

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ**

Кафедра вищої математики та фізики

**ЕЛЕМЕНТИ
ВЕКТОРНОГО ТА ТЕНЗОРНОГО
АНАЛІЗУ**

**Навчальний посібник
для здобувачів інженерно-технічних
спеціальностей**

**КРОПИВНИЦЬКИЙ
2025**

Елементи векторного та тензорного аналізу. Навчальний посібник для здобувачів інженерно-технічних спеціальностей./ Укл.: С.М. Якименко, В.І.Гуцул, І.І.Філімоніхіна, М.Ф.Семенюта, Л.М.Кривоблоцька – Кропивницький: ЦНТУ, 2025 р. – 132 с.

Укладачі:

Сергій Миколайович Якименко - канд. фіз.-матем. наук, доц.

Василь Іванович Гуцул - канд. техн. наук, доц.

Ірина Іванівна Філімоніхіна - канд. фіз.-матем. наук, доц.

Марина Фролівна Семенюта - канд. фіз.-матем. наук, доц.

Лариса Миколаївна Кривоблоцька - канд. фіз.-матем. наук, доц.

Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук, професор В.М.Крамар,

доктор технічних наук, професор Ю.В.Кулешков

Рекомендовано до друку Вченою
радою ЦНТУ Міністерства освіти та
науки України.
Протокол № 10 від 26 червня 2025 р.

© Елементи векторного та тензорного аналізу. / Укл.: С.М. Якименко,
В.І.Гуцул, І.І.Філімоніхіна, М.Ф.Семенюта, Л.М.Кривоблоцька
© РВЛ ЦНТУ, 2025

ВСТУП

Останнім часом серед спеціальних розділів вищої математики, які читаються в технічних вищих навчальних закладах, виділився курс тензорного аналізу, який необхідний при вивченні основ механіки суцільних середовищ (теорії пружності і пластичності), кристалографії, деяких розділів теоретичної фізики, фізики напівпровідників і багатьох інших розділів теоретичних і технічних дисциплін, які вивчаються у ВНЗ. Зокрема, в механіці суцільних середовищ (теорії пружності і пластичності) викладання теорії деформацій і напружень, вивчення зв'язку між ними, як правило, проводиться з застосуванням тензорного аналізу.

Вперше поняття тензора ввели фізики в середині минулого століття, які прийшли до висновку, що для характеристики таких величин, як деформації, напруження, інерція твердого тіла і т. п., скалярів і векторів недостатньо, а тому потрібно вводити більш складні об'єкти.

Для чого ж потрібний тензорний аналіз? При описі багатьох фізичних явищ, як правило, вводиться та чи інша система координат. Це дає можливість представити відповідні фізичні об'єкти у вигляді чисел, а фізичні закони звести до рівностей, які зв'язують ці числа або системи чисел. І якщо скалярні величини (температура, густина, маса) представляються в будь-якій системі координат одним і тим же числом, то векторні величини (швидкість, прискорення, сила) представляються трьома числами – координатами вектора, які змінюються при переході до нових координат по деякому закону. Таким чином, ця картина вивчаємих нами векторів (а надалі і більш складних математичних об'єктів – тензорів, які описують

деформований і напружений стан суцільного середовища) накладається взагалі кажучи, випадковий вибір системи координат.

Основною задачею тензорного аналізу є знаходження математичних формулювань законів фізики, які не залежать від таких сторонніх обставин, як частинний вибір координатної системи, тобто виділення так званих інваріантів – величин, які зберігають незмінне значення при переході до нової системи координат.

Тензорний аналіз розглядає методи побудови інваріантних виразів, які не залежать від вибору координатної системи. Задачу побудови таких інваріантних виразів тензорний аналіз розв'язує двома способами. Перш за все в тензорному аналізі розглядаються дії над тензорами без введення допоміжних координатних систем. Разом з тим, необхідно добре володіти правилами перетворення компонентів вектора або тензора при переході до нової системи координат.

Всі тензорні величини, незалежно від їх фізичної природи, підкоряються визначеним математичним операціям, які складають зміст тензорного аналізу.

В пропонованому навчальному посібнику при викладі тензорного аналізу автор виходив із того, що студент знайомий із звичайним курсом вищої математики, який читається у ВНЗ.

В кінці посібника приводиться список літератури, яка рекомендується для більш повного і глибокого вивчення тензорного аналізу.

Для простоти і наочності весь виклад ведеться в тривимірному просторі. При цьому використовуються тільки ортогональні системи координат. Спочатку розглядаються прямокутні декартові координати, а потім криволінійні ортогональні.

Введені в посібнику поняття і одержані результати

ілюструються великим числом прикладів.

Даний посібник являється коротким вступом в тензорний аналіз, який охоплює основні поняття тензорного аналізу і вказує основні області його застосування в механіці суцільних середовищ. Указані в посібнику застосування тензорного аналізу потрібно розглядати як ілюстративний матеріал, а не систематичний виклад відповідних розділів механіки. Більш глибокі відомості студент одержить із відповідних спеціальних курсів.

ЧАСТИНА 1

Розділ 1. Векторна алгебра

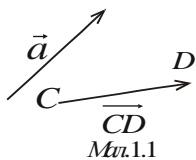
§1. Скаляри і вектори

В математиці і фізиці доводиться мати справу з величинами двох типів: одні з величин зв'язані поняттям про напрямок в просторі, інші ж мають чисто числовий характер і не зв'язані з поняттям про напрямок.

Скаляром або скалярною величиною називається фізична величина, яка повністю визначається одним числовим додатнім або від'ємним значенням. До скалярних величин відносяться температура, густина, маса, робота сили, енергія та інші. Порівнюватися можуть тільки скаляри однакової розмірності. Два скаляри однакової розмірності рівні, якщо при вимірюванні їх однією і тією ж одиницею міри одержуються однакові числа.

Для багатьох інших фізичних величин, крім числового значення, необхідно вказати напрямок в просторі.

Вектором або векторною величиною називається фізична величина, яка характеризується числовим значенням (модулем) і визначеним напрямком в просторі. Назвемо таке означення геометричним означенням вектора. До векторних величин відносяться переміщення, швидкість, прискорення матеріальної точки, сила, момент сили та інші. Геометрично вектори відображають напрямленими відрізками прямих, напрямком яких співпадає з



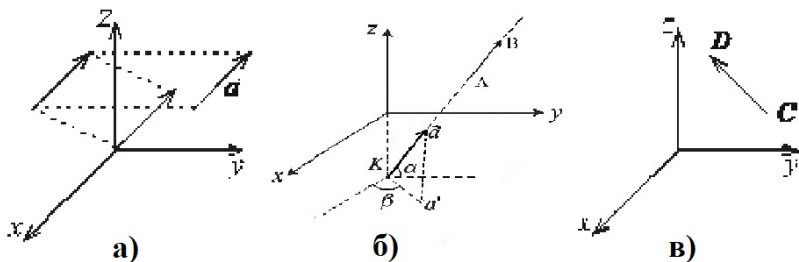
напрямком розглядуваної величини, а довжина у вибраному масштабі характеризує числове значення вектора (Мал. 1.1). Позначаються вектори однією маленькою буквою $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$, або двома

великими - $\vec{AB}, \vec{CD}, \dots$. Довжина або модуль вектора позначається $|\vec{a}| = a; |\vec{CD}| = CD$.

Порівнювати можна вектори однакової розмірності. Два вектори однакової розмірності рівні, якщо вони мають один і той же напрямок і одну і ту ж довжину.

Зауважимо, що розрізняють вектори трьох типів: вільні, пересувні і зв'язані.

Вільний вектор можна переносити паралельно самому собі і прикладати в будь-якій точці (наприклад, швидкість поступального руху тіла). Вільний вектор (мал.1.2.а) в просторі повністю визначається трьома числами, наприклад, трьома його проєкціями на осі декартової системи координат.



Мал.1.2

Пересувні вектори можна переносити по прямій, яка визначає напрямок вектора (наприклад, вектор сили, який прикладений до абсолютно твердого тіла). Для визначення пересувного вектора

(мал.1.2.б) в просторі потрібно задати п'ять чисел, наприклад, координати точки K перетину прямої, на якій лежить вектор, з якою-небудь координатною площиною (два числа), довжину вектора (одне число) і величини двох незалежних кутів α і β .

Зв'язаний вектор відноситься до визначеної точки (наприклад, швидкість і прискорення точки твердого тіла, яка рухається довільним чином). Зв'язаний вектор (мал.1.2.в) визначається шістьма числами, наприклад, координатами початку і кінця вектора.

Вивчення пересувних і зв'язаних векторів можна звести до вивчення вільних векторів, тому надалі будемо розглядати тільки вільні вектори.

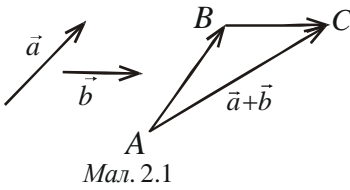
Багато задач механіки, теоретичної фізики та інших наук приводять до поняття тензора. Ці величини також мають напрямлений характер, але набагато складнішої будови. Геометричне означення вектора як напрямленого відрізка прямої не дає можливості простим узагальненням перейти до поняття тензора. Тому спочатку докладніше зупинимося на векторах. Потім дамо нове означення вектора і узагальнимо його на поняття тензора, так як скаляр і вектор являються частинними випадками тензора.

§2. Лінійні операції над векторами

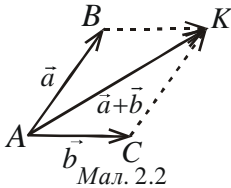
Лінійними операціями називаються операції додавання і віднімання векторів і множення вектора на число.

Розглянемо два вектори \vec{a} і \vec{b} . Візьмемо довільну точку A і побудуємо вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, а потім від точки B відкладемо вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (мал.2.1). Сумою двох векторів \vec{a} і \vec{b} називається вектор \overrightarrow{AC} , який

з'єднує початок першого вектора і кінець другого.



Якщо вектори не паралельні, то суму двох векторів можна одержати також по правилу паралелограма. Для цього від точки A відкладемо вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ (мал.2.2). Побудуємо на цих векторах як на сторонах паралелограм $ABKC$.



Вектор \overrightarrow{AK} , який служить діагоналлю паралелограма, проведений із вершини A , являється сумою векторів $\vec{a} + \vec{b}$.

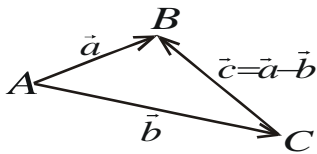
Суму декількох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ можна одержати наступним чином. Із довільної точки відкладається перший вектор. До кінця першого вектора приєднується початок другого; до кінця другого – початок третього і т.д. Вектор, який з'єднує початок першого вектора з кінцем останнього, являється сумою даних векторів (мал.2.3).



Дія додавання векторів має такі властивості:

- 1) комутативність, тобто $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- 2) асоціативність, тобто $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;
- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, де $\vec{0}$ – нульовий вектор.

Різницею двох векторів \vec{a} і \vec{b} називається третій вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, сума якого з від'ємником \vec{b} дає вектор \vec{a} , тобто, якщо $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, то $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$ або $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$.



Мал. 2.4

Із означення суми двох векторів випливає правило побудови вектора різниці (мал.2.4). Відкладаємо вектори $\vec{AB} = \vec{a}$ і $\vec{AC} = \vec{b}$ із спільної точки A . Вектор \vec{c} , який з'єднує кінці

зменшуваного \vec{a} і від'ємника \vec{b} і напрямлений від від'ємника до зменшуваного, являється різницею $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Добутком $\lambda\vec{a}$ (або $\vec{a}\lambda$) вектора \vec{a} на дійсне число λ називається вектор \vec{b} , паралельний вектору \vec{a} , який має довжину, рівну $|\lambda||\vec{a}|$, і той же напрямок, що і вектор \vec{a} , якщо $\lambda > 0$, і напрямок, протилежний напрямку вектора \vec{a} , якщо $\lambda < 0$. В випадку, коли $\lambda = 0$ або $\vec{a} = 0$, добуток $\lambda\vec{a}$ представляє собою нульовий вектор. Протилежний вектор $-\vec{a}$ можна розглядати як результат множення вектора \vec{a} на $\lambda = -1$: $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$. Очевидно, що $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Розглянемо довільний вектор \vec{a} і одиничний вектор \vec{e} , паралельний вектору \vec{a} і однаково з ним напрямлений. Із означення множення вектора на число випливає, що $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$, тобто кожний вектор дорівнює добутку його модуля на одиничний вектор того ж напрямку.

Властивості множення вектора на число:

- 1) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;
- 2) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;
- 3) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$, де λ, μ – дійсні числа, \vec{a}, \vec{b} – вектори.

§3. Лінійно залежні і лінійно незалежні вектори.

Будь-який вираз вигляду $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$, де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – деякі скаляри, називається лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називаються лінійно залежними, якщо існують числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, не всі рівні нулю, для яких лінійна комбінація даних векторів дорівнює нулю, тобто

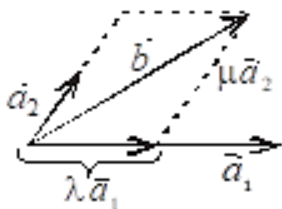
$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0. \quad (3.1)$$

Або іншими словами, вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ лінійно залежні, якщо будь-який із цих векторів являється лінійною комбінацією решти.

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називаються лінійно незалежними, якщо рівність (3.1) виконується тільки при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Два лінійно залежних вектори паралельні між собою. Дійсно, нехай $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = 0$, причому, по крайній мірі $\lambda_2 \neq 0$. Тоді, позначивши $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\mu$, одержимо $\vec{a}_2 = \mu \vec{a}_1$. А це й означає, що вектори \vec{a}_1 і \vec{a}_2 паралельні між собою.

Якщо взяти на площині будь-які два непаралельні вектори \vec{a}_1 і \vec{a}_2 , то будь-який третій вектор \vec{b} в цій же площині можна розкласти по векторах \vec{a}_1 і \vec{a}_2 , тобто представити у вигляді лінійної комбінації (мал.3.1).



Мал. 3.1

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2. \quad (3.2)$$

Тому на площині можна вказати два лінійно незалежні вектори, але будь-які три вектори на площині вже будуть лінійно залежними. Максимальне число лінійно незалежних векторів на площині дорівнює двом.

Три лінійно залежних вектора лежать в одній площині (або в паралельних площинах). Дійсно, нехай $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = 0$, причому, по крайній мірі, $\lambda_3 \neq 0$. Тоді, позначивши $\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = -\mu_1$; $\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = -\mu_2$, одержимо

$$\vec{a}_3 = \mu_1 \vec{a}_1 + \mu_2 \vec{a}_2. \quad (3.3)$$

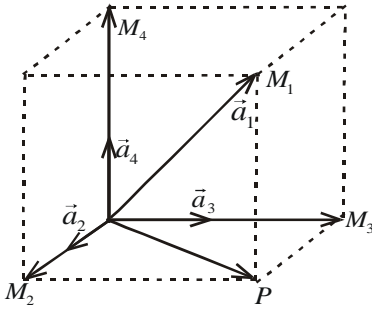
Звідси випливає, що вектор \vec{a}_3 лежить в одній площині з векторами \vec{a}_1 і \vec{a}_2 , так як \vec{a}_3 являється сумою векторів $\mu_1 \vec{a}_1$ і $\mu_2 \vec{a}_2$, паралельних \vec{a}_1 і \vec{a}_2 .

Вектори, які лежать в одній площині або в паралельних площинах, називаються компланарними. Якщо компланарні вектори мають спільний початок, то вони лежать в одній площині.

Теорема. Будь-які чотири вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ в просторі лінійно залежні.

Доведення. Припустимо, що дані вектори мають спільний початок. Для того, щоб показати їх лінійну залежність, достатньо переконатись в тому, що один із векторів являється лінійною комбінацією решти. Можливі два випадки:

1. Серед даних векторів існує трійка компланарних, наприклад вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Так як ці вектори лежать в одній площині, то один із векторів, наприклад \vec{a}_1 , можна представити у вигляді лінійної комбінації інших: $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2 + \mu \vec{a}_3$. В такому випадку для всіх чотирьох векторів можна записати рівність $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2 + \mu \vec{a}_3 + 0 \vec{a}_4$, а це значить, що вектор \vec{a}_1 є лінійна комбінація векторів $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$.



Мал. 3.2

2. Серед даних векторів немає ні однієї трійки компланарних векторів. В цьому випадку вектор \vec{a}_1 може бути представлений у вигляді суми трьох векторів, паралельних відповідно векторам \vec{a}_2, \vec{a}_3 і \vec{a}_4 . Для цього, проводячи через точку M_1 – кінець вектора \vec{a}_1 – площини, відповідно паралельні трьом

площинам, які визначаються парами векторів \vec{a}_2 і \vec{a}_3, \vec{a}_3 і \vec{a}_4, \vec{a}_4 і \vec{a}_2 , одержуємо паралелепіпед, діагоналю якого являється вектор $\vec{a}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ (мал.3.2). Маємо $\vec{a}_1 = \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM_4} = \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} + \overrightarrow{OM_4}$. Але $\overrightarrow{OM_2} = \lambda \vec{a}_2; \overrightarrow{OM_3} = \mu \vec{a}_3; \overrightarrow{OM_4} = \nu \vec{a}_4$. Отже ,

$$\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2 + \mu \vec{a}_3 + \nu \vec{a}_4, \quad (3.4)$$

тобто вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ і \vec{a}_4 лінійно залежні.

Наслідок 1. Для того, щоб три вектори в просторі були лінійно незалежні, необхідно і достатньо, щоб вони були некопланарні.

Наслідок 2. Максимальне число лінійно незалежних векторів в просторі дорівнює трьом.

Розклади векторів (3.3), (3.4) часто застосовуються в механіці і в інших дисциплінах, наприклад, розклад сили по двох або по трьох напрямках.

§4. Базис на площині і в просторі

Сукупність лінійно незалежних векторів, по яких проводиться розклад решти векторів, називається базисом.

Базисом на площині називається два будь-яких непаралельних вектори, взятих у відповідному порядку.

Хай \vec{a} – будь-який вектор на площині, а вектори \vec{e}_1 і \vec{e}_2 утворюють базис. Так як на площині будь-які три вектори лінійно залежні, то вектор \vec{a} лінійно виражається через вектори базису, тобто виконується співвідношення

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2. \quad (4.1)$$

Якщо вектор \vec{a} представлений у вигляді (4.1), то кажуть, що він розкладений по базису, утвореному векторами \vec{e}_1 і \vec{e}_2 . Числа λ_1 і λ_2 називаються коефіцієнтами розкладу або координатними компонентами вектора \vec{a} на площині відносно базису \vec{e}_1 і \vec{e}_2 .

Базисом в просторі називається три будь-яких некомпланарних вектори, взятих у відповідному напрямку.

Хай \vec{a} – будь-який вектор в просторі, а вектори \vec{e}_1, \vec{e}_2 і \vec{e}_3 утворюють базис. Так як в просторі будь-які чотири вектори лінійно залежні, то вектор \vec{a} лінійно виражається через вектори базису, тобто виконується співвідношення

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3. \quad (4.2)$$

Якщо вектор \vec{a} представлений у вигляді (4.2), то кажуть, що він розкладений по базису, утвореному векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ називаються коефіцієнтами розкладу або координатами (компонентами) вектора \vec{a} в просторі відносно базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Легко показати, що розклад вектора на площині (4.1) і в просторі (4.2) визначається єдиним чином.

Ми бачимо, що площина двовимірна, а простір тривимірний. Якщо в n-вимірному просторі ввести поняття вектора, то там базис буде складатися з n лінійно незалежних векторів.

Основне значення базису полягає в тому, що лінійні операції над векторами при заданні базису стають звичайними лінійними операціями над числами – координатами цих векторів.

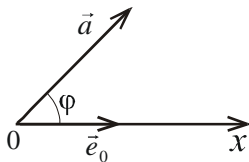
При поданні двох векторів \vec{a}_1 і \vec{a}_2 їх координати (відносно будь-якого одного і того ж базису) додаються. При множенні вектора \vec{a}_1 на будь-яке число λ всі його координати множаться на це число.

§5. Проекція векторів на вісь

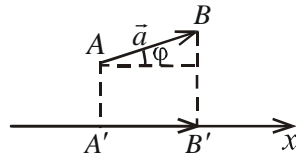
Кутом між векторами \vec{a} і \vec{b} називається найменший кут φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$), на який потрібно повернути один із векторів до його накладання з другим після приведення цих векторів до спільного початку.

Розглянемо вісь x , додатній напрямок якої співпадає з напрямком одиничного вектора \vec{e}_0 , розміщеного по осі x . Такий вектор називається ортом осі x .

Кутом між вектором \vec{a} і віссю x називається кут φ між векторами \vec{a} і \vec{e}_0 (мал.5.1).



Мал. 5.1



Мал. 5.2

Проекцією вектора \overrightarrow{AB} на вісь x пр $_x \overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка $A'B'$ між основами перпендикулярів, опущених із точок A і B на вісь x , причому ця довжина береться зі знаком “плюс”, якщо напрямок відрізка $A'B'$ співпадає з напрямком осі x , і зі знаком

“мінус”, якщо напрямок відрізка $A'B'$ протилежний напрямку осі x . Аналогічно визначається проекція одного вектора на інший.

Проекція вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на вісь x (мал.5.2) дорівнює добутку його модуля на косинус кута φ між цим вектором і віссю x :

$$np_x \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi. \quad (5.1)$$

Проекція вектора на вісь додатня, якщо вектор утворює з віссю гострий кут, від'ємна якщо цей кут тупий, рівна нулю, якщо цей кут прямий. Якщо $\vec{a} = 0$, то вважають $np_x \vec{a} = 0$.

Проекції рівних векторів \vec{a} і \vec{b} на одну і ту ж вісь x рівні між собою.

Проекції векторів \vec{a} і \vec{b} на дану вісь x мають такі властивості:

$$np_x(\vec{a} + \vec{b}) = np_x \vec{a} + np_x \vec{b}, \quad (5.2)$$

$$np_x(\lambda \vec{a}) = \lambda \cdot np_x \vec{a}. \quad (5.3)$$

§6. Прямокутна декартова система координат в просторі

Розглянемо в просторі довільну точку M . Її положення однозначно визначається радіусом-вектором \vec{r} відносно деякої фіксованої точки (полюса) O , який поки що не зв'язаний ні з якою системою координат і не залежить від неї. Ми знаємо, що будь-який вектор в просторі можна розкласти по базису, тобто по трьох не компланарних векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Візьмемо за вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ взаємно перпендикулярні одиничні вектори (орти) і помістимо в точку O . Кажуть, що ці вектори утворюють ортонормований базис і називають їх відповідно $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

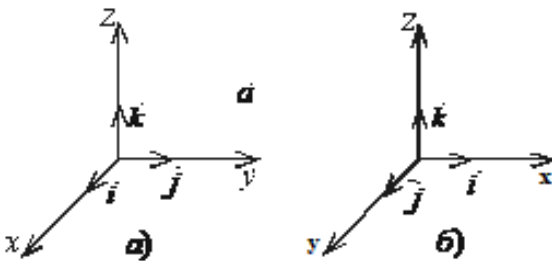
Сукупність ортонормованого базису і точки O називається декартовою прямокутною системою координат в просторі. Точка O називається початком координат. Осі координат позначають x, y, z або x_1, x_2, x_3 . Вісь $x(x_1)$ називається віссю абсцис; вісь $y(x_2)$ – віссю ординат; вісь $z(x_3)$ – віссю аплікат. Площини, які проходять через дві осі координат, називаються координатними площинами.

Розрізняють праву і ліву систему прямокутних декартових координат. Дано означення правої і лівої трійки векторів.

Три некопланарних вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, які мають спільний початок, взяті в певному порядку, утворюють праву трійку, якщо з кінця вектора \vec{c} поворот від \vec{a} до \vec{b} по найкоротшому шляху видно проти руху годинникової стрілки. В протилежному разі трійка векторів має ліву орієнтацію.

Система координат називається правою, якщо її базисні вектори (орти) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ утворюють праву орієнтацію (мал.6.1.а), і лівою, якщо - ліву (мал.6.1.б). Будемо користуватись тільки правою системою координат.

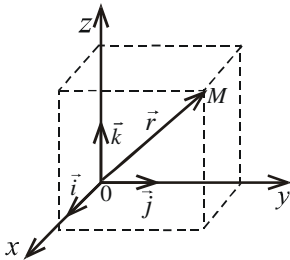
Розкладемо вектор \vec{r} по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (мал.6.2)



Мал. 6.1

$$\vec{r} = x_m \vec{i} + y_m \vec{j} + z_m \vec{k}. \quad (6.1)$$

Числа x_m, y_m, z_m являються проекціями вектора \vec{r} на координатні осі O_x, O_y, O_z відповідно і називаються координатами (компонентами) вектора \vec{r} .

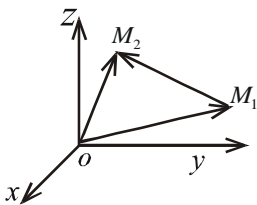


Мал. 6.2

Декартовими прямокутними координатами точки M називається проекція її радіуса-вектора \vec{OM} на відповідні координатні осі. Символ $M(x_m, y_m, z_m)$ означає, що точка M має координати x_m, y_m, z_m .

Зазначимо, що кожній точці простору відповідає упорядкована трійка дійсних чисел (x, y, z) , тобто її координат. Справедливо і обернене: кожній впорядкованій трійці дійсних чисел (x, y, z) відповідає одна точка простору. Це значить, що в просторі положення довільної точки M повністю визначається її координатами x, y, z .

Хай задані дві точки $M(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Розглянемо вектор $\vec{M_1M_2}$. Із (мал.6.3) видно, що $\vec{M_1M_2} = \vec{OM_2} - \vec{OM_1}$. Так як



Мал. 6.3

координати векторів $OM_1(x_1, y_1, z_1)$ і $OM_2(x_2, y_2, z_2)$ відомі, можна обчислити координати вектора $\vec{M_1M_2}$:

$$\vec{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (6.2)$$

Отже, щоб знайти координати вектора, достатньо від координат його кінця відняти

відповідні координати початку.

Хай два ненульових вектори

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

паралельні. Значить $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ або $\lambda = \frac{\vec{b}}{\vec{a}}$. Останнє співвідношення рівносильно трьом рівностям

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda. \quad (6.3)$$

Вираз (6.3) є умовою паралельності двох векторів.

Крім декартової прямокутної системи координат, в просторі можна ввести і багато інших криволінійних систем координат. Найбільш вживані на практиці системи координат ми розглядатимемо надалі.

§7. Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Скалярний добуток двох векторів \vec{a} і \vec{b} позначається символом $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або (\vec{a}, \vec{b}) . Якщо кут між векторами дорівнює φ , то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi. \quad (7.1)$$

Так як $|\vec{b}| \cdot \cos \varphi = np_{\vec{a}}\vec{b}$ і $|\vec{a}| \cos \varphi = np_{\vec{b}}\vec{a}$, то можна записати

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}, \quad (7.2)$$

тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного з них на проекцію другого вектора на напрямок першого.

Основні властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переставна властивість);
2. $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ (\vec{a}^2 Називається скалярним квадратом вектора);
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (розподільна властивість);

4. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сполучна властивість відносно числового множника).

Із рівності (7.1) випливає, що косинус кута між двома ненульовими векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \quad (7.3)$$

З цієї рівності одержуємо, що два вектори \vec{a} і \vec{b} перпендикулярні, тобто $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тоді і тільки тоді, коли

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \quad (7.4)$$

Це твердження справедливе також і в тому випадку, коли хоча б один із векторів \vec{a} або \vec{b} нульовий (нульовий вектор має невизначений напрямок, і його можна вважати перпендикулярним будь-якому вектору).

Нехай в деякій декартовій прямокутній системі координат задано два вектори $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ і $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$.

Перемножуючи ці вирази як многочлени і враховуючи співвідношення

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad (7.5)$$

будемо мати скалярний добуток двох векторів в координатній формі:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z. \quad (7.6)$$

Із рівності (7.6) з урахуванням формули скалярного квадрата вектора можна одержати довжину вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (7.7)$$

§8. Векторний добуток двох векторів

Векторним добутком двох непаралельних векторів \vec{a} і \vec{b} називається вектор \vec{c} , який задовільняє таким умовам:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$;
- 2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;
- 3) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.

Векторний добуток позначається $\vec{a} \times \vec{b}$ або $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Основні властивості векторного добутку:

- 1) якщо \vec{a} і \vec{b} – непаралельні, то модуль векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} , як на сторонах;
- 2) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$;
- 3) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;
- 4) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$;
- 5) якщо векторний добуток двох векторів дорівнює нульовому вектору, то або дорівнює нульовому вектору один із векторів \vec{a} і \vec{b} , або дорівнює нулю синус кута між ними, тобто вектори паралельні.

Нехай в деякій декартовій прямокутній системі координат задано два вектори $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ і $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$.

Виразимо векторний добуток двох векторів \vec{a} і \vec{b} в координатній формі. Перемноживши ці вектори як многочлени і враховуючи співвідношення:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0; \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad (8.1)$$

одержимо

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} - (b_z a_x - b_x a_z) \vec{j} + (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i}$$

або

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (8.2)$$

§9. Добуток трьох векторів

Змішаним (векторно-скалярним) добутком трьох векторів \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} , називається число, яке одержується при скалярному перемноженні векторного добутку векторів \vec{a} і \vec{b} на вектор \vec{c} , тобто $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$. Позначають $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ або abc .

Основні властивості змішаного добутку:

- 1) модуль змішаного добутку трьох некопланарних векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, ребрами якого є ці вектори;
- 2) $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;
- 3) необхідною і достатньою умовою компланарності трьох відмінних від нуля векторів є рівність нулю їх змішаного добутку;
- 4) змішаний добуток не змінюється при круговій перестановці його співмножників:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}); \quad (9.1)$$

- 5) перестановка двох сусідніх співмножників змінює знак добутку, наприклад справедлива рівність

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}).$$

Якщо три вектори

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}, \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$$

задані своїми координатами, то їх змішаний добуток обчислюється за формулою:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (9.2)$$

Розглянемо подвійний векторний добуток трьох векторів

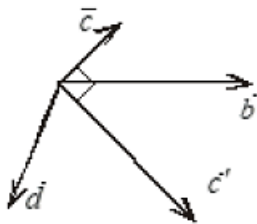
$$\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}). \quad (9.3)$$

Цей добуток представляє собою вектор \vec{d} , який лежить в площині векторів \vec{b}, \vec{c} і перпендикулярний до вектора \vec{a} .

Будемо вважати, що вектори \vec{b} і \vec{c} не паралельні. Вектор \vec{d} перпендикулярний вектору $\vec{b} \times \vec{c}$ і тому лежить в площині π , яка визначається векторами \vec{b} і \vec{c} , тобто вектор \vec{d} можна розкласти по векторах \vec{b} і \vec{c}

$$\vec{d} = \lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c}, \quad (9.4)$$

де λ, μ – числа, які потрібно визначити.



Мал. 9.1

Позначимо через \vec{c}' вектор, який лежить в площині π і який одержується із \vec{c} поворотом на 90° за годинниковою стрілкою. Якщо дивитись із кінця вектора $\vec{b} \times \vec{c}$ (мал. 9.1). Вектори \vec{c}', \vec{c} і $\vec{b} \times \vec{c}$ утворюють праву трійку векторів. Помножимо обидві частини рівнянь

(9.3), (9.4) скалярно на \vec{c}' :

$$\vec{d} \cdot \vec{c}' = \lambda \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}' + \mu \cdot \vec{c} \cdot \vec{c}' = \lambda(\vec{b} \cdot \vec{c}'). \quad (9.5)$$

З другого боку враховуючи (9.1), одержимо

$$\vec{d} \cdot \vec{c}' = [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})] \cdot \vec{c}' = [(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{c}'] \cdot \vec{a}. \quad (9.6)$$

Подвійний векторний добуток $(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{c}'$ можна обчислити безпосередньо. Вектор $\vec{b} \times \vec{c}$ має довжину $|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin(\widehat{\vec{b}, \vec{c}})$ і напрямлений по перпендикуляру до площини π вгору. Тому вектор $(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{c}'$ має довжину

$$\begin{aligned} |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) \cdot |\vec{c}'| &= |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot |\vec{c}'| \cdot \sin(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = \\ &= |\vec{c}'| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}'| \cdot \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{c}'}) = |\vec{c}'| \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}') \end{aligned}$$

і напрямлений по вектору \vec{c} , а це значить $(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{c}' = \vec{c}(\vec{b} \cdot \vec{c}')$

$$\vec{d} \cdot \vec{c}' = [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})] \cdot \vec{c}' = [(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{c}'] \cdot \vec{a} = (\vec{b} \cdot \vec{c}')(\vec{a} \cdot \vec{c}). \quad (9.7)$$

Порівнюючи цей вираз з рівністю (9.5), одержимо

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}') &= (\vec{b} \cdot \vec{c}')(\vec{a} \cdot \vec{c}), \\ \lambda &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \end{aligned} \quad (9.8)$$

Помножимо вираз (9.4) скалярно на вектор \vec{d} :

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \mu(\vec{a} \cdot \vec{c}). \quad (9.9)$$

Так як вектор \vec{d} перпендикулярний вектору \vec{a} , то $\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$. Тоді із (9.9) одержимо:

$$\mu = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (9.10)$$

Підставивши λ і μ в формулу (9.4) і врахувавши вираз (9.3), одержимо:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (9.11)$$

Ця формула залишається справедливою і при паралельності векторів \vec{b} і \vec{c} , так як тоді обидві частини рівності перетворюються в нуль.

Зауважимо, що в подвійному векторному добутку важливо підкреслювати порядок перемноження. Так, наприклад, обчислюючи

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, одержимо зовсім інший вектор:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = c \times (\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b}). \quad (9.12)$$

Розділ 2. Векторний аналіз

§10. Диференціювання векторних функцій

скалярного аргументу

Розглянемо змінний вектор $\vec{a}(t)$, який залежить від деякої змінної t і представляє деяку функцію від t .

Якщо кожному допустимому числовому значенню скалярної величини t відповідає один цілком визначений вектор \vec{a} , то кажуть, що задана вектор-функція від скалярного аргументу. Задання векторної функції $\vec{a}(t)$ еквівалентно заданню трьох скалярних функцій від t : $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ або

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}. \quad (10.1)$$

Прикладами векторних функцій скалярного аргументу t (часу) являються радіус-вектор матеріальної точки, вектор її швидкості, вектор прискорення і т.д.

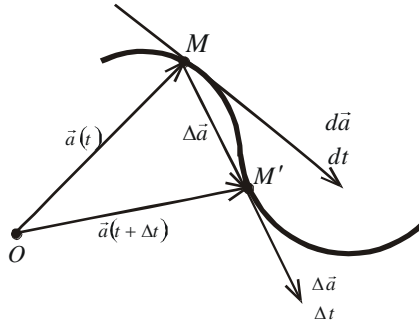
Будемо вважати $\vec{a}(t)$ неперервною функцією, тобто для двох сусідніх значень аргументів t і $t + \Delta t$ різниця $\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)$ може бути зроблена скільки завгодно малою при достатньо малому значенні Δt . В цьому випадку кажуть, що $\vec{a}(t)$ є границя $\vec{a}(t + \Delta t)$ при Δt , прямуючому до нуля, і пишуть

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}(t + \Delta t). \quad (10.2)$$

Відкладемо вектор $\vec{a}(t)$ від деякої визначеної точки O . Тоді кінець вектора при зміні t накреслить неперервну криву, яка називається

годографом вектора $\vec{a}(t)$ (Мал.10.1). Візьмемо два сусідніх значення аргументу t і $t + \Delta t$ і знайдемо відповідні їм значення вектора $\vec{a}(t)$ і $\vec{a}(t + \Delta t)$. Тоді приріст вектора запишеться у вигляді

$$\Delta \vec{a} = \vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t). \quad (10.3)$$



Мал.10.1

Як і у випадку означення похідної скалярної функції обчислимо границю відношення приросту векторної функції до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля. Якщо така границя існує, то її називають похідною від векторної функції (похідна вектора) по скалярному аргументу і позначають

$$\vec{a}'(t) = \frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}. \quad (10.4)$$

Аналогічно визначають похідні вищих порядків.

Доведемо, що похідна $\vec{a}'(t)$ являється вектором, напрямленим по дотичній до годографа вектора $\vec{a}(t)$. Розглянемо відношення $\frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t}$. Це відношення визначає вектор, напрямлений по січній MM' годографа вектора $\vec{a}(t)$ (Мал.10.1). При прямуванні Δt до нуля точка M' прямує до точки M , а січна до дотичної в точці M . Отже, вектор $\frac{d\vec{a}}{dt}$ напрямлений по дотичній у відповідній точці годографа вектора $\vec{a}(t)$.

Якщо взяти за вектор \vec{a} радіус-вектор \vec{r} деякої рухомої точки $M(\vec{r})$, а за t – час, то:

- 1) $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ буде вектором переміщення за час Δt ;
- 2) $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ буде вектором середньої швидкості за проміжок часу Δt ;
- 3) $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}'(t)$ буде вектором швидкості $\vec{v}(t)$ в момент часу t і цей вектор буде напрямлений по дотичній до траєкторії руху точки.

Аналогічно, похідна вектора швидкості буде вектором прискорення точки.

$$\vec{w}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (10.5)$$

Основні властивості похідних зберігаються і для похідних векторних функцій.

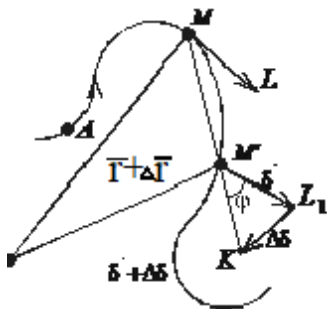
§11. Кривина і скрут

Розглянемо деякі застосування диференціального числення векторів.

Нехай точка M з радіусом-вектором \vec{r} описує деяку криву в просторі. Положення будь-якої точки M по кривій будемо визначати довжиною дуги S , яка відраховується від деякої визначеної точки A до точки M і вважається додатною в один бік від точки A і від'ємною в інший. Таким чином, \vec{r} розглядається як функція скалярного аргументу S .

Обчислимо похідні першого і другого порядку $\frac{d\vec{r}}{ds}$ і $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$. Дана крива являється годографом радіуса-вектора \vec{r} , тому напрямком $\frac{d\vec{r}}{ds}$ співпадає з напрямком дотичної до кривої в бік зростання дуги S . Величина $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|$ дорівнює одиниці, тому що $\frac{d\vec{r}}{ds}$ є границя відношення $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta S}$. А величина $\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta S}\right|$, яка дорівнює відношенню малої хорди MM' до відповідної дуги, наближається до одиниці при прямуванні ΔS до нуля (Мал.11.1). Отже $\frac{d\vec{r}}{ds}$ є одиничний вектор, напрямлений по дотичній до кривої в точці M в бік зростання аргументу S . Позначимо цей дотичний вектор $\vec{\delta}$:

$$\vec{\delta} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad |\vec{\delta}| = 1. \quad (11.1)$$



Мал. 11.1

Якщо вектор \vec{r} заданий своїми координатами

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (11.2)$$

то

$$\vec{\delta} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k}, \quad (11.3)$$

причому

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1. \quad (11.4)$$

Обчислимо другу похідну від векторної функції

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{\delta}}{ds}.$$

Отже нам потрібно знайти $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\vec{\delta}}{\Delta S} \right|$. Із (Мал.11.1) маємо $MM' = \Delta S$, $\overline{ML'} = \vec{\delta}$, $\overline{M'K} = \vec{\delta} + \Delta\delta$. Проведемо із точки M' вектор $\overline{M'L_1} = \vec{\delta}$. Із трикутника $M'KL_1$ знаходимо:

$$\vec{\delta} + \Delta\vec{\delta} = \vec{\delta} + \overline{L_1K}.$$

Отже, $\overline{L_1K} = \Delta\delta$. Так як довжина вектора $\vec{\delta}$ не змінюється, то $|\vec{\delta}| = |\vec{\delta} + \Delta\vec{\delta}|$. Отже, трикутник $M'KL_1$ - рівнобедрений.

Кут ϕ при вершині цього трикутника є кут повороту дотичної до кривої при переході із точки M в точку M' , тобто відповідає приросту довжини дуги ΔS . Із трикутника $M'KL_1$ знаходимо:

$$L_1K = |\Delta\vec{\delta}| = 2|\vec{\delta}| \cdot \left| \sin \frac{\Delta\phi}{2} \right| = 2 \left| \sin \frac{\Delta\phi}{2} \right|.$$

Розділимо обидві частини цієї рівності на ΔS .

$$\left| \frac{\Delta\vec{\delta}}{\Delta S} \right| = 2 \left| \frac{\sin \frac{\Delta\phi}{2}}{\Delta S} \right| = \left| \frac{\sin \frac{\Delta\phi}{2}}{\frac{\Delta\phi}{2}} \right| \cdot \left| \frac{\Delta\phi}{\Delta S} \right|.$$

Перейдемо до границі в обох частинах останньої рівності при $\Delta S \rightarrow 0$. Одержимо:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\vec{\delta}}{\Delta S} \right| = \left| \frac{d\vec{\delta}}{ds} \right|; \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \frac{\Delta\phi}{2}}{\frac{\Delta\phi}{2}} \right| = 1.$$

Таким чином після переходу до границі одержимо:

$$\left| \frac{d\vec{\delta}}{dS} \right| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\phi}{\Delta S} \right|. \quad (11.5)$$

Відношення кута повороту $\Delta\phi$ дотичної при переході від точки M до точки M' до довжини ΔS дуги MM' , взяте по абсолютній величині, називається середньою кривиною даної лінії на проміжку MM' . Границя середньої кривини при $S \rightarrow 0$ називається кривиною лінії в точці M і позначається буквою K :

$$K = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\phi}{\Delta S} \right|. \quad (11.6)$$

Із рівності (11.5) випливає, що

$$\left| \frac{d\vec{\delta}}{dS} \right| = K, \quad (11.7)$$

тобто довжина вектора $\left| \frac{d\vec{\delta}}{dS} \right|$ (довжина похідної) дорівнює кривині лінії в даній точці. Визначимо напрямок цього вектора. Для цього розглянемо скалярний добуток $\vec{\delta} \cdot \vec{\delta} = 1$. Візьмемо похідну по S від обох частин:

$$\vec{\delta} \cdot \frac{d\vec{\delta}}{dS} + \frac{d\vec{\delta}}{dS} \cdot \vec{\delta} = 0 \Rightarrow 2\vec{\delta} \cdot \frac{d\vec{\delta}}{dS} = 0 \Rightarrow \vec{\delta} \cdot \frac{d\vec{\delta}}{dS} = 0.$$

Так як скалярний добуток дорівнює нулю, то вектори $\vec{\delta}$ і $\frac{d\vec{\delta}}{dS}$ перпендикулярні.

Отже, вектор $\frac{d\vec{\delta}}{dS}$ по довжині дорівнює кривині кривої, перпендикулярний до вектора дотичної і напрямлений, очевидно, в сторону вгнутості кривої.

Кривина характеризує форму кривої, ступінь її викривлення. Для прямої лінії, очевидно, кривина дорівнює нулю, так що кривина є

деяка міра відхилення кривої від прямої. Для кола радіуса R кривина постійна і дорівнює $\frac{1}{R}$.

Пряма, яка має напрямок вектора $\frac{d\vec{\delta}}{dS}$ і проходить через відповідну точку кривої, називається головною нормаллю кривої в даній точці. Одиничний вектор цього напрямку позначимо через \vec{n} .

Так як довжина вектора $\frac{d\vec{\delta}}{dS}$ дорівнює K , то

$$\frac{d\vec{\delta}}{dS} = K \cdot \vec{n}. \quad (11.8)$$

Величина, обернена кривині, називається радіусом кривини лінії в даній точці і позначається R , тобто $R = \frac{1}{K}$. Тому (11.8) можна записати:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dS^2} = \frac{d\vec{\delta}}{dS} = \frac{\vec{n}}{R}. \quad (11.9)$$

Із цієї формули випливає:

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dS^2}\right)^2; \quad \frac{d^2\vec{r}}{dS^2} = \frac{d^2x}{dS^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dS^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dS^2}\vec{k}; \quad (11.10)$$

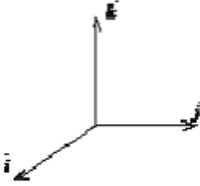
$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dS^2}\right)^2}. \quad (11.11)$$

Площина, яка проходить через дотичну і головну нормаль до заданої кривої в точці M , називається стичною площиною в точці M .

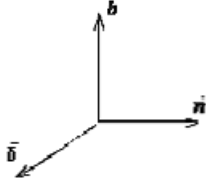
Для плоскої кривої стична площина співпадає з площиною кривої. Якщо крива не плоска, то взявши на ній дві точки A і B , одержимо дві різні стичні площини, які утворюють між собою двогранний кут μ . Чим більший кут μ , тим сильніше крива по своїй формі відрізняється від плоскої кривої. Для того, щоб це уточнити, введемо ще одне означення.

Нормаль до кривої, перпендикулярна до стичної площини, називається бінормаллю.

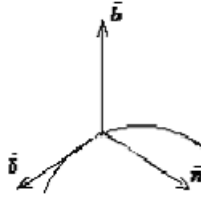
Візьмемо на бінормалі одиничний вектор \vec{b} і направимо його так, щоб вектори $\vec{\delta}$, \vec{n} , \vec{b} утворювали трійку тої ж орієнтації, що й одиничні вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (Мал.11.2, 11.3).



Мал. 11.2



Мал. 11.3



В силу означення векторного і скалярного добутків векторів маємо:

$$\vec{b} = \vec{\delta} \times \vec{n}, \quad \vec{b} \cdot \vec{b} = 1. \quad (11.12)$$

Знайдемо похідну $\frac{d\vec{b}}{ds}$:

$$\frac{d\vec{b}}{dS} = \frac{d\vec{\delta}}{dS} \times \vec{n} + \vec{\delta} \times \frac{d\vec{n}}{dS}. \quad (11.13)$$

Враховуючи формулу (11.9), одержимо:

$$\frac{d\vec{\delta}}{dS} \times \vec{n} = \frac{1}{R} \vec{n} \times \vec{n} = 0$$

і формула (11.13) приймає вигляд:

$$\frac{d\vec{b}}{dS} = \vec{\delta} \times \frac{d\vec{n}}{dS}. \quad (11.14)$$

Згідно означення векторного добутку випливає, що $\frac{d\vec{b}}{ds}$ є вектор, перпендикулярний до вектора дотичної $\vec{\delta}$. З другого боку, так як \vec{b} –

одичний вектор, то $\frac{d\vec{b}}{ds}$ перпендикулярний до \vec{b} (дане твердження було доведено для вектора $\vec{\delta}$).

Значить, вектор $\frac{d\vec{b}}{ds}$ перпендикулярний до $\vec{\delta}$ і \vec{b} , тобто паралельний вектору \vec{n} .

Позначимо $\left| \frac{d\vec{b}}{ds} \right| = \frac{1}{|T|}$, тоді

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{\vec{n}}{T}. \quad (11.15)$$

Величина $\frac{1}{T}$ називається скрутом даної кривої.

Двогранний кут μ між стичними площинами, які відповідають двом точкам кривої, дорівнює куту між бінормальми. По аналогії з формулою (11.5) можна записати:

$$\left| \frac{d\vec{b}}{ds} \right| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\mu}{|\Delta S|}. \quad (11.16)$$

Якщо крива плоска, то стична площина не змінює свого напрямку і скрут дорівнює нулю.

Із означення скруту ясно, що він являється мірою відхилення просторової кривої від плоскої кривої. Величина T називається радіусом скруту кривої.

Знайдемо формулу для обчислення скруту. Із формули (11.14) і (11.15) випливає:

$$\frac{\vec{n}}{T} = \vec{\delta} \times \frac{d\vec{n}}{ds}.$$

Помножимо обидві частини скалярно на \vec{n} :

$$\frac{1}{T} (\vec{n} \cdot \vec{n}) = n \cdot \left(\vec{\delta} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \right).$$

Враховуючи $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ і формулу (9.1), одержимо

$$\frac{1}{T} = -\delta \left(\vec{n} \times \frac{d\vec{n}}{dS} \right). \quad (11.17)$$

Так як $\vec{n} = R \frac{d^2\vec{r}}{dS^2}$, то $\frac{d\vec{n}}{dS} = R \frac{d^3\vec{r}}{dS^3} + \frac{dR}{dS} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dS^2}$.

Розглянемо векторний добуток

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \frac{d\vec{n}}{dS} &= R \frac{d^2\vec{r}}{dS^2} \times \left(R \frac{d^3\vec{r}}{dS^3} + \frac{dR}{dS} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dS^2} \right) = \\ &= R^2 \left(\frac{d^2\vec{r}}{dS^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{dS^3} \right) + R \frac{dR}{dS} \left(\frac{d^2\vec{r}}{dS^2} \times \frac{d^2\vec{r}}{dS^2} \right) = R^2 \left(\frac{d^2\vec{r}}{dS^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{dS^3} \right). \end{aligned}$$

Використавши дану формулу і формулу (11.1) вираз для обчислення скруту (11.17) перепишемо у вигляді:

$$\frac{1}{T} = -R^2 \cdot \frac{d\vec{r}}{dS} \left(\frac{d^2\vec{r}}{dS^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{dS^3} \right). \quad (11.18)$$

Формули (11.10) і (11.18) дають можливість обчислити кривину і скрут лінії в будь-якій точці, якщо ця лінія задана векторною функцією, в якій параметром являється довжина дуги S .

Якщо векторна функція виражена як функція довільного параметра t , то кривина і скрут обчислюється відповідно по формулах:

$$K^2 = \frac{\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right]^2}{\left\{ \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \right\}^3}, \quad (11.19)$$

$$\frac{1}{T} = - \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right)}{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)^2}. \quad (11.20)$$

§12. Інтегрування векторних функцій скалярного аргументу

Дія невизначеного інтегрування векторних функцій аналогічна дії невизначеного інтегрування скалярних функцій.

Невизначеним інтегралом від вектор-функції $\vec{a}(t)$ називається вектор-функція

$$\vec{b}(t) = \int \vec{a}(t)dt + \vec{c}, \quad (12.1)$$

векторна похідна якої дорівнює $\vec{a}(t)$, тобто $\frac{d\vec{b}(t)}{dt} = \vec{a}(t)$. В формулі (12.1) \vec{c} – деякий довільний вектор.

Якщо вибрана незмінна (незалежна від t) система координат, то компоненти невизначеного інтеграла повністю визначаються невизначеними інтегралами від компонент векторної функції, тобто

$$b_i(t) = \int a_i(t)dt + c_i. \quad (12.2)$$

Аналогічно вводиться визначений інтеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt = \vec{b}(t_2) - \vec{b}(t_1), \quad (12.3)$$

який дорівнює різниці значень вектора \vec{b} для верхньої і нижньої меж інтегрування. Визначений інтеграл можна також розглядати як границю деякої суми векторів

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{a}(\xi_i) \cdot \Delta t_i. \quad (12.4)$$

де ξ_i – ряд значень параметра t , які належать проміжку $[t_{i-1}, t_i]$, причому при прямуванні n до нескінченності всі вирази $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ прямують до нуля.

§13. Скалярні і векторні поля

Раніше ми розглядали скаляри і вектори, які змінювалися в залежності від скалярного аргументу. Ці величини можуть також змінюватися і від точки до точки в деякій частині простору.

Якщо кожній точці M простору або його частині (деякій області) ставиться у відповідність по відомому закону конкретне число $u = u(M)$, то кажуть, що задане скалярне поле u .

Поле температури всередині нагрітого тіла, поле тиску в атмосфері, поле густини маси являються прикладами скалярних полів.

Запис $u = u(M)$ не передбачає введення в просторі ніякої системи координат. Якщо ж простір віднесемо до деякої системи координат, наприклад до декартової прямокутної системи координат $Oxyz$, то задання точки M рівносильне заданню її координат x, y, z в цій системі і функція поля $u(M) = u(\vec{r})$ перетвориться в звичайну функцію трьох змінних $u(x, y, z)$.

Якщо кожній точці M простору або його частині (деякій області) ставиться у відповідність визначений вектор $\vec{a}(M)$, то кажуть, що задано векторне поле \vec{a} .

Поле сили тяжіння, поле переміщень деякого тіла, поле швидкостей частинок води в річці являються прикладом векторних полів.

Задання векторної функції $\vec{a}(M)$ в деякій декартовій системі координат $Oxyz$ рівносильне заданню трьох скалярних функцій

$$\vec{a}(M) = \vec{a}(\vec{r}) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}, \quad (13.1)$$

де a_x, a_y, a_z – проекції вектора, заданого в точці $M(x, y, z)$, на відповідні осі координат.

Якщо скалярне або векторне поле змінюється з плином часу, тобто $u(\vec{r}, t)$, $\vec{a}(\vec{r}, t)$, то такі поля називаються нестационарними або неусталеними. Якщо поля не змінюються з плином часу, тобто $u(\vec{r})$, $\vec{a}(\vec{r})$, то такі поля називаються стаціонарними або усталеними.

Якщо скаляр або вектор, який характеризує поле, має однакове значення для всіх точок області, то таке поле називається однорідним.

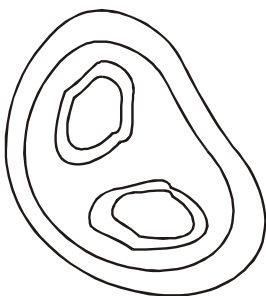
Для наочності представлення велике значення має графічне зображення полів. Скалярне поле часто зображується геометрично за допомогою так званих поверхонь рівня.

Поверхнею рівня скалярного поля $u(\vec{r})$ називається множина точок простору, в якій функція поля u має постійне значення.

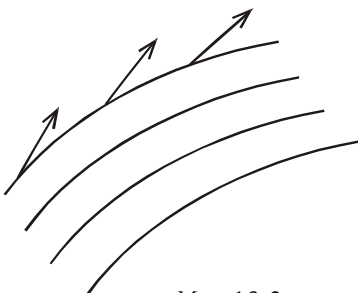
Рівняння поверхні рівня в прямокутній системі координат має вигляд $u(x, y, z) = C$, де C – деяка постійна. Надаючи C різні значення, одержимо сім'ю поверхонь рівня.

Вказаний спосіб зображення скалярного поля зручний, якщо мова йде про плоске скалярне поле. Функція u цього поля залежить тільки від двох його змінних x і y . Тому плоскі скалярні поля геометрично зображують за допомогою ліній рівня (Мал.13.1). У випадку поля температур на площині лінії рівня називаються ізотермами, у випадку поля тиску – ізобарами.

Для наочного зображення векторного поля вводять векторні лінії, тобто лінії, в кожній точці якої дотична співпадає з вектором, який відповідає цій точці (Мал.13.2)



Мал.13.1



Мал.13.2

Векторні лінії в конкретних полях мають простий фізичний зміст. Наприклад, якщо ми розглядаємо поле швидкості рідини, яка тече, то векторні лінії – це лінії течії цієї рідини, тобто лінії, по яких рухаються частинки рідини.

ЧАСТИНА 2

Розділ 3. Поняття тензора.

Для описання руху суцільного середовища, яке моделює тверде деформівне тіло в процесі його обробки тиском, застосовуються скалярні, векторні і тензорні величини. Наприклад розподіл температур в об'ємі деформівного тіла описується скалярним полем. Розподіл швидкостей точок деформівного тіла описується векторним полем. Деформівний і напружений стан описується тензорами другого рангу. З скалярами і векторами ми вже познайомилися. Вектор можна розглядати як тензор першого рангу, тому нам потрібно зробити деякі узагальнення на випадок тензорів більш високого, в першу чергу другого рангу, щоб мати можливість описати деформівний і напружений стан тіла. Однак в той час як для кожного вектора маємо

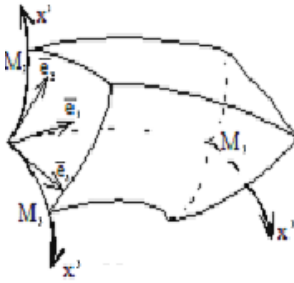
просту геометричну інтерпретацію у вигляді напрямленого відрізка, для тензорів подібного простого наочного представлення дати не можемо. Тому представляється необхідним дати нове (аналітичне) означення вектора, шляхом узагальнення якого можна охопити і більш складний випадок тензора.

Розв'язування конкретної задачі механіки суцільних середовищ проводиться з використанням деякої системи координат. А фізичні закони, за допомогою яких розв'язуються задачі, в тому числі і в механіці суцільних середовищ, повинні бути записані в інваріантній формі, незалежній від вибору системи координат. Вивчення інваріантних властивостей математичних величин (векторів, тензорів) – основна задача тензорного аналізу. Ось чому в тензорному аналізі велика увага приділяється перетворенню систем координат і компонент векторів і тензорів, з чого і починається вивчення математичних основ механіки суцільних середовищ.

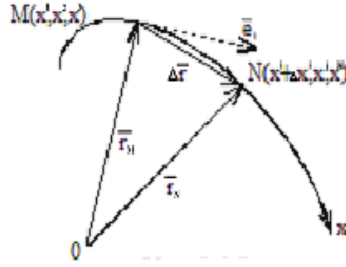
§14. Скорочені індексні позначення

Відповідність між точками простору і числами встановлюється за допомогою вибраної системи координат. Розглянемо довільну праву криволінійну неортогональну систему координат.

В кожній точці M тривимірного простору можна провести три вектори базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (Мал.14.1). Зауважимо, що модулі цих векторів в загальному випадку можуть відрізнятися від одиниці і бути не рівними між собою. Дано означення векторів базису.



Мал. 14.1



Мал. 14.2

Проведемо через точку M координатну лінію x^i (Мал.14.2). Візьмемо дві близькі точки M і N , які лежать на координатній лінії. Знайдемо вектор $\overrightarrow{MN} = \vec{r}_n - \vec{r}_m = \Delta\vec{r}$. Тоді i -тий вектор базису в точці M визначимо як границю відношення

$$e_i = \lim_{\Delta x^i \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta x^i} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^i}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (14.1)$$

де $\frac{\partial}{\partial x^i}$ () – частинна похідна по i -тій координаті. Вектори базису напрямлені по дотичних до координатних ліній в розглядуваній точці (Мал.14.1). Вектори базису змінюються від точки до точки простору і по довжині і по напрямку, тобто $\vec{e}_i = \vec{e}_i(x^1, x^2, x^3)$, $(i = 1, 2, 3)$.

Зупинимось тепер на індексних скорочених позначеннях. Осі системи координат можуть бути позначені різними буквами, наприклад x, y, z . Але можуть бути записані у вигляді x_1, x_2, x_3 або в більш компактному вигляді

$$x_i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (14.2)$$

В однаковій мірі можна використати і верхній індекс x^1, x^2, x^3 або

$$x^i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (14.3)$$

Тут 1, 2, 3 – не показники степеня, а верхні індекси, які позначають відповідно першу, другу і третю координату. У виразі

(14.3) індекс i послідовно приймає значення 1, 2, 3 і називається вільним індексом. Замість i можна використовувати інші буквени індекси. Наприклад, вирази x^i, x^j, x^k, x^m, x^e цілком рівнозначні, всі вони означають запис x^1, x^2, x^3 . Надалі будемо вважати, що буквени індекси змінюються від 1 до 3, так як ми розглядаємо тривимірний простір.

Надалі ми будемо користуватися скороченими позначеннями дії сумування, які вважаються загальноприйнятими в тензорному численні.

Якщо сумування проводиться по одній або декількох парах індексів, які приймають при цьому попарно всі можливі для них значення, то знаки відповідних сум опускаються.

Наприклад вираз

$$a_1 \vec{e}^1 + a_2 \vec{e}^2 + a_3 \vec{e}^3 = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}^i$$

можна записати компактніше, $a_i \vec{e}_i$ опустивши знак суми Σ . Видно, що індекс, по якому йде сумування, з'являється двічі. Отже, знак суми Σ будемо розуміти в будь-якому випадку, коли в одночленному виразі індекс повторюється. Так як індекс, який повторюється, означає сумування від 1 до 3, то застосування якої небудь спеціальної букви для цього індексу не обов'язково, і його можна замінити будь-якою буквою, яка нам зручна, без зміни значення розглядуваного виразу, тобто

$$a_i \vec{e}^i \equiv a_j \vec{e}^j \equiv a_k \vec{e}^k \equiv a_1 \vec{e}^1 + a_2 \vec{e}^2 + a_3 \vec{e}^3. \quad (14.4)$$

По цій причині індекс сумування називається німим. Індекс, який в якому-небудь одночленному виразі не повторюється, називається вільним.

Таке позначення поширюється і на випадок подвійного, потрійного і взагалі n - кратного сумування. Так, наприклад, запис $\alpha_{ij}a^i a^j$ означає суму $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij}a^i a^j$, тобто

$$\alpha_{ij}a^i a^j = \alpha_{11}(a^1)^2 + \alpha_{12}a^1 a^2 + \alpha_{13}a^1 a^3 + \alpha_{21}a^2 a^1 + \alpha_{22}(a^2)^2 + \alpha_{23}a^2 a^3 + \alpha_{31}a^3 a^1 + \alpha_{32}a^3 a^2 + \alpha_{33}(a^3)^2. \quad (14.5)$$

§15. Основний і взаємний базиси. Коваріантні і контраваріантні компоненти вектора

Розглянемо довільну праву прямолінійну косокутну систему координат, яка визначена базисними векторами \vec{e}_i . Трійку векторів \vec{e}_i назвемо основним базисом. Введемо взаємний базис \vec{e}^k так, щоб скалярні добутки $\vec{e}_i \vec{e}^k$ задовольняли співвідношенню

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}^k = \delta_i^k = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq k, \\ 1, & \text{якщо } i = k, \end{cases} \quad (15.1)$$

де δ_i^k - символ Кронекера.

Знайдемо положення вектора \vec{e}^1 взаємного базису відносно базису \vec{e}_i . Згідно формули (15.1) маємо

$$\vec{e}^1 \cdot \vec{e}_1 = 1, \quad \vec{e}^1 \cdot \vec{e}_2 = 0, \quad \vec{e}^1 \cdot \vec{e}_3 = 0.$$

Отже, вектор \vec{e}^1 перпендикулярний площині, яка проходить через вектори \vec{e}_2 і \vec{e}_3 , і утворює з ними трійку векторів. Тому з точністю до постійного множника m вектор \vec{e}^1 дорівнює векторному добутку векторів \vec{e}_2 і \vec{e}_3 , тобто $\vec{e}^1 = m(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)$. Множник m визначимо із умови $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}^1 = 1$, тобто $\vec{e}_1 \cdot m(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = m(e_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)) = 1$. Ввівши позначення, $V = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)$, де V - об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах \vec{e}_i , знайдемо $m = \frac{1}{V}$. Тепер можемо знайти

$$\vec{e}^1 = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{\tilde{V}}. \quad (15.2)$$

Тут ми використали основні властивості змішаного добутку трьох векторів.

Аналогічно одержимо формули для \vec{e}^2 , \vec{e}^3 , скориставшись правилом кругової циклічної зміни індексів

$$\vec{e}^2 = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}{\tilde{V}}; \quad \vec{e}^3 = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\tilde{V}}. \quad (15.3)$$

Зауважимо, що об'єм паралелепіпеда \tilde{V} можна також обчислити так:

$$\tilde{V} = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) = \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2). \quad (15.4)$$

Формули (15.2) і (15.3) виражають вектори \vec{e}^i через вектори взаємного базису \vec{e}_i . Аналогічно можна одержати формули для вираження векторів базису \vec{e}_i через вектори базису \vec{e}^i :

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{e}^2 \times \vec{e}^3}{\tilde{V}}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{e}^3 \times \vec{e}^1}{\tilde{V}}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{e}^1 \times \vec{e}^2}{\tilde{V}}, \quad (15.5)$$

де \tilde{V} – об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах базису \vec{e}^i , тобто

$$\tilde{V} = \vec{e}^1(\vec{e}^2 \times \vec{e}^3) = \vec{e}^2(\vec{e}^3 \times \vec{e}^1) = \vec{e}^3(\vec{e}^1 \times \vec{e}^2). \quad (15.6)$$

Зауважимо, що в прямокутній декартовій системі координат при умові $|\vec{e}_i| = |\vec{e}^i| = 1$ основний і взаємний базиси співпадають, тобто

$$\vec{e}_1 = \vec{e}^1 = \vec{i}_1 = \vec{i}; \quad \vec{e}_2 = \vec{e}^2 = \vec{i}_2 = \vec{j}; \quad \vec{e}_3 = \vec{e}^3 = \vec{i}_3 = \vec{k}. \quad (15.7)$$

Із формул (15.2), (15.3) і (15.5) маємо

$$\tilde{V} \cdot \tilde{V} = 1, \quad (15.8)$$

тобто, основний і взаємний базис мають однакову орієнтацію. В нашому випадку обидва базиси будуть правими. Доведемо це:

$$\begin{aligned} \tilde{V} \cdot \tilde{V} &= \tilde{e}_1(\tilde{e}_2 \times \tilde{e}_3) \cdot \tilde{e}^1 \cdot (\tilde{e}^2 \times \tilde{e}^3) = \underbrace{\tilde{e}_1 \cdot \tilde{e}^1}_{=1} \cdot (\tilde{e}_2 \times \tilde{e}_3) \cdot (\tilde{e}^2 \times \tilde{e}^3) = \\ &= (\tilde{e}_2 \times \tilde{e}_3) \cdot (\tilde{e}^2 \times \tilde{e}^3). \end{aligned}$$

Введемо позначення $\tilde{e}^2 \times \tilde{e}^3 = \tilde{c}$. Тоді в змішаному добутку $(\tilde{e}_2 \times \tilde{e}_3) \cdot \tilde{a}$ проведемо перестановку по формулі (9.1), а при обчисленні подвійного векторного добутку використаємо формулу (9.11)

$$\begin{aligned} \tilde{V} \cdot \tilde{V} &= (\tilde{e}_2 \times \tilde{e}_3) \cdot (\tilde{e}^2 \times \tilde{e}^3) = (\tilde{e}_2 \times \tilde{e}_3) \cdot \tilde{c} = \tilde{e}_2(\tilde{e}_3 \times \tilde{c}) = \\ &= \tilde{e}_2 \cdot [\tilde{e}_3 \times (\tilde{e}^2 \times \tilde{e}^3)] = \tilde{e}_2[\tilde{e}^2 \cdot (\tilde{e}_3 \cdot \tilde{e}^3) - \tilde{e}^3(\tilde{e}_3 \cdot \tilde{e}^2)] = \\ &= \underbrace{(\tilde{e}_2 \cdot \tilde{e}^2)}_{=1} \cdot \underbrace{(\tilde{e}_3 \cdot \tilde{e}^3)}_{=1} - \underbrace{(\tilde{e}_2 \cdot \tilde{e}^3)}_{=0} \cdot \underbrace{(\tilde{e}_3 \cdot \tilde{e}^2)}_{=0}. \end{aligned}$$

Використавши співвідношення (15.1), одержимо формулу (15.8).

В системі координат, яка визначена основним базисом \tilde{e}_i , розглянемо будь-який вектор \tilde{a} . Розкладемо цей вектор на складові, які паралельні осям координат

$$\tilde{a} = a^i \cdot \tilde{e}_i. \quad (15.9)$$

Числа a^i називається контраваріантними компонентами або координатами вектора \tilde{a} .

Побудуємо взаємний базис \tilde{e}^i і представимо вектор \tilde{a} у вигляді розкладу по базису \tilde{e}^i

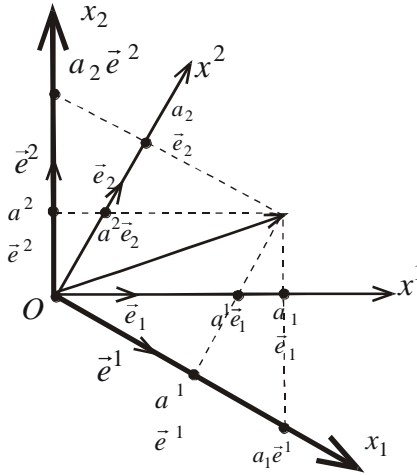
$$\tilde{a} = a_i \cdot \tilde{e}^i. \quad (15.10)$$

Числа a_i називається коваріантними компонентами або координатами вектора \tilde{a} . Складові a_i вектора \tilde{a} будуть перпендикулярними осям координат в основному базисі \tilde{e}_i .

Для наочності покажемо розклад вектора \tilde{a} на площині в основному і взаємному базисах (Мал. 15.1).

Із формул (15.9), (15.10), з врахуванням (15.1), контраваріантні і коваріантні компоненти вектора \vec{a} можна записати в такому вигляді

$$a^i = \vec{a} \cdot \vec{e}^i; \quad a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i. \quad (15.11)$$



Мал.15.1

Коваріантні компоненти a_1, a_2 можуть бути знайдені або по складових $a_1\vec{e}^1, a_2\vec{e}^2$ вектора \vec{a} по напрямках взаємного базису, або по проєкціях $\frac{a_1}{|\vec{e}_1|}, \frac{a_2}{|\vec{e}_2|}$ вектора на осі основного базису. Контраваріантні компоненти a^1, a^2 вектора \vec{a} можна знайти або із складових $a^1\vec{e}_1, a^2\vec{e}_2$ по напрямках основного базису, або із проєкцій на осі взаємного базису $\frac{a^1}{|\vec{e}^1|}, \frac{a^2}{|\vec{e}^2|}$. Таким чином, контраваріантні компоненти вектора являються косокутними, а коваріантні – прямокутними проєкціями вектора на осі координат.

Ясно, що у випадку прямокутної декартової системи координат з одиничними базисними векторами контраваріантні і коваріантні компоненти вектора співпадають.

§16. Перетворення координат

В довільній системі координат вектор визначається трьома компонентами: контраваріантними або коваріантними. Ці компоненти суттєво залежать від вибору координатної системи. Розглянемо залежності між компонентами вектора в двох різних координатних системах, які зв'язані формулами взаємно-однозначного перетворення координат.

Нехай в деякій точці O задано два векторних базиси, які назовемо старий базис \vec{e}_i і новий \vec{e}'_i . Звернемо увагу на те, що не можна плутати новий базис із взаємним. Новий базис може бути будь-яким, а взаємний однозначно визначається основним базисом по формулах (15.2), (15.3).

Будь-який із векторів першого базису можна розкласти по векторах другого базису і навпаки

$$\vec{e}'_j = \alpha_j^k \vec{e}_k, \quad (16.1)$$

$$\vec{e}_i = \beta_i^m \vec{e}'_m. \quad (16.2)$$

Ці співвідношення будемо називати формулами прямого і оберненого перетворення базисних векторів, а величини α_j^k і β_i^m – коефіцієнтами прямого і оберненого перетворень.

Знайдемо залежність між коефіцієнтами α_j^k і β_i^m . Для цього виключимо із рівності (16.1) вектори \vec{e}_k , використавши (16.2), а із рівності (16.2) – вектори \vec{e}'_m , використавши (16.1). В результаті одержимо

$$\vec{e}'_j = \alpha_j^k \beta_k^m \vec{e}'_m; \quad \vec{e}_i = \beta_i^m \alpha_m^k \vec{e}_k.$$

Так як вектори, які утворюють базис, лінійно незалежні, то дані рівності будуть виконуватись у випадку

$$\alpha_j^k \beta_k^m = \delta_j^m; \quad \beta_i^m \alpha_m^k = \delta_i^k. \quad (16.3)$$

Введемо позначення

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_1^2 & \beta_1^3 \\ \beta_2^1 & \beta_2^2 & \beta_2^3 \\ \beta_3^1 & \beta_3^2 & \beta_3^3 \end{pmatrix},$$

де A і B – матриці прямого і оберненого перетворювань. Вирази (16.3) означають, що матриці A і B – взаємно обернені, тобто

$$AB = BA = E,$$

де E – одинична матриця третього порядку.

Розглянемо, як при перетворенні координат змінюються контраваріантні і коваріантні компоненти вектора. В старій і новій системах координат вектор \vec{a} можна представити в такому вигляді

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i = a'^j \vec{e}'_j. \quad (16.4)$$

Помноживши співвідношення (16.2) на a^i

$$\vec{e}_i a^i = \beta_i^m \vec{e}'_m a^i$$

і порівнявши з (16.4), одержимо

$$a'^j \vec{e}'_j = \beta_i^m \vec{e}'_m a^i.$$

З останньої рівності одержуємо формули перетворення контраваріантних компонент вектора \vec{a} при переході від старого до нового базису

$$a'^j = \beta_i^j a^i. \quad (16.5)$$

Аналогічно, помноживши співвідношення (16.1) на a'^j

$$\vec{e}'_j a'^j = \alpha_j^k \vec{e}_k a'^j$$

і порівнявши з (16.4), одержимо

$$a^i \vec{e}_i = \alpha_j^k \vec{e}_k a'^j.$$

З останньої рівності одержуємо формули перетворення контраваріантних компонент вектора \vec{a} при переході від нового до старого базису

$$a^i = \alpha_j^i a'^j. \quad (16.6)$$

Виведемо формули перетворення коваріантних компонент вектора \vec{a} . Із формул (15.11), (16.2) маємо

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}'_m \cdot \beta_i^m$$

або

$$a_i = \beta_i^m \cdot a'_m. \quad (16.7)$$

Домножимо цю рівність на α_j^i і скористаємось першою формулою (16.3). Одержимо

$$\alpha_j^i a_i = \alpha_j^i \beta_i^m a'_m$$

або

$$a'_j = \alpha_j^i a_i. \quad (16.8)$$

Знайшли формули перетворення коваріантних компонент вектора \vec{a} при переході від нового до старого базису (формула (16.7)) і навпаки (формула (16.8)).

При переході від старого до нового базису коваріантні компоненти вектора \vec{a} (16.8) перетворюються за допомогою матриці α_j^i прямого переходу від старого базису до нового. Цим узгодженням перетворень і пояснюється назва коваріантні компоненти вектора (коваріантний – означає, який змінюється узгоджено).

При переході від старого до нового базису контраваріантні компоненти вектора \vec{a} (16.5) перетворюються за допомогою матриці β_j^i оберненого переходу від нового базису до старого. Цим неузгодженням перетворень і пояснюється назва контраваріантні

компоненти вектора (контраваріантний означає, який змінюється протилежно).

Так як формули (16.5) і (16.6) справедливі для довільного вектора \vec{a} , то можемо записати формули перетворення векторів взаємного базису

$$\vec{e}'^j = \beta_i^j \vec{e}^i; \quad \vec{e}^i = \alpha_j^i \vec{e}'^j. \quad (16.9)$$

§17. Залежність між коваріантними і контраваріантними компонентами вектора

За допомогою співвідношень (15.11) запишемо формули (15.9) і (15.10) у вигляді

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{e}^j) \cdot \vec{e}_j; \quad \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{e}_j) \cdot \vec{e}^j. \quad (17.1)$$

Вирази (17.1) справедливі для довільного вектора \vec{a} . Тому їх можна переписати

$$\vec{e}^i = (\vec{e}^i \cdot \vec{e}^j) \cdot \vec{e}_j; \quad \vec{e}_i = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \cdot \vec{e}^j. \quad (17.2)$$

Введемо позначення

$$g^{ij} = (\vec{e}^i \cdot \vec{e}^j); \quad g_{ij} = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \quad (17.3)$$

і перепишемо рівності (17.2) у вигляді

$$\vec{e}^i = g^{ij} \cdot \vec{e}_j; \quad \vec{e}_i = g_{ij} \cdot \vec{e}^j. \quad (17.4)$$

Отже, для побудови базису \vec{e}^i по базису \vec{e}_j достатньо знати матрицю (g^{ij}) , а для побудови базису \vec{e}_i по базису \vec{e}^j достатньо знати матрицю (g_{ij}) .

Із умов побудови матриць (g^{ij}) і (g_{ij}) (17.3) випливає, що вони симетричні, тобто

$$g^{ij} = g^{ji}; \quad g_{ij} = g_{ji}. \quad (17.5)$$

Доведемо, що ці матриці взаємно обернені. Помножимо першу із рівностей (17.4) скалярно на \bar{e}_k , одержимо

$$(\bar{e}^i \cdot \bar{e}_k) = g^{ij}(\bar{e}_j \cdot \bar{e}_k).$$

Із цього співвідношення, враховуючи формули (15.1) і (17.3), знайдемо

$$g^{ij} \cdot g_{jk} = g_k^i = \delta_k^i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (17.6)$$

Так як добуток матриць (g^{ij}) і (g_{jk}) представляє собою одиничну матрицю, то це значить, що ці матриці взаємно обернені.

Відмітимо, що так як елементи оберненої матриці можуть бути обчислені через елементи даної матриці, то за допомогою співвідношень (17.4) можна розв'язати питання про побудову взаємних базисів.

Щоб знайти залежність між коваріантними і контраваріантними компонентами вектора, помножимо рівність (15.9) скалярно на \bar{e}_k , рівність (15.10) – на \bar{e}^k :

$$\bar{a} \cdot \bar{e}_k = a^i \cdot (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_k); \quad \bar{a} \cdot \bar{e}^k = a_i \cdot (\bar{e}^i \cdot \bar{e}^k). \quad (17.7)$$

Використавши формули (15.11) і (17.3), одержимо вираз коваріантних компонент вектора через його контраваріантні компоненти, і навпаки

$$a_k = g_{ik} \cdot a^i; \quad a^k = g^{ik} \cdot a_i. \quad (17.8)$$

Таким чином, зв'язок між компонентами вектора здійснюється за допомогою матриць (g^{ij}) і (g_{ij}) . Формули (17.8) виражають операцію опускання і підймання індексів в компонент вектора.

Розглянемо два вектори \bar{a} і \bar{b} , які розкладені по векторах основного і взаємного базисів. Тоді скалярний добуток цих векторів можна представити в чотирьох основних формах:

$$(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j) \cdot a^i \cdot b^j = (\bar{e}^i \cdot \bar{e}^j) \cdot a_i \cdot b_j =$$

$$= (\bar{e}^i \cdot \bar{e}^j) \cdot a^i \cdot b_j = (\bar{e}^i \cdot \bar{e}_j) \cdot a_i \cdot b^j. \quad (17.9)$$

Використавши позначення (15.1) і (17.3), скалярний добуток запишемо

$$(\bar{a} \cdot \bar{b}) = g_{ij} \cdot a^i \cdot b^j = g^{ij} \cdot a_i \cdot b_j = a^i \cdot b_j = a_i \cdot b^j. \quad (17.10)$$

Тут враховано, що $\delta_j^i \cdot a^i \cdot b_j = a^i \cdot b_j$; $\delta_i^j \cdot a_i \cdot b^j = a_i \cdot b^j$, де δ_i^j – символ Кронекера.

Хай $\bar{b} = \bar{a}$. Тоді квадрат модуля вектора \bar{a} виражається так

$$(\bar{a} \cdot \bar{a}) = |\bar{a}|^2 = g_{ij} \cdot a^i \cdot b^j = g^{ij} \cdot a_i \cdot b_j = a_i \cdot a^i. \quad (17.11)$$

Звідси довжина вектора \vec{a} обчислюється по формулах:

$$|\bar{a}| = \sqrt{g_{ij} \cdot a^i \cdot b^j} = \sqrt{g^{ij} \cdot a_i \cdot b_j} = \sqrt{a_i a^i}. \quad (17.12)$$

Розглянемо дві нескінченно близькі точки A і B . Координати точок в основному базисі $A(x^1, x^2, x^3)$, $B(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ і у взаємному – $A(x_1, x_2, x_3)$, $B(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$. Ці точки визначають нескінченно малий вектор $d\bar{r}$. Довжину вектора $d\bar{r}$ позначимо через ds . Основною характеристикою будь-якої системи координат являється її метрика, тобто вираз квадрата відстані між двома близькими точками. Згідно формули (17.11) можна записати

$$|d\bar{r}|^2 = (ds)^2 = g_{ij} \cdot dx^i \cdot dx^j = g^{ij} \cdot dx_i \cdot dx_j = dx^i \cdot dx_j. \quad (17.13)$$

Нижче буде показано, що величини g^{ij} , g^{ij} , $g_j^i = \delta_j^i$ утворюють тензор другого рангу.

В прямокутній декартовій системі координат, для якої основний і взаємний базиси співпадають, матриці (g^{ij}) і (g_{ij}) – одиничні.

§18. Означення тензора

Дамо нове (аналітичне) означення вектора, як тензора першого рангу. Потім це означення узагальнимо на випадок тензора другого рангу і взагалі тензорів n -го рангу.

Спочатку розглянемо прямокутну декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$. Нагадаємо, що в прямокутній декартовій системі координат основний і взаємний базиси співпадають. Отже, коваріантні і контраваріантні компоненти вектора також співпадають.

Базисні вектори будемо позначати \bar{e}_i . Повернемо базиси в просторі, залишивши початок координат нерухомим. Одержимо нову прямокутну декартову систему координат $Ox'_1x'_2x'_3$, базисні вектори якої позначимо через \bar{e}'_j . Стара і нова системи координат ортонормовані, тобто

$$(\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j) = (\bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (18.1)$$

Формули прямого і оберненого перетворень базисних векторів запишемо аналогічно формулам (16.1) і (16.2):

$$\bar{e}'_j = \alpha_{jk} \cdot \bar{e}_k, \quad (18.2)$$

$$\bar{e}_j = \beta_{jk} \cdot \bar{e}'_k. \quad (18.3)$$

Помноживши обидві частини рівності (18.2) на \bar{e}_k , одержимо, що $\alpha_{jk} = \bar{e}'_j \cdot \bar{e}_k$. Аналогічно, помноживши обидві частини рівності (18.3) на \bar{e}'_k , одержимо, що $\beta_{jk} = \bar{e}_j \cdot \bar{e}'_k$. Але це значить, що $\beta_{jk} = \alpha_{kj}$; тобто матриця (β_{jk}) являється транспонованою до матриці (α_{jk}) . Формулу (18.3) можна переписати у вигляді

$$\bar{e}_j = \alpha_{kj} \cdot \bar{e}'_k. \quad (18.4)$$

Порівнявши рівності (18.2) і (18.4), можна зробити висновок, що в цих рівностях, які зв'язують старий і новий прямокутні декартові

базиси, можна просто переставляти множники α_{jk} із однієї частини в іншу.

Обчислимо коефіцієнти α_{jk} в прямокутній декартовій системі координат. Врахувавши що $|\vec{e}_j| = |\vec{e}'_j| = 1$ маємо

$$\alpha_{jk} = \vec{e}'_j \cdot \vec{e}_k = |\vec{e}'_j| \cdot |\vec{e}_k| \cdot \cos(\widehat{\vec{e}'_j, \vec{e}_k}) = \cos(\widehat{\vec{e}'_j, \vec{e}_k}). \quad (18.5)$$

Отже, α_{jk} – це косинус кута між j -тим ортом новим і k -тим ортом старим.

Введемо таблицю косинусів дев'яти кутів, які утворені новими осями координат зі старими. Назвемо її таблицею напрямних косинусів.

	\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3
\vec{e}'_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
\vec{e}'_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
\vec{e}'_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Нехай нам заданий довільний вектор \vec{a} і відомий його розклад в старому і новому базисах:

$$\vec{a} = a_j \cdot \vec{e}_j = a'_j \cdot \vec{e}'_j. \quad (18.6)$$

Замість \vec{e}_j підставимо вираз (18.4):

$$\vec{a} = a_j \cdot \vec{e}_j = a_j \cdot \alpha_{kj} \cdot \vec{e}'_k = \alpha_{kj} \cdot a_j \cdot \vec{e}'_k.$$

Так як індекси j, k являються німими, то поміняємо їх місцями

$$\vec{a} = (\alpha_{jk} \cdot a_k) \vec{e}'_j = a'_j \cdot \vec{e}'_j.$$

З останньої рівності одержуємо вираз нових координат вектора через старі

$$a'_j = \alpha_{jk} \cdot a_k. \quad (18.7)$$

В попередніх викладках під величиною \vec{a} необов'язково розуміти “геометричний” вектор, тобто напрямлений відрізок в просторі, але в усіх випадках його проєкції (координати) перетворюються по формулах (18.7). Неважко перевірити, що кожна трійку величин, заданих в базисі і які перетворюються по формулах (18.7) при заміні (18.2) цього базису, можна тлумачити як трійку координат деякого вектора, тобто вважати, що така трійка визначає деякий вектор. (В той же час не завжди корисно тлумачити будь-яку трійку величин як вектор. Наприклад, при вивченні потоку газу можна розглядати трійку величин - температуру T , тиск p і густину ρ , які характеризують стан газу в деякій точці простору. Але розглядати таку трійку як вектор нераціонально, так як повороти базису в просторі не впливають на значення цих величин. Отже, три скаляри не утворюють вектор.)

Підсумовуючи розгляньте, якщо трійка скалярних величин визначає вектор, дамо нове (аналітичне) означення вектора (або означення тензора першого рангу).

Якщо для кожної прямокутної декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$ задано сукупність трьох величин a_k , які перетворюються по формулах (18.7) в величини a'_j , які відповідають іншій системі координат $Ox'_1x'_2x'_3$, то сукупність цих трьох величин визначають нову величину \vec{a} , яка називається тензором першого рангу або одновалентним тензором (або вектором).

Геометричне означення вектора як величини, яку можна зобразити напрямленим відрізком прямої, еквівалентне аналітичному означенню вектору.

Розпишемо формулу (18.7) у скалярному вигляді

$$\left. \begin{aligned} a'_1 &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \alpha_{13}a_3, \\ a'_2 &= \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \alpha_{23}a_3, \\ a'_3 &= \alpha_{31}a_1 + \alpha_{32}a_2 + \alpha_{33}a_3. \end{aligned} \right\} \quad (18.8)$$

Узагальнюючи дане вище означення тензора першого рангу (аналітичне означення вектора), введемо поняття тензора другого рангу.

Якщо для кожної прямокутної декартової системі координат $Ox_1x_2x_3$ задана сукупність трьох векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, які перетворюються по формулах

$$\left. \begin{aligned} \vec{b}'_1 &= \alpha_{11}\vec{b}_1 + \alpha_{12}\vec{b}_2 + \alpha_{13}\vec{b}_3, \\ \vec{b}'_2 &= \alpha_{21}\vec{b}_1 + \alpha_{22}\vec{b}_2 + \alpha_{23}\vec{b}_3, \\ \vec{b}'_3 &= \alpha_{31}\vec{b}_1 + \alpha_{32}\vec{b}_2 + \alpha_{33}\vec{b}_3. \end{aligned} \right\} \quad (18.9)$$

в вектори $\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3$, які відповідають іншій системі координат $Ox'_1x'_2x'_3$, то сукупність цих трьох векторів визначає нову величину T , яка називається тензором другого рангу або двовалентним тензором.

Розклавши кожен із векторів \vec{b}_j по базису

$$\left. \begin{aligned} \vec{b}_1 &= b_{11}\vec{e}_1 + b_{12}\vec{e}_2 + b_{13}\vec{e}_3, \\ \vec{b}_2 &= b_{21}\vec{e}_1 + b_{22}\vec{e}_2 + b_{23}\vec{e}_3, \\ \vec{b}_3 &= b_{31}\vec{e}_1 + b_{32}\vec{e}_2 + b_{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \right\} \quad (18.10)$$

можемо зробити висновок, що тензор другого рангу характеризується 9 компонентами. Як правило, компоненти тензора другого рангу записуються у вигляді матриці третього порядку:

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}. \quad (18.11)$$

Дамо інше означення тензора другого рангу, аналогічне попередньому.

Якщо для кожної прямокутної декартової системи координат маємо сукупність 9 величин b_{ij} , які перетворюються по формулах

$$b'_{mn} = \alpha_{mi}\alpha_{nj}b_{ij} \quad (18.12)$$

в величини b'_{mn} , які відповідають іншій системі координат, то сукупність цих величин визначає величину, яка називається тензором другого рангу.

Якщо компоненти p_{ij} тензора задані в одній прямокутній системі координат, то по формулах (18.12) можна визначити координати p'_{mn} тензора в будь-якій іншій прямокутній декартовій системі, осі якої утворюють з осями старої системи кути, косинуси яких дорівнюють α_{mi} .

Кожному тензору другого рангу в прийнятій системі координат відповідає матриця утворена компонентами тензора. Однак необхідно завжди пам'ятати, що якщо матриця – таблиця чисел – не зв'язується з системою координат, то компоненти тензора суттєво залежать від вибору базису. Тому одному й тому ж тензору в різних системах координат будуть відповідати різні матриці.

Аналогічно можна визначати тензори третього, четвертого і т.д. рангів. Таким чином, вкажемо загальну послідовність задання різних величин. Зручно розглядати тензори різних рангів: скаляр ($3^0 = 1$ компонента) – тензор нульового рангу, вектор ($3^1 = 3$ компоненти) – тензор першого рангу, величина, яка має $3^2 = 9$ компонент – тензор другого рангу і т.д., величина, яка має 3^n – компонент – тензор n -го рангу.

В багатьох випадках являється недостатнім обмежитись прямокутними координатами і тоді доводиться змінити означення тензора.

Розглянемо довільну криволінійну систему координат. Ми вже розглядали коваріантні і контраваріантні компоненти вектора.

Тензором першого рангу (або вектором) називається фізична або геометрична величина, яка визначається трьома компонентами, які при зміні системи координат перетворюються по формулах (16.5)-(16.8).

Як для векторів, так і для тензорів верхні (косокутні) індекси прийнято називати контраваріантними, а нижні (прямокутні) – коваріантними. Так тензор першого рангу може бути один раз контраваріантним (16.5), (16.6) або один раз коваріантним (16.7), (16.8) – залежно від вибору типу координат.

Тензором T валентності $p + q$ (p раз коваріантними і q раз контраваріантними) називається фізична або геометрична величина, яка в кожному базисі \vec{e}_i визначається 3^{n+q} компонентами $T_{j_1 j_2 \dots j_p}^{k_1 k_2 \dots k_q}$ (індекси незалежно приймають значення 1,2,3) і яка має ту властивість, що її компоненти $T_{i_1 i_2 \dots i_p}^{m_1 m_2 \dots m_q}$ в базисі \vec{e}'_i зв'язані з компонентами $T_{j_1 j_2 \dots j_p}^{k_1 k_2 \dots k_q}$ в базисі \vec{e}_i співвідношеннями

$$T_{i_1 i_2 \dots i_p}^{m_1 m_2 \dots m_q} = \alpha_{i_1}^{j_1} \alpha_{i_2}^{j_2} \dots \alpha_{i_p}^{j_p} \beta_{k_1}^{m_1} \beta_{k_2}^{m_2} \dots \beta_{k_q}^{m_q} T_{j_1 j_2 \dots j_p}^{k_1 k_2 \dots k_q}, \quad (18.13)$$

в яких α_i^j – елементи матриці переходу від базису \vec{e}_i до базису \vec{e}'_i , а β_k^m – елементи матриці оберненого переходу від \vec{e}'_i до \vec{e}_i .

Величини $T_{j_1 j_2 \dots j_p}^{k_1 k_2 \dots k_q}$ називаються компонентами тензора. Кількість індексів $p + q$ називається рангом або валентністю тензора.

Відмітимо, що коваріантні і контраваріантні компоненти вектора перетворюються по формулах (18.13) при $p = 0, q = 1$ в

першому випадку і при $p = 1, q = 1$ в другому випадку (порівняйте з формулами (16.5),(16.8)).

За своєю будовою тензори розділяються на контраваріантні, коваріантні і змішані. Індекси j_1, j_2, \dots, j_p називаються коваріантними, а k_1, k_2, \dots, k_q –контраваріантними. Назва пояснюється тим, що по кожному із згаданих індексів перетворення компонент тензора проводиться аналогічно з перетвореннями коваріантних і контраваріантних компонентів вектора (16.5),(16.8). Наприклад T^{ij} –контраваріантний, T_{ij} –коваріантний, T_j^i –змішаний тензор другого рангу.

Основні властивості компонент тензора виражаються в законі їх перетворення при переході від однієї системи координат до другої. Цей закон, який називається тензорним, один для всіх тензорів незалежно від їх фізичної природи. В загальному вигляді тензорний закон виражається формулою (18.13). Частинні випадки тензорного закону для тензорів різних рангів виражені формулами (16.5)-(16.8), (18.7)-(18.9) і (18.12).

Приведемо тензорний закон перетворення компонент контраваріантного, коваріантного і змішаного тензорів другого рангу, а по суті це буде означенням тензорів

$$T'^{ij} = \beta_m^i \beta_k^j T^{mk}, \quad (18.14)$$

$$T'_{ij} = \alpha_i^m \alpha_j^k T_{mk}, \quad (18.15)$$

$$T'^j_{\cdot i} = \alpha_i^m \beta_k^j T^m_{\cdot k}. \quad (18.16)$$

Точка тут позначає місце (порядок) індексу.

§19. Метричний тензор. Коефіцієнти Ляме.

Повернемося до величин, які були введені формулами (17.3), (17.6), і покажемо, що вони представляють собою тензори другого рангу. Для цього розглянемо зміну величин g^{ij} , g_{ij} , g_j^i при перетворенні системи координат

$$g'^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}'^j = \beta_m^i \vec{e}^m \cdot \beta_n^j \vec{e}^n = \beta_m^i \beta_n^j (\vec{e}^m \cdot \vec{e}^n) = \beta_m^i \beta_n^j g^{mn},$$

$$g'_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \alpha_i^m \vec{e}_m \cdot \alpha_j^n \vec{e}_n = \alpha_i^m \alpha_j^n (\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n) = \alpha_i^m \alpha_j^n g_{mn},$$

$$g_j^i = \vec{e}^i \cdot \vec{e}'_j = \beta_m^i \vec{e}^m \cdot \alpha_j^n \vec{e}_n = \beta_m^i \alpha_j^n (\vec{e}^m \cdot \vec{e}_n) = \beta_m^i \alpha_j^n g_n^m.$$

тобто

$$g'^{ij} = \beta_m^i \beta_n^j g^{mn}, \quad (19.1)$$

$$g'_{ij} = \alpha_i^m \alpha_j^n g_{mn}, \quad (19.2)$$

$$g_j^i = \beta_m^i \alpha_j^n g_n^m. \quad (19.3)$$

Всі ці величини змінюються по тензорному закону, отже, вони утворюють відповідно контраваріантний, коваріантний і змішаний тензор другого рангу.

Цей тензор називається метричним, так як він визначає метрику простору, арифметичні властивості якого встановлюються введеною системою координат. Це означає, що знаючи метричний тензор і координати двох точок простору можна знайти відстань між точками (17.13).

Врахувавши форму (17.6), метричний тензор g_j^i можна записати у вигляді

$$(g_j^i) = (\delta_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (19.4)$$

Цей тензор називається одиничним. Згідно означення одиничного тензора його компоненти дорівнюють нулю при $i \neq j$ або одиниці при $i = j$ в усіх координатних системах.

Компоненти метричного тензора обчислюються по формулах (17.3). Якщо безпосередньо їх обчислити важко, тоді можна виходити із більш загальних міркувань.

Кожній точці простору поставимо у відповідність три числа γ_i . Це означає що її радіус-вектор можна розглядати як вектор-функцію аргументів γ_i , тобто $\vec{r} = \vec{r}(\gamma_i)$. Числа γ_i являються криволінійними координатами, в загальному випадку неортогональними.

Проектуючи радіус-вектор на осі довільної прямокутної декартової системи координат, одержимо три скалярні функції, які встановлюють відповідність між γ_i і x_j :

$$x_k = f_k(\gamma_i). \quad (19.5)$$

Якщо функціональний визначник (якобіан) $\left| \frac{\partial x_k}{\partial \gamma_i} \right|$ не дорівнює нулю або нескінченності, то перетворення (19.5) оборотне, тобто рівняння (19.5) можна розв'язати відносно γ_i

$$\gamma_i = \phi(x_k). \quad (19.6)$$

Наприклад для циліндричної системи координат маємо

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= R \cos \phi, & x_2 &= R \sin \phi, & x_3 &= z, \\ \gamma_1 &= R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & \gamma_2 &= \phi = \arctg \frac{x_2}{x_1}, & \gamma_3 &= z = x_3, \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

а у випадку сферичної системи координат формули (19.5) і (19.6) приймають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= R \sin \theta \cos \phi, x_2 = R \sin \theta \sin \phi, x_3 = R \cdot \cos \theta, \\ \gamma_1 &= R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \gamma_2 = \theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}, \\ \gamma_3 &= \phi = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}. \end{aligned} \right\} \quad (19.8)$$

Знайдемо диференціал вектора \vec{r} :

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma_i} d\gamma_i.$$

Тоді квадрат відстані між двома близькими точками (квадрат елементарної дуги або метрику простору) знайдемо за формулою:

$$(ds)^2 = |d\vec{r}|^2 = (d\vec{r} \cdot d\vec{r}) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma_k} d\gamma_i d\gamma_k. \quad (19.9)$$

Згідно формули (14.1), запишемо вектори локального базису криволінійної системи координат

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma_i}. \quad (19.10)$$

Отже, компоненти метричного тензора можуть бути обчислені за формулами

$$g_{ik} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma_k} = \frac{\partial x_m}{\partial \gamma_i} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial \gamma_k}. \quad (19.11)$$

Більш детально зупинимось на криволінійних ортогональних системах координат (циліндричних, сферичних), які найчастіше застосовуються при розв'язуванні практичних задач. При цьому координатні лінії в кожній точці перпендикулярні. В цьому випадку із компонент метричного тензора g_{ik} , g^{ik} згідно позначень (17.3) відмінними від нуля будуть тільки компоненти із однаковими індексами. Тоді із формули (17.8) випливає

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= g_{11}a^1, a_2 = g_{22}a^2, a_3 = g_{33}a^3, \\ a^1 &= g^{11}a_1, \quad a^2 = g^{22}a_2, a^3 = g^{33}a_3. \end{aligned} \right\} \quad (19.12)$$

З даних співвідношень можна записати

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}}, \quad g_{22} = \frac{1}{g^{22}}, \quad g_{33} = \frac{1}{g^{33}}. \quad (19.13)$$

Для ортогональних систем координат основними характеристиками являються коефіцієнти Ляме, які визначаються рівностями

$$H_i = \sqrt{g_{ii}} \text{ (по індексу } i \text{ не сумується)}. \quad (19.14)$$

Використавши формулу (19.11), коефіцієнти Ляме можуть бути обчислені за формулами

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \gamma_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \gamma_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \gamma_i}\right)^2}. \quad (19.15)$$

Тепер квадрат елементарної дуги в ортогональних системах можемо записати у вигляді

$$(ds)^2 = H_1^2(d\gamma_1)^2 + H_2^2(d\gamma_2)^2 + H_3^2(d\gamma_3)^2. \quad (19.16)$$

Обчислимо коефіцієнти Ляме. Ясно, що для прямокутної декартової системи координат коефіцієнти дорівнюють одиниці. Обчислимо частинні похідні і підставимо в формули (19.15):

а) для циліндричної системи координат

$$H_1 = H_R = 1, \quad H_2 = H_\phi = R, \quad H_3 = H_z = 1; \quad (19.17)$$

б) для сферичної системи координат

$$H_1 = H_R = 1, \quad H_2 = H_\theta = R, \quad H_3 = H_\phi = R \sin \theta. \quad (19.18)$$

Метричний тензор g_{ij} в прямокутній декартовій, циліндричній і сферичній системах координат відповідно буде мати вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (19.19)$$

Для розглядуваних систем координат можна легко записати квадрат елементарної дуги, використавши формулу (19.16).

Розділ 4. Тензорна алгебра

В цьому розділі ми зупинимось на основних алгебраїчних діях над тензорами (додавання і множення) і на деяких властивостях тензорів. Дії над тензорами зводяться до відповідних дій над матрицями, які складені із компонентів тензора. Одержана в результаті матриця буде матрицею нового тензора.

Більшість операцій над тензорами справедливі у будь-якій координатній системі. Тому, як правило, дії над тензорами ми будемо розглядати без залучення конкретної координатної системи. Якщо ж дія може бути застосована не у всіх координатних системах, наприклад, дія підняття і опускання індексів, то це буде обумовлено окремо.

§20. Додавання (віднімання) тензорів

Розглянемо два тензори другого рангу a_{ij} і b_{ij} , які задані в будь-якій системі координат. Два тензори вважаються рівними, якщо компоненти цих тензорів з однаковими індексами співпадають, тобто $a_{ij} = b_{ij}$. Якщо тензори рівні в одній системі координат, то вони будуть рівні і в будь-якій іншій системі координат, так як закон перетворення координат один і той же для обох тензорів.

Операція додавання (віднімання) вводиться тільки для тензорів одного і того ж рангу і вигляду.

Сумою (різницею) тензорів одного і того ж рангу і вигляду називається тензор одного і того ж рангу і вигляду, компоненти якого дорівнюють сумі (різниці) відповідних компонент даних тензорів, тобто

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}. \quad (20.1)$$

Операція додавання комутативна, тобто

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}. \quad (20.2)$$

Покажемо, що числа c_{ij} утворюють тензор другого рангу. Так як a_{ij} і b_{ij} – компоненти тензорів, то

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \alpha_{im}\alpha_{jn}a_{mn}, & b'_{ij} &= \alpha_{im}\alpha_{jn}b_{mn}; \\ c'_{ij} &= a'_{ij} \pm b'_{ij} = \alpha_{im}\alpha_{jn}(a_{mn} \pm b_{mn}) = \alpha_{im}\alpha_{jn}c_{mn}. \end{aligned} \quad (20.3)$$

Це значить, що величини c_{mn} змінюються по тензорному закону, отже c_{mn} є компонентами тензора другого рангу.

Дія додавання (віднімання) тензорів інваріантна в тому розумінні, що тензор, який дорівнює сумі (різниці) тензорів в деякій системі координат, буде дорівнювати сумі (різниці) цих тензорів в будь-якій іншій координатній системі.

Розглянемо два тензори a_{ij} і b_i^j . Додавати і віднімати ці тензори не можна, так як вони одного рангу (другого), але різного вигляду (a_{ij} – двічі коваріантний, b_i^j – один раз коваріантний і один раз контраваріантний).

Приклад 1. Знайти суму і різницю двох тензорів.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування: Дані тензори одного рангу і вигляду, тому їх можна додавати і віднімати. Скористаємось формулами (20.1).

$$\begin{aligned} C = A + B &= \begin{pmatrix} -5 + 3 & 3 - 3 & 1 + 4 \\ 0 - 2 & 4 + 1 & -8 + 7 \\ -2 + 2 & 1 - 1 & 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ D = A - B &= \begin{pmatrix} -5 - 3 & 3 + 3 & 1 - 4 \\ 0 + 2 & 4 - 1 & -8 - 7 \\ -2 - 2 & 1 + 1 & 3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 6 & -3 \\ 2 & 3 & -15 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

§21. Згортання тензорів

Згортанням називається сумування компонент тензора по двох яких-небудь індексах. Згортання можна проводити тільки тих тензорів, ранг яких не менше двох.

Операція згортання проводиться над змішаними тензорами, тобто над тензорами, які розглядаються в узагальнених системах координат. При згортанні один із індексів, по якому проводиться згортання, повинен бути коваріантним, а другий обов'язково контраваріантним. Це впливає з того, що результат згортання тензора повинен залишатися тензором.

Проведемо згортку тензора третього рангу a^i_{jk} по індексах i, j . Тоді величини a^{*i}_{ik} будуть компонентами тензора першого рангу. Покажемо це. Скориставшись формулами (16.3), (18.13), будемо мати

$$a^{*i}_{ik} = \beta^i_m \alpha^i_n \alpha^l_k a^m_{nl} = \delta^n_m \alpha^l_k a^m_{nl} = \alpha^l_k a^m_{ml}. \quad (21.1)$$

Якщо ж провести згортку того ж тензора a^i_{jk} по індексам j, k , то закон перетворення

$$a^{*i}_{jj} = \beta^i_m \alpha^j_n \alpha^l_j a^m_{nl}$$

вказує на те, що три величини a^{*i}_{jj} не утворюють тензор першого рангу.

При згортанні тензора рангу n одержуємо тензор рангу $n-2$.

Зауважимо, що у випадку ортонормованого базису коваріантні і контраваріантні компоненти тензора співпадають, тому операція згортання тензора в цьому випадку виконується при прирівнюванні двох однойменних індексів.

Нехай в ортонормованому базисі задано тензор четвертого рангу a_{ijkl} . Проведемо згортку по індексах j, k . Покажемо, що величина a_{ijjl} буде тензором другого рангу.

$$a'_{ijjl} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{jk}\alpha_{lp}a_{mnpk} = \alpha_{im}\delta_{mk}\alpha_{jk}a_{mnpk} = \alpha_{im}\alpha_{jk}a_{mnpk}.$$

Отже,

$$a'_{ijjl} = \alpha_{im}\alpha_{jk}a_{mnpk}, \quad (21.2)$$

а це значить, що величина a_{ijjl} являється тензором другого рангу. Тут ми використали формулу (18.12), а також формулу

$$\alpha_{jn}\alpha_{jk} = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 \cdot \text{якщо } n = k, \\ 0 \cdot \text{якщо } n \neq k, \end{cases} \quad (21.3)$$

яка справедлива в ортонормованому базисі.

Приклад. Згорнути тензор другого рангу, заданий в ортонормованому базисі

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Прирівнюючи індекси, одержимо $i = j = 1$, $a_{11} = -2$; $i = j = 2$, $a_{22} = 5$; $i = j = 3$, $a_{33} = -4$. Просумуємо дані компоненти $a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = -2 + 5 - 4 = -1$. Після згортання тензора другого рангу одержали тензор нульового рангу (скаляр).

§22. Множення тензорів.

Добутком тензора на деяке дійсне число називається тензор, який одержується множенням кожної компоненти даного тензора на задане дійсне число.

Операція множення тензора на тензор визначається для тензорів будь-якого рангу і вигляду. Ранг тензора-добутку дорівнює сумі рангів тензорів-множників.

Нехай задано два тензори другого рангу a_{ij} і b_{ij} . Для визначення добутку $c_{ijmn} = a_{ij}b_{mn}$ цих тензорів складаються всі можливі добутки компонент тензора a_{ij} та компонент тензора b_{mn} . Індекси позначення компонент тензора-добутку повторюють індекси в позначенні компонент першого, а потім другого співмножника. Величини c_{ijmn} утворюють тензор четвертого рангу. Дійсно, так як $a'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}a_{kl}$, $b_{mn} = \alpha_{mp}\alpha_{ng}b_{pg}$, то

$$c'_{ijmn} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\alpha_{mp}\alpha_{ng}a_{kl}b_{pg} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\alpha_{mp}\alpha_{ng}c_{klpg}. \quad (22.1)$$

Це значить, що c_{ijmn} утворює тензор четвертого рангу. Таке множення тензорів називають зовнішнім.

Внутрішнім (скалярним) добутком тензорів являється тензор, який одержується в результаті згортання зовнішнього добутку по індексам, які відносяться до різних тензорів-співмножників. Наприклад, зовнішній добуток двох тензорів першого рангу (векторів) є тензор другого рангу. Якщо провести згортання, то одержимо формулу для скалярного добутку двох векторів (7.6).

Щоб одержати внутрішній (скалярний) добуток двох тензорів другого рангу, потрібно провести згортання тензора c_{ijmn} по індексам j, m , тобто

$$c_{in} = a_{ij}b_{jn}. \quad (22.2)$$

Внутрішній (скалярний) добуток тензора другого рангу на тензор першого рангу (вектор) можна одержати двома способами.

Лівим внутрішнім добутком вектора b_i на тензор a_{ik} називається вектор

$$c_k = b_i a_{ik}, \quad (22.3)$$

компоненти якого одержані по правилу множення матриці-рядка на матрицю a_{ik} (тобто згортання тензора третього рангу).

Правим внутрішнім добутком вектора b_j на тензор a_{mj} називається вектор

$$c_m = a_{mj} b_j, \quad (22.4)$$

компоненти якого одержані по правилу множення a_{mj} на матрицю-стовпчик b_j (згортання тензора третього рангу по іншій парі індексів).

Внутрішній (скалярний) добуток тензорів, які розглядаються в довільних системах координат, може бути утворений тільки із компонент з різнойменними індексами. Наприклад, $a^{ij} b_j = c^i$, $c^i d_i = \lambda$.

Приклад 1. Знайти зовнішній і внутрішній добуток тензорів першого рангу (векторів) $a_i = (2, -1, 3)$, $b_j = (4, -2, -1)$.

Розв'язування. В результаті зовнішнього перемноження цих тензорів одержимо тензор рангу $r = 1 + 1 = 2$. Складемо всі можливі добутки компонент a_i і b_j , які позначимо c_{ij} :

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_1 b_1 = 2 \cdot 4 = 8; & c_{12} &= a_1 b_2 = 2 \cdot (-2) = -4; \\ c_{13} &= a_1 b_3 = 2 \cdot (-1) = -2; & c_{21} &= a_2 b_1 = (-1) \cdot 4 = -4; \\ c_{22} &= a_2 b_2 = (-1) \cdot (-2) = 2; & c_{23} &= a_2 b_3 = (-1) \cdot (-1) = 1; \\ c_{31} &= a_3 b_1 = 3 \cdot 4 = 12; & c_{32} &= a_3 b_2 = 3 \cdot (-2) = -6; \\ c_{33} &= a_3 b_3 = 3 \cdot (-1) = -3. \end{aligned}$$

Запишемо результат зовнішнього перемноження:

$$c_{ij} = a_i b_j = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 12 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Внутрішній (скалярний) добуток одержимо, згорнувши тензор c_{ij} :

$$c_{ii} = c_{11} + c_{22} + c_{33} = 8 + 2 - 3 = 7.$$

Такий же результат одержимо, якщо обчислимо скалярний добуток двох векторів по формулі (7.6).

Приклад 2. Знайти лівий і правий внутрішні добутки вектора $b_i = (4, -2, -1)$ на тензор другого рангу

$$a_{jk} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування: Лівий внутрішній добуток знайдемо по формулі (22.3), для чого покладемо $i = j$.

$$\begin{aligned} c_k &= b_i a_{ik} = (4, -2, -1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 \quad 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 + \\ &+ (-1) \cdot (-5) \quad 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot 1) = (12 \quad -7 \quad 3). \end{aligned}$$

Правий внутрішній добуток знайдемо по формулі (22.4), для чого покладемо $i = k$:

$$\begin{aligned} d_j &= a_{ji} b_i = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \\ (-3) \cdot 4 + 4 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 4 + (-5) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -20 \\ 17 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Знайдемо лівий і правий внутрішні добутки іншим способом. Для цього спочатку знайдемо зовнішній добуток по формулі $c_{ijk} = b_i a_{jk}$. Тензор c_{ijk} буде мати 27 компонент. Запишемо їх у вигляді трьох матриць:

$$c_{1jk} = b_1 a_{jk} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ -12 & 16 & 0 \\ 8 & -20 & 4 \end{pmatrix};$$

$$c_{2jk} = b_2 a_{jk} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & -8 & 0 \\ -4 & 10 & -2 \end{pmatrix};$$

$$c_{3jk} = b_3 a_{jk} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

В наведених позначеннях c_{ijk} індекс i позначає номер матриці, j – номер рядка, k – номер стовпчика матриці. Щоб одержати лівий внутрішній добуток, потрібно згорнути тензор c_{ijk} по перших двох індексах:

$$c_k = c_{ik} = c_{11k} + c_{22k} + c_{33k};$$

$$c_1 = c_{i1} = c_{111} + c_{221} + c_{331} = 8 + 6 + (-2) = 12;$$

$$c_2 = c_{i2} = c_{112} + c_{222} + c_{332} = -4 + (-8) + 5 = -7;$$

$$c_3 = c_{i3} = c_{113} + c_{223} + c_{333} = 4 + 0 + (-1) = 3.$$

Отже, $c_k = (12 \quad -7 \quad 3)$.

Щоб одержати правий внутрішній добуток, потрібно згорнути тензор c_{ijk} по першому і останньому індексах (індекси повинні відноситись до різних тензорів-співмножників):

$$\alpha_j = c_{iji} = c_{1j1} + c_{2j2} + c_{3j3};$$

$$\alpha_1 = c_{i1i} = c_{111} + c_{212} + c_{313} = 8 + 2 + (-1) = 9;$$

$$\alpha_2 = c_{i2i} = c_{121} + c_{222} + c_{323} = -12 + (-8) + 0 = -20;$$

$$\alpha_3 = c_{i3i} = c_{131} + c_{232} + c_{333} = 8 + 10 + (-1) = 17;$$

Отже, $\alpha_j = (9 \quad -20 \quad 17)$.

§23. Перестановка індексів, симетрування і альтернування.

Операція перестановки індексів полягає в тому, що в будь-якому базисі індекси у кожній компоненті тензора підлягають одній і тій же перестановці. Це означає, що ми іншим чином нумеруємо компоненти даного тензора. В результаті чого, в загальному випадку, одержуємо новий тензор. Розглянемо, наприклад, тензор другого рангу a_{ij} і застосуємо до нього операцію перестановки індексів. В результаті одержимо новий тензор a_{ji} , матриця якого буде транспонованою до матриці даного тензора, тобто

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad a_{ji} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (23.1)$$

Введемо поняття симетричного і антисиметричного (кососиметричного) тензора. Ці поняття вводяться для тензорів рангу не менше двох.

Тензор S_{ijkl} називається симетричним по парі індексів j, k , якщо компоненти, які одержуються при перестановці цих індексів, рівні між собою

$$S_{ijkl} = S_{ikjl}. \quad (23.2)$$

Тензор a_{ijkl} називається антисиметричним (кососиметричним) по парі індексів j, k , якщо при перестановці цих індексів компоненти змінюють знак

$$a_{ijkl} = -a_{ikjl}. \quad (23.3)$$

У антисиметричного тензора компоненти з рівними індексами, по яких має місце антисиметрія, дорівнюють нулю, тобто $a_{i11l} = a_{i22l} = a_{i33l} = 0$.

Якщо умова симетрії (антисиметрії) для тензора виконується в даній системі координат, то ця умова буде виконуватись і в будь-якій іншій системі координат.

Симетричний S_{ij} і антисиметричний a_{ij} тензори другого рангу мають вигляд:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix}; \quad a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (23.4)$$

Якщо тензор симетричний, то операція перестановки індексів приводить до того ж самого тензора.

Наявність у тензора властивості симетрії зменшує число його незалежних компонент. Так, для симетричного тензора другого рангу число незалежних компонент дорівнює шести., а у антисиметричного – трьом. Прикладами симетричних тензорів другого рангу можуть служити одиничний δ_{ij} і метричний g_{ij} тензори.

Для тензорів, які розглядаються в узагальнених системах координат, поняття симетрії та антисиметрії вводиться по парах однойменних (коваріантних або контраваріантних) індексів. Наприклад, тензор S_i^{jk} – симетричний, якщо $S_i^{jk} = S_i^{kj}$, а тензор a_{jk}^i – антисиметричний, якщо $a_{jk}^i = -a_{kj}^i$.

В тензорній алгебрі розглядаються деякі комбінації операцій перестановки індексів і додавання (віднімання), які називаються симетруванням і альтернуванням.

Симетруванням називається операція перестановки пари індексів і наступне додавання одержаного тензора до початкового тензора. В результаті одержується тензор, симетричний відносно прийнятої пари індексів.

Альтернуванням називається операція перестановки пари індексів і наступне віднімання одержаного тензора від початкового тензора. В результаті одержується антисиметричний тензор відносно прийнятої пари індексів.

Застосуємо операції симетрування і альтернування до тензора другого рангу b_{ij} .

$$S_{ij} = b_{ij} + b_{ji}; \quad a_{ij} = b_{ij} - b_{ji}. \quad (23.5)$$

В результаті одержали тензор S_{ij} – симетричний, так як $S_{ij} = S_{ji}$, і тензор a_{ij} – антисиметричний, так як $a_{ij} = -a_{ji}$.

Будь-який тензор рангу не менше двох може бути представлений у вигляді суми симетричного і антисиметричного тензора.

Для тензора другого рангу b_{ij} доведення цього твердження впливає з рівності

$$b_{ij} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}) + \frac{1}{2}(b_{ij} - b_{ji}) = \frac{1}{2}S_{ij} + \frac{1}{2}a_{ij}, \quad (23.6)$$

де $\frac{1}{2}S_{ij}$ – симетричний тензор, $\frac{1}{2}a_{ij}$ – антисиметричний тензор.

Із рівності (23.6) випливає, що симетрична частина тензора b_{ij} дорівнює половині від результату симетрування, а антисиметрична частина – половині від результату альтернування.

Приклад. Розкласти тензор другого рангу b_{ij} на симетричний і антисиметричний тензор.

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -8 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язування. Виконавши операцію перестановки індексів, одержимо новий тензор

$$b_{ji} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далі виконаємо операцію симетрування і альтернування:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -8 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 6 & -6 \\ 6 & 6 & 4 \\ -6 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -8 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -10 \\ 2 & 0 & 8 \\ 10 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Одержали два тензори: S_{ij} – симетричний, a_{ij} – антисиметричний.

Використавши формулу (23.6), розкладемо початковий тензор на симетричну і антисиметричну частину:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & -8 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -10 & 6 & -6 \\ 6 & 6 & 4 \\ -6 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -10 \\ 2 & 0 & 8 \\ 10 & -8 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

§24. Підняття і опускання індексів.

Для операції підняття і опускання індексів у компонент заданого тензора використовується метричний тензор (17.3). Під цією операцією розуміють правило одержання одних компонент тензора через інші за допомогою метричного тензора. Правило полягає в тому, що індекс який піднімається (опускається) переходить в метричний тензор, а на те місце, куди він повинен бути піднятий (опущений), стає німий індекс сумування. Другим німим індексом сумування являється вільний індекс метричного тензора. Для векторів операцію піднімання і опускання індексів ми вже застосовували, коли встановлювали

зв'язок між коваріантними і контраваріантними компонентами вектора (17.8).

Розглянемо цю операцію на прикладах. Нехай задано тензор другого рангу b^{ij} . Опустимо перший індекс. Для цього проведемо множення тензора b^{ij} на метричний тензор g_{ik} , а потім згорнемо по німому індексу i , тобто

$$b_k^{\bullet j} = g_{ik} b^{ij}. \quad (24.1)$$

Аналогічно опустимо другий індекс

$$b_{kl} = g_{ik} g_{jl} b^{ij}. \quad (24.2)$$

Точкою відмічено місце, з якого було опущено індекс. Аналогічно визначається операція підняття індексу. Наприклад:

$$b_{\bullet j}^k = g^{ik} b_{ij}. \quad (24.3)$$

За допомогою одиничного тензора (символу Кронекера) $\delta_i^j = g_i^j$ можна виконати операцію перейменування індексу. Сформулюємо правило, яким ми вже фактично користувались.

Якщо в одночлені є символ Кронекера, причому один або обидва його індекси являються індексами сумування, то символ Кронекера можна опустити, а у виразі, який залишився, один із індексів, однойменний з одним із індексів сумування символу Кронекера, потрібно замінити на другий індекс символу Кронекера. Наприклад:

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} \delta_m^j &= a_{im}; & a^i \delta_i^j &= a^j; & a_{ij} b^m \delta_k^i &= a_{kj} b^m; \\ a_i b^j \delta_j^i &= a_i b^i = a; & \delta_j^i \delta_i^j &= \delta_i^i = 3. \end{aligned} \right\} \quad (24.4)$$

§25. Девіатор і кульовий тензор.

Розглянемо ще один розклад тензора другого рангу, який має важливе значення в застосуваннях:

$$b_{ij} = \alpha_{ij} + \lambda_0 \delta_{ij}, \quad (25.1)$$

де b_{ij} – заданий довільний тензор другого рангу, α_{ij} – девіатор, $\lambda_0 \delta_{ij}$ – кульовий тензор (тут λ_0 – число (скаляр), δ_{ij} – одиничний тензор).

Девіатором називається тензор, у якого сума компонентів з однаковими індексами α_{ii} дорівнює нулю:

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = 0. \quad (25.2)$$

Із виразу (25.1) маємо формулу для знаходження девіатора

$$\alpha_{ij} = b_{ij} - \lambda_0 \delta_{ij} = \begin{pmatrix} b_{11} - \lambda_0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda_0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad (25.3)$$

де λ_0 – невідоме число. Знайдемо його, використавши співвідношення (25.2):

$$b_{11} - \lambda_0 + b_{22} - \lambda_0 + b_{33} - \lambda_0 = 0.$$

Звідси

$$\lambda_0 = \frac{b_{11} + b_{22} + b_{33}}{3} = \frac{b_{kk}}{3}. \quad (25.4)$$

Будь-який тензор другого рангу можна розкласти на девіатор і кульовий тензор. Доведення випливає із очевидної рівності

$$b_{ij} = \underbrace{b_{ij} - \frac{b_{kk}}{3} \delta_{ij}}_{\alpha_{ij}} + \underbrace{\frac{b_{kk}}{3}}_{\lambda_0} \delta_{ij} = \alpha_{ij} + \lambda_0 \delta_{ij}. \quad (25.5)$$

В загальному вигляді розклад (25.5) запишеться у вигляді:

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} b_{11} - \lambda_0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda_0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \lambda_0 \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (25.6)$$

Приклад. Розкласти заданий тензор другого рангу b_{ij} на девіатор і кульбовий тензор.

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Спочатку знайдемо число $\lambda_0 = \frac{b_{ii}}{3} = \frac{3-4+7}{3} = 2$.

Використавши формулу (25.6), запишемо розклад заданого тензора на девіатор і кульбовий тензор:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 3 & -6 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\alpha_{ij}} + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\lambda_0 \delta_{ij}} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 3 & -6 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

§26. Головні напрямки і головні значення тензора. Характеристичне рівняння

Питання про головні напрямки і головні значення тензора має важливе значення в механіці і фізиці. Раніше ми вже розглядали скалярне множення вектора на тензор, в результаті чого одержується вектор. Помноживши деякий тензор другого рангу a_{ij} на довільний вектор x_j справа, одержимо вектор b_i :

$$b_i = a_{ij}x_j. \quad (26.1)$$

Вектор b_i в загальному випадку відмінний від вектора x_j по довжині і по напрямку. Таким чином, тензор при скалярному перемноженні на вектор змінює довжину цього вектора і повертає його.

Поставимо задачу знайти для заданого тензора a_{ij} тільки ті вектори b_i , які паралельні вектору x_i , тобто $b_i = \lambda x_i$, де λ - деяке невідоме число.

Якщо вектор b_i паралельний вектору x_i , тобто якщо вектор x_i після скалярного перемноження (26.1) змінює тільки свою довжину, не змінюючи свого напрямку, то напрямок вектора x_i називається головним (власним) напрямком тензора, а вектор x_i називається головним (власним) вектором заданого тензора. Осі головних напрямків носять назву головних осей тензора. Значення компонент тензора в координатній системі головних осей називаються головними значеннями.

Згідно означення головних напрямків формулу (26.1) перепишемо у вигляді:

$$a_{ij}x_j = \lambda x_i. \quad (26.2)$$

Величина λ називається головним (власним) значенням тензора. Число λ показує в скільки разів тензор збільшує (зменшує) вектори, які напрямлені по головних осях тензора. Напрямки таких векторів тензор не змінює.

Для визначення головних напрямків і власних значень тензора скористаємось рівнянням (26.2). Перенесемо всі члени в одну сторону і скористаємось правилом перейменування індекса (24.4) (рівняння розглядаємо в ортогональній системі координат). В результаті будемо мати

$$a_{ij}x_j - \lambda \cdot x_i = (a_{ij} - \lambda \cdot \delta_{ij}) \cdot x_i = 0.$$

Дане тензорне рівняння рівносильне системі трьох рівнянь:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = 0, \\ a_{21} \cdot x_1 + (a_{22} - \lambda) \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = 0, \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + (a_{33} - \lambda) \cdot x_3 = 0. \end{cases} \quad (26.3)$$

Система (26.3) представляє собою систему лінійних однорідних рівнянь з трьома невідомими x_i . Так як за припущенням вона має нетривіальний (ненульовий) розв'язок, який складає компоненти ненульового власного вектора x_i , то визначник цієї системи повинен дорівнювати нулю:

$$|a_{ij} - \lambda \cdot \delta_{ij}| = 0$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (26.4)$$

Розкривши визначник і звівши подібні члени, одержимо кубічне рівняння відносно λ . Це рівняння називається характеристичним рівнянням тензора a_{ij} .

Із характеристичного рівняння потрібно визначити власні значення λ , а потім, підставивши λ в систему (26.3), можна визначити у вигляді відношення $x_1 : x_2 : x_3$ головний напрямок тензора, який відповідає взятому власному значенню λ . В загальному випадку корені характеристичного рівняння можуть бути не всі дійсні, тоді не буде можливості визначити всі три головні напрямки. Для симетричного ж тензора всі три корені характеристичного рівняння завжди будуть дійсними.

Знайдемо зв'язок між коренями характеристичного рівняння (26.4) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ і компонентами тензора a_{ij} . Для цього приведемо тензор до головних осей, тобто знайдемо вираз компонент тензора в системі координат, осі якої являються головними осями тензора.

Хай $\vec{e}^{(i)}$ - орти головних осей тензора, тобто $\vec{e}^{(i)} = \frac{\vec{x}^{(i)}}{|\vec{x}^{(i)}|}$, де $\vec{x}^{(i)}$ – головні напрямки (вектори).

Якщо X_1', X_2', X_3' – головні осі тензора, то

$$a_{ij} \cdot e_j^{(1)} = \lambda_1 \cdot e_i^{(1)}; a_{ij} \cdot e_j^{(2)} = \lambda_2 \cdot e_i^{(2)}; a_{ij} \cdot e_j^{(3)} = \lambda_3 \cdot e_i^{(3)}. \quad (26.5)$$

Запишемо ці рівності в системі головних осей тензора X_1', X_2', X_3' :

$$a'_{ij} \cdot e_j^{(1)} = \lambda_1 \cdot e_i^{(1)}; a'_{ij} \cdot e_j^{(2)} = \lambda_2 \cdot e_i^{(2)}; a'_{ij} \cdot e_j^{(3)} = \lambda_3 \cdot e_i^{(3)}. \quad (26.7)$$

Враховуючи, що $e_1^{(1)'} = e_2^{(2)'} = e_3^{(3)'} = 1$, $e_k^{(n)'} = 0$ при $k \neq n$, із співвідношень (26.7) одержимо 9 значень компонент тензора в системі головних осей:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \lambda_1, & a'_{22} &= \lambda_2, & a'_{33} &= \lambda_3, \\ a'_{12} &= a'_{21} = a'_{13} = a'_{31} = a'_{23} = a'_{32} &= 0. \end{aligned}$$

або

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (26.8)$$

Таким чином, корені $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристичного рівняння представляють діагональні компоненти (єдині відмінні від нуля) тензора в системі головних осей, вони й дають головні (власні) значення тензора.

Поставимо питання: чи єдиним чином може бути вибраний базис $\vec{e}^{(1)'}, \vec{e}^{(2)'}, \vec{e}^{(3)'}$, в якому тензор має діагональний вигляд (26.8)? Розглянемо три випадки.

1) Якщо маємо різні корені характеристичного рівняння $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, то цим власним значенням відповідає єдина система (з точністю до зміни напрямку і нумерації векторів), яка складається із трьох власних векторів $\vec{e}^{(1)'}, \vec{e}^{(2)'}, \vec{e}^{(3)'}$.

Зауважимо, що всі три власні вектори (головні осі тензора) взаємно перпендикулярні. Доведемо це для випадку різних власних

значень $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. Якщо власному значенню λ_1 відповідає власний вектор $\vec{x}^{(1)}$, а значенню λ_2 – вектор $\vec{x}^{(2)}$, то

$$a_{ij} \cdot x_j^{(1)} = \lambda_1 \cdot x_i^{(1)}, \quad a_{ij} \cdot x_j^{(2)} = \lambda_2 \cdot x_i^{(2)}.$$

Помножимо першу групу цих рівностей на $\vec{x}^{(2)}$, другу – на $\vec{x}^{(1)}$, просумуємо по i і віднімемо один вираз від другого:

$$a_{ij} \cdot x_j^{(1)} \cdot x_i^{(2)} - a_{ij} \cdot x_j^{(2)} \cdot x_i^{(1)} = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot x_i^{(1)} \cdot x_i^{(2)}.$$

Так як $a_{ij} = a_{ji}$, то звідси маємо $0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot x_i^{(1)} \cdot x_i^{(2)}$. Якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $x_i^{(1)} \cdot x_i^{(2)} = \vec{x}^{(1)} \cdot \vec{x}^{(2)} = 0$, тобто власний вектор $\vec{x}^{(1)}$ перпендикулярний власному вектору $\vec{x}^{(2)}$.

2) Хай $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ і $\vec{e}^{(1)'}$, $\vec{e}^{(2)'}$, $\vec{e}^{(3)'}$ – одиничні власні вектори, які відповідають цим власним значенням. Тоді будь-який вектор, який лежить в площині, що визначається векторами $\vec{e}^{(2)'}$, $\vec{e}^{(3)'}$, буде власним вектором тензора. Значить, кореню λ кратності два відповідає ціла власна площина, яка перпендикулярна до третього власного вектора. Таким чином, в цьому випадку за базис $\vec{e}^{(1)'}$, $\vec{e}^{(2)'}$, $\vec{e}^{(3)'}$ можна взяти два будь-яких вектори, які лежать в площині $(\vec{e}^{(2)'}, \vec{e}^{(3)'})$, а третій вектор повинен бути перпендикулярний цій площині.

3) Хай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. В цьому випадку будь-який вектор при множенні на тензор змінює свою довжину, але не повертається і, отже, будь-який вектор простору буде власним. За базис $\vec{e}^{(1)'}$, $\vec{e}^{(2)'}$, $\vec{e}^{(3)'}$ можна взяти будь-яку трійку одиничних і попарно перпендикулярних векторів.

Приклад. Знайти головні значення і головні напрямки заданого тензора

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5 - \lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник і звівши подібні члени, одержимо

$$\lambda^3 - 7 \cdot \lambda^2 + 36 = 0.$$

Один із коренів даного кубічного рівняння знайдемо підбором, покладаючи $\lambda = \pm 1, \pm 2, \dots$. Маємо $\lambda_1 = -2$. Тоді, розділивши кубічне рівняння на двочлен $\lambda + 2$, одержимо квадратне рівняння для визначення двох інших коренів:

$$\lambda^2 - 9 \cdot \lambda + 11 = 0.$$

Корені цього рівняння будуть $\lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$, Таким чином, головні значення тензора дорівнюють

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6.$$

Знайдемо головні напрямки тензора, тобто нову систему координат, в якій заданий тензор має діагональний вигляд.

Хай вектор $\vec{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$, довжина якого дорівнює одиниці, визначає головний напрямок, який відповідає головному значенню $\lambda_1 = -2$. Складемо і розв'яжемо систему рівнянь (26.3).

$$\begin{cases} (1 + 2) \cdot x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + 3 \cdot x_3^{(1)} = 0, \\ x_1^{(1)} + (5 + 2) \cdot x_2^{(1)} + x_3^{(1)} = 0, \\ 3 \cdot x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + (1 + 2) \cdot x_3^{(1)} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + 3 \cdot x_3^{(1)} = 0, \\ x_1^{(1)} + 7 \cdot x_2^{(1)} + x_3^{(1)} = 0, \\ 3 \cdot x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + 3 \cdot x_3^{(1)} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} + 7 \cdot x_2^{(1)} + x_3^{(1)} = 0, \\ 3 \cdot x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + 3 \cdot x_3^{(1)} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} + 7 \cdot x_2^{(1)} + x_3^{(1)} = 0, \\ -20 \cdot x_2^{(1)} = 0, \end{cases}$$

$$x_2^{(1)} = 0, \quad x_1^{(1)} = -x_3^{(1)}.$$

Приєднаємо сюди умову нормування вектора $\vec{x}^{(1)}$:

$$(x_1^{(1)})^2 + (x_2^{(1)})^2 + (x_3^{(1)})^2 = 1.$$

В результаті одержимо головний напрямок

$$x_1^{(1)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad x_2^{(1)} = 0; \quad x_3^{(1)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Аналогічно, для $\lambda_2 = 3$ маємо

$$\begin{cases} -2 \cdot x_1^{(2)} + x_2^{(2)} + 3 \cdot x_3^{(2)} = 0, \\ x_1^{(2)} + 2 \cdot x_2^{(2)} + x_3^{(2)} = 0, \\ 3 \cdot x_1^{(2)} + x_2^{(2)} - 2 \cdot x_3^{(2)} = 0, \end{cases}$$

$$(x_1^{(2)})^2 + (x_2^{(2)})^2 + (x_3^{(2)})^2 = 1.$$

Звідси головний напрямок $x_1^{(2)} = \pm 1/\sqrt{3}; x_2^{(2)} = \mp 1/\sqrt{3}; x_3^{(2)} = \pm 1/\sqrt{3}$.

Аналогічно, для $\lambda_3 = 6$ одержимо головний напрямок

$$x_1^{(3)} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad x_2^{(3)} = \pm \frac{2}{\sqrt{6}}; \quad x_3^{(3)} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Знаки вибираються так, щоб система ортів $\vec{x}^{(i)}$ залишалась правою.

Введемо нову систему координат, сумістивши осі нової системи координат з головними напрямками тензора. В новій системі координат заданий тензор буде мати вигляд

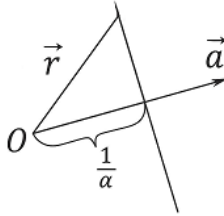
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

§27. Тензорна поверхня

Зауважимо, що будь-який вектор \vec{a} можна графічно представити не тільки напрямленим відрізком (як звичайно), але і площиною

$$\vec{a} \cdot \vec{r} = a_i \cdot r_i = 1, \quad (27.1)$$

де \vec{r} - радіус-вектор змінної точки (Мал. 27.1). Так як $\vec{a} \cdot \vec{r} = a \cdot r_a = 1$, то $r_a = 1/a$, тобто геометричне місце кінців радіусів-векторів, які виходять із початку координат і які задовольняють рівняння (27.1), є площина, перпендикулярна вектору \vec{a} і віддалена від початку координат на відстані $1/a$. Тому вектор \vec{a} перпендикулярний до площини (27.1) і має довжину, обернену відстані від початку координат до цієї площини.



Мал. 27.1

Аналогічно будь-якому симетричному тензору a_{ij} можна однозначно представити поверхню другого порядку вигляду

$$a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j = 1 \quad (27.2)$$

або в розгорнутій формі

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1^2 + a_{22} \cdot x_2^2 + a_{33} \cdot x_3^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \\ + 2 \cdot a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 = 1. \end{aligned}$$

Компоненти симетричного тензора a_{ij} однозначно визначають поверхню другого порядку в будь-якій системі координат. Ця поверхня має назву тензорної.

Якщо p_{ij} - не симетричний тензор, то однозначної відповідності між тензором і поверхнею не буде. Розкладемо цей тензор на симетричну і антисиметричну частину

$$p_{ij} = s_{ij} + a_{ij}, \text{ де } s_{ij} = s_{ji}, a_{ij} = -a_{ji}.$$

Тоді

$$p_{ij} \cdot x_i \cdot x_j = s_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j = s_{ij} \cdot x_i \cdot x_j = 1.$$

Звідси видно, що тензорна поверхня однозначно визначається тільки симетричною частиною тензора.

Із аналітичної геометрії відомо, що рівняння поверхні другого порядку поворотом системи координат може бути приведено до канонічного вигляду.

Розглянуті раніше головні осі тензора являються головними осями тензорної поверхні, яка в системі головних осей має рівняння

$$\lambda_1 \cdot (x'_1)^2 + \lambda_2 \cdot (x'_2)^2 + \lambda_3 \cdot (x'_3)^2 = 1$$

або у частіше вживаному вигляді

$$\frac{(x'_1)^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{(x'_2)^2}{\frac{1}{\lambda_2}} + \frac{(x'_3)^2}{\frac{1}{\lambda_3}} = 1. \quad (27.3)$$

В залежності від знаків λ_i поверхня другого порядку буде:

- а) еліпсоїдом, якщо всі λ_i додатні;
- б) однопорожнинним гіперболоїдом, якщо одне з трьох λ_i додатне, а два інших від'ємні;
- в) двопорожнинним гіперболоїдом, якщо два з трьох λ_i від'ємні, а одне додатне.

Найбільш важливим випадком в застосуваннях до механіки і фізики являється випадок, коли λ_i - всі додатні. Тоді тензорна поверхня – еліпсоїд, а $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}$ - відрізки, які відтинаються на головних осях тензорною поверхнею.

При різних коренях характеристичного рівняння ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$) всі півосі тензорного еліпсоїда різні. У випадку рівності двох коренів $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ тензорний еліпсоїд буде еліпсоїдом обертання. В випадку рівності всіх трьох коренів $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ тензорний еліпсоїд вироджується в кулю. Звідси походить і назва “кульовий тензор”, так як в цьому випадку тензор в головних осях матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \delta_{ij}. \quad (27.4)$$

Форма тензорної поверхні визначається заданим тензором і не зв'язана з тим чи іншим вибором координатної системи.

Для доведення цього розглянемо перетворене рівняння (27.2) при повороті координатних осей і переході до нового базису \vec{e}'_i . Виражаючи старі координати x_i деякої точки, яка лежить на поверхні, через нові по формулах

$$x_i = \alpha_{mi} \cdot x'_m, x_j = \alpha_{nj} \cdot x'_n, \quad (27.5)$$

після підстановки в (27.2) одержуємо

$$a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j = a_{ij} \cdot \alpha_{mi} \cdot x'_m \cdot \alpha_{nj} \cdot x'_n = (\alpha_{mi} \cdot \alpha_{nj} \cdot a_{ij}) \cdot x'_m \cdot x'_n = 1.$$

Вираз в круглих дужках представляє собою компоненти тензора a_{ij} в новому базисі

$$a'_{mn} = \alpha_{mi} \cdot \alpha_{nj} \cdot a_{ij}. \quad (27.6)$$

Значить, в новій системі координат рівняння тензорної поверхні як і раніше має вигляд

$$a'_{mn} \cdot x'_m \cdot x'_n = 1, \quad (27.7)$$

тобто залишається інваріантним.

§28. Інваріанти тензора

Дамо спочатку загальне означення інваріанта або інваріантної величини.

Інваріанти – це величини, які зберігають незмінне значення в довільних (різних) системах координат, тобто не змінюються при переході від старої до нової системи координат.

Наприклад, компоненти вектора змінюються при зміні системи координат. Але за допомогою цих компонент можна скласти величину, яка залишається постійною при зміні прямокутної декартової системи координат

$$l^2 = a_i \cdot a_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a'_i \cdot a'_i. \quad (28.1)$$

Ця величина і називається інваріантом вектора. Для вектора маємо тільки один скалярний інваріант – його довжину.

Інваріанти можна скласти і з компонентів тензора будь-якого рангу. Розглянемо інваріанти тензора другого рангу. Головні значення тензора, як і його головні напрямки, не повинні залежати від вибору системи координат. Тому коефіцієнти характеристичного рівняння також не залежать від цього вибору і являються в зв'язку з цим інваріантами тензора другого рангу.

Для одержання інваріантів тензора другого рангу в загальному вигляді розпишемо характеристичне рівняння (26.4), розкривши визначник і згрупувавши члени при $\lambda^3, \lambda^2, \lambda, \lambda^0$. В результаті одержимо:

$$\lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \cdot \lambda^2 +$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right) \cdot \lambda - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Позначивши коефіцієнти при $\lambda^2, \lambda, \lambda^0$ через I_1, I_2, I_3 , перепишемо

$$\lambda^3 - I_1 \cdot \lambda^2 + I_2 \cdot \lambda - I_3 = 0. \quad (28.2)$$

Так як корені характеристичного рівняння $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ являються скалярами і тому не залежать від вибору системи координат, коефіцієнти I_1, I_2, I_3 , рівняння (28.2) також не повинні змінюватися при зміні системи координат. Таким чином, величини

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad (28.3)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad (28.4)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (28.5)$$

являються інваріантами тензора другого рангу і називаються відповідно лінійним, квадратичним і кубічним інваріантами.

В головній системі координат інваріанти обчислюються за формулами

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3; I_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_2 \cdot \lambda_3; I_3 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3. \quad (28.6)$$

Використовуючи дані інваріанти, можна скласти нескінченне число інших інваріантів, які представляють різні комбінації I_1, I_2, I_3 , наприклад,

$$I_1^2 - 2 \cdot I_2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot a_{21} + 2 \cdot a_{23} \cdot a_{32} + 2 \cdot a_{31} \cdot a_{13} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

Використовуючи лінійний інваріант, можна дати інше означення девіатора: тензор, у якого лінійний інваріант I_1 дорівнює нулю, називається девіатором.

Розділ 5. Тензорний аналіз

§29. Тензорне поле і його диференціювання в прямокутній декартовій системі координат

Переходячи до вивчення змінних тензорів, почнемо з розгляду того випадку, коли незалежною змінною являється скалярний аргумент t , наприклад час. Якщо кожному допустимому значенню скалярної величини t відповідає одне визначене значення тензорної величини a_{ij} , то кажуть, що задана тензор-функція від скалярного аргументу t :

$$a_{ij} = a_{ij}(t).$$

Похідною тензора a_{ij} по скалярному аргументу t називається границя відношення приросту тензора до приросту незалежної змінної, якщо приріст незалежної змінної прямує до нуля:

$$\frac{da_{ij}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a_{ij}(t + \Delta t) - a_{ij}(t)}{\Delta t}. \quad (29.1)$$

З цієї формули видно, що **складові похідні** від тензора по скалярному аргументу дорівнюють похідним від відповідних складових (компонент) цього тензора.

Основні властивості похідних зберігаються і для похідних від тензорів.

Дамо тепер означення тензорного поля. Кажуть, що в просторі або в деякій області цього простору задано тензорне поле, якщо кожній точці простору (області) поставлено у відповідність тензор одного й того ж рангу. Цей тензор називається тензором поля. Він, взагалі кажучи, змінюється від точки до точки.

Розглянемо спочатку тензорні поля, які задані в прямокутній декартовій системі координат. Нехай в деякій області нам задане поле другого рангу. Тоді тензор a_{ij} буде функцією точки M :

$$a_{ij} = a_{ij}(M) = a_{ij}(x_1, x_2, x_3), \quad (29.2)$$

де x_1, x_2, x_3 - координати точки M відносно деякого базису \vec{e}_k .

Будемо вважати в подальшому, що функції, які задають тензорне поле, неперервні і мають неперервні частинні похідні будь-якого потрібного нам порядку по всіх аргументах.

Тензорний аналіз являється найбільш важливою частиною тензорного числення, тому що на практиці частіше зустрічаються тензорні поля, а не окремі тензори (наприклад, поле напружень і поле деформацій твердого деформівного тіла). Але, звичайно, всі операції тензорної алгебри справедливі і для тензорних полів, якщо вважати, що алгебраїчні операції проводяться над тензорами поля в кожній точці заданої області.

Розглянемо операцію диференціювання – основну операцію тензорного аналізу. Нехай в деякій області задано поле тензора другого рангу.

Вияснимо як змінюється тензор при переході від точки $M(x_1, x_2, x_3)$ до нескінченно близької точки $N(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$. Положення точки N відносно точки M визначається вектором $d\vec{x} = \overrightarrow{MN}$, розклад якого по базисних векторах записується у вигляді:

$$d\vec{x} = dx_i \vec{e}_i.$$

Позначимо через Δa_{ij} прирости, які одержують компоненти тензора a_{ij} при переході від точки M , до точки N . Якщо припустити, що ці компоненти являються диференційованими функціями від

координат точки M , то головні частини приростів можуть бути записані так:

$$da_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \partial x_k. \quad (29.3)$$

Легко показати, що величина da_{ij} являється тензором другого рангу. Цей тензор називається абсолютним диференціалом тензорного поля a_{ij} .

Із формул (29.3) видно, що при згортанні величин $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$ з компонентами вектора ∂x_k одержуємо тензор другого рангу da_{ij} . Звідси випливає, що величини $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$ утворюють тензор третього рангу в точці M .

Так як нашу побудову можна провести в будь-якій точці заданої області, то можна одержати нове тензорне поле, яке називається абсолютною похідною тензорного поля a_{ij} . Для абсолютної похідної тензорного поля a_{ij} часто застосовується таке позначення:

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = a_{ij;k}, \quad (29.4)$$

в якому на останньому місці ставиться додатковий індекс k , який відповідає координаті x_k тієї точки M , по якій проводиться диференціювання, причому цей індекс від інших відокремлюється комою.

Аналогічні міркування можна провести для поля тензорів будь-якого рангу. Отже, можемо сформулювати загальне правило диференціювання тензорного поля: сукупність всіх частинних похідних першого порядку від компонент заданого тензорного поля по координатах x_k тієї точки, в якій розглядається тензорне поле, утворює тензор, ранг якого на одиницю більше рангу заданого тензорного поля,

- абсолютну похідну даного поля. Результат згортання цієї абсолютної похідної по індексу, який виникає при диференціюванні, з компонентами вектора $d\vec{x}$ представляє собою абсолютний диференціал заданого тензорного поля.

Аналогічно можна побудувати абсолютний диференціал і абсолютну похідну другого порядку для довільного тензорного поля. Наприклад, для тензорного поля a_{ij} частинні похідні

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k \partial x_n} = a_{ij, kn} \quad (29.5)$$

утворюють другу абсолютну похідну тензора a_{ij} , яка являється тензором четвертого рангу. Результатом згортання цього тензора з диференціалами ∂x_k і ∂x_n буде другий абсолютний диференціал тензора a_{ij} :

$$d^2 a_{ij} = a_{ij, kn} dx_k dx_n. \quad (29.6)$$

Таким чином можна отримати диференціали і похідні вищих порядків. Взагалі кажучи, абсолютний диференціал порядку p від довільного, не менше ніж p раз диференційованого тензорного поля представляє собою тензорне поле того ж рангу, що й задане поле, а його абсолютна похідна порядку p – тензорне поле, ранг якого на p одиниць більше рангу заданого поля.

Згадаємо диференціювання скалярного і векторного полів. Розглянемо скалярне поле – тензора нульового рангу

$$\phi = \phi(x_1, x_2, x_3). \quad (29.7)$$

В силу загального правила диференціювання абсолютна похідна цього поля

$$\phi_{,k} = \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \quad (29.8)$$

являється тензором першого рангу, тобто визначає векторне поле. Це поле називається градієнтом скалярного поля і позначається $grad \phi$:

$$grad \phi = \phi_{,k} \vec{e}_k. \quad (29.9)$$

Градієнт скалярного поля в даній точці M - це вектор, в напрямку якого скалярне поле зростає з найбільшою швидкістю і модуль якого дорівнює цій найбільшій швидкості. Тому кажуть, що градієнт скалярного поля являється мірою неоднорідності цього поля.

Розглянемо тепер векторне поле – тензорне поле першого рангу

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3). \quad (29.10)$$

В силу загального правила диференціювання абсолютна похідна цього поля

$$a_{i,k} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \quad (29.11)$$

являється тензором другого рангу. Цей тензор іноді називають градієнтом векторного поля. Абсолютний диференціал da_i зв'язаний з абсолютною похідною $a_{i,k}$ формулою

$$da_i = a_{i,k} dx_k. \quad (29.12)$$

§30. Диференціювання векторного поля в криволінійних координатах. Символи Крістоффеля

Перейдемо до розгляду операції диференціювання векторного поля в криволінійних координатах.

Розглянемо векторне поле – поле тензора першого рангу

$$\vec{a} = a^k \cdot \vec{e}_k = a_k \vec{e}^k. \quad (30.1)$$

Якщо поле однорідне, то його похідні по координатах дорівнюють нулю. Якщо ж поле неоднорідне, похідні по координатах характеризують ступінь його неоднорідності. В випадку криволінійної системи координат вектори базису змінюються від точки до точки простору. Тому похідна векторного поля (30.1) по координаті x^j дорівнює (якщо вектор заданий контраваріантними компонентами)

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} (a^k \cdot \vec{e}_k) = \frac{\partial a^k}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_k + a^k \cdot \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j}. \quad (30.2)$$

Якщо ж вектор заданий коваріантними компонентами, то

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} (a_k \cdot \vec{e}^k) = \frac{\partial a_k}{\partial x^j} \cdot \vec{e}^k + a_k \cdot \frac{\partial \vec{e}^k}{\partial x^j}. \quad (30.3)$$

Сукупність контраваріантних компонент векторів $\frac{\partial \vec{a}}{\partial x^j}$ позначимо через

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x^j} \vec{e}^i = \nabla_j a^i \quad (30.4)$$

і будемо називати її коваріантними (абсолютними) похідними контраваріантного вектора.

Сукупність коваріантних компонент векторів $\frac{\partial \vec{a}}{\partial x^j}$ позначимо через

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x^j} \vec{e}_i = \nabla_j a_i \quad (30.5)$$

і будемо називати її коваріантними (абсолютними) похідними коваріантного вектора. Можна показати, що величини $a^i_{,j}$; $a_{i,j}$ являються компонентами тензора другого рангу.

Знайдемо явний вираз коваріантних похідних через компоненти контраваріантного і коваріантного векторів. У відповідності із співвідношеннями (30.2), (30.3) можемо записати:

$$\nabla_j a^i = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^j} \cdot \vec{e}^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + a^l \frac{\partial \vec{e}_l}{\partial x^j} \cdot \vec{e}^i, \quad (30.6)$$

$$\nabla_j a_i = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_i = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} + a_l \frac{\partial \vec{e}^l}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_i. \quad (30.7)$$

Продиференціювавши співвідношення $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_i^j$, одержимо

$$\vec{e}_i \cdot \frac{\partial \vec{e}^j}{\partial x^k} = -\vec{e}^j \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}. \quad (30.8)$$

Похідна вектора по координаті є вектор. Отже і похідна вектора базису по координаті, тобто $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}$, являється також вектором. Його можна розкласти по векторах основного базису. В результаті одержимо контраваріантні компоненти вектора $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}$, які позначаються Γ_{ij}^k і називаються символами Крістоффеля другого роду, тобто

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} = \Gamma_{ik}^j \cdot \vec{e}_j. \quad (30.9)$$

Число символів Крістоффеля другого роду дорівнює 27, так як маємо три вектори базису, які диференціюються по трьох координатах, а кожна похідна має три компоненти ($3 \times 3 \times 3 = 27$). Зауважимо, що в декартовій системі координат (прямокутній або косокутній) вектори базису не змінюються від точки до точки простору, тому всі символи Крістоффеля другого роду дорівнюють нулю. В цьому випадку коваріантні похідні перетворюються в набори частинних похідних компонент по координатах.

Домноживши формулу (30.9) на \vec{e}^l , одержимо вираз для символів Крістоффеля другого роду

$$\Gamma_{ik}^l = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} \cdot \vec{e}^l. \quad (30.10)$$

Врахувавши формули (30.8) і (30.10), вирази для коваріантних похідних (30.6) і (30.7) перепишемо у вигляді

$$\nabla_j a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + a^l \cdot \Gamma_{lj}^i; \quad \nabla_j a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - a_l \cdot \Gamma_{ij}^l. \quad (30.11)$$

Із цих формул випливає, що коваріантні (абсолютні) похідні векторного поля враховують не тільки швидкість самого поля при переміщенні вздовж координатних ліній (перші члени $\frac{\partial a^i}{\partial x^j}$, $\frac{\partial a_i}{\partial x^j}$ в формулах (30.11)), але також і швидкість локального базису (другі члени в формулах (30.11)).

Так як символи Крістоффеля другого роду являються коефіцієнтами розкладу вектора $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}$ по векторах основного базису (30.9), то аналогічно введемо символи Крістоффеля першого роду, як коефіцієнти розкладу вектора $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}$ по векторах взаємного базису, тобто

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} = \Gamma_{j,ik} \cdot \vec{e}^j. \quad (30.12)$$

Домноживши формулу (30.12) на \vec{e}_l , одержимо вираз для символів Крістоффеля першого роду (їх також буде 27)

$$\Gamma_{l,ik} = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_l. \quad (30.13)$$

Символи Крістоффеля симетричні по двох нижніх індексах (в символах $\Gamma_{l,ik}$ ці індекси виділені комою)

$$\Gamma_{ik}^l = \Gamma_{ki}^l; \quad \Gamma_{l,ik} = \Gamma_{l,ki}. \quad (30.14)$$

Доведемо це. Дійсно враховуючи означення векторів базису, одержимо

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k} = \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i}. \quad (30.15)$$

Із одержаного виразу і означень (30.10), (30.13) випливає симетричність символів Крістоффеля.

Установимо зв'язок між символами Крістоффеля першого і другого роду. Помноживши рівності (30.9), (30.12) відповідно на \vec{e}_l, \vec{e}^l і врахувавши позначення (17.3), одержимо

$$\Gamma_{l,ik} = \Gamma_{ik}^j \cdot g_{jl}; \quad \Gamma_{ik}^l = \Gamma_{j,ik} \cdot g^{jl}. \quad (30.16)$$

Покажемо, що символи Крістоффеля виражаються через компоненти метричного тензора. Розглянемо для цього вирази символів Крістоффеля першого роду. На основі формули (30.15) маємо

$$\Gamma_{l,ik} = \vec{e}_l \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} = \vec{e}_l \cdot \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i}.$$

Отже

$$\begin{aligned} \Gamma_{l,ik} &= \frac{1}{2} \left(\vec{e}_l \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} + \vec{e}_l \cdot \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (\vec{e}_e \times \vec{e}_i) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\vec{e}_e \times \vec{e}_k) - \vec{e}_i \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^e} - \vec{e}_k \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^e} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (\vec{e}_e \times \vec{e}_i) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\vec{e}_e \times \vec{e}_k) - \frac{\partial}{\partial x^e} (\vec{e}_i \times \vec{e}_k) \right]. \end{aligned}$$

Остаточнo одержимо

$$\Gamma_{e,ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ei}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ek}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^e} \right). \quad (30.17)$$

Формули (30.16) і (30.17) дають можливість визначити символи Крістоффеля, якщо задана метрика простору.

Вирази символів Крістоффеля в різних системах координат можна знайти в довідниках з математики.

Підкреслимо, що символи Крістоффеля першого і другого роду не являються тензорними величинами, а коваріантні похідні вектора являються компонентами тензора другого рангу.

§31. Диференціювання поля тензора другого рангу в криволінійних координатах.

Узагальненням формул для коваріантної похідної вектора являються означення коваріантного диференціювання тензора другого рангу. Якщо тензор заданий контраваріантними компонентами, то продиференціювавши по координаті x , одержимо

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^i} (a^{ik} \bar{e}^i \times \bar{e}_k),$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a^{ik}}{\partial x^i} \bar{e}_i \bar{e}_k + a^{ik} \times \frac{\partial \bar{e}^i}{\partial x^i} \times \bar{e}_k + a^{ik} \times \bar{e}_i \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial x^i}. \quad (31.1)$$

Із даної рівності, помноживши її на $\bar{e}^i \times \bar{e}^k$ і ввівши позначення $\nabla_j a^{ik}$, маємо

$$a_{,j}{}^{ik} = \nabla_j a^{ik} = \frac{\partial a}{\partial x^i} \bar{e}^i \times \bar{e}^k,$$

$$a_{,j}{}^{ik} = \frac{\partial a^{ik}}{\partial x^j} + a^{nk} \times \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial x^j} \times \bar{e}^i + a^{in} \times \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial x^j} \times \bar{e}^k. \quad (31.2)$$

Скористувавшись позначеннями (30.10), одержуємо коваріантні похідні контраваріантних компонент другого рангу

$$a_{,j}{}^{ik} = \nabla_j a^{ik} = \frac{\partial a^{ik}}{\partial x^j} + a^{nk} \Gamma_{nj}{}^i + a^{in} \Gamma_{nj}{}^k. \quad (31.3)$$

Якщо тензор заданий коваріантними компонентами, то, проводячи аналогічні викладки, одержимо величини

$$a_{ik,j} = \nabla_j a_{ik} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} - a_{nk} \Gamma_{ij}{}^n - a_{in} \Gamma_{kj}{}^n, \quad (31.4)$$

які називаються коваріантними похідними коваріантних компонент тензора другого рангу.

Якщо ж тензор заданий змішаними компонентами, аналогічно можна одержати коваріантні похідні

$$a_{k,j}{}^i = \nabla_j a_k{}^i = \frac{\partial a_k{}^i}{\partial x^j} + a^n{}_k \Gamma_{nj}{}^i - a_n{}^i \Gamma_{kj}{}^n. \quad (31.5)$$

Виходячи з наведених вище означень, сформулюємо загальне правило знаходження коваріантних похідних тензора будь-якого рангу: перший доданок дорівнює частинним похідним компонент тензора по координатах; інші доданки (їх число дорівнює рангу даного тензора) являються сумами із компонент тензора і символів Крістоффеля другого роду, причому індексом сумування служать почергово індекси компонент тензора і протилежний (верхній або нижній – в залежності від “німого” індексу тензора) індекс символів Крістоффеля. Ці доданки беруться зі знаком мінус, якщо “німий” індекс компонент тензора – коваріантний (нижній) і зі знаком “плюс”, якщо “німий” індекс у тензора – контраваріантний (верхній). Наприклад, коваріантна похідна для тензора четвертого рангу має вигляд

$$b_{..k}{}^{ik \times l}{}_{,j} = \nabla_j b_{..n}{}^{ik \times l} = \frac{\partial b_{..l}{}^{ik \times l}}{\partial x^j} + b_{..l}{}^{mk \times l} \Gamma_{mj}{}^i + \\ + b_{..n}{}^{im \times l} \Gamma_{mj}{}^k - b_{..m}{}^{ik \times l} \Gamma_{nj}{}^m + b_{..n}{}^{ik \times m} \Gamma_{mj}{}^l. \quad (31.6)$$

Сформулюємо теорему Річчі: коваріантна похідна метричного тензора дорівнює нулю. Доведення теореми проводиться простим обчисленням. В силу рівностей (30.16), (30.17) маємо

$$g_{ik,j} = \nabla_j g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - g_{mk} \Gamma_{ij}{}^m - g_{im} \Gamma_{kj}{}^m = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma_{k,ij} - \Gamma_{i,kj} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \times \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \right) = 0. \tag{31.7}
\end{aligned}$$

Це дає можливість компоненти метричного тензора виносити за знак коваріантної похідної. З рівності (31.7) випливає наслідок теореми

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} = \Gamma_{k,ij} + \Gamma_{i,kj}. \tag{31.8}$$

Розглянемо тепер деякі властивості коваріантних похідних. Коваріантні похідні скаляра ϕ співпадають із звичайними похідними по координатах, тобто

$$\phi_{,j} = \nabla_j \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}.$$

В будь-якій прямолінійній системі координат (прямокутній чи косокутній) коваріантні похідні співпадають із звичайними похідними компонентів векторів і тензорів по координатах, так як символи Крістоффеля дорівнюють нулю. Наприклад,

$$\begin{aligned}
a^i_{,j} &= \nabla_j a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^i}; \\
a^i_{k,j} &= \nabla_j a^i_k = \frac{\partial a^i_k}{\partial x^i}.
\end{aligned}$$

Коваріантна похідна суми дорівнює сумі коваріантних похідних доданків. Наприклад,

$$\nabla_j (a^i + b^i) = \nabla_j a^i + \nabla_j b^i.$$

Коваріантна похідна добутку знаходиться аналогічно звичайній похідній добутку, тобто $\nabla_j (a^i b^k) = (\nabla_j a^i) b^k + a^i (\nabla_j b^k)$.

Коваріантні похідні являються тензорними величинами. Наприклад, коваріантні похідні контрваріантних компонент вектора

$\nabla_j a^i$ є змішані компоненти тензора другого рангу. Коваріантні похідні коваріантних компонент того ж вектора $\nabla_j a_i$ є коваріантні компоненти того ж тензора. Тому зв'язок між $\nabla_j a^i$ і $\nabla_j a_i$ здійснюється (як між компонентами одного і того ж тензора з різною будовою індексів) за допомогою компонент метричного тензора. Наприклад,

$$\nabla_j a^i = (\nabla_j a_k) g^{ik}, \quad \nabla_j a_i = (\nabla_j a^k) g_{ik}.$$

§32. Диференціальний оператор Гамільтона. Потенціальні і соленоїдальні поля. Теорема Остроградського-Гаусса.

Диференціальний оператор Гамільтона позначається ∇ (набла). В криволінійних координатах має вигляд

$$\nabla(\cdot) = \frac{\partial}{\partial x^i}(\cdot) \vec{e}^i = \frac{\partial}{\partial x^1}(\cdot) \vec{e}^1 + \frac{\partial}{\partial x^2}(\cdot) \vec{e}^2 + \frac{\partial}{\partial x^3}(\cdot) \vec{e}^3, \quad (32.1)$$

а в прямокутних декартових координатах -

$$\nabla(\cdot) = \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\cdot) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\cdot) \vec{k}. \quad (32.2)$$

Наприклад, застосовуючи оператор ∇ до скалярного поля $\phi = \phi(x^1, x^2, x^3)$, одержимо векторне поле градієнта ϕ

$$\nabla\phi = \text{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \vec{e}_i. \quad (32.3)$$

Якщо ϕ вектор або тензор, то скалярний добуток символічного вектора ∇ і ϕ дорівнює дивергенції ϕ , тобто $\text{div}\phi = \nabla \cdot \phi$. Наприклад, якщо ϕ - вектор, то згідно (32.1), (30.6) одержимо скаляр

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} &= \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^i} \vec{e}^i = \nabla_i a^j \vec{e}_j \cdot \vec{e}^i = \nabla_i a^i \delta_j^i = \\ &= \nabla_i a^i = \nabla_1 a^1 + \nabla_2 a^2 + \nabla_3 a^3, \end{aligned} \quad (32.3)$$

а в прямокутних декартових координатах

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (32.4)$$

Дивергенція поля тензора другого рангу a^{ij} є вектор

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A &= \nabla \cdot A = \frac{\partial A}{\partial x^k} \cdot \vec{e}^k = \nabla_k a^{ij} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \cdot \vec{e}^k = \\ &= \nabla_k a^{ij} \vec{e}_i \delta_j^k = \nabla_k a^{ik} \vec{e}_i. \end{aligned} \quad (32.5)$$

Наприклад, дивергенція поля тензора в прямокутних декартових координатах має вигляд

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A &= \left(\frac{\partial a_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial a_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial a_{xz}}{\partial z} \right) \vec{i} + \\ &+ \left(\frac{\partial a_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial a_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial a_{yz}}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial a_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial a_{zz}}{\partial z} \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

Векторний добуток символічного вектора ∇ і вектора \vec{a} дорівнює ротору (вихору) поля вектора $\vec{a}(x, y, z)$. В прямокутних декартових координатах ротор вектора обчислюється за формулою

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (32.6)$$

Розглянемо ще один оператор, який часто зустрічається в механіці суцільного середовища, а саме:

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta, \quad (32.7)$$

який називається оператором Лапласа або лапласіаном. В декартових прямокутних координатах він має вигляд

$$\Delta(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2}. \quad (32.8)$$

Векторне поле називається потенціальним, якщо воно являється градієнтом деякої скалярної функції ϕ , тобто $\vec{a} = \operatorname{grad} \phi$, де ϕ -

потенціал поля \vec{a} . Необхідною і достатньою умовою того, щоб векторне поле \vec{a} було потенціальним, являється виконання рівності

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = 0, \quad (32.9)$$

тобто будь-яке потенційне поле являється безвихровим.

Векторне поле називається соленоїдальним, якщо його вектор \vec{a} являється вихором деякого другого вектора, тобто $\vec{a} = \operatorname{rot} \vec{w}$, де \vec{w} - векторний потенціал поля \vec{a} . Необхідною і достатньою умовою соленоїдальності поля являється рівність нулю його дивергенції, тобто

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{w} = 0. \quad (32.10)$$

Сформулюємо теорему Остроградського-Гаусса для векторного поля і узагальнимо її для тензорних полів. Для цього розглянемо тіло об'ємом V , яке обмежене поверхнею S , нормаль до якої позначимо $\vec{n} = n_i \vec{e}^i$. Скалярний потік векторного поля $\vec{a} = a^i \vec{e}_i$ через поверхню S дорівнює

$$Q = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \iint_S a^i n_i dS. \quad (32.11)$$

Інтеграл по об'єму V від дивергенції векторного поля \vec{a} дорівнює скалярному потоку поля через поверхню S , яка обмежує цей об'єм, якщо компоненти поля разом з їх частинними похідними неперервні в об'ємі і на поверхні, тобто

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS, \quad (32.12)$$

або в скалярній формі, враховуючи (32.3), (32.11),

$$\iiint_V \nabla_i a^i dV = \iint_S a^i n_i dS. \quad (32.13)$$

Наприклад, в прямокутних декартових координатах формула набуде вигляду

$$\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV = \iint_S (a_x l + a_y m + a_z n) dS,$$

де l, m, n – напрямні косинуси вектора нормалі.

Стосовно до поля тензора другого рангу A математичний запис теореми Остроградського-Гаусса має вигляд, аналогічний (32.12), а саме

$$\iiint_V \operatorname{div} A dV = \iint_S A \cdot \vec{n} dS, \quad (32.14)$$

або в скалярній формі, враховуючи (32.5)

$$\iiint_V \nabla_k a^{ik} dV = \iint_S a^{ik} n_k dS. \quad (32.15)$$

При $i = 1, 2, 3$ одержуємо три рівняння (по індексу k в кожному виразі проводимо сумування). Наприклад, в прямокутних декартових координатах для $i = 1$ маємо

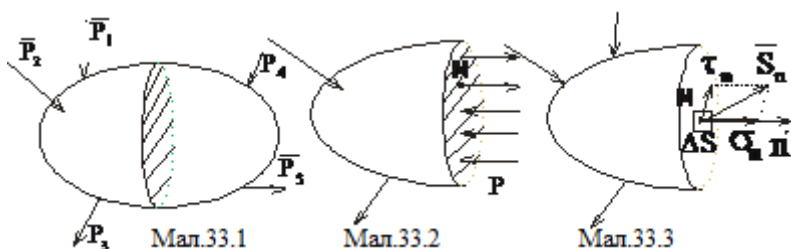
$$\iiint_V \left(\frac{\partial a_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial a_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial a_{xz}}{\partial z} \right) dV = \iint_S (a_{xx} l + a_{xy} m + a_{xz} n) dS. \quad (32.16)$$

Розділ 6. Деякі застосування тензорів в механіці суцільних середовищ

§33. Тензор напружень

Розглянемо довільне однорідне тіло, яке знаходиться під дією зовнішніх сил. Зовнішні сили можуть бути поверхневими, які прикладені до поверхні тіла, (наприклад удари молота, тиск одного тіла на інше) і об'ємними, які прикладені до елемента об'єму (маси) (наприклад, сила тяжіння, інерційні сили, власна вага).

Під дією цих сил змінюються відстані між атомами, а отже, змінюється і сила їх взаємодії, що приводить до порушення міжатомної рівноваги. В результаті зовнішні сили зустрічають протидію, які по аналогії називають внутрішніми силами. Якщо тіло знаходиться у рівновазі, то зовнішні і внутрішні сили зрівняні.



Розітнемо тіло, яке знаходиться у рівновазі, на дві частини (Мал.33.1) і внутрішні зв'язки між частинами порушаться.

Щоб тіло залишалось у стані рівноваги, необхідно замінити дію відкинутої частини силами, які розподілені по площині перетину (Мал. 33.2). По відношенню до частини тіла, що залишилась, це будуть

зовнішні сили, а по відношенню до всього тіла – це внутрішні сили, які виявлені завдяки методу перетинів.

В площині перетину візьмемо довільну точку M і виділимо в околі цієї точки нескінченно малу площадку ΔS з нормаллю \vec{v} на яку діє нескінченно мала рівнодіюча внутрішніх сил $\Delta \vec{P}$. Величина внутрішніх сил, віднесена до площі, характеризує їх інтенсивність або напруження, яке виразиться відношенням

$$\vec{P}_n = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S}. \quad (33.1)$$

Спрямовуючи площу ΔS до нуля, тобто якби стягнувши дану площадку в точку M , одержимо напруження в точці M

$$\vec{P}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S}. \quad (33.2)$$

Напруження \vec{P}_n представляє собою вектор, напрямком якого співпадає з напрямком діючої сили. Істотною особливістю тут являється довільна орієнтація площини перетину і, отже, нормалі \vec{v} . Тому через дану точку перетину може бути проведено безліч перетинів, в кожному із яких можна виділити площадку ΔS і визначити відповідне цій площадці напруження.

Вектор напруження \vec{P} можна представити у вигляді суми (33.3)

$$\vec{P}_n = \sigma_n^2 + \tau_n^2, \quad (33.3)$$

де $\vec{\sigma}_n$ - нормальне напруження (проекція \vec{P}_n на нормаль \vec{v}), $\vec{\tau}_n$ - дотичне напруження (проекція \vec{P}_n на площину перерізу). Тоді модулі напружень \vec{P}_n , $\vec{\tau}_n$, $\vec{\sigma}_n$ будуть зв'язані співвідношенням

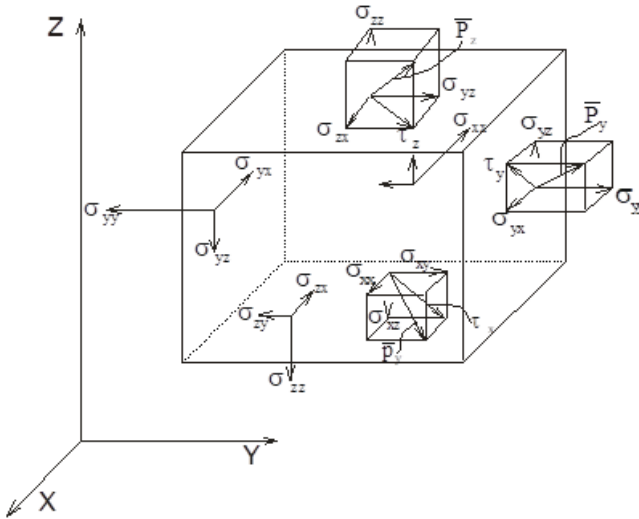
$$p_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2. \quad (33.4)$$

Під дією зовнішнього навантаження в кожній точці тіла виникають внутрішні сили різної інтенсивності, тобто напружений

стан в різних точках різний. Напружений стан в точці характеризується сукупністю всіх векторів напружень, які діють на площадках і які включають розглядувану точку. Але, щоб знати напружений стан в будь-якій точці тіла, а отже, і напружений стан усього тіла, достатньо знати деяку сукупність напружень, які діють на визначених площадках.

Розглянемо ці напруження. Виріжемо із розглядуваного тіла елементарний паралелепіпед, ребра якого паралельні осям прямокутної декартової системи координат, а довжина дорівнює dx , dy , dz . На гранях цього паралелепіпеда дію відкинутих частин тіла замінимо напруженнями \vec{P}_x , \vec{P}_y , \vec{P}_z . Ці напруження можна розкласти на нормальну складову до грані (нормальне напруження) і дотичну (дотичне напруження). В свою чергу, дотичне напруження можна розкласти на дві складових, які паралельні координатним осям (Мал. 33.4).

Так як протилежні паралельні грані паралелепіпеда віддалені друг від друга на нескінченно малу відстань, то і однойменні паралельні напруження, які діють на протилежних гранях, відрізняються мало і з деяким допуском можуть бути прийняті рівними.



Мал.33.4

Отже, на гранях паралелепіпеда діють три нормальних і шість дотичних напружень, сукупність яких утворює тензор напружень

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (33.5)$$

Перший індекс в позначеннях напружень вказує вісь, паралельно якій направлена зовнішня нормаль до площадки, а другий індекс – вісь, паралельно якій направлена складова напруження, тобто перший індекс вказує площадку, на якій діє напруження, а другий – його направлення.

Нормальні напруження можуть бути розтягуючими або стисливими. Дотичні напруження прагнуть зсунути частини тіла відносно один одного по площині перетину, тому їх іноді називають напруженнями зсуву.

Розглянемо правило знаків для компонентів напружень. Нормальне напруження вважається додатнім, якщо воно викликає розтяг (в цьому випадку воно направлене по зовнішній нормалі до площадки, яка належить розглядуваній частині тіла), і від'ємним, якщо воно викликає стиск (в цьому випадку воно направлене для даної частини тіла по внутрішній нормалі).

Якщо зовнішня нормаль до площадки співпадає з додатнім напрямком координатної осі, то за додатній напрямок складових дотичних напружень, які дають на цій площадці, приймаються дотичні напрямки відповідних осей координат. Якщо ж зовнішня нормаль до площадки має напрямок, протилежний додатному напрямку деякої осі, то за додатній напрямок для складових дотичних напружень на цій площадці приймаються від'ємні напрямки відповідних координатних осей.

Зауважимо, що складові дотичних напружень на двох взаємно перпендикулярних площадках, перпендикулярні лінії їх перетину, рівні між собою і направлені назустріч один одному. Це положення називається законом парності дотичних напружень. Отже, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$. Звідси випливає, що тензор напружень являється симетричним тензором.

Для позначення напружень іноді використовують інші системи позначень:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (33.6)$$

Поряд з напруженнями які діють на площадках, нормальних до координатних осей, часто виникає необхідність знаходження напружень на площадках, довільним чином нахилених до указаних

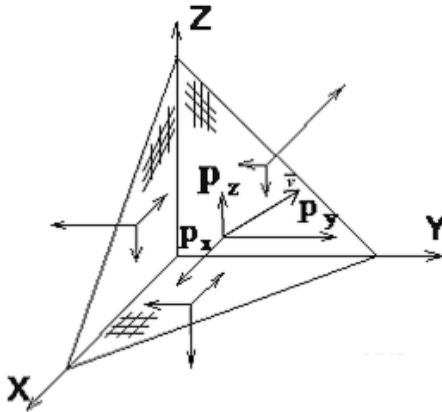
осей. Встановимо залежність між проекціями повного напруження на похилій площадці $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z$ з тензором напруження (33.5).

Виділимо в околі деякої точки елементарний тетраедр, три грані якого співпадають з координатними площинами, а четверта грань утворена довільною похилою площиною (Мал. 33.5). Її положення в просторі визначається нормаллю \vec{v} .

Площу похилої грані позначимо через dS , а площі інших граней відповідно через dS_x, dS_y, dS_z (індекс вказує напрямок нормалі до площадки). Очевидно, що для цих площ справедливі співвідношення

$$dS_x = l dS, \quad dS_y = m dS, \quad dS_z = n dS, \quad (33.7)$$

де l, m, n – напрямні косинуси.



Мал. 33.5

Умова рівноваги тетраедра в проекції на вісь x має вигляд

$$P_x dS - \sigma_{xx} dS_y - \sigma_{xy} dS_y - \sigma_{xz} dS_z = 0. \quad (33.8)$$

Із цієї рівності одержуємо

$$P_x = \sigma_{xx} l + \sigma_{xy} m + \sigma_{xz} n.$$

Далі із рівняння рівноваги в проекції на осі y і z легко одержати аналогічні вирази для \vec{P}_y, \vec{P}_z . В результаті одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} P_x = \sigma_{xx}l + \sigma_{xy}m + \sigma_{xz}n, \\ P_y = \sigma_{yx}l + \sigma_{yy}m + \sigma_{yz}n, \\ P_z = \sigma_{zx}l + \sigma_{zy}m + \sigma_{zz}n. \end{cases} \quad (33.9)$$

Таким чином, по відомим компонентам тензора напружень, записаних в осях x, y, z , можуть бути знайдені проекції повного напруження $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z$ на похилій площадці, яка визначається нормаллю \vec{v} .

Так як положення похилої площадки тетраедра вибрано довільно, то площадку можна стягнути в точку, переміщаючи її в початок координат. Тому формули (33.9) дають можливість при відомих значеннях компонент напруження на координатних площадках визначити напруження в будь-якій точці тіла. Іншими словами, дев'ять компонент напружень повністю визначають напружений стан в кожній точці тіла. Ці дев'ять величин (33.5) ніяк не зв'язані з орієнтацією площадки, на якій визначається напруження, а тільки з даною точкою середовища. В той же час знання цих величин дає можливість обчислювати по формулах (33.9) напруження на будь-якій площадці, якщо відома її орієнтація \vec{v} .

В кожній точці тіла однозначно визначається тензор напружень, який і служить основною характеристикою напруженого стану тіла в точці. Якщо відомий тензор напружень в будь-якій точці тіла, то буде визначено напружений стан всього тіла.

Формули (33.9) перепишемо у скороченому вигляді

$$P_\varepsilon = \sigma_{ij}v_i. \quad (33.10)$$

В довільній системі координат $\vec{P} = P^i\vec{e}_i, \vec{v} = v_k\vec{e}^k$, і формули (33.10) запишуться так

$$P^i = \sigma^{ij} \nu_j. \quad (33.11)$$

Тензор напружень, як і будь який симетричний тензор другого рангу, може бути приведений до діагонального вигляду

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (33.12)$$

При цьому дотичні компоненти тензора напружень перетворюються в нуль, а нормальні компоненти співпадають з власними значеннями цього тензора. Їх називають головними напруженнями, а відповідні їм власні (головні) напрямки – головними напрямками тензора напружень. Площинки на яких діють тільки нормальні напруження, а дотичні напруження відсутні, називають головними площадками. Тому можна стверджувати, що напружений стан в точці цілком визначається головними напруженнями і орієнтацією головних площадок.

Згідно формули (25.6) тензор напружень σ_{ij} можна представити у вигляді суми девіатора напружень $\alpha_{ij}^{(\sigma)}$ і кульового тензора напружень $\sigma_0 \delta_{ij}$

$$\sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(\sigma)} + \sigma_0 \delta_{ij}. \quad (33.13)$$

Тут величина σ_0 називається середнім напруженням або гідростатичним тиском і обчислюється за формулою

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}). \quad (33.14)$$

Девіатор напружень

$$\alpha_{ij}^{(\sigma)} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_0 \end{pmatrix}$$

характеризує напружений стан тіла, при якому відбувається тільки зміна форми без зміни об'єму.

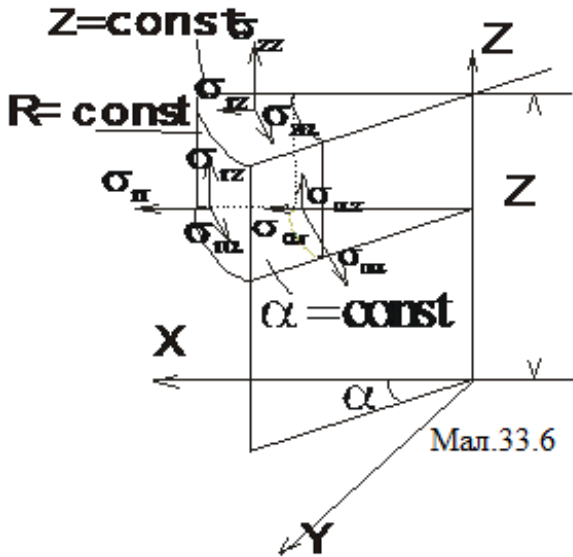
Кульовому тензору напружень

$$\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

відповідає зміна об'єму без зміни форми.

Аналогічно можна ввести тензор напружень в іншій системі координат. Наприклад, на мал. 33.6 приведені компоненти тензора напружень в циліндричній системі координат. Компоненти тензора напружень в цьому випадку утворюють симетричну матрицю вигляду

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\alpha} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{ar} & \sigma_{\alpha\alpha} & \sigma_{\alpha z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\alpha} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$



Мал.33.6

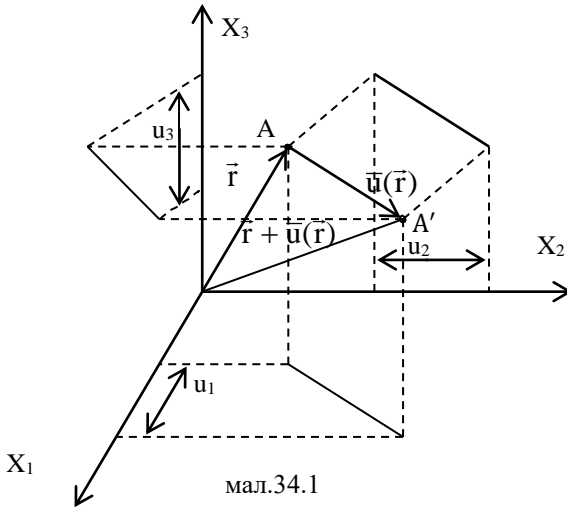
§34. Тензор деформацій

Теорія напружень розглядає напружений стан тіла під дією навантаження в процесі деформації. Теорія деформацій вивчає геометрію процесу, визначає критерії, які характеризують зміну форми тіла.

Введемо поняття, які визначають деформацію. Під дією зовнішніх навантажень точки заданого деформівного тіла переміщуються в просторі. Деформація тіла заключається в зміні відстаней між його точками. При цьому в загальному випадку змінюються розміри тіла, його форма і об'єм. Термін “деформація” має двояке значення. Це і сам процес зміни відстаней між точками тіла, і результат цього процесу.

Якщо при русі тіла відстані між його точками не змінюються, то воно не деформується, а рухається як абсолютно тверде тіло. В теорії деформацій порівнюються два стани тіла – початковий стан (в початковий момент часу t_0) і кінцевий стан (в кінцевий момент часу t_1).

Нехай радіус-вектор точки $A(x_1, x_2, x_3)$ яка належить тілу, до деформації дорівнював \vec{r} , а після деформації точка зайняла нове положення $A'(x'_1, x'_2, x'_3)$ і її радіус-вектор став $\vec{r}' + \vec{u}(\vec{r})$ (мал.34.1).



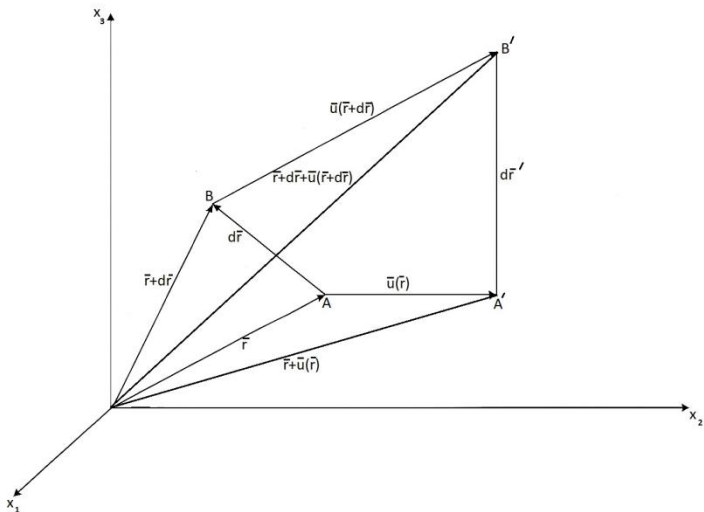
При цьому переміщення тіла без деформації (жорстке переміщення) виключається.

Відстань, на яку змістилась точка A (довжина вектора $\overline{AA'}$), називається вектором переміщення \vec{u} , а проєкції вектора $\overline{AA'}$ на координатні осі – компонентами переміщення і позначаються:

$$u_1 = x'_1 - x_1; \quad u_2 = x'_2 - x_2; \quad u_3 = x'_3 - x_3. \quad (34.1)$$

В загальному випадку переміщення іншої точки цього тіла з другими початковими значеннями координат може бути менше або більше, тобто переміщення представляє собою функцію координат $u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3)$, $u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3)$. В силу суцільності тіла будемо вважати, що ці функції і їх частинні похідні по координатах неперервні.

Розглянемо тепер випадок деформації відрізка AB . Після деформації даний відрізок зайняв положення $A'B'$ (мал.34.2).



мал. 34.2

Вектори $\vec{u}(\vec{r})$ і $\vec{u}(\vec{r} + d\vec{r})$ являються векторами переміщення точок A і B. Відносний радіус-вектор точок до деформації був $d\vec{r}$, після деформації став рівний $d\vec{r}'$. Обчислимо зміну його довжини в результаті деформації, тобто визначимо різницю $(d\vec{r}')^2 - (d\vec{r})^2$. Ця величина і буде визначати деформований стан тіла. Якщо в деякій точці $(d\vec{r}')^2 - (d\vec{r})^2 \neq 0$, то кажуть, що в цій точці тіло знаходиться в деформованому стані. Із мал.34.2 випливає

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r})$$

або в координатній формі

$$dx'_i = dx_i + u_i(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) - u_i(x_1, x_2, x_3). \quad (34.2)$$

Нехтуючи величинами другого порядку малості, одержимо

$$dx'_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k.$$

Підносячи цей вираз до квадрату і врахувавши, що $(d\vec{r}')^2 = dx'_i \cdot dx'_i$, $(d\vec{r})^2 = dx_i \cdot dx_i$, знаходимо

$$(d\vec{r}')^2 - (d\vec{r})^2 = 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_s} \cdot dx_k dx_s. \quad (34.3)$$

Поміняємо індекси сумування i і s в другій сумі, а першу суму запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot dx_i dx_k &= \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot dx_i dx_k = \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot dx_i dx_k + 2 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_k dx_i. \end{aligned}$$

В результаті вираз (34.3) перепишемо

$$(d\vec{r}')^2 - (d\vec{r})^2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_s}{\partial x_k} \frac{\partial u_s}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k = 2E_{ik} dx_i dx_k,$$

де введено позначення

$$E_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_s}{\partial x_k} \frac{\partial u_s}{\partial x_i} \right). \quad (34.4)$$

Дев'ять величин E_{ik} повністю визначають зміну відстані між будь-якими двома точками і характеризують деформований стан тіла. Ці величини утворюють тензор другого рангу, який називається тензором деформації. В розгорнутому вигляді тензор деформації має вигляд

$$E_{ik} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix}. \quad (34.5)$$

В лінійній теоремі пружності вважають, що компоненти вектора переміщення і їх градієнти малі. Тому вважаючи $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \ll 1$, в формулі (34.4) можна опустити добуток цих величин. В результаті одержимо тензор

$$E_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (34.6)$$

який називається тензором малої деформації.

Запишемо в розгорнутому вигляді залежності (34.6) в прямокутній декартовій системі координат

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad E_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3};$$

$$E_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad E_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad E_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right).$$

Розглянемо, який геометричний зміст мають компоненти тензора малої деформації. Раніше ми вектор \overline{AB} розміщували довільно (мал.34.2), а тепер вибраний вектор $d\vec{r}$ перетворюється в вектор $d\vec{r}' = d\vec{r} + d\vec{u}$, причому компоненти вектора $d\vec{u}$ обчислюються за формулою (29.12). Довжину векторів до і після деформації обчислюємо за формулами

$$|d\vec{r}| = |dx_1|, \quad |d\vec{r}'| = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2} |dx_1|.$$

Так як ми розглядаємо тільки малі деформації, то відкинувши величини $(\partial u_i / \partial x_k)^2$, одержимо

$$|d\vec{r}'| = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}} |dx_1| = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) |dx_1|.$$

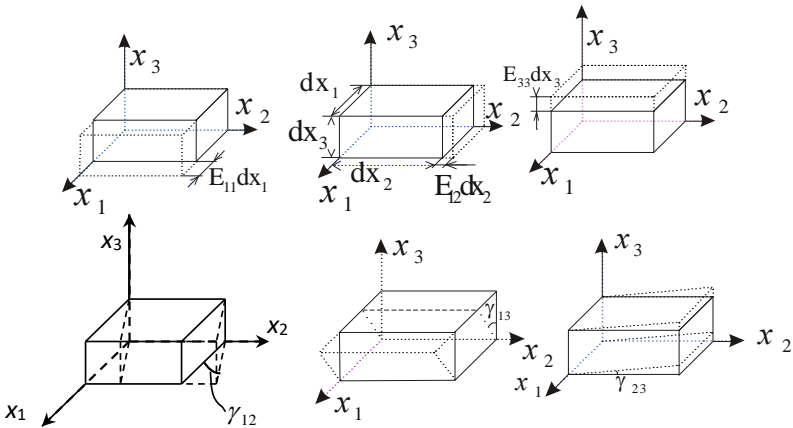
Відносне подовження матеріального вектора \overline{AB} запишеться

$$\frac{|d\vec{r}| - |d\vec{r}'|}{|d\vec{r}'|} = \frac{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 - dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = E_{11} \quad (34.7)$$

Отже, компонента E_{11} дорівнює відносному подовженню елементарного відрізка, який паралельний до деформації осі Ox_1 .

Аналогічно, компоненти E_{22} і E_{33} дорівнюють відношенню подовженню матеріальних відрізків, які паралельні відповідно осям Ox_2 і Ox_3 .

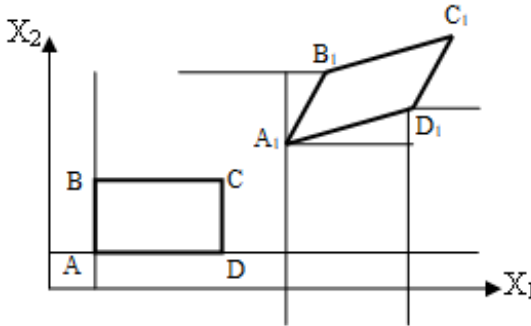
Виділимо в суцільному середовищі до деформації площинами, паралельними координатним осям, нескінченно малий паралелепіпед з ребрами dx_1 , dx_2 , dx_3 . В процесі деформації ребра змінюють лінійний розмір (але залишаються прямими лініями), змінюються кути між ребрами. Таким чином, елементарний паралелепіпед одержує деформацію двох видів: лінійну і кутову (зсуву) (мал.34.3).



Мал.34.3

Лінійна деформація паралелепіпеда зв'язана із зміною його об'єму і визначається введеними вище поняттями відносного подовження. Кутова або зсувна деформація не зв'язана із зміною об'єму – вона приводить до зміни форми тіла. Величина деформації зсуву визначається кутом між напрямками ребер в початковому стані і після деформації. Її позначають $\frac{1}{2} \gamma = E$.

Розглянемо проекцію елементарного паралелепіпеда на площину Ox_1x_2 , яка до деформації представлена прямокутником $ABCD$, а після деформації – паралелограмом $A_1B_1C_1D_1$ (мал.34.4).



Мал. 34.4

Компоненти переміщення точки A будуть u_1 і u_2 . Компоненти переміщення для точок $B(x_1, x_2 + dx_2)$ і $C(x_1 + dx_1, x_2)$ відповідно дорівнюють:

$$u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2, \quad u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2;$$

$$u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1, \quad u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1.$$

Обчислимо тангенс кута повороту ребра AB в площині Ox_1x_2

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_1 B_2}{A_1 B_2} = \frac{u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 - u_1}{u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + dx_2 - u_2} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}}.$$

Так як деформації малі, то відносне подовження $E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ - вельми мала величина в порівнянні з одиницею. Як відомо, при малих

значеннях α величина $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, отже наближено можна записати $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$.

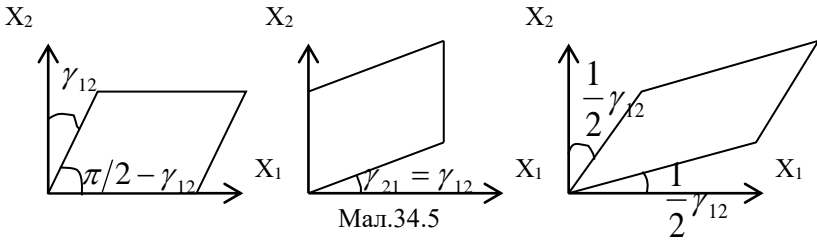
Аналогічно, $\beta = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ для кута повороту ребра AC в площині Ox_1x_2 . Отже, початковий прямий кут між відрізками AB і AC зменшиться на величину

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \quad (34.8)$$

Така зміна (спотворення) прямого кута називається його відносним зсувом.

Проектуючи елементарний паралелепіпед на дві інші координатні площини, аналогічно можна визначити зсувні деформації γ_{13} і γ_{23} .

Якщо ребро, початково паралельне осі Ox_1 , при зсуві повертається в напрямку ребра, початково паралельного осі Ox_2 , то такий відносний зсув позначається γ_{12} , а якщо відбувається поворот ребра, початково паралельного осі Ox_2 , до ребра, паралельного осі Ox_1 , то відносний зсув позначається γ_{21} . Якщо кути повороту рівні, то в обох розглянутих випадках деформації γ_{12} і γ_{21} і зв'язані з ними напружені стани однакові, так як від одного випадку до другого легко перейти шляхом жорсткого повороту без деформації (мал.34.5).



Мал.34.5

Це дає можливість кожному компоненту зсувної деформації представити у вигляді двох складових при умові постійності їх суми і рівності її відповідній компоненті. Наприклад, замість відносного зсуву γ_{12} ми можемо взяти $\frac{1}{2} \cdot \gamma_{12}$ і $\frac{1}{2} \cdot \gamma_{21}$, причому $\frac{1}{2} \cdot \gamma_{12} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{21}$. Таким чином, компоненти зсувних деформацій позначають по-різному. Ці позначення зв'язані між собою формулами

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{12}, \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{13}, \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{23}.$$

Зупинимось на аналізі знаків компонентів тензора деформацій.

Якщо функція u_1 зростає з ростом x_1 , тобто $\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} > 0$, то ми маємо збільшення довжини dx_1 (переміщення вправо точки С на рис. 34.4 більше переміщення точки А). Значить, якщо $\varepsilon_{11} > 0$, то має місце подовження, якщо $\varepsilon_{11} < 0$ - скорочення, так справедливо для ε_{22} і ε_{33} .

Якщо функція u_2 зростає з ростом x_1 , то $\beta = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} > 0$, при цьому відрізок АС повертається від осі $+Ox_1$ (додатній напрям) до осі $+Ox_2$ (рис.34.4); точно так же при $\alpha = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} > 0$ відрізок АВ повертається від осі $+Ox_2$ до осі $+Ox_1$. Звідси випливає, що зсув ε_{12} додатній, якщо прямий кут між осями $+Ox_1$ і $+Ox_2$ зменшується. Це ж правило залишається справедливим і для зсувних деформацій в інших площинах.

Отже, додатнім лінійним деформаціям $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ відповідають подовження вздовж осей координат, від'ємним – скорочення.

Додатнім зсувним деформаціям $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}$ відповідають зменшення кутів між додатніми напрямками осей, від'ємним – збільшення тих же кутів.

Порівняно з (34.5), для позначення тензора деформацій іноді використовують інші позначення

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (34.9)$$

В кожній точці тіла однозначно визначається тензор деформацій, який і служить основною характеристикою деформованого стану тіла в точці. Якщо відомий тензор деформацій в будь-якій точці тіла, то визначено деформаційний стан всього тіла.

Тензор деформацій, як і будь-який симетричний тензор другого рангу, поворотом координатних осей може бути приведений до діагонального вигляду:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (34.10)$$

Це означає, в кожній точці існують три взаємно перпендикулярні напрямки, по яких тіло зазнає тільки деформацій подовження або скорочення, а деформації зсуву дорівнюють нулю. Ці лінійні деформації $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ називаються головними деформаціями.

Аналогічно тензору напружень тензор деформації може бути розкладений на два тензори: девіатор деформацій $d_{ij}^{(\varepsilon)}$ і кульовий тензор деформацій $\varepsilon_0 \cdot \delta_{ij}$:

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij}^{(\varepsilon)} + \varepsilon_0 \cdot \delta_{ij}. \quad (34.11)$$

Величина ε_0 називається середньою деформацією і обчислюється за формулою

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}). \quad (34.12)$$

Формула (34.11) представляє деформацію нескінченно малого елемента тіла як суперпозицію (накладання) двох деформацій: перша із них описується девіатором

$$\alpha_{ij}^{(\varepsilon)} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \cdot \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_0 \end{pmatrix}. \quad (34.13)$$

і характеризує спотворення (зміну) форми елемента без зміни його об'єму, а друга складова – кульовий тензор

$$\varepsilon_0 \cdot \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix} \quad (34.14)$$

характеризує рівномірний всесторонній розтяг або стиск цього елемента, тобто відображає деформацію зміни об'єму.

Якщо деформація тіла відбувається без зміни об'єму тіла, то перший інваріант тензора деформацій дорівнює нулю.

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0. \quad (34.15)$$

Це рівняння називається умовою нестисливості. Якщо виконується умова нестисливості (34.15), то тензор деформацій тотожно дорівнює девіатору деформацій.

В циліндричній системі координат тензор деформацій матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\alpha} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\alpha r} & \varepsilon_{\alpha\alpha} & \varepsilon_{\alpha z} \\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\alpha} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (34.16)$$

а диференціальні залежності компонентів деформації від компонентів переміщення виражаються формулами:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_r}{r}; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \varepsilon_{r\alpha} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{r} \right); \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right); \varepsilon_{\alpha z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (34.17)$$

§35. Тензор швидкостей деформацій

Розглянемо процес деформації із зміною часу. Деформація буде відбуватися з деякою швидкістю. В теорії деформацій порівнюються два стани – початковий (в момент часу t_0) і кінцевий (в момент часу t_1). В теорії швидкостей деформацій розглядається миттєвий стан в будь-який момент часу $t_0 \leq t \leq t_1$.

Середня швидкість переміщення будь-якої точки визначається величиною переміщення за одиницю часу, а миттєва швидкість v_i в напрямку координатної осі x_i дорівнює похідній від переміщення u_i по часу t :

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}. \quad (35.1)$$

Якщо деяка точка А деформованого тіла рухається в напрямку осі x_i зі швидкістю v_i , а точка А' цього ж тіла – в тому ж напрямку зі швидкістю v'_i і якщо $v_i \neq v'_i$, то за один і той же проміжок часу вони одержать різні переміщення. Відстань між ними зміниться, тобто виникне деформація, абсолютна величина якої буде характеризуватися різницею переміщень. Отже, за одиницю часу абсолютна деформація

може характеризуватися швидкостями переміщення точки в напрямку осей координат. Але величина переміщення не повністю характеризує деформацію тіла, так як деформація буде тим більшою, чим менше відстань між даними точками. Точно так же величина абсолютної швидкості переміщення v_i не може повністю характеризувати швидкість деформації тіла. Такою величиною являється відносна швидкість переміщення або швидкість деформації. Швидкістю лінійної деформації називається зміна відносної лінійної деформації за одиницю часу. Аналогічно кутовою швидкістю зсуву називається зміна початкового прямого кута за одиницю часу.

Позначимо швидкість деформації через ξ_{ij} . Врахувавши дане вище означення, можемо записати

$$\xi_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}. \quad (35.2)$$

Використавши формулу (34.6), одержимо

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)}{\partial x_j} + \frac{\partial \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)}{\partial x_i} \right].$$

З врахуванням формули (35.1), маємо

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (35.3)$$

Величини ξ_{ij} утворюють тензор швидкостей деформації, який має вигляд

$$(\xi_{ij}) = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \end{pmatrix}. \quad (35.4)$$

Діагональні компоненти тензора швидкостей деформацій представляють собою швидкості відносного видовження елементарних відрізків, які паралельні координатним осям.

Недіагональні компоненти тензора швидкостей деформацій представляють собою половину швидкостей зміни кутів між відрізками, які направлені до деформації по відповідним осям (половину швидкостей кутової деформації зсуву).

Порівняно з (35.4), для позначення тензора швидкостей деформацій іноді використовують інші позначення:

$$\begin{pmatrix} \xi_{xx} & \xi_{xy} & \xi_{xz} \\ \xi_{yx} & \xi_y & \xi_{yz} \\ \xi_{zx} & \xi_{zy} & \xi_{zz} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_{xx} & \frac{1}{2} \cdot \eta_{xy} & \frac{1}{2} \cdot \eta_{xz} \\ \frac{1}{2} \cdot \eta_{yx} & \xi_{yy} & \frac{1}{2} \cdot \eta_{yz} \\ \frac{1}{2} \cdot \eta_{zx} & \frac{1}{2} \cdot \eta_{zy} & \xi_{zz} \end{pmatrix}. \quad (35.5)$$

Тензор швидкостей деформації може бути представлений у вигляді суми девіатора і кульового тензора:

$$\xi_{ij} = d_{ij}^{(\xi)} + \xi_0 \cdot \delta_{ij}. \quad (35.6)$$

Величина $\xi_0 = \frac{\xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33}}{3}$ називається середньою швидкістю деформації. В випадку, коли деформація відбувається без зміни об'єму, $\xi_0 = 0$.

Формула (35.6) представляє швидкості деформації нескінченно малого елементу середовища як суперпозицію (накладання) двох деформацій: перша з них описується девіатором $d_{ij}^{(\xi)}$ і характеризує швидкість спотворення форми елемента без зміни його об'єму, тоді як друга складова (кульовий тензор $\xi_0 \cdot \delta_{ij}$) характеризує швидкість рівномірного всестороннього розтягу або стиску цього елемента.

В циліндричній системі координат залежності компонентів швидкостей деформації від компонентів швидкостей переміщення виражаються формулами:

$$\left. \begin{aligned}
 \xi_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}; \xi_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{v_r}{r}; \xi_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\
 \xi_{r\alpha} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \alpha} - \frac{v_\alpha}{r} \right); \\
 \xi_{rz} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right); \xi_{\alpha z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial z} \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (35.7)$$

ЛІТЕРАТУРА

ОСНОВНА

1. Разумова, М. А. Основи векторного і тензорного аналізу: навчальний посібник / М. А. Разумова, В. М. Хотяїнцев. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2011. – 216 с.
2. Лиман Ф.М. Основи векторного та тензорного аналізу: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів. – Суми: СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2005. – 84 с.
3. Валь О.Д., Королюк С.Л., Мельничук С.В. Основи векторного та тензорного аналізу: Навч. посібник.- Чернівці: "Книги XXI".- 2006.- 228 с.
4. Григорчак О.І., Самар М.І. Основи векторного і тензорного аналізу у задачах і прикладах: методичні вказівки. Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2022. 72 с.
5. Зражевський Г.М., Зражевська В.Ф. Прикладний векторний аналіз: навчальний посібник. Київ: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2023. 143 с.
6. Гребенюк С.М., Стреляєв Ю.М., Клименко М.І. Тензорний аналіз: навчальний посібник для студентів освітнього ступеня «бакалавр» напрямку підготовки «Математика». Запоріжжя: ЗНУ, 2015. 90 с.
7. М. Т. Сеньків, Векторний і тензорний аналіз. Львів: вид-во Львів. ун-ту, 1990, 148 с
8. Зіненко С.М. Векторний і тензорний аналіз.— Скалярні й векторні поля. Навчальний посібник. — Харків: ХНУ, 2014.
9. Грищак В. З., Гребенюк С. М. Тензорний аналіз і його застосування. - Запоріжжя : ЗНУ , 2016. - 134с.
10. Худа Ж.В. Основи векторного і тензорного аналізу. – ДДТУ, 2024. – 66с.

ДОПОМІЖНА

1. Векторний і тензорний аналіз.: методичні вказівки до розв'язування задач / Укл. Стецко М.М. – Львів: ЛНУ, 2011. – 12 с.
2. Наказной П.О. Тензорний аналіз. Збірник задач: навчальний посібник. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 35 с.
3. Григорчак О.І., Самар М.І. Основи векторного і тензорного аналізу у задачах і прикладах: методичні вказівки. Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2022. 72 с.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
ЧАСТИНА 1	6
Розділ 1. Векторна алгебра	6
§1. Скаляри і вектори	6
§2. Лінійні операції над векторами	8
§3. Лінійно залежні і лінійно незалежні вектори	11
§4. Базис на площині і в просторі.....	13
§5. Проекція векторів на вісь.....	15
§6. Прямокутна декартова система координат в просторі	16
§7. Скалярний добуток двох векторів	19
§8. Векторний добуток двох векторів	21
§9. Добуток трьох векторів	22
Розділ 2. Векторний аналіз.....	25
§10. Диференціювання векторних функцій скалярного аргументу	25
§11. Кривина і скрут	27
§12. Інтегрування векторних функцій скалярного аргументу	35
§13. Скалярні і векторні поля	36
ЧАСТИНА 2	38
Розділ 3. Поняття тензора.	38
§14. Скорочені індексні позначення	39
§15. Основний і взаємний базиси. Коваріантні і контраваріантні компоненти вектора.....	42
§16. Перетворення координат.....	46
§17. Залежність між коваріантними і контраваріантними компонентами вектора	49
§18. Означення тензора	52
§19. Метричний тензор. Коефіцієнти Ляме.....	59

Розділ 4. Тензорна алгебра.....	63
§20. Додавання (віднімання) тензорів.....	63
§21. Згортання тензорів.....	65
§22. Множення тензорів.....	66
§23. Перестановка індексів, симетрування і альтернування.....	71
§24. Підняття і опускання індексів.....	74
§25. Девіатор і кульовий тензор.....	76
§26. Головні напрямки і головні значення тензора. Характеристичне рівняння.....	77
§27. Тензорна поверхня.....	84
§28. Інваріанти тензора.....	87
Розділ 5. Тензорний аналіз.....	89
§29. Тензорне поле і його диференціювання в прямокутній декартовій системі координат.....	89
§30. Диференціювання векторного поля в криволінійних координатах. Символи Крістоффеля.....	93
§31. Диференціювання поля тензора другого рангу в криволінійних координатах.....	98
§32. Диференціальний оператор Гамільтона. Потенціальні і соленоїдальні поля. Теорема Остроградського-Гаусса.....	101
Розділ 6. Деякі застосування тензорів в механіці суцільних середовищ.....	105
§33. Тензор напружень.....	105
§34. Тензор деформацій.....	114
§35. Тензор швидкостей деформацій.....	125
ЛІТЕРАТУРА.....	129