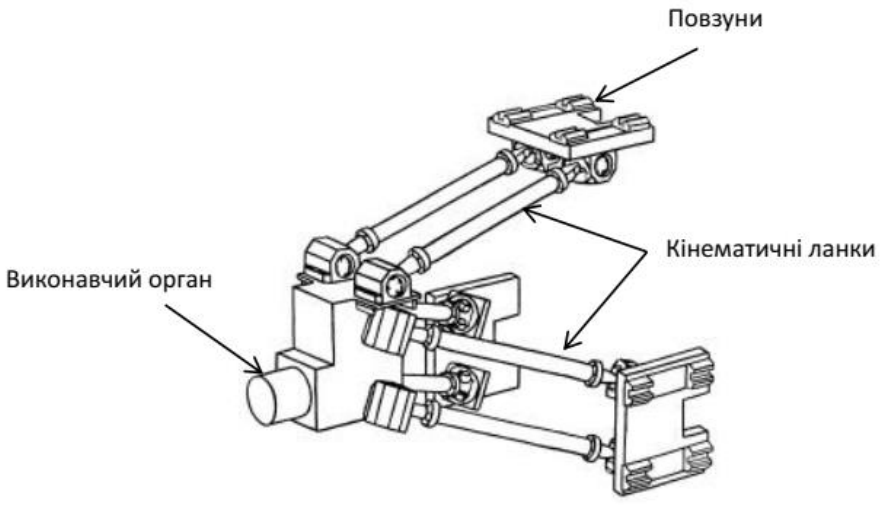



Рис. 1.4. Конструктивна схема Дельта з лінійними повзунами

Конфігурація Linear Delta широко поширена в 3D-принтерах завдяки простоті конструкції, можливості використання дешевих лінійних приводів (ременні передачі, гвинтові пари) та компактному вертикальному компонуванню.

### 1.3.3. Порівняння двох конфігурацій

Обидві конфігурації реалізують один і той же кінематичний принцип — паралелограмний обмежувач обертання платформи — але відрізняються типом приводного руху та конструктивним компонуванням.

Таблиця 1.2

Порівняння конфігурацій Rotary Delta та Linear Delta

| Характеристика | Rotary Delta | Linear Delta |
|---|---|---|
| Тип приводу | Обертальний (сервомотор) | Лінійний (рейка, ремінь, гвинт) |
| Компонування | Горизонтальні приводи на верхній основі | Вертикальні колони по периметру |
| Швидкодія | Дуже висока (до 300 цикл/хв і більше) | Висока, обмежена масою повзунів |
| Точність | Висока | Висока (залежить від точності лінійних напрямних) |
| Форма робочого простору | Куполоподібна | Циліндрична (вертикальні бічні стінки) |
| Вантажопідйомність | Зазвичай до 3–15 кг | Зазвичай до 0.5–5 кг |
| Застосування | Промислові роботи, Pick&Place | 3D-принтери, легкі верстати |
| Складність конструкції | Вища (точні сферичні шарніри) | Нижча (стандартні лінійні напрямні) |

З точки зору кінематичного аналізу, обидві конфігурації описуються схожими рівняннями — відмінність полягає у визначенні керуючих координат: для Rotary Delta — це кути повороту плечей ($\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$), для Linear Delta — це положення повзунів уздовж напрямних ($d_1$, $d_2$, $d_3$).

## 1.4. Існуючі моделі Дельта та їх реалізації

Механізм Дельта знайшов широке застосування в промисловій робототехніці. Провідні виробники промислових роботів випускають власні моделі на основі Дельта-кінематики.

**ABB IRB 360 FlexPicker** (рис. 1.5). Один з найвідоміших промислових Дельта-роботів. Максимальна вантажопідйомність — до 8 кг, діаметр робочої зони — до 1600 мм. Призначений для пакувальних ліній харчової та фармацевтичної промисловості.




Рис. 1.5. Дельта-робот ABB IRB 360 FlexPicker

**Fanuc M-1iA та M-2iA** (рис. 1.6). Серія компактних pick-and-place роботів японського виробника Fanuc. Модель M-1iA має вантажопідйомність 0,5 кг, M-2iA — до 3 кг. Обидві моделі можуть мати від 4 до 6 ступенів свободи завдяки додатковому приводу обертання захвату. Призначені для складання мікроелектроніки, харчових продуктів та інших дрібних виробів.




а) б)

Рис. 1.6. Дельта-роботи Fanuc M-1iA (а) та M-2iA (б)

**Adept Quattro** (рис. 1.7). Чотириланковий варіант Дельта-робота виробництва компанії Adept Technology (США). Конструкція з чотирма ланцюгами забезпечує підвищену жорсткість та вантажопідйомність (до 15 кг) при збереженні високої швидкодії.




Рис. 1.7. Чотириланковий дельта-робот **Adept Quattro**

Конфігурація Linear Delta отримала найширше поширення саме в сфері адитивного виробництва — настільних та промислових FDM (Fused Deposition Modeling) 3D-принтерів. Перевагами для цього застосування є вертикальна орієнтація конструкції (зручна для друку), висока симетрія, простота механіки та помірна вартість.

Rostock (RepRap проєкт, 2012) (рис. 1.8). Перший широко відомий Linear Delta 3D-принтер з відкритою конструкцією, розроблений Йоганном Рокседі (Johann C. Rocholl). Послугував основою для численних похідних конструкцій у середовищі RepRap (спільнота розробників відкритих 3D-принтерів).

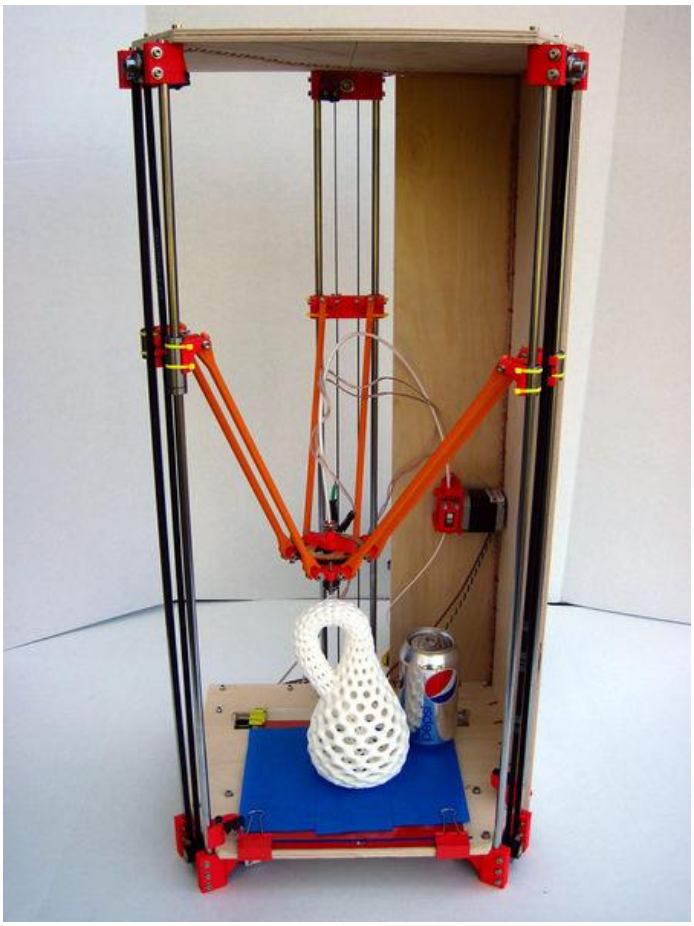


Рис. 1.9. Linear Delta 3D-принтер з відкритою конструкцією Rostok

Kossel та Mini Kossel (рис. 1.10). Вдосконалена версія Rostock з алюмінієвим профільним каркасом. Стала де-факто стандартом конструкції для DIY-спільноти. Широко тиражується виробниками з Китаю та Європи.



Рис. 1.10. Дельта 3D-принтер Kossel

Anycubic Kossel (рис. 1.11), FLSUN та інші комерційні моделі. Численні виробники випускають комерційні Delta-принтери на базі Linear Delta кінематики, орієнтовані на масовий ринок.




Рис. 1.11. 3D-принтер Anycubic Kossel Plus

Промислові Delta-принтери (рис. 1.12). Ряд компаній (наприклад, SeeMeCNC, DeltaWASP та інші) випускають великоформатні Delta-принтери для промислового застосування з областю друку діаметром до 400–600 мм та висотою 500–1000 мм.

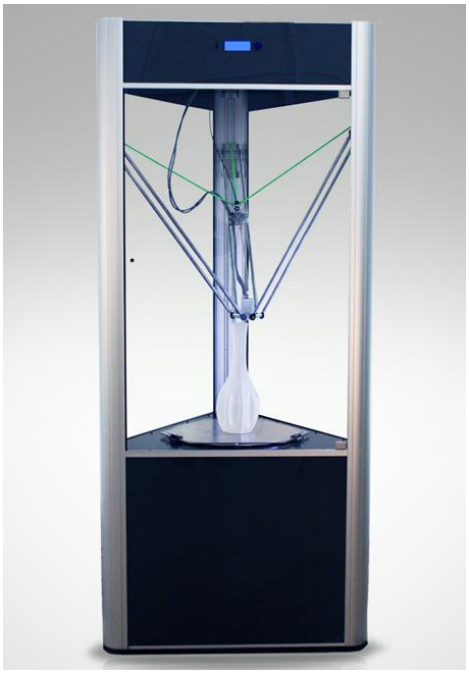


Рис. 1.12. DeltaWASP 4070

## 1.5. Галузі застосування Дельта-обладнання

### Харчова та фармацевтична промисловість

Харчова та фармацевтична промисловість є основними галузями промислового застосування Дельта-роботів. Цьому сприяють кілька факторів: необхідність надвисокої швидкості перекладання дрібних виробів (цукерки, таблетки, ампули, капсули), відносно невелика вантажопідйомність, потреба у гігієнічному виконанні та можливість промивання водою або дезінфікуючими розчинами.

Типові операції в цих галузях: сортування та упорядкування продуктів на конвеєрній лінії; завантаження в первинну упаковку (лотки, блістери,

коробки); переміщення між конвеєрами; контроль якості в поєднанні зі системами машинного зору.

Вимоги до санітарного виконання (IP67 і вище, матеріали з харчового дозволу, відсутність важкодоступних для очищення порожнин) стали стимулом для розробки спеціалізованих гігієнічних версій Дельта-роботів.

Електроніка та мікроскладання

В електронній промисловості Дельта-роботи застосовуються для операцій SMD-монтажу (Surface Mount Device), точного позиціонування мікрокомпонентів, складання оптичних систем. Для цих застосувань ключовою вимогою є точність позиціонування — зазвичай ±0,05...0,1 мм або краще — при збереженні прийнятної швидкодії.

Спеціалізовані Дельта-маніпулятори для мікроскладання мають збільшені передаточні числа та підвищену жорсткість конструкції. В ряді випадків додається четвертий ступінь свободи (обертання захвату навколо вертикальної осі) для орієнтації мікрокомпонентів.

Адитивне виробництво та механообробка

В адитивному виробництві (3D-друк) конфігурація Linear Delta, як зазначалось, набула широкого поширення в настільних принтерах. Переваги — компактне вертикальне компонування, відносна простота конструкції та відносно великий робочий об’єм при помірних габаритах конструкції.

В сфері механообробки паралельні механізми типу Дельта перспективні для фрезерування та свердління — де висока жорсткість і мала рухома маса забезпечують відмінну динамічну стабільність. Проте широкого промислового впровадження у цій галузі вони поки не набули — переважно через складність програмування та менший робочий простір порівняно з традиційними верстатами.

Серед перспективних напрямків — гібридні установки, де механізм Дельта виконує функцію паралельного вузла з великою жорсткістю, а додаткові послідовні вузли забезпечують орієнтацію інструменту. Такі рішення поєднують переваги обох підходів.

Інші галузі

Механізми Дельта знаходять застосування і в інших сферах. В медичній робототехніці паралельна кінематика використовується для хірургічних маніпуляторів та систем доставки мікроінструментів завдяки точності та компактності. У наукових установках механізми Дельта застосовуються як платформи для прецизійного позиціонування оптичних систем, детекторів та вимірювальних приладів. В авіаційній промисловості (складання фюзеляжів, обробка панелей) великогабаритні паралельні механізми використовуються для позиціонування обробних агрегатів.

## 1.6. Мета і задачі досліджень

Метою роботи є дослідження верстата з паралельною кінематикою типу «Дельта».

Для досягнення мети дослідження було вирішено такі задачі:

- проаналізовано існуючі схеми побудови обладнання з паралельною кінематикою типу «Дельта»;
- виконано постановку і розв’язок прямої та зворотної задач кінематики для компоновки типу Linear Delta і визначено її кінематичні залежності;
- досліджено та виконано моделювання робочого простору, а також проаналізовано рухи виконавчого органу в його межах;
- розраховано техніко-економічні показники доцільності впровадження верстатів з паралельною кінематикою типу «Дельта».

# ЧАСТИНА 2
# МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА ПРОЄКТУВАННЯ ВЕРСТАТА

## 2.1. Опис конструкції досліджуваного верстата

### 2.1.1. Вибір конфігурації та загальна архітектура

В даній роботі досліджується верстат з паралельною кінематикою типу «Дельта» в конфігурації з лінійними повзунами (Linear Delta) (рис. 2.1). Така компоновка обрана з таких міркувань: вертикальне розташування трьох лінійних напрямних забезпечує просте моделювання робочого простору; лінійні приводи (кулькогвинтові пари або ременні передачі) добре піддаються точному позиціонуванню; конструкція є симетричною відносно вертикальної осі, що спрощує математичну модель; верстати цього типу є перспективними для фрезерування, свердління та адитивного виробництва.

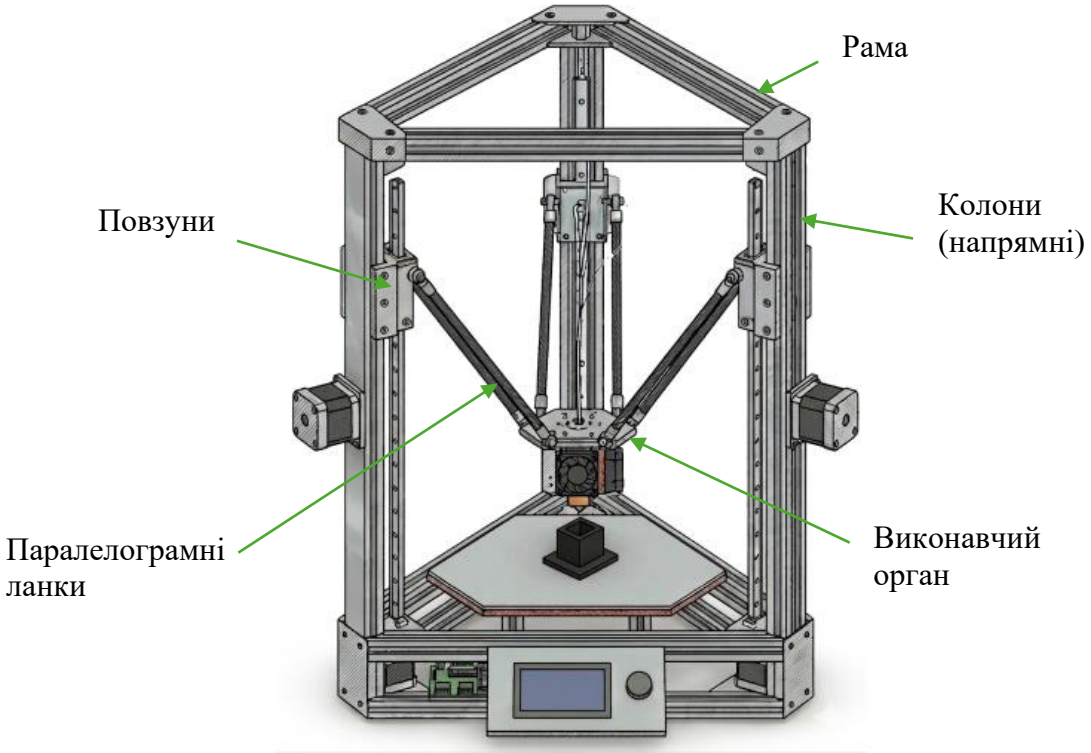



Рис. 2.1. Верстат з паралельною кінематикою типу «Linear Delta»

Загальна архітектура верстата включає такі основні складові [4, 23, 24]:

– нерухома рама (станина) — жорстка конструкція, як правило трикутного або кругового перерізу у плані, на якій монтуються три вертикальні колони;

– три вертикальні колони — лінійні напрямні (рейки або шліцьові вали), розташовані вертикально і рівномірно розподілені навколо центральної осі під кутом 120° одна до одної;

– три повзуни (каретки) — рухомі елементи, що переміщуються вздовж відповідних колон; кожна каретка з'єднана з власним приводом (серводвигун та кулькогвинтова пара або ременна передача);

– три паралелограмні ланки (важелі) — кожна ланка складається з двох паралельних стрижнів однакової довжини $L$, з'єднаних з повзуном та рухомою платформою через кульові шарніри;

– рухома платформа (виконавчий орган, ефектор) — центральний елемент, до якого кріпиться робочий орган (фрезерний шпиндель, свердло, екструдер тощо); платформа зберігає незмінну орієнтацію завдяки паралелограмним ланцюгам.

### 2.1.2. Геометричні параметри та система координат

Для математичного опису кінематики верстата введемо систему координат та визначимо геометричні параметри конструкції.

Нерухома система відліку OXYZ розміщується в центрі рами верстата: вісь OZ направлена вертикально вгору, площина XOY — горизонтальна. Початок координат O розташований у центрі рівностороннього трикутника, вершини якого збігаються з осями колон. При такому розміщенні конструкція верстата має тривісну симетрію відносно осі OZ.

Геометричні параметри верстата Linear Delta (рис. 2.2):

Радіус колон $Rc$ — відстань від осі верстата до осі кожної колони.

Радіус платформи $r$ — Відстань від центру рухомої платформи до точки кріплення важеля

Довжина важелів $L$ — Довжина кожного зі стрижнів паралелограмного важеля

Хід каретки $H$ — Довжина активної ділянки лінійної напрямної (максимальне переміщення каретки)

Положення повзуна $z_i$ — Поточна вертикальна координата каретки (керуюча координата)

Положення виконавчого органа $(x_p, y_p, z_p)$ — Координати центру рухомої платформи (вихідна координата)

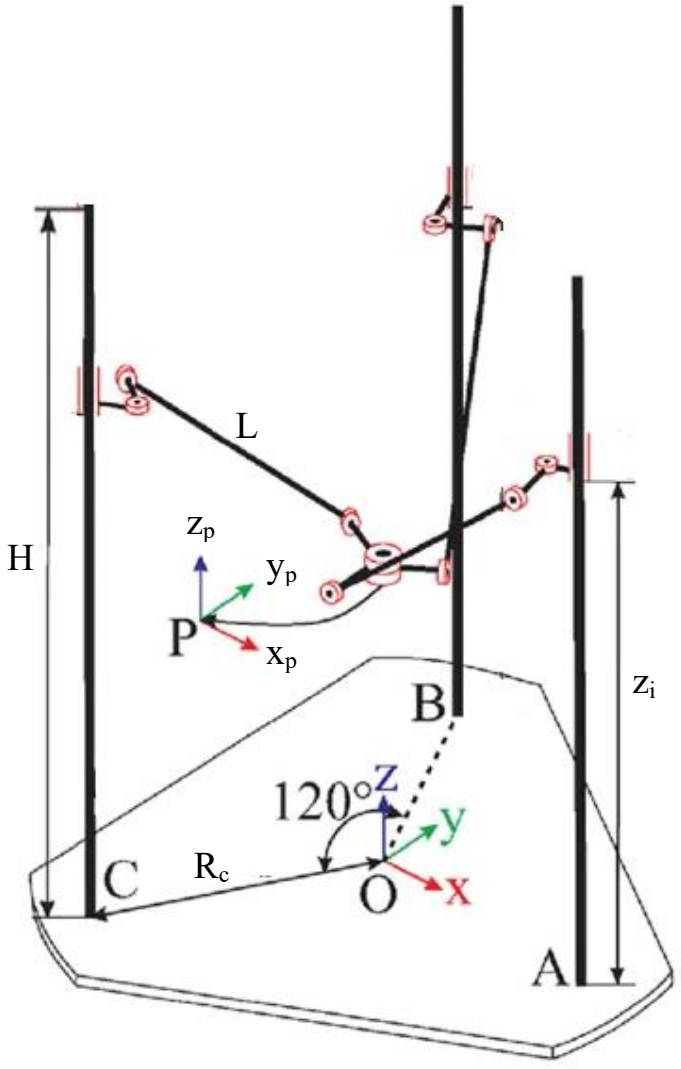



Рис. 2.2. Схема механізму Linear Delta

## 2.2. Математична модель кінематики

Математична модель кінематики верстата описує зв’язок між керуючими координатами (положеннями кареток) та положенням рухомої платформи (виконавчого органа) у просторі. Розрізняють два типи задач кінематичного аналізу.

Зворотна задача кінематики: за заданими координатами виконавчого органа (xp, yp, zp) знайти необхідні положення повзунів ($z_1$, $z_2$, $z_3$). Ця задача розв’язується при плануванні траєкторій та керуванні верстатом у реальному часі.

Пряма задача кінематики: за відомими положеннями повзунів ($z_1$, $z_2$, $z_3$) знайти положення виконавчого органа (xp, yp, zp). Ця задача є важливою для контролю положення та калібрування верстата.

### 2.2.1. Зворотна задача кінематики (Inverse Kinematics)

Зворотна задача кінематики (ЗЗК) є базовим елементом математичного забезпечення систем керування верстатів із паралельною кінематикою, оскільки вона визначає функціональний зв’язок між траєкторією робочого органа у декартовому просторі та керуючими впливами на приводи [4]. При відпрацюванні будь-якої просторової траєкторії рухомої платформи (виконавчого органу) система керування в реальному часі повинна з високою частотою обчислювати відповідні координати повзунів. Це висуває жорсткі вимоги до обчислювальної складності алгоритму.

Для кінематичної структури «лінійна дельта» зворотна задача кінематики має точне аналітичне рішення. Це є суттєвою перевагою цієї компоновки, оскільки дозволяє уникнути числових ітераційних методів, мінімізувати затримки в контурі керування та забезпечити стабільну роботу системи.

**Вхідні дані для розрахунку:** задані координати центру рухомої платформи $(x_p, y_p, z_p)$ та незмінні геометричні параметри конструкції — радіус розташування колон $R_c$, радіус платформи $r$, довжина важелів $L$.

**Вихідні змінні:** необхідні вертикальні положення (керуючі координати) трьох повзунів $(z_1, z_2, z_3)$.

В основі математичної моделі лежить геометричне обмеження кожного з трьох кінематичних ланцюгів — умова постійності довжини паралелограмної кінематичної ланки $L$ (відстані між точкою кріплення до повзуна $A_i$ та точкою кріплення до платформи $B_i$):

$$|B_i - A_i|^2 = L^2, \quad i = 1,2,3$$

Для спрощення системи рівнянь введемо радіус верстата $R_e$:

$$R_e = R_c - r$$

Завдяки цьому підходу просторова задача з трьома параметрами зводиться до еквівалентної схеми з нульовим радіусом платформи. Базове нелінійне рівняння зв'язку для $i$-го ланцюга після розкриття векторної форми набуває вигляду:

$$x_p^2 + y_p^2 - 2R_e\left(x_p \cos\varphi_i + y_p \sin\varphi_i\right) + R_e^2 + \left(z_p - z_i\right)^2 = L^2 \qquad (2.1)$$

Кути розташування вертикальних колон у горизонтальній площині становлять $\varphi_1 = 90°$, $\varphi_2 = 210°$, $\varphi_3 = 330°$.

Для виведення явного виразу керуючої координати $z_i$ перетворимо рівняння (2.1):

$$\left(z_p - z_i\right)^2 = L^2 - x_p^2 - y_p^2 - R_e^2 + 2R_e\left(x_p \cos\varphi_i + y_p \sin\varphi_i\right)$$

Введемо узагальнений параметр $D_i$, який залежить виключно від поточної позиції виконавчого органу та незмінних параметрів механізму:

$$D_i = L^2 - x_p^2 - y_p^2 - R_e^2 + 2R_e\left(x_p \cos\varphi_i + y_p \sin\varphi_i\right)$$

Після взяття квадратного кореня отримуємо два математично можливих розв'язки для кожної координати:

$$z_i = z_p \mp \sqrt{D_i}, \quad i = 1,2,3$$

Знак «мінус» перед коренем відповідає теоретичній конфігурації, де повзуни розташовані нижче рівня рухомої платформи. Для реальних промислових та лабораторних верстатів типу Linear Delta стандартним є верхнє розташування приводів відносно виконавчого органу, що відповідає рішенню зі знаком «плюс»:

$$z_i = z_p + \sqrt{D_i}, \quad i = 1,2,3 \qquad (2.2)$$

Визначимо фіксовані значення тригонометричних функцій для кутів $\varphi_i$:

$$\cos 90^o = 0, \quad \sin 90^o = 1$$

$$\cos 210^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 210^o = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330^o = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 330^o = -\frac{1}{2}$$

Підставивши ці значення в (2.2) отримуємо фінальну систему аналітичних формул для зворотної задачі кінематики:

$$z_1 = z_p + \sqrt{L^2 - x_p^2 - y_p^2 - R_e^2 + 2R_e y_p}$$

$$z_2 = z_p + \sqrt{L^2 - x_p^2 - y_p^2 - R_e^2 - \sqrt{3}R_e x_p - R_e y_p}$$

$$z_3 = z_p + \sqrt{L^2 - x_p^2 - y_p^2 - R_e^2 + \sqrt{3}R_e x_p - R_e y_p}$$

Математичне рішення системи рівнянь ЗЗК існує тільки тоді, коли підкореневі вирази для всіх трьох ланцюгів невід'ємні:

$$D_i \geq 0, \quad i = 1,2,3$$

Фізичний та геометричний зміст цих умов визначає межі працездатності механізму:

1. Граничний стан ($D_i = 0$): відповідає положенню, в якому паралелограмні стрижні $i$-го ланцюга розпрямляються у вертикальну лінію. У цій точці механізм досягає локальної межі кінематичних можливостей.

2. Порушення умови ($D_i < 0$): свідчить про те, що задана декартова точка $(x_p, y_p, z_p)$ лежить поза геометричною досяжністю цього ланцюга. Виконавчий орган не може зайняти таку позицію без руйнування конструкції.

Сукупність усіх просторових точок, для яких одночасно виконується критерій $D_i \geq 0$, формує теоретичний робочий простір верстата.

Завдяки відсутності ітераційних процедур алгоритм легко піддається алгоритмізації та реалізації в мікроконтролерах систем ЧПК. Процедура обчислення складається з таких кроків:

Крок 1. Розрахунок константи ефективного радіуса:

$$R_e = R_c - r.$$

Крок 2. Обчислення інваріантного для всіх трьох рівнянь доданка:

$$K = L^2 - x_p^2 - y_p^2 - R_e^2.$$

Крок 3. Розрахунок дискримінантних функцій $D_1, D_2, D_3$ з урахуванням координат по осях $X$ та $Y$.

Крок 4. Програмна верифікація умови $D_i \geq 0$. Якщо хоча б одне значення менше нуля, генерація помилки «Точка поза робочим простором».

Крок 5. Обчислення цільових координат кареток:

$$z_i = z_p + \sqrt{D_i}.$$

Крок 6. Перевірка відповідності отриманих значень конструктивним обмеженням ходу напрямних: $z_i \in [z_{min}, z_{max}]$.

Для перевірки коректності моделі виконано тестовий числовий розрахунок при базових параметрах досліджуваного верстата ($R_c = 200$ мм, $r = 30$ мм, $L = 300$ мм, $R_e = 170$ мм). Результати моделювання наведено у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Результати тестового розрахунку

| Задане положення виконавчого орагана ($x_p$,$y_p$,$z_p$), мм | Координата $z_1$, мм | Координата $z_2$, мм | Координата $z_3$, мм | Перевірка умови $D_i \geq 0$ |
|---|---|---|---|---|
| (0, 0, -200) | 23,2 | 23,2 | 23,2 | Так (центральна симетрія) |
| (50, 0, -200) | -14,3 | 57,6 | -14,3 | Так |
| (0, 50, -200) | -49,1 | 66,1 | 66,1 | Так |
| (0, 0, -100) | 177,4 | 177,4 | 177,4 | Так |
| (0, 0, -350) | -203,3 | -203,3 | -203,3 | Потребує аналізу ходу направляючих |

Від’ємні значення $z_i$ означають, що повзуни опускаються нижче базової площини $z = 0$.

Математична точність отриманого аналітичного розв’язку перевірялася шляхом зворотної підстановки обчислених значень $z_i$ у початкові рівняння зв’язку.

### 2.2.2. Пряма задача кінематики (Forward Kinematics)

Пряма задача кінематики (ПЗК) є математично оберненою до зворотної задачі. Вона полягає у визначенні просторових декартових координат центру рухомої платформи (виконавчого органу) $(x_p, y_p, z_p)$ за відомими поточними положеннями повзунів $(z_1, z_2, z_3)$ [4].

У системах автоматичного керування та проектування верстатів типу «Linear Delta» розв'язок ПЗК є необхідним для виконання таких інженерних та дослідницьких завдань: калібрування геометричних параметрів; моніторинг поточних відхилень та похибок у реальному часі; побудова реальної траєкторії руху виконавчого органа при аналізі керуючих програм та відпрацюванні алгоритмів інтерполяції.

На відміну від зворотної задачі, яка має просту структуру, пряма задача кінематики для дельта-механізмів у загальному вигляді не має явного аналітичного розв'язку. Проте завдяки тривісній симетрії архітектури «Linear Delta», математичну модель вдається звести до системи трьох рівнянь із трьома невідомими.

Вихідною базою для розв'язання ПЗК є система рівнянь кінематичних обмежень, записана для кожного з трьох паралелограмних ланцюгів:

$$\left(x_p - R_e \cos\varphi_1\right)^2 + \left(y_p - R_e \sin\varphi_1\right)^2 + \left(z_p - z_1\right)^2 = L^2$$

$$\left(x_p - R_e \cos\varphi_2\right)^2 + \left(y_p - R_e \sin\varphi_2\right)^2 + \left(z_p - z_2\right)^2 = L^2$$

$$\left(x_p - R_e \cos\varphi_3\right)^2 + \left(y_p - R_e \sin\varphi_3\right)^2 + \left(z_p - z_3\right)^2 = L^2$$

Підставляючи в систему значення кутів розташування колони ($\varphi_1 = 90°$, $\varphi_2 = 210°$, $\varphi_3 = 330°$) та відповідні їм тригонометричні константи, отримуємо систему геометричних кінематичних зв'язків у розгорнутому вигляді:

$$x_p^2 + \left(y_p - R_e\right)^2 + \left(z_p - z_1\right)^2 = L^2 \tag{2.3}$$

$$\left(x_p + \frac{\sqrt{3}}{2}R_e\right)^2 + \left(y_p + \frac{1}{2}R_e\right)^2 + \left(z_p - z_2\right)^2 = L^2 \tag{2.4}$$

$$\left(x_p - \frac{\sqrt{3}}{2}R_e\right)^2 + \left(y_p + \frac{1}{2}R_e\right)^2 + \left(z_p - z_3\right)^2 = L^2 \tag{2.5}$$

Виконаємо алгебраїчне віднімання рівнянь. Послідовно розкриємо дужки у рівняннях (2.3) та (2.4):

$$x_p^2 + y_p^2 - 2R_e y_p + R_e^2 + \left(z_p - z_1\right)^2 = L^2 \tag{2.6}$$

$$x_p^2 + \sqrt{3}R_e x_p + \frac{3}{4}R_e^2 + y_p^2 + R_e y_p + \frac{1}{4}R_e^2 + \left(z_p - z_2\right)^2 = L^2 \tag{2.7}$$

Звівши подібні доданки у (2.7), маємо:

$$x_p^2 + y_p^2 + \sqrt{3}R_e x_p + R_e y_p + R_e^2 + \left(z_p - z_2\right)^2 = L^2 \tag{2.8}$$

Віднімаючи спрощене рівняння (2.8) від (2.6), виключаємо квадратичні члени $x_p^2$ та $y_p^2$:

$$-3R_e y_p - \sqrt{3}R_e x_p + \left(z_p - z_1\right)^2 - \left(z_p - z_2\right)^2 = 0 \tag{2.9}$$

Розкриваючи квадрати різниць вертикальних координат, отримуємо лінійну залежність відносно змінної $z_p$:

$$\left(z_p - z_1\right)^2 - \left(z_p - z_2\right)^2 = -2z_p(z_1 - z_2) + z_1^2 - z_2^2 =$$
$$= (z_2 - z_1)\left(2z_p - z_1 - z_2\right) \tag{2.10}$$

Підставивши вираз (2.10) у (2. 9) та розділивши всі члени на константу $R_e \neq 0$, формуємо перше лінійне рівняння зв’язку:

$$-\sqrt{3}x_p - 3y_p + \frac{1}{R_e}(z_2 - z_1)\left(2z_p - z_1 - z_2\right) = 0$$

Проводячи аналогічну математичну операцію віднімання рівнянь, отримуємо друге лінійне рівняння зв’язку:

$$\sqrt{3}x_p - 3y_p + \frac{1}{R_e}(z_3 - z_1)\big(2z_p - z_1 - z_3\big) = 0$$

Для оптимізації подальших розрахунків та структурування коду програмного забезпечення введемо допоміжні безрозмірні коефіцієнти, які повністю визначаються відомими координатами повзунів $z_i$ та ефективним радіусом $R_e$:

$$k_{12} = \frac{z_2 - z_1}{R_e}, \quad s_{12} = z_1 + z_2$$

$$k_{13} = \frac{z_3 - z_1}{R_e}, \quad s_{13} = z_1 + z_3$$

З урахуванням введених коефіцієнтів лінеаризована система набуває класичного вигляду:

$$-\sqrt{3}x_p - 3y_p + 2k_{12}z_p = k_{12}s_{12}$$

$$\sqrt{3}x_p - 3y_p + 2k_{13}z_p = k_{13}s_{13}$$

Таким чином, можна явно виразити декартові координати плоскої позиції $x_p$ та $y_p$ як лінійні функції від єдиної невідомої вертикальної координати $z_p$:

$$y_p = \frac{(k_{12} + k_{13})z_p - \frac{1}{2}(k_{12}s_{12} + k_{13}s_{13})}{3}$$

$$x_p = \frac{\frac{1}{2}(k_{12}s_{12} - k_{13}s_{13}) + (k_{12} - k_{13})z_p}{\sqrt{3}}$$

Зведемо рішення до одновимірного квадратного рівняння. Представимо лінійні залежності координатного стану у вигляді параметричних функцій:

$$x_p = a \cdot z_p + \alpha$$

$$y_p = b \cdot z_p + \beta$$

Підставивши ці параметричні функції у початкове геометричне рівняння обмеження, формуємо одновимірне рівняння відносно невідомої координати $z_p$:

$$\left(a \cdot z_p + \alpha\right)^2 + \left(b \cdot z_p + \beta - R_e\right)^2 + \left(z_p - z_1\right)^2 = L^2$$

Після розкриття дужок та групування доданків за степенями змінної $z_p$, задача зводиться до класичного квадратного рівняння:

$$A \cdot z_p^2 + B \cdot z_p + C = 0,$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами:

$$A = a^2 + b^2 + 1$$

$$B = 2[a\alpha + b(\beta - R_e) - z_1]$$

$$C = \alpha^2 + (\beta - R_e)^2 + z_1^2 - L^2$$

Аналітичний розв'язок квадратного рівняння має два математичні корені:

$$z_p = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Критерієм фізичного існування розв’язку є невід’ємність дискримінанта ($D = B^2 - 4AC \geq 0$). Вибір реального фізичного кореня із двох можливих здійснюється на основі аналізу компонування верстата: оскільки робоча платформа завжди знаходиться нижче точок кріплення напрямних, вибирається більше за модулем від’ємне значення координати $z_p$. Після визначення фінального значення $z_p$ координати $x_p$ та $y_p$ знаходяться прямою підстановкою у параметричні рівняння.

# РОЗДІЛ 3
# РОБОЧИЙ ПРОСТІР ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОСНОВНИХ РУХІВ

## 3.1. Робочий простір верстата типу «Лінійна дельта» («Linear Delta»)

### 3.1.1. Робочий простір обладнання з паралельною кінематикою

Робочим простором (РП) механізму називається множина всіх положень рухомої платформи (ефектора), які вона може досягти без порушення кінематичних обмежень та конструктивних обмежень. Поняття робочого простору є одним з ключових при оцінюванні функціональних можливостей верстата: від його розмірів та форми безпосередньо залежать технологічні можливості обладнання.

Для паралельних механізмів, на відміну від послідовних, робочий простір є значно меншим і має складнішу форму − як правило, симетричну відносно вертикальної осі [1, 3, 4, 6]. Для механізму типу Linear Delta робочий простір визначається одночасним виконанням кількох умов:

Умова 1 – досяжність ланцюга: підкорінний вираз $D_i \geq 0$ для кожного з трьох ланцюгів. Ця умова означає, що вектор важеля від повзуна до точки на платформі має довжину не більшу за *L*.

Умова 2 – хід повзуна: положення повзуна $z_i$ повинно знаходитись у допустимому діапазоні: $z_{min} \leq z_i \leq z_{max}$, де $z_{min}$ та $z_{max}$ визначаються конструктивними обмеженнями (довжиною напрямної та ходом приводу).

Умова 3 – кути шарнірів: кути відхилення у кульових шарнірах (між вектором важеля та вертикаллю) не повинні перевищувати допустимих значень $\alpha_{max}$, що визначаються конструкцією шарніра. Типові значення $\alpha_{max}$ = 30...45°.

Умова 4 – відсутність зіткнень: тяги різних ланцюгів та елементи конструкції не повинні перетинатись у межах робочого простору.

У практичних розрахунках найчастіше враховують умови 1 і 2 як основні геометричні обмеження; умова 3 може суттєво звузити доступний робочий простір у порівнянні з суто геометричним.

### 3.1.2. Форма та геометричні характеристики робочого простору

Для механізму Linear Delta робочий простір при урахуванні лише умови 1 (досяжності ланцюга) являє собою тіло обертання відносно вертикальної осі OZ. Це є наслідком тривісної симетрії конструкції.

Горизонтальний переріз робочого простору при фіксованому $z_p$ є областю, обмеженою трьома умовами $D_i(x_p, y_p, z_p) \geq 0$ (при фіксованих $z_1$, $z_2$, $z_3$, які відповідають граничним положенням повзунів). При $z_p$ = const та рівних положеннях повзунів переріз є круговим – центрованим навколо осі OZ.

При змінних положеннях повзунів (і рівних між собою, що відповідає центральній вертикальній осі) робочий простір у вертикальній площині має форму, близьку до циліндра зверху та куполу знизу (рис. 3.1). Характерні особливості:

– Максимальний горизонтальний радіус $R_{max}$ досягається при деякому оптимальному значенні $z_p$ (зазвичай у середній частині ходу повзунів), де досяжність усіх трьох ланцюгів є найбільшою одночасно.

– У верхній частині (виконавчий орган близько до рівня повзунів) горизонтальний радіус зменшується через обмеження кута шарнірів і зменшення горизонтальної складової вектора важеля.

– У нижній частині (виконавчий орган далеко від повзунів) горизонтальний радіус також зменшується через обмеження довжини важеля: зі збільшенням вертикальної відстані $|z_p - z_i|$ горизонтальна складова $|B_i - A_i|_{xy} = \sqrt{(L^2 - (zp - z_i)^2)}$ зменшується.

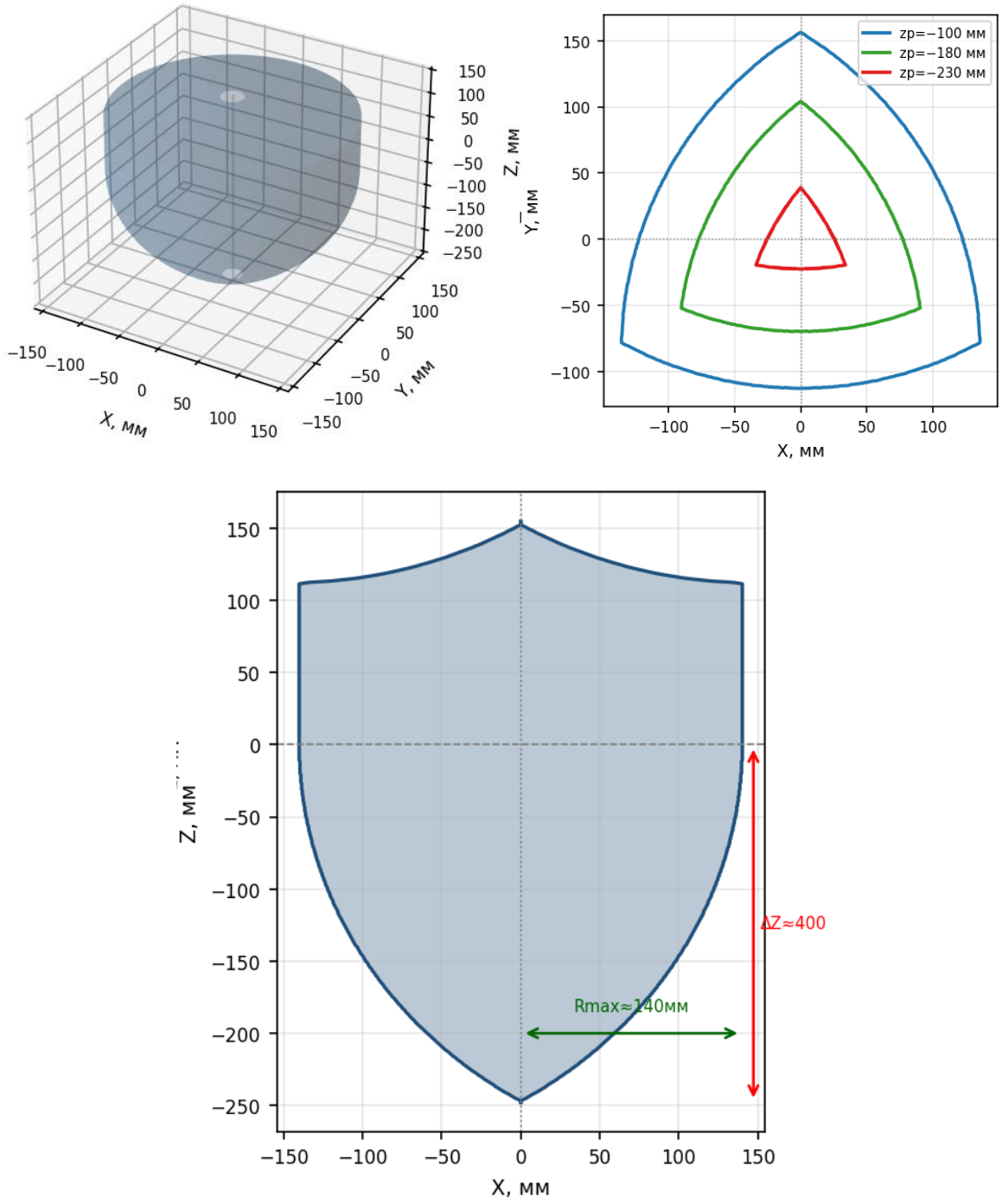



Рис. 3.1. Форма робочого простору верстата Linear Delta ($R_c$ = 200 мм, $r$ = 30 мм, $L$ = 300 мм, $H$ = 400 мм)

### 3.1.3. Вплив геометричних параметрів на робочий простір

Основні геометричні параметри верстата (*Rc, r, L, H*) безпосередньо визначають розміри та форму робочого простору. Проведемо аналіз цього впливу.

При збільшенні *L* за незмінних *Rc, r, H* горизонтальний радіус РП зростає (більша горизонтальна складова вектора важеля при тій самій вертикальній відстані) та вертикальна протяжність РП також збільшується. Однак зростання *L* пов'язане з відповідним збільшенням габаритів верстата та зниженням жорсткості. Співвідношення $L/Re \approx 1{,}5...2{,}0$ є раціональним для більшості застосувань.

Ефективний радіус $Re = Rc - r$. При збільшенні *Re* горизонтальний розмір РП зменшується (ефектор обмежений умовою $D_i \geq 0$, а $D_i$ лінійно залежить від *Re*). Водночас збільшення *Re* означає більший розніс колон – більш жорстку конструкцію. Оптимальне значення *Re* визначається компромісом між жорсткістю та розміром РП.

Хід повзунів по напрямній визначає вертикальну протяжність РП. При збільшенні *H* вертикальний діапазон переміщення виконавчого органу зростає майже пропорційно. Це параметр, що легко варіюється шляхом зміни довжини напрямних.

Порівняння впливу геометричних параметрів на робочий простір наведено в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Якісний вплив геометричних параметрів на робочий простір

| Параметр | Збільшення | Горизонт. радіус Rmax | Верт. протяжність ΔZ | Жорсткість |
|---|---|---|---|---|
| L | L ↑ | Rmax ↑ | ΔZ ↑ | ↓ |
| Re = Rc−r | Re ↑ | Rmax ↓ | ΔZ ≈ const | ↑ |
| H (хід) | H ↑ | Rmax ≈ const | ΔZ ↑ | ≈ const |
| αmax (шарнір) | αmax ↑ | Rmax ↑ | ΔZ ↑ | ↓ (зазор) |

## 3.2. Побудова робочого простору

### 3.2.1. Алгоритм обчислення меж робочого простору

Побудова робочого простору виконується методом перебору можливих положень виконавчого органу. Для кожної точки (xp, yp, zp) перевіряється виконання умов досяжності − підкорінні вирази $D_i$ та умова ходу повзунів. Точка вважається такою, що належить робочому простору, якщо всі умови виконані одночасно.

Визначимо алгоритм побудови.

**Крок 1.** Визначити просторову область пошуку: $[-X_{max}, X_{max}] \times [-Y_{max}, Y_{max}] \times [Z_{min}, Z_{max}]$ з кроком Δ (наприклад, 1...5 мм).

**Крок 2.** Для кожного вузла (xp, yp, zp):

а) Обчислити $Re = Rc - r$.

б) Обчислити $D_i$ за формулами вирішення зворотної задачі кінематики для $i = 1, 2, 3$.

в) Перевірити умову $D_i \geq 0$ для всіх $i$.

г) Якщо умова виконана − обчислити $z_i = zp + \sqrt{D}_i$.

д) Перевірити $z_{min} \leq z_i \leq z_{max}$ для всіх $i$.

е) Додатково перевірити кут шарніра $\alpha_i \leq \alpha_{max}$ для всіх $i$.

ж) Якщо всі умови виконані − точка належить РП.

**Крок 3.** Зберегти масив точок, що належать РП.

**Крок 4.** Виконати візуалізацію.

Умова на кут шарніра на кроці 2е:

$$\cos\alpha_i = \frac{|z_p - z_i|}{L} \geq \cos\alpha_{max}$$

або еквівалентно: $|z_p - z_i| \geq L\cos\alpha_{max}$. Ця умова означає, що вертикальна складова вектора важеля не повинна бути меншою за $L\cos\alpha_{max}$.

3.2.2. Параметри верстата для дослідження

Для дослідження прийняті геометричні параметри, визначені в розділі 2. Наведемо також допоміжні розрахункові характеристики робочого простору, що визначаються аналітично.

**Максимальний горизонтальний радіус.** При переміщенні виконавчого органа строго по вертикальній осі ($x_p = y_p = 0$) і рівних положеннях повзунів $z_1 = z_2 = z_3 = z_c$, вертикальна відстань $|zp - zc| = \sqrt{(L^2 - Re^2)}$. Максимальна горизонтальна відстань, що досяжна при деякому положенні виконавчого органу від осі OZ, визначається з умови D = 0 при оптимальному $z_p$. Для спрощеної оцінки, при $y_p = 0$, $x_p = R_{max}$, ланцюг 1 ($\varphi_1 = 90°$):

$$D_1 = L^2 - Rmax^2 - Re^2 + 2Re \cdot 0 = 0 \rightarrow Rmax = \sqrt{(L^2 - Re^2)}$$

Для прийнятих параметрів ($L$ = 300 мм, $Re$ = 170 мм):

$$R_{max} = \sqrt{(300^2 - 170^2)} = \sqrt{(90000 - 28900)} = \sqrt{61100} \approx 247\text{мм}$$

Визначене значення $R_{max}$ є верхньою теоретичною межею (без урахування обмежень ходу повзунів та кутів шарнірів).

**Вертикальний діапазон.** При переміщенні вздовж осі OZ ($x_p = y_p = 0$) і рівних положеннях повзунів координата виконавчого органа:

$$zp = z_i - \sqrt{(L^2 - Re^2)} = z_i - 247\text{мм}$$

При ході кареток $H$ = 400 мм (наприклад, $z_i \in [0, 400]$ мм):

$$zp \in [0 - 247{,}400 - 247] = [-247, +153]\text{мм}$$

Таким чином, теоретичний вертикальний діапазон переміщення виконавчого органа по осі вздовж OZ складає близько 400 мм (рівний ходу

повзунів $H$), зміщений вниз відносно рівня кріплення колон на величину $\sqrt{(L^2 - Re^2)}$.

Розрахункові характеристики робочого простору наведені в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Розрахункові характеристики робочого простору ($Rc$ = 200, $r$ = 30, $L$ = 300, $H$ = 400, мм)

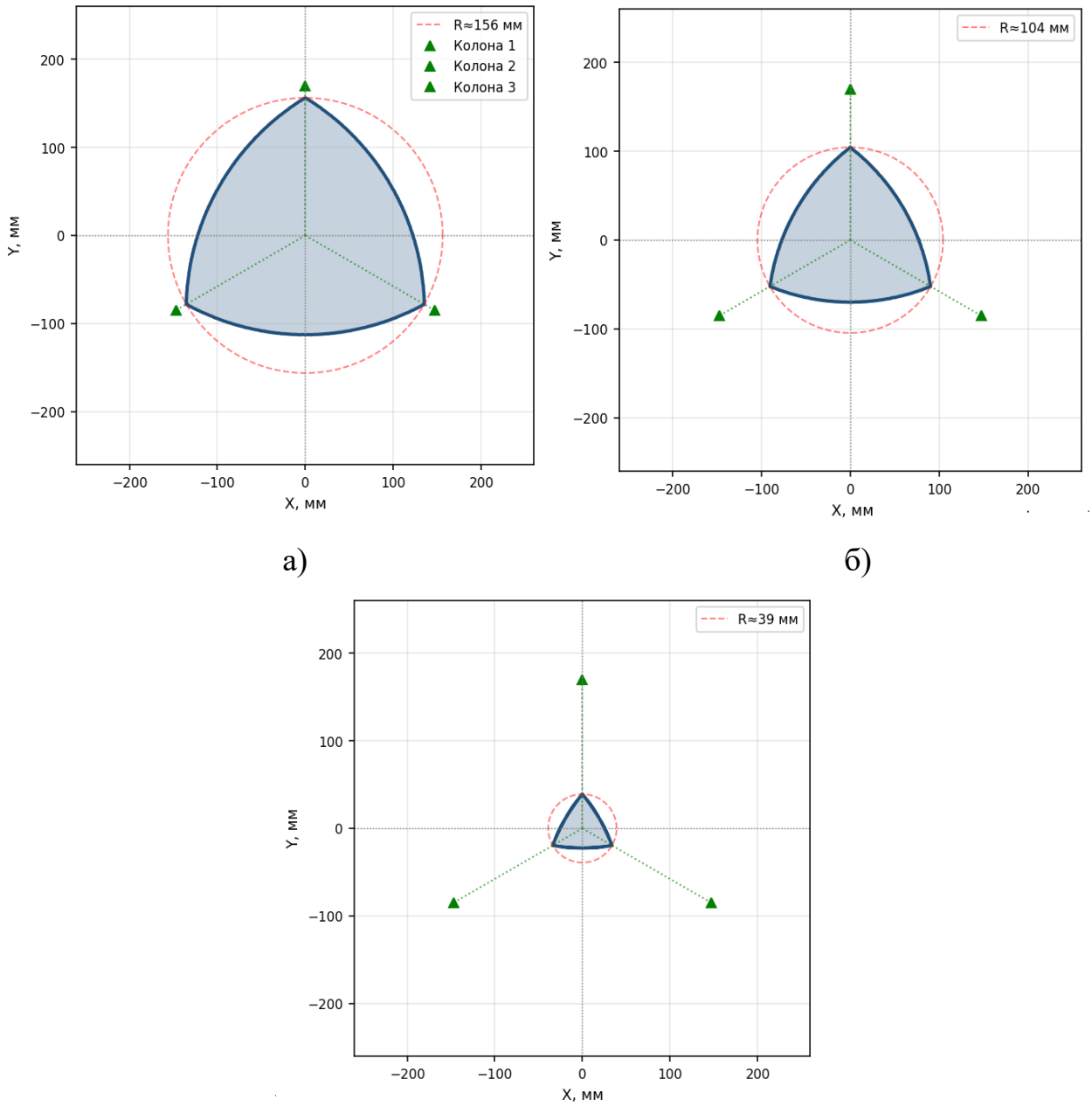
| Характеристика | Розрахункове значення | Примітка |
|---|---|---|
| Ефективний радіус Re | 170 мм | Re = Rc − r = 200 − 30 |
| Теоретичний максимальний горизонтальний радіус Rmax | ≈ 247 мм | $\sqrt{(L^2 - Re^2)}$ |
| Теоретичний вертикальний діапазон ΔZ | ≈ 400 мм | Рівний ходу H |
| Нижня межа $z_p$ по осі OZ | ≈ −247 мм | При $z_i$ = 0 мм |
| Верхня межа $z_p$ по осі OZ | ≈ +153 мм | При $z_i$ = H = 400 мм |
| Реальний горизонтальний радіус (з урах. ходу та шарнірів) | | Залежить від $\alpha_{max}$ та конкретного рівня $z_p$ |

### 3.2.3. Аналіз перерізів робочого простору

Для повного розуміння форми робочого простору доцільно розглянути його горизонтальні та вертикальні перерізи.

**Горизонтальні перерізи (площини z = const)** (рис. 3.2). При фіксованому $z_p$ горизонтальний переріз РП обмежений трьома умовами $D_i(x_p, y_p) \geq 0$ та умовою ходу повзунів. Кожна з умов $D_i \geq 0$ при фіксованому $z_p$ є умовою на те, що точка $(x_p, y_p)$ знаходиться всередині кола у площині XOY. Умова $D_1 \geq 0$:

$$x_p^2 + \left(y_p - Re\right)^2 \leq L^2 - \left(z_p - z^1\right)^2$$




а) б)

в)

Рис. 3.2. Горизонтальні перерізи робочого простору на різних рівнях $z_p$: а) $z_p = -100$ мм (великий радіус); б) $z_p = -180$ мм (середній радіус – максимальний); в) $z_p = -230$ мм (малий радіус). На кожному перерізі показано три обмежуючих дуги та їх перетин (заштрихована область)

Аналогічно для $D_2$ і $D_3$ – кола з центрами в точках ($Re \cdot \cos \varphi_i$, $Re \cdot \sin \varphi_i$). Таким чином, горизонтальний переріз РП є перетином трьох кіл у площині XOY.

При симетричній конфігурації (рівні положення кареток $z_1 = z_2 = z_3 = z_c$) всі три кола мають однаковий радіус $rk = \sqrt{(L^2 - (zp - zc)^2)}$ і центри, рівновіддалені від початку координат на відстань $Re$. Перетин трьох однакових кіл, симетричних відносно центра, є областю з тривісною симетрією – близькою до кола, але з увігнутими дугоподібними бічними гранями.

**Вертикальні перерізи (площини, що проходять через вісь OZ)**. При перерізі площиною Y = 0 (або будь-якою площиною, що проходить через вісь OZ) форма РП визначається умовами досяжності ланцюгів та ходу повзунів. Для механізму Linear Delta вертикальний переріз через вісь є приблизно параболічним або трапецієподібним у залежності від співвідношення параметрів (рис. 3.3).

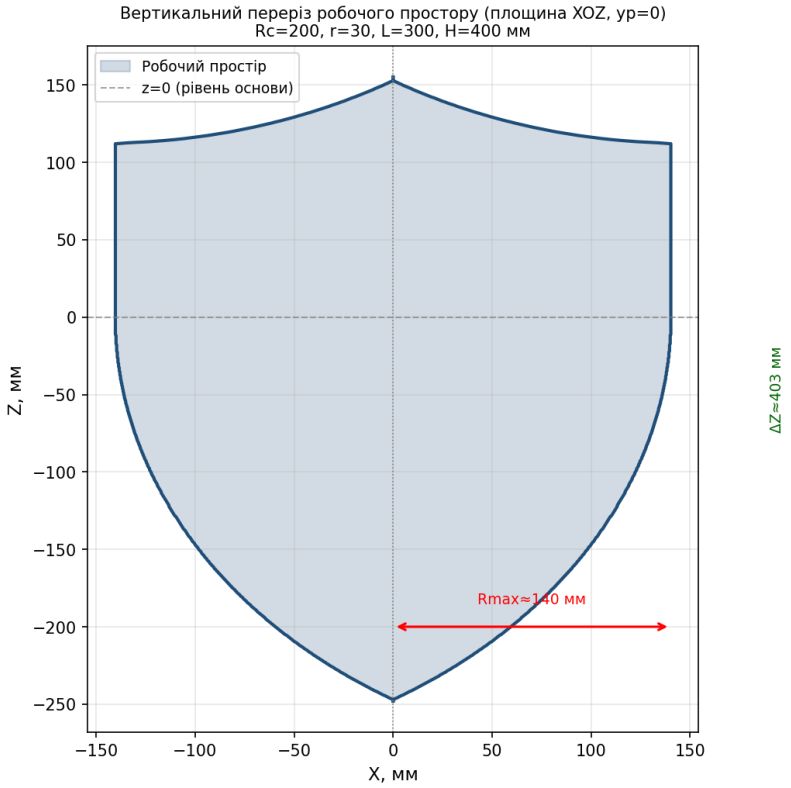



Рис. 3.3. Вертикальний переріз робочого простору (площина XOZ)

Горизонтальний радіус перерізу РП є функцією вертикальної координати $z_p$. При переміщенні зверху вниз (виконавчий орган опускається) радіус спочатку збільшується (повзуні ще не досягли мінімального положення, а кут важелів дозволяє більший горизонтальний виліт), досягає максимуму в середній зоні, а потім зменшується (важелі виходять на граничний кут або повзуни досягають нижнього упору).

## 3.3. Дослідження рухів уздовж координатних осей

Розглянемо кінематику верстата при виконанні виконавчим органом найпростіших лінійних рухів − переміщення вздовж осей X, Y та Z. Для кожного руху аналізується залежність положень повзунів $z_i$ від поточних координат виконавчого органа. Всі розрахунки виконані за аналітичними формулами зворотної задачі кінематики.

### 3.3.1. Рух уздовж вертикальної осі Z

При переміщенні виконавчого органа вздовж вертикальної осі: $x_p = 0$, $y_p = 0$, $z_p$ змінюється від $z_{pmin}$ до $z_{pmax}$.

Запишемо формули:

$$D_1 = L^2 - 0 - 0 - Re^2 + 2Re \cdot 0 = L^2 - Re^2$$

$$D_2 = L^2 - 0 - 0 - Re^2 - \sqrt{3} \cdot Re \cdot 0 - Re \cdot 0 = L^2 - Re^2$$

$$D_3 = L^2 - 0 - 0 - Re^2 + \sqrt{3} \cdot Re \cdot 0 - Re \cdot 0 = L^2 - Re^2$$

Всі три підкорінні вирази рівні між собою та не залежать від $z_p$:

$$D_1 = D_2 = D_3 = L^2 - Re^2 = const$$

Звідси положення кареток:

$$z_1 = z_2 = z_3 = zp + \sqrt{(L^2 - Re^2)} = zp + C_0$$

де $C_0 = \sqrt{(L^2 - Re^2)}$ – постійна величина, що залежить лише від геометричних параметрів верстата. Для прийнятих параметрів:

$$C_0 = \sqrt{(300^2 - 170^2)} = \sqrt{(90000 - 28900)} = \sqrt{61100} \approx 247{,}2 \text{ мм}$$

Таким чином, при вертикальному переміщенні виконавчого органу всі три повзуни переміщуються синхронно та на однакову величину. Приріст положення каретки дорівнює приросту координати виконавчого органу:

$$\Delta z_i = \Delta zp, \quad i = 1, 2, 3$$

Це означає, що рух уздовж осі Z є найпростішим з точки зору керування: всі три приводи виконують абсолютно однаковий рух (табл. 3.3, рис. 3.4).

Таблиця 3.3

Положення кареток при переміщенні виконавчого органа вздовж осі Z (xp=0, yp=0)

| zp, мм | $z_1$, мм | $z_2$, мм | $z_3$, мм | $\Delta z_i / \Delta zp$ |
|---|---|---|---|---|
| −247 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | — |
| −200 | 47,2 | 47,2 | 47,2 | 1,00 |
| −150 | 97,2 | 97,2 | 97,2 | 1,00 |
| −100 | 147,2 | 147,2 | 147,2 | 1,00 |
| −50 | 197,2 | 197,2 | 197,2 | 1,00 |
| 0 | 247,2 | 247,2 | 247,2 | 1,00 |
| +50 | 297,2 | 297,2 | 297,2 | 1,00 |
| +100 | 347,2 | 347,2 | 347,2 | 1,00 |
| +153 | 400,2 | 400,2 | 400,2 | 1,00 |

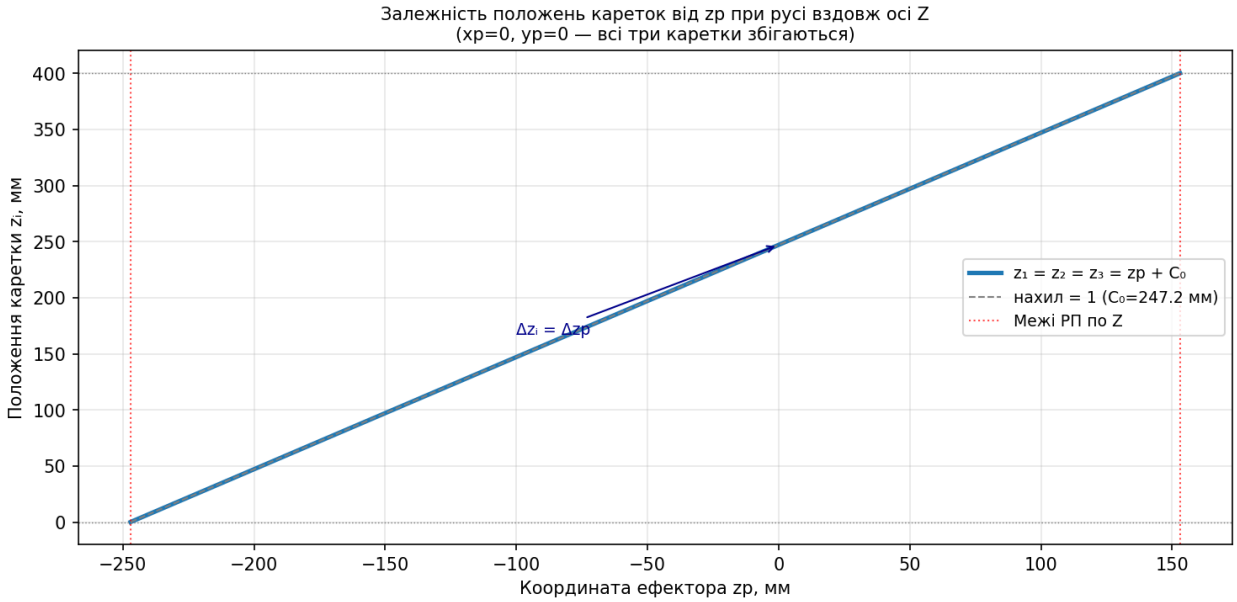



Рис. 3.4. Залежність $z_i(z_p)$ при переміщенні робочого органувздовж осі Z

### 3.3.2. Рух уздовж горизонтальної осі X

При переміщенні виконавчого органа вздовж осі X: $y_p = 0$, $z_p = \text{const}$ (для визначеності приймемо $z_p = -200$ мм), $x_p$ змінюється від $-R_{max}$ до $+R_{max}$.

Запишемо формули при $y_p = 0$:

$$D_1 = L^2 - xp^2 - Re^2 + 2Re \cdot 0 = L^2 - xp^2 - Re^2$$

$$D_2 = L^2 - xp^2 - Re^2 - \sqrt{3} \cdot Re \cdot xp - Re \cdot 0 = L^2 - xp^2 - Re^2 - \sqrt{3} \cdot Re \cdot xp$$

$$D_3 = L^2 - xp^2 - Re^2 + \sqrt{3} \cdot Re \cdot xp - Re \cdot 0 = L^2 - xp^2 - Re^2 + \sqrt{3} \cdot Re \cdot xp$$

Положення кареток:

$$z_1 = zp + \sqrt{(L^2 - xp^2 - Re^2)}$$

$$z_2 = zp + \sqrt{\left(L^2 - xp^2 - Re^2 - \sqrt{3} \cdot Re \cdot xp\right)}$$

$$z_3 = zp + \sqrt{\left(L^2 - xp^2 - Re^2 + \sqrt{3} \cdot Re \cdot xp\right)}$$

Проаналізуємо характер отриманих залежностей.

Повзун 1 (ланцюг 1, $\varphi_1 = 90°$, вісь Y). Положення повзуна $z_1$ залежить від $x_p$. При $x_p = 0$ повзун 1 має найвище положення (максимальне $z_1$); при відхиленні виконавчого органу вздовж ±X повзун 1 опускається.

Повзуни 2 і 3 (ланцюги 2 і 3, $\varphi_2 = 210°$, $\varphi_3 = 330°$). Ці ланцюги симетрично розташовані відносно осі Y, тому вони попарно симетричні при переміщенні вздовж X. При $x_p > 0$ повзун 3 (ланцюг з $\varphi_3 = 330°$, що має складову вздовж +X) отримує більший підкорінний вираз і тому знаходиться вище; повзун 2 − нижче. При xp < 0 ситуація міняється місцями.

Таким чином, при переміщенні вздовж осі X спостерігається асиметрія між повзуном 1 (незалежна від знаку $x_p$) та парою повзунів 2-3.

Межі доступного руху по X при $z_p = -200$ мм визначаються умовами $D_i \geq 0$:

$$D_1 \geq 0: xp^2 \leq L^2 - Re^2 = 300^2 - 170^2 = 61100 \rightarrow |xp| \leq 247\text{мм}$$

$$D_2 \geq 0: xp^2 + \sqrt{3} \cdot 170 \cdot xp + 170^2 - 300^2 \leq 0$$

$$D_3 \geq 0: xp^2 - \sqrt{3} \cdot 170 \cdot xp + 170^2 - 300^2 \leq 0$$

Для умови $D_2 \geq 0$:

$$xp^2 + 294{,}4 \cdot xp - 61100 \leq 0$$

Корені: $xp = \left(-294{,}4 \pm \sqrt{(294{,}4^2 + 4 \cdot 61100)}\right)/2 = \left(-294{,}4 \pm \sqrt{(86711 + 244400)}\right)/2 = \left(-294{,}4 \pm \sqrt{3}31111\right)/2$

Теоретичні розрахунки положення повзунів при переміщенні ефектора вздовж осі X наведено в табл. 3.4 та на рис. 3.5.

Таблиця 3.4

Положення кареток при переміщенні виконавчого органу вздовж осі X ($y_p = 0$, $z_p = -200$ мм)

| $z_p$, мм | $z_1$, мм | $z_2$, мм | $z_3$, мм | $\Delta z_i / \Delta z_p$ |
|---|---|---|---|---|
| −247 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | — |
| −200 | 47,2 | 47,2 | 47,2 | 1,00 |
| −150 | 97,2 | 97,2 | 97,2 | 1,00 |
| −100 | 147,2 | 147,2 | 147,2 | 1,00 |
| −50 | 197,2 | 197,2 | 197,2 | 1,00 |
| 0 | 247,2 | 247,2 | 247,2 | 1,00 |
| +50 | 297,2 | 297,2 | 297,2 | 1,00 |
| +100 | 347,2 | 347,2 | 347,2 | 1,00 |
| +153 | 400,2 | 400,2 | 400,2 | 1,00 |

Від’ємне значення або порушення умови $D < 0$ свідчить про вихід за межі робочого простору.

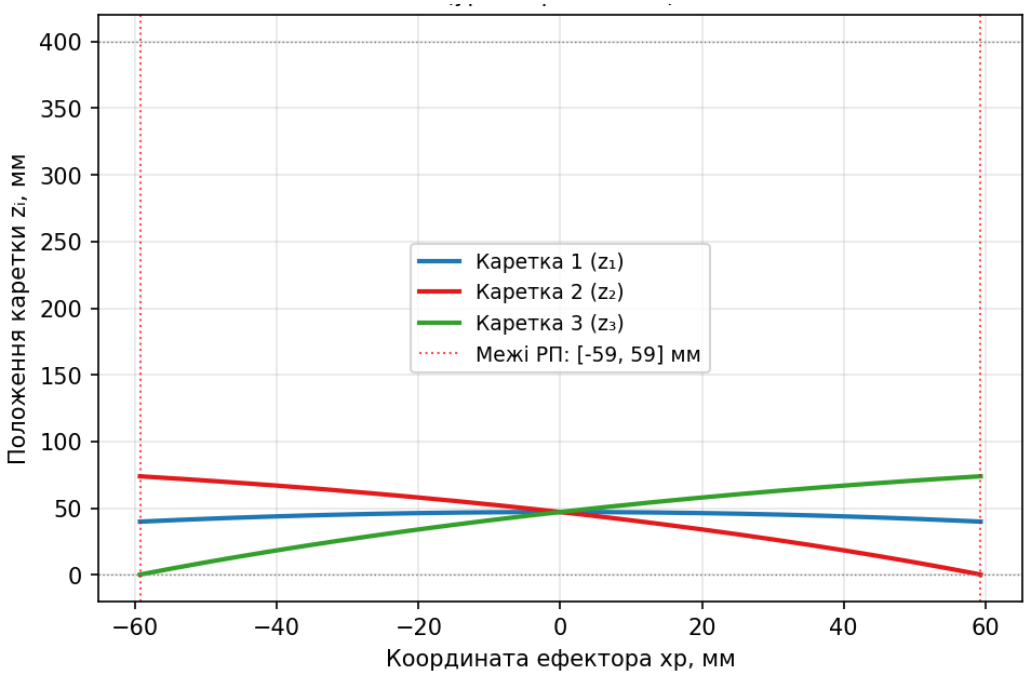



Рис. 3.5. Залежності положень повзунів від координати $x_p$ при русі вздовж осі X ($y_p = 0$, $z_p = -200$ мм):

3.3.3. Рух уздовж горизонтальної осі Y

При переміщенні виконавчого органа вздовж осі Y: $x_p = 0$, $z_p = \text{const} = -200$ мм, $y_p$ змінюється від $-R_{max}$ до $+R_{max}$.

Розраховуємо формули при $x_p = 0$:

$$D_1 = L^2 - yp^2 - Re^2 + 2Re \cdot yp = L^2 - (yp - Re)^2$$

$$D_2 = L^2 - yp^2 - Re^2 - Re \cdot yp$$

$$D_3 = L^2 - yp^2 - Re^2 - Re \cdot yp$$

При $x_p = 0$ $D_2$ дорівнює $D_3$, тобто повзуни 2 і 3 знаходяться на однаковій висоті при переміщенні вздовж Y. Це є наслідком симетрії ланцюгів 2 і 3 відносно площини XOZ.

Положення повзунів:

$$z_1 = zp + \sqrt{(L^2 - (yp - Re)^2)}$$

$$z_2 = z_3 = zp + \sqrt{(L^2 - yp^2 - Re^2 - Re \cdot yp)}$$

Повзун 1 (ланцюг 1, $\varphi_1 = 90°$). Ланцюг 1 орієнтований у напрямку +Y від осі OZ (точка кріплення на колоні має координату $y = Re$). При переміщенні виконавчого органу у напрямку +Y він наближається до проєкції осі колони 1 на горизонтальну площину − горизонтальна складова вектора важеля зменшується, тому повзун 1 може спускатися нижче (важіль стає більш вертикальним). При переміщенні у напрямку −Y ситуація протилежна − горизонтальна складова збільшується, але обмежена довжиною важеля $L$.

Повзуни 2 і 3. Обидва ланцюги 2 і 3 ($\varphi_2 = 210°$, $\varphi_3 = 330°$) мають однакові проєкції Y-компонент ($\sin\varphi_2 = \sin\varphi_3 = -1/2$), тому їх D-вирази при xp = 0 рівні. При переміщенні виконавчого органу у напрямку +Y горизонтальна складова обох важелів зростає (оскільки виконавчий орган відходить від нейтрального

положення у напрямку, перпендикулярному осям цих колон), що спричиняє підйом обох повзунів (табл. 3.5, рис. 3.6).

Таблиця 3.5

Положення кареток при переміщенні виконавчого органа вздовж осі Y ($x_p = 0$, $z_p = -200$ мм)

| $y_p$, мм | $z_1$, мм | $z_2$, мм | $z_3$, мм | Різниця $z_1 - z_2$, мм |
|---|---|---|---|---|
| −150 | −105,6 | 247,8 | 247,8 | — |
| −100 | 61,7 | 271,1 | 271,1 | −209,4 |
| −50 | 177,2 | 262,4 | 262,4 | −85,2 |
| 0 | 247,2 | 247,2 | 247,2 | 0,0 |
| 50 | 282,5 | 224,1 | 224,1 | +58,4 |
| 100 | 284,7 | 191,7 | 191,7 | +93,0 |
| 150 | 247,2 | 136,4 | 136,4 | +110,8 |

Примітка. Від'ємне або уявне значення свідчить про вихід за межі РП.

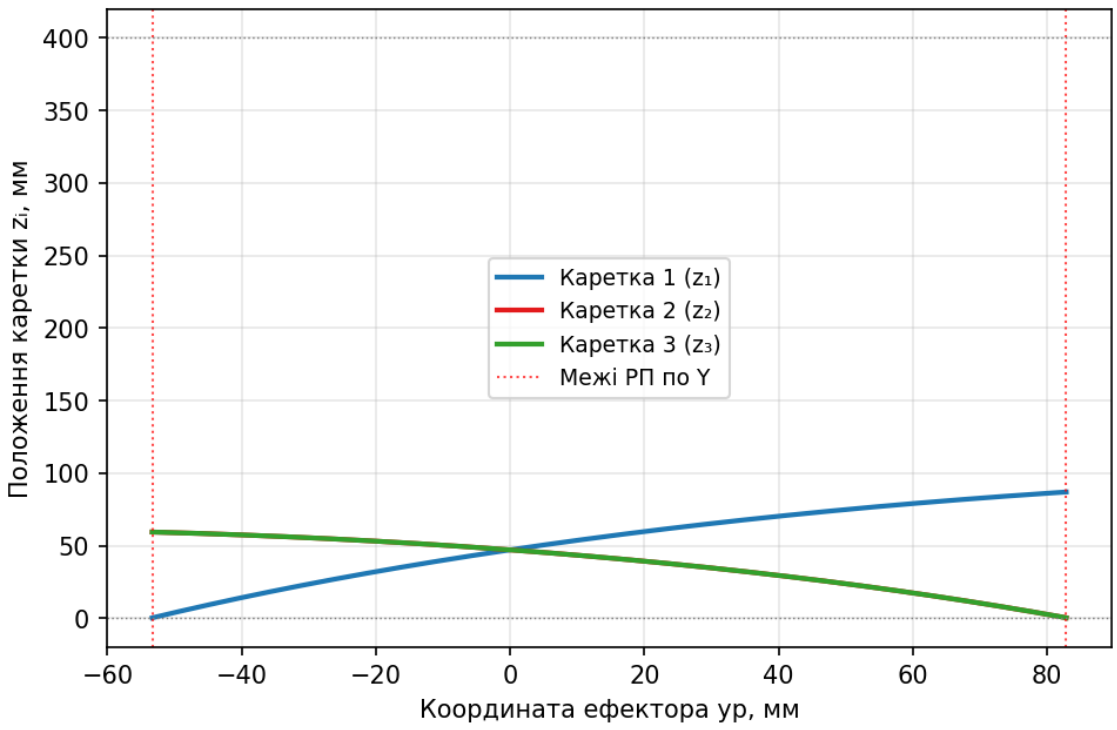



Рис.3.6. Залежності положень повзунів від координати $y_p$ при переміщенні вздовж осі Y ($x_p = 0$, $z_p = -200$ мм)

## 3.4. Дослідження кругового руху виконавчого органу

Круговий рух виконавчого органа у горизонтальній площині є типовою технологічною операцією для фрезерування кіл, розточування отворів та інших профільних операцій. Траєкторія виконавчого органа визначається кутом φ:

$$xp(\varphi) = R_{tr} \cdot cos\varphi$$

$$yp(\varphi) = R_{tr} \cdot sin\varphi$$

$$zp = const$$

де $R_{tr}$ − радіус кола, яке описує виконавчий орган; φ ∈ [0°, 360°] − кут обходу кола.

Підставляємо функції кутів у формули:

$$D_1 = L^2 - {R_{tr}}^2 - Re^2 + 2Re \cdot R_{tr} \cdot sin\varphi$$

$$D_2 = L^2 - {R_{tr}}^2 - Re^2 - \sqrt{3} \cdot Re \cdot R_{tr} \cdot cos\varphi - Re \cdot R_{tr} \cdot sin\varphi$$

$$D_3 = L^2 - {R_{tr}}^2 - Re^2 + \sqrt{3} \cdot Re \cdot R_{tr} \cdot cos\varphi - Re \cdot R_{tr} \cdot sin\varphi$$

Або, вводячи базову константу $K = L^2 - {R_{tr}}^2 - Re^2$ (яка залежить від радіуса кола та геометрії верстата, але не від φ):

$$D_1 = K + 2Re \cdot R_{tr} \cdot sin\varphi$$

$$D_2 = K + 2Re \cdot R_{tr} \cdot sin(\varphi + 240°)$$

$$D_3 = K + 2Re \cdot R_{tr} \cdot sin(\varphi + 120°)$$

Спрощена форма запису через зсувні кути:

$$D_{\text{i}} = K + 2Re \cdot R_{tr} \cdot sin(\varphi + \psi_{\text{i}}), i = 1,2,3$$

де кути зсуву: $\psi_1 = 0°$, $\psi_2 = 240°$, $\psi_3 = 120°$ (або еквівалентно $\psi_1 = 90°$, $\psi_2 = 330°$, $\psi_3 = 210°$ відносно кутів $\varphi_i$).

Положення кожного повзуна при круговому переміщенні виконавчого органу:

$$z_{\text{i}}(\varphi) = zp + \sqrt{\left(K + 2Re \cdot R_{tr} \cdot sin(\varphi + \psi_{\text{i}})\right)}$$

З цієї формули видно, що повзуни виконують нелінійний (синусоїдальний) рух при рівномірному кутовому обході виконавчого органу по колу. Розглянемо ключові характеристики цього руху.

Максимальне та мінімальне значення $D_i$:

$$D_{\text{i}max} = K + 2Re \cdot R_{tr}$$

$$D_{\text{i}min} = K - 2Re \cdot R_{tr}$$

Умова $D_{\text{i}min} \geq 0$ дає обмеження:

$$K \geq 2Re \cdot R_{tr} \rightarrow L^2 - {R_{tr}}^2 - Re^2 \geq 2Re \cdot R_{tr} \rightarrow L^2 \geq (R_{tr} + Re)^2 \rightarrow$$
$$R_{tr} \leq L - Re \qquad (3.1)$$

Таким чином, максимальний радіус кола, доступний для кругового руху при даних параметрах: $R_{tr_{max}} = L - Re = 300 - 170 = 130$ мм.

Всі три повзуни виконують синусоїдальний рух з фазовим зсувом 120° ($\psi_2 - \psi_1 = 240° - 0° = 240°$; $\psi_3 - \psi_1 = 120°$). Це означає, що при рівномірному переміщенні виконавчого органу по колу між максимальними положеннями суміжних кареток є зсув на 1/3 оберту (120°).

Розглянемо круговий рух для параметрів: $R_{tr}$ = 80 мм, $z_p$ = −200 мм.

Обчислюємо базову константу:

$$K = L^2 - {R_{tr}}^2 - Re^2 = 90000 - 6400 - 28900 = 54700$$

$$\sqrt{K} = \sqrt{54700} \approx 233{,}9 \text{ мм}$$

Перевіримо умову (3.1): $R_{tr} = 80 < L - Re$ = 130 мм − умова виконана.

Положення кареток при круговому переміщенні виконавчого органу наведені в табл. 3.6. Залежності $z_i(\varphi)$ при круговому переміщенні − на рис. 3.7.

Таблиця 3.6

Положення повзунів при круговому переміщенні виконавчого органа ($R_{tr}$ = 80 мм, $z_p$ = −200 мм)

| φ, ° | $z_1$, мм | $z_2$, мм | $z_3$, мм | Δ(max−min), мм |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 233,9 | 150,1 | 283,1 | 133,0 |
| 30° | 247,2 | 126,5 | 291,4 | 164,9 |
| 60° | 257,4 | 106,2 | 291,2 | 185,0 |
| 90° | 261,9 | 106,2 | 261,9 | 155,7 |
| 120° | 257,4 | 126,5 | 233,9 | 130,9 |
| 150° | 247,2 | 150,1 | 206,1 | 97,1 |
| 180° | 233,9 | 150,1* | 150,1* | 83,8 |
| 210° | 220,6* | 199,9 | 124,1 | 75,8 |
| 240° | 206,1 | 233,9 | 106,2 | 127,7 |
| 270° | 200,5 | 261,9 | 106,2 | 155,7 |
| 300° | 206,1 | 283,1 | 126,5 | 156,6 |
| 330° | 220,6* | 291,4 | 150,1 | 141,4 |
| 360°=0° | 233,9 | 150,1 | 283,1 | 133,0 |

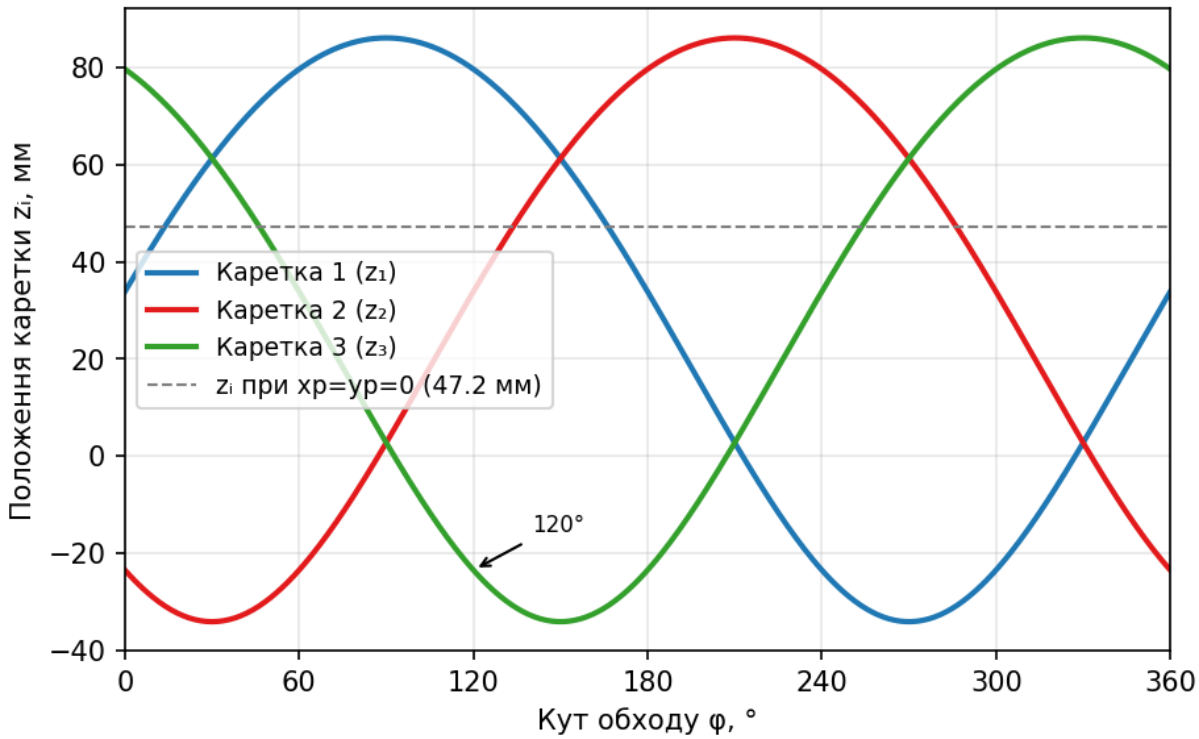



Рис. 3.7. Залежності $z_i(\varphi)$ при круговому переміщенні виконавчого органу ($R_{tr}$ = 80 мм, $z_p$ = −200 мм)

## 3.5. Узагальнений аналіз отриманих результатів

### 3.5.1. Характер залежностей керуючих координат від положення виконавчого органу

Узагальнюючи результати досліджень рухів вздовж осей та кругового руху, можна сформулювати такі закономірності.

1. Нелінійність кінематики. Залежності $z_i(x_p, y_p, z_p)$ є нелінійними (квадратний корінь у формулах зворотної задачі кінематики). Ця нелінійність є відносно помірною у центральній частині робочого простору (де підкорінний вираз $D_i$ близький до свого максимального значення $L^2 - Re^2$), але зростає по мірі наближення до меж робочого простору (де $D_i \to 0$).

2. Рух вздовж Z − лінійний. Єдиним лінійним рухом у даній кінематиці є вертикальний рух по осі Z: $\Delta z_i = \Delta z_p$. При цьому всі три повзуни рухаються синхронно та з однаковою швидкістю.

3. Горизонтальні рухи − нелінійні. При горизонтальних рухах одні повзуни рухаються вгору, інші − вниз. Характер залежностей (який ланцюг «відповідає» за рух в даному напрямку) визначається орієнтацією ланцюгів у горизонтальній площині.

4. Круговий рух − синусоїдальний. Всі три повзуни виконують синусоїдальний рух з фазовим зсувом 120°. Амплітуда коливань однакова для всіх трьох повзунів (рівноважність).

### 3.5.2. Особливості вертикального розподілу кінематичних властивостей

Крім горизонтального розподілу, кінематичні властивості верстата також змінюються по вертикалі − зі зміною координати $z_p$.

У верхній частині робочого простору (виконавчий орган близько до рівня повзунів, $z_p \to z_i$) вертикальна складова вектора важеля $(z_p - z_i) \to 0$ − механізм наближається до сингулярності. Горизонтальний розмір робочого простору при цьому зменшується. Проводити операції в цій зоні слід обережно.

У середній частині робочого простору (оптимальна вертикальна зона) горизонтальний розмір максимальний, кінематичні властивості найкращі. Вертикальна складова вектора важеля оптимальна з точки зору передачі горизонтальних зусиль.

У нижній частині робочого простору (виконавчий орган далеко від повзунів, $z_p$ мінімальне) горизонтальний розмір знову зменшується через обмеження довжини важеля. Жорсткість у горизонтальній площині знижується.

### 3.5.3. Практичні рекомендації щодо використання робочого простору

На підставі проведеного дослідження сформулюємо практичні рекомендації щодо раціонального використання робочого простору верстата.

1. Розміщення зони обробки. Рекомендується розміщувати зону обробки в центральній та серединній зонах робочого простору (горизонтальний радіус не більше $0{,}7 \cdot R_{max}$). Це забезпечить найкращі точнісні та динамічні характеристики.

2. Вертикальне розміщення. Оптимальне робоче положення по вертикалі − середня третина вертикального діапазону робочого простору. Слід уникати крайніх верхнього та нижнього положень через знижену жорсткість та наближення до сингулярних конфігурацій.

3. Кругові рухи. Максимальний радіус кругового руху обмежений значенням $R_{trmax}$ = L − Re = 130 мм. При радіусах, близьких до цього значення, рекомендується знизити подачу через зростання швидкостей повзунів у деяких фазах руху.

4. Точність позиціонування. Найвища точність позиціонування досягається при $x_p = y_p = 0$ (вертикальна вісь) та у нижній половині вертикального діапазону, де кути важелів відносно вертикалі є найменшими.

# РОЗДІЛ 4
# ЕКОНОМІЧНЕ ОБГРУНТУВАННЯ ДОЦІЛЬНОСТІ ВПРОВАДЖЕННЯ ВЕРСТАТІВ З ПАРАЛЕЛЬНОЮ КІНЕМАТИКОЮ ТИПУ «ДЕЛЬТА»

## 4.1. Загальні вихідні дані

Для визначення показників економічної ефективності впровадження в експлуатацію верстата з паралельною кінематикою типу «Дельта» в якості бази для порівняння приймаємо високошвидкісний фрезерний верстат портального типу Datron Neo. При менших габаритних розмірах і потужності порівняно з базовим, проектний верстат здатен забезпечити більшу продуктивність обробки. Крім того, він є значно дешевшим.

Техніко-економічні показники базового та проектного верстатів зведено до таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

Загальні вихідні техніко-економічні показники

| № п/п | Показники | Одиниця | Варіанти | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Базовий | Проектний |
| 1 | Штучний час обробки | хв. | 2,2 | 1,84 |
| 2 | Площа, яку займає верстат | $м^2$ | 1,04 | 1,0 |
| 3 | Встановлена потужність електродвигунів | кВт | 3,5 | 2,7 |
| 4 | Категорія ремонтної складності:<br>а) механічної частини<br>б) електричної частини | <br>УРО<br>УРО | <br>6<br>9 | <br>4<br>10 |
| 5 | Розряд роботи<br>а) верстатника<br>б) наладчика | <br>розряд<br>розряд | <br>4<br>6 | <br>4<br>6 |
| 6 | Оптова ціна базового верстата | Грн | 3 400 000 | 780000 |

4.2. Визначення експлуатаційних витрат, які припадають на одиницю продукції в базовому та проектному варіантах

Розрахунок виконуємо за формулою:

$$B_{\text{е}} = \sum_{i=1}^{m} B_{\text{і}}$$

де $B_{\text{з}}$ – витрати на заробітну плату основну, додаткову та відрахування на соціальні потреби (ЄСВ – єдиний соціальний внесок) основних робітників, грн;

$B_{\text{ел}}$ – витрати на силову електроенергію, грн;

$B_{\text{дм}}$ – витрати на допоміжні матеріали. грн;

$B_{\text{р}}$ – витрати на ремонт обладнання, грн;

$B_{\text{п}}$ – витрати на утримання площі, грн;

$B_{\text{а}}$ – витрати на амортизацію обладнання, грн;

$B_{\text{н}}$ – втрати на налагодження верстата.

Витрати на заробітну плату основну, додаткову та відрахування на соціальне страхування:

$$B_{з} = C_{г}\frac{T_{нор}}{60} \cdot (1 + K_{д}) \cdot (1 + K_{с}),$$

де $C_{\text{г}}$ – середньо-годинна ставка робітника, грн.;

$T_{\text{нор}}$ – час обробки деталі, хв.;

$K_{\text{д}}$, $K_{\text{с}}$ – коефіцієнти додаткової зарплати та відрахувань на соціальне страхування відповідно.

В базовому варіанті:

$$\boldsymbol{B_{з}^{\text{баз}} = 92,015 \cdot \frac{2,2}{60} \cdot (1 + 0,1) \cdot (1 + 0,22) = 4,5278}\ \text{грн}$$

В проектному варіанті:

$$\boldsymbol{B_з^{пр} = 92,015 \cdot \frac{1,84}{60} \cdot (1 + 0,1) \cdot (1 + 0,22) = 3,7868}\ \text{грн}$$

Витрати на електроенергію силову:

$$B_{ел} = \frac{N_в \cdot K_о \cdot K_N \cdot K_д}{\eta_м \cdot \eta_с} \cdot \frac{T_{нор}}{60} \cdot Ц_{ел},$$

де $N_в$ – установлена потужність електродвигунів верстата, кВт;

$К_о$ – коефіцієнт одночасної роботи електродвигунів (приймають 0,65...0,8);

$К_N$ – коефіцієнт, який враховує завантаження електродвигунів за потужністю (приймають 0,5...0,8);

$К_д$ – коефіцієнт, який враховує завантаження електродвигунів верстата за часом (приймають 0,3...0,5);

$\eta_с$ – середній коефіцієнт корисної дії електродвигунів – (приймають 0,86...0,9);

$\eta_м$ – коефіцієнт, що враховує втрати електроенергії в мережі підприємства – (приймають 0,92...0,96);

$Ц_{ел}$ – ціна 1 кВт/год силової електроенергії, грн.

$$\boldsymbol{B_{ел}^{баз} = \frac{3,5 \cdot 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,3}{0,87 \cdot 0,95} \cdot \frac{18,1}{60} \cdot 2,91 = 0,1610}\ \text{грн}$$

$$\boldsymbol{B_{ел}^{пр} = \frac{2,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,4}{0,88 \cdot 0,92} \cdot \frac{1,84}{60} \cdot 18,1 = 0,3628}\ \text{грн}$$

Витрати на допоміжні матеріали:

$$B_{дм} = \frac{M_{гв} \cdot R_м \cdot T_{нор}}{60 \cdot 100} \cdot K_п$$

де $М_{гв}$ – годинні витрати на допоміжні матеріали на 1 УРО механічної частини всіх типів верстатів, грн;

$R_м$ – категорія складності ремонту механічної частини верстата, УРО;

$К_п$ – коефіцієнт, який враховує тип виробництва (для серійного виробництва приймають 1).

$$\boldsymbol{B_{дм}^{баз} = \frac{79,5 \cdot 6 \cdot 2,2}{60 \cdot 100} \cdot 1,0 = 0,1751} \text{ грн}$$

$$\boldsymbol{B_{дм}^{пр} = \frac{79,5 \cdot 4 \cdot 1,84}{60 \cdot 100} \cdot 1,0 = 0,0975} \text{ грн}$$

Витрати на ремонт обладнання:

$$B_р = \frac{R_м \cdot P_{вн} + R_е \cdot P_{ве}}{F_{дрм}} \cdot \frac{T_{нор}}{60},$$

де $Р_{вн}$, $Р_{ве}$ – відповідно річні витрати на всі види ремонту на одну категорію ремонтної складності механічної та електричної частини верстата, грн./рік;

$F_{дрм}$ – дійсний річний фонд часу роботи верстата

$$B_р^{баз} = \frac{6 \cdot 980 + 9 \cdot 790}{3950} \cdot \frac{2,2}{60} = 0,1206 \text{ грн},$$

$$B_р^{пр} = \frac{4 \cdot 980 + 10 \cdot 790}{3950} \cdot \frac{1,84}{60} = 0,0918 \text{ грн}.$$

Витрати на утримання площі:

$$B_п = \frac{F_о \cdot K_f \cdot C}{F_{дрм}} \cdot \frac{T_{нор}}{60},$$

де $F_o$ – виробнича площа, яку займає одиниця обладнання, м$^2$;

$K_f$ – коефіцієнт, який враховує додаткову площу (на проходи, проїзди, побутові та службові приміщення)

С – річні витрати, пов'язані з використанням $1м^2$ виробничого приміщення, грн/м$^2$.

$$B_{\text{п}}^{\text{баз}} = \frac{1,04 \cdot 4,0 \cdot 788}{3950} \cdot \frac{2,2}{60} = 0,0304 \,\text{грн}$$

$$B_{\text{п}}^{\text{пр}} = \frac{1,0 \cdot 4,0 \cdot 788}{3950} \cdot \frac{1,84}{60} = 0,0245 \text{ грн}$$

Витрати на амортизацію верстата:

$$B_{\text{а}} = \frac{Ф_{\text{бал}} \cdot H_{\text{а}}}{F_{\text{дрм}} \cdot 100} \cdot \frac{T_{\text{нор}}}{60},$$

де $Н_а$ – норма амортизації, %;

$Ф_{бал}$ – балансова вартість верстата, грн.

Балансову вартість верстатів знаходимо за формулою:

$$Ф_{\text{бал}} = Ц_{\text{опт}} \cdot \left(1 + K_{\text{тр}} + K_{\text{м}} + K_{\text{ф}}\right)$$

де $Ц_{опт}$ – оптова ціна верстата, грн;

$К_{тр}$, $К_м$, $К_ф$ – відповідно коефіцієнти, які враховують транспортування (0,05...0,1), монтаж (0,04...0,06), улаштування фундаменту (0,02...0,08).

Таким чином:

$$\boldsymbol{Ф}_{\text{бал}}^{\text{баз}} = \mathbf{3400000} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{0,08} + \mathbf{0,06} + \mathbf{0,05}) = \mathbf{4046000} \text{ грн}$$

$$\boldsymbol{Ф}_{\text{бал}}^{\text{пр}} = \mathbf{780000} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{0,08} + \mathbf{0,06} + \mathbf{0,05}) = \mathbf{928200} \text{ грн}$$

Верстат, що проектується, на балансі підприємства враховується за повної собівартістю виготовлення

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{a}}^{\text{баз}} = \frac{\mathbf{4046000} \cdot \mathbf{20}}{\mathbf{3950} \cdot \mathbf{100}} \cdot \frac{\mathbf{2,2}}{\mathbf{60}} = \mathbf{7,5116} \text{ грн}$$

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{a}}^{\text{пр}} = \frac{\mathbf{928200} \cdot \mathbf{20}}{\mathbf{3950} \cdot \mathbf{100}} \cdot \frac{\mathbf{1,84}}{\mathbf{60}} = \mathbf{1,4413} \text{ грн}$$

Витрати на налагодження верстата:

$$B_н = C_{\text{гн}} \cdot \frac{T_{нал} \cdot A}{60 \cdot N_д} \cdot (1 + K_д) \cdot (1 + K_с)$$

де $C_{\text{гн}}$– годинна тарифна ставка наладчика, грн./год;

$A$ – кількість налагоджень за рік;

$T_{\text{нал}}$– час налагодження, хв.;

$N_{\text{д}}$– річна програма випуску деталей, шт./рік.

$$B_н^{баз} = 122,687 \cdot \frac{30 \cdot 12}{60 \cdot 20000} \cdot (1+1,1) \cdot (1+1,22) = 0,0494 \text{ грн.}$$

$$B_н^{пр} = 122,687 \cdot \frac{20 \cdot 12}{60 \cdot 20000} \cdot (1+1,1) \cdot (1+1,22) = 0,0329 \text{ грн.}$$

Результати розрахунків зводимо до таблиці 4.2.

Таблиця 4.2

Експлуатаційні витрати (собівартість обробки)

| № з.п | Експлуатаційні витрати | Умовне позначення | Варіанти | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Базовий | Проектний |
| 1. | Заробітна плата робітника основна, додаткова та ЄСВ | $B_з$ | 4,5278 | 3,7868 |
| 2. | Силова електроенергія | $B_{ел}$ | 0,1610 | 0,3628 |
| 3. | Допоміжні матеріали | $B_{дм}$ | 0,1751 | 0,0975 |
| 4. | Ремонт обладнання | $B_р$ | 0,1206 | 0,0918 |
| 5. | Утримання приміщення | $B_п$ | 0,0304 | 0,0245 |
| 6. | Амортизація обладнання | $B_а$ | 7,5116 | 1,4413 |
| 7. | Налагодження обладнання | $B_н$ | 0,0494 | 0,0329 |
| 8. | Загальна сума | $B_е$ | 12,5759 | 5,8376 |

## 4.3. Розрахунок показників економічної ефективності

Річний економічний ефект, який отримує підприємство споживач, розраховуємо за формулою: грн.

$$E_р = (B_е^б - B_е^{пр}) \cdot N_д - E_н \cdot K_{сп},$$

де $K_{сп}$ – додаткові капітальні витрати у споживача, грн.

$$K_{сп} = Ф_{бал}^{пр} \cdot Q_{пр} - Ф_{бал}^{б} \cdot Q_б$$

$$K_{сп} = 928200 \cdot 1 - 4046000 \cdot 1 = -3117800 \text{ грн}$$

де $Ф_{бал}^{пр}, Ф_{бал}^{б}$ – відповідно балансова вартість проектного та базового верстатів, грн;

$Q_{пр}$, $Q_б$ – потреба у верстатах для виконання річної програми випуску деталей відповідно в проектному та базовому варіантах для виконання річної програми випуску деталей: шт.

$$Q = \frac{N_д \cdot T_{нор}}{F_{дрм} \cdot 60 \cdot K_{вн}},$$

$$Q^{баз} = \frac{20000 \cdot 2,2}{3950 \cdot 60 \cdot 1,01} = 0,18$$

$$Q^{пр} = \frac{20000 \cdot 1,84}{3950 \cdot 60 \cdot 1,01} = 0,15$$

Тобто, для виконання річної виробничої програми виробництва деталей в базовому і в проектному варіантах потрібен 1 верстат.

де $K_{вн}$ – коефіцієнт виконання норм часу ($K_{вн}$=1,0…1,08)

$$E_р = (12,5759 - 5,8376) \cdot 20000 - 0,16 \cdot (-3117800) = 634000 \text{ грн.}$$

Зростання продуктивності праці визначаємо за показником витрат часу($t_{шт}$) на одиницю продукції в проектному варіанті в порівнянні з базовим,%:

$$П_п = 100 - \frac{t_{шт(прект)}}{t_{шт(баз)}} \cdot 100\ \%,$$

$$П_п = 100 - \frac{1,84}{2,2} \cdot 100 = 16,4\ \%$$

У підсумку складаємо зведену таблицю техніко-економічних показників проекту (табл. 4.3).

Таблиця 4.3

Підсумкові техніко-економічні показники базового та проектного верстатів

| № п/п | Показники | Одиниця | Базовий варіант | Проект | Зміна, % (+,-) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Потреба у верстатах | шт./рік | 1 | 1 | – |
| 2. | Річна програма випуску виробів | шт./рік | 20000 | 20000 | – |
| 3. | Штучний час обробки виробу | хв. | 2,2 | 1,84 | –16,4 |
| 4. | Коефіцієнт завантаження верстату | $\eta$ | 0,18 | 0,15 | –16,7 |
| 5. | Оптова ціна верстату | грн. | 3400000 | 780000 | –77,1 |
| 6. | Балансова вартість верстату | грн. | 4046000 | 928200 | –77,1 |
| 7. | Собівартість одиниці обробки із застосуванням об’єкта | грн. | 12,576 | 5,838 | –53,6 |
| 8. | Річний економічний ефект | грн. | – | 634000 | – |

# ВИСНОВКИ

У даній кваліфікаційній роботі для освітнього ступеня «магістр» досліджено верстати з паралельною кінематикою типу «Дельта» (в конфігурації Linear Delta) та визначено їх конструктивні і кінематичні залежності.

При розв’язанні даного завдання вирішено наступні задачі: проаналізовано існуючі схеми побудови технологічного обладнання з паралельною кінематикою (зокрема класичні та лінійні «дельта») та їх технічні характеристики; поставлено і розв’язано пряму та зворотну задачі кінематики для визначеної лінійної компоновки верстата; проведено теоретичні дослідження рухів виконавчого органу вздовж координатних осей та по колу; виконано моделювання робочого простору верстата; розраховано техніко-економічні показники доцільності впровадження такого верстата.

Результати моделювання свідчать, що кінематика верстата типу «Linear Delta» має яскраво виражений нелінійний характер. Єдиним лінійним рухом у даній кінематиці є вертикальне переміщення вздовж осі Z, де всі три повзуни рухаються абсолютно синхронно. Круговий рух виконавчого органу змушує повзуни виконувати синусоїдальний рух із фазовим зсувом 120°. Робочий простір механізму має складну форму, близьку до циліндра зверху та куполу знизу. Зворотна задача кінематики має точне аналітичне рішення, тоді як пряма задача зводиться до квадратного рівняння. Для забезпечення найкращих точнісних та динамічних характеристик рекомендується розміщувати робочу зону обробки у центральній та серединній частинах робочого простору, уникаючи його меж.

В роботі проведено економічне обґрунтування впровадження результатів досліджень при проектуванні та експлуатації верстатів з паралельною кінематикою типу «Дельта» (на прикладі порівняння з високошвидкісним фрезерним верстатом портального типу Datron Neo). Визначено, що впровадження проектного верстата дозволяє скоротити штучний час обробки на 16,4% та знизити собівартість одиниці обробки з 12,576 грн до 5,838 грн. Застосування цієї архітектури є економічно вигідним та дозволить отримати у користувача найбільший річний економічний ефект у розмірі 634 000 грн

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Валявський І.А. Комп‘ютерне моделювання робочого простору верстата-гексапода / І. А. Валявський // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – Запоріжжя, ЗНТУ, 2003. – №2. – С. 109-114

2. Валявський І. А. Математичне моделювання положення вихідного органу *l*-координатного механізму / І. А. Валявський, В. А. Крижанівський // Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація : збірник наук. праць. – Кіровоград : КДТУ, 2003. – Вип. 12. – С. 223–229.

3. Валявський І. А. Графічне моделювання робочого простору верстата-гексапода / І. А. Валявський, В. А. Крижанівський // Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація : збірник наук. праць. – Кіровоград : КДТУ, 2003. – Вип. 13.

4. Валявський І. А. Технологічне обладнання з паралельною кінематикою : навч. посіб. / І. А. Валявський, О. В. Лисенко, І. А. Лисенко ; М-во освіти і науки України, Центральноукраїн. нац. техн. ун-т. - Кропивницький : ЦНТУ, 2023. - 281 с.

5. Дмитрієв Д. О. Компоновки і кінематика свердлильно-фрезерних верстатів з механізмами паралельної структури // Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Серія: Машинобудування. – 2010. – № 59. – С. 63–69.

6. Кириченко А. М. Геометрична побудова робочого простору обладнання з механізмами паралельної структури / А. М. Кириченко, В. Б. Струтинський // Збірник наукових праць Кіровоградського національного технічного університету. Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація. – Кіровоград : КНТУ, 2011. – Вип. 24. – С. 216-222

7. Кириченко А. Аналіз кінематики верстата з двокоординатним механізмом паралельної структури «біпод» / А. Кириченко, Л. Ленченко, С. Заїка // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2008. – Том 13, № 2. – С. 74–79.

8. Костюк В. І. Робототехніка / В. І. Костюк, Г. О. Спину, Л. С. Ямпольський. – К. : Вища школа, 1994. – 446 с.

9. Кропівний О. О. Кінематичні залежності двокоординатного механізму паралельної структури з поворотним кріпленням шарнірів штанг змінної довжини. / О.О. Кропівний, А.І. Гречка, А.М. Кириченко, К.К. Щербина // Центральноукраїнський науковий вісник. Технічні науки. 2022. Вип. 5(2). С. 22-30

10. Кузнєцов Ю. М. Сучасний стан, прогнозування і перспективи розвитку верстатів з паралельною кінематикою / Ю. М. Кузнеєцов, В. А. Крижанівський, Р. А. Скляров // Процеси механічної обробки в машинобудуванні : (зб. наукових праць). – ЖДТУ, 2005. – Вип. 1. – С. 320–333.

11. Кузнєцов Ю. М. Візуалізація формоутворюючих рухів механізмами паралельної структури в верстатах нових компоновок / Ю. М. Кузнєцов, Д. О. Дмитрієв // Вісник ТДТУ. – 2008. – № 1.

12. Кузнєцов Ю. М. Моделювання технологічних рухів в верстатах паралельної структури при обробці складнопрофільних поверхонь / Ю. М. Кузнєцов, Д. О. Дмитрієв // Современные технологии в машиностроении : (зб. наукових праць НТУ «ХПІ»). – 2008. – Вип. 1.

13. Кузнєцов Ю. М. Світові тенденції і перспективи розвитку верстатобудування в Україні / Ю. М. Кузнєцов // Зб. наук. праць за матеріалами науково-методичної конф. «Вища освіта – 2006». – 2007. – С. 45–55.

14. Павленко І.І. Дослідження впливу конструктивних параметрів механізму паралельної структури на функціональні можливості верстата з паралельною кінематикою. / І. І. Павленко, І. А. Валявський // Конструювання,

виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин. – Загальнодержавний міжвідомчий науково-технічний збірник. – Кіровоград, 2008. – Вип. 38. – С. 284-288.

15. Економічні та організаційно-планові розрахунки при обґрунтуванні доцільності розробки нових виробів: метод. вказівки для виконання економічної частини дипломних проектів для студ. спец. 131 «Прикладна механіка» та 133 «Галузеве машинобудування» //Укладачі: Журило І.В., Полтавець М.М. Кропивницький: ЦНТУ, 2017. 40 с.

16. Петренко К.В., Скоробогатова Н.Є. Економіка і організація виробництва: навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за технічними та інженерними спеціальностями. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 177 с. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/27463

17. Савченко С.М. Економіка і організація виробництва: практикум для студентів технічних спеціальностей. / С.М. Савченко, А.Д. Кухарук, Н.Ю. Тимошенко. // Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022, 93 с. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46962.

18. Bonev I. DexTAR. User's Manual. – Montreal: Mecademic Inc., 2014. – 25 p.

19. Gough V. E. Universal Tire Test Machine, Proceedings of the 9th International Automobile Technical Congress FISITA, London (UK), ImechE (pp. 117 – 137), 1962.

20. Lilla A. Quicker Success with Hybrid Kinematics «ECOSPEED», The 3rd Chemnitz Parallel Kinematics Seminar PKS 2002, Chemnitz, Germany, pp.775-784

21. Merlet J. P. Parallel robots, Kluwer, 2000

22. Merlet J. P. An initiative for the kinematics study of parallel manipulators, Proceedings of the WORKSHOP on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators, October 3–4, 2002, Quebec City, Quebec, Canada, pp.1-9

23. Merlet J.-P. Parallel Robots (Second Edition) // Solid Mechanics and Its Applications. – Springer, 2006. – 412 p.

24. Neumann K. E. Tricept Applications, The 3rd Chemnitz Parallel Kinematics Seminar PKS 2002, Chemnitz, Germany, pp.547-551

25. Neumann K. E. Next Generation Tricept – A True Revolution in Parallel Kinematics, The 4th Chemnitz Parallel Kinematics Seminar PKS 2004, Chemnitz, Germany, pp.591-594

26. Rehsteiner F. Putting parallel kinematics machines (PKM) to productive work / Rehsteiner F., Neugebauer R., Spiewak S., Wieland F. // Annals of CIRP, 48/1/1999, p. 345-350.

27. Schoppe E. Tripod Machine SKM 400 Design, Callibration and Practical Application / Schoppe E.; Pönisch A.; Maier V.; Puchtler T.; Ihlenfeldt S. // The 3rd Chemnitz Parallel Kinematics Seminar PKS 2002, Chemnitz, Germany, pp.579-594

28. Stewart, D. A Platform with Six Degrees of Freedom, Proc. Inst. Mech. Eng. London, Vol 180, 1965, pp. 371-386.

29. Tlusty J. Fundamental comparison of the use of serial and parallel kinematics for machine tools / Tlusty J., Ziegert J., Ridgeway S. // Annals of CIRP, 48/1/1999, pp. 351-356

30. Treib T. Parallel Kinematic Machines in Practice, The 3rd Chemnitz Parallel Kinematics Seminar PKS 2002, Chemnitz, Germany, pp.63-66