

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**ФАКУЛЬТЕТ ПРОЕКТУВАННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИН
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ**

**КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ
ІНТЕГРАЛИ.
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ**

**Методичні вказівки та індивідуальні завдання
для студентів технічних спеціальностей**

**КІРОВОГРАД
2008**

Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Методичні вказівки та індивідуальні завдання / Укл.: В.І.Гуцул, І.І.Філімоніхіна – Кіровоград: КНТУ, 2008. – 100 с.

Методичні вказівки та індивідуальні завдання по вивченню розділів „Кратні інтеграли”, „Криволінійні інтеграли”, „Поверхневі інтеграли” та „Елементи теорії поля” курсу „Вища математика”. Призначені для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання. По кожній темі наведені основні теоретичні положення, розглянуті типові приклади та розроблені індивідуальні завдання, що дозволяє ефективно використовувати дану розробку при модульно-рейтинговій системі навчання.

Затверджено на засіданні
кафедри вищої
математики та фізики.
Протокол №7 від 21.02.2008 р.

© В.І.Гуцул, 2008
© І.І.Філімоніхіна, 2008

Зміст

Зміст	3
Організація навчального процесу за кредитно-модульною системою	5
I. Подвійні та потрійні інтеграли	7
§ 1.1. Означення та основні властивості подвійного інтеграла....	7
§ 1.2. Обчислення подвійного інтеграла в прямокутних координатах.....	9
§ 1.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Перехід до полярних координат.....	15
§ 1.4. Потрійний інтеграл та його обчислення в прямокутних координатах.....	17
§ 1.5. Заміна змінних у потрійному інтегралі. Перехід до циліндричних та сферичних координат.....	21
§ 1.6 Деякі застосування подвійного та потрійного інтегралів.....	24
II. Криволінійні та поверхневі інтеграли	28
§ 2.1. Криволінійні інтеграли першого роду.....	28
§ 2.2. Криволінійні інтеграли другого роду.....	31
§ 2.3 Формула Гріна. Незалежність криволінійного інтеграла від шляху інтегрування. Інтегрування повних диференціалів.....	35
§ 2.4. Деякі означення для поверхонь у просторі. Поверхневі інтеграли першого роду.....	39
§ 2.5 Поверхневі інтеграли другого роду.....	43
§ 2.6 Зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду. Формули Стокса й Остроградського.....	45
§ 2.7 Застосування криволінійних і поверхневих інтегралів до задач фізики та геометрії.....	50

III. Елементи теорії поля.....	53
§ 3.1 Деякі поняття теорії поля. Спеціальні поля.....	53
§ 3.2 Потік. Циркуляція	57
Індивідуальні завдання	61
Рекомендована література	95
Додатки.....	96

**Організація навчального процесу за
кредитно-модульною системою**

№ теми	Теми занять	Методичні вказівки	Індивідуальні завдання
1	2	3	4
Модуль 1. Подвійні та потрійні інтеграли			
1	Поняття подвійного інтеграла. Обчислення подвійного інтеграла у прямокутних координатах.	§ 1.1, 1.2	№ 1
2	Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах.	§ 1.3	№ 2
3	Поняття потрійного інтеграла. Обчислення потрійного інтеграла у прямокутних координатах.	§ 1.4	№ 3
4	Обчислення потрійного інтеграла в сферичних та циліндричних координатах.	§ 1.5	№ 4
5	Застосування кратних інтегралів до задач фізики та геометрії.	§ 1.6	№ 5, 6
Модуль 2. Криволінійні та поверхневі інтеграли			
1	Криволінійні інтеграли першого роду.	§ 2.1	№ 7
2	Криволінійні інтеграли другого роду.	§ 2.2	№ 8

1	2	3	4
3	Формула Гріна. Незалежність криволінійного інтеграла від шляху інтегрування. Інтегрування повних диференціалів.	§ 2.3	№ 9, 10
4	Поверхневі інтеграли першого роду.	§ 2.4	№ 11
5	Поверхневі інтеграли другого роду.	§ 2.5	№ 12
6	Формули Стокса й Остроградського. Застосування криволінійних і поверхневих інтегралів до задач фізики та геометрії.	§ 2.6, 2.7	№ 13
Модуль 3. Елементи теорії поля			
1	Основні поняття теорії поля.	§ 3.1	№ 14
2	Потенціальне та соленоїдальне поля.	§ 3.1	№ 15
3	Потік і циркуляція векторного поля (формули Стокса й Остроградського).	§ 3.2	№ 16

I. Подвійні та потрійні інтеграли

§ 1.1. Означення та основні властивості подвійного інтеграла

Подвійний інтеграл можна розглядати як узагальнення поняття визначеного інтеграла на випадок функції двох змінних.

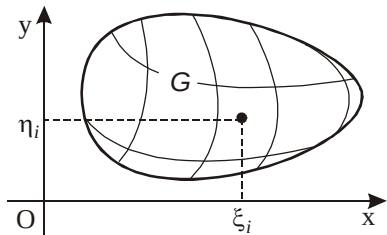


Рис. 1

Нехай задана функція двох змінних $z = f(x, y)$ і нехай G – деяка замкнена обмежена область, яка належить області визначення функції $f(x, y)$. Розіб'ємо область

G на n частин $G_1, G_2, \dots, G_n$ і позначимо їхні площі через $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ відповідно (рис. 1). У кожній частині G_i ($i = 1, 2, \dots, n$) деяким чином виберемо по одній точці (ξ_i, η_i) і складемо *інтегральну суму* функції $f(x, y)$ по області G , а саме

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (1.1)$$

Діаметром області будемо називати найбільшу відстань між точками границі цієї області. Нехай λ – найбільший з діаметрів частин G_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Якщо інтегральна сума (1.1) має границю при $\lambda \rightarrow 0$, то вказана границя називається *подвійним інтегралом* від функції $f(x, y)$ по області G і позначається одним із символів

$$\iint_G f(x, y) dx dy, \quad \iint_G f(x, y) dS,$$

де $f(x, y)$ – підінтегральна функція, G – область інтегрування, $dx dy$ (або dS) – елемент площі. Таким чином, у відповідності з означенням можемо записати

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (1.2)$$

Якщо границя інтегральної суми (1.1) існує, то функція $f(x, y)$ називається *інтегрованою* в області G . Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області G , то вона інтегрована у цій області.

Розглянемо тепер *геометричний зміст* подвійного інтеграла. Припустимо, що функція $z = f(x, y)$ неперервна і невід'ємна в області

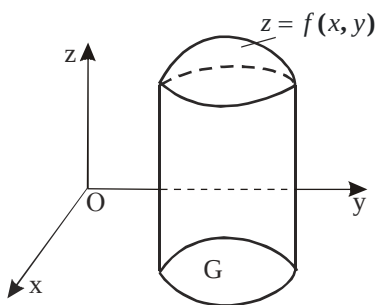


Рис. 2

G . У цьому випадку подвійний інтеграл від функції $f(x, y)$ по області G дорівнює об'єму тіла, яке обмежене наступним чином (рис.2): з боків – циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі Oz , а напрямною є границя області G ; знизу – областю G , яка лежить в площині Oxy ; зверху – поверхнею

$z = f(x, y)$. Вказане тіло називається *криволінійним циліндром*.

Наведемо коротко *основні властивості* визначеного інтеграла (вважаємо, що $f(x, y)$ і $g(x, y)$ – інтегровані функції, а k – стала).

1. Сталій множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\iint_G k f(x, y) dx dy = k \iint_G f(x, y) dx dy.$$

2. Інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів:

$$\iint_G (f(x, y) + g(x, y)) dx dy = \iint_G f(x, y) dx dy + \iint_G g(x, y) dx dy.$$

3. Якщо область G розбита на частини G_1 і G_2 , які не мають внутрішніх спільних точок, то

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy.$$

4. *Теорема про середнє*: якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій області G , то у цій області знайдеться така точка (ξ, η) , що

$$\iint_G f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) S,$$

де S – площа області G .

§ 1.2. Обчислення подвійного інтеграла у прямокутних координатах

Розглянемо спочатку *двократні інтеграли* від функції двох змінних:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

При обчисленні внутрішнього інтеграла $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ величина x

вважається сталою, а для інтеграла $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$ сталою вважається

величина y . Отже, обчислення двократного інтеграла зводиться до послідовного обчислення двох звичайних визначених інтегралів. Відмітимо, що межами інтегрування у внутрішньому інтегралі можуть бути функції або числа, а у зовнішньому – тільки числа.

Приклад 1. Обчислити двократний інтеграл $\int_0^1 dx \int_x^{x^2} (2x^2y + x) dy$.

Розв'язання. Послідовно обчислюємо внутрішній (y – змінна, x – стала) та зовнішній інтеграли:

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} (2x^2y + x) dy &= 2x^2 \int_x^{x^2} y dy + x \int_x^{x^2} dy = (x^2y^2 + xy) \Big|_x^{x^2} = \\ &= x^2x^4 + xx^2 - (x^2x^2 + xx) = x^6 + x^3 - x^4 - x^2; \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (x^6 + x^3 - x^4 - x^2) dx = \left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{59}{420}.$$

Подвійний інтеграл обчислюється за допомогою двократного.

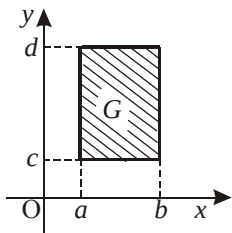


Рис. 3

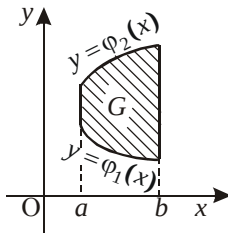


Рис. 4

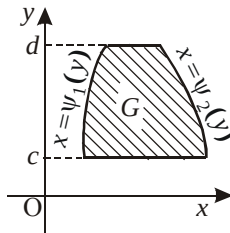


Рис. 5

Якщо областю інтегрування є прямокутник, сторони якого паралельні осям координат (рис. 3), то подвійний інтеграл обчислюється за однією із формул (за будь-якою):

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy, \quad (2.1)$$

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (2.2)$$

Як бачимо, межами інтегрування у цьому випадку є тільки числа.

Для області G , яка визначається співвідношеннями $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, $a \leq x \leq b$ (рис. 4), застосовується формула

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (2.3)$$

Звертаємо увагу на те, що крива $y = \varphi_1(x)$ обмежує область інтегрування знизу, а крива $y = \varphi_2(x)$ – зверху.

Якщо область G задається нерівностями $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, $c \leq y \leq d$ (рис. 5), то подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (2.4)$$

Відмітимо, що крива $x = \psi_1(y)$ обмежує область зліва, а крива $x = \psi_2(y)$ – справа.

Будь-який подвійний інтеграл можна обчислювати як за формулою (2.3), так і за формулою (2.4), але у багатьох випадках один з підходів є більш раціональним, ніж інший.

Приклад 2. Перейти від подвійного інтеграла $\iint_G f(x, y) dx dy$ до двократного (або суми двократних) при різних порядках інтегрування, якщо G – область, яка обмежена прямими $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$, $y = 0$ та кривою

$$x = \sqrt{y}.$$

Розв'язання. Розглянемо спочатку випадок, коли внутрішній інтеграл береться по змінній x , а зовнішній – по y (застосовується формула (2.4)). Будуємо область G (рис. 6). Для подальшого нам

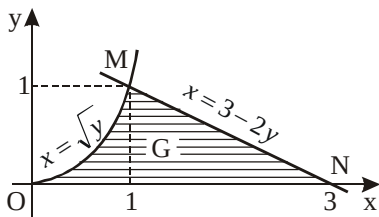


Рис. 6

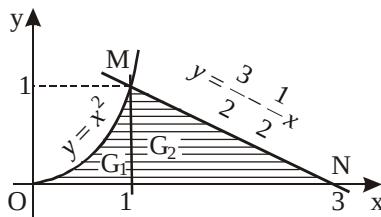


Рис. 7

знадобляться координати точок перетину M і N . Складемо системи

$$\begin{cases} x = 3 - 2y, \\ x = \sqrt{y}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 - 2y, \\ y = 0. \end{cases}$$

З першої системи визначаємо точку $M(1;1)$, а з другої – точку $N(3;0)$.

Можемо записати

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx.$$

Межі інтегрування визначаємо наступним чином: нижня межа у внутрішньому інтегралі задається кривою, яка обмежує область зліва, тобто напівпараболою $x = \sqrt{y}$; верхня межа у внутрішньому інтегралі – прямою, яка обмежує область справа, тобто прямою $x = 3 - 2y$ (розв'язали задане рівняння прямої відносно x); нижня межа у зовнішньому інтегралі – прямою, яка обмежує область знизу, тобто прямою $y = 0$ (або мінімальним значенням величини y по області G); верхня межа у зовнішньому інтегралі – ординатою точки M (або максимальним значенням величини y по області G).

Розглянемо тепер випадок, коли внутрішній інтеграл береться по змінній y , а зовнішній – по x . Для заданої області G безпосередньо застосувати формулу (2.3) неможливо, так як ця область обмежена зверху не однією, а двома лініями. Через точку M проведемо пряму, що паралельна осі Oy (рис. 7). Вказана пряма розбиває область G на дві частини G_1 і G_2 . Використовуючи властивості подвійного інтеграла, можемо записати

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}x} f(x, y) dy.$$

Межі інтегрування у першому двократному інтегралі (по області G_1) визначаємо наступним чином: нижня межа у внутрішньому інтегралі задається прямою, яка обмежує область знизу, тобто прямою $y = 0$; верхня межа у внутрішньому інтегралі – кривою, яка обмежує область зверху, тобто параболою $y = x^2$ (розв'язали задане рівняння кривої відносно y); нижня межа у зовнішньому інтегралі – абсцисою точки O (або мінімальним значенням величини x по області G_1); верхня межа у зовнішньому інтегралі – прямою, яка обмежує область справа, тобто прямою $x = 1$ (або максимальним значенням величини x по області G_1). Аналогічно визначаються межі інтегрування у другому інтегралі.

Очевидно, що для даної області G об'єм обчислень при застосуванні формули (2.4) буде меншим, ніж при застосуванні формули (2.3).

Приклад 3. Обчислити подвійні інтеграли:

а) $\iint_G 4x^3 \sin y dx dy, \quad G: x = 0, x = 1, y = 0, y = \pi;$

$$\text{б) } \iint_G (6x^2y + 4y^3) dx dy, \quad G: x=0, y=2-x, y=\sqrt{x}.$$

Розв'язання. а) Будуємо область інтегрування (рис. 8) та обчислюємо інтеграл за формулою (2.1):

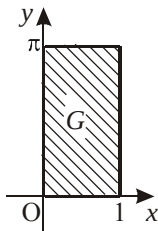


Рис. 8

$$\iint_G 4x^3 \sin y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^\pi 4x^3 \sin y dy;$$

$$\int_0^\pi 4x^3 \sin y dy = -4x^3 \cos y \Big|_0^\pi = -4x^3(-1-1) = 8x^3;$$

$$\int_0^1 8x^3 dx = 8 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = 2.$$

б) Будуємо область інтегрування (рис. 9) та знаходимо координати точки перетину прямої і параболи:

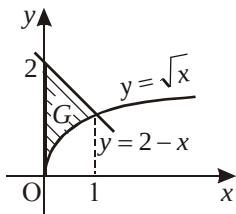


Рис. 9

$$\begin{cases} y=2-x, \\ y=\sqrt{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} y=2-x, \\ 2-x=\sqrt{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$$

За допомогою формули (2.3) перейдемо від подвійного до двократного інтеграла:

$$\iint_G (6x^2y + 4y^3) dx dy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x} (6x^2y + 4y^3) dy.$$

Обчислюємо, далі, внутрішній та зовнішній інтеграли:

$$\int_{\sqrt{x}}^{2-x} (6x^2y + 4y^3) dy = \left(6x^2 \cdot \frac{y^2}{2} + 4 \cdot \frac{y^4}{4} \right) \Big|_{\sqrt{x}}^{2-x} = 3x^2(2-x)^2 + (2-x)^4 -$$

$$-3x^2(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x})^4 = 11x^2 - 15x^3 + 3x^4 + (2-x)^4;$$

$$\int_0^1 (11x^2 - 15x^3 + 3x^4 + (2-x)^4) dx = \left(11 \cdot \frac{x^3}{3} - 15 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{(2-x)^5}{5} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{11}{3} - \frac{15}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5} + \frac{32}{5} = \frac{403}{60}.$$

§ 1.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Перехід до полярних координат

Нехай у подвійному інтегралі $\iint_G f(x, y) dx dy$ необхідно перейти від змінних x і y до змінних u і v , що пов'язані між собою співвідношеннями

$$x = x(u, v), y = y(u, v). \quad (3.1)$$

Припустимо, що на основі формул (3.1) однозначно визначаються функції

$$u = u(x, y), v = v(x, y). \quad (3.2)$$

Формули (3.1) називаються формулами *перетворення координат*, а формули (3.2) – формулами *оберненого перетворення*. Співвідношення (3.2) деякій точці $M(x, y)$ з площини Oxy ставлять у відповідність точку $M^*(u, v)$ на площині Ouv (u, v – прямокутні координати). Нехай обмеженій замкненій області G з площини Oxy відповідає обмежена замкнена область G^* на площині Ouv .

Припустимо, що функції (3.1) мають в області G^* неперервні частинні похідні першого порядку по змінним u і v . Складемо *функціональний визначник* (або *якобіан перетворення*)

$$J = \begin{vmatrix} x'_u(u, v) & x'_v(u, v) \\ y'_u(u, v) & y'_v(u, v) \end{vmatrix}. \quad (3.3)$$

Якщо виконуються всі зроблені вище припущення і в області G^* якобіан (3.3) відмінний від нуля, то перехід до нових змінних у подвійному інтегралі здійснюється за формулою

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv. \quad (3.4)$$

У якості прикладу розглянемо перехід від декартових до полярних координат. У цьому випадку, як відомо, співвідношення (3.1) мають вигляд

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (3.5)$$

Знайдемо якобіан

$$J = \begin{vmatrix} (\rho \cos \varphi)'_{\rho} & (\rho \cos \varphi)'_{\varphi} \\ (\rho \sin \varphi)'_{\rho} & (\rho \sin \varphi)'_{\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho.$$

Враховуючи, що $\rho \geq 0$, маємо $|J| = |\rho| = \rho$. На основі формули (3.4) отримаємо

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (3.6)$$

Укажемо, що переходити до полярних координат у подвійному інтегралі доцільно в тих випадках, коли підінтегральна функція та рівняння границі області інтегрування містять функціональні залежності від аргумента $x^2 + y^2$.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iint_G \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, де G –

половина кільця $1 \leq x^2 + y^2 \leq 16$, що розміщена вище осі Ox .

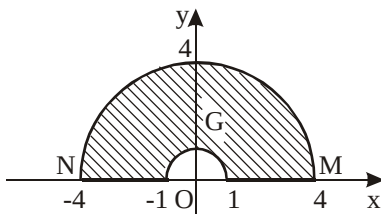


Рис. 10

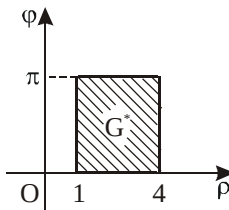


Рис. 11

Розв'язання. У даному прикладі зручно перейти до полярних координат. Область G обмежують два кола $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 16$ та вісь абсцис $y = 0$ (рис. 10). За допомогою формул (3.5) дістаємо рівняння границі області G у полярних координатах: $\rho = 1$, $\rho = 4$, $\varphi = 0$ (відрізок OM), $\varphi = \pi$ (відрізок ON). Отримані рівняння є рівняннями границі області G^* у прямокутній системі координат Орф (рис. 11). Застосувавши формулу (3.6), обчислюємо заданий інтеграл:

$$\begin{aligned} \iint_G \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_{G^*} \sqrt{(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2} \rho d\rho d\varphi = \iint_{G^*} \rho^2 d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_1^4 \rho^2 d\rho = \frac{1}{3} \int_0^\pi \left(\rho^3 \Big|_1^4 \right) d\varphi = 21\varphi \Big|_0^\pi = 21\pi. \end{aligned}$$

Відмітимо, що на практиці, як правило, область G^* не будують, а розставляють межі інтегрування, використовуючи область G та рівняння її границі у полярних координатах. Так, у попередньому прикладі по області G (рис. 10) легко бачити, що у внутрішньому інтегралі $1 \leq \rho \leq 4$, а у зовнішньому $0 \leq \varphi \leq \pi$.

§ 1.4. Потрійний інтеграл та його обчислення у прямокутних координатах

Аналогічно тому, як для функції двох змінних вводилося поняття подвійного інтеграла, для функції трьох змінних можна ввести поняття потрійного інтеграла.

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена в області V . Припустимо, що область V обмежена і замкнена, а функція $f(x, y, z)$ обмежена у цій області. Розділимо вказану область на n частин $V_1, V_2, \dots, V_n$ й

позначимо їхні об'єми через $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$ відповідно. У кожній частині V_i ($i=1, 2, \dots, n$) виберемо по одній точці $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Складемо суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i \quad (4.1)$$

Сума (4.1) називається *інтегральною сумою* функції $f(x, y, z)$ по області V . Нехай λ – найбільший із діаметрів частин V_i ($i=1, 2, \dots, n$).

Якщо існує границя інтегральної суми (4.1) при $\lambda \rightarrow 0$, то вона називається *потрійним інтегралом* від функції $f(x, y, z)$ по області V і позначається одним із символів

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz, \quad \iiint_V f(x, y, z) dv.$$

Основні властивості потрійного інтеграла повторюють властивості подвійного (з урахуванням того, що переходимо з двовимірного простору в тривимірний).

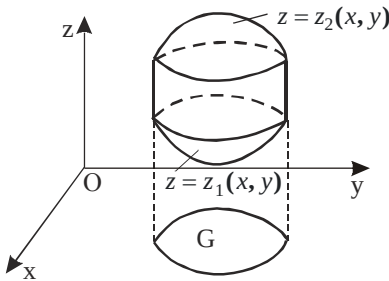


Рис. 12

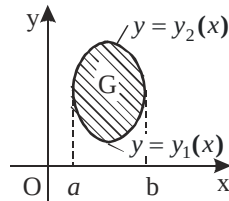


Рис. 13

Нехай область V (рис. 12) обмежена наступним чином: знизу – поверхнею $z = z_1(x, y)$, зверху – поверхнею $z = z_2(x, y)$, з боків – циліндричними поверхнями, твірні яких паралельні осі Oz (або площинами, що паралельні осі Oz) і нехай G – проекція області V на

площину Оху (рис. 13). Потрійний інтеграл для вказаної області інтегрування обчислюється за формулою

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_G dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz, \quad (4.2)$$

або у більш розгорнутому вигляді через *трикратний інтеграл*

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (4.3)$$

На практиці частіше використовується формула (4.3), у якій межі інтегрування у двох зовнішніх інтегралах (по змінним x і y) визначаються як межі інтегрування для подвійного інтеграла по області G . Аналогічно попередньому, при обчисленні внутрішніх інтегралів змінною вважається тільки та величина, яка стоїть під знаком диференціала.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iiint_V xyz dx dy dz$, якщо V – область, яка обмежена поверхнями $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$ та площинами $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

Розв'язання. Спочатку будемо область інтегрування V (рис. 14) та її проекцію на площину Оху (рис. 15).

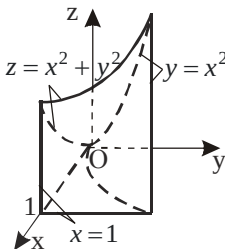


Рис. 14

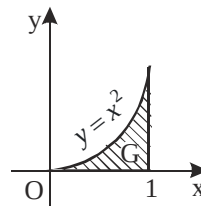


Рис. 15

Застосовуємо формулу (4.3) та розставляємо межі інтегрування:

$$\iiint_V xyz dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \int_0^{x^2+y^2} xyz dz.$$

Обчислюємо перший внутрішній інтеграл (z – змінна; x , y – сталі):

$$\int_0^{x^2+y^2} xyz dz = xy \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^{x^2+y^2} = \frac{1}{2} (x^5 y + 2x^3 y^3 + xy^5).$$

Обчислюємо другий внутрішній інтеграл (y – змінна; x – стала):

$$\int_0^{x^2} \frac{1}{2} (x^5 y + 2x^3 y^3 + xy^5) dy = \frac{x}{2} \left(\frac{x^4 y^2}{2} + \frac{x^2 y^4}{2} + \frac{y^6}{6} \right) \Big|_0^{x^2} = \frac{x^9}{4} + \frac{x^{11}}{4} + \frac{x^{13}}{12}.$$

Дістаємо кінцевий результат:

$$\int_0^1 \frac{1}{4} \left(x^9 + x^{11} + \frac{x^{13}}{3} \right) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{14}}{14} \right) \Big|_0^1 = \frac{87}{1680}.$$

При обчисленнях у трикратному інтегралі можливі й інші порядки інтегрування. Наприклад, можемо записати

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} dz \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy. \quad (4.3)$$

Якщо область V визначається співвідношеннями $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, $l \leq z \leq h$ (областю інтегрування є паралелепіпед, грані якого паралельні координатним площинам), то межами інтегрування у трикратному інтегралі будуть тільки числа, а саме

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_l^h f(x, y, z) dz. \quad (4.4)$$

§ 1.5. Заміна змінних у потрійному інтегралі. Перехід до циліндричних та сферичних координат

Припустимо, що функція $f(x, y, z)$ визначена і неперервна в замкненій обмеженій області V . Тоді існує потрійний інтеграл $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$. Крім того, нехай задані *формули перетворення*

координат

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w), \quad (5.1)$$

які однозначно визначають *формули оберненого перетворення*

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z). \quad (5.2)$$

Функції (5.2) кожній точці $M(x, y, z)$ з області V ставлять у відповідність деяку точку $M^*(u, v, w)$, а всій області V – область V^* у декартовій прямокутній системі координат $Ouvw$. Припустимо, що функції (5.1) неперервно диференційовані в області V^* і складемо якобіан

$$J = \begin{vmatrix} x'_u(u, v, w) & x'_v(u, v, w) & x'_w(u, v, w) \\ y'_u(u, v, w) & y'_v(u, v, w) & y'_w(u, v, w) \\ z'_u(u, v, w) & z'_v(u, v, w) & z'_w(u, v, w) \end{vmatrix}. \quad (5.3)$$

Якщо в області V^* функціональний визначник (5.3) відмінний від нуля, то перехід до нових змінних у потрійному інтегралі відбувається за формулою

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw. \quad (5.4)$$

Конкретизуємо формулу (5.4) для випадків переходу до циліндричних та сферичних координат, які часто використовуються при розв'язуванні технічних задач. Циліндричні координати ρ, φ, z

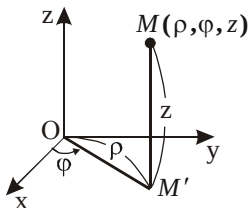


Рис. 16

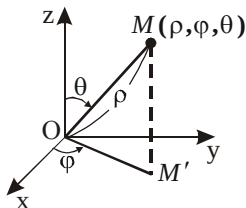


Рис. 17

та прямокутні x, y, z (рис. 16) пов'язані між собою наступними співвідношеннями

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad (5.5)$$

причому $0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < \infty$. Якобіан (5.3) та формула (5.4) приймають вигляд

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz. \quad (5.6)$$

Зв'язок між сферичними координатами ρ, φ, θ та прямокутними x, y, z (рис. 17) задається наступними формулами

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta, \quad (5.7)$$

причому $0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi$. Враховуючи, що $J = \rho^2 \sin \theta$, можемо записати

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{V^*} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Відмітимо, що переходити до циліндричних (сферичних) координат зручно у тих випадках, коли співвідношення, що описують

область інтегрування та підінтегральна функція представляються через аналітичні вирази від аргументів $x^2 + y^2, z$ (аргументу $x^2 + y^2 + z^2$).

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iiint_V z(x^2 + y^2) dx dy dz$, якщо V – область, яка обмежена циліндром $x^2 + y^2 = 4$, параболоїдом обертання

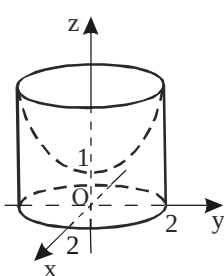


Рис. 18

$$z = 1 + x^2 + y^2 \text{ та площиною } z = 0.$$

Розв'язання. Будуємо область V (рис. 18). Перейдемо до циліндричних координат. За допомогою формул (5.5) запишемо рівняння границі області V в циліндричних координатах: $\rho = 2, z = 0, z = 1 + \rho^2$. На основі формули (5.6) дістанемо

$$\iiint_V z(x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint_{V^*} z \rho^2 \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 d\rho \int_0^{1+\rho^2} z \rho^3 dz.$$

Послідовно обчислюємо внутрішні та зовнішній інтеграли:

$$\int_0^{1+\rho^2} z \rho^3 dz = \rho^3 \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^{1+\rho^2} = \frac{1}{2} (\rho^3 + 2\rho^5 + \rho^7);$$

$$\int_0^2 \frac{1}{2} (\rho^3 + 2\rho^5 + \rho^7) d\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^6}{3} + \frac{\rho^8}{8} \right) \Big|_0^2 = \frac{86}{3};$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{86}{3} d\varphi = \frac{86}{3} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{172\pi}{3}.$$

§ 1.6 Деякі застосування подвійного та потрійного інтегралів

Нехай відомо, що неоднорідна пластина займає область G на площині Oxy і її густина у цій області розподілена по закону $\gamma = \gamma(x, y)$, причому функція $\gamma(x, y)$ неперервна в області G . З метою визначення маси пластини розіб'ємо її на n малих частин $G_1, G_2, \dots, G_n$, площі яких позначимо через $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ відповідно. У кожній частині G_i ($i=1, 2, \dots, n$) фіксуємо по одній точці (ξ_i, η_i) і наближено обчислюємо масу m_i однієї частини як масу однорідної пластини з густиною $\gamma(\xi_i, \eta_i)$, тобто $m_i \approx \gamma(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i$. Маса всієї пластини обчислюється за наближеною формулою

$$m \approx \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i. \quad (6.1)$$

Очевидно, що при зменшенні розмірів частин G_i ($i=1, 2, \dots, n$) точність формули (6.1) збільшується. Нехай λ – найбільший з діаметрів частин G_i ($i=1, 2, \dots, n$). Легко бачити, що права частина останнього співвідношення представляє собою інтегральну суму функції $\gamma(x, y)$ по області G . Здійснивши граничний перехід у рівності (6.1) при $\lambda \rightarrow 0$, отримаємо точну формулу для обчислення маси плоскої пластини

$$m = \iint_G \gamma(x, y) dx dy. \quad (6.2)$$

Окрім маси пластини, багато інших фізичних та геометричних характеристик виражаються через подвійні інтеграли. Основні формули представлені в наступній таблиці ($\gamma(x, y)$ – густина).

Таблиця 1. Застосування подвійного інтеграла для обчислення деяких фізичних та геометричних величин

Назва величини	Формула для обчислення
Площа плоскої області G	$S = \iint_G dx dy$
Об'єм криволінійного циліндра (рис. 2)	$V = \iint_G f(x, y) dx dy$
Площа поверхні (рис. 2)	$S = \iint_G \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy$
Маса пластини	$m = \iint_G \gamma(x, y) dx dy$
Статичний момент пластини відносно осі Oх	$M_x = \iint_G y \gamma(x, y) dx dy$
Статичний момент пластини відносно осі Oу	$M_y = \iint_G x \gamma(x, y) dx dy$
Центр ваги пластини	$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_G x \gamma(x, y) dx dy,$ $\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_G y \gamma(x, y) dx dy$
Момент інерції пластини відносно осі Oх	$I_x = \iint_G y^2 \gamma(x, y) dx dy$
Момент інерції пластини відносно осі Oу	$I_y = \iint_G x^2 \gamma(x, y) dx dy$
Момент інерції пластини відносно початку координат	$I_0 = \iint_G (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dx dy$

В наступній таблиці наведені формули, які виражають фізичні та геометричні величини через потрібні інтеграли ($\gamma(x, y, z)$ – густина).

Таблиця 2. Застосування потрійного інтеграла для обчислення деяких фізичних та геометричних величин

Назва величини	Формула для обчислення
Об'єм області T	$V = \iiint_T dx dy dz$
Маса тіла	$m = \iiint_T \gamma(x, y, z) dx dy dz$
Статичний момент тіла відносно площини Oxy	$M_{xy} = \iiint_T z \gamma(x, y, z) dx dy dz$
Статичний момент тіла відносно площини Oxz	$M_{xz} = \iiint_T y \gamma(x, y, z) dx dy dz$
Статичний момент тіла відносно площини Oyz	$M_{yz} = \iiint_T x \gamma(x, y, z) dx dy dz$
Центр ваги тіла	$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{1}{m} \iiint_T x \gamma(x, y, z) dx dy dz,$ $\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{1}{m} \iiint_T y \gamma(x, y, z) dx dy dz,$ $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{1}{m} \iiint_T z \gamma(x, y, z) dx dy dz$
Момент інерції тіла відносно осі Ox	$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz$
Момент інерції тіла відносно осі Oy	$I_y = \iiint_T (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz$
Момент інерції тіла відносно осі Oz	$I_z = \iiint_T (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz$
Момент інерції тіла відносно початку координат	$I_0 = \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz$

Приклад 1. Пластина обмежена лініями $y = x^2, y = x + 2$. Обчислити масу цієї пластини, якщо її густина розподілена по закону $\gamma = 2x^2y$.

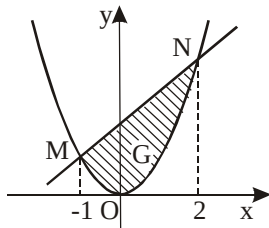


Рис. 19

Розв'язання. Будуємо область G , яку займає пластина (рис. 19) та визначаємо точки перетину $M(-1;1)$ і $N(2;4)$. Обчислюємо масу за допомогою формули (6.2):

$$m = \iint_G 2x^2 y dx dy = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} 2x^2 y dy;$$

$$\int_{x^2}^{x+2} 2x^2 y dy = x^2 y^2 \Big|_{x^2}^{x+2} = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^6;$$

$$m = \int_{-1}^2 (x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^6) dx = \left(\frac{x^5}{5} + x^4 + \frac{4x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{531}{35} \approx 15,2.$$

Приклад 2. Знайти центр ваги однорідного тіла, яке обмежене конічною поверхнею $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ та площиною $z = 1$.

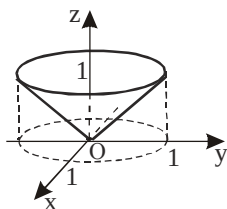


Рис. 20

Розв'язання. Будуємо область T , яку займає тіло у просторі (рис. 20). Позначимо сталу густину через γ_0 . Обчислюємо координати центра ваги за наведеними вище формулами (табл. 2). Так як тіло однорідне і симетричне, то очевидно, що його центр знаходиться на осі Oz ,

тобто $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Обчислюємо спочатку масу m (переходимо до циліндричних координат):

$$m = \iiint_T \gamma_0 dx dy dz = \gamma_0 \iiint_{T^*} \rho d\varphi d\rho dz = \gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_0^1 \rho dz = \frac{\gamma_0 \pi}{3}.$$

Обчислюємо статичний момент M_{xy} (переходимо до циліндричних координат):

$$M_{xy} = \iiint_T \gamma_0 x dx dy dz = \gamma_0 \iiint_{T^*} z \rho d\varphi d\rho dz = \gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_0^1 z \rho dz = \frac{\gamma_0 \pi}{4}.$$

Визначаємо аплікату центра ваги: $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\gamma_0 \pi}{4} \cdot \frac{3}{\gamma_0 \pi} = \frac{3}{4} = 0,75$.

Таким чином, центр ваги заданого тіла знаходиться в точці $(0;0;0,75)$.

II. Криволінійні інтеграли

§ 2.1. Криволінійні інтеграли першого роду

Нехай на площині Oxy задана дуга AB кривої K , рівняння якої мають вигляд $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Припустимо, що крива AB гладка, тобто на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції $x(t)$, $y(t)$ неперервні і мають неперервні похідні $x'(t)$, $y'(t)$, причому дві останні не дорівнюють нулю одночасно. Нехай функція $f(x, y)$ визначена і неперервна на кривій AB .

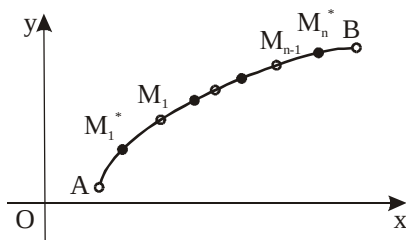


Рис. 21

Розіб'ємо дугу AB довільно на n частин точками поділу $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$ (рис. 21). На кожній дузі $M_{i-1}M_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) виберемо довільно

по одній точці $M_i^*(\xi_i, \eta_i)$. Довжини частин $M_{i-1}M_i$ ($i=1,2,\dots,n$) позначимо через Δl_i , а найбільшу з них – через λ . Складемо суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i. \quad (1.1)$$

Сума (1.1) називається *інтегральною сумою* для функції $f(x, y)$ по кривій АВ.

Якщо інтегральна сума (1.1) має границю при $\lambda \rightarrow 0$, то ця границя називається *криволінійним інтегралом першого роду* (або *криволінійним інтегралом по довжині дуги*) від функції $f(x, y)$ по кривій АВ і позначається символом $\int_{AB} f(x, y) dl$ (або $\int_K f(x, y) dl$). Дуга АВ називається *контуром інтегрування*, точки А і В – відповідно *початковою* і *кінцевою точками* інтегрування.

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду зводиться до обчислення звичайного визначеного інтеграла. При виконанні накладених вище умов справедлива формула

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \quad (1.2)$$

де $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ – *диференціал дуги* заданої кривої. Якщо контур інтегрування заданий рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, то криволінійний інтеграл першого роду обчислюється за формулою

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (1.3)$$

У випадку, коли дуга АВ задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ в *полярних координатах*, застосовується формула

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{(\rho')^2 + (\rho'')^2} d\varphi. \quad (1.4)$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_{AB} \sqrt{x+1} y dl$, якщо AB – дуга

кривої: а) $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$; б) $y = 2\sqrt{x}, 1 \leq x \leq 2$,

в) $\rho = \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$.

Розв'язання. а) Так як контур інтегрування заданий параметричними рівняннями, то застосовуємо формулу (1.2). Знаходимо диференціал дуги dl та обчислюємо інтеграл:

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = dt; \\ \int_{AB} \sqrt{x+1} y dl &= \int_0^{\pi} \sqrt{\cos t + 1} \sin t dt = - \int_0^{\pi} (\cos t + 1)^{0.5} d(\cos t + 1) = \\ &= -\frac{2}{3} (\cos t + 1)^{1.5} \Big|_0^{\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

б) Обчислюємо інтеграл за допомогою формули (1.3):

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} dx = \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx; \\ \int_{AB} \sqrt{x+1} y dl &= \int_1^2 \sqrt{x+1} \cdot 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx = 2 \int_1^2 (x+1) dx = (x+1)^2 \Big|_1^2 = 5. \end{aligned}$$

в) Застосовуємо формулу (1.4):

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(\rho')^2 + (\rho'')^2} d\varphi = \sqrt{\cos^2 \varphi + (-\sin \varphi)^2} d\varphi = d\varphi; \\ \int_{AB} \sqrt{x+1} y dl &= \int_0^{\pi} \sqrt{\cos \varphi \cdot \cos \varphi + 1} \cos \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \sqrt{\cos 2\varphi + 3} \sin 2\varphi = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{\pi} (3 + \cos 2\varphi)^{0,5} d(3 + \cos 2\varphi) = 0.$$

Так як обчислення криволінійного інтеграла першого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла, то основні властивості останнього переносяться на перший. Відмітимо лише, що вказаний криволінійний інтеграл не змінює свого значення при зміні напрямку інтегрування, тобто

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl. \quad (1.5)$$

Властивість (1.5) впливає безпосередньо з означення (інтегральна сума (1.1) не залежить від того, яку точку вважати початковою, а яку – кінцевою).

Аналогічно попередньому вводиться криволінійний інтеграл для функції $f(x, y, z)$ по просторовій кривій $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (1.6)$$

§ 2.2. Криволінійні інтеграли другого роду

Нехай на площині Oxy задана гладка крива AB , на якій, в свою чергу, задані дві неперервні обмежені функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$. Розіб'ємо дугу AB довільно на n частин точками поділу $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$ (рис. 21). На кожній дузі $M_{i-1}M_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) виберемо довільно по одній точці $M_i^*(\xi_i, \eta_i)$. Проекції вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) на координатні осі Ox , Oy позначимо відповідно

через $\Delta x_i, \Delta y_i$ (рис. 22), тобто $\Delta x_i = \pm |\overline{M'_{i-1}M'_i}|$, $\Delta y_i = \pm |\overline{M''_{i-1}M''_i}|$

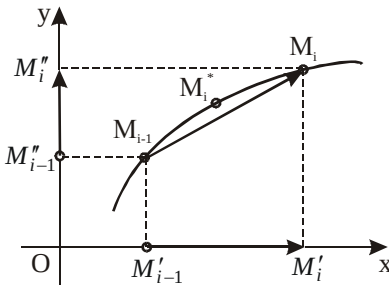


Рис. 22

(якщо напрямки вектора $\overline{M'_{i-1}M'_i}$ (вектора $\overline{M''_{i-1}M''_i}$) і осі Ox (осі Oy) однакові, то береться знак плюс, а якщо протилежні, то – мінус). Найбільшу довжину частин $M_{i-1}M_i$ ($i=1,2,\dots,n$) позначимо через λ .

Складемо інтегральні суми

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i, \quad \sigma_2 = \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i. \quad (2.1)$$

Якщо існує границя інтегральної суми σ_1 при $\lambda \rightarrow 0$, то вона називається *криволінійним інтегралом другого роду* від функції $P(x, y)$ по кривій AB і позначається символом $\int_{AB} P(x, y) dx$ (або

$\int_K P(x, y) dx$). Аналогічно попередньому визначається криволінійний

інтеграл $\int_{AB} Q(x, y) dy$. Сума $\int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy$ називається

загальним криволінійним інтегралом другого роду і позначається символом $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$.

Якщо поміняти місцями початкову і кінцеву точки інтегрування, то множники Δx_i і Δy_i в інтегральних сумах (2.1) поміняють свій знак на протилежний, а тому при зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл другого роду змінює свій знак на

протилежний, тобто

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (2.2)$$

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла. Нехай крива АВ задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ або $\beta \leq t \leq \alpha$, причому точці А відповідає $t = \alpha$, а точці В – $t = \beta$. У цьому випадку криволінійні інтеграли другого роду обчислюються за формулами

$$\int_{AB} P(x, y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))x'(t)dt, \quad \int_{AB} Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t))y'(t)dt, \quad (2.3)$$

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt. \quad (2.4)$$

Якщо контур інтегрування АВ задається рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$ або $b \leq x \leq a$, причому абсциси точок А і В відповідно дорівнюють a і b , то справедливі формули

$$\int_{AB} P(x, y)dx = \int_a^b P(x, y(x))dx, \quad \int_{AB} Q(x, y)dy = \int_a^b Q(x, y(x))y'(x)dx, \quad (2.5)$$

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x))dx. \quad (2.6)$$

Інколи контур інтегрування АВ визначається співвідношеннями $x = x(y)$, $c \leq y \leq d$ або $d \leq y \leq c$. Якщо ординати точок А і В відповідно дорівнюють c і d , то криволінійний інтеграл обчислюється за формулами

$$\int_{AB} P(x, y)dx = \int_c^d P(x(y), y)x'(y)dy, \quad \int_{AB} Q(x, y)dy = \int_c^d Q(x(y), y)dy, \quad (2.7)$$

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_c^d (P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y))dy. \quad (2.8)$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_{AB} xydx + x^2dy$, якщо АВ – дуга

кривої: а) $y = x^2$ від точки А(1;1) до точки В(2;4); б) $x = 2t, y = t^3$ від точки А(6;27) до точки В(2;1).

Розв'язання. а) Так як контур інтегрування заданий у формі $y = y(x)$, то застосовуємо формулу (2.6). Отримаємо

$$\int_{AB} xydx + x^2dy = \int_1^2 (x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)dx = 3 \int_1^2 x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_1^2 = \frac{45}{4}.$$

б) Крива АВ задана параметричними рівняннями. Очевидно, що точці А відповідає $t = 3$, а точці В – $t = 1$. За допомогою формули (2.4) отримаємо

$$\int_{AB} xydx + x^2dy = \int_3^1 (2t \cdot t^3 \cdot 2 + (2t)^2 \cdot 3t^2)dt = 16 \int_3^1 t^4 dt = \frac{16}{5} t^5 \Big|_3^1 = -\frac{3872}{5}.$$

Між криволінійними інтегралами першого та другого роду існує простий зв'язок, а саме

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB} (P(x, y)\cos \alpha + Q(x, y)\cos \beta)dl, \quad (2.9)$$

де $\cos \alpha, \cos \beta$ – напрямні косинуси вектора, який напрямлений по дотичній до кривої АВ і відповідає руху точки від А до В.

Аналогічно попередньому визначається криволінійний інтеграл для трійки функцій $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ по просторовій кривій $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ або $\beta \leq t \leq \alpha$:

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t)))x'(t) + \\ + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt.$$

§ 2.3 Формула Гріна. Незалежність криволінійного інтеграла від шляху інтегрування. Інтегрування повних диференціалів

Формула Гріна пов'язує між собою криволінійні та подвійні інтеграли. Нехай на площині задана замкнена область G , яка обмежена контуром L . Додатнім напрямом обходу контуру L будемо вважати напрям, при якому область G залишається зліва. Для інтеграла по замкнутому контуру L , який пробігається у додатному напрямку, прийняте позначення $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Якщо функції

$P(x, y), Q(x, y)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні

$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ в області G , то справедлива *формула Гріна*

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3.1)$$

Приклад 1. Використовуючи формулу Гріна, обчислити

криволінійний інтеграл $\oint_L (4y + x^2)dx + (6x - y^3)dy$,

якщо L – контур трикутника з вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;2)$.

Розв'язання. Для заданого інтеграла маємо

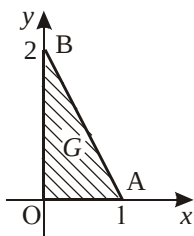


Рис. 23

$$P(x, y) = 4y + x^2, Q(x, y) = 6x - y^3; \frac{\partial Q}{\partial x} = 6, \frac{\partial P}{\partial y} = 4.$$

Застосувавши формулу (3.1), дістаємо

$$\oint_L (4y + x^2)dx + (6x - y^3)dy = \iint_G (6 - 4)dx dy = 2 \iint_G dx dy = 2S_{\Delta OAB} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Тут враховано, що останній подвійний інтеграл дорівнює площі області G , тобто площі трикутника OAB .

Нехай функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ визначені і неперервні в області G і нехай $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ – довільні точки вказаної області. Позначимо через $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$ множину всіх можливих шляхів в області G від точки M_1 до точки M_2 . Якщо виконуються рівності

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy = \dots = \int_{L_n} Pdx + Qdy = \dots,$$

то кажуть, що криволінійний інтеграл *не залежить від шляху інтегрування*. Очевидно, що для вказаного інтеграла суттєвим є лише положення точок M_1 і M_2 , а тому для нього інколи використовується

позначення $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} Pdx + Qdy$. Для того щоб криволінійний інтеграл

$\int_L Pdx + Qdy$ не залежав від шляху інтегрування, необхідно і достатньо,

щоб у всій області G виконувалася наступна рівність

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}. \quad (3.2)$$

Якщо для даного інтеграла умова (3.2) виконується, то контур інтегрування можна вибирати самостійно. Найбільш раціональним є шлях, який складається з двох відрізків, що паралельні осям

координат.

Приклад 2. Показати, що інтеграл $\int_L \frac{1}{3}xy^3dx + \frac{1}{2}x^2y^2dy$ не залежить від шляху інтегрування та обчислити його, якщо точки (1;1), (2;3) – відповідно початок і кінець контуру інтегрування L.

Розв'язання. Перевіряємо виконання умови (3.2):

$$P(x,y) = \frac{1}{3}xy^3, Q(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2; \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = xy^2, \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = xy^2.$$

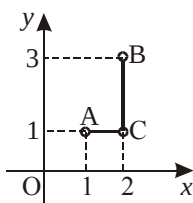


Рис. 24

Умова незалежності інтеграла від шляху інтегрування виконується. В якості контура інтегрування L візьмемо ламану ACB (рис. 24). Потрібні нам відрізки визначаються наступними співвідношеннями:

AC: $y=1, dy=0; 1 \leq x \leq 2$; CB: $x=2, dx=0; 1 \leq y \leq 3$.

Маємо

$$\begin{aligned} \int_L \frac{1}{3}xy^3dx + \frac{1}{2}x^2y^2dy &= \int_{AC} + \int_{CB} = \\ &= \int_1^2 \frac{1}{3}x \cdot 1^3 dx + \int_1^3 \frac{1}{2} \cdot 2^2 y^2 dy = \frac{1}{6}x^2 \Big|_1^2 + \frac{2}{3}y^3 \Big|_1^3 = \frac{107}{6}. \end{aligned}$$

Звертаємо увагу на те, що в інтегралі по AC пропадає другий доданок (т.я. $dy=0$), а в інтегралі по CB – перший (т.я. $dx=0$).

Нагадаємо, що якщо функція $U(x,y)$ диференційована в області G, то її повний диференціал у цій області визначається наступним чином

$$dU(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} dy. \quad (3.3)$$

Нехай вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом функції $U(x, y)$. Припустимо, що в області G функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $U(x, y)$ неперервні і для них існують неперервні частинні похідні $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$. В силу єдиності диференціалу в області G повинні виконуватися рівності

$$P(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}.$$

Продиференціювавши першу з них по y , а другу – по x , маємо

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

Враховуючи, що другі змішані похідні рівні між собою, отримаємо рівність (3.2). Легко показати, що умова (3.2) є не лише необхідною, але і достатньою для того, щоб вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ був повним диференціалом функції $U(x, y)$.

Якщо в області G задано диференціал функції

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

то сама функція $U(x, y)$ визначається за допомогою наступної формули (криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування)

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C, \quad (3.4)$$

де (x_0, y_0) , (x, y) – відповідно фіксована та довільна точки області G ; C – довільна стала. Взявши в якості контуру інтегрування відрізки, що паралельні осям координат, дістаємо

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C. \quad (3.5)$$

При інтегруванні по змінній y (у другому інтегралі) вважаємо, що величина x є сталою.

Приклад. 3 Знайти функцію $U(x, y)$, якщо

$$dU(x, y) = (2x + y^3)dx + 3xy^2 dy.$$

Розв'язання. Застосуємо формулу (3.5). В якості фіксованої точки (x_0, y_0) візьмемо точку $(0, 0)$. Маємо

$$U(x, y) = \int_0^x (2x + 0^3) dx + \int_0^y 3xy^2 dy + C = x^2 \Big|_0^x + xy^3 \Big|_0^y + C = x^2 + xy^3 + C.$$

Відмітимо, що якщо вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом функції $U(x, y)$ в області G , а замкнена крива L повністю належить вказаній області, то

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (3.6)$$

Тотожна рівність (3.6) випливає з формули Гріна (3.1) та умови (3.2).

§ 2.4. Деякі означення для поверхонь у просторі.

Поверхневі інтеграли першого роду

Поверхня називається *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична площина і при переході від точки до точки положення цієї дотичної площини змінюється неперервно.

Розглянемо гладку поверхню S , яка містить точку M і обмежена гладким або кусково-гладким контуром L (рис. 25). В точці M проведемо нормаль $\vec{n}$ з визначеним напрямом (можливі два

протилежні напрями). Крім того, побудуємо замкнений контур K , який проходить через точку M і не перетинає границі поверхні S . Заставимо

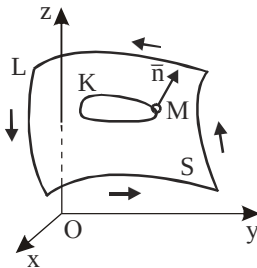


Рис. 25

точку M разом з нормаллю $\vec{n}$ обійти контур K і повернутися в початкове положення. Тут мається на увазі, що при переході від точки до точки напрям нормалі змінюється неперервно. Якщо після обходу точкою M будь-якого контуру K напрям нормалі не змінюється, то поверхня S називається *двосторонньою* (або *орієнтовною*). Якщо ж

існує контур, після обходу якого напрям нормалі змінюється на протилежний, то поверхня S називається *односторонньою* (або *неорієнтовною*). Надалі будемо розглядати лише двосторонні поверхні.

Легко бачити, що вибір напрямку нормалі у одній точці однозначно визначає напрям нормалі у всіх інших точках поверхні. Множина всіх точок поверхні у сукупності з вибраним напрямом нормалі в них називається *стороною поверхні*. Поверхня, для якої вибрана певна сторона, називається *орієнтованою*. *Верхньою* (*нижньою*) стороною поверхні $z = f(x, y)$ будемо називати ту її сторону, нормалі до якої утворюють гострий (тупий) кут з віссю Oz .

Нехай задана орієнтована поверхня S , яка обмежена контуром L (рис. 25). Напрямок обходу контуру L називається *додатним*, якщо для спостерігача, який знаходиться зі сторони нормалі, обхід відбувається проти руху годинникової стрілки. Протилежний напрям обходу називається *від'ємним*. Очевидно, що при переході з однієї сторони поверхні на іншу додатний напрям обходу змінюється.

Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена і неперервна на гладкій обмеженій поверхні S . Розіб'ємо вказану поверхню на n частин $S_1, S_2, \dots, S_n$, площі яких відповідно позначимо через $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. На кожній частині S_i ($i=1, 2, \dots, n$) довільно виберемо по одні точки $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і складемо *інтегральну суму*

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i. \quad (4.1)$$

Найбільший з діаметрів частин S_i ($i=1, 2, \dots, n$) позначимо через λ . Якщо існує границя інтегральної суми (4.1) при $\lambda \rightarrow 0$, то вона називається *поверхневим інтегралом першого роду* від функції $f(x, y, z)$ по поверхні S і позначається символом $\iint_S f(x, y, z) dS$. В цьому випадку функція $f(x, y, z)$ називається *інтегрованою по поверхні* S , S – областю інтегрування. Таким чином, у відповідності з означенням

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i. \quad (4.2)$$

Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в точках поверхні S , то вона інтегрована по цій поверхні.

Основні властивості поверхневого інтегралу першого роду по суті повторюють властивості подвійного інтегралу. Відмітимо лише, що вказаний інтеграл не залежить від орієнтації поверхні S .

Обчислення поверхневого інтегралу першого роду зводиться до обчислення подвійного інтегралу. Нехай поверхня S задана рівнянням $z = z(x, y)$ і нехай проекцією поверхні S на площину Oxy є замкнена область G . Припустимо, що функція $z(x, y)$ та її частинні похідні

$z'_x(x, y), z'_y(x, y)$ неперервні в області G , а функція $f(x, y, z)$ неперервна на поверхні S . При виконанні вказаних умов справедлива формула

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x(x, y))^2 + (z'_y(x, y))^2} dx dy. \quad (4.3)$$

Іноколи поверхню S зручно проектувати не на площину Oxy , а на іншу координатну площину. Наприклад, якщо поверхня S задана рівнянням $x = x(y, z)$, а її проекцією на площину Oyz є замкнена область D , то

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + (x'_y(y, z))^2 + (x'_z(y, z))^2} dy dz. \quad (4.4)$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iint_S xyz dS$, де S – частина площини $z = 2 - 2x$, яка обмежена площинами $x = 0, y = 0, z = 0, y = 3$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (4.3). Побудуємо спочатку поверхню S (рис.26) та її проекцію на площину Oxy (рис. 27).

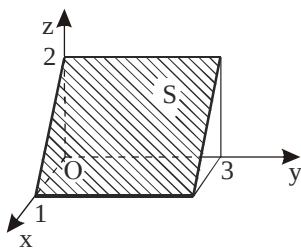


Рис. 26

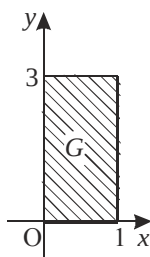


Рис. 27

Використовуючи рівняння поверхні S , знаходимо потрібні нам частинні похідні: $z(x, y) = 2 - 2x$; $z'_x(x, y) = -2$, $z'_y(x, y) = 0$.

Обчислюємо інтеграл:

$$\iint_S xyz dS = \iint_G xy(2 - 2x) \sqrt{1 + (-2)^2 + 0^2} dx dy = 2\sqrt{5} \iint_G xy(1 - x) dx dy =$$

$$= 2\sqrt{5} \int_0^1 dx \int_0^3 xy(1-x)dy = 2\sqrt{5} \int_0^1 \left(x(1-x) \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^3 \right) dx = 9\sqrt{5} \int_0^1 (x-x^2)dx = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

§ 2.5 Поверхневі інтеграли другого роду

Нехай гладка обмежена поверхня S задана рівнянням $z = z(x, y)$, а її проекцією на площину Oxy є замкнена область G . Крім того, нехай задана функція $R(x, y, z)$, яка визначена і неперервна в точках поверхні S . Виберемо верхню сторону вказаної поверхні, тобто ту її сторону, нормалі до якої утворюють гострий кут з віссю Oz . Розіб'ємо поверхню S на n частин $S_1, S_2, \dots, S_n$. Проекцію частини S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) на площину Oxy позначимо через G_i , а площу останньої – через Δs_i . В кожній частині S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) довільно виберемо по одній точці $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і складемо *інтегральну суму*

$$\sigma = \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i. \quad (5.1)$$

Найбільший з діаметрів частин $S_1, S_2, \dots, S_n$ позначимо через λ .

Якщо існує границя інтегральної суми (5.1) при $\lambda \rightarrow 0$, то вона називається *поверхневим інтегралом другого роду* від функції $R(x, y, z)$ по вибраній стороні поверхні S і позначається символом $\iint_S R(x, y, z) dx dy$. У цьому випадку функція $R(x, y, z)$ називається

інтегрованою по поверхні S по змінним x і y .

Аналогічно попередньому визначаються наступні поверхневі інтеграли другого роду (для першого з них поверхня S проектується

на площину Oyz, а для другого – на площину Oxz):

$$\iint_S P(x, y, z) dydz, \quad \iint_S Q(x, y, z) dzdx.$$

Суму

$$\iint_S P(x, y, z) dydz + \iint_S Q(x, y, z) dzdx + \iint_S R(x, y, z) dxdy$$

називають *загальним поверхневим інтегралом другого роду* і позначають символом

$$\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy.$$

Обчислення поверхневого інтегралу другого роду зводиться до обчислення подвійного інтегралу. Справедливі наступні формули:

$$\iint_S R(x, y, z) dxdy = \iint_{G_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dxdy, \quad (5.2)$$

$$\iint_S P(x, y, z) dydz = \iint_{G_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz, \quad (5.3)$$

$$\iint_S Q(x, y, z) dzdx = \iint_{G_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dzdx, \quad (5.4)$$

де $z = z(x, y)$, $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ – рівняння поверхні S ; G_{xy} , G_{yz} , G_{xz} – проекції поверхні S на площини Oxy , Oyz , Oxz відповідно.

Підкреслимо, що формули (5.2) – (5.4) записані для верхньої сторони поверхні S . Якщо вибирається нижня сторона, то у правій частині перед подвійним інтегралом з'являється знак мінус.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iint_S 12x^2 z dxdy$, де S – верхня

сторона частини поверхні $z = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$, яка обмежена площинами

$$x=0, y=0, x=1, y=1.$$

Розв'язання. Побудувавши поверхню S (рис. 28) та її проєкцію на

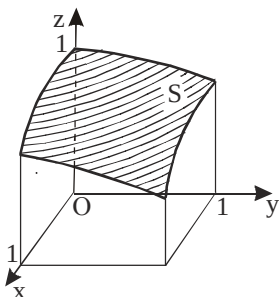


Рис. 28

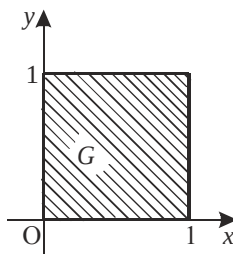


Рис. 29

площину Oxy (рис. 29), обчислюємо інтеграл за допомогою формули (5.2):

$$\begin{aligned} \iint_S 12x^2 z dx dy &= \iint_G 12x^2 \left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \right) dx dy = 12 \int_0^1 dx \int_0^1 x^2 \left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \right) dy = \\ &= 12 \int_0^1 x^2 \left(y - \frac{x^2}{4} y - \frac{y^3}{12} \right) \Big|_0^1 dx = 12 \int_0^1 \left(\frac{11}{12} - \frac{x^2}{4} \right) dx = 10. \end{aligned}$$

§ 2.6 Зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду. Формули Стокса і Остроградського

Поверхневі інтеграли другого роду можна виразити через поверхневі інтеграли першого роду, а саме

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \quad (6.1)$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси нормалі гладкої орієнтованої поверхні S .

Якщо поверхня S задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то її нормаллю

в точці (x, y, z) є вектор $\bar{n}(\pm F'_x(x, y, z), \pm F'_y(x, y, z), \pm F'_z(x, y, z))$ (знак перед координатами визначається стороною поверхні). Отже, напрямні косинуси для формули (6.1) визначаються співвідношеннями

$$\cos \alpha = \pm \frac{F'_x}{|\bar{n}|}, \quad \cos \beta = \pm \frac{F'_y}{|\bar{n}|}, \quad \cos \gamma = \pm \frac{F'_z}{|\bar{n}|}, \quad (6.2)$$

де $|\bar{n}| = \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}$. Якщо ж рівняння поверхні S представляється у вигляді $z = z(x, y)$, то для її нормалі $\bar{n}(\mp z'_x(x, y), \mp z'_y(x, y), \pm 1)$ можемо записати

$$\cos \alpha = \mp \frac{z'_x}{|\bar{n}|}, \quad \cos \beta = \mp \frac{z'_y}{|\bar{n}|}, \quad \cos \gamma = \pm \frac{1}{|\bar{n}|}, \quad (6.3)$$

де $|\bar{n}| = \sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1}$.

Приклад 1. Перейти від поверхневого інтегралу другого роду $\iint_S R(x, y, z) dx dy$ до поверхневого інтегралу першого роду, якщо S – верхня сторона напівсфери $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Розв'язання. Використовуючи формули (6.3), визначимо $\cos \gamma$:

$$z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}; \quad z'_x = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}};$$

$$\sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}; \quad \cos \gamma = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Відмітимо, що так як для верхньої сторони поверхні кут γ гострий, то $\cos \gamma > 0$, тобто в використаній формулі необхідно взяти знак плюс. Враховуючи, що $P = Q = 0$, на основі формули (6.1) маємо

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \iint_S R(x, y, z) \sqrt{1 - x^2 - y^2} dS.$$

Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневими та криволінійними інтегралами. Нехай задана поверхня S , яка обмежена контуром L . Якщо функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку на поверхні S , то справедлива *формула Стокса*

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) dS, \quad (6.4)$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси нормалі до поверхні S ; напрям нормалі вибирається так, щоб напрям обходу контуру L був додатнім, тобто для спостерігача, який знаходиться зі сторони нормалі, обхід повинен відбуватися проти руху годинникової стрілки. Враховуючи формулу (6.1), формулу Стокса можна переписати в наступному вигляді:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (6.5)$$

Приклад 2. Обчислити за допомогою формули Стокса інтеграл

$$\oint_L 8z^2 dx + 9x^2 dy + 3y^2 dz, \quad \text{де } L - \text{межа частини площини}$$

$6x + 3y + 4z - 12 = 0$, яка відтинається трьома координатними площинами. Для спостерігача, який знаходиться в початку координат, обхід контура L відбувається за рухом годинникової стрілки.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування S (рис. 30) та її проєкцію на площину Oxy (рис. 31).

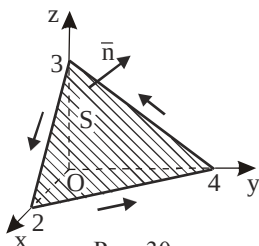


Рис. 30

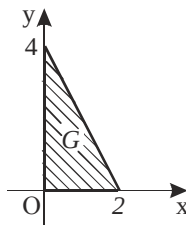


Рис. 31

Знайдемо компоненти правої частини формули Стокса:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 6y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 16z, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 18x;$$

$$\cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{61}}, \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{61}}, \quad \cos \gamma = \frac{4}{\sqrt{61}}.$$

Напрямні косинуси знайдені за допомогою формул (6.2). Очевидно, що в цих формулах для вказаного напрямку обходу (рис. 30) необхідно взяти знак плюс. Використовуючи формулу Стокса та формулу для обчислення поверхневого інтегралу першого роду, дістаємо

$$\begin{aligned} \oint_L 8z^2 dx + 9x^2 dy + 3y^2 dz &= \iint_S \left(6y \cdot \frac{6}{\sqrt{61}} + 16z \cdot \frac{3}{\sqrt{61}} + 18x \cdot \frac{4}{\sqrt{61}} \right) dS = \\ &= \frac{12}{\sqrt{61}} \iint_G (3y + (12 - 6x - 3y) + 6x) \cdot \frac{\sqrt{61}}{4} dx dy = 36 \iint_G dx dy = 144. \end{aligned}$$

Звертаємо увагу, що останній подвійний інтеграл дорівнює площі області G (рис. 31), тобто він дорівнює площі прямокутного трикутника з катетами 2 і 4.

Формула Остроградського пов'язує між собою поверхневі та потрійні інтеграли. Якщо функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в

заданій області T , яка обмежена гладкою або кусково-гладкою поверхнею S , то справедлива *формула Остроградського*

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (6.6)$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні S . Враховуючи зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду, формулу Остроградського можна переписати у вигляді

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (6.7)$$

Приклад 3. Обчислити за допомогою формули Остроградського інтеграл $\iint_S x dy dz + 2y dz dx + 3z dx dy$, де S – зовнішня сторона тіла, яке

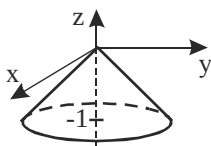


Рис. 32

обмежене конічною поверхнею $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ та площиною $z = -1$.

Розв'язання. Побудувавши область інтегрування (рис. 32) та застосувавши формулу Остроградського (6.7), дістаємо

$$\iint_S x dy dz + 2y dz dx + 3z dx dy = \iiint_T (1 + 2 + 3) dx dy dz = 6 \iiint_T dx dy dz = 2\pi.$$

Відмітимо, що останній потрійний інтеграл дорівнює об'єму області T , тобто він дорівнює об'єму конуса з висотою $H = 1$ і радіусом основи $r = 1$.

§ 2.7 Застосування криволінійних і поверхневих інтегралів до задач фізики та геометрії

Знайдемо масу m неоднорідної дуги АВ, густина якої змінюється по закону $\gamma = \gamma(x, y)$. Розіб'ємо вказану дугу на n малих частин $l_1, l_2, \dots, l_n$, довжини яких відповідно позначимо через $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$. Якщо кожную частину l_i ($i=1, 2, \dots, n$) вважати однорідною дугою, то можемо записати наближену формулу для обчислення маси m :

$$m \approx \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i, \quad (7.1)$$

де (ξ_i, η_i) – довільна точка частини l_i . Перейшовши в останній рівності до границі при $\lambda \rightarrow 0$ (λ – найбільша з довжин $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$) і помітивши, що права частина цієї рівності є інтегральною сумою для функції $\gamma(x, y)$ по дузі АВ, дістанемо точну формулу

$$m = \int_{AB} \gamma(x, y) dl. \quad (7.2)$$

Аналогічно попередньому можна отримати всі формули, які записані в наведених нижче таблицях 3, 4 ($\gamma(x, y)$ – густина кривої на площині; $\gamma(x, y, z)$ – густина поверхні).

Приклад 1. Знайти масу дуги кола $x = \cos t, y = \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$), густина якої змінюється по закону $\gamma = y$.

Розв'язання. Застосувавши формулу (7.2), маємо

$$m = \int_K y dl = \int_0^\pi \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} dt = \int_0^\pi \sin t dt = -\cos t \Big|_0^\pi = 2.$$

Таблиця 3. Застосування криволінійних інтегралів для обчислення деяких фізичних та геометричних величин

Назва величини	Формула для обчислення
Довжина дуги	$l = \int_{AB} dl$
Маса дуги	$m = \int_{AB} \gamma(x, y) dl$
Статичний момент дуги відносно осі Ох	$M_x = \int_{AB} y \gamma(x, y) dl$
Статичний момент дуги відносно осі Оу	$M_y = \int_{AB} x \gamma(x, y) dl$
Центр ваги дуги	$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \int_{AB} x \gamma(x, y) dl,$ $\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \int_{AB} y \gamma(x, y) dl$
Момент інерції дуги відносно осі Ох	$I_x = \int_{AB} y^2 \gamma(x, y) dl$
Момент інерції дуги відносно осі Оу	$I_y = \int_{AB} x^2 \gamma(x, y) dl$
Момент інерції дуги відносно початку координат	$I_o = \int_{AB} (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl$
Площа плоскої фігури (L – межа фігури)	$S = \oint_L x dy = - \oint_L y dx =$ $= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$
Робота сили $\vec{F}(P(x, y), Q(x, y))$ на шляху ВС	$A = \int_{BC} P dx + Q dy$

Таблиця 4. Застосування поверхневих інтегралів для обчислення деяких фізичних та геометричних величин

Назва величини	Формула для обчислення
Площа частини поверхні	$S = \iint_S dS$
Маса частини поверхні	$m = \iint_S \gamma(x, y, z) dS$
Статичний момент частини поверхні відносно площини Оуz	$M_{yz} = \iint_S x\gamma(x, y, z) dS$
Статичний момент частини поверхні відносно площини Оzх	$M_{zx} = \iint_S y\gamma(x, y, z) dS$
Статичний момент частини поверхні відносно площини Оху	$M_{xy} = \iint_S z\gamma(x, y, z) dS$
Центр ваги частини поверхні	$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{1}{m} \iint_S x\gamma(x, y, z) dS,$ $\bar{y} = \frac{M_{zx}}{m} = \frac{1}{m} \iint_S y\gamma(x, y, z) dS,$ $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{1}{m} \iint_S z\gamma(x, y, z) dS$
Момент інерції частини поверхні відносно осі Ох	$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dS$
Момент інерції частини поверхні відносно осі Оу	$I_y = \iint_S (z^2 + x^2) \gamma(x, y, z) dS$
Момент інерції частини поверхні відносно осі Оz	$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dS$
Момент інерції поверхні відносно початку координат	$I_o = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dS$

Приклад 2. Обчислити роботу сили $\vec{F} = xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по параболі $y = x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(2;4)$.

Розв'язання. Використавши формулу для обчислення роботи (табл. 3), отримаємо

$$A = \int_{OB} xy dx + x^2 dy = \int_0^2 (x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x) dx = 3 \int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_0^2 = 12.$$

Приклад 3. Знайти масу частини поверхні $z = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$, яка обмежена площинами $x = 0, y = 0, x = 1, y = 1$ і густина якої розподілена по закону $\gamma = 2\sqrt{4 + x^2 + y^2}$.

Розв'язання. Застосувавши формулу для обчислення маси поверхні (табл. 4), маємо (див. рис. 28, 29)

$$\begin{aligned} m &= \iint_S 2\sqrt{4 + x^2 + y^2} dS = \iint_G 2\sqrt{4 + x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{2}\right)^2} dx dy = \\ &= \iint_G (4 + x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (4 + x^2 + y^2) dy = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

III. Елементи теорії поля

§ 3.1 Деякі поняття теорії поля. Спеціальні поля

Якщо в кожній точці M просторової області T задається вектор $\vec{F} = \vec{F}(M)$ (скалярна величина $U = U(M)$), то кажуть що в області T

визначене *векторне (скалярне)* поле. Функції $\bar{F}(M)$ і $U(M)$ у цьому випадку називаються *векторною і скалярною функціями* відповідно. Як бачимо, скалярне поле визначається однією функцією трьох змінних $U(M)=U(x,y,z)$. Векторне поле

$$\bar{F}(M)=P(M)\bar{i}+Q(M)\bar{j}+R(M)\bar{k}$$

задається вже трьома функціями $P(M)=P(x,y,z)$, $Q(M)=Q(x,y,z)$, $R(M)=R(x,y,z)$. Прикладом скалярного поля може бути поле температур нагрітого тіла, а прикладом векторного – поле швидкості будь-якого об'єкта, який рухається.

Градiєнтом скалярного поля $U=U(M)$ називається вектор, який позначається символом **grad** U і визначається рівністю

$$\mathbf{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}. \quad (1.1)$$

Градiєнт скалярної величини $U(M)$ визначає напрям і числове значення найбільшої швидкості зростання цієї величини в точці M .

Дивергенцією векторного поля $\bar{F}(M)=P(M)\bar{i}+Q(M)\bar{j}+R(M)\bar{k}$ називається скаляр, який позначається символом **div** $\bar{F}$ і визначається рівністю

$$\mathbf{div} \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (1.2)$$

Ротором векторного поля $\bar{F}(M)=P(M)\bar{i}+Q(M)\bar{j}+R(M)\bar{k}$ називається вектор, який позначається символом **rot** $\bar{F}$ і визначається рівністю

$$\mathbf{rot} \bar{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k}. \quad (1.3)$$

Формулу (1.3) можна представити у вигляді

$$\mathbf{rot} \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (1.4)$$

Тут добутки елементів другого рядка на елементи третього розглядаються як відповідні частинні похідні.

Приклад 1. Знайти дивергенцію і ротор векторного поля $\bar{F} = x^2 y \bar{i} + x \sin z \bar{j} + y^3 z^4 \bar{k}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $P = x^2 y$, $Q = x \sin z$, $R = y^3 z^4$ і застосувавши формули (1.2) - (1.4), маємо

$$\mathbf{div} \bar{F} = 2xy + 4y^3 z^3; \quad \mathbf{rot} \bar{F} = (3y^2 z^4 - x \cos z) \bar{i} + (\sin z - x^2) \bar{k}.$$

Векторне поле $\bar{F}$ називається *потенціальним*, якщо існує скалярна величина U , для якої $\bar{F} = \mathbf{grad} U$. Функція $U = U(x, y, z)$ називається *потенціалом* (або *потенціальною функцією*) поля $\bar{F}$. Для того щоб векторне поле $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ було потенціальним в області T , необхідно і достатньо, щоб в кожній точці цієї області виконувалися рівності

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (1.5)$$

Умови (1.5) рівносильні умові, що $\mathbf{rot} \bar{F}$ є нульовим вектором.

Якщо векторне поле $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ потенціальне в області T , то його потенціал, з точністю до довільного сталого доданку, може бути знайдений за формулою (криволінійний інтеграл у цій формулі не залежить від шляху інтегрування)

$$U = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz, \quad (1.6)$$

де $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$ – відповідно фіксована та довільна точки області T . Взявши в якості контура інтегрування ламану, ланки якої паралельні осям координат, дістаємо

$$U = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz. \quad (1.7)$$

В формулі (1.7) кожен інтеграл є визначеним інтегралом від функції однієї змінної (змінною вважається тільки та величина, яка стоїть під знаком диференціалу).

Приклад 2. Показати, що поле $\vec{F} = 2xy\vec{i} + (x^2 + 4y^3z^3)\vec{j} + 3y^4z^2\vec{k}$ є потенціальним і знайти його потенціал.

Розв'язання. Перевіримо виконання умов (1.5):

$$P = 2xy, \quad Q = x^2 + 4y^3z^3, \quad R = 3y^4z^2;$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 12y^3z^2, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x.$$

В якості фіксованої точки M_0 візьмемо початок координат, тобто $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Визначаємо потенціал U за допомогою формули (1.7):

$$U = \int_0^x 2x \cdot 0 dx + \int_0^y (x^2 + 4y^3 \cdot 0) dy + \int_0^z 3y^4 z^2 dz = x^2 y \Big|_0^y + y^4 z^3 \Big|_0^z = x^2 y + y^4 z^3.$$

Векторне поле $\vec{F}$ називається *соленоїдальним* (або *трубчатим*), якщо існує векторна величина $\vec{G}$, для якої $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$. Вектор $\vec{G}$ називається *векторним потенціалом* поля $\vec{F}$. Для того щоб поле $\vec{F}$ було соленоїдальним в області T , необхідно і достатньо, щоб в кожній точці цієї області виконувалася рівність

$$\operatorname{div} \bar{F} = 0. \quad (1.8)$$

Приклад 3. Перевірити, чи буде соленоїдальним векторне поле $\bar{F} = x^2 z \bar{i} + z \bar{j} + xyz^3 \bar{k}$.

Розв'язання. Так як $\operatorname{div} \bar{F} = 2xz + 3xyz^2 \neq 0$, то поле $\bar{F}$ не соленоїдальне.

§ 3.2 Потік. Циркуляція

Нехай задані векторне поле $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ і поверхня S . Вибравши певну сторону поверхні S , можемо в кожній її точці визначити одиничний вектор нормалі $\bar{n} = \cos \alpha \cdot \bar{i} + \cos \beta \cdot \bar{j} + \cos \gamma \cdot \bar{k}$ (нагадаємо, що координатами одиничного вектора є його напрямні косинуси). *Потоком* Π векторного поля $\bar{F}$ через поверхню S в сторону, яка визначається нормаллю $\bar{n}$, називається поверхневий інтеграл першого роду від функції $f(x, y, z) = \bar{F}\bar{n}$ по поверхні S , тобто

$$\Pi = \iint_S \bar{F}\bar{n} dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \quad (2.1)$$

Враховуючи зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду, можемо записати

$$\Pi = \iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy. \quad (2.2)$$

Нехай задані векторне поле $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ і просторова крива L . Введемо позначення $d\bar{l} = dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j} + dz \cdot \bar{k}$. *Лінійним інтегралом* від вектора $\bar{F}$ вздовж кривої L називається криволінійний інтеграл

$$\int_L \bar{F} d\bar{l} = \int_L P dx + Q dy + R dz.$$

Якщо контуром інтегрування є замкнена крива, то лінійний інтеграл називається *циркуляцією* векторного поля $\vec{F}(M)$ вздовж кривої L , тобто циркуляція $\mathcal{C}$ визначається рівністю

$$\mathcal{C} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz . \quad (2.3)$$

Використовуючи поняття теорії поля та введені вище позначення, формули Остроградського і Стокса відповідно можна представити у вигляді

$$\iint_S \vec{F} \vec{n} dS = \iiint_T \text{div } \vec{F} dx dy dz , \quad (2.4)$$

$$\oint_L \vec{F} d\vec{l} = \iint_S \vec{n} \text{rot } \vec{F} dS . \quad (2.5)$$

Приклад 1. Задані векторне поле $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x+z)\vec{k}$

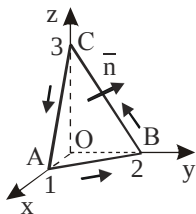


Рис. 33

і точки $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$, $O(0;0;0)$, які є вершинами трикутної піраміди. Обчислити: а) потік поля $\vec{F}$ через сторону грані ABC у тому напрямку нормалі до площини, яка утворює з віссю Oz гострий кут; б) потік поля $\vec{F}$ через зовнішню сторону межі заданої піраміди (застосувати

формулу Остроградського); в) циркуляцію поля $\vec{F}$ по контуру $ABCA$ (застосувати формулу Стокса).

Розв'язання. а) Запишемо рівняння площини ABC (рис. 33):

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \text{ або } 6x + 3y + 2z - 6 = 0 .$$

Використовуючи формулу (2.2), обчислюємо потік:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \iint_S (x+y)dydz + (y+z)dzdx + (x+z)dxdy = \iint_{G_{yz}} \left(1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z + y\right)dydz + \\
&+ \iint_{G_{zx}} \left(2 - 2x - \frac{2}{3}z + z\right)dzdx + \iint_{G_{xy}} \left(x + 3 - 3x - \frac{3}{2}y\right)dxdy = \\
&= \int_0^2 dy \int_0^{3-\frac{3}{2}y} \left(1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z\right)dz + \int_0^3 dz \int_0^{\frac{1-\frac{1}{3}z}{2}} \left(2 - 2x + \frac{1}{3}z\right)dx + \\
&+ \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} \left(3 - 2x - \frac{3}{2}y\right)dy = 3 + \frac{5}{2} + \frac{4}{3} = \frac{41}{6}.
\end{aligned}$$

Тут G_{yz} , G_{zx} , G_{xy} – проєкції поверхні S на координатні площини Oyz , Ozx , Oxy відповідно (трикутники BOC , AOC , ABO). При переході від поверхневих до подвійних інтегралів в усіх трьох доданках взято знак плюс, так як нормаль $\vec{n}$ зі всіма координатними осями утворює гострий кут (див. рис. 33).

б) Використовуючи формулу Остроградського, дістаємо

$$\begin{aligned}
\Pi &= \iint_S (x+y)dydz + (y+z)dzdx + (x+z)dxdy = \\
&= \iiint_T \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y) + \frac{\partial}{\partial y}(y+z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+z) \right) dxdydz = \\
&= \iiint_T (1+1+1) dxdydz = 3 \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} dz = 3.
\end{aligned}$$

в) Використовуючи формулу Стокса, можемо записати

$$\Pi = \oint_L (x+y)dx + (y+z)dy + (x+z)dz = \iint_S Xdydz + Ydzdx + Zdxdy,$$

де X , Y , Z – координати вектора $\text{rot } \vec{F}$. Для того щоб напрям обходу контуру був додатнім, нормаль $\vec{n}$ до вибраної сторони поверхні S

повинна утворювати з віссю Oz гострий кут (рис. 33). Знайдемо спочатку ротор поля $\bar{F}$:

$$\mathbf{rot} \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y & y+z & x+z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(x+z) - \frac{\partial}{\partial z}(y+z) \right) \bar{i} -$$

$$- \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+z) - \frac{\partial}{\partial z}(x+y) \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y+z) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y) \right) \bar{k} = -\bar{i} - \bar{j} - \bar{k} .$$

Обчислюємо циркуляцію:

$$I = \iiint_S (-1) dydz + (-1) dzdx + (-1) dxdy = - \iint_{G_{yz}} dydz - \iint_{G_{zx}} dzdx - \iint_{G_{xy}} dxdy =$$

$$= - \int_0^2 dy \int_0^{3-\frac{3}{2}y} dz - \int_0^3 dz \int_0^{1-\frac{1}{3}z} dx - \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy = -3 - \frac{3}{2} - 1 = -\frac{11}{2} .$$

Індивідуальні завдання

Завдання 1. Обчислити подвійний інтеграл двома способами:

а) внутрішній інтеграл у двократному береться по змінній y , а зовнішній - по x ; б) внутрішній інтеграл у двократному береться по змінній x , а зовнішній - по y .

1. $\iint_G (1+2xy)dx dy$; $G: y = \sqrt{x}, x+y=2, x=0$.

2. $\iint_G (3x+2y)dx dy$; $G: y = x^2, x+y=2, x \geq 0$.

3. $\iint_G (2+4x^2y)dx dy$; $G: y = \sqrt{x}, x+y=2, y=0$.

4. $\iint_G (3x+4y^2)dx dy$; $G: y = \frac{1}{x}, y=x, x=2$.

5. $\iint_G (x^2+y+10)dx dy$; $G: y=2\sqrt{x}, y=3-x, x=0$.

6. $\iint_G (x+y+1)dx dy$; $G: y=x^2, x+y=2, y=0$.

7. $\iint_G (3+5xy)dx dy$; $G: y=2x^2, x+y=3, y=0$.

8. $\iint_G (x-3y)dx dy$; $G: y = \frac{2}{x}, y=2x^2, y = \frac{1}{2}$.

9. $\iint_G (x+3y)dx dy$; $G: y=2\sqrt{x}, x+y=3, y=0$.

10. $\iint_G (7x+8y^2)dx dy$; $G: y=x, y=-x, y=1$.

11. $\iint_G (2xy+7)dx dy$; $G: y=x^3, x+y=2, x=0$.

12. $\iint_G (xy + 3) dx dy$; $G: y = 3x^2, x + y = 4, y = 0$.
13. $\iint_G (x - 5y) dx dy$; $G: y = x, x + y = 0, y = 2$.
14. $\iint_G (2x + 3y + 1) dx dy$; $G: y = x^2, x + y = 2, y = 0$.
15. $\iint_G (x + y^2) dx dy$; $G: y = -x^2, y = x^2, x = 2$.
16. $\iint_G \left(x + \frac{y}{2} \right) dx dy$; $G: y = 3x^2, x + y = 4, x \geq 0$.
17. $\iint_G \left(9y - \frac{5x^2}{7} \right) dx dy$; $G: y = (x+1)^2, y = (x-1)^2, y = 0$.
18. $\iint_G (2xy + 5) dx dy$; $G: y = x^2, x + y = 2, y = 0$.
19. $\iint_G \left(\frac{x}{2} + y \right) dx dy$; $G: x - y = 3, x + y = 3, y = 2$.
20. $\iint_G (x^2 - y) dx dy$; $G: y = x^3, x + y = 0, y = 1$.
21. $\iint_G (2 + 3xy) dx dy$; $G: y = x - 1, x + y = 2, y = 0$.
22. $\iint_G (2y + 1) dx dy$; $G: y = x, x + y = 3, y = 0$.
23. $\iint_G 7x^2 dx dy$; $G: y = -x^3, x - y = 0, y = 1$.
24. $\iint_G (9xy - 8) dx dy$; $G: y = x^2, x + y = 2$.

$$25. \iint_G (4-3x) dx dy; \quad G: y = (x-2)^2, y = (x+2)^2, y = 0.$$

$$26. \iint_G (2xy^2 - 3x) dx dy; \quad G: y = -x, x - y = 2, y = 0.$$

$$27. \iint_G (5x - y^3) dx dy; \quad G: y = x, x + y = 3, x = 0.$$

$$28. \iint_G (y+1) dx dy; \quad G: y = x^2, x + y = 2, .$$

$$29. \iint_G (7y - 3x^2 y^3) dx dy; \quad G: y = -x, x - y = 3, x = 0.$$

$$30. \iint_G (5x + 7y + 1) dx dy; \quad G: y = x^3, x + y = 2, y = 0.$$

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл, перейшовши до полярних координат.

$$1. \iint_G \left(\sqrt[3]{x^2 + y^2} + 1 \right) dx dy; \quad G: x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0, y \geq 0.$$

$$2. \iint_G \sqrt{x^2 + y^2} dx dy; \quad G: x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0.$$

$$3. \iint_G \ln(x^2 + y^2) dx dy; \quad G: x^2 + y^2 = e^2, x^2 + y^2 = e^4, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$4. \iint_G \sqrt[4]{2 + x^2 + y^2} dx dy; \quad G: x^2 + y^2 \geq 4, x^2 + y^2 \leq 16.$$

$$5. \iint_G (x^2 + y^2) dx dy; \quad G: x^2 + y^2 \leq 2x, y \leq 0.$$

$$6. \iint_G (x + y) dx dy; \quad G: x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1.$$

7. $\iint_G \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy; \quad G: x^2 + y^2 \leq 1.$
8. $\iint_G e^{x^2+y^2} dx dy; \quad G: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 49, x \leq 0, y \geq 0.$
9. $\iint_G \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad G: x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0, y \geq 0.$
10. $\iint_G \sqrt{x^2 + y^2} dx dy; \quad G: y = 0, y = x, x = 1.$
11. $\iint_G y dx dy; \quad G: x^2 + y^2 \leq x.$
12. $\iint_G xy dx dy; \quad G: x^2 + y^2 \leq 4.$
13. $\iint_G x dx dy; \quad G: x^2 + y^2 \leq x.$
14. $\iint_G x^2 dx dy; \quad G: x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0, y \geq 0.$
15. $\iint_G y^2 dx dy; \quad G: x^2 + y^2 \leq 25.$
16. $\iint_G x^2 y dx dy; \quad G: x^2 + y^2 = 1, y = x, y = -x, y \geq 0.$
17. $\iint_G \sqrt{x^2 + y^2} dx dy; \quad G: x = \sqrt{3}y, x = -\sqrt{3}y, x = 2.$
18. $\iint_G \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy; \quad G: x^2 + y^2 = 2x.$
19. $\iint_G \sqrt[3]{x^2 + y^2} dx dy; \quad G: x^2 + y^2 \leq 36, x \geq 0, y \geq 0.$

$$20. \iint_G \ln(1+x^2+y^2) dx dy; \quad G: x^2+y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$21. \iint_G \arctg \frac{y}{x} dx dy; \quad G: x^2+y^2 \leq 9, x^2+y^2 \geq 1.$$

$$22. \iint_G (5-3x-4y) dx dy; \quad G: x^2+y^2 \leq 4x.$$

$$23. \iint_G \sqrt{9-x^2-y^2} dx dy; \quad G: x^2+y^2 \leq 3x, x \leq 0, y \geq 0.$$

$$24. \iint_G \frac{dx dy}{1+x^2+y^2}; \quad G: x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$25. \iint_G \cos(x^2+y^2) dx dy; \quad G: x^2+y^2 \leq \frac{\pi^2}{4}.$$

$$26. \iint_G (\sqrt{x^2+y^2}+3) dx dy; \quad G: x^2+y^2 \leq 16, y \geq 0.$$

$$27. \iint_G \arctg \frac{x}{y} dx dy; \quad G: x=y, x=-y, x=1.$$

$$28. \iint_G \frac{dx dy}{\sqrt[3]{3+x^2+y^2}}; \quad G: x^2+y^2 \leq 25, x \leq 0, y \geq 0.$$

$$29. \iint_G \frac{y^2}{x^2+y^2} dx dy; \quad G: y=x, y=-x, x=1.$$

$$30. \iint_G \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy; \quad G: x^2+y^2 \leq \pi^2.$$

Завдання 3. Обчислити потрібний інтеграл.

$$1. \iiint_T (3+4xz) dx dy dz; \quad T: z=4x^2+9y^2, z=0, x=0, x=1, y=0, y=2.$$

2. $\iiint_T (x+y+z)dx dy dz$; $T: x+y+z=1, z=0, x=0, y=0$.
3. $\iiint_T ze^x dx dy dz$; $T: x=1, x=2, y^2+z^2=1, z \geq 0$.
4. $\iiint_T (2x+y)dx dy dz$; $T: x+2y+3z=6, z=0, x=0, y=0$.
5. $\iiint_T x dx dy dz$; $T: z=x^2+y^2, z=4, x \geq 0, y \geq 0$.
6. $\iiint_T (2+3xy)dx dy dz$; $T: z=2x^2+3y^2, z=0, x=0, x=1, y=0, y=2$.
7. $\iiint_T (x^2+y^2+z^2)dx dy dz$; $T: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$.
8. $\iiint_T (2x+3y-z)dx dy dz$; $T: z=3, z=0, x=0, y=0, x+y=2$.
9. $\iiint_T (x+y)dx dy dz$; $T: x^2+z^2=1, y=0, y=1, z \geq 0$.
10. $\iiint_T x dx dy dz$; $T: z=0, x=0, y=0, y=3, x+z=2$.
11. $\iiint_T (4+z)dx dy dz$; $T: y=x^2, z=0, y=1, z=2$.
12. $\iiint_T \frac{dx dy dz}{1-x-y}$; $T: x=0, x=1, y=2, y=5, z=2, z=4$.
13. $\iiint_T \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^2}$; $T: x+z=3, y=2, x=1, y=0, z=0$.
14. $\iiint_T xyz dx dy dz$; $T: x+y=1, x+y=2, y=0, y=1, z=0, z=3$.
15. $\iiint_T (1+x^2)dx dy dz$; $T: x=1, y=1, z=1, x=0, y=0, z=0$.

16. $\iiint_T (x+y+z) dx dy dz$; $T: z=0, z=1, x=0, x=2, y=1, y=2$.
17. $\iiint_T xy^2 z^3 dx dy dz$; $T: x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.
18. $\iiint_T 2x dx dy dz$; $T: z=4, z=x^2+y^2, y \geq 0, x \leq 0$.
19. $\iiint_T \frac{dx dy dz}{2-x-y}$; $T: x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$.
20. $\iiint_T xy dx dy dz$; $T: x+y+z=4, x=0, x=1, y=0, y=1$.
21. $\iiint_T \frac{dx dy dz}{(x+y+z-2)^3}$; $T: x+y+z=1, z=0, x=0, y=0$.
22. $\iiint_T xyz dx dy dz$; $T: y=x, y=0, x=2, z=0, z=2$.
23. $\iiint_T (2z-1) dx dy dz$; $T: y=x^2, y=4, z=0, z=1$.
24. $\iiint_T xyz^2 dx dy dz$; $T: x+y=2, x+y=3, z=0, z=2, y=0, y=1$.
25. $\iiint_T (x+y+z^2) dx dy dz$; $T: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2$.
26. $\iiint_T y dx dy dz$; $T: x+z=3, z=0, x=0, y=0, y=2$.
27. $\iiint_T \frac{dx dy dz}{8-x-y}$; $T: x=0, x=3, y=1, y=3, z=1, z=2$.
28. $\iiint_T (5-2xz) dx dy dz$; $T: z=3x^2+2y^2, z=0, x=0, x=1, y=0, y=2$.
29. $\iiint_T z dx dy dz$; $T: y+z=2, z=0, x=0, y=0, x=1$.

$$30. \iiint_T (x - y + 3z) dx dy dz; \quad T: z = 2, z = 0, x = 0, y = 0, x + y = 3.$$

Завдання 4. Обчислити потрібний інтеграл, перейшовши до циліндричних або сферичних координат.

$$1. \iiint_T \left(z + \sqrt[5]{x^2 + y^2 + z^2} \right) dx dy dz; \quad T: x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0.$$

$$2. \iiint_T \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad T: z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

$$3. \iiint_T \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz; \quad T: x^2 + y^2 = z^2, z = 1.$$

$$4. \iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz; \quad T: x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0.$$

$$5. \iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz; \quad T: y^2 = 3x - x^2, z = 0, z = 2.$$

$$6. \iiint_T z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz; \quad T: z = 1 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 = 1, z = 1.$$

$$7. \iiint_T xy dx dy dz; \quad T: z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1, z = 0.$$

$$8. \iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz; \quad T: x^2 + y^2 + z^2 \leq 9.$$

$$9. \iiint_T xz dx dy dz; \quad T: x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0.$$

$$10. \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2)^3 dx dy dz; \quad T: x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$11. \iiint_T xy dx dy dz; \quad T: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

12. $\iiint_T yz dx dy dz$; $T: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.
13. $\iiint_T (5x - 3y) dx dy dz$; $T: x^2 + y^2 = 1, 2x + z = 2, z = 10$.
14. $\iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz$; $T: x^2 + y^2 = 2z, z = 1$.
15. $\iiint_T z dx dy dz$; $T: x^2 + y^2 = z^2, z = 2$.
16. $\iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$; $T: x^2 + y^2 + z^2 = z$.
17. $\iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz$; $T: 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, z \geq 0$.
18. $\iiint_T z^2 dx dy dz$; $T: z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
19. $\iiint_T xy dx dy dz$; $T: x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.
20. $\iiint_T x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$; $T: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$.
21. $\iiint_T xy dx dy dz$; $T: x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0$.
22. $\iiint_T x^2 dx dy dz$; $T: x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 4$.
23. $\iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz$; $T: x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1, x \geq 0$.
24. $\iiint_T z dx dy dz$; $T: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z$.

25. $\iiint_T z dx dy dz$; $T: x^2 + y^2 = 25, x^2 + y^2 = z, z = 0$.
26. $\iiint_T z^2 dx dy dz$; $T: x^2 + y^2 = 2x, y = 0, z = 0, z = 3$.
27. $\iiint_T z(x^2 + y^2) dx dy dz$; $T: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 1, z \geq 0$.
28. $\iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz$; $T: x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, z \leq 0$.
29. $\iiint_T x^2 dx dy dz$; $T: x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0$.
30. $\iiint_T z dx dy dz$; $T: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Завдання 5. Знайти об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями (застосувати подвійний інтеграл).

1. $z = x^2, z = 0, 2x + 3y = 6, y = 0$.
2. $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1}, x = 0, x = 2, y = 0, y = 2, z = 0$.
3. $z = 4x^2 + 2y^2 + 1, x + y = 3, x = 0, y = 0, z = 0$.
4. $y = x^2 + z^2, y = 4$.
5. $z = 4 - x^2, y = 5, z = 0, y = 0$.
6. $3x + y = 6, 3x + 2y = 12, x + y + z = 6, z = 0, y = 0$.
7. $z^2 = x^2 + y^2, z = 4$.
8. $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0$.
9. $z = x^2, z = 0, 2x + 3y = 6, y = 0$.

10. $3x + 2y + z = 6, x = 0, z = 0, y = 0.$
11. $x^2 + y^2 = 1, z = 0, x + y + z = 2.$
12. $z = x^2, z = 0, x + y = 2, y = 0.$
13. $x = 2y^2, z = 0, x + 2y + z = 4, y = 0.$
14. $x^2 + y^2 = 1, z = 0, x + y + z = 3, y \geq 0.$
15. $x + y + \frac{z}{2} = 1, z = 0, x = 0, y = 0.$
16. $z = x^2 + y^2, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0.$
17. $z = x^2 + y^2 + 1, x + y = 3, x = 0, y = 0, z = 0.$
18. $z = 3x^2 + 2, y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0, z = 0.$
19. $x^2 + y^2 = 1, z = 2 - x - y, z = 0.$
20. $z = x^2 + y^2, y = x, y = 2x, z = 0, x = 2.$
21. $x^2 + y^2 = 4, z = 0, x + y + z = 3.$
22. $z = x^2 + 3y^2 + 2, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$
23. $z = 8 - x^2 - y^2, z = 0, x + y = 2, x = 0, y = 0.$
24. $z = y^2 + 2, z = 0, x = 0, x = 3, y = 0, y = 2.$
25. $z = y^2, z = 0, x + y = 2, x = 0.$
26. $z = 16 - x^2 - y^2, z = 0, x + y = 3, x = 0, y = 0.$
27. $x^2 + y^2 + z^2 = 25, x^2 + y^2 = 9.$
28. $z = x^2 + y^2, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0.$
29. $z = 1 - x^2 - y^2, z = 0.$

$$30. z = x^2 + y^2, z = 1.$$

Завдання 6. Знайти центр ваги однорідного тіла, яке обмежене вказаними поверхнями.

$$1. z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1.$$

$$2. 2x = z^2 + y^2, x = 2.$$

$$3. z = x^2 + y^2, z = 9.$$

$$4. x = y^2 + z^2, x = 25.$$

$$5. x^2 + y^2 = z, z = 9.$$

$$6. x^2 = y^2 + z^2, x = 4.$$

$$7. z^2 = x^2 + y^2, z = 2.$$

$$8. z = x^2 + y^2, z = 9.$$

$$9. 4 - z = x^2 + y^2, z = 0.$$

$$10. z = x^2 + y^2, z = 25.$$

$$11. z^2 = x^2 + y^2, z = 4.$$

$$12. z = x^2 + y^2, z = 1.$$

$$13. 4x = z^2 + y^2, x = 4.$$

$$14. 3z = x^2 + y^2, z = 3.$$

$$15. x^2 + y^2 + z^2 = 25, z \geq 3.$$

$$16. x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0.$$

$$17. y^2 = x^2 + z^2, y = 3.$$

$$18. x^2 + z^2 = -2y, y = -2.$$

$$19. x^2 + y^2 + 3z = 0, z = -3.$$

$$20. z^2 + y^2 = -4x, x = -4.$$

$$21. z^2 + x^2 + y^2 = 4, x \geq 0.$$

$$22. z^2 + x^2 + 8y = 0, y = -2.$$

$$23. z^2 = x^2 + y^2, z = -2.$$

$$24. z^2 + x^2 + y^2 = 9, z \leq 0.$$

$$25. z^2 + x^2 + y^2 = 25, x \geq 4.$$

$$26. y^2 = x^2 + z^2, y = -2.$$

$$27. x^2 = y^2 + z^2, x = -1.$$

$$28. z^2 + x^2 + y^2 = 25, y \geq 3.$$

$$29. x^2 + y^2 + 5z = 0, z = -5.$$

$$30. z^2 + x^2 + y^2 = 9, y \leq 0.$$

Завдання 7. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду.

1. $\int_K (2x + 3y^2) dl$, де K - дуга кола $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$; $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
2. $\int_K \frac{z^2}{x^2 + y^2} dl$, де K - перший виток гвинтової лінії
 $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 2$; $0 \leq t \leq 2\pi$.
3. $\int_K xy dl$, де K - чверть кола $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 2\sqrt{2}$; $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
4. $\int_K (x + y) dl$, де K - контур трикутника з вершинами в точках
 $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(0;0)$.
5. $\int_K \frac{1}{x - y} dl$, де K - відрізок прямої $y = \frac{1}{2}x - 2$ між точками $A(0;-2)$ і
 $B(4;0)$.
6. $\int_K xy dl$, де K - контур прямокутника з вершинами в точках
 $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(4;2)$, $D(0;2)$.
7. $\int_K x dl$, де K - дуга параболи $y = 2x^2$ між точками $A(-2;8)$ і $B(2;8)$.
8. $\int_K (x^2 + y^2) dl$, де K - дуга кола $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$; $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
9. $\int_K \sqrt{2y} dl$, де K - перша арка циклоїди $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$;
 $0 \leq t \leq 2\pi$.

10. $\int_K (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) dl$, де К - перший виток конічної гвинтової лінії

$$x = 2t \cos t, y = 2t \sin t, z = 2t; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

11. $\int_K (x - y) dl$, де К - дуга кола $\rho = 2 \cos \varphi$; $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

12. $\int_K \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2}}$, де К - відрізок прямої між точками $A(0;0)$ і $B(1;1)$.

13. $\int_K y^2 dl$, де К - перша арка циклоїди $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$;

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

14. $\int_K (x^2 + y^2 + z^2) dl$, де К - перший виток гвинтової

лінії $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = 2t$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

15. $\int_K x^2 y dl$, де К - перша чверть кола $x^2 + y^2 = 4$.

16. $\int_K (y - x) dl$, де К - дуга кубічної параболи $y = x^3$ від точки $A(1;1)$ до

точки $B(2;8)$.

17. $\int_K (x - y) dl$, де К - відрізок прямої між точками $A(0;0)$ і $B(4;3)$.

18. $\int_K \frac{dl}{x^2 + y^2 + z^2}$, де К - перший виток гвинтової

лінії $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = 2t$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

19. $\int_K x^2 dl$, де К - дуга кривої $y = \ln x$, $1 \leq x \leq 3$.

20. $\int_K y dl$, де K - перша арка циклоїди $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$;
 $0 \leq t \leq 2\pi$.
21. $\int_K x dl$, де K - відрізок прямої між точками $A(0;0)$ і $B(1;2)$.
22. $\int_K \frac{dl}{x+y}$, де K - відрізок прямої $y = 2x + 3$ між точками
 $A(1;5)$ і $B(2;7)$.
23. $\int_K \sqrt{x^2 + y^2} dl$, де K - частина лемніскати $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$; $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.
24. $\int_K x dl$, де K - дуга кардіоїди $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$; $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.
25. $\int_K (x+1) dl$, де K - дуга астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$; $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
26. $\int_K \frac{y}{x} dl$, де K - дуга кола $x^2 + y^2 = 2x$, розташована в першій чверті.
27. $\int_K x dl$, де K - дуга кола $x^2 + y^2 = 4$, розташована в першій чверті.
28. $\int_K (x^2 + y^2) dl$, де K - дуга кола $x = \cos t$, $y = \sin t$; $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
29. $\int_K \sqrt{x^2 + y^2} dl$, де K - перший виток спіралі Архімеда $\rho = 2\varphi$;
 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
30. $\int_K \sqrt{x^2 + y^2} y dl$, де K - дуга кардіоїди $\rho = 3(1 + \cos \varphi)$; $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Завдання 8. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду.

1. $\int_{AB} 2xydx + 3x^2dy$, де АВ - дуга кривої $y = x^3$ від А(1;1) до В(2;8).

2. $\int_{AB} (2 - y)dx + xdy$, де АВ – арка циклоїди $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ від $t = 0$ до $t = 2\pi$.

3. $\int_{AB} ydx + xdy + (x - y - 1)dz$, де АВ – відрізок прямої від А(1;1) до В(2;3;4).

4. $\int_{AB} (x + y)dx - xdy$, де АВ – відрізок прямої від А(4;2) до В(2;0).

5. $\int_{AB} (x^2 - y^2)dx$, де АВ - дуга параболи $y = x^2$ від А(0;0) до В(2;4).

6. $\int_{AB} (x^2 + y^2)dy$, де АВ - дуга кривої $y = x^3$ від А(1;1) до В(2;8).

7. $\int_{AB} 2xydx + 3x^2dy$, де АВ - дуга кривої $y = x^3$ від А(1;1) до В(2;8).

8. $\int_{AB} xydx + (y - x)dy$, де АВ – відрізок прямої $y = x$ від А(0;0) до В(2;2).

9. $\int_{AB} 2xydx + x^2dy$, де АВ - дуга кривої $y = x^2$ від А(0;0) до В(2;4).

10. $\int_{AB} ydx - xdy$, де АВ - дуга еліпса $x = 2\cos t, y = \sin t$ від $t = 0$ до $t = \pi$.

11. $\int_{AB} (x + y)dx + xydy$, де АВ - дуга кривої $y = x^2$ від А(1;1) до В(2;4).

12. $\int_{AB} x^2 y dx + 2xy^2 dy$, де АВ - дуга кривої $y = x^3$ від А(1;1) до В(2;8).
13. $\int_{AB} (x^2 + y^2) dx$, де АВ - дуга кривої $y = 2x^2$ від А(2;8) до В(3;27).
14. $\int_{AB} (x^2 - y^2) dy$, де АВ - дуга кривої $y = 2x^3$ від А(0;0) до В(2;16).
15. $\int_{AB} (x - y) dx + (x + y) dy$, де АВ - відрізок прямої від А(2;3) до В(3;5).
16. $\int_{AB} (2y - 6xy^3) dx + (2x - 9x^2 y^2) dy$, де АВ - відрізок прямої $y = x$ від А(0;0) до В(2;2).
17. $\int_{AB} 6x^2 y dx + 10xy^2 dy$, де АВ - дуга кривої $y = x^3$ від А(1;1) до В(2;8).
18. $\int_{AB} y^2 dx + 2xy dy$, де АВ - дуга еліпса $x = 2\cos t, y = 3\sin t$ від $t = \frac{\pi}{2}$ до $t = 0$.
19. $\int_{AB} yz dx + xz dy + xy dz$, де АВ - дуга гвинтової лінії $x = \cos t, y = \sin t$ від $t = 0$ до $t = 2\pi$.
20. $\int_{AB} (xy - 1) dx + x^2 y dy$, де АВ - відрізок прямої $y = 2 - 2x$ від А(1;0) до В(0;2).
21. $\int_{AB} (2x + y) dx + 4xy dy$, де АВ - дуга кривої $y = 1 - x^2$ від А(1;0) до В(2;-3).

22. $\int_{AB} 2x dx - (x + 2y) dy$, де АВ – відрізок прямої $y = 2x + 2$ від $A(0;2)$

до $B(2;6)$.

23. $\int_{AB} y(x - y) dx + x dy$, де АВ – відрізок прямої $y = 2x$ від $A(1;2)$ до

$B(2;4)$.

24. $\int_{AB} (x^2 - y) dx$, де АВ - дуга кривої $y = 2x^2$ від $A(0;0)$ до $B(2;8)$.

25. $\int_{AB} 2x(y - 1) dx + x^2 dy$, де АВ - дуга кривої $y = x^2$ від $A(1;1)$ до

$B(2;4)$.

26. $\int_{AB} (x^2 - y^2) dx + xy dy$, де АВ – відрізок прямої від $A(1;1)$ до $B(3;4)$.

27. $\int_{AB} (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy$, де АВ – відрізок прямої від $A(0;0)$ до

$B(2;0)$.

28. $\int_{AB} xy dx + yz dy + xz dz$, де АВ - дуга кривої $x = \cos t, y = \sin t, z = 1$ від

$t = 0$ до $t = \pi$.

29. $\int_{AB} x^2 y dx + x^3 dy$, де АВ - дуга кривої $y = x^2$ від $A(1;1)$ до $B(3;9)$.

30. $\int_{AB} 2x dy - 3y dx$, де АВ - дуга кривої $y = x^3$ від $A(1;1)$ до $B(2;8)$.

Завдання 9. Показати, що криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування, та обчислити його для заданих точок $A(1;1)$, $B(2;3)$ і $C(2;1)$ по двом контурам інтегрування: а) по відрізку прямої АВ; б) по ламаній АСВ.

1. $\int_K (2x + 3y)dx + (3x + 3y^2)dy .$
2. $\int_K (6xy + 4y^2 + 5y)dx + (3x^2 + 8xy + 5x)dy .$
3. $\int_K (6xy^2 + 4x^3)dx + (6x^2y + 3y^2)dy .$
4. $\int_K (2xy - 5y^3)dx + (x^2 - 15xy^2 + 6y)dy .$
5. $\int_K 2xydx + x^2dy .$
6. $\int_K (3x^2y + 1)dx + (x^3 - 1)dy .$
7. $\int_K (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy .$
8. $\int_K (x + 3y)dx + (3x + y)dy .$
9. $\int_K (4x^3y^3 - 3y^2 + 8)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 1)dy .$
10. $\int_K (x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy .$
11. $\int_K (2x - 3xy^2 + 2y)dx + (2x - 3x^2y + 2y)dy .$
12. $\int_K (x + y)dx + (x - y)dy .$
13. $\int_K (4x + 2y)dx + (2x - 6y)dy .$
14. $\int_K (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy .$

15. $\int_K (2x + 3y)dx + (3x - 4y)dy .$
16. $\int_K (3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy .$
17. $\int_K (x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy .$
18. $\int_K (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy .$
19. $\int_K (x + y)dx + (x + 2y)dy .$
20. $\int_K (x^2 + 2xy)dx + (x^2 + y^3)dy .$
21. $\int_K (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy .$
22. $\int_K (x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy .$
23. $\int_K (x^2 + y)dx + (x - 2y)dy .$
24. $\int_K (y - 3x^2)dx - (4y - x)dy .$
25. $\int_K ydx - (y^3 - x)dy .$
26. $\int_K (6xy^2 + 4x^3)dx + (6x^2y + 3y^2)dy .$
27. $\int_K (x^2 + y^2)dx + (2xy + x)dy .$
28. $\int_K (x - 2y)dx + (y - 2x + 1)dy .$

$$29. \int_K (3x - 7y - 3)dx + (3y - 7x + 7)dy.$$

$$30. \int_K 6x^5 y dx - (y^4 - x^6)dy.$$

Завдання 10. Показати, що заданий вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом для деякої функції $U(x, y)$ та знайти цю функцію.

$$1. (4 + y \cos(xy))dx + (x \cos(xy) + 2y)dy.$$

$$2. (y + \ln(x+1))dx + (x+1 - e^y)dy.$$

$$3. \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2} \right) dy.$$

$$4. (4x^3 y^3 - 3y^2 + 8)dx + (3x^4 y^2 - 6xy - 1)dy.$$

$$5. (2e^{2x} + y + \sin y)dx + (e^{3y} + x + x \cos y)dy.$$

$$6. (e^{x+y} + \cos(x-y))dx + (e^{x+y} - \cos(x-y) + 2y)dy.$$

$$7. (1 - e^{x-y} + \cos y)dx + (e^{x-y} + \cos y)dy.$$

$$8. (x^2 - 3xy^2 + 3)dx + (y^2 - 3x^2 y + 2y)dy.$$

$$9. (\arcsin x + x \ln y)dx + \left(\arcsin y + \frac{x^2}{2y} \right) dy.$$

$$10. (2xye^{x^2} + \ln y)dx + \left(e^{x^2} + \frac{x}{y} + e^y \right) dy.$$

$$11. (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy.$$

$$12. (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4y^3)dy.$$

$$13. (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy.$$

14. $(x^2 - 3xy^2 + 2)dx + (y^2 - 3x^2y)dy$.
15. $(x + y)dx + (x + 2y)dy$.
16. $(2x + 3y)dx + (3x - 4y)dy$.
17. $(3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy$.
18. $(4x + 2y)dx + (2x - 6y)dy$.
19. $(2xy - \cos x)dx + (x^2 - 1)dy$.
20. $\left(2x - \frac{1}{y}\right)dx + \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right)dy$.
21. $(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy$.
22. $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy$.
23. $\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy$.
24. $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy$.
25. $(3x^2 - \operatorname{tg} y)dx - \frac{x}{\cos^2 y}dy$.
26. $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)dx + \left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)dy$.
27. $(y^2 - xy^2)dx + (y^2 - x^2y)dy$.
28. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy$.
29. $(x^2 + y^2 - 2x)dx + 2xydy$.
30. $(3x^2 + y^2 + 2xy)dx + (2xy + x^2)dy$.

Завдання 11. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_S f(x, y, z) dS$,

де S - частина заданої площини, яка відтинається координатними площинами $x = 0, y = 0, z = 0$.

1. $\iint_S (2xy + yz) dS$; $S: 2x - y + z = 2$.
2. $\iint_S (x^2 + y^2 + z) dS$; $S: 3x - 5y - z = 15$.
3. $\iint_S (x + y + z) dS$; $S: 5x + 3y + z = 15$.
4. $\iint_S (2xy + 4y + 2z) dS$; $S: 3x + 2y - 2z = -6$.
5. $\iint_S (xy + yz) dS$; $S: -x + 3y + z = 3$.
6. $\iint_S (6x + 4xy + 3z) dS$; $S: 2x + y + 3z = 6$.
7. $\iint_S (xz + 2y) dS$; $S: x - 2y + 2z = 4$.
8. $\iint_S (x^2 + 2yz) dS$; $S: x - 3y + z = 6$.
9. $\iint_S (2x + 3y - 4xz) dS$; $S: 3x - 2y + 4z = 12$.
10. $\iint_S (xz - 4xy) dS$; $S: 2x - y - z = 4$.
11. $\iint_S (2x + 7xy - yz) dS$; $S: 2x - y + z = 2$.
12. $\iint_S (x^2 - z) dS$; $S: x + 2y - z = 4$.

13. $\iint_S (xy + 4z) dS$; $S: -x - y + 2z = 2$.
14. $\iint_S (xz + 2y) dS$; $S: -2x + y + z = -2$.
15. $\iint_S (8x - y^2 + 3z) dS$; $S: 2x + 2y + 3z = 12$.
16. $\iint_S (3x + yz) dS$; $S: 3x - 3y - z = 3$
17. $\iint_S (2x - 3y + 5yz) dS$; $S: x - 3y + 5z = 15$.
18. $\iint_S (7z - 8xy) dS$; $S: x + 3y - 7z = 21$.
19. $\iint_S (9x - yz) dS$; $S: 6x - 2y - z = 6$.
20. $\iint_S (zy + x) dS$; $S: 2x + y - z = 2$.
21. $\iint_S (xy + 2z) dS$; $S: -x + 3y + z = 6$.
22. $\iint_S (x^2 - yz) dS$; $S: 4x - 4y + z = 4$.
23. $\iint_S (4x + yz) dS$; $S: 6x - 3y + z = 6$.
24. $\iint_S (3z + 2xy) dS$; $S: -2x + 5y - 3z = 10$
25. $\iint_S (y^2 - 4xz) dS$; $S: 4x + 3y - z = 12$.
26. $\iint_S (x^2 + 3xz) dS$; $S: -7x + 2y + z = 14$.

$$27. \iint_S (5z - y^2) dS ; S: x + 3y - 5z = -15.$$

$$28. \iint_S (1 + z - xy) dS ; S: 4x - 2y + z = -4.$$

$$29. \iint_S (7x - 4yz) dS ; S: 15x - 3y + 4z = 60.$$

$$30. \iint_S (2yz - 5xy) dS ; S: -x - y + z = 1.$$

Завдання 12. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду.

$$1. \iint_S z dx dy, \text{ де } S - \text{верхня сторона частини параболоїда обертання}$$

$z = x^2 + y^2$, яка обмежена площинами $x = 0, y = 0, -2x + y = 2$.

$$2. \iint_S z dx dy, \text{ де } S - \text{верхня сторона частини площини } x + y + z = 2, \text{ яка}$$

лежить у першому октанті.

$$3. \iint_S yx dy dz, \text{ де } S - \text{верхня сторона поверхні } x = \sqrt{4 - y^2}, \text{ яка обмежена}$$

площинами $z = 0, z = 2$

$$4. \iint_S (y^2 + z^2) dx dy, \text{ де } S - \text{верхня сторона поверхні } z = \sqrt{4 - x^2}, \text{ яка}$$

обмежена площинами $y = 0, y = 9$.

$$5. \iint_S y^2 z^2 dx dz, \text{ де } S - \text{верхня сторона поверхні } y = \sqrt{1 - x^2}, \text{ яка}$$

обмежена площинами $z = 0, z = 3$.

6. $\iint_S xz dx dy$, де S - верхня сторона частини площини $x + y + z = 1$, яка

лежить у першому октанті.

7. $\iint_S z dx dy$, де S - верхня сторона півсфери $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

8. $\iint_S \sqrt[4]{x^2 + y^2} z dx dy$, де S - верхня сторона частини параболоїда

$$z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0.$$

9. $\iint_S y dx dz$, де S - верхня сторона частини еліпсоїда $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$,

розташованої в першому октанті.

10. $\iint_S xy dx dy$, де S - верхня сторона частини площини $x + y + z = 3$, яка

обмежена площинами $x = 0, y = 0, 2x + y - 2 = 0$.

11. $\iint_S z^2 dx dy$, де S - верхня сторона частини півеліпсоїда

$$z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}, \text{ яка обмежена площинами } x = 0, x = 1, y = 0, y = 1.$$

12. $\iint_S z dx dy$, де S - верхня сторона частини параболоїда $z = 2x^2 + y^2$,

яка обмежена площинами $x = 0, y = 0, -2x + y = 2$.

13. $\iint_S z dx dy$, де S - верхня сторона частини площини

$$4x + 3y + z - 12 = 0, \text{ яка обмежена площинами } x = 0, y = 0, x + y = 2.$$

14. $\iint_S z^2 dx dy$, де S - верхня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$.

15. $\iint_S x^2 dy dz$, де S - верхня сторона еліпсоїда $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$.

16. $\iint_S yx dx dz$, де S - верхня сторона частини циліндра $x^2 + y^2 = 4$,

розташованої в першому октанті і обмеженої площиною $z = 2$.

17. $\iint_S y^2 z dx dy$, де S - верхня сторона частини параболоїда обертання

$z = x^2 + y^2$, яка розташована в першому октанті і відтинається площиною $z = 1$.

18. $\iint_S z dx dy$, де S - верхня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0$.

19. $\iint_S yz dx dy$, де S - верхня сторона частини параболоїда обертання

$z = x^2 + y^2$ при $z \leq 4$.

20. $\iint_S z dx dy$, де S - верхня сторона частини площини $x + y + z = 3$, яка

лежить у першому октанті.

21. $\iint_S xz dx dy$, де S - верхня сторона параболоїда обертання

$z = x^2 + y^2$ при $z \leq 1$.

22. $\iint_S xz dx dy$, де S - верхня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.

23. $\iint_S z dx dy$, де S - зовнішня сторона частини площини

$2x + 3y + z = 6$, яка лежить у першому октанті.

24. $\iint_S xz dx dy$, де S - верхня сторона похилої грані піраміди, утвореної

площинами $x = 0, y = 0, z = 0, x - 2y + z = 2$.

25. $\iint_S xy dx dz$, де S - верхня сторона похилої грані піраміди, утвореної площинами $x=0, y=0, z=0, -3x+y+z=3$.
26. $\iint_S z^2 dx dy$, де S - верхня сторона півсфери $x^2+y^2+z^2=16, z \leq 0$.
27. $\iint_S (y^2+z^2) dx dy$, де S - верхня сторона поверхні $z=\sqrt{9-x^2}$, яка обмежена площинами $y=0, y=3$.
28. $\iint_S xz dx dy$, де S - верхня сторона похилої грані піраміди, утвореної площинами $x=0, y=0, z=0, x+3y-z=3$.
29. $\iint_S x^2 dy dz$, де S - верхня сторона півеліпсоїда $x^2+2y^2+2z^2=2, x \geq 0$.
30. $\iint_S yz dx dz$, де S - верхня сторона частини циліндра $x^2+y^2=9$, яка розміщена в першому октанті і відтинається площиною $z=3$.

Завдання 13. Відомо, що вершини трикутної пластини знаходяться в точках $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ і $C(0;0;c)$, а її густина розподілена по закону $\gamma = \gamma(x, y, z)$. Знайти: а) масу пластини; б) статичні моменти пластини відносно всіх координатних площин; в) центр ваги пластини.

1. $a=1, b=2, c=2$; $\gamma = 2x+3y+z-2$.
2. $a=2, b=1, c=4$; $\gamma = 6x+4y+z-4$.
3. $a=3, b=2, c=6$; $\gamma = 2x+4y+z-6$.

4. $a = -1, b = 2, c = 4; \quad \gamma = -4x + 6y + z - 4.$
5. $a = 2, b = -3, c = 6; \quad \gamma = 5x - 2y + z - 6.$
6. $a = 1, b = 2, c = -2; \quad \gamma = 2x + 5y - z - 2.$
7. $a = -2, b = -1, c = 4; \quad \gamma = -4x - 4y + z - 4.$
8. $a = 4, b = 1, c = 4; \quad \gamma = x + 8y + z - 4.$
9. $a = 1, b = 4, c = 4; \quad \gamma = 6x + y + z - 4.$
10. $a = -4, b = 2, c = 4; \quad \gamma = -x + 6y + z - 4.$
11. $a = 1, b = -2, c = 4; \quad \gamma = 8x - 2y + z - 4.$
12. $a = 2, b = -1, c = -2; \quad \gamma = x - 4y - z - 2.$
13. $a = 1, b = -2, c = -4; \quad \gamma = 8x - 2y - z - 4.$
14. $a = -2, b = 1, c = 6; \quad \gamma = -3x + 8y + z - 6.$
15. $a = 3, b = 1, c = -6; \quad \gamma = 8x + 6y - z - 6.$
16. $a = 4, b = 2, c = -4; \quad \gamma = x + 4y - z - 4.$
17. $a = 1, b = 3, c = 3; \quad \gamma = 7x + y + z - 3.$
18. $a = 3, b = 1, c = 3; \quad \gamma = x + 5y + z - 3.$
19. $a = 3, b = -1, c = 6; \quad \gamma = 4x - 6y + z - 6.$
20. $a = -3, b = 1, c = 3; \quad \gamma = -x + 7y + z - 3.$
21. $a = -1, b = -3, c = -3; \quad \gamma = -3x - 5y - z - 3.$
22. $a = -2, b = -1, c = -4; \quad \gamma = -6x - 4y - z - 4.$
23. $a = -2, b = -4, c = -4; \quad \gamma = -2x - 3y - z - 4.$
24. $a = 3, b = 1, c = -6; \quad \gamma = 8x + 6y - z - 6.$
25. $a = 2, b = -3, c = -6; \quad \gamma = 3x - 4y - z - 6.$
26. $a = 1, b = -2, c = -6; \quad \gamma = 8x - 3y - z - 6.$

27. $a = 6, b = 1, c = -6; \quad \gamma = x + 8y - z - 6.$
28. $a = 2, b = -4, c = 4; \quad \gamma = 6x - y + z - 4.$
29. $a = -4, b = 1, c = 4; \quad \gamma = -x + 6y + z - 4.$
30. $a = -1, b = -1, c = 2; \quad \gamma = -8x - 2y + z - 2.$

Завдання 14. Знайти: а) градієнт заданого скалярного поля $U(M)$; б) дивергенцію та ротор заданого векторного поля $\vec{F}(M)$.

1. $U = x^3 + 2yz^2; \quad \vec{F} = (x^2 + 3y)\vec{i} + (2x + y + z^2)\vec{j} - xyz\vec{k}.$
2. $U = \sin x + z^3 \cos y; \quad \vec{F} = (2x + y^3)\vec{i} + (4x + z^3)\vec{j} - 2xy\vec{k}.$
3. $U = 2xy + 3z^3 + 9y; \quad \vec{F} = x^3y\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^2x\vec{k}.$
4. $U = x^2 + 6xy + 8x; \quad \vec{F} = (2z - x)\vec{i} + (x + 2z)\vec{j} + 3z\vec{k}.$
5. $U = x^3 + 3y^2z - x^2y; \quad \vec{F} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (z^2 + x^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}.$
6. $U = x^2y^3 + y + z; \quad \vec{F} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k}.$
7. $U = xy + yz + xz; \quad \vec{F} = (z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y - x)\vec{k}.$
8. $U = xyz; \quad \vec{F} = (y + z)\vec{i} + x\vec{j} - yz^2\vec{k}.$
9. $U = y^2z + xz + x^2y; \quad \vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}.$
10. $U = xy^2z^3; \quad \vec{F} = x(y^2 - z^2)\vec{i} - y(x^2 + z^2)\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}.$
11. $U = \sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[4]{z}; \quad \vec{F} = xi + yj + zk.$
12. $U = e^{2x+y^2+z^3}; \quad \vec{F} = x^3\vec{i} + 3y^2z\vec{j} - x^2y\vec{k}.$
13. $U = xe + 3xz^2 + 9yz; \quad \vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}.$
14. $U = 2^{xyz}; \quad \vec{F} = x(y + z)\vec{i} + y(x + z)\vec{j} + z(x + y)\vec{k}.$
15. $U = x^3 - 2x^2y + 3z^2; \quad \vec{F} = x^3\vec{i} + y^2\vec{j} + z^3\vec{k}.$

16. $U = x^2 + y^2 + z^2$; $\bar{F} = (xy + z)\bar{i} + (yz + x)\bar{j} + (xz + y)\bar{k}$.
17. $U = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$; $\bar{F} = x\bar{i} - y^2\bar{j} + (x^2 + z^2 - 1)\bar{k}$.
18. $U = 4x^2y + 5xz^3 - 3y$; $\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}$.
19. $U = x^{yz}$; $\bar{F} = xy^2\bar{i} + x^2y\bar{j} + z^2\bar{k}$.
20. $U = x + y^2 + z^3$; $\bar{F} = xyz\bar{i} - y^2z\bar{j} - yz^2\bar{k}$.
21. $U = \sin(xy^2z^3)$; $\bar{F} = x^2y^3\bar{i} + \bar{j} + z\bar{k}$.
22. $U = \ln(x^3 + y^3 - z^3)$; $\bar{F} = (x - 2z)\bar{i} + (x + 3y + z)\bar{j} + (5x + y)\bar{k}$.
23. $U = x^2y^2z^2 - 8xz^3$; $\bar{F} = x\bar{i} - z^2\bar{j} + y^2\bar{k}$.
24. $U = x^3 + y^3 + x^2z^2$; $\bar{F} = xyz^2\bar{i} - x^2yz\bar{j} + xy^2z\bar{k}$.
25. $U = x^3 + y^3 + z^2 + xyz$; $\bar{F} = 3x^2y^2\bar{i} + 2xyz^2\bar{j} - 2x^3z\bar{k}$.
26. $U = xyz^2 + 2y^2 + 3yz$; $\bar{F} = x^3y\bar{i} + 3xyz\bar{j} + y^3z^2\bar{k}$.
27. $U = x^2z - xyz + y^2$; $\bar{F} = (4x - 3y^2)\bar{i} + 2xy^2\bar{j} - 4xz\bar{k}$.
28. $U = ze^{xy}$; $\bar{F} = (y^2 + 5x)\bar{i} + (2y + z^2)\bar{j} - yz\bar{k}$.
29. $U = x^3 + 3xyz - z^3$; $\bar{F} = (6x + 3y)\bar{i} + (2x + z^2)\bar{j} + 2yz\bar{k}$.
30. $U = x \cos y + y \cos z + z \cos x$; $\bar{F} = (2x + 3y^2)\bar{i} + (2x + y)\bar{j} - xyz\bar{k}$.

Завдання 15. Показати, що векторне поле $\bar{F}(M)$ потенціальне й знайти його потенціал.

1. $\bar{F} = (6x + 2y)\bar{i} + (2x + z^2)\bar{j} + 2yz\bar{k}$.
2. $\bar{F} = (3x^2 + 3y - 1)\bar{i} + (3x + z^2)\bar{j} + (2yz + 1)\bar{k}$.
3. $\bar{F} = (2x + y + z)\bar{i} + (x + 2y + z)\bar{j} + (x + y + 2z)\bar{k}$.

4. $\vec{F} = (3x^2 + 2y^2 + 3z)\vec{i} + (4xy + 2y - z)\vec{j} + (3x - y - 2)\vec{k}$.
5. $\vec{F} = (3x^2 + 2xz^2)\vec{i} + 3y^2\vec{j} + 2x^2z\vec{k}$.
6. $\vec{F} = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)\vec{k}$.
7. $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$.
8. $\vec{F} = yz^2\vec{i} + (xz^2 + 4y + 3z)\vec{j} + (2xyz + 3y)\vec{k}$.
9. $\vec{F} = (-y + 2)\vec{i} + (4y - x - z)\vec{j} + (2z - y)\vec{k}$.
10. $\vec{F} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$.
11. $\vec{F} = (2x - 2y + 4z)\vec{i} + (4y - 2x + 2z)\vec{j} + (6z + 4x + 2y)\vec{k}$.
12. $\vec{F} = \frac{1}{y}\vec{i} - \frac{x}{y^2}\vec{j} + 2z\vec{k}$.
13. $\vec{F} = \sin z\vec{i} - \cos z\vec{j} + (x \cos z + y \sin z)\vec{k}$.
14. $\vec{F} = 3x^2y^2z\vec{i} + 2x^3yz\vec{j} + x^3y^2\vec{k}$.
15. $\vec{F} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}\vec{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}\vec{j} + \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}\vec{k}$.
16. $\vec{F} = -yz\vec{i} + (2y - xz)\vec{j} + (3z^2 - xy)\vec{k}$.
17. $\vec{F} = 2xy^2z^2\vec{i} + 2x^2yz^2\vec{j} + 2x^2y^2z\vec{k}$.
18. $\vec{F} = (2x - y + 1)\vec{i} + (2y - x)\vec{j} + (2z - 2)\vec{k}$.
19. $\vec{F} = \left(x - \frac{y^2}{4x^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right)\vec{k}$.
20. $\vec{F} = y^2z^2\vec{i} + 2xyz^2\vec{j} + 2xy^2z\vec{k}$.
21. $\vec{F} = z^2e^{x+y^2}\vec{i} + 2yz^2e^{x+y^2}\vec{j} + 2ze^{x+y^2}\vec{k}$.

$$22. \vec{F} = ye^{xy} \sin z \vec{i} + xe^{xy} \sin z \vec{j} + e^{xy} \cos z \vec{k}.$$

$$23. \vec{F} = e^{xyz} yz \vec{i} + e^{xyz} xz \vec{j} + e^{xyz} xy \vec{k}.$$

$$24. \vec{F} = \vec{i} + 2y\vec{j} + 3z^2\vec{k}.$$

$$25. \vec{F} = (3x^2 - 4xy)\vec{i} - 2x^2\vec{j} + 6z\vec{k}.$$

$$26. \vec{F} = y^2z^3\vec{i} + 2xyz^3\vec{j} + 3xy^2z^2\vec{k}.$$

$$27. \vec{F} = (8xy + 5z^3)\vec{i} + (4x^2 - 3)\vec{j} + 15xz^2\vec{k}.$$

$$28. \vec{F} = (12x^2 + 6xz + 3y^2)\vec{i} + 6xy\vec{j} + (3x^2 - 3z^2)\vec{k}.$$

$$29. \vec{F} = 2xy^3z^4\vec{i} + 3x^2y^2z^4\vec{j} + 4x^2y^3z^3\vec{k}.$$

$$30. \vec{F} = \frac{1}{\cos^2 x} \vec{i} - 2 \sin y \cos y \vec{j} - \frac{1}{\sin^2 z} \vec{k}.$$

Завдання 16. Задані векторне поле $\vec{F}(M)$ й трикутна піраміда з вершинами в точках $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;1)$ і $O(0;0;0)$. Обчислити:

а) потік поля $\vec{F}$ через сторону грані ABC у напрямку нормалі до площини, що утворює з віссю Oz гострий кут; б) потік поля $\vec{F}$ через зовнішню сторону межі заданої піраміди за допомогою формули Остроградського; в) циркуляцію поля $\vec{F}$ по контуру $ABCA$ за допомогою формули Стокса.

$$1. \vec{F} = (y + 3x)\vec{i} + 4y\vec{j} + (x + 6z)\vec{k}.$$

$$2. \vec{F} = (2x + 3z)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + (x + 2y)\vec{k}.$$

$$3. \vec{F} = 4x\vec{i} + (y + 3x)\vec{j} + (2y + 3z)\vec{k}.$$

$$4. \vec{F} = (5x - 7y)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + (y - 3z)\vec{k}.$$

5. $\bar{F} = (x - 2z)\bar{i} + (x + 3y + z)\bar{j} + (5x + y)\bar{k}$.
6. $\bar{F} = (x - y + 3z)\bar{i} + (y - 3x + z)\bar{j} + (x - 3y + z)\bar{k}$.
7. $\bar{F} = (2y + z)\bar{i} + (x - y)\bar{j} + (y - 2z)\bar{k}$.
8. $\bar{F} = 2z\bar{i} + (y - x)\bar{j} + 3x\bar{k}$.
9. $\bar{F} = (y + x)\bar{i} + z\bar{j} + (2y - x)\bar{k}$.
10. $\bar{F} = (y + 3x)\bar{i} + (x - z)\bar{j} + (y + z)\bar{k}$.
11. $\bar{F} = (y - 7x)\bar{i} + 4y\bar{j} - 2z\bar{k}$.
12. $\bar{F} = (3y + x + 2z)\bar{i} + (2x + z)\bar{j} + (x - y)\bar{k}$.
13. $\bar{F} = (y - 3x)\bar{i} - 3x\bar{j} + 2z\bar{k}$.
14. $\bar{F} = (8y + 3x)\bar{i} + (9z - 5x)\bar{j} + (3x + z)\bar{k}$.
15. $\bar{F} = (2x - 7z)\bar{i} + (y + x)\bar{j} + (x + 2z)\bar{k}$.
16. $\bar{F} = (2z - x)\bar{i} + (x + z)\bar{j} + 3z\bar{k}$.
17. $\bar{F} = 2z\bar{i} + (y - x)\bar{j} + 3x\bar{k}$.
18. $\bar{F} = 4z\bar{i} + (x - y - z)\bar{j} + (3y + z)\bar{k}$.
19. $\bar{F} = (y + z)\bar{i} - 2x\bar{j} + (2z - x)\bar{k}$.
20. $\bar{F} = (y + 3x)\bar{i} + (x - z)\bar{j} + (4y - 3z)\bar{k}$.
21. $\bar{F} = (y + x + z)\bar{i} - 7z\bar{j} + (x + 9z)\bar{k}$.
22. $\bar{F} = (y - z)\bar{i} + (2x + y)\bar{j} + (x + y + z)\bar{k}$.
23. $\bar{F} = (y + x)\bar{i} + (y + z)\bar{j} + (2x + 4z)\bar{k}$.
24. $\bar{F} = (x - 2z)\bar{i} + (y - 2z)\bar{j} + (2x - y + 2z)\bar{k}$.
25. $\bar{F} = (x - z)\bar{i} + (y + z)\bar{j} + (x - y)\bar{k}$.

$$26. \bar{F} = (2z + x)\bar{i} + (x - 3z)\bar{j} + (2x - y + 2z)\bar{k}.$$

$$27. \bar{F} = (x + y + z)\bar{i} + 2z\bar{j} + (y - 7z)\bar{k}.$$

$$28. \bar{F} = -4z\bar{i} + 9y - x + z)\bar{j} + (x + z)\bar{k}.$$

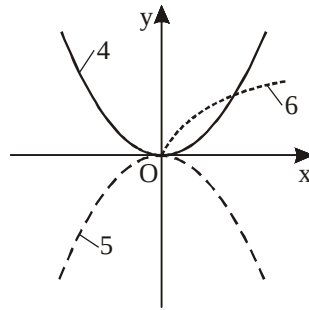
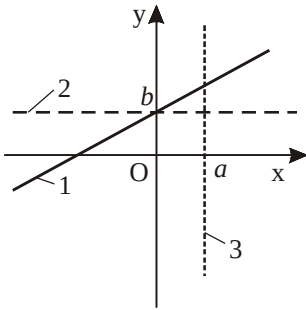
$$29. \bar{F} = (x + z)\bar{i} + (y + x)\bar{j} + (3x - z)\bar{k}.$$

$$30. \bar{F} = x\bar{i} + 4y\bar{j} + 6z\bar{k}.$$

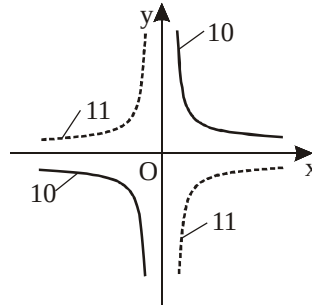
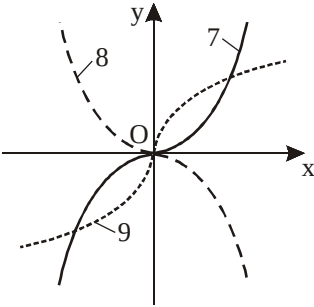
Рекомендована література

1. Кулініч Г.Л. та ін. Вища математика: Основні розділи: Підручник. Кн.1 – К.:Либідь, 2003.
2. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення. – К.: Техніка, 2003.
3. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Зб. задач. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення. – К.: Техніка, 2004.
4. Васильченко І.П. та ін. Вища математика: Основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник. Кн.2 – К.: Либідь, 1994.
5. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989.
6. Шипачёв В.С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1990.
7. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2 – М.: Высш. шк., 1986.

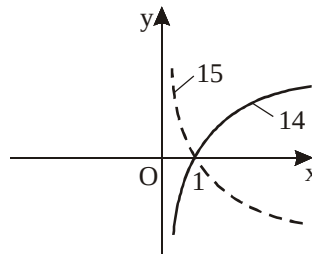
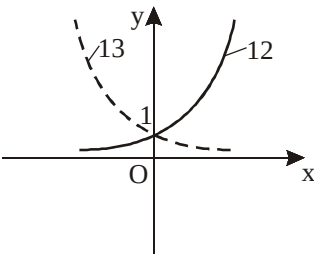
Додаток 1. Прямі та криві на площині



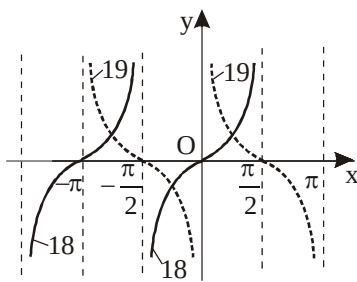
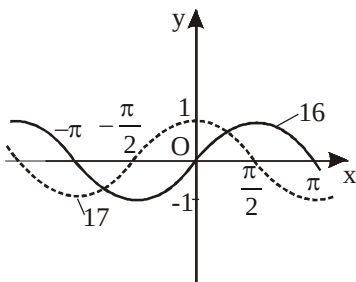
1. $y = kx + b$; 2. $y = b$; 3. $x = a$; 4. $y = x^2$; 5. $y = -x^2$; 6. $y = \sqrt{x}$.



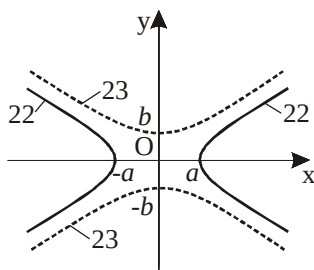
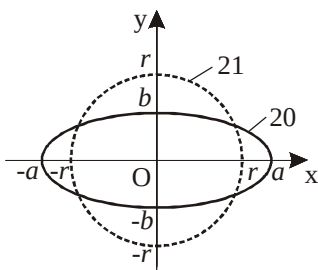
7. $y = x^3$; 8. $y = -x^3$; 9. $y = \sqrt[3]{x}$; 10. $y = \frac{1}{x}$; 11. $y = -\frac{1}{x}$.



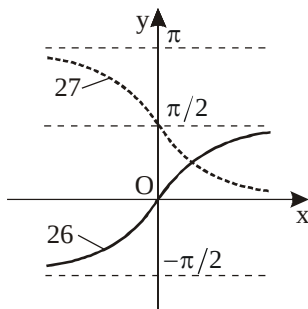
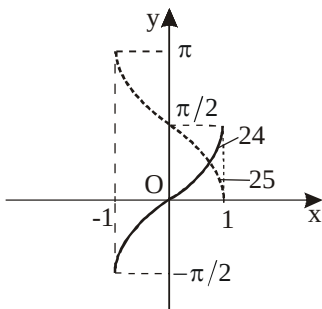
12. $y = a^x, a > 1$; 13. $y = a^x, 0 < a < 1$;
14. $y = \log_a x, a > 1$; 15. $y = \log_a x, 0 < a < 1$.



16. $y = \sin x$; 17. $y = \cos x$; 18. $y = \operatorname{tg} x$; 19. $y = \operatorname{ctg} x$.

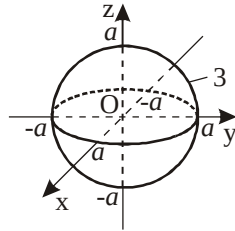
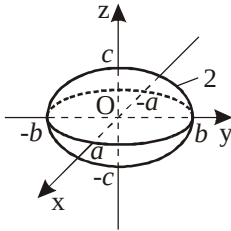
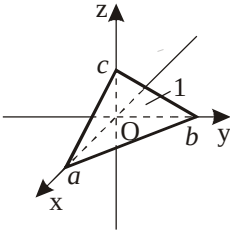


20. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 21. $x^2 + y^2 = r^2$; 22. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; 23. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

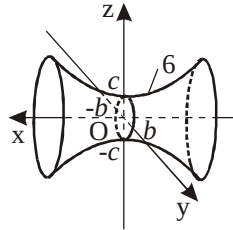
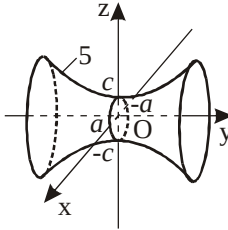
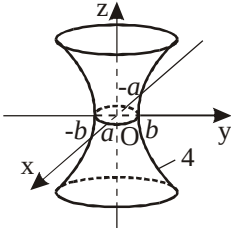


24. $y = \arcsin x$; 25. $y = \arccos x$; 26. $y = \operatorname{arctg} x$; 27. $y = \operatorname{arctctg} x$.

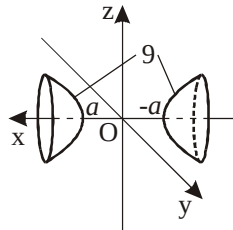
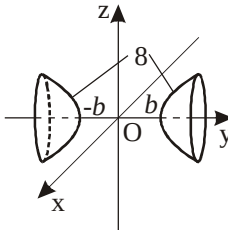
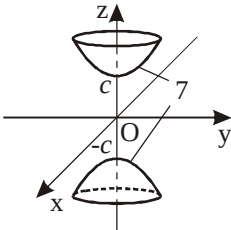
Додаток 2. Поверхні у просторі



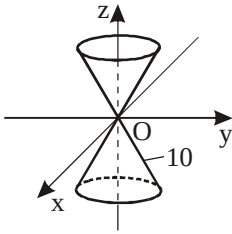
1. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; 2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; 3. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.



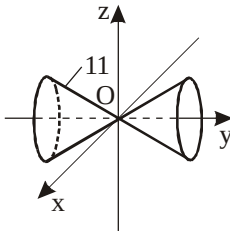
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; 5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; 6. $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.



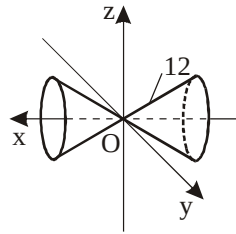
7. $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; 8. $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; 9. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.



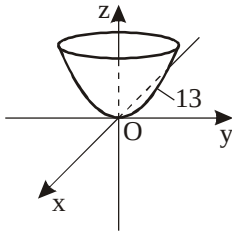
$$10. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0;$$



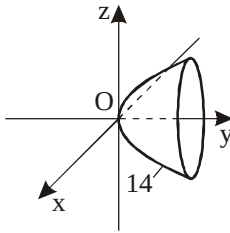
$$11. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0;$$



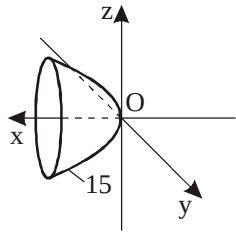
$$12. -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$



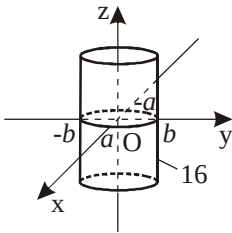
$$13. z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \quad (p > 0, q > 0);$$



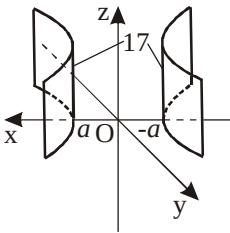
$$14. y = \frac{x^2}{p} + \frac{z^2}{q} \quad (p > 0, q > 0);$$



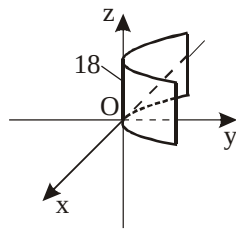
$$15. x = \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} \quad (p > 0, q > 0).$$



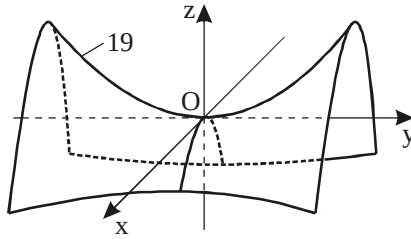
$$16. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$



$$17. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$



$$18. x^2 = 2py \quad (p > 0).$$



$$19. z = -\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \quad (p > 0, q > 0).$$

Додаток 3. Таблиця інтегралів

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1), \quad 8. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad 9. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$3. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C, \quad 10. \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$4. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C, \quad 11. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tg x + C,$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad 12. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\ctg x + C,$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad 13. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C,$$

$$7. \int e^x dx = e^x + C, \quad 14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + C.$$