УДК 531/534: 62-755: 62-752

Г.Б. Філімоніхін, доц., д-р. техн. наук, І.І. Філімоніхіна, асистент
Кіровоградський національний технічний університет

Застосування функції Гамільтона до визначення умов настання автобалансування

Доведена застосовність функції Гамільтона до вивчення кількості й необхідних умов стійкості усталених рухів системи, складеної з ротора і приєднаних до нього коригувальних вантажів. Ефективність метода показана на прикладі кульового (маятникового) автобалансира, який зрівноважує ротор, що здійснює плоский рух і встановлений на симетричні опори. Установлено, що на закритичних швидкостях обертання ротора стійкі тільки основні рухи системи – на яких ротор найбільш зрівноважений
автобалансир, ротор, дисбаланс, функція Гамільтона, стійкість

Для зрівноважування на ходу роторів, що швидко обертаються, застосовуються пасивні автобалансири (АБ), такі як кульові, кільцеві, маятникові [1-5]. В них коригувальні вантажі (КВ) при певних умовах з часом самі приходять в положення, в якому зрівноважують ротор і потім обертаються разом з ним як одне ціле, поки не почне змінюватися дисбаланс, кутова швидкість обертання ротора, чи не з'являться збурення іншого походження.

Процес визначення умов настання автобалансування ускладнює велика кількість усталених рухів, які теоретично може здійснювати система. На практиці будуть здійснюватися тільки ті рухи, які стійкі. В зв'язку з цим необхідним етапом визначення умов настання автобалансування є пошук всіх усталених рухів системи ротор-АБ і оцінка їх стійкості. Огляд основних методів і результатів з розв'язання цієї задачі наведений у роботах [4,5]. Серед всіх методів виділяється підхід, застосований у роботах [2,3]. Перевагою цього підходу є те, що для його реалізації не треба складати диференціальні рівняння руху системи. У методі використовується аналог потенціальної енергії системи. З його допомогою, із застосуванням теореми Лежен-Діріхле, досліджувалася стійкість всіх усталених рухів системи ротор – двохкульовий АБ. Як було показано у роботах [5,6], цей підхід був застосований без належного теоретичного обґрунтування і як наслідок були одержані невірні результати про стійкість на закритичних швидкостях обертання ротора побічного руху системи, у якому кулі максимально відхилені у легкий бік ротора. В цій роботі розвивається новий підхід, заснований на використанні функції Гамільтона до дослідження кількості, умов існування і стійкості усталених рухів системи ротор-АБ.

Дослідимо теоретичну можливість застосування функції Гамільтона. Запишемо рівняння Лагранжа II роду для голономної системи із стаціонарними в'язями з N степенями вільності

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i, \quad /i=\overline{1,N}/, \tag{1}$$

де L - функція Лагранжа;

$q_i, \dot{q}_i$ - узагальнені координати і швидкості;

Q_i - узагальнена сила, що відповідає непотенціальним силам.

Розглянемо

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)-\dot{q}_iQ_i\right].$$

Звідки знаходимо

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L\right)=\sum_{i=1}^{N}\dot{q}_iQ_i\ , \tag{2}$$

де враховано, що $\partial L/\partial t=0$. Позначимо через

$$H^*=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L \tag{3}$$

функцію Гамільтона, виражену через узагальнені координати і швидкості.

Для динамічних систем

$$L=T-\Pi=T_2+T_1+T_0-\Pi\ ,$$

де T_2, T_1, T_0 - складові кінетичної енергії, які є відповідно квадратичною, лінійною формою узагальнених швидкостей, і незалежною від цих швидкостей;

Π - потенціальна енергія системи.

З огляду на теорему Эйлера про однорідні функції одержимо:

$$H^*=T_2+\Pi-T_0. \tag{4}$$

Будемо розглядати роторні системи, у яких:

1) ротор установлений на симетричні пружні опори (в яких сил опору немає);
2) ротор обертається із сталою кутовою швидкістю;
3) відносному рухові КВ перешкоджають сили в'язкого опору.

Узагальнені координати, що визначають рух системи, будемо вводити відносно рухомої системи координат, яка синхронно обертається разом з ротором. Тоді функції L, H^* не залежать від часу, $\sum_{i=1}^{N}\dot{q}_iQ_i=-2\Phi$, де Φ – позитивно визначена дисипативна функція Релея, що залежить тільки від узагальнених швидкостей відносного руху приєднаних тіл.

Для систем, що розглядаються, маємо такий закон зміни функції Гамільтона:

$$dH^*/dt=-2\Phi. \tag{5}$$

На підставі (5) можна стверджувати, що на усталених рухах системи, на яких немає відносного руху КВ, функція Гамільтона H^* приймає екстремальне значення, і серед усіх можливих усталених рухів стійкими можуть бути тільки ті, на яких H^* приймає мінімальне значення.

Для пошуку усталених рухів системи треба використовувати функцію Гамільтона при нульових значеннях узагальнених швидкостей. Із використанням варіацій узагальнених координат можна показати, що рівняння усталених рухів матимуть вигляд

$$\partial\widetilde{H}^*/\partial q_i=0,\quad /i=\overline{1,n}/,\quad \widetilde{H}^*=\Pi-T_0. \tag{6}$$

У більшості задач функція $\widetilde{H}^*$ не є позитивно визначеною. Тому можливі такі варіанти оцінки стійкості.

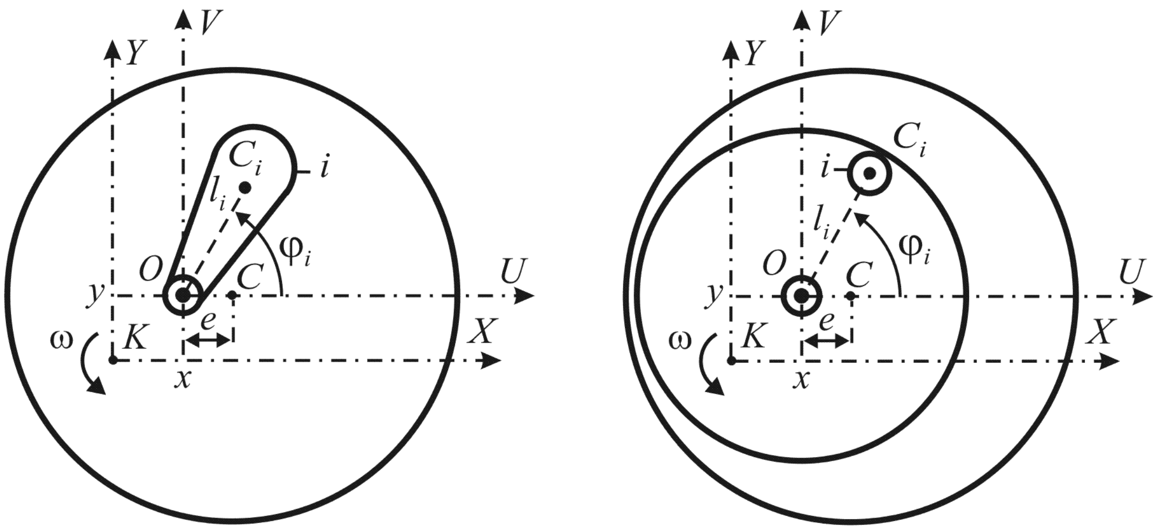
1) Порівняння значень функції $\widetilde{H}^*$ на різних усталених рухах. Серед всіх усталених рухів стійкими можуть бути тільки ті, на яких у функції $\widetilde{H}^*$ найменше значення.

2) Дослідження функції $\widetilde{H}^*$ на умовний екстремум при деяких додаткових обмеженнях, накладених на зміну координат. Оскільки нові в'язі не порушують

стійкості рухів системи, то за допомогою такого підходу можна одержувати необхідні умови стійкості, або достатні умови нестійкості усталених рухів.

Нижче розглядається приклад застосування запропонованого підходу до дослідження кількості, умов існування і стійкості усталених рухів системи, складеної з ротора і кульового або маятникового АБ.

Для дослідження динаміки системи прийнята так звана плоска модель ротора й АБ. У її рамках ротор – симетричний плоский диск маси *M*, насаджений з ексцентриситетом *e* на абсолютно жорсткий вал, перпендикулярний його площині (рис. 1). Ротор розташований вертикально, рухається плоскопаралельно в горизонтальній площині і обертається із сталою кутовою швидкістю ω. У випадку маятникового АБ (рис. 1, а) на вал ротора насаджені *n* маятників маси m_i, фізичної довжини l_i з осьовим моментом інерції J_{Oi} відносно осі, на яку насаджені, $/i=\overline{1,n}/$. У випадку кульового АБ (рис. 1, б) *n* куль, масою m_i рухаються по кільцевих доріжках так, що відстань від осі вала ротора до центра мас кулі – l_i, причому кулі мають скінчений радіус і осьовий момент інерції кулі відносно осі вала ротора J_{Oi}, $/i=\overline{1,n}/$.



а б

а – маятниковий АБ, б – кульовий АБ

Рисунок 1 – Плоска модель ротора і АБ

Зв'яжемо з ротором допоміжну рухому систему координат – осі *U*, *V*. Перша вісь *U* проходить через вал – точку *O* і центр мас ротора – точку *C*. Друга вісь *V* проходить через точку *O* і перпендикулярна осі *U*. Положення маятників відносно ротора визначаються кутами φ_i, що відраховуються від осі *U* до лінії, що виходить з осі вала ротора і спрямована у бік центра мас КВ. Положення вала визначається координатами *x, y* відносно осей *X, Y*, що виходять з осі обертання – точки *K* і співнапрямлені відповідно осям *U, V*. Поворотові маятника *i* навколо вала перешкоджає момент сил в'язкого опору $h_i\dot{\varphi}_i$, і сила опору з таким же моментом перешкоджає руху кулі по доріжці. При нерухомому роторі вал суміщений з віссю обертання. У процесі руху вал (точка *O*) відхиляється від осі обертання (точки *K*) і на нього починають діяти оновлююча сила $-c\vec{r}$, де $\vec{r}=\overrightarrow{KO}$. Для розглянутої системи

$$\Pi=\frac{1}{2}c(x^2+y^2), \quad \Phi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}h_i\dot{\varphi}_i^2 . \qquad (7)$$

В усталених рухах відносний рух КВ припиняється і тому похідні дорівнюють нулеві. Система поводиться як абсолютно тверде тіло, що обертається зі сталою кутовою швидкістю ω. Її кінетична енергія не містить узагальнених швидкостей і може бути подана у вигляді

$$T_0 = J_K \omega^2 / 2 , \tag{8}$$

де J_K - осьовий момент інерції системи відносно осі обертання. У свою чергу

$$J_K = J_O + \sum_{i=1}^{n} J_{O_i} + M_\Sigma \left(x^2 + y^2\right) + 2x\left(\sum_{i=1}^{n} m_i l_1 \cos\varphi_i + Me\right) + 2y\sum_{i=1}^{n} m_i l_i \sin\varphi_i , \tag{9}$$

де $M_\Sigma = M + \sum_{i=1}^{n} m_i$ - маса всієї системи.

Тоді функція Гамільтона на усталеному русі має вигляд:

$$2\widetilde{H}^* = \left(c - M_\Sigma \omega^2\right)\left(x^2 + y^2\right) - \omega^2\left[J_O + \sum_{i=1}^{n} J_{O_i}\right] - 2x\omega^2\left(\sum_{i=1}^{n} m_i l_i \cos\varphi_i + Me\right) -$$

$$- 2y\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i l_i \sin\varphi_i . \tag{10}$$

Ця функція узагальнює аналог потенціальної енергії, одержаної у роботах [6,7] і розповсюджує її на випадок АБ з різними КВ.

Рівняння усталених рухів системи мають вигляд

$$\frac{\partial \widetilde{H}^*}{\partial x} = \left(c - M_\Sigma \omega^2\right)x - \omega^2\left(\sum_{i=1}^{n} m_i l_i \cos\varphi_i + Me\right) = 0 , \quad \frac{\partial \widetilde{H}^*}{\partial y} = \left(c - M_\Sigma \omega^2\right)y - \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i l_i \sin\varphi_i = 0 ,$$

$$\frac{\partial \widetilde{H}^*}{\partial \varphi_i} = m_i l_i \omega^2 \left(x \sin\varphi_i - y\cos\varphi_i\right) = 0, \ /i = \overline{1,n}/ . \tag{11}$$

Ці рівняння повністю збігаються із рівняннями, одержаними в роботах [4,5].

Усталені рухи є розв'язками системи алгебраїчних рівнянь (11). Вони наступні.

1) Сім'я основних рухів:

$$x = 0 , \ y = 0 , \ u = \sum_{i=1}^{n} m_i l_i \cos\varphi_i + Me = 0 , \ v = \sum_{i=1}^{n} m_i l_i \sin\varphi_i = 0 , \tag{12}$$

де u, v - параметри, що визначають незрівноваженість системи відносно осі вала ротора.

2) Побічні рухи

$$\varphi_i = \pi k_i , \ \ /i = \overline{1,n}/ , \ y(k) = 0 , \ x(k) = \frac{\omega^2 [Me + s(k)]}{c - M_\Sigma \omega^2} , \ \ s(k) = \sum_{i=1}^{n} m_i l_i (-1)^{k_i} , \tag{13}$$

де $k_i \in \{0,1\}$, причому коли $k_i = 0$, то маятник i відхилений у бік центра мас ротора, а коли $k_i = 1$ - то у протилежний бік; k десяткове число, яке на одиницю більше за двійкове число $k_1 k_2 k_3 ,..., k_n$. Усього таких рухів 2^n.

Порівняємо значення функції Гамільтона на усталених рухах. На основному русі

$$2\widetilde{H}^*(0) = -\omega^2\left[J_O + \sum_{i=1}^{n} J_{O_i}\right]. \tag{14}$$

На побічних рухах

$$2\widetilde{H}^*(k) = -\frac{\omega^4 [Me + s(k)]^2}{\left(c - M_\Sigma \omega^2\right)} - \omega^2\left[J_O + \sum_{i=1}^{n} J_{O_i}\right]. \tag{15}$$

Розглянемо можливі випадки.

1) Обертання ротора з докритичними швидкостями $\omega < \omega_{кр} = \sqrt{c / M_\Sigma}$, $\omega_{кр}$ - критична швидкість обертання ротора з КВ як одного цілого. Тоді функція $\widetilde{H}^*$ приймає найменше можливе значення на першому побічному русі, для якого всі $k_i = 0$, тобто всі маятники відхилені у важкий бік ротора: $\widetilde{H}^*(1) < \widetilde{H}^*(k),\ k \neq 1$. Тому тільки цей рух може бути стійким.

2) Обертання ротора з закритичними швидкостями $\omega > \omega_{кр} = \sqrt{c / M_\Sigma}$.

a) Ємності КВ вистачає для зрівноваження ротора: $Me \leq \sum_{i=1}^{n} m_i l_i$. Тоді для довільного побічного руху $\widetilde{H}^*(0) < \widetilde{H}^*(k),\ k \neq 0$, тобто на основному русі $\widetilde{H}^*$ приймає мінімальне можливе значення і тому тільки цей рух може бути стійким.

b) Якщо ємності АБ не вистачає для зрівноважування ротора $Me \geq \sum_{i=1}^{n} m_i l_i$, то в основному русі всі маятники відхилені в легкий бік ротора і не можуть його зрівноважити. На цьому русі $k = 2^n$, усі $k_i = 1$ і $\widetilde{H}^*(2^n) > \widetilde{H}^*(k),\ k \neq 2^n$, тому тільки цей основний рух може бути стійким.

Дослідимо $\widetilde{H}^*$ на умовний екстремум. Припускаємо, що виконуються перших два рівняння усталених рухів системи (11). Їх можна розглядати як в'язі, накладені на рух системи. Тоді функція $\widetilde{H}^*$ приводиться до вигляду:

$$2\widetilde{H}^* = -\frac{\omega^4}{c - M_\Sigma \omega^2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i l_i \cos\varphi_i + Me\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i l_i \sin\varphi_i\right)^2\right]. \quad (16)$$

Уведемо позначення

$$f = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i l_i \cos\varphi_i + Me\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i l_i \sin\varphi_i\right)^2 = u^2 + v^2. \quad (17)$$

Зробимо такі зауваження:

1) якщо на усталеному русі функція *f* має мінімум, то цей рух може бути стійким на закритичних швидкостях обертання ротора;

2) якщо – максимум, то на докритичних;

3) якщо – неекстремальне значення (не мінімум і не максимум), то рух нестійкий на будь-яких швидкостях обертання ротора.

Функція *f* записана через параметри дисбалансу u, v має абсолютний мінімум на основних рухах, на яких $u = v = 0$.

Розглянемо функцію f як функцію кутів поворотів маятників у випадку двох маятників. Функція *f* приймає вигляд

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = (u^2 + v^2)/2,$$

$$u = m_1 l_1 \cos\varphi_1 + m_2 l_2 \cos\varphi_2 + Me, \quad v = m_1 l_1 \sin\varphi_1 + m_2 l_2 \sin\varphi_2. \quad (18)$$

Зауважимо, що у системи два ізольованих істотно-відмінних основних рухи і на них $f(\varphi_1, \varphi_2)$ має ізольовані абсолютні мінімуми.

З рівняння (18) знаходимо

$$\frac{\partial^2 f(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_1^2} = a_{11} = m_1^2 l_1^2 - m_1 l_1 (u \cos\varphi_1 + v \sin\varphi_1),$$

$$\frac{\partial^2 f(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_2^2} = a_{22} = m_2^2 l_2^2 - m_2 l_2 (u \cos\varphi_2 + v \sin\varphi_2),$$

$$\frac{\partial^2 f(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2}=\frac{\partial^2 f(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2\partial\varphi_1}=a_{12}=a_{21}=m_1 l_1 m_2 l_2\cos(\varphi_2-\varphi_1), \quad \Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^3. \qquad (19)$$

1) На основному русі

$$a_{11}=m_1^2 l_1^2>0,\ \ a_{22}=m_2^2 l_2^2>0,\ \ a_{12}=a_{21}=m_1 l_1 m_2 l_2\cos(\varphi_2-\varphi_1),$$
$$\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=m_1^2 l_1^2 m_2^2 l_2^2\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)>0.$$

Це відповідає мінімуму і тому основний рух може бути стійким тільки на закритичних швидкостях обертання ротора.

2) Побічні рухи.

а) На першому побічному русі $\varphi_1=0,\ \varphi_2=0$ і

$$a_{11}=-m_1 l_1(m_2 l_2+Me)<0,\ \ a_{22}=-m_2 l_2(m_1 l_1+Me)<0,\ \ a_{12}=m_1 l_1 m_2 l_2,$$
$$\Delta=Mem_1 l_1 m_2 l_2(m_1 l_1+m_2 l_2+Me)>0$$

Це відповідає максимуму і тому рух може бути стійким стійкий на докритичних швидкостях обертання ротора.

б) На другому побічному русі $\varphi_1=0,\ \varphi_2=\pi$ і

$$a_{11}=-m_1 l_1(-m_2 l_2+Me),\ \ a_{22}=m_2 l_2(m_1 l_1+Me),\ \ a_{12}=-m_1 l_1 m_2 l_2,$$
$$\Delta=-Mem_1 l_1 m_2 l_2(m_1 l_1-m_2 l_2+Me).$$

Розглянемо різні випадки.

і) $Me>m_2 l_2$ - рух завжди нестійкий.

іі) $m_2 l_2>Me$ - можливі випадки:

- $m_2 l_2<Me+m_1 l_1$ - рух завжди нестійкий;
- $m_2 l_2>Me+m_1 l_1$ - рух може бути стійким на закритичних швидкостях. Але це основний рух. У ньому другий маятник має більшу балансувальну ємність ніж перший маятник і ротор разом.

Аналогічний результат можна одержати для третього побічного руху $\varphi_1=\pi,\ \varphi_2=0$.

в) На четвертому побічному русі $\varphi_1=\pi,\ \varphi_2=\pi$ і

$$a_{11}=m_1 l_1(-m_2 l_2+Me),\ \ a_{22}=m_2 l_2(-m_1 l_1+Me),\ \ a_{12}=m_1 l_1 m_2 l_2,$$
$$\Delta=Mem_1 l_1 m_2 l_2(-m_1 l_1-m_2 l_2+Me).$$

Розглянемо різні випадки.

і) Якщо $Me<m_1 l_1+m_2 l_2$, то рух завжди нестійкий, тому що $\Delta<0$.

іі) Якщо $Me<m_1 l_1+m_2 l_2$, то $a_{11}>0$, $a_{22}>0$, $\Delta>0$ - мінімум. Рух стійкий на закритичних швидкостях. Це - основний рух - випадок великого дисбалансу.

Проведені дослідження дозволяють зробити такі висновки:

1. Для роторів на симетричних пружних опорах, які зрівноважуються АБ, для визначення кількості, умов існування і стійкості усталених рухів ефективним є метод використання функції Гамільтона, як функції узагальнених координат і швидкостей.

2. На усталених рухах ця функція приймає екстремальне значення, а стійкими можуть бути тільки ті, на яких це мінімальне можливе значення.

3. У випадку багатокульового (багатомаятникового) АБ на докритичних швидкостях стійким є перший побічний рух, у якому всі КВ відхилені у важкий бік ротора, на закритичних швидкостях стійкими можуть бути тільки основні рухи (у яких ротор найбільше зрівноважений).

Список літератури

1. Thearle E. L. Automatic dynamic balancers Part 1 – Leblanc balancers // Machine Design, 1950a, Vol. 22 No 9, pp. 119-124.

2. Thearle E. L. Automatic dynamic balancers Part 2 – Ring, pendulum and ball balancers // Machine Design, 1950b, Vol. 22 No 10, pp. 103-106.
3. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. -М.: Наука, 2002. -119 с.
4. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами: Монографія (за спеціальністю 05.02.09 - динаміка та міцність машин). - Кіровоград: КНТУ, 2004. - 352 с.
5. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів пасивними автобалансирами. Дис… доктора техн. наук 05.02.09 – Динаміка та міцність машин / Національний техн. ун-т України "Київський політехнічний інститут", Київ, 2005. – 352 с.
6. Муйжниек А.И. Исследование устойчивости автоматического динамического балансировщика // Ученые записки Рижского политехнического института. 1959. -1. Вып. 1. - С. 155-170.
7. Муйжниек А.И. Некоторые вопросы теории автоматической динамической балансировки // Вопросы динамики и прочности. Вып. -6. Рига: Изд-во АН ЛатССР, 1959. - С. 123-145.

Доказана возможность применения функции Гамильтона к изучению количества и необходимых условий устойчивости установившихся движений системы, составленной из ротора и присоединенных к нему корректирующих грузов. Эффективность метода показана на примере шарового (маятникового) автобалансира, уравновешивающего ротор, совершающий плоское движение и установленный на симметричные опоры. Установлено, что на закритических скоростях вращения ротора устойчивы только основные движения системы – на которых ротор наиболее уравновешен.

Is proved possibility of application of the Hamilton`s function to the study of quantity and terms of stability of the set motions of the system made from a rotor and added to him corrective masses . Efficiency of method is shown on the example of ball (pendulum) autobalancer which balancing a rotor on symmetric supports, accomplishing flat motion. It is set, that on speeds of rotation of rotor upper then critical speed only main motions of the system are steady – in which a rotor is most balanced on.