

Міністерство освіти і науки України  
Центральноукраїнський національний технічний університет

Факультет  
автоматики, енергетики

Кафедра електротехнічних  
систем та енергетичного менеджменту

***МЕТОДИ ПЛАНУВАННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ  
ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ***  
*методичні вказівки до виконання практичних робіт  
для студентів спеціальності 141 "Електроенергетика,  
електротехніка та електромеханіка"*

Кропивницький  
2017

Міністерство освіти і науки України  
Центральноукраїнський національний технічний університет

Факультет  
автоматики, енергетики

Кафедра електротехнічних  
систем та енергетичного менеджменту

***МЕТОДИ ПЛАНУВАННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ  
ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ***  
*методичні вказівки до виконання практичних робіт  
для студентів спеціальності 141 "Електроенергетика,  
електротехніка та електромеханіка"*

Затверджено  
на засіданні кафедри  
електротехнічних систем та  
енергетичного менеджменту  
Протокол № 1 від 28.08.2017 р.

Кропивницький  
2017

Методи планування та організації експериментальних досліджень: методичні вказівки до виконання практичних робіт для студентів спеціальності 141 "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка"/ [уклад.: Савеленко І.В., Петрова К.Г., Зінзура В.В.], Центральнoукр. нац. техн. ун-т. – Кропивницький: ЦНТУ, 2017. – 42 с.

Укладачі: к.т.н., ст. викл. каф. ЕТС та ЕМ Савеленко І.В.,  
к.т.н., ст. викл. каф. ЕТС та ЕМ Петрова К.Г.,  
к.т.н., доц. каф. ЕТС та ЕМ Зінзура В.В.

Рецензент: д.т.н., проф. В.В. Клименко

© Савеленко І.В., Петрова К.Г.,  
Зінзура В.В., 2017  
© Центральнoукраїнський  
національний технічний університет,  
2017

## ВСТУП

Електронні таблиці *Excel* є універсальним обчислювальним інструментом, знання якого обов'язкове для студентів технічних спеціальностей. Електронні таблиці відкрили нову епоху у програмуванні – так зване «програмування без мови», завдяки чому складні розрахунки стали доступними непрограмістам.

Вивчення проблем економіко-математичного моделювання в середовищі *Excel* має певні переваги в порівнянні з використанням спеціалізованих статистичних пакетів, в яких усі розрахунки виконуються автоматично і користувач отримує відразу готовий результат.

*Мета методичних вказівок:*

– вивчити певні розділи навчального курсу економіко-математичного моделювання, показати, як знаходять ті або інші результати, освоїти особливості обчислювальних алгоритмів, довести теоретичні міркування до числа з подальшою інтерпретацією отриманих результатів і економічних висновків.

У даних методичних вказівках розглянуто основні чисельні методи, які використовуються в курсі «Методи планування та організації експериментальних досліджень». Кожен розділ присвячений окремій темі курсу, і всі розділи побудовані однаково. Спочатку викладаються необхідні теоретичні відомості, потім докладно розглядаються розв'язання задач. Наприкінці кожного розділу наведено варіанти індивідуальних домашніх завдань, які вибираються за останньою цифрою номера залікової книжки студента.

Дані методичні вказівки не замінюють підручники з економіко-математичного моделювання. Теоретичні основи викладаються у стислому вигляді. Даються тільки ті відомості, які необхідні безпосередньо для розв'язання задач. Як підручники можна використати також роботи [1–7].

## 1. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ В MS EXCEL

**Мета роботи** – освоїти роботу с функціями побудови графіків в *MS Excel*.

### Етапи виконання роботи

1. Запуск програми *MS Excel*:

Пуск → Все программы → *Microsoft Office* → *Microsoft Office Excel*.

2. Розрахунок значень аргументу  $x$ .

Розмір рівного інтервалу має вигляд

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n},$$

де  $x_{\max}$ ,  $x_{\min}$  – максимальне та мінімальне значення ознаки в сукупності;  
 $n$  – кількість відрізків ( $x_2 = x_1 + (x_{\max} - x_{\min})/n$ ).

3. Розрахунок значень функцій  $y_i = a_i \cdot \ln x + \frac{b_i}{\sqrt[5]{x}}$ , де  $x \in [1; 3]$ ,  $i = \overline{1, 2}$ .

4. Побудова графіків функцій.

Вставка → Диаграмма → Точечная → Точечная диаграмма со значениями, соединенными сглаживающими линиями → Далее → Ряд → Добавить ряд.

Після цього у відповідних рядках «Значения X», «Значения Y» зазначаємо діапазон.

Після появи першого графіка обираємо команду «Добавить → Ряд» і будуємо другий графік.

5. Оформлення роботи у вигляді звіту на аркуші *Excel*.

Зразок виконання завдання показано на рис. 1.1.

### Завдання 1. Побудова графіків функцій в MS Excel

Побудувати графіки функцій для двох значень параметрів: 1)  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 1,5$ ; 2)  $a_2 = 2$ ;  $b_2 = 2$ . При цьому кількість відрізків становить  $n = 10 + N$ , де  $N$  – останній номер залікової книжки студента.

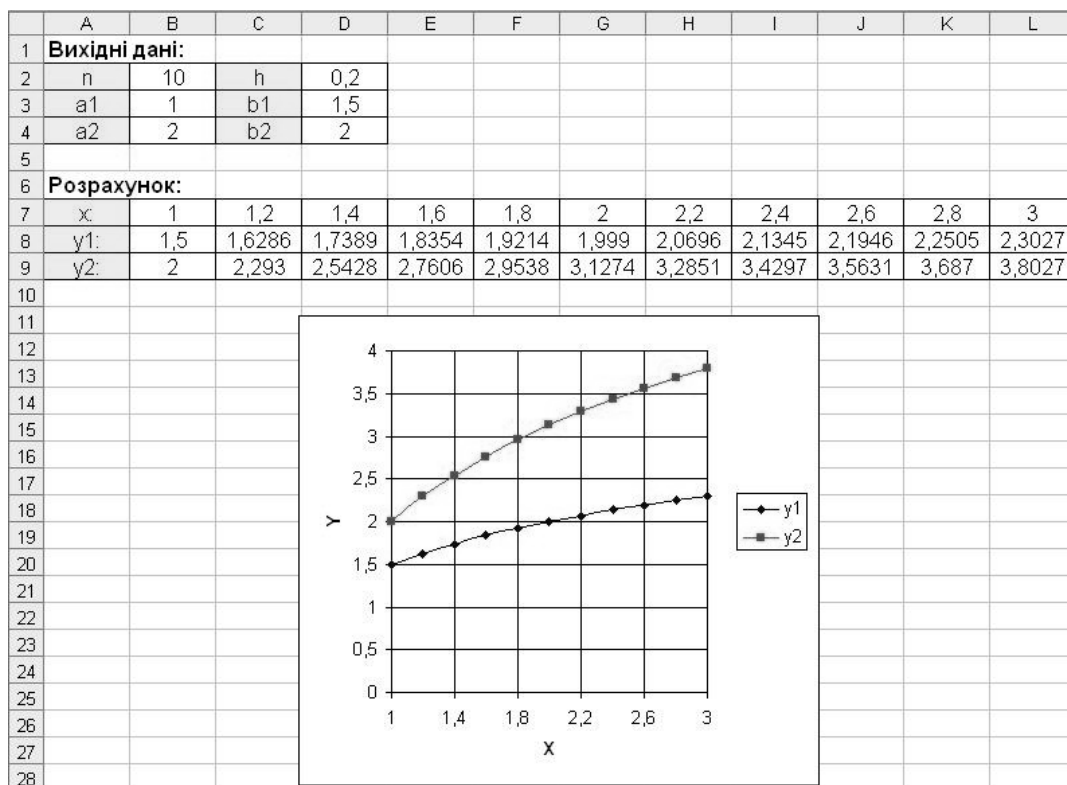


Рисунок 1.1

## 2. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ

**Мета роботи** – розв'язати задачу лінійного програмування (ЗЛП) графічним методом, результати подати в *MS Excel*.

### Етапи виконання роботи

1. Для свого варіанту вихідних даних вибрати задачу та записати її математичну модель.
2. Позначити область допустимих розв'язків (ОДР) на координатній площині.
3. Показати лінії рівня цільової функції ( $Z = 0$ ) та її градієнт  $\vec{g}$ .
4. Виділити оптимальну точку та знайти її координати.
5. Знайти значення цільової функції (ЦФ) в оптимальній точці.

6. Змінити коефіцієнти у ЦФ так, щоб задача мала множину оптимальних розв'язків (надати один з можливих варіантів). Намалювати новий графік.

7. Дати пораду стосовно того, що необхідно зробити для досягнення кращих результатів (визначити параметри моделі, які підлягають перегляду; коефіцієнти ЦФ залишити такими, як у п.1; повторити пп. 2–4 на новому графіку). Як зміниться значення ЦФ у новій оптимальній точці?

8. Оформити роботу у вигляді звіту на аркуші *Excel*. Зразок виконання завдання показано на рис. 2.1.

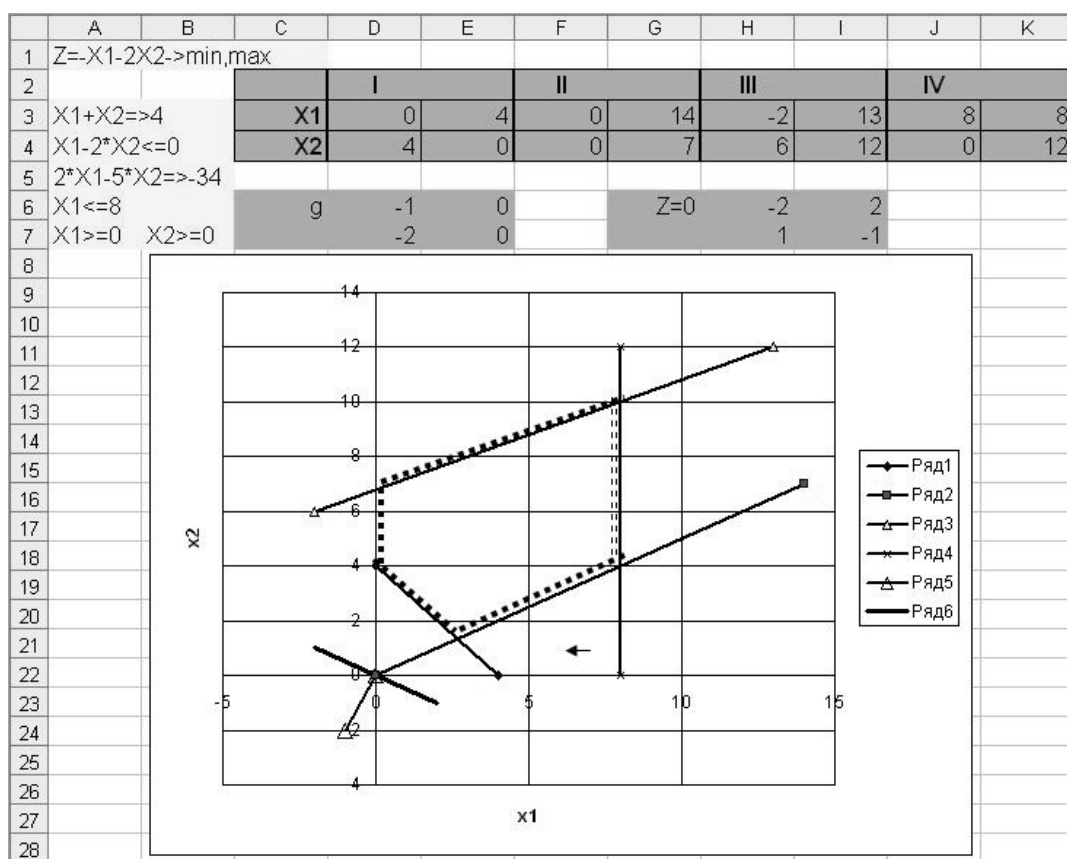


Рисунок 2.1

## Завдання 2. Розв'язання ЗЛП графічним методом

**Варіант 1.** На підприємстві випускається продукція двох видів: А, Б. Для цього використовується сировина чотирьох типів: I, II, III, IV, запаси якої дорівнюють відповідно 21, 4, 6, 10 од. Для виробу А необхідна така кількість одиниць сировини чотирьох типів: 2, 1, 0, 2 од. Для виробу Б необ-

хідна така кількість одиниць сировини чотирьох типів: 3, 0, 1, 1 од. Випуск одного виробу типу А дає 3 у. о. прибутку, одного виробу типу Б – 2 у. о. Необхідно скласти такий план виробництва продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальним.

**Варіант 2.** Підприємство випускає три види виробів. Місячна програма випуску становить 200 виробів першого виду, 1800 – другого, 1500 – третього. Для випуску виробів використовують матеріали, щомісячні витрати яких не можуть перевищувати 61000 кг. На один виріб 1-го виду витрачається 8 кг матеріалу, 2-го – 10 кг, 3-го – 11 кг. Оптова ціна одного виробу першого виду становить 7 грн, другого і третього – 10 і 19 грн відповідно. Визначити оптимальний план випуску продукції, який забезпечує підприємству максимальний прибуток.

**Варіант 3.** Меблева фабрика виготовляє столи, стільці, бюро та книжкові шафи, використовуючи два різних види дощок, причому фабрика має 500 м<sup>3</sup> дощок першого виду і 1000 м<sup>3</sup> дощок другого. Крім того, задані трудові ресурси становлять 800 людино-годин. В таблиці наведено нормативи витрат кожного виду ресурсів на виготовлення одного виробу і прибуток на один виріб.

Ресурси	Витрати на одиницю продукції			
	Столи	Стільці	Бюро	Книжкові шафи
Дощки першого виду, м <sup>3</sup>	5	1	9	12
Дощки другого виду, м <sup>3</sup>	2	3	4	1
Трудові ресурси, люд.-год.	3	2	5	10
Прибуток на один виріб, тис. грн	12	5	15	10

За цими вихідними даними розв'язати задачу. Визначити оптимальний асортимент, що максимізує прибуток.

**Варіант 4.** Для виробництва трьох видів виробів (А, В, С) використовуються три різних види сировини. Кожний з видів сировини може бути використаний у кількості, відповідно не більшій 180, 210 й 244 кг. Для виробу А необхідно така кількість одиниць сировини трьох видів: 4, 3, 1 кг; для виробу В – 2, 1, 2 кг; для виробу С – 1, 3, 5 кг. Випуск одного виробу типу А дає 10 у. о. прибутку, одного виробу типу В – 14 у. о., одного виробу типу С



– 12 у. о. Необхідно скласти такий план виробництва продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальним.

**Варіант 5.** Для збереження нормальної життєдіяльності людина повинна у добу споживати білків не менше 120 у. о., жирів – не менше 70 у. о. і вітамінів – не менше 10 у. о. Вміст їх у кожній одиниці продуктів  $P_1$  і  $P_2$  дорівнює відповідно  $(0,2; 0,075; 0)$  і  $(0,1; 0,1; 0,1)$  у. о. Вартість 1 од. продукту  $P_1$  становить 2 руб.,  $P_2$  – 3 руб. Побудуйте математичну модель задачі, що дозволяє так організувати харчування, щоб його вартість була мінімальною, а організм одержав необхідну кількість поживних речовин.

**Варіант 6.** Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі ( $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ) використовує три види сировини: цукор-пісок, патоку і фруктове пюре. Норми використання сировини кожного виду на виробництво одної тонни карамелі кожного виду подано в таблиці; також відома загальна кількість сировини кожного виду і прибуток від реалізації 1 т карамелі даного виду.

Вид сировини	Норми витрат сировини на 1 тонну продукції			Об'єм сировини, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
Цукор-пісок	0,3	0,2	0,1	1000
Патока	0,8	0,2	0,3	800
Фруктове-пюре	0,4	0,1	0,1	150
Прибуток від реалізації 1 т продукції, тис. грн	1,2	3,2	2,5	–

Необхідно знайти план виробництва карамелі, який забезпечує максимальний прибуток.

**Варіант 7.** Підприємство має ресурси двох типів у кількості 120 і 80 од. Ці ресурси використовуються для випуску продукції видів I і II, причому витрати на виготовлення одиниці продукції виду I дорівнює 2 од. ресурсу першого типу та 2 од. ресурсу другого типу; на виготовлення одиниці продукції виду II – 3 од. ресурсу першого типу та 1 од. ресурсу другого типу. Прибуток від реалізації одиниці продукції першого виду складає 6 г. о., другого виду – 4 г. о. Скласти план випуску продукції, який забезпечує найбільший

прибуток за умови, що продукції першого виду має бути випущено не менше продукції другого виду.

**Варіант 8.** На звірофермі можуть вирощувати чорно-бурих лисиць і песців, для яких заготовляють три види кормів. Кількість корму кожного виду, яку повинні щоденно одержувати звірі, загальна кількість корму кожного виду, яка може бути використана фермою, і прибуток від реалізації однієї шкурки лисиці і песця подані в таблиці. Визначити, скільки лисиць і песців необхідно виростити на фермі, щоб прибуток від реалізації їх шкурок був максимальний.

Вид корму певного типу	Кількість одиниць корму, якого щоденно потребують тварини		Загальна кількість корму
	Лисиця	Песець	
I	2	3	360
II	4	1	480
III	6	7	852
Прибуток від реалізації однієї шкурки, грн	32	25	—

**Варіант 9.** На підприємстві застосовується сталь трьох марок: *A*, *B*, *C*. Запаси її обмежені та дорівнюють відповідно 10, 16 і 12 од. Підприємство випускає два види виробів: I, II. Для виробу I необхідна одна одиниця сталі всіх марок. Для виробу II – дві одиниці сталі марки *B*, 1 одиниця марки *C* і не потрібна сталь марки *A*. Від реалізації одиниці виробу виду I підприємство одержує 3 у. о. прибутку, виду II – 2 у. о. Скласти план випуску продукції, що повинен забезпечити найбільший прибуток.

**Варіант 10.** Фабрика випускає три види тканин. Добові ресурси фабрики становлять 700 од. виробничого встаткування, 800 од. сировини й 600 од. електроенергії, витрати яких на одиницю тканини такі: для устаткування за видами тканини – 2, 3 і 4 од., для сировини – 1, 4 і 5 од., для електроенергії – 3, 4 і 2 од. Ціна одного метра тканини першого виду становить 8 у. о., другого виду – 7 у. о., третього виду – 6 у. о. Скільки необхідно виготовити тканини кожного виду, щоб прибуток від реалізації був максимальним?

### 3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ НАДБУДОВИ *MS EXCEL* «ПОИСК РЕШЕНИЯ»

**Мета роботи** – за вихідними даними завдання 2 розв'язати ЗЛП за допомогою надбудови «Поиск решения».

#### Етапи виконання роботи

1. Вихідну інформацію на робочому аркуші сформувати двома способами:

1.1. Записати вираз для ЦФ і лівих частин обмежень відразу у комірці (приклад 3.1), розв'язати задачу, аркуш назвати «Оптимальний розв'язок 1».

1.2. Записати параметри моделі у матричному вигляді і через них сформувати ЦФ та ліві частини обмежень (приклад 3.2), розв'язати задачу, аркуш назвати «Оптимальний розв'язок 2».

2. Порівняти отримані результати між собою та з результатами графічного методу.

3. Оформити роботу у вигляді звіту на аркуші *Excel*.

**Приклад 3.1.** Розв'язати наступну ЗЛП за допомогою надбудови «Поиск решения»:

$$Z = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 4; \\ 2x_2 \leq 12; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18; \end{cases} \quad (3.2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (3.3)$$

#### Розв'язання

##### Крок 1. Відкрити програму *Microsoft Excel*

Пуск → Все программы → *Microsoft Office* → *Microsoft Office Excel*.

##### Крок 2. Записати вихідні дані у комірки

У комірках B1 і B2 знаходитимуться значення невідомих змінних  $x_1$  та  $x_2$  відповідно.

У комірці B4 запишемо вираз для цільової функції, використовуючи посилання на комірки B1 і B2, що «зарезервовані» для значень  $x_1$  та  $x_2$ . Тобто у комірці B4 необхідно записати наступну формулу:

=3\*B1+5\*B2, що фактично є правою частиною виразу (3.1).

У комірках B6, B7, B8 записуємо ліві частини нерівностей (3.2):

=B1

=2\*B2

=3\*B1+2\*B2

При виконанні цих дій значення у комірках B4, B6, B7, B8 дорівнюватимуть нулю, оскільки значення у комірках B1 і B2 відсутні, а Excel сприймає їх такими, що дорівнюють нулю. Як відомо, у більшості випадків початковий розв'язок симплекс-методу є нульовим, у нашому випадку  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ . Тому наявність нулів у комірках B4, B6, B7, B8 має сприйматися спокійно. Важливо, щоб тип значень у комірках, у яких мають бути числові значення, був числовим.

У комірках D6, D7, D8 записуємо праві частини нерівностей (3.2)

=4

=12

=18

Виконаних дій достатньо для формування вихідної інформації. На основі зарезервованих комірок B1, B2, а також формул і даних, що знаходяться в комірках B6, B7, B8 і D6, D7, D8, відповідно за допомогою алгоритму надбудови «Поиск решения» можна знайти розв'язок задачі. Ці комірки виділимо сірим кольором.

### **Крок 3. Пояснення та інформація для користувача**

Для того щоб користувачу було зручно працювати з уведеними даними, в робочому листі Excel необхідно вказати тип кожного функціонального обмеження (C6:C8), обмеження змінних на знак (C1:C2), тип оптимізації (C4) та записати пояснення до кожної комірки або групи комірок (комірки A1:A2, A4, A6:A8, рядки 3, 5). Ці дані хоча і не використовуються алгоритмом пошуку розв'язку задачі, проте вони допомагають користувачу у подальшій роботі безпосередньо з надбудовою «Поиск решения».

#### Крок 4. Робота з надбудовою «Поиск решения»

Зайти у підменю Сервис → Поиск решения. На екрані з'явиться таке вікно, як і на рис. 3.4. Необхідно розмістити його так, щоб воно не закривало введену інформацію на робочому листі *Excel*.

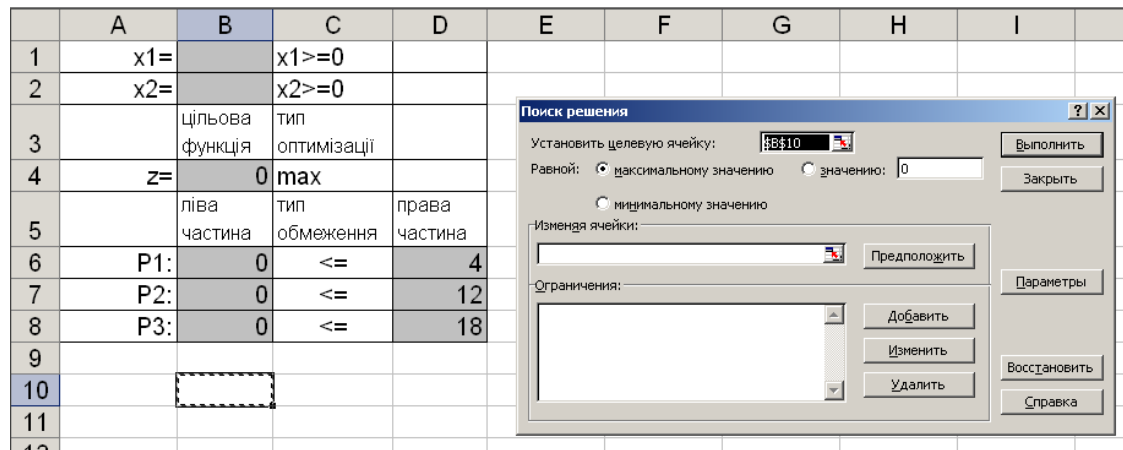


Рисунок 3.1

У полі «Установить целевую ячейку:» необхідно вибрати комірку, у якій записано вираз для цільової функції. У нас це комірка B4. Далі пропонується обрати один з трьох взаємовиключних варіантів – типів оптимізації. Якби нам необхідно було мінімізувати цільову функцію, то ми обрали б вираз «минимальному значению», проте за замовчуванням тип оптимізації – максимізація, як і в нашій задачі, тому переходимо відразу до наступного поля.

У полі «Изменяя ячейки:» вказуються комірки, які зарезервовано під невідомі змінні ( $x_1$  та  $x_2$ ), а саме B1, B2. Адреси комірок вводяться через знак «;».

Далі необхідно вказувати типи обмеження. Програма «Поиск решения» не розрізняє функціональні обмеження і обмеження на знак. Тому всі вони вводяться за допомогою кнопки «Добавить». Після натиснення на кнопку з'явиться ще одне віконце, яке має три поля (рис. 3.2, а). У полі ліворуч вказується комірка, у якій знаходиться вираз для лівої частини функціонального обмеження. У центральному полі обирається тип обмеження ( $\leq$ ,  $=$ ,  $\geq$ ) та тип невідомих змінних. За замовчуванням тип змінних дійсний, як і у нашій задачі, тому виконувати якісь дії щодо обрання типу

змінних для даної задачі не потрібно. У полі праворуч вказується комірка, у якій знаходиться права частина функціонального обмеження. На рис. 3.2, б показано віконце після введення в поля необхідних даних для першого обмеження.

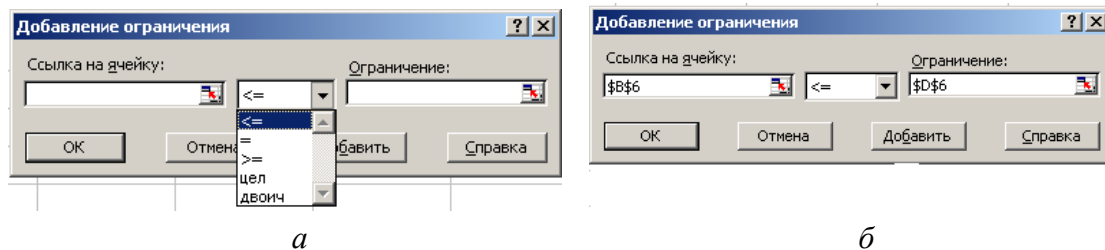


Рисунок 3.2

Для введення наступних функціональних обмежень і обмежень на знак необхідно виконувати ті самі дії і користуватися кнопкою «Добавить». При уведенні обмежень на знак у полі ліворуч робиться посилання на відповідну змінну, а у полі праворуч вводиться число «0», при цьому обирається тип нерівності «>=» або «<=». Після введення всіх обмежень необхідно натиснути на кнопку «ОК», після чого робоче вікно надбудови «Поиск решения» матиме такий вигляд, як на рис. 3.3.

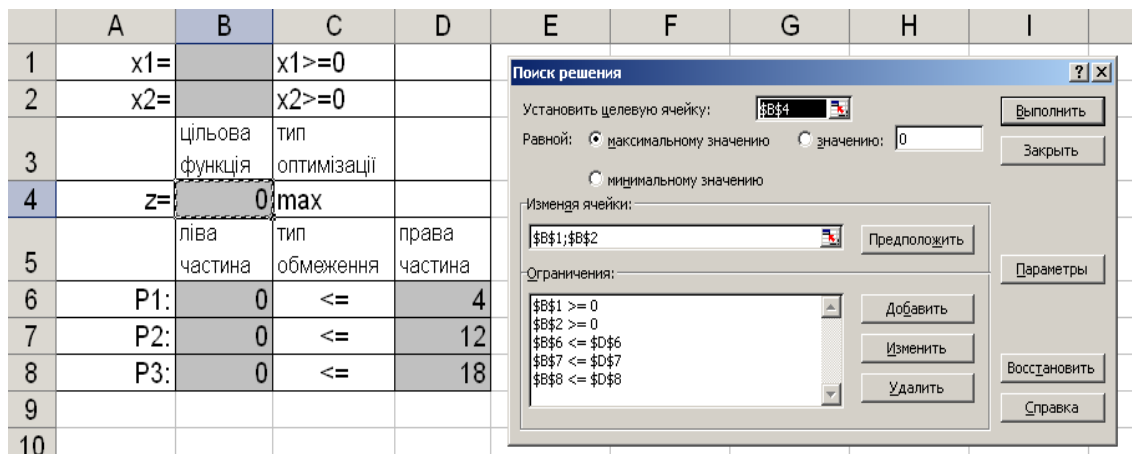


Рисунок 3.3

З рис. 3.3 видно, що хоча обмеження на знак вводяться так, як і функціональні обмеження, проте в списку «Ограничения:» першими йдуть саме обмеження на знак.

### Крок 5. Отримання розв'язку задачі і аналіз результатів

Після того як всі дії виконано, натиснути кнопку «Выполнить». На екрані вікно «Поиск решения» зміниться вікном «Результаты поиска решения», так, як це показано на рис. 3.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x1=	2	x1>=0						
2	x2=	6	x2>=0						
3		цільова функція	тип оптимізації						
4	z=	36	max						
5		ліва частина	тип обмеження	права частина					
6	P1:	2	<=	4					
7	P2:	12	<=	12					
8	P3:	18	<=	18					

Рисунок 3.4

Як видно з рис. 3.4, при появі цього вікна порожні до цього комірки B1 і B2 отримали свої значення, які і є розв'язком задачі. Про те, що вони є оптимальним допустимим розв'язком свідчить надпис у вікні «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены». Функції даного вікна дозволяють на окремих робочих листах Excel отримати детальний звіт щодо розв'язку задачі, обравши для цього необхідні звіти у списку «Тип отчета». Про подробиці можна дізнатися у спеціальній літературі. Для виходу з поточного вікна треба натиснути на кнопку «ОК».

### Приклад 3.2. Інший підхід до запису вихідної інформації

У розглянутому прикладі кількість змінних і обмежень невелика, отже, і кількість параметрів задачі була невеликою, тому вирази для ЦФ і лівої частини обмежень записувалися безпосередньо у комірки B4, B6:B8. У задачах зі значно більшою кількістю параметрів даний підхід щодо запису вихідних даних є нераціональним, тому пропонується записувати вихідні

дані у матричному вигляді. Для цього необхідно згадати основи матричної алгебри.

Запишемо ЦФ у матричному вигляді:

$$Z = C^T X; C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Функціональні обмеження у матричному вигляді:

$$AX \leq B; A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо розв'язок цієї ж задачі, підготувавши вихідні дані у інший спосіб.

У стовпчику А будемо записувати пояснення для введених даних. Комірки В1, С1 зарезервуємо для значень невідомих змінних. Під ними у рядку 2 запишемо, які саме змінні знаходяться там, та обмеження їх на знак, якщо воно є. У комірках В3 і С3 запишемо елементи вектора  $C$ , у комірках В4:В6, С4:С6 – елементи матриці  $A$ , у комірках F4:F6 – елементи вектора  $B$ . Вираз для цільової функції та лівої частини функціональних обмежень отримаємо як добуток вектора  $x$  на відповідний рядок матриці  $A$ . Для цього скористаємося функцією СУММПРОИЗВ, параметрами якої є два вектори однакової довжини, а результатом буде скаляр – добуток цих векторів. Запис у D3 має бути таким:

$$=СУММПРОИЗВ(\$B\$1:\$C\$1;B3:C3)$$

Скопіювавши цю формулу у три нижні комірки, отримаємо ті самі вирази, що і в комірках В4, В6, В7, В8 попереднього прикладу (див. крок 2), тільки в інший спосіб. У комірках Е4:Е6 запишемо тип відповідного обмеження, а у комірках D2:F2 – пояснення до нижніх комірок. Після цього можна запускати «Поиск решения» і діяти у той самий спосіб, що і в попередньому прикладі. Скориставшись тим, що функціональні обмеження мають однаковий тип ( $\leq$ ) і обидві змінні мають бути невід'ємними, запис у полі «Ограничения:» буде лаконічнішим (рис. 3.5). Залишається виконати



команду «Выполнить» і самому переконатися, що розв’язок буде такий самий.

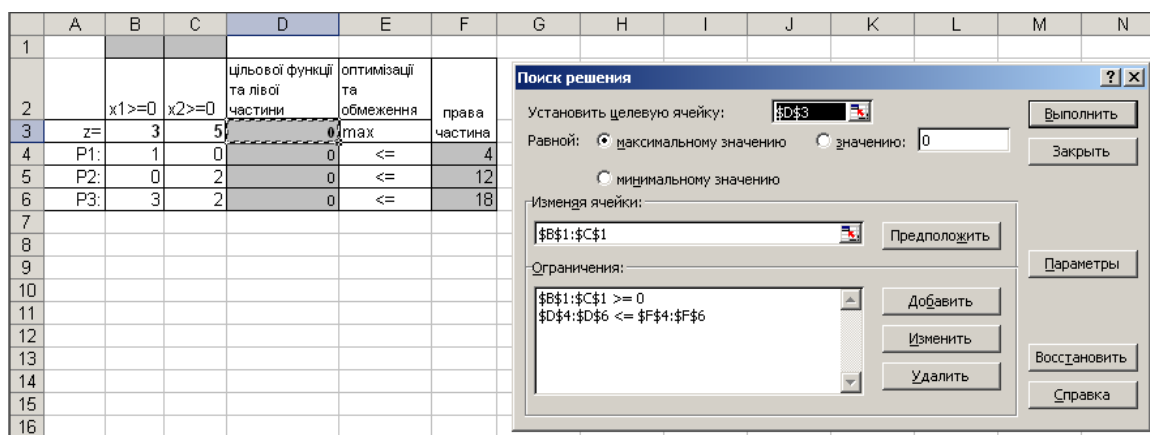


Рисунок 3.5

Попри те, що кількість інформації на робочому листі *Excel* збільшилася, стало легше відстежувати параметри моделі і у разі необхідності міняти їх, не змінюючи при цьому вирази для ЦФ та лівої частини обмежень та витрачати менше часу на їх запис. Отже, перший підхід є менш продуктивним, а при великій кількості змінних взагалі непридатним.

**Підсумок.** Ми вивчили не всі можливості надбудови «Поиск решения», наприклад, навіть не торкалися теми зміни параметрів пошуку. Проте розглянутих у прикладі можливостей достатньо для розв’язування переважної більшості задач лінійного, цілочислового і навіть нелінійного програмування. Використовуючи надбудову «Поиск решения», ми отримали:

- 1) розв’язок задачі лінійного програмування  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 6$ ;
- 2) значення ЦФ в оптимальній точці  $Z = 36$ ;
- 3) обмеження 1, що не впливає на розв’язок, оскільки  $2 \leq 4$ .

#### 4. АНАЛІЗ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ НА ЧУТЛИВІСТЬ В *MS EXCEL*

**Мета роботи** – за вихідними даними завдання 2 необхідно

1. Побудувати математичну модель задачі і розв'язати її з допомогою надбудови *MS Excel* «Поиск решения».
2. Провести аналіз оптимального розв'язку на чутливість в *Excel*.
3. Результати розрахунків подати у вигляді звіту на аркуші *Excel*.

##### **Теоретичні частина**

Неминучі коливання значень таких економічних параметрів, як ціни на продукцію і сировину, запаси сировини, попит на ринку і таке інше можуть привести до неоптимальності або непридатності колишнього режиму роботи. Для врахування подібних ситуацій проводиться **аналіз чутливості**, тобто аналіз того, як можливі зміни параметрів початкової моделі вплинуть на отриманий раніше оптимальний розв'язок ЗЛП.

Для розв'язання задач аналізу чутливості обмеження лінійної моделі класифікуються таким чином. **Зв'язуючі** обмеження проходять через оптимальну точку. **Незв'язуючі** обмеження не проходять через оптимальну точку. Аналогічно ресурс, що подається зв'язуючим обмеженням, називають **дефіцитним**, а ресурс, що подається незв'язуючим обмеженням, – **недефіцитним**. Обмеження називають **надмірним** в тому випадку, якщо його виключення не впливає на ОДР і, отже, на оптимальне рішення. Виділяють наступні три задачі аналізу на чутливість.

##### **1. Аналіз скорочення або збільшення ресурсів:**

- На скільки можна збільшити (обмеження типу  $\leq$ ) або зменшити (обмеження типу  $\geq$ ) запас *дефіцитного* ресурсу для поліпшення оптимального значення ЦФ?
- На скільки можна зменшити (обмеження типу  $\leq$ ) або збільшити (обмеження типу  $\geq$ ) запас *недефіцитного* ресурсу при збереженні оптимального значення ЦФ?

##### **2. Збільшення (обмеження типу $\leq$ ) запасу якого з ресурсів є найвигоднішим?**

##### **3. Аналіз зміни коефіцієнтів ЦФ: який діапазон зміни коефіцієнтів ЦФ, при якому не змінюється оптимальне рішення?**

**Приклад 4.1.** Побудова і аналіз математичної моделі компанії з виробництва дубових стільців «*Oak Products*».

Компанія «*Oak Products*» виробляє стільці 2-х типів: *Mate* і *Captain* (табл. 4.1). Стільці сконструйовані так, що для їх виготовлення можна використовувати ряд взаємозамінних деталей: довгі та короткі штифти, міцні і полегшені сидіння, а також важку і легку поперечину. Крім того, кожен тип стільців має відмінну від інших направляючу, на яку кріпиться спинка. Дані про кількість необхідних деталей для стільців кожного типу, запас деталей, а також питомий прибуток від продажу одного стільця кожного типу наведено в таблиці.

Необхідно рекомендувати стратегію виробництва на тиждень, тобто *визначити* за допомогою надбудови *Excel* «Поиск решения», яку кількість стільців кожної марки потрібно виготовити, щоб при їх реалізації отримати максимальний тижневий валовий (різниця доходу і витрат) прибуток, якщо згідно з угодою між керівництвом компанії і замовником загальна кількість стільців, що виробляється, не може бути менша ніж 100?

Таблиця 4.1 – Вихідні дані задачі

Найменування деталей	Тип стільців та необхідна кількість деталей для виробництва одного стільця кожної марки		Запас деталей
	<i>Captain</i>	<i>Mate</i>	
Довгі штифти	8	4	1280
Короткі штифти	4	12	1600
Ніжки	4	4	760
Міцні сидіння	1	0	140
Полегшені сидіння	0	1	120
Питомий валовий прибуток (дохід – витрати), \$	56	40	–

**Розв’язання.** При ухваленні рішення в даній моделі необхідно враховувати такі чинники:

1) Стільці, що виготовлені компанією, продаються на тому ж тижні, питомий валовий прибуток складає 56 у. о. і 40 у. о. для кожного проданого стільця марки *Captain* і *Mate* відповідно.

2) Для збирання стільців потрібні довгі штифти, короткі штифти і один з двох типів сидінь, які є на складі в обмеженій кількості.

3) Запас довгих і коротких штифтів, які можна буде використовувати наступного тижня, складає 1280 і 1600 штук відповідно. Для виробництва одного стільця марки *Captain* потрібно 8 довгих і 4 коротких штифти, а для виробництва стільця *Mate* – 4 довгих і 12 коротких штифтів.

4) Запас ніжок на наступний тиждень складає 760 штук. Для виробництва стільця будь-якого типу потрібно 4 ніжки.

5) Запас міцних і полегшених сидінь складає 140 і 120 штук відповідно.

6) Згідно з угодою між керівництвом компанії і замовниками загальна кількість виготовлених стільців не може бути менша ніж 100 штук.

Враховуючи все вищезгадане, математична модель задачі має такий вигляд: знайти максимальне значення  $Z = 56x_1 + 40x_2 \rightarrow \max$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \leq 1280, \\ 4x_1 + 12x_2 \leq 1600, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 760, \\ x_1 \leq 140, \\ x_2 \leq 120, \\ x_1 + x_2 \geq 100, \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Математичну модель даної задачі можна подати в *Excel* (рис. 4.1):

	A	B	C	D	E	F	G
1		<b>Модель Oak Products</b>					
2	Тип стульев	<b>Captain</b>	<b>Mate</b>				
3	Удельная прибыль	56	40	Прибыль			
4	Произведенное количество			0			
5		Потребность в деталях		Суммарное потребление		Начальный запас	Конечный запас
6	Длинные штифты	8	4	0	<=	1280	1280,00
7	Короткие штифты	4	12	0	<=	1600	1600,00
8	Ножки	4	4	0	<=	760	760,00
9	Прочные сиденья	1	0	0	<=	140	140,00
10	Облегченные сиденья	0	1	0	<=	120	120,00
11				Стулья		Мин. Производство	Резерв
12	Произведено согласно договору	1	1	0	>=	100	-100

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку:

Равной: ☒ максимальному значению ☐ значению: 0

☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

Рисунок 4.1 – Математична модель задачі

	A	B	C	D	E	F	G
1		Модель Oak Products					
2	Тип стульев	Captain	Mate				
3	Удельная прибыль	56	40	Прибыль			
4	Произведенное количество	130	60	9680			
5		Потребность в деталях		Суммарное потребление		Начальный запас	Конечный запас
6	Длинные штифты	8	4	1280	<	1280	0
7	Короткие штифты	4	12	1240	<	1600	360
8	Ножки	4	4	760	<	760	0
9	Прочные сиденья	1	0	130	<	140	10
10	Облегченные сиденья	0	1	60	<	120	60
11				Стулья		Мин. Производство	Резерв
12	Произведено согласно договору	1	1	190	>	100	90
13							
14							
15							

Рисунок 4.2 – Оптимальні значення, що отримані в *Excel*, компанії «Oak Products»

На рис. 4.1 показано:

- вікно надбудови *Excel* «Поиск решения», де внесені всі необхідні дані для розрахунку оптимальних значень;

- у комірці D4 вписана формула цільової функції  
 $\text{=СУММПРОИЗВ(B4:C4;B3:C3)},$

- комірки D6: D10 і D12 містять інформацію про обмеження задачі

D6  $\text{=СУММПРОИЗВ(B4:C4;B6:C6)},$

D7  $\text{=СУММПРОИЗВ(B4:C4;B7:C7)},$

.....

D12  $\text{=СУММПРОИЗВ(B4:C4;B12:C12)}.$

На рис. 4.2 наведено оптимальні значення змінних і цільової функції (комірки B4, C4, D4).

Звіт за результатами розв'язування наведено на рис. 4.3.

На рису. 4.3 в графі «Статус»:

– «**несвязанное**» означає, що відповідне обмеження є *нелімітуючим* і існує резерв (*надлишок деталей*, якщо « $\leq$ » або *перевищення від мінімально необхідної норми*, якщо « $\geq$ »), тобто різниця між лівою і правою частинами після підставлення знайдених змінних не дорівнює нулю, а отже, *змінні резерву* більше нуля. Тому можна зменшити початкові запаси відповідних деталей на цю кількість резерву;

– «**связанное**» означає, що резерву немає і відповідні обмеження є *лімітуючими*, тобто на лініях або перетині прямих цих обмежень знаходиться точка, що дає оптимальне значення невідомих змінних задачі.

E31

A	B	C	D	E	F	G
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам					
2	Рабочий лист: [Oak Products_Model and Results.xls]Лист1					
3	Отчет создан: 01.04.09 0:04:56					
4						
5						
6	Целевая ячейка (Максимум)					
7	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
8	\$D\$4	Произведенное количество Прибыль	0	9680		
9						
10						
11	Изменяемые ячейки					
12	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
13	\$B\$4	Произведенное количество Captain	0	130		
14	\$C\$4	Произведенное количество Mate	0	60		
15						
16						
17	Ограничения					
18	Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
19	\$D\$6	Длинные штифты Суммарное потребление	1280	\$D\$6<=\$F\$6	связанное	0
20	\$D\$7	Короткие штифты Суммарное потребление	1240	\$D\$7<=\$F\$7	не связан.	360
21	\$D\$8	Ножки Суммарное потребление	760	\$D\$8<=\$F\$8	связанное	0
22	\$D\$9	Прочные сиденья Суммарное потребление	130	\$D\$9<=\$F\$9	не связан.	10
23	\$D\$10	Облегченные сиденья Суммарное потребление	60	\$D\$10<=\$F\$10	не связан.	60
24	\$D\$12	Произведено согласно договору Стулья	190	\$D\$12>=\$F\$12	не связан.	90
25	\$B\$4	Произведенное количество Captain	130	\$B\$4>=0	не связан.	130
26	\$C\$4	Произведенное количество Mate	60	\$C\$4>=0	не связан.	60
27	\$B\$4	Произведенное количество Captain	130	\$B\$4=целое	связанное	0
28	\$C\$4	Произведенное количество Mate	60	\$C\$4=целое	связанное	0
29						

Рисунок 4.3 – Звіт за результатами розв'язування

**Звіт зі стійкості** складається з двох таблиць (рис. 4.4). Цей звіт не містить інформації про те, як змінюються оптимальні значення змінних. У цьому звіті тільки показано, як змінюється оптимальне значення цільової функції при зміні правої частини обмеження (рис. 4.4).

F26								
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости							
2	Рабочий лист: [Oak Products_Model and Results.xls]Model							
3	Отчет создан: 01.04.09 0:06:17							
4								
5								
6	Изменяемые ячейки							
7	Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение	
8	\$B\$4	Произведенное количество Captain	130	0	56	24	16	
9	\$C\$4	Произведенное количество Mate	60	0	40	16	12	
10								
11								
12	Ограничения							
13	Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение	
14	\$D\$6	Длинные штифты Суммарное потребление	1280	4	1280	40	180	
15	\$D\$7	Короткие штифты Суммарное потребление	1240	0	1600	1E+30	360	
16	\$D\$8	Ножки Суммарное потребление	760	6	760	72	40	
17	\$D\$9	Прочные сиденья Суммарное потребление	130	0	140	1E+30	10	
18	\$D\$10	Облегченные сиденья Суммарное потребление	60	0	120	1E+30	60	
19	\$D\$12	Произведено согласно договору Стулья	190	0	100	90	1E+30	
20								
21								
22								

Рисунок 4.4 – Звіт зі стійкості

**Таблиця 1** (рядки 6–10 на рис. 4.4) містить інформацію, що відноситься до змінних (і до коефіцієнтів ЦФ):

**1. Результат розв’язування задачі.**

**2. Нормована вартість**, яка показує, на скільки зміниться значення ЦФ у разі примусового включення одиниці цієї продукції в оптимальний розв’язок. *Нормована вартість* дорівнює нулю, якщо змінна розв’язку в оптимальній точці невід’ємна. Якщо оптимальне значення змінної дорівнює нулю, то *нормована вартість* у відповідному рядку дорівнює значенню в стовпцях «Допустиме збільшення» або «Допустиме зменшення» (одне з цих значень буде нескінченним, а друге дорівнюватиме нормованій вартості)

**3. Коефіцієнти ЦФ.**

4. Граничні значення приросту цільових коефіцієнтів (стовпці G, H, рядки 9, 10), при яких зберігається первинний оптимальний розв’язок (решта даних залишається постійними). Наприклад, *допустиме збільшення* ціни на стільці марки *Mate* дорівнює \$ 16, а *допустиме зменшення* – \$ 12. Це означає, що якщо ціна на стільці цієї марки зросте більш ніж на \$ 16 і впаде менш ніж на \$ 12, то оптимальне значення зміниться.

**Таблиця 2** (рядки 12–20 на рис. 4.4) містить інформацію, що відноситься до обмежень:

**1. Величина ресурсів, що використовуються** в колонці «Результ. значення» (рис. 4.4, стовпець D, рядки 13–14).

**2. Граничні значення приросту ресурсів** (праві частини системи обмежень) показують, на скільки можна зменшити (усунути надлишок) або збільшити (підвищити мінімально необхідну вимогу) ресурс, зберігши при цьому оптимальний розв’язок. У даній задачі існують обмеження (деталі), ресурси яких є дефіцитними – це «Довгі штифти» і «Ніжки» (рис. 4.3, рядки 19 і 21, стовпець G). Оскільки знак обмежень цих запасів має вигляд « $\leq$ », то виникає питання, на скільки максимально повинен зрости запас цих деталей, щоб забезпечити збільшення випуску продукції. Відповідь на це питання міститься в графі «Допустиме збільшення» на рис. 4.4, рядок 15 і 17, стовпець G. Запас довгих штифтів має сенс збільшити на 40 штук, а ніжок – на 72 шт. Це приведе до нових оптимальних розв’язків, що збільшують прибуток. Подальше збільшення запасів цих деталей понад вказані межі не покращуватиме розв’язок, оскільки інші ресурси можуть стати такими, що зв’язуються.

3. Цінність додаткової одиниці  $i$ -го ресурсу становить **тіньову ціну**, яка розраховується тільки для дефіцитних ресурсів. Після того як буде встановлено, що збільшення запасів деталей довгих штифтів і ніжок приведе до нових планів випуску, які забезпечать вищий прибуток, виникає наступне питання: «Запас яких деталей вигідніше насамперед збільшувати?». Відповідь на це питання дає графа «**Тіньова ціна**» (див. рис. 4.4, рядки 15 і 17, стовпець E). Для довгих штифтів тіньова ціна дорівнює 4, а для ніжок – 6, тобто кожен додатковий довгий штифт збільшить прибуток на \$ 4 (рис. 4.5), а кожна додаткова ніжка – на \$ 6 (рис. 4.6). Отже, *насамперед вигідно збільшувати запаси ніжок*.

Допустимий діапазон значень правої частини обмеження, для якого тіньова ціна залишається постійною, вказаний в табл. 2 «Обмеження» (рис. 4.4) в стовпцях «Допустиме збільшення» і «Допустиме зменшення».

**Тіньова ціна нелімітуючого обмеження завжди дорівнює нулю!**

F7	1600						
	A	B	C	D	E	F	G
1		Модель Oak Products					
2	Тип стільця	Captain	Mate				
3	Удельная прибыль	56	40	Прибыль			
4	Произведенное количество	140	50	9840			
5		Потребность в деталях		Суммарное потребление		Начальный запас	Конечный запас
6	Длинные штифты	8	4	1320	≤	1320	0,00
7	Короткие штифты	4	12	1160	≤	1600	440
8	Ножки	4	4	760	≤	760	0,00
9	Прочные сиденья	1	0	140	≤	140	0,00
10	Облегченные сиденья	0	1	50	≤	120	70
11				Стулья		Мин. Производство	Резерв
12	Произведено согласно договору	1	1	190	≥	100	90
13							

Рисунок 4.5 – Результати розв’язання, якщо насамперед збільшувати запаси довгих штифтів

F9	140						
	A	B	C	D	E	F	G
1		Модель Oak Products					
2	Тип стільця	Captain	Mate				
3	Удельная прибыль	56	40	Прибыль			
4	Произведенное количество	112	96	10112			
5		Потребность в деталях		Суммарное потребление		Начальный запас	Конечный запас
6	Длинные штифты	8	4	1280	≤	1280	0,00
7	Короткие штифты	4	12	1600	≤	1600	0,00
8	Ножки	4	4	832	≤	832	0,00
9	Прочные сиденья	1	0	112	≤	140	28,00
10	Облегченные сиденья	0	1	96	≤	120	24
11				Стулья		Мин. Производство	Резерв
12	Произведено согласно договору	1	1	208	≥	100	108
13							

Рисунок 4.6 – Результати розв’язання, якщо насамперед збільшувати запаси ніжок



## 5. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ

### 5.1. Розв'язання задач цілочислового програмування

**Мета роботи** – для свого варіанта вихідних даних:

1. Побудувати математичну модель задачі.
2. Розв'язати ЗЛП в *MS Excel* з урахуванням умови цілочисельності.
3. Результати розрахунків подати у вигляді звіту на аркуші *Excel*.

**Приклад 5.1.** Розв'язати задачу цілочислового програмування (ЗЦП) за допомогою надбудови *MS Excel* «Поиск решения»:

$$Z = 130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756, \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 450, \\ 4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4 \leq 89, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,4})$$

$$x_j \in Z.$$

**Розв'язання.** Якщо до умови задачі додалася вимога цілочисельності значень всіх змінних, то процес введення умови задачі необхідно доповнити наступними кроками:

1. В екранній формі указати, на які змінні накладається вимога цілочисельності. Цей крок робиться для наочності сприйняття умови задачі (рис. 5.1).

2. У вікні "Поиск решения" (меню "Сервис" → "Поиск решения") натиснути кнопку "Добавить" та у вікні "Добавление ограничений", що з'явилося, ввести обмеження в такий спосіб (рис. 5.2):

- у рядку "Ссылка на ячейку" ввести адреси комірок змінних задачі, тобто \$B\$3:\$E\$3;
- у рядку введення знака обмеження встановити "целое";
- підтвердити введення обмеження натисканням кнопки "ОК".

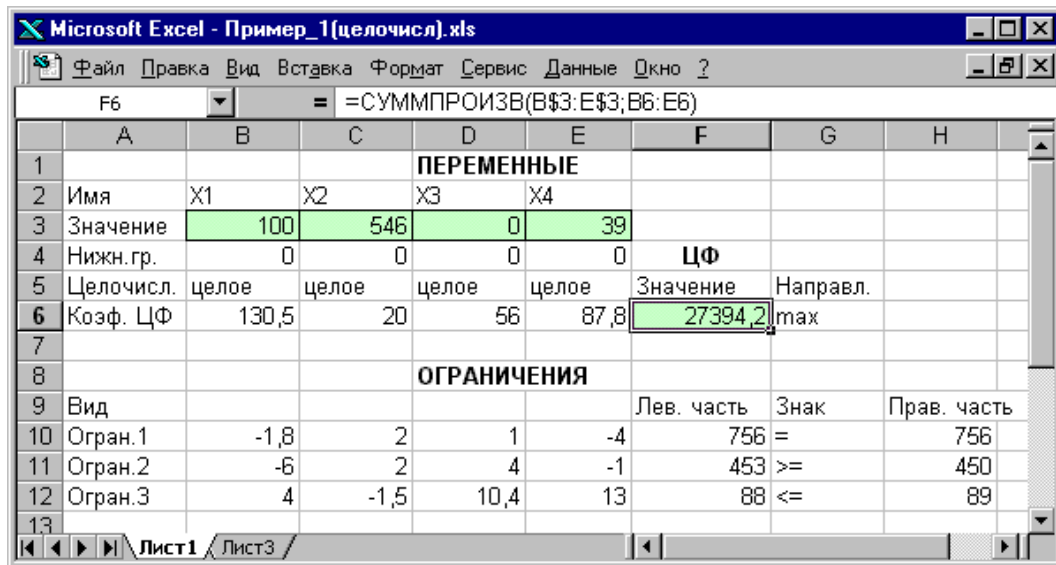


Рисунок 5.1 – Розв’язання задачі за умови цілочисельності її змінних

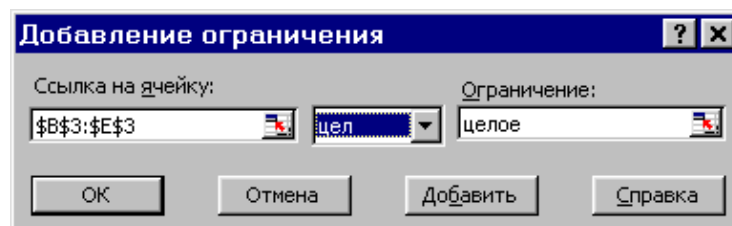


Рисунок 5.2 – Введення умови цілочисельності змінних задачі

**Завдання 5.1. Розв’язання ЗЦП.** Літак завантажується зброєю двох типів. Значення маси  $m_i$ , об’єму  $V_i$  і вартості  $R_i$  однієї одиниці зброї  $i$ -го типу подано в табл. 5.1. Максимальна маса та об’єм зброї, які можуть бути завантажені в літак, становлять  $m = 100 + 2N$ ,  $V = 124 - N$  відповідно.

Таблица 5.1

$i$	$m_i$	$V_i$	$R_i$
1	$N + 2$	$16 - N$	5
2	$11 - N$	$N + 1$	$N$

Необхідно визначити кількість одиниць зброї кожного типу, щоб ефективність її застосування була максимальною (ефективність застосування зброї прямо пропорційна її вартості). У табл. 5.1 значення  $N$ , залежно від варіанта, може змінюватися в межах  $N = 1 \div 10$ .

## 5.2. Розв'язання транспортних задач

**Мета роботи** – для свого варіанта вихідних даних:

1. Побудувати математичну модель транспортної задачі (ТЗ).
2. Оформити задачу у *MS Excel* та знайти її розв'язок за допомогою надбудови *MS Excel* «Поиск решения».
3. Результати подати у вигляді звіту на аркуші *Excel*.

### Приклад 5.2. Розв'язати ТЗ.

		Млини				Пропозиція
		1	2	3	4	
Елеватори	1	9	7	7	2	20
	2	3	8	5	1	10
	3	2	4	3	6	15
Попит		5	10	5	25	

### Етапи виконання роботи

1. Скласти математичну модель ТЗ.

Нехай  $x_{ij}$  – це кількість деталей, що транспортуються з  $i$ -го елеватора для  $j$ -го млина. При цьому  $i = \overline{1,3}$ ,  $j = \overline{1,4}$ ;  $c_{ij}$  – це вартість транспортування деталей з  $i$ -го елеватора для  $j$ -го млина (позначені у маленьких лівих верхніх прямокутниках у комірці).

Мета розв'язку – знайти оптимальний план транспортування, при якому вартість транспортування буде мінімальною. Цільова функція ТЗ матиме такий вигляд:

$$Z = 9x_{11} + 7x_{12} + 7x_{13} + 2x_{14} + 3x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + x_{24} + 2x_{31} + 4x_{32} + 3x_{33} + 6x_{34} \rightarrow \min.$$

Перша група функціональних обмежень виходить із пропозиції, що сума перевезень не перевищує максимально можливу кількість перевезень з даного елеватора і не менша від неї:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 20;$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 10;$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 15.$$

Друга група функціональних обмежень виходить із попиту, що сума перевезень до конкретного млина не перевищує його потреби і не менше від них:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 5;$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 10;$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 5;$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 25.$$

Введемо обмеження на знак: сума перевезень з елеватора не повинна бути від'ємною:  $x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$ .

Запишемо математичну модель ТЗ у матричному вигляді для зручного використання:

$$Z = C^T X \rightarrow \min$$

$$A_1 X = B_1;$$

$$A_2 X = B_2;$$

$$C^T = (9 \quad 7 \quad 7 \quad 2 \quad 3 \quad 8 \quad 5 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 3 \quad 6);$$

$$X^T = (x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad x_{21} \quad x_{22} \quad x_{23} \quad x_{24} \quad x_{31} \quad x_{32} \quad x_{33} \quad x_{34});$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}.$$

2. Оформити ТЗ у *MS Excel* та знайти її розв'язок за допомогою надбудови *MS Excel* «Поиск решения». Готова до роботи з надбудовою таблиця та розв'язок ТЗ подані на рис. 5.3. Екранна форма таблиці містить такі комірки:

- цільову комірку N3 (=СУММПРОИЗВ(\$B\$1:\$M\$1; B3:M3));
- невідомі B1 – M1;
- цільову функцію B3 – M3;
- функціональні обмеження (ліва частина) B4 – M4... B10 – M10;
- функціональні обмеження (права частина) O4 – O10;
- комірки із формулами N4 – N10 (копіюємо з цільової);
- додаткову інформацію.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	$x_{ij} \geq 0$	0	0	0	20	5	0	0	5	0	10	5	0		
2		$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$		
3	Z	9	7	7	2	3	8	5	1	2	4	3	6	115	
4	S1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	20	20
5	S2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	10	10
6	S3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	15	15
7	d1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	5	5
8	d2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	10	10
9	d3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	5	5
10	d4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	25	25

Рисунок 5.3 – Оформлення ТЗ та її розв’язок

### Завдання 5.1. Розв’язання ТЗ

Варіант 1					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	40	25	50	35
55		5	5	1	2
60		1	4	2	1
35		1	2	3	2

Варіант 6					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	50	35	50	65
70		5	2	1	3
85		4	5	4	1
45		2	1	4	3

Варіант 2					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	35	45	25	45
40		2	3	0	2
60		3	4	1	4
50		1	3	1	5

Варіант 7					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	15	25	25	85
70		1	1	1	0
20		2	3	5	1
60		3	2	4	5

Варіант 3					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	20	65	20	50
40		3	1	2	1
55		1	4	1	3
60		1	2	2	3

Варіант 8					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	35	25	60	30
50		3	4	4	3
50		4	4	2	1
50		3	2	1	2

Варіант 4					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	40	20	50	40
70		2	3	4	6
45		3	6	6	6
35		4	5	5	7

Варіант 9					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	40	20	60	30
55		6	4	4	4
50		1	2	0	2
45		5	3	4	2

Варіант 5					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	40	40	50	70
80		4	2	3	2
60		1	1	2	0
60		5	1	6	5

Варіант 10					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	60	25	70	45
90		2	4	1	3
75		3	4	3	5
35		6	6	4	5

## 6. ПОБУДОВА МОДЕЛІ ПАРНОЇ РЕГРЕСІЇ

**Мета роботи** – за даними спостережень  $(X, Y)$ :

а) оцінити параметри (коефіцієнти регресії) лінійної моделі

$$Y_p = b_0 + b_1 \cdot X$$

за відомими формулами

$$b_1 = R_{XY} \cdot S_Y / S_X ;$$

$$b_0 = Y_{\text{СЕР}} - b_1 \cdot X_{\text{СЕР}} ,$$

де  $R_{XY}$  – коефіцієнт парної кореляції

$$R_{XY} = S_{XY} / (S_X \cdot S_Y) ;$$

$S_{XY}, S_X, S_Y$  – коваріація та стандартні відхилення:

$$S_{XY} = \sum (XY)_{\text{СЕР}} - \sum X_{\text{СЕР}} \sum Y_{\text{СЕР}} ;$$

$$S_{XX} = \sum (XX)_{\text{СЕР}} - \sum (X_{\text{СЕР}})^2 ;$$

$$S_{YY} = \sum (YY)_{\text{СЕР}} - \sum (Y_{\text{СЕР}})^2 ;$$

$$S_X = \sqrt{S_{XX}} ; S_Y = \sqrt{S_{YY}} .$$

б) побудувати графік знайденої залежності разом з емпіричними точками;

в) оцінити параметри за допомогою наступних функцій *Excel*:

КОРРЕЛ – коефіцієнт парної кореляції  $R_{XY}$  ;

НАКЛОН – коефіцієнт регресії  $b_1$  ;

ОТРЕЗОК – вільний член лінійної моделі  $b_0$  ;

ПРЕДСКАЗ – функція, що обчислює розрахункове значення за лінійною моделлю  $Y_p = b_0 + b_1 \cdot X$  для вказаного значення  $X$  ;

г) порівняти отримані результати;

д) оформити роботу у вигляді звіту на аркуші *Excel*.

Зразок виконання завдання показано на рис. 6.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1												<b>Сума</b>	<b>Середнє</b>
2	X	5,7	7,1	3,2	5,7	9,1	12,3	10,2	4,9	2,4	1,6	62,2	6,22
3	Y	8,1	13,6	7,7	11,5	22,1	24,8	19,6	6	4,7	4,9	123	12,3
4	XX	32,49	50,41	10,24	32,49	82,81	151,29	104,04	24,01	5,76	2,56	496,1	49,61
5	XY	46,17	96,56	24,64	65,55	201,11	305,04	199,92	29,4	11,28	7,84	987,5	98,751
6	YY	65,61	184,96	59,29	132,25	488,41	615,04	384,16	36	22,09	24,01	2012	201,182
7	$Y_p = b_0 + b_1 \cdot X$	11,2409	14,092	6,148895766	11,241	18,166	24,684	20,406	9,6114	4,519	2,89	123	12,3
8	<b>ПРЕДСКАЗ</b>	11,2409	14,092	6,148895766	11,241	18,166	24,684	20,406	9,6114	4,519	2,89	123	12,3
9	<b>Коваріації та дисперсії</b>												
10	$S_{xy} = (XY)_{\text{ср}} - (X_{\text{ср}}) \cdot (Y_{\text{ср}}) =$			22,245									
11	$S_{xx} = (XX)_{\text{ср}} - (X_{\text{ср}})^2 =$			10,9216									
12	$S_{yy} = (YY)_{\text{ср}} - (Y_{\text{ср}})^2 =$			49,892									
13	<b>Середні квадратичні відхилення</b>												
14	$S_x = \text{КОРЕНЬ}(S_{xx}) =$		3,3048										
15	$S_y = \text{КОРЕНЬ}(S_{yy}) =$		7,0634										
16	<b>Коефіцієнт кореляції</b>												
17	$R_{xy} = S_{xy} / (S_x \cdot S_y) =$		0,953										
18	<b>Коефіцієнти регресії</b>												
19	$b_1 = R_{xy} \cdot S_y / S_x =$		2,0368										
20	$b_0 = Y_{\text{ср}} - b_1 \cdot X_{\text{ср}} =$		-0,369										
21													
22													



Рисунок 6.1

## Завдання 6. Побудова моделі парної регресії

### Варіант 1

X	5,4	7,6	2,3	5,9	11,0	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y	13,7	18,0	6,2	15,5	24,1	24,8	25,0	13,0	8,1	6,7

### Варіант 2

X	5,5	7,1	2,6	5,4	10,0	11,6	12,4	2,9	2,4	1,6
Y	17,7	14,0	4,2	12,5	29,1	25,8	22,0	9,0	4,1	3,7

### Варіант 3

X	13,7	18,0	6,2	15,5	24,1	24,8	25,0	13,0	8,1	6,7
Y	5,4	7,6	2,3	5,9	11,0	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6

### Варіант 4

X	5,1	7,4	2,3	5,9	11,0	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y	16,7	13,0	7,2	14,5	20,1	21,8	23,0	11,0	7,1	4,7

Варіант 5

X	5,4	7,6	2,3	5,9	11,0	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y	13,7	18,0	6,2	15,5	24,1	24,8	25,0	13,0	8,1	6,7

Варіант 6

X	15,4	17,6	12,3	15,9	11,0	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y	13,7	18,0	16,2	19,5	14,1	14,8	15,0	9,0	5,1	3,7

Варіант 7

X	5,1	7,2	2,4	5,1	11,2	12,2	10,1	4,8	2,3	1,5
Y	18,7	28,0	16,2	25,5	34,1	44,2	35,0	23,0	8,1	10,7

Варіант 8

X	5,4	7,6	2,3	5,9	11,0	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y	11,7	14,0	5,2	13,5	20,1	21,8	24,0	12,0	7,1	6,7

Варіант 9

X	5,3	7,4	2,4	5,6	11,1	12,2	10,3	4,8	2,3	1,5
Y	33,1	38,0	16,2	40,5	54,1	64,8	55,0	53,0	15,1	10,7

Варіант 10

X	5,4	7,6	2,3	5,9	11,0	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y	3,7	8,0	1,2	3,5	9,1	8,8	9,2	3,0	1,1	0,7



## 7. ПОБУДОВА МОДЕЛІ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ

**Мета роботи** – за даними спостережень:

а) освоїти техніку роботи з матричними функціями *Excel*;

б) оцінити параметри лінійної моделі за допомогою матричних перетворень  $B = (X^T X)^{-1} X^T Y$ , де  $Y$  – матриця-стовпець значень  $y_i$ ;  $X^T$  – транспонування. Матриця  $X = [X_0, X_1, \dots, X_m]$  складається зі стовпців значень кожного показника-аргументу  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ; перший стовпець  $X_0$  складається лише з одиниць;

в) розрахувати ці ж параметри за допомогою функції ЛИНЕЙН;

г) оформити роботу у вигляді звіту на аркуші *Excel*.

### Теоретична частина

Введемо позначення для матриць-стовпців усіх показників:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}; X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}; X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \dots \\ x_{1n} \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{2n} \end{bmatrix}; \dots; X_m = \begin{bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ \dots \\ x_{mn} \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{bmatrix}.$$

Тоді лінійна модель має вигляд

$$Y = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_m X_m + E,$$

або в матричній формі  $Y = XB + E$ .

Помножимо матричне рівняння  $Y = XB + E$  ліворуч на  $X^T$  і врахуємо, що  $X^T E = 0$ . Одержимо систему рівнянь щодо невідомих параметрів

$$X^T XB = X^T Y.$$

Позначимо обернену матрицю цієї системи через  $C = \text{МОБР}(X^T X)$ , тоді

$$B = C(X^T Y).$$

Розрахункові значення можна обчислити у вигляді матричного добутку

$$Y_p = XB.$$

### Функції діапазонів *Excel*

ТРАНСП – транспонування вектора;

МУМНОЖ – множення матриць;  
 МОБР – обчислення оберненої матриці.

### Правила роботи з функціями діапазонів:

1. Виділити діапазон результату.
2. Не знімаючи виділення, викликати функцію.
3. Заповнити поля введення функції.
4. Введення завершити комбінацією *Ctrl + Shift + Enter*.

Зразок виконання наведений на рис. 7.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	<b>№</b>	<b>X0</b>	<b>X1</b>	<b>X2</b>	<b>Y</b>	<b>Yp</b>	<b>E</b>	<b>ЛИНЕЙН</b>		
2	1	1	8	5	5	5,1273	-0,127	0,367	0,8539	-3,539
3	2	1	11	8	10	8,7903	1,2097	0,2429	0,2205	1,9066
4	3	1	12	8	10	9,6442	0,3558	0,9872	0,9509	#Н/Д
5	4	1	9	5	7	5,9813	1,0187	180,51	7	#Н/Д
6	5	1	8	7	5	5,8614	-0,861	489,67	6,3296	#Н/Д
7	6	1	8	8	6	6,2285	-0,228			
8	7	1	9	6	6	6,3483	-0,348	<b>b2</b>	<b>b1</b>	<b>b0</b>
9	8	1	9	4	5	5,6142	-0,614	<b>Sb2</b>	<b>Sb1</b>	<b>Sb0</b>
10	9	1	8	5	6	5,1273	0,8727	<b>R2</b>	<b>Se</b>	
11	10	1	12	7	8	9,2772	-1,277	<b>F</b>	<b>df</b>	
12	СРЗНАЧ	1	9,4	6,3	6,8	6,8	7E-14	<b>SSR</b>	<b>SSE</b>	
13	ДИСПР	0	2,44	2,01	3,36	2,727	0,633			
14	SS	0	24,4	20,1	33,6	27,27	6,3296			
15										
16	<b>ХТ</b>									
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	8	11	12	9	8	8	9	9	8	12
19	5	8	8	5	7	8	6	4	5	7
20										
21	<b>ХТХ</b>			<b>ХТУ</b>		<b>С=МОБР(ХТХ)</b>		<b>В</b>		
22	10	94	63	68		4,0201	-0,323	-0,14	-3,539	
23	94	908	603	664		-0,323	0,0538	-0,029	0,8539	
24	63	603	417	445		-0,14	-0,029	0,0653	0,367	

Рисунок 7.1

*Зауваження:* розмір діапазону виводу функції ЛИНЕЙН дорівнює  $5 \times (m + 1)$ , де  $m$  – число факторів. Значення полів функції: Известные значения  $y - Y$ , Известные значения  $x - X$ , Конст – 0, Статистика – 1.

### Завдання 7. Побудова моделі множинної регресії

#### Варіанти

	$X_1$	$X_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$	$Y_8$	$Y_9$	$Y_{10}$
1	2,2	5,4	10	18	38	47	20,9	52,3	19,4	30	46,7	34,3
2	3,1	3,2	14	12	16	26	14,6	33	15,4	17	30,3	23,7
3	5,4	5,6	15	28	34	36	28,1	42,4	36,3	28	39,7	30,8
4	6,1	7,8	12,8	40	52	51	36	57,5	44	38	51,3	36,9
5	7,8	3,5	25	28	10	10	26,5	16,7	40,3	11	20,5	15,4
6	5,6	6,8	12,1	35	44	44	30,8	50,3	41,5	31	46,8	34,7
7	4,2	4,8	15	23	29	34	22,4	38,9	26,6	23	38,5	25,6
8	4,4	5,1	14,7	24	31	36	22,1	42,7	30,5	26	41,1	27,4
9	2,2	3,2	13,1	9	19	30	12,8	34,6	12	21	36,5	22,9
10	3,1	4,6	17	19	29	37	19,5	44,3	22,2	28	38,9	28,1

### 8. ВИЗНАЧЕННЯ ДОВІРЧОГО ІНТЕРВАЛУ ДЛЯ ПАРНОЇ РЕГРЕСІЇ

**Мета роботи** – за даними спостережень ( $X$ ,  $Y$ ) побудувати лінію регресії з 95%-ми смугами на розрахункові значення  $Y_p$  і на очікуваний розкид даних навколо лінії регресії (прогнози).

#### Етапи виконання роботи:

- 1) визначити параметри лінійної моделі в матричній формі;
- 2) для кожного спостереження  $X$  обчислити розрахункові значення  $Y_p$ ;
- 3) обчислити залишкову дисперсію  $MSE$ :

$$MSE = (S_{yy} - S_{rr}) \cdot n / df ,$$

де  $S_{YY}, S_{rr}$  – дисперсії змінних  $Y$  та  $Y_p$  відповідно;  $n$  – кількість спостережень;  $df$  – кількість ступенів волі;

4) для кожного спостереження підрахувати дисперсію розрахункового значення  $S_{pp}$  за формулою для одновимірного випадку ( $m = 1$ ):

$$S_{pp} = (MSE/n) \cdot \left(1 + (X - X_{cp})^2 / S_{xx}\right);$$

$$S_{qq} = S_{pp} + MSE;$$

де  $S_{xx} = \text{ДИСПР}(X)$ ;

5) розрахувати границі 95%-х довірчих інтервалів на розрахункові значення (95%p) і на прогнози (95%q):

$$Y_p(X) \pm t_{05} \cdot S_p; Y_q(X) \pm t_{05} \cdot S_q,$$

де  $S_p, S_q$  – корінь квадратний з відповідних дисперсій (СКВ);  $t_{05}$  – табличне значення статистики Стюдента;

6) побудувати графік залежності разом з довірчими границями;

7) оформити роботи у вигляді звіту на аркуші *Excel*.

Зразок виконання показаний на рис. 8.1.

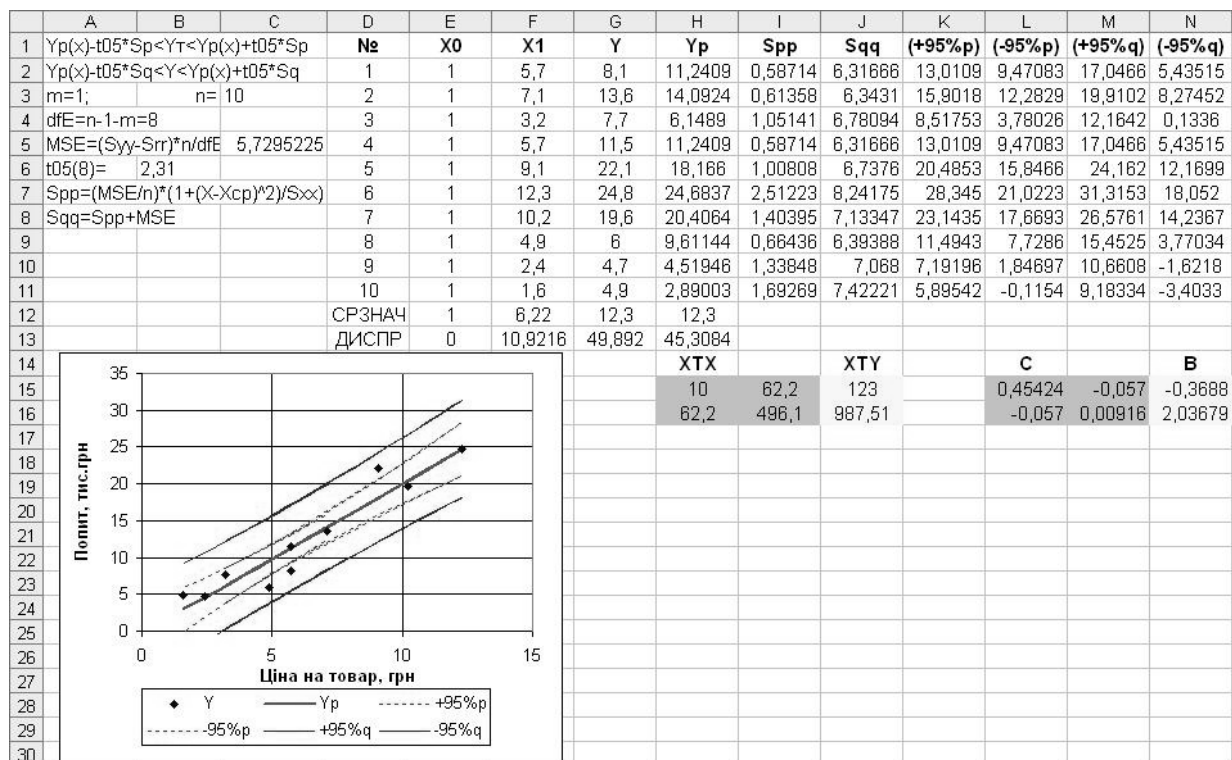


Рисунок 8.1

### **Завдання 8. Визначення довірчого інтервалу для парної регресії**

За вихідним даними завдання 6 побудувати лінію регресії з 95%-ми смугами на розрахункові значення  $Y_p$  і на очікуваний розкид даних навколо лінії регресії (прогнози).

### **КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

1. Розкрийте предмет та основні поняття економіко-математичного моделювання.
2. Наведіть класифікацію економіко-математичних моделей.
3. Які існують етапи економіко-математичного моделювання?
4. Охарактеризуйте загальну, стандартну та канонічну задачі лінійного програмування.
5. Поясніть особливості матричної та векторної форм запису канонічної задачі.
6. Які правила зведення будь-якої лінійної задачі до стандартного вигляду?
7. Наведіть визначення основних понять геометрії опуклих множин.
8. Подайте формулювання та математичну модель задачі про використання ресурсів.
9. Подайте формулювання та математичну модель задачі складання раціону.
10. Наведіть формулювання та математичну модель задачі про використання потужностей.
11. Сформулюйте та наведіть математичну модель задачі про розкрій матеріалів.
12. Сформулюйте і наведіть математичну модель транспортної задачі.
13. Поясніть геометричний зміст нерівностей, умови невід'ємності змінних і цільової функції.
14. Опишіть алгоритм графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування, його переваги та недоліки.
15. Як можна виконати зведення загальної задачі лінійного програмування до канонічної форми?

16. Розкрийте зміст поняття симплекс-методу та наведіть його алгоритм.
17. Яка ознака оптимальності опорного плану?
18. Охарактеризуйте метод штучного базису.
19. Розкрийте поняття й вид двоїстої задачі лінійного програмування.
20. Наведіть правила побудови двоїстих задач.
21. Сформулюйте теореми двоїстості.
22. Наведіть економічну інтерпретацію двоїстої задачі.
23. Охарактеризуйте постановку задачі цілочислового програмування.
24. У чому полягає сутність методів відтинання?
25. Наведіть алгоритм методу Гоморі.
26. Наведіть алгоритм методу „гілок і меж”.
27. Охарактеризуйте метод мінімальної вартості.
28. Поясніть алгоритм методу потенціалів.
29. Поясніть предмет економетрії, параметри системи, екзогенні та ендогенні змінні.
30. Охарактеризуйте економетричну модель, її загальний вигляд, класифікацію та етапи побудови.
31. Наведіть алгоритм методу найменших квадратів для парної регресії, коефіцієнт кореляції.
32. Які основні передумови регресійного аналізу? Що таке залишкова дисперсія? Сформулюйте теорему Гаусса – Маркова.
33. Що таке інтервальна оцінка функції регресії та її параметрів?
34. Як оцінити значущість рівняння регресії? Поясніть и наведіть коефіцієнт детермінації, коефіцієнт Спірмена.
35. Наведіть алгоритм методу найменших квадратів для множинної регресії.
36. Які умови існування класичної нормальної лінійної моделі множинної регресії?
37. Охарактеризуйте довірчі інтервали для коефіцієнтів та функції множинної регресії.
38. Як оцінити значущість рівняння множинної регресії?

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Білоцерківський О. Б. Економіко-математичне моделювання : текст лекцій / О. Б. Білоцерківський, О. О. Замула, Н. В. Ширяєва. – Х. : НТУ "ХПІ", 2010. – 108 с.
2. Іващук О. Т. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. / О. Т. Іващук. – Тернопіль : ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
3. Алесинская Т. В. Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели" / Т. В. Алесинская. – Таганрог : ТРТУ, 2002 – 153 с.
4. Івченко І. Ю. Математичне програмування : навч. посіб. / І. Ю. Івченко. – К. : Центр учбової літератури, 2007 – 232 с.
5. Білоцерківський О. Б. Економетрія : навч.-метод. посіб. / О. Б. Білоцерківський, Н. В. Ширяєва. – Х. : НТУ "ХПІ", 2008. – 80 с.
6. Лугінін О. Є. Економетрія : навч. посіб. / О. Є. Лугінін, С. В. Білоусова, О. М. Білоусов. – К. : Центр навчальної літератури, 2005. – 252 с.
7. Білоцерківський О. Б. Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Економіко-математичне моделювання" для студентів спеціальностей 7.050206 "Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності" та 6.030508 "Фінанси" / О. Б. Білоцерківський, Н. В. Ширяєва. – Х. : НТУ "ХПІ", 2009. – 76 с.
8. Алесинская Т. В. Учебно-методическое пособие по курсу "Экономико-математические методы и модели. Линейное программирование" / Т. В. Алесинская, В. Д. Сербин, А. В. Катаев. – Таганрог : ТРТУ, 2001. – 79 с.
9. Мур Д. Х. Экономическое моделирование в *Microsoft Excel* / Д. Х. Мур, Л. Р. Уэдерфорд. – М. : Вильямс, 2004. – 1024 с.
10. Расторгуев Д. Н. Методические рекомендации к практическим занятиям по компьютерному моделированию социально-экономических процессов / Д. Н. Расторгуев. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – 32 с.
11. Егоршин А. А. Практикум по эконометрии в *Excel* : учеб. пособие для эконом. вузов / А. А. Егоршин, Л. М. Малярец. – Х. : ИНЖЭК, 2005. – 100 с.

12. Білоцерківський О. Б. Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу "Економетрія" для студентів спеціальностей 7.050206 "Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності" та 6.030508 "Фінанси" / О. Б. Білоцерківський. – Х. : НТУ "ХПІ", 2010. – 36 с.



## ЗМІСТ

Вступ.....	3
1. Побудова графіків функцій в <i>MS Excel</i> .....	4
2. Розв'язання задач лінійного програмування графічним методом.....	5
3. Розв'язання задач лінійного програмування за допомогою надбудови <i>MS Excel</i> "Поиск решения".....	10
4. Аналіз оптимального розв'язку на чутливість в <i>MS Excel</i> .....	17
5. Розв'язання задач цілочислового програмування та транспортних задач.....	24
6. Побудова моделі парної регресії.....	29
7. Побудова моделі множинної регресії.....	32
8. Визначення довірчого інтервалу для парної регресії.....	34
Контрольні запитання.....	36
Список літератури.....	38