

**Блохин Л.Н., Осадчий С.И.,  
Дидык А.К., Рудюк Г.И.**

**Технологии конструирования  
современных конкурентоспособных  
комплексов управления стохастическим  
движением объектов**

**МОНОГРАФИЯ**

Кировоград  
Видавецъ Лисенко В.Ф.  
2015

**УДК 681.513**  
**ББК 32.97**  
**Б 70**

*Рекомендовано к печати Ученым советом Кировоградского национального технического университета (протокол № 1 от 28.09.2015 г.)*

**Блохин Л.Н., Осадчий С.И., Дидык А.К., Рудюк Г.И.**  
Б 70 Технологии конструирования современных конкурентоспособных комплексов управления стохастическим движением объектов. – Кировоград: издатель – Лисенко В.Ф., 2015 – 284 с.  
ISBN 978-617-7197-30-9

Изложены технологии применения положений современной теории управления для проектирования оптимальных структур регуляторов в комплексах управления стохастическим движением объектов. В основе предлагаемых технологий лежат новые спектральные методы и алгоритмы оптимального наблюдения, структурной идентификации, фильтрации, комплексирования, синтеза и анализа качества многомерных многосвязных динамических систем (минимально-фазовых и неминимально-фазовых) работающих в стохастических условиях. Указанные методы отличаются возможностью использования результатов динамической аттестации измерителей для проектирования оптимальных регуляторов.

Книга предназначена для специалистов в области применения информационных технологий для синтеза систем, научных работников, а также для преподавателей, инженеров, аспирантов и студентов старших курсов высших учебных заведений, специализирующихся в сфере методов современной теории управления, их применения в практике.

ББК 32.97

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор **Ладанюк А. П.** Национальный университет пищевых технологий, заведующий кафедрой автоматизации процессов управления;

доктор технических наук, профессор **Невлюдов И. Ш.** Харьковский национальный университет радиоэлектроники, заведующий кафедрой технологии и автоматизации производства радиоэлектронных и электронно-вычислительных средств;

доктор технических наук, профессор **Кошевой Н. Д.** Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского, заведующий кафедрой авиационных приборов и измерений.

ISBN 978-617-7197-30-9

© Блохин Л.Н., Осадчий С.И.,  
Дидык А.К., Рудюк Г.И., 2015.  
© Издатель Лисенко В.Ф., 2015.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	13
<b>ГЛАВА 1 ПРОБЛЕМЫ МАКСИМИЗАЦИИ КАЧЕСТВА (ТОЧНОСТИ) СТОХАСТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ</b> .....	19
1.1 Исследуемые типы ответственных управляемых подвижных объектов, их основные части, цели и задачи управления движением объектов. ....	20
1.2 Основные причины, побуждающие максимизировать качество и эффективность комплексов управления подвижными объектами в ответственных режимах их функционирования.....	21
1.3 Условия, сдерживающие процесс максимизации достижимых уровней качества и конкурентоспособности управления движением исследуемых объектов .....	22
1.4 Основные цели и задачи монографии.....	22
<b>ГЛАВА 2 ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ИНФОРМАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ</b> .....	24
2.1 Базовые (расчетные) оптимальные фильтры в многомерной линейной устойчивой системе измерения детерминированной информации.....	25
2.1.1 Выбор структуры базового фильтра при одинаковом количестве компонентов векторов сигналов наблюдения и выходов измерительной системы .....	26
2.1.2 Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры базового фильтра измерительной системы (общий случай) .....	27
2.2 Особенности решения задач оптимальной фильтрации детерминированной информации в многомерных неустойчивых линейных системах измерений.....	30
2.3 Задачи и алгоритмы синтеза оптимальных структур фильтров в системах измерения детерминированной информации.....	33

2.3.1	Задача синтеза оптимальной структуры фильтра при равенстве количества координат векторов спектров сигналов наблюдения и выходов измерительной системы, а также учете реальных характеристик её элементов.....	33
2.3.2	Задача синтеза оптимальной структуры фильтра при неодинаковом количестве координат векторов спектров наблюдения и выходов измерительной системы и реальных характеристиках её элементов .....	35
2.3.3	Задача синтеза оптимальной структуры дополнительной коррекции фильтра при учёте возможных отклонений моделей динамики элементов измерительной системы от базовых .....	37
2.3.4	Задача и алгоритм синтеза двухканальной оптимальной системы измерений при учете реальных моделей динамики ее звеньев и сигналов (общий случай).....	42
2.3.5	Задача и алгоритм синтеза двухканальной робастной оптимальной системы измерений (общий случай) .....	45
2.4	Синтез многомерных разомкнутых линейных оптимальных систем управления при детерминированных воздействиях .....	47
2.4.1	Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры регулятора в разомкнутой системе слежения при равенстве размерностей векторов сигналов «вход-выход» измерителя, регулятора и всей системы.....	47
2.4.2	Метод и алгоритм синтеза оптимальных структур регуляторов в разомкнутых многомерных системах слежения.....	51
2.4.3	Примеры решения задач синтеза оптимальных структур фильтров и регуляторов в разомкнутых системах.....	54
<b>ГЛАВА 3 ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ИНФОРМАЦИИ В МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ИЗМЕРЕНИЙ .....</b>		<b>58</b>
3.1	Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры базового (расчетного) фильтра системы измерений случайных сигналов.....	58

3.2 Метод синтеза оптимальной структуры фильтра в измерительной системе при известных базовых и реальных моделях динамики её элементов .....	61
3.3 Активизированная оптимальная фильтрация в двухканальной измерительной системе с учётом базовых моделей динамики её элементов.....	63
3.4 Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры дополнительной коррекции фильтра в двухканальной робастной измерительной системе при учёте реальных и базовых моделей динамики её элементов .....	66
3.5 Пример решения задачи синтеза оптимальной структуры коррекции фильтра в системе .....	68
3.6 Синтез многомерных разомкнутых линейных оптимальных систем слежения при случайных стационарных воздействиях .....	70
3.6.1 Метод синтеза многомерных разомкнутых линейных следящих систем .....	70
3.6.2 Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры регулятора в базовой (расчетной) следующей системе .....	74
3.6.3 Задача синтеза оптимальной структуры дополнительной коррекции регулятора в разомкнутой системе слежения при учете возможных отклонений моделей динамики элементов системы от базовых.....	77
3.6.4 Оптимальное комплексирование случайной стационарной информации в многомерной разомкнутой линейной системе слежения .....	80
<b>Глава 4 ОПТИМАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ ВЕКТОРА СИГНАЛОВ ВЫХОДА ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ЕГО ДВИЖЕНИЯ ИЛИ ИМИТАЦИИ ПОСЛЕДНЕГО .....</b>	<b>84</b>
4.1 Некоторые задачи оптимального наблюдения векторов случайных стационарных выходных сигналов подвижного объекта и бортовых измерительных устройств по результатам динамической аттестации объекта .....	85

4.1.1	Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя выходного состояния подвижного линейного объекта при случайных стационарных воздействиях и известных моделях динамики элементов измерительной системы .....	86
4.1.2	Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя выходного состояния подвижного объекта при случайных воздействиях по результатам его динамической аттестации и предшествующей компенсации помех измерений .....	89
4.2	Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя выходного состояния неустойчивого объекта при случайных стационарных воздействиях.....	92
4.3	Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя выходного состояния объекта с произволом в динамике при случайных воздействиях и известными моделями динамики сигналов его измерителя .....	96
4.3.1	Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя вектора выходных сигналов объекта с произволом в динамике и без компенсации помех измерений .....	99
4.3.2	Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя вектора выходных сигналов объекта с произволом в динамике и при условии компенсации помех измерений .....	101
4.4	Некоторые задачи оптимального наблюдения векторов детерминированных выходных сигналов подвижного объекта по результатам его динамической аттестации.....	102
4.4.1	Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя детерминированной выходной информации многомерного устойчивого стабилизируемого объекта.....	103
4.4.2	Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя детерминированной выходной информации объекта с произволом в динамике .....	106

4.4.3 Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя детерминированной выходной информации объекта с произволом в динамике при условии компенсации помех измерений.....	110
4.4.4 Пример синтеза оптимальной структуры наблюдателя вектора детерминированных выходных сигналов устойчивого объекта .....	113
<b>Глава 5 Структурная идентификация моделей динамики многомерных линейных подвижных объектов по результатам наблюдения интересующих векторов случайных стационарных сигналов «вход-выход».....</b>	<b>116</b>
5.1 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики устойчивого подвижного объекта по данным «идеальных» наблюдений интересующих векторов сигналов его входов и выходов и некоррелированности векторов управления и возмущения.....	117
5.2 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики подвижного объекта по данным «улучшенных» наблюдений интересующих векторов сигналов «вход-выход» .....	119
5.3 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики подвижного объекта при «идеальном» наблюдении векторов сигналов «вход-выход» и возмущения объекта.....	122
5.4 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики устойчивого линейного подвижного объекта при «неидеальном» измерении векторов сигналов «вход-выход» и случайных воздействиях.....	124
5.5 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики подвижного линейного объекта по данным «неидеальных» измерений его векторов сигналов «вход-выход» и возмущения.....	127
5.6 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики линейного подвижного объекта по данным оптимального наблюдения векторов сигналов «вход-выход».....	131

5.6.1 Первый этап решения задачи – синтез оптимальных структур $G_1$ и $G_2$ измерительных трактов входов и выходов объекта, предполагает следующие действия.....	132
5.6.2 Второй этап решения поставленной задачи – непосредственно структурная идентификация моделей динамики линейного объекта по данным его полунатурных испытаний .....	134
5.7 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики линейного объекта по данным «улучшенных» оптимальных наблюдений векторов сигналов «вход-выход».....	136
<b>ГЛАВА 6 СТРУКТУРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ МНОГОМЕРНОГО ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА ПРИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ.....</b>	<b>139</b>
6.1 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики устойчивого объекта при детерминированных воздействиях и отсутствии наблюдателей векторов сигналов «вход-выход» .....	139
6.2 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики устойчивого объекта при детерминированных воздействиях и оптимальном наблюдении векторов сигналов «вход-выход» .....	143
6.3 Задача и алгоритм структурной идентификации неустойчивого объекта при детерминированных воздействиях и без оптимального наблюдения векторов сигналов «вход-выход».....	148
<b>ГЛАВА 7 ОСОБЕННОСТИ ПОСТАНОВКИ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ БАЗОВЫХ ЗАДАЧ СТРУКТУРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ОБЪЕКТОВ ПРИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ ПО ДАННЫМ НАТУРНЫХ И ПОЛУНАТУРНЫХ ИСПЫТАНИЙ ИЗДЕЛИЙ.....</b>	<b>153</b>
7.1 Постановки и стадии решения задач структурной идентификации моделей динамики объектов при стохастических воздействиях на них.....	153
7.2 Стадии и алгоритм решения задачи структурной идентификации линейного многомерного объекта при стохастических воздействиях.....	156

7.2.1 Стадия структурной идентификации моделей динамики тракта исследуемого объекта, подверженного только детерминированным воздействиям .....	157
7.2.2 Стадия структурной идентификации моделей динамики тракта исследуемого линейного объекта, подверженного только случайным стационарным воздействиям .....	158
7.3 Постановка и стадии решения задач структурной идентификации моделей объекта с произволом в динамике .....	160
7.3.1 Алгоритмы решения задач структурной идентификации моделей динамики звеньев тракта объекта, учитывающего лишь неустойчивую часть объекта .....	161
7.3.2 Алгоритмы решения задачи структурной идентификации моделей динамики звеньев тракта объекта, учитывающего лишь устойчивую часть последнего .....	163
<b>Глава 8 ЗАМКНУТЫЕ И РАЗОМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ, УСЛОВИЯ ИХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ. ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ .....</b>	<b>167</b>
8.1 Основные понятия о базовых (расчетных) и реальных системах стабилизации. Эквивалентность рассматриваемых систем .....	170
8.2 Задача и алгоритм синтеза оптимальных робастных замкнутых систем стабилизации подвижных объектов при случайных стационарных воздействиях (общий случай) .....	174
8.3 Основные понятия, задачи и алгоритмы синтеза оптимальной структуры модели динамики регулятора в замкнутой системе стабилизации линейного многомерного устойчивого объекта при стохастических воздействиях и знании результатов структурной идентификации моделей динамики объекта .....	180

<b>ГЛАВА 9 ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ИЛИ НА ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА ПРИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ.....</b>	<b>194</b>
9.1 Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры регулятора в системе стабилизации при «идеальных» измерениях.....	194
9.2 Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры регулятора в системе стабилизации в пространстве объекта при измерении интересующих векторов сигналов системы с помехами.....	198
9.3 Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры регулятора в системе стабилизации неустойчивого объекта при детерминированных воздействиях и при учете помех измерений.....	201
9.4 Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры регулятора в системе стабилизации движения объекта с произволом в динамике по заданной детерминированной траектории и при детерминированных воздействиях.....	212
<b>ГЛАВА 10 ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА ПРИ СЛУЧАЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ.....</b>	<b>224</b>
10.1 Системы стабилизации объекта с произволом в динамике и оптимальным наблюдением векторов спектров сигналов, характеризующих достигаемое положение объекта на заданной траектории движения .....	224
10.1.1 Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя $\tilde{\Phi}^-$ в неустойчивом тракте системы стабилизации объекта .....	226
10.1.2 Пример, иллюстрирующий целесообразный выбор варианта решения задачи синтеза оптимальной структуры наблюдателя неустойчивых случайных выходов объекта.....	228

10.1.3 Синтез оптимальной структуры наблюдателя в устойчивом тракте системы стабилизации объекта на заданной траектории движения, являющей собой случайный многомерный процесс .....	230
10.2 Постановки и алгоритмы решения задач синтеза оптимальных структур частей регулятора в системе стабилизации объекта с произволом в динамике на заданной траектории движения, носящей случайный характер .....	232
10.2.1 Задача синтеза оптимальной структуры $W^-$ части регулятора в неустойчивом тракте системы стабилизации объекта .....	234
10.2.2 Задача синтеза оптимального структуры $W^+$ части регулятора в устойчивом тракте системы стабилизации объекта .....	236
10.3 Постановка и алгоритм решения задачи синтеза оптимальной робастной системы стабилизации объекта на заданной траектории движения, носящей случайный характер .....	240
10.3.1 Задача синтеза оптимальной структуры $\hat{\Phi}$ наблюдателя в системе ...	242
10.3.2 Задача синтеза структуры регулятора в исследуемой оптимальной системе стабилизации объекта .....	243
10.3.3 Задача и алгоритм синтеза оптимальной робастной системы стабилизации объекта на заданной траектории движения .....	246
<b>Глава 11 ПОСТАНОВКА И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ ПРИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ .....</b>	<b>249</b>
11.1 Основные моменты постановок базовых задач синтеза оптимальных структур частей регуляторов в линейных системах стохастической стабилизации .....	250
11.1.1 Алгоритм решения задачи синтеза оптимальной структуры части регулятора $\bar{W}$ , расположенной в детерминированном контуре системы стабилизации объекта .....	254

11.1.2 Алгоритм решения задачи синтеза оптимальной структуры части регулятора $\tilde{W}$ , расположенной в контуре системы стабилизации, подверженном случайным стационарным воздействиям .....	256
11.2 Постановка задачи синтеза оптимальных структур наблюдателей расположенных в устойчивом и неустойчивом контурах системы стохастической стабилизации подвижного объекта с произволом в динамике .....	258
11.2.1 Алгоритмы решения задач синтеза оптимальных структур наблюдателей в неустойчивом контуре системы стабилизации.....	260
11.2.2 Алгоритм решения задач оптимальных структур наблюдателей, расположенных в устойчивом контуре исследуемой системы стабилизации .....	263
11.3 Постановка задач синтеза оптимальных структур частей регулятора в устойчивом и неустойчивом контурах исследуемой системы стабилизации ...	266
11.3.1 Алгоритмы решения задач синтеза оптимальных структур $\bar{W}_-$ и $\tilde{W}_-$ частей регулятора (неустойчивые контуры) .....	268
11.3.2 Алгоритмы решения задач синтеза оптимальных структур $\bar{W}_+$ и $\tilde{W}_+$ (устойчивые контуры).....	273
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	278
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	280

## ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе создания и эксплуатации подвижных объектов (ПО) различного назначения, механизмов с параллельной кинематикой, ряда сложных и ответственных управляемых технологических процессов, комплексов и систем управления такими объектами и процессами на повестке дня встали вопросы обеспечения конкурентоспособности создаваемых изделий. Их конкурентоспособность во многом определяется степенью достижения: наивысших качества и эффективности использования, а также конечных целей функционирования в ответственных режимах работы.

Как известно, например [18, 32, 42, 48], указанные изделия в процессе их реального функционирования подвержены воздействиям множества различных стохастических (детерминированных и случайных) возмущающих факторов, которые, как правило, резко затрудняют процессы достижения поставленных целей – итоговых результатов каждого конкретного ответственного режима работы изделия. Наилучшего парирования влияния возмущающих факторов в каждом конкретном режиме функционирования указанных изделий можно достичь путем выбора (синтеза) и последующей реализации оптимальных структур комплексов или систем управления функционированием изделий. При этом процессы синтеза оптимального управления функционированием изделия в каждом из ответственных режимов его работы должны базироваться на новейших подходах и методах современной теории стохастического управления, которая и сама постоянно совершенствуется.

До последнего времени подходы, методы и алгоритмы, используемые при решении ответственных прикладных задач высококачественного управления динамическими объектами, например [1-11, 15-26], оказывались весьма полезными в следующих нетривиальных задачах:

- оптимальная фильтрация случайной стационарной информации;

- структурная идентификация моделей динамики многомерного линейного объекта при случайных стационарных воздействиях;
- оптимальное управление многомерными линейными разомкнутыми системами слежения и заданного преобразования вектора программных случайных сигналов;
- оптимальное управление в замкнутых многомерных линейных системах стабилизации движений объекта при случайных стационарных воздействиях;
- синтез оптимальных структур регуляторов в замкнутых многомерных и многоканальных комплексированных системах слежения или заданного преобразования вектора программных сигналов, которые, как и возмущающие факторы, воздействующие на объект управления, являют собой случайные стационарные процессы;
- другие побочные задачи.

Известно, что современные этапы создания и эксплуатации подвижных объектов различного назначения и некоторых ответственных управляемых технологических процессов характеризуются резко возросшими требованиями к качеству (точности) функционирования перечисленных изделий и процессов, остро вставшими вопросами обеспечения конкурентоспособности по качеству комплексов управления создаваемыми изделиями в ответственных режимах их работы. При этом прямой путь к обязательному достижению конкурентоспособных уровней функционирования, указанных выше изделий и процессов обязательно включает в себя стадии выполнения ряда наукоемких исследований.

Базовой стадией таких исследований следует считать работы по созданию удобных для практического применения новых методов и алгоритмов (технологий) аналитического конструирования оптимальных по точностным критериям комплексов управления (стабилизации) подвижных (динамических) объектов. Такие технологии должны включать следующие составляющие:

- методы и алгоритмы анализа качества работы и синтеза оптимальных структур фильтров и наблюдателей стохастической (суммы детерминированной и случайной) информации в многомерных динамических системах;

- методы и алгоритмы структурной идентификации моделей динамики объектов управления и стохастических возмущений, действующих на них, в реальных режимах работы управляемых комплексов;

- методы и алгоритмы анализа качества работы и синтеза оптимальных структур регуляторов в многомерных разомкнутых динамических системах при стохастических воздействиях;

- методы и алгоритмы анализа качества работы и синтеза оптимальных структур регуляторов в замкнутых системах стабилизации движений многомерного объекта при стохастических воздействиях, причем исследуемые системы стабилизации могут оказаться как одноконтурными, так и многоконтурными;

- методы и алгоритмы анализа качества работы и синтеза оптимальных структур регуляторов движений объекта в замкнутых многомерных системах слежения и системах заданного преобразования программных стохастических сигналов, причем исследуемые системы могут иметь различные структурные построения;

- методы и алгоритмы анализа качества работы и синтеза оптимальных структур регуляторов в замкнутых активизированных управляющих системах при стохастических воздействиях;

- методы и алгоритмы анализа качества работы и синтеза оптимальных структур регуляторов в замкнутых робастных управляющих системах при стохастических воздействиях;

- методы и алгоритмы исследований изменчивости достижимых поверхностей наилучшего качества, сконструированной системы управления объектом, при варьировании наборами различных параметров, определяющих ее реальное функционирование;

- другие целесообразные методы и алгоритмы максимизации качества работы интересующих динамических систем.

После выполнения указанных выше работ и получения соответствующих технологий должна следовать стадия определения необходимой экспериментальной информации о векторах сигналов «вход-выход» объекта управления и других звеньев разрабатываемых управляющих комплексов. Такая информация должна быть получена либо в результате динамической аттестации основных элементов создаваемого комплекса, либо в результате натурных испытаний объектов управления или ближайших их прототипов, проведенных в соответствующих режимах.

Определения указанных выше моделей динамики векторов стохастических сигналов «вход-выход» объекта управления (его прототипа) в ответственных режимах работы создаваемого управляемого комплекса позволяет приступить к стадии структурной идентификации моделей динамики объекта управления в исследуемом режиме его работы. Применяемые на практике методы и алгоритмы структурной идентификации должны обеспечивать возможность определения моделей динамики как самого объекта управления в интересующем режиме его работы, так и неконтролируемых стохастических возмущений, действующих на него в интересующем режиме.

Следующая стадия исследований заключается в синтезе оптимальных структур регуляторов в создаваемых системах и анализе качества функционирования аналитически сконструированных систем в интересующих ответственных режимах движений объекта. Исходными данными для ее выполнения являются идентифицированные модели динамики объекта управления и действующих на него стохастических возмущений, а также технологии синтеза оптимальных регуляторов и анализа качества систем управления.

Результаты анализа качества создаваемой системы управления уже на этой стадии работ должны наглядно продемонстрировать максимально достижимые

рубежи качества ее функционирования в интересующем режиме, факты достижения нею поставленных целей и обеспечения её конкурентоспособности.

По достижению желаемого качества работы системы необходимо выполнить практическую программно-техническую реализацию полученных результатов (оптимальных структур фильтров, наблюдателей, регуляторов и т.п.) с помощью современной микропроцессорной техники и разработать модули, которые должным образом монтируются в создаваемые управляемые комплексы (системы).

После построения опытных и экспериментальных управляемых комплексов (систем) должна наступить стадия их статистических испытаний с оценками качества работы и эффективности достигнутых результатов. При позитивном заключении о полученных результатах создания экспериментальных и опытных образцов комплексов (систем) управления исследуемыми ответственными подвижными объектами целесообразно приступить к следующей окончательной стадии работ – выпуску создаваемых изделий.

Цель данной монографии - обосновать и предоставить заинтересованному читателю точные, удобные при практическом применении, уже получившие высокие позитивные оценки при практической модернизации престижной авиакосмической техники, строго обоснованные технологии синтеза оптимальных структур регуляторов и анализа качества функционирования комплексов (систем) управления ответственными подвижными объектами, которые подвержены действиям стохастических возмущающих факторов.

Изложенные в монографии постановки требуемого набора сложных практических задач, методы и алгоритмы их решения представляют собой новые разделы в современной теории стохастического управления. Большая эффективность грамотного применения даже известных положений теории стохастического управления к решению практических задач управления широко известна и хорошо освещена в соответствующих литературных источниках, например [15-26]. В монографии речь идет о ряде новых технологий создания и

анализа качества функционирования современных комплексов (систем) управления движением. Это методы и алгоритмы синтеза оптимальных структур регуляторов, предназначенных для функционирования при стохастических воздействиях, анализа качества достижения целей такого функционирования, идентификации и оценивания моделей динамики элементов управляемых комплексов, фильтрации стохастической информации и т.п.

Таким образом, методы и алгоритмы (технологии) решения задач оптимального синтеза структур регуляторов, анализа качества работы управляемых комплексов, структурной идентификации и оптимального наблюдения моделей динамики многомерных управляющих комплексов (систем) и их базовых звеньев, изложенные в монографии, по мнению авторов, составляют новые разделы и технологии современной теории стохастического управления. Указанные технологии, при соответствующих постановках ответственных практических задач, позволяют достигать наивысших рубежей качества стохастического, в том числе и детерминированного, управления современными подвижными объектами, обеспечивая повышение уровня конкурентоспособности широкого круга изделий.

## **ГЛАВА 1 ПРОБЛЕМЫ МАКСИМИЗАЦИИ КАЧЕСТВА (ТОЧНОСТИ) СТОХАСТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ**

Обеспечение конкурентоспособности систем управления подвижных объектов различного назначения на современном этапе развития указанной техники связано со следующими основными проблемами. Во-первых, с фактом наличия в распоряжении разработчика технологий конструирования оптимальных структур комплексов стохастического управления движением исследуемых объектов в предназначенных для них ответственных режимах функционирования. Во-вторых, с наличием технологий структурной идентификации моделей динамики самих объектов и их базовых элементов по данным натуральных и полунатурных испытаний их ближайших прототипов. В-третьих, в умении разработчика применять указанные технологии в повседневной практике, а также пользоваться полученными результатами применения указанных технологий.

Вопросы повышения конкурентоспособности управляемого подвижного комплекса, в состав которого входят объект управления, средства управления и информационного обеспечения движения, в реальных условиях функционирования усложнены действием внешних и внутренних стохастических возмущений, модели динамики которых, как правило, неизвестны. Алгоритмы оптимального управления движением объекта в каждом ответственном режиме его функционирования подлежат определению по указанным выше технологиям. Очевидно, что исходные данные, необходимые для синтеза оптимальных алгоритмов, должны быть получены в результате структурной идентификации моделей динамики объекта и воздействий.

Таким образом, для реального обеспечения конкурентоспособности движения объекта в ответственных режимах его функционирования необходимы высокотехнологичные комплексные исследования и действия, выполняемые по специальным программам и технологиям.

## **1.1 Исследуемые типы ответственных управляемых подвижных объектов, их основные части, цели и задачи управления движением таких объектов**

Излагаемые в монографии технологии аналитического конструирования управляющих комплексов, предназначены для типов объектов, кратко перечисляемых ниже. В первую очередь, это летательные аппараты различного, в том числе и оборонного, назначения; космические аппараты; разные типы подвижных объектов водного базирования, например, подвижные лодки; разные типы подвижных объектов наземного базирования, например, бронированные машины различного назначения; некоторые другие подвижные объекты, которые должны двигаться по строго заданным траекториям. Сюда же следует отнести и ряд высокотехнологичных процессов, предназначенных строго выполнять заданные программные действия.

Основные цели и задачи управления исследуемыми объектами в ответственных режимах функционирования управляемого комплекса определяются тактико-техническими целями и задачами движения управляемого объекта в каждой конкретной ситуации. Постановки задач синтеза (выбора) оптимальных структур управления движением объекта в каждом конкретном случае должны учитывать условия позитивного целевого разрешения конкретики ситуации. Синтезированные на основе предложенных в монографии наукоемких технологий алгоритмы управления должны обеспечивать практическое достижение наивысших рубежей качества и эффективности исследуемого движения.

Реализация синтезированных алгоритмов управления движением объекта в каждой конкретной ситуации при современном уровне развития средств вычислительной техники не должна вызывать никаких затруднений.

## **1.2 Основные причины, побуждающие максимизировать качество и эффективность комплексов управления движением объектов в ответственных режимах их функционирования**

Первая основная причина, побуждающая разработчиков максимизировать качество и эффективность управления движением создаваемых объектов в ответственных режимах их функционирования, связана с жёсткой конкуренцией в современных сферах разработок и применения аналогичных подвижных объектов. Только использование научно обоснованных технологий конструирования комплексов стохастического управления исследуемых объектов позволит надеяться на достижение наивысших рубежей качества и эффективности функционирования указанных объектов в реальных ситуациях, возникающих при движении.

Вторая причина связана с существенным уменьшением затрат, необходимых для создания указанных комплексов по предложенным наукоемким технологиям, в сравнении с традиционно сложившимися технологиями. Отличительная черта большей части традиционных технологий связана с интуитивным характером разработок и необходимостью длительных дальнейших доводок опытных и серийных образцов подобных комплексов управления движением.

Третья основная причина, побуждающая максимизировать качество и эффективность современных комплексов управления движением – резкое сокращение сроков разработок и ввода в эксплуатацию указанных комплексов таких, когда достижение высших рубежей их качества и эффективности полагаются гарантированными.

Перечисленные причины наглядно демонстрируют целесообразность создания исследуемых комплексов на базе современных наукоемких технологий.

### **1.3 Условия, сдерживающие процесс максимизации достижимых уровней качества и конкурентоспособности управления движением исследуемых объектов**

Главным условием, которое сдерживает процесс максимизации достижимых уровней качества и конкурентоспособности управления движением ответственных объектов, является отсутствие или недостаточная известность на настоящий момент времени научно обоснованных технологий аналитического конструирования сложных комплексов управления движением. Однако, даже при известных нужных технологиях конструирования нередко обстоятельства складываются так, что разработчик, который должен применять на практике указанные технологии, но привыкший к традиционно сложившемуся ходу проектирования и реализации создаваемых комплексов управления, не может эффективно использовать полученные знания о новых технологиях в процессе создания комплексов управления и практически снова разрабатывает неконкурентоспособные изделия. Видимо, это второе условие создания несовершенных комплексов управления движением на современном этапе развития указанной техники.

Кроме описанных условий, тормозящих процессы достижения конкурентоспособности комплексов управления движением ответственных объектов, в практике разработок указанных изделий действует еще множество менее значимых условий сдерживания, которые не являются предметом рассмотрения в монографии.

### **1.4 Основные цели и задачи монографии**

Основными задачами монографии являются следующие:

- разработка новых наукоёмких технологий (постановок задач, методов и алгоритмов их решения) практического конструирования современных

конкурентоспособных комплексов стохастического управления ответственными подвижными объектами, по возможности устраняющих имеющиеся пробелы в теории и практике стохастического управления;

- обучение разработчика комплексов управления движением содержанию и практическим навыкам конструирования конкурентоспособных систем управления.

Цель монографии – последовательное изложение постановок, методов и алгоритмов решения задач синтеза и анализа оптимальных структур комплексов управления многомерными объектами, работающими в условиях стохастических воздействий.

Здесь и далее термин стохастическое воздействие, по аналогии с книгами [25, 26, 43, 51], подразумевает аддитивную смесь детерминированного и случайного сигналов.

## ГЛАВА 2 ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ИНФОРМАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Как известно [20, 24, 26, 45] задача фильтрации, как правило, возникает в измерительных системах, в связи с искажениями, вносимыми в результат измерения неидеальными датчиками (сенсорами).

Структурная схема типовой многомерной линейной системы измерения детерминированной информации (рис. 2.1) включает ряд элементов. К их числу относятся: устойчивое измерительное устройство - блок **И**, динамику которого

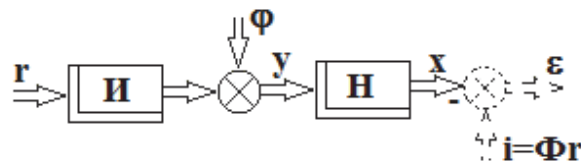


Рис. 2.1. Структурная схема типовой линейной многомерной системы измерения детерминированной информации

характеризует матрица передаточных функций  $K$  размерности  $\nu \times n$ ; фильтр (наблюдатель) в системе - блок **Н**, динамику которого описывает матрица передаточных функций  $G$  размерности  $n \times \nu$ , которая подлежит определению после решения соответствующей задачи синтеза; матрица передаточных функций  $\Phi$  размерности  $n \times n$  определяет желаемое преобразование [26] системой  $n$ -мерного вектора программных сигналов  $r$ ;  $\varphi$  - вектор изображений Лапласа помех измерений, имеющий размерность  $\nu \times 1$ ;  $x$  - вектор изображений выходных сигналов системы, имеющий размерность  $n \times 1$ ;  $i$  - вектор изображений желаемых сигналов выхода системы, имеющий размерность  $n \times 1$ ;  $\varepsilon$  - вектор изображений ошибок измерений размерности  $n \times 1$ , который с учетом рис. 2.1 равен

$$\varepsilon = x - \Phi r; \quad (2.1)$$

$y$  - вектор изображений сигналов наблюдения размерности  $\nu \times 1$ . (В дальнейшем для краткости термин изображение будет опущен).

Если качество измерения в такой системе охарактеризовать по аналогии с работами [24, 26, 34] суммой взвешенных интегральных квадратических ошибок вида

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(\varepsilon \varepsilon^* R) ds, \quad (2.2)$$

где  $j$  – комплексная единица;  $tr$  – знак операции нахождения следа матрицы [30];  $*$  – знак эрмитового сопряжения вектора;  $R$  – положительно определенная весовая матрица размерности  $n \times n$ ;  $s$  – независимая комплексная переменная ( $s=j\omega$ ), то задача синтеза оптимального фильтра состоит в том, чтобы найти структуру и параметры устойчивой и физически реализуемой матрицы передаточных функций  $G$ . При этом должны быть заданы векторы  $r, \varphi$ , а также матрица  $K$ .

Присвоение  $K = K_0$  задает известную до решения задачи синтеза структуры  $G$  матрицу передаточных функций измерителя, а присвоения векторов  $r = r_0, \varphi = \varphi_0, y = y_0, x = x_0$  и  $\varepsilon = \varepsilon_0$  определяют базовые (расчетные) характеристики перечисленных векторов в случае исследований базовых (расчетных) режимов функционирования системы измерений.

В заключение, следует отметить такое важное обстоятельство: в настоящей главе исследуются измерительные системы, элементы которых имеют устойчивые модели динамики.

## 2.1 Базовые (расчетные) оптимальные фильтры в многомерной линейной устойчивой системе измерения детерминированной информации

Структурная схема базовой (расчетной) системы измерений детерминированной информации представлена на рисунке 2.2.

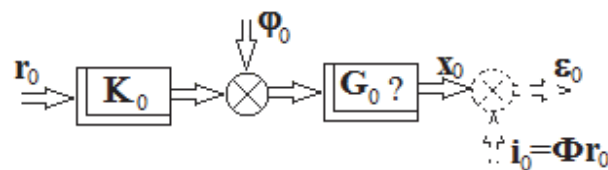


Рис. 2.2. Структурная схема базовой измерительной системы

Даже при базовых (расчетных) элементах системы (рис.2.2) целесообразно рассмотреть два варианта задач синтеза оптимальной структуры фильтра  $G_0$ : а) при одинаковом  $n = \nu$  и б) неодинаковом  $n \geq \nu$  числе компонентов векторов сигналов наблюдения и выходов системы.

### 2.1.1 Выбор структуры базового фильтра при одинаковом количестве компонентов векторов сигналов наблюдения и выходов измерительной системы

Здесь и в дальнейшем целесообразно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} r_0 &= \theta_{r_0} L_{n \times 1}, r_{0*} = L_{1 \times n} \theta_{r_{0*}}; \varepsilon = \Phi r - x \\ \varphi_0 &= \theta_{\varphi_0} L_{n \times 1}, \varphi_{0*} = L_{1 \times n} \theta_{\varphi_{0*}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\theta_{r_0}$  и  $\theta_{\varphi_0}$  - диагональные матрицы, составленные из компонентов векторов  $r_0$  и  $\varphi_0$ ,  $L_{n \times 1}$  и  $L_{1 \times n}$  -  $n$ -мерные вектор-столбец и вектор-строка соответственно, все элементы которых равны единице; «\*» - символ эрмитового сопряжения.

С учетом обозначений (2.1) векторы изображений выходов и желаемых сигналов выхода системы следует записать так:

$$\begin{aligned} x &= G_0 (K_0 \theta_{r_0} + \theta_{\varphi_0}) L_{n \times 1}, x_* = L_{1 \times n} (\theta_{r_{0*}} K_{0*} + \theta_{\varphi_{0*}}) G_{0*}, \\ i &= \Phi \theta_{r_0} L_{n \times 1}, i_* = L_{1 \times n} \theta_{r_{0*}} \Phi_* \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вектор ошибок системы измерений в этом случае будет иметь вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= x_0 - i_0 = \{G_0 (K_0 \theta_{r_0} + \theta_{\varphi_0}) - \Phi \theta_{r_0}\} L_{n \times 1} = \theta_{\varepsilon_0} L_{n \times 1}, \\ \varepsilon_{0*} &= L_{1 \times n} \{(\theta_{r_{0*}} K_{0*} + \theta_{\varphi_{0*}}) G_{0*} - \theta_{r_{0*}} \Phi_{0*}\} = L_{1 \times n} \theta_{\varepsilon_{0*}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

В этом варианте задачи синтеза при условии устойчивости всех исследуемых моделей динамики наилучшую структуру фильтра  $\hat{G}_0$  можно выбрать, просто полагая  $\theta_{\varepsilon_0} = O_n$ , и она будет иметь вид

$$\hat{G}_0 = \Phi \theta_{r_0} (K_0 \theta_{r_0} + \theta_{\varphi_0})^{-1}. \quad (2.4)$$

Очевидно, что в этом варианте и интегрально-квадратичный показатель качества измерений будет равен нулю (т.е. будет минимальным).

## 2.1.2 Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры базового фильтра измерительной системы (общий случай)

Общий случай постановки и решения задачи синтеза оптимальной структуры базового фильтра измерительной системы нужно производить при условии неравенства числа компонентов векторов наблюдения и выхода системы, т.е. в случае  $n \geq v$  (рис 2.2). Здесь целесообразно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 r_0 &= \theta_{r_0} L_{n \times 1}, r_{0*} = L_{1 \times n} \theta_{r_{0*}}; \varphi_0 = \theta_{\varphi_0} L_{v \times 1}, \varphi_{0*} = L_{1 \times v} \theta_{\varphi_{0*}}; \\
 K_0 &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots & K_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{v1} & K_{v2} & K_{v3} & \dots & K_{vn} \end{bmatrix}_{(v \times n)}; \theta_{r_0} = \begin{bmatrix} \theta_{r_{01}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_{r_{02}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{r_{03}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \theta_{r_{0n}} \end{bmatrix}_{(n \times n)}; \\
 K_0 r_0 &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots & K_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{v1} & K_{v2} & K_{v3} & \dots & K_{vn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{r_{01}} \\ \theta_{r_{02}} \\ \theta_{r_{03}} \\ \dots \\ \theta_{r_{0n}} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} K_{11}\theta_{r_{01}} + K_{12}\theta_{r_{02}} + K_{13}\theta_{r_{03}} + \dots + K_{1n}\theta_{r_{0n}} \\ K_{21}\theta_{r_{01}} + K_{22}\theta_{r_{02}} + K_{23}\theta_{r_{03}} + \dots + K_{2n}\theta_{r_{0n}} \\ K_{31}\theta_{r_{01}} + K_{32}\theta_{r_{02}} + K_{33}\theta_{r_{03}} + \dots + K_{3n}\theta_{r_{0n}} \\ \dots \\ K_{v1}\theta_{r_{01}} + K_{v2}\theta_{r_{02}} + K_{v3}\theta_{r_{03}} + \dots + K_{vn}\theta_{r_{0n}} \end{bmatrix} = \zeta_0; \\
 \zeta_0 &= \begin{bmatrix} Q_{\zeta_{01}} \\ Q_{\zeta_{02}} \\ Q_{\zeta_{03}} \\ \dots \\ Q_{\zeta_{0v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{\zeta_{01}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_{\zeta_{02}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Q_{\zeta_{03}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Q_{\zeta_{0v}} \end{bmatrix} L_{v \times 1} = Q_{\zeta_0} L_{v \times 1} \quad (2.5) \\
 B_1 &= [E_v, O_{v \times (n-v)}], B_2 = \begin{bmatrix} E_v \\ O_{(n-v) \times v} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

где  $E_v$  – единичная матрица размерности  $n \times n$ ;  $O_{v \times (n-v)}$  – нулевая матрица размерности  $v \times (n-v)$ .

С учетом обозначений (2.5) вектор  $x_0$  изображений выходных сигналов системы следует записать так:

$$\begin{aligned}x_0 &= G_0(K_0 r_0 + \varphi_0) = G_0(Q_{\zeta_0} + \theta_{\varphi_0})L_{v \times 1} = G_0(Q_{\zeta_0} + \theta_{\varphi_0})B_1 L_{n \times 1}; \\x_{0*} &= L_{1 \times n} B_2 (Q_{\zeta_{0*}} + \theta_{\varphi_{0*}}) G_{0*},\end{aligned}\quad (2.6)$$

а вектор изображений ошибок измерений системы  $\varepsilon_0$  определить в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= x_0 - i_0 = [G_0(Q_{\zeta_0} + \theta_{\varphi_0})B_1 - \Phi\theta_{r_0}]L_{n \times 1} = \theta_{\varepsilon_0} L_{n \times 1}, \\ \varepsilon_{0*} &= L_{1 \times n} [B_2(Q_{\zeta_{0*}} + \theta_{\varphi_{0*}})G_{0*} - \theta_{r_{0*}}\Phi_*] = L_{1 \times n} \theta_{\varepsilon_{0*}},\end{aligned}\quad (2.7)$$

При устойчивости исследуемых моделей динамики всех элементов системы можно также полагать, что матрица изображений вектора ошибки равна нулю ( $\theta_{\varepsilon_0} = O_n$ ). Тогда наилучшая структура матрицы  $G_0$  должна определяться так:

$$G_0 = \Phi\theta_{r_0} [B_1(Q_{\zeta_0} + \theta_{\varphi_0})]^\#, \quad (2.8)$$

где «#» - символ псевдообращения соответствующей матрицы.

Очевидно, что в общем случае при фактах неустойчивости отдельных моделей динамики элементов псевдообращение матриц в выражении (2.8) может приводить лишь к приближенному определению матрицы  $\tilde{G}_0$ .

Возможен другой более строгий путь определения оптимальной структуры матрицы  $G_0$  в этих вариантах задачи. Суть такого решения задачи состоит в следующем.

Пусть функционал качества фильтрации детерминированной информации в системе имеет вид:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(\varepsilon_0 \varepsilon_{0*} R) ds, \quad (2.9)$$

здесь  $R$  – положительно определенная весовая матрица размерности  $n \times n$ ,  $tr$  – след матрицы. Подстановка выражений (2.7) в функционал (2.9) позволит переписать последний в виде:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr\{[G_0(Q_{\zeta_0} + \theta_{\varphi_0})B_1 - \Phi\theta_{r_0}]L_n [B_2(Q_{\zeta_{0*}} + \theta_{\varphi_{0*}})G_{0*} - \theta_{r_{0*}}\Phi_*]R\} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr\{[G_0(Q_{\zeta_0} + \theta_{\varphi_0})B_1 L_n B_2 (Q_{\zeta_{0*}} + \theta_{\varphi_{0*}})G_{0*} - \\ &- G_0(Q_{\zeta_0} + \theta_{\varphi_0})B_1 L_n \theta_{r_{0*}}\Phi_* - \Phi\theta_{r_0} L_n B_2 (Q_{\zeta_{0*}} + \theta_{\varphi_{0*}})G_{0*} + \\ &+ \Phi\theta_{r_0} L_n \theta_{r_{0*}}\Phi_*]R\} ds,\end{aligned}\quad (2.10)$$

где  $L_n = L_{n \times 1} L_{1 \times n}$ .

Решая задачу выбора оптимальной структуры фильтра  $G_0$  методом Винера-Колмогорова [9, 35], необходимо определить первую вариацию функционала и условие ее тождественного равенства нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций. Первая вариация функционала (2.10) выглядит так:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ R [ G_0 ( Q_{\zeta_0} + \theta_{\varphi_0} ) B_1 L_n B_2 ( Q_{\zeta_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} ) - \Phi \theta_{r_0} L_n B_2 ( Q_{\zeta_0^*} + \\ + \theta_{\varphi_0^*} ) ] \delta G_{0^*} + \delta G_0 [ ( Q_{\zeta_0} + \theta_{\varphi_0} ) B_1 L_n B_2 ( Q_{\zeta_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} ) G_{0^*} - - ( Q_{\zeta_0} + \\ \theta_{\varphi_0} ) B_1 L_n \theta_{r_0^*} \Phi_* ] R \} ds, \end{aligned} \quad (2.11)$$

Целесообразно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Gamma_* \Gamma = R; B_1 L_n B_2 = L_\nu; \\ DL_\nu D_* = ( Q_{\zeta_0} + \theta_{\varphi_0} ) L_\nu ( Q_{\zeta_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} ); \\ T = T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1} \Phi \theta_{r_0} B_1^\# ( Q_{\zeta_0} + \theta_{\varphi_0} )^{-1} D, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где матрицы  $\Gamma$  – результат правосторонней факторизации [49] весовой матрицы;  $D$  – устойчивая вместе с обратной дробно-рациональная матрица, найденная в результате специальной факторизации [24] произведения матриц в правой части выражения (2.11); «0», «+» и «-» - знаки винеровской операции сепарации [9] матрицы  $T$ ;  $L_\nu = L_{\nu \times 1} L_{1 \times \nu}$ ; символ «#» - знак псевдообращения матрицы [30].

С учетом обозначений (2.12) вариацию (2.11) возможно переписать так:

$$\delta \mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [ \Gamma_* ( \Gamma G_0 D - T ) L_\nu D_* \delta G_* + \delta G D L_\nu ( D_* G_{0^*} \Gamma_* - T_* ) \Gamma ] ds, \quad (2.13)$$

Условие тождественного равенства вариации (2.13) нулю будет таким

$$\Gamma G_0 D = ( T_0 + T_+ ),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры фильтра в системе будет следующим:

$$\hat{G}_0 = \Gamma^{-1} ( T_0 + T_+ ) D^{-1}, \quad (2.14)$$

Подставив матрицу (2.14) в функционал качества системы (2.10), можно оценить минимальную величину ( $\mathcal{E}_{min}$ ) интегральной квадратичной ошибки измерений детерминированной информации и исследовать изменчивость

указанной величины при возможных вариациях основных параметров измерительной системы.

## 2.2 Особенности решения задач оптимальной фильтрации детерминированной информации в многомерных неустойчивых линейных системах измерений

Неустойчивость моделей динамики элементов или наличие расходящихся трендов в сигналах многомерных линейных разомкнутых измерительных систем вызывает существенные трудности решения задач оптимальной фильтрации детерминированной информации. Такие трудности определены невозможностью непосредственного обеспечения устойчивости всей системы и минимизации ошибок измерений при наличии в системе неустойчивых элементов. Минимизация ошибок такой системы в длительных режимах ее работы возможна лишь при условии компенсации в сигналах наблюдения возникающих расходящихся составляющих.

В общем случае при учете положений высказанных в пункте 2.1.2, структурную схему системы с неустойчивыми элементами можно представить так (рис. 2.3). На рисунке 2.3 и в дальнейших пояснениях к задаче будут использованы символы [26] винеровской операции сепарации матриц: «0», «+» и «-». Этими символами помечаются матрицы, все элементы которых либо полиномы, либо правильные устойчивые дроби, либо правильные неустойчивые дроби соответственно.

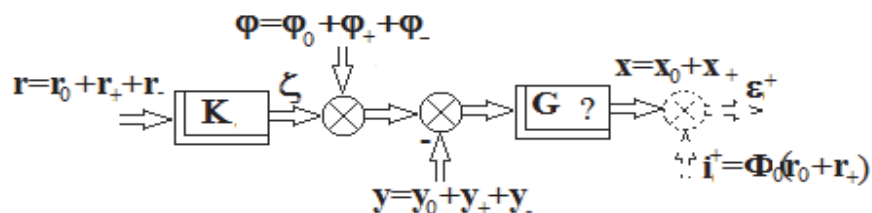


Рис. 2.3. Структурная схема измерительной системы с неустойчивыми моделями динамики элементов.

Как и в пункте 2.1.2, здесь используются аналоги моделей динамики векторов  $\zeta_0$  и  $\varphi_0$ , показанных в выражениях (2.5) вида:

$$\begin{aligned}\zeta &= (Q_{\zeta_0} + Q_{\zeta_+} + Q_{\zeta_-})L_{v \times 1}; \quad \varphi = (\theta_{\varphi_0} + \theta_{\varphi_+} + \theta_{\varphi_-})L_{1 \times v}; \\ B_1 &= [E_v, O_{v \times (n-v)}], \quad B_2 = \begin{bmatrix} E_v \\ O_{(n-v) \times v} \end{bmatrix}; \\ r &= r^+ + r^- = (r_0 + r_+) + r_- = (\theta_r^+ + \theta_r^-)L_{n \times 1},\end{aligned}\quad (2.15)$$

По аналогии с выражениями (2.6) возможно записать устойчивые и неустойчивые части изображений сигналов наблюдения:

$$\begin{aligned}y^+ &= y_0 + y_+ = (Q_{\zeta_0} + Q_{\zeta_+} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\varphi_+})B_1L_{n \times 1} = (Q_{\zeta}^+ + \theta_{\varphi}^+)B_1L_{n \times 1}, \\ y^- &= y_- = (Q_{\zeta_-} + \theta_{\varphi_-})B_1L_{n \times 1} = (Q_{\zeta}^- + \theta_{\varphi}^-)B_1L_{n \times 1},\end{aligned}\quad (2.16)$$

Если неустойчивые элементы системы отсутствуют, то модели динамики устойчивых выходных сигналов системы имеют вид:

$$\begin{aligned}x^+ &= Gy^+ = G(Q_{\zeta}^+ + \theta_{\varphi}^+)B_1L_{n \times 1}; \\ x_*^+ &= y_*^+G_* = L_{1 \times n}B_2(Q_{\zeta_*}^+ + \theta_{\varphi_*}^+)G_*,\end{aligned}$$

а модели динамики векторов ошибок измерений будут такими:

$$\begin{aligned}\varepsilon^+ &= x^+ - i^+ = [G(Q_{\zeta}^+ + \theta_{\varphi}^+)B_1 - \Phi_0\theta_r^+]L_{n \times 1}, \\ \varepsilon_*^+ &= x_*^+ - i_*^+ = L_{1 \times n}[B_2(Q_{\zeta_*}^+ + \theta_{\varphi_*}^+)G_* - \theta_{r_*}^+\Phi_{0*}].\end{aligned}\quad (2.17)$$

Решение задачи синтеза оптимальной структуры  $G$  при устойчивых элементах аналогично решению задачи, описанной в пункте 2.1.2 выражениями (2.9) – (2.14).

Пусть функционал качества фильтрации такой устойчивой детерминированной информации в исследуемой системе имеет вид

$$\mathcal{E}^+ = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}(\varepsilon^+ \varepsilon_*^+ R) ds. \quad (2.18)$$

Подстановка выражений (2.17) в функционал (2.18) приводит последний к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^+ = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr\{[G(Q_\zeta^+ + \theta_\varphi^+)B_1L_nB_2(Q_{\zeta^*}^+ + \theta_{\varphi^*}^+)G_* - G(Q_\zeta^+ + \theta_\varphi^+)B_1L_n\theta_{r^*}^+\Phi_{0^*} - \\ & - \Phi_0\theta_r^+L_nB_2(Q_{\zeta^*}^+ + \theta_{\varphi^*}^+)G_* + \Phi_0\theta_r^+L_n\theta_{r^*}^+\Phi_{0^*}]R\}ds, \end{aligned} \quad (2.19)$$

В соответствии с процедурой метода Винера-Колмогорова необходимо определить первую вариацию функционала (2.19) и условие равенства вариации нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций. Первая вариация функционала (2.19) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}^+ = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr\{R[G(Q_\zeta^+ + \theta_\varphi^+)B_1L_nB_2(Q_{\zeta^*}^+ + \theta_{\varphi^*}^+) - \Phi_0\theta_r^+L_nB_2(Q_{\zeta^*}^+ + \\ & + \theta_{\varphi^*}^+)]\delta G_* + \delta G[(Q_\zeta^+ + \theta_\varphi^+)B_1L_nB_2(Q_{\zeta^*}^+ + \theta_{\varphi^*}^+)G_* - (Q_\zeta^+ + \\ & \theta_\varphi^+)B_1L_n\theta_{r^*}^+\Phi_{0^*}]R\}ds, \end{aligned} \quad (2.20)$$

Целесообразно ввести следующие обозначения

$$\Gamma_*\Gamma = R; DL_\nu D_* = (Q_\zeta^+ + \theta_\varphi^+)L_\nu(Q_{\zeta^*}^+ + \theta_{\varphi^*}^+); B_1L_nB_2 = L_\nu,$$

$$T = T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1}\Phi\theta_{r_0}B_1^\#(Q_\zeta^+ + \theta_\varphi^+)^{-1}D. \quad (2.21)$$

Учитывая обозначения (2.21) вариацию (2.20) можно записать в виде

$$\delta\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr[\Gamma_*(\Gamma GD - T)L_\nu D_*\delta G_* + \delta GDL_n(D_*G_*\Gamma_* - T_*)\Gamma]ds, \quad (2.22)$$

а условие равенства вариации (2.22) нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $G$  представить так

$$\Gamma GD = (T_0 + T_+).$$

Тогда алгоритм синтеза оптимальной структуры фильтра в исследуемой системе будет иметь вид

$$\hat{G} = \Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^{-1}, \quad (2.23)$$

Теперь подставив алгоритм (2.23) в функционал (2.19) возможно оценить его минимальную величину  $\mathcal{E}_{min}^+$ , и исследовать ее изменчивость в различных эксплуатационных ситуациях.

## 2.3 Задачи и алгоритмы синтеза оптимальных структур фильтров в системах измерения детерминированной информации

Нередко базовые (расчетные) характеристики элементов конструируемых измерительных систем их разработчику неизвестны. Ориентировочно известны лишь возможные (реальные) указанные выше характеристики элементов системы и структурная схема интересующей системы, причем возможны различные варианты построения структурной схемы создаваемой системы, в том числе многоконтурные и комбинаторные.

### 2.3.1 Задача синтеза оптимальной структуры фильтра при равенстве количества координат векторов спектров сигналов наблюдения и выходов измерительной системы, а также учете реальных характеристик её элементов

Структурная схема исследуемой измерительной системы представлена на рисунке 2.4 и имеет следующий вид.

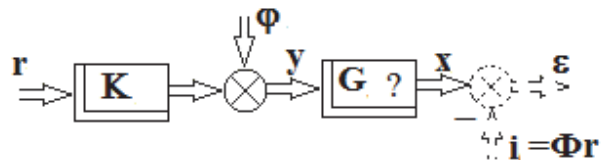


Рис. 2.4. Структурная схема исследуемой измерительной системы

Здесь в соответствии с рисунком:  $K$  - устойчивая матрица передаточных функций реального измерительного устройства в системе;  $G$  - искомая матрица передаточных функций фильтра-наблюдателя;  $\Phi$  - известная матрица желаемых преобразований программы системой;  $r$  - вектор спектров реальных программных сигналов;  $\varphi$  - вектор спектров сигналов реальных помех измерений;  $i$  - вектор спектров желаемых сигналов выхода системы;  $\epsilon$  - вектор спектров ошибок измерений.

В рассматриваемой задаче полагается одинаковость количества числа компонентов векторов наблюдения  $y$  и выходов системы  $x$  ( $n = \nu$ ) и устойчивость всех моделей динамики её элементов. Целесообразен ввод следующих обозначений, аналогичных обозначениям (2.1)

$$r = \theta_r L_{n \times 1}, r_* = L_{1 \times n} \theta_{r_*}; \varphi = \theta_\varphi L_{n \times 1}, \varphi_* = L_{1 \times n} \theta_{\varphi_*}; \quad (2.24)$$

С учетом равенств (2.24) вектор спектров входных сигналов системы  $x$  следует записать так:

$$x = Gy = G(Kr + \varphi) = G(K\theta_r + \theta_\varphi)L_{n \times 1};$$

а вектор сигналов ошибок системы следующим образом

$$\varepsilon = x - i = [G(K\theta_r + \theta_\varphi) - \Phi\theta_r]L_{n \times 1}, \quad (2.25)$$

Если модели  $K$ ,  $\theta_r$  и  $\theta_\varphi$  определено известны и устойчивы, то ошибку (2.25) возможно обнулить, сразу же получив при этом наилучшую структуру фильтра  $G$  вида

$$G = \Phi\theta_r(K\theta_r + \theta_\varphi)^{-1} \quad (2.26)$$

Пусть функционал качества измерений системой исходной информации имеет вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}(\varepsilon\varepsilon_*R) ds, \quad s = j\omega,$$

где  $R$  – положительно-определенная весовая функция.

Подставив обозначения (2.25) в этот функционал перепишем последний в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}\{[G(K\theta_r + \theta_\varphi)]L_n(\theta_{r_*}K_* + \theta_{\varphi_*})G_* - G(K\theta_r + \theta_\varphi)L_n\theta_{r_*}\Phi_* - \\ & - \Phi\theta_r L_n(\theta_{r_*}K_* + \theta_{\varphi_*})G_* + \Phi\theta_r L_n\theta_{r_*}\Phi_*]R\} ds \end{aligned} \quad (2.27)$$

Решая задачу синтеза структуры  $G$  методом Винера-Колмогорова, первую вариацию функционала (2.27) следует записать так

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}\{R[G(K\theta_r + \theta_\varphi)L_n(\theta_{r_*}K_* + \theta_{\varphi_*}) - \Phi\theta_r L_n(\theta_{r_*}K_* + \theta_{\varphi_*})]\delta G_* + \\ & + \delta G[(K\theta_r + \theta_\varphi)L_n(\theta_{r_*}K_* + \theta_{\varphi_*})G_* - (K\theta_r + \theta_\varphi)L_n\theta_{r_*}\Phi_*]R\} ds \end{aligned}$$

Целесообразно ввести следующие обозначения:

$$R = \Gamma_* \Gamma; DL_n D_* = (K\theta_r + \theta_\varphi)L_n(\theta_{r_*}K_* + \theta_{\varphi_*});$$

$$T = T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1}\Phi\theta_r. \quad (2.28)$$

С учетом обозначений (2.28) первую вариацию  $\delta\mathcal{E}$  можно переписать в виде

$$\delta\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr[\Gamma_*(\Gamma GD - T)L_n D_* \delta G_* + \delta G D L_n (D_* G_* \Gamma_* - T_*)\Gamma] ds \quad (2.29)$$

Условие тождественного равенства вариации нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $G$  имеет

вид

$$\Gamma GD = (T_0 + T_+),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры фильтра  $G$  будет таким

$$G = \Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^{-1}. \quad (2.30)$$

Подстановка структуры (2.30) в функционал (2.27) определит его минимальное значения  $\mathcal{E}_{min}$ .

### **2.3.2 Задача синтеза оптимальной структуры фильтра при неодинаковом количестве координат векторов спектров наблюдения и выходов измерительной системы и реальных характеристиках её элементов**

Структурная схема измерительной системы, исследуемой в обозначенной выше задаче синтеза, также представлена на рисунке 2.4. Пояснения к обозначениям элементов, показанным на рисунке 2.4 здесь также идентичны введенным в пункте 2.3.1. Отличительная особенность рассматриваемой ниже задачи синтеза от предыдущей лишь в количестве координат векторов спектров сигналов наблюдения и выходов системы (здесь  $n \geq \nu$ ) и некоторых обозначениях, показанных ниже.

По аналогии с обозначениями (2.5) здесь целесообразно ввести следующие:

$$r = \theta_r L_{n \times 1}, r_* = L_{1 \times n} \theta_{r_*}; \varphi = \theta_\varphi L_{\nu \times 1}, \varphi_* = L_{1 \times \nu} \theta_{\varphi_*};$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots & K_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{v1} & K_{v2} & K_{v3} & \dots & K_{vn} \end{bmatrix}; \theta_r = \begin{bmatrix} \theta_{r_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_{r_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{r_3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \theta_{r_n} \end{bmatrix};$$

$$\zeta = Kr = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots & K_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{v1} & K_{v2} & K_{v3} & \dots & K_{vn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{r_1} \\ \theta_{r_2} \\ \theta_{r_3} \\ \dots \\ \theta_{r_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}\theta_{r_1} + K_{12}\theta_{r_2} + K_{13}\theta_{r_3} + \dots + K_{1n}\theta_{r_n} \\ K_{21}\theta_{r_1} + K_{22}\theta_{r_2} + K_{23}\theta_{r_3} + \dots + K_{2n}\theta_{r_n} \\ K_{31}\theta_{r_1} + K_{32}\theta_{r_2} + K_{33}\theta_{r_3} + \dots + K_{3n}\theta_{r_n} \\ \dots \\ K_{v1}\theta_{r_1} + K_{v2}\theta_{r_2} + K_{v3}\theta_{r_3} + \dots + K_{vn}\theta_{r_n} \end{bmatrix};$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} \theta_{\zeta_1} \\ \theta_{\zeta_2} \\ \theta_{\zeta_3} \\ \dots \\ \theta_{\zeta_v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{\zeta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_{\zeta_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{\zeta_3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \theta_{\zeta_v} \end{bmatrix} L_{v \times 1} = Q_\zeta L_{v \times 1}$$

$$B_1 = [E_v, O_{v \times (n-v)}], B_2 = \begin{bmatrix} E_v \\ O_{(n-v) \times v} \end{bmatrix}; \quad (2.31)$$

Учитывая вид матриц (2.31), вектор выходных сигналов системы следует записать так:

$$x = Gy = G(Kr + \varphi) = G(Q_\zeta + \theta_\varphi)L_{v \times 1} = G(Q_\zeta + \theta_\varphi)B_1L_{n \times 1} \quad (2.32)$$

а вектор сигналов ошибки системы в виде

$$\varepsilon = x - i = [G(Q_\zeta + \theta_\varphi)B_1 - \Phi\theta_r]L_{n \times 1}. \quad (2.33)$$

Функционал качества преобразования детерминированной информации системой представляется следующим образом:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}\{\varepsilon\varepsilon_*R\}ds, \quad s = j\omega \quad (2.34)$$

Подстановка векторов (2.33) в функционал (2.34) позволяет определить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}\{[G(Q_\zeta + \theta_\varphi)B_1 - \Phi\theta_r]L_n[B_2(Q_{\zeta_*} + \theta_{\varphi_*})G_* - \theta_{r_*}\Phi_*]R\}ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}\{[G(Q_\zeta + \theta_\varphi)B_1L_nB_2(Q_{\zeta_*} + \theta_{\varphi_*})G_* - G(Q_\zeta + \theta_\varphi)B_1L_n\theta_{r_*}\Phi_* - \\ &\quad - \Phi\theta_rL_nB_2(Q_{\zeta_*} + \theta_{\varphi_*})G_* + \Phi\theta_rL_n\theta_{r_*}\Phi_*]R\}ds, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где  $L_n = L_{n \times 1}L_{1 \times n}$ .

Решая задачу синтеза оптимальной структуры  $G$  методом Винера-Колмогорова, первую вариацию функционала (2.35) по аналогии с решением (2.11), показанным в пункте 2.1.2, следует представить в виде

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ R [ G ( Q_\zeta + \theta_\varphi ) L_\nu ( Q_{\zeta^*} + \theta_{\varphi^*} ) - \Phi \theta_r [ ( Q_\zeta + \theta_\varphi ) B_1 ]^\# ( Q_\zeta + \\ & + \theta_\varphi ) L_\nu ( Q_{\zeta^*} + \theta_{\varphi^*} ) ] \delta G_* + \delta G [ ( Q_\zeta + \theta_\varphi ) L_\nu ( Q_{\zeta^*} + \theta_{\varphi^*} ) G_* - ( Q_\zeta + \theta_\varphi ) L_\nu ( Q_{\zeta^*} + \\ & + \theta_{\varphi^*} ) [ B_2 ( Q_{\zeta^*} + \theta_{\varphi^*} ) ]^\# \theta_{r^*} \Phi_* ] R \} ds \end{aligned} \quad (2.36)$$

Целесообразно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Gamma_* \Gamma &= R; \quad D L_\nu D_* = ( Q_\zeta + \theta_\varphi ) L_\nu ( Q_{\zeta^*} + \theta_{\varphi^*} ); \\ T &= T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1} \Phi \theta_r [ ( Q_\zeta + \theta_\varphi ) B_1 ]^\# D. \end{aligned} \quad (2.37)$$

С учетом обозначений (2.37) вариацию (2.36) можно переписать несколько иначе:

$$\delta \mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [ \Gamma_* ( \Gamma G D - T ) L_n D_* \delta G_* + \delta G D L_n ( D_* G_* \Gamma_* - T_* ) \Gamma ] ds. \quad (2.38)$$

Условие тождественного равенства вариации (2.38) нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $G$  имеет вид

$$\Gamma G D = ( T_0 + T_+ ),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры  $G$  будет таким

$$G = \Gamma^{-1} ( T_0 + T_+ ) D^{-1}. \quad (2.39)$$

В выражениях (2.37)-(2.39) использованы символы винеровских операций факторизации и сепарации матриц.

### **2.3.3 Задача синтеза оптимальной структуры дополнительной коррекции фильтра при учёте возможных отклонений моделей динамики элементов измерительной системы от базовых**

Структурная схема измерительной системы исследуемой в данной задаче, представлена на рисунке 2.5.

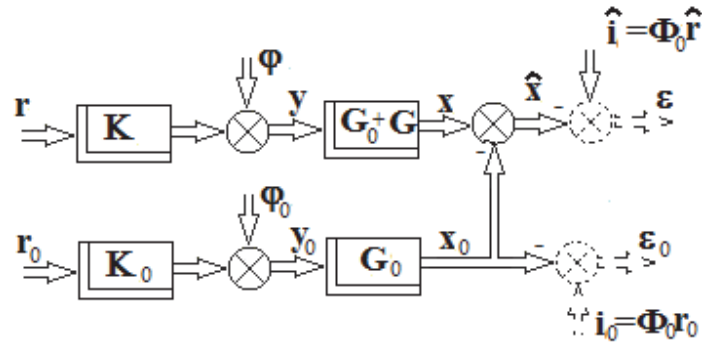


Рис. 2.5 Структурная схема измерительной системы с дополнительной коррекцией

При решении этой задачи полагается, что предварительно известны модели динамики всех звеньев и векторов сигналов базовой (расчётной) системы измерений (см. раздел 2.1). Рассматривается вариант задачи в общем случае (неодинаковое количество координат векторов спектров сигналов  $y$  ( $y_0$ ) и  $x$  ( $x_0$ ):  $n \geq \nu$ ). Полагается также, что модели динамики реальных звеньев и векторов спектров сигналов можно представить так

$$K = K_0 + \hat{K}, \quad r = r_0 + \hat{r}, \quad \varphi = \varphi_0 + \hat{\varphi}, \quad x = x_0 + \hat{x}, \quad i = i_0 + \hat{i},$$

здесь индексом «0» помечены базовые (расчётные модели), а символом « $\hat{\phantom{x}}$ » - отклонения от базовых значений.

Учитывая принятые выше обозначения, векторы изображений базовых и реальных сигналов выхода системы измерений детерминированной информации следует можно представить в виде

$$x_0 = G_0 y_0 = G_0 (K_0 r_0 + \varphi_0) = G_0 (Q_{z_0} + \theta_{\varphi_0}) B_1 L_{n \times 1};$$

$$x = G_0 (K_0 r_0 + \varphi_0) + G_0 [(K_0 \hat{r} + \hat{K} r_0 + \hat{K} \hat{r}) + \hat{\varphi}] + G [(K_0 r_0 + K_0 \hat{r} + \hat{K} r_0 + \hat{K} \hat{r}) + \varphi_0 + \hat{\varphi}], \quad (2.40)$$

а вектор спектров сигналов отклонений выходов измерительной системы от базовых значений  $\hat{x}$  определить следующим образом

$$\begin{aligned} \hat{x} = x - x_0 = & G [(K_0 r_0 + K_0 \hat{r} + \hat{K} r_0 + \hat{K} \hat{r}) + (\varphi_0 + \hat{\varphi})] + \\ & + G_0 [(K_0 \hat{r} + \hat{K} r_0 + \hat{K} \hat{r}) + \hat{\varphi}]; \end{aligned} \quad (2.41)$$

По аналогии с разделом 2.1 введены дополнительные обозначения:

$$r_0 = \theta_{r_0} L_{n \times 1}, \quad r_{0*} = L_{1 \times n} \theta_{r_{0*}};$$

$$\hat{r} = \theta_{\hat{r}} \hat{r} L_{n \times 1}, \quad \hat{r}_* = L_{1 \times n} \theta_{\hat{r}*}; \quad \hat{\varphi} = \theta_{\hat{\varphi}} L_{v \times 1}, \quad \hat{\varphi}_* = L_{1 \times v} \theta_{\hat{\varphi}*};$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} K_{011} & K_{012} & K_{013} & \dots & K_{01n} \\ K_{021} & K_{022} & K_{023} & \dots & K_{02n} \\ K_{031} & K_{032} & K_{033} & \dots & K_{03n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{0v1} & K_{0v2} & K_{0v3} & \dots & K_{0vn} \end{bmatrix}; \quad \hat{K} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} & \hat{K}_{13} & \dots & \hat{K}_{1n} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} & \hat{K}_{23} & \dots & \hat{K}_{2n} \\ \hat{K}_{31} & \hat{K}_{32} & \hat{K}_{33} & \dots & \hat{K}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{K}_{v1} & \hat{K}_{v2} & \hat{K}_{v3} & \dots & \hat{K}_{vn} \end{bmatrix};$$

$$r_0 = \begin{bmatrix} \theta_{r_01} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_{r_02} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{r_03} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \theta_{r_0n} \end{bmatrix} L_{n \times 1} = \theta_{r_0} L_{n \times 1};$$

$$\hat{r} = \begin{bmatrix} \theta_{\hat{r}1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_{\hat{r}2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{\hat{r}3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \theta_{\hat{r}n} \end{bmatrix} L_{n \times 1} = \theta_{\hat{r}} L_{n \times 1};$$

$$\varphi_0 = \begin{bmatrix} \theta_{\varphi_01} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_{\varphi_02} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{\varphi_03} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \theta_{\varphi_0n} \end{bmatrix} L_{n \times 1} = \theta_{\varphi_0} L_{v \times 1};$$

$$\hat{\varphi} = \begin{bmatrix} \theta_{\hat{\varphi}1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_{\hat{\varphi}2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{\hat{\varphi}3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \theta_{\hat{\varphi}n} \end{bmatrix} L_{n \times 1} = \theta_{\hat{\varphi}} L_{v \times 1};$$

$$B_1 = [E_v, O_{v \times (n-v)}], \quad B_2 = \begin{bmatrix} E_v \\ O_{(n-v) \times v} \end{bmatrix};$$

$$\hat{\zeta}_0 = K_0 r_0 = \begin{bmatrix} K_{011} \theta_{r_01} + K_{012} \theta_{r_02} + K_{013} \theta_{r_03} + \dots + K_{01n} \theta_{r_0n} \\ K_{021} \theta_{r_01} + K_{022} \theta_{r_02} + K_{023} \theta_{r_03} + \dots + K_{02n} \theta_{r_0n} \\ K_{031} \theta_{r_01} + K_{032} \theta_{r_02} + K_{033} \theta_{r_03} + \dots + K_{03n} \theta_{r_0n} \\ \dots \\ K_{0v1} \theta_{r_01} + K_{0v2} \theta_{r_02} + K_{0v3} \theta_{r_03} + \dots + K_{0vn} \theta_{r_0n} \end{bmatrix} = Q_{\hat{\zeta}_0} L_{v \times 1};$$

$$\hat{\zeta}_1 = K_0 \hat{r} = \begin{bmatrix} K_{011}\theta_{\hat{r}1} + K_{012}\theta_{\hat{r}2} + K_{013}\theta_{\hat{r}3} + \dots + K_{01n}\theta_{\hat{r}n} \\ K_{021}\theta_{\hat{r}1} + K_{022}\theta_{\hat{r}2} + K_{023}\theta_{\hat{r}3} + \dots + K_{02n}\theta_{\hat{r}n} \\ K_{031}\theta_{\hat{r}1} + K_{032}\theta_{\hat{r}2} + K_{033}\theta_{\hat{r}3} + \dots + K_{03n}\theta_{\hat{r}n} \\ \dots \\ K_{0v1}\theta_{\hat{r}1} + K_{0v2}\theta_{\hat{r}2} + K_{0v3}\theta_{\hat{r}3} + \dots + K_{0vn}\theta_{\hat{r}n} \end{bmatrix} = Q_{\hat{\zeta}_1} L_{v \times 1};$$

$$\hat{\zeta}_2 = \hat{K} r_0 = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11}\theta_{r_01} + \hat{K}_{12}\theta_{r_02} + \hat{K}_{13}\theta_{r_03} + \dots + \hat{K}_{1n}\theta_{r_0n} \\ \hat{K}_{21}\theta_{r_01} + \hat{K}_{22}\theta_{r_02} + \hat{K}_{23}\theta_{r_03} + \dots + \hat{K}_{2n}\theta_{r_0n} \\ \hat{K}_{31}\theta_{r_01} + \hat{K}_{32}\theta_{r_02} + \hat{K}_{33}\theta_{r_03} + \dots + \hat{K}_{3n}\theta_{r_0n} \\ \dots \\ \hat{K}_{v1}\theta_{r_01} + \hat{K}_{v2}\theta_{r_02} + \hat{K}_{v3}\theta_{r_03} + \dots + \hat{K}_{vn}\theta_{r_0n} \end{bmatrix} = Q_{\hat{\zeta}_2} L_{v \times 1};$$

$$\hat{\zeta}_3 = \hat{K} \hat{r} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11}\theta_{\hat{r}1} + \hat{K}_{12}\theta_{\hat{r}2} + \hat{K}_{13}\theta_{\hat{r}3} + \dots + \hat{K}_{1n}\theta_{\hat{r}n} \\ \hat{K}_{21}\theta_{\hat{r}1} + \hat{K}_{22}\theta_{\hat{r}2} + \hat{K}_{23}\theta_{\hat{r}3} + \dots + \hat{K}_{2n}\theta_{\hat{r}n} \\ \hat{K}_{31}\theta_{\hat{r}1} + \hat{K}_{32}\theta_{\hat{r}2} + \hat{K}_{33}\theta_{\hat{r}3} + \dots + \hat{K}_{3n}\theta_{\hat{r}n} \\ \dots \\ \hat{K}_{v1}\theta_{\hat{r}1} + \hat{K}_{v2}\theta_{\hat{r}2} + \hat{K}_{v3}\theta_{\hat{r}3} + \dots + \hat{K}_{vn}\theta_{\hat{r}n} \end{bmatrix} = Q_{\hat{\zeta}_3} L_{v \times 1};$$

$$\hat{\xi} = \hat{\zeta}_1 + \hat{\zeta}_2 + \hat{\zeta}_3 = (Q_{\hat{\zeta}_1} + Q_{\hat{\zeta}_2} + Q_{\hat{\zeta}_3}) L_{v \times 1} = Q_{\hat{\xi}} L_{v \times 1};$$

$$\hat{\xi}_0 = \hat{\zeta}_0 + \hat{\zeta}_1 + \hat{\zeta}_2 + \hat{\zeta}_3 = (Q_{\hat{\zeta}_0} + Q_{\hat{\zeta}_1} + Q_{\hat{\zeta}_2} + Q_{\hat{\zeta}_3}) L_{v \times 1} = Q_{\hat{\xi}_0} L_{v \times 1}. \quad (2.42)$$

С учётом выражений (2.42) вектор (2.41) следует представить как

$$\begin{aligned} \hat{x} &= G (Q_{\hat{\xi}_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}}) L_{v \times 1} + G_0 (Q_{\hat{\xi}} + \theta_{\hat{\varphi}}) L_{v \times 1} = \\ &= [G (Q_{\hat{\xi}_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}}) + G_0 (Q_{\hat{\xi}} + \theta_{\hat{\varphi}})] B_1 L_{n \times 1}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Учитывая вектор (2.43) и вектор  $\hat{i}$  (рис 2.4), вектор сигналов ошибки системы вследствие изменения моделей динамики ее элементов будет иметь вид:

$$\varepsilon = \hat{x} - \hat{i} = \{ [G (Q_{\hat{\xi}_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}}) + G_0 (Q_{\hat{\xi}} + \theta_{\hat{\varphi}})] B_1 - \Phi_0 \theta_{\hat{r}} \} L_{n \times 1}, \quad (2.44)$$

Функционал качества измерений детерминированной информации в этом варианте задачи синтеза следует записать так:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}(\varepsilon \varepsilon_* R) ds. \quad (2.45)$$

С учётом выражений (2.42), (2.43) получен следующий результат преобразования показатель качества (2.45):

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}(\{ [G (Q_{\hat{\xi}_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}}) B_1 L_n B_2 (Q_{\hat{\xi}_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*}) G_* + \\ &+ G (Q_{\hat{\xi}_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}}) B_1 L_n [B_2 (Q_{\hat{\xi}^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*}) G_{0^*} - \theta_{\hat{r}^*} \Phi_{0^*}] + [G_0 (Q_{\hat{\xi}} + \theta_{\hat{\varphi}}) B_1 - \end{aligned}$$

$$-\Phi_0\theta_{\hat{r}}]L_nB_2(Q_{\hat{\xi}_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*})G_* + [G_0(Q_{\hat{\xi}} + \theta_{\hat{\varphi}})B_1 - \Phi_0\theta_{\hat{r}}]L_n[B_2(Q_{\hat{\xi}_*} + \theta_{\hat{\varphi}^*})G_{0*} - \theta_{\hat{r}^*}\Phi_{0*}]R)ds; \quad (2.46)$$

где, как и ранее,  $L_n = L_{n \times 1}L_{1 \times n}$ .

Решая задачу синтеза оптимальной структуры дополнительной коррекции фильтра методом Винера-Колмогорова по аналогии с выражением (2.11) необходимо определить первую вариацию функционала (2.46):

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr((R\{G(Q_{\hat{\xi}_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}})B_1L_nB_2(Q_{\hat{\xi}_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*}) + \\ & + [G_0(Q_{\hat{\xi}} + \theta_{\hat{\varphi}})B_1 - \Phi_0\theta_{\hat{r}}]L_nB_2(Q_{\hat{\xi}_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*})\}\delta G_* + \delta G\{(Q_{\hat{\xi}_0} + \theta_{\varphi_0} + \\ & + \theta_{\hat{\varphi}})B_1L_nB_2(Q_{\hat{\xi}_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*})G_* + (Q_{\hat{\xi}_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}})B_1L_n[B_2(Q_{\hat{\xi}_*} + \theta_{\hat{\varphi}^*})G_{0*} - \\ & - \theta_{\hat{r}^*}\Phi_{0*}]\}R)ds; \end{aligned} \quad (2.47)$$

Целесообразно ввести следующие обозначения:

$$\Gamma_*\Gamma = R; \quad DL_\nu D_* = (Q_{\hat{\xi}_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}})B_1L_nB_2(Q_{\hat{\xi}_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*}) = (Q_{\hat{\xi}_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}})L_\nu(Q_{\hat{\xi}_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*});$$

$$T = T_0 + T_+ + T_- = [G_0(Q_{\hat{\xi}} + \theta_{\hat{\varphi}}) - \Phi_0\theta_{\hat{r}}(B_1)^\#](Q_{\hat{\xi}_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}})^{-1}D. \quad (2.48)$$

С учётом выражений (2.48) вариацию (2.47) можно записать так:

$$\delta\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr[\Gamma_*(\Gamma GD + T)L_\nu D_*\delta G_* + \delta GDL_\nu(D_*G_*\Gamma_* + T_*)\Gamma]ds,$$

а условия тождественного равенства вариации нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $G$  записать в виде

$$\Gamma GD = -(T_0 + T_+).$$

Алгоритм синтеза оптимальной структуры  $G$  может быть определен следующим уравнением

$$G = -\Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^{-1}. \quad (2.49)$$

Индексы в выражениях (2.48) отображают необходимость выполнения винеровских операций факторизации и сепарации над соответствующими подоператорными матрицами.

### 2.3.4 Задача и алгоритм синтеза двухканальной оптимальной системы измерений при учете реальных моделей динамики ее звеньев и сигналов (общий случай)

Структурная схема исследуемой двухканальной измерительной системы представлена на рисунке 2.6.

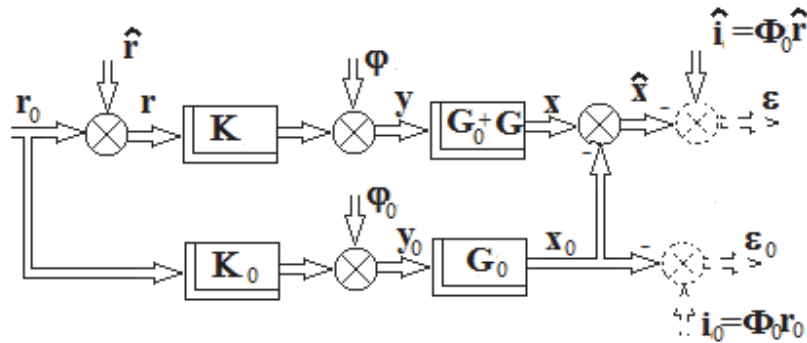


Рис. 2.6. Структурная схема исследуемой двухканальной измерительной системы

На схеме (рис.2.6.) индексом «0» помечены базовые (расчетные) модели динамики звеньев и сигналов системы, а индексом «^» отмечены приращения моделей динамики указанных элементов системы. Как и в предыдущей задаче здесь введены следующие обозначения:

$$K = K_0 + \hat{K}; r = r_0 + \hat{r}; \varphi = \varphi_0 + \hat{\varphi}; y = y_0 + \hat{y}; i = i_0 + \hat{i}; \quad (2.50)$$

По аналогии с пунктом 2.1.2 принято, что

$$r_0 = \theta_{r_0} \cdot L_{n \times 1}, r_{0*} = L_{1 \times n} \cdot \theta_{r_{0*}}, \varphi_0 = \theta_{\varphi_0} \cdot L_{v \times 1}, \varphi_{0*} = L_{1 \times v} \cdot \theta_{\varphi_{0*}};$$

$$K_0 r_0 = \begin{bmatrix} K_{11}\theta_{r_01} + K_{12}\theta_{r_02} + K_{13}\theta_{r_03} + \dots + K_{1n}\theta_{r_0n} \\ K_{21}\theta_{r_01} + K_{22}\theta_{r_02} + K_{23}\theta_{r_03} + \dots + K_{2n}\theta_{r_0n} \\ K_{31}\theta_{r_01} + K_{32}\theta_{r_02} + K_{33}\theta_{r_03} + \dots + K_{3n}\theta_{r_0n} \\ \dots \\ K_{v1}\theta_{r_01} + K_{v2}\theta_{r_02} + K_{v3}\theta_{r_03} + \dots + K_{vn}\theta_{r_0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{\zeta_1} \\ Q_{\zeta_2} \\ Q_{\zeta_3} \\ \vdots \\ Q_{\zeta_v} \end{bmatrix} = Q_{\zeta_0} L_{v \times 1} \quad (2.51)$$

где  $Q_{\zeta_0}$  – диагональная матрица;

$$B_1 = [E_v, O_{v \times (n-v)}], B_2 = \begin{bmatrix} E_v \\ O_{(n-v) \times v} \end{bmatrix}.$$

С учетом обозначений (2.51) вектор  $x_0$  выходных сигналов базовой системы (2.6) следует представить выражением

$$x_0 = G_0(K_0 r_0 + \varphi_0) = G_0(Q_{z_0} + \theta_{\varphi_0})L_{v \times 1} = G_0(Q_{z_0} + \theta_{\varphi_0})B_1 L_{n \times 1}, \quad (2.53)$$

а вектор ошибок базовой системы измерений (2.7) уравнением

$$\varepsilon_0 = x_0 - i_0 = [G_0(Q_{z_0} + \theta_{\varphi_0})B_1 - \Phi_0 \theta_{r_0}]L_{n \times 1}.$$

При устойчивых моделях динамики элементов оптимальную структуру  $G_0$  фильтра в базовой системе измерений можно найти из соотношения (2.8) и получить следующий результат

$$G_0 = \Phi_0 \theta_{r_0} [B_1 (Q_{z_0} + \theta_{\varphi_0})]^\#,$$

где «#» - символ псевдообращения соответствующей матрицы.

Вектор  $x$  моделей реальных выходных сигналов исследуемой системы, учитывая выражения (2.50), (2.51) и (2.8), представляется следующим образом

$$\begin{aligned} x_0 = G_0(K_0 r_0 + \varphi_0) + G_0[(K_0 \hat{r} + \hat{K} r_0 + \hat{K} \hat{r}) + \hat{\varphi}] + \\ + G[(K_0 r_0 + K_0 \hat{r} + \hat{K} r_0 + \hat{K} \hat{r}) + (\varphi_0 + \hat{\varphi})]. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Подстановка выражение (2.54) в уравнение (2.41) позволяет представить разностный вектор  $\hat{x}$  в виде

$$\begin{aligned} \hat{x} = x - x_0 = G[(K_0 r_0 + K_0 \hat{r} + \hat{K} r_0 + \hat{K} \hat{r}) + (\varphi_0 + \hat{\varphi})] + \\ + G_0[(K_0 \hat{r} + \hat{K} r_0 + \hat{K} \hat{r}) + \hat{\varphi}]. \end{aligned}$$

С учетом обозначений принятых в пункте 2.3.3 настоящей главы, вектор  $\hat{x}$  спектров разностных выходных сигналов системы следует записать так

$$\hat{x} = [G(Q_{\xi_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}}) + G_0(Q_{\xi} + \theta_{\hat{\varphi}})]B_1 L_{n \times 1}; \quad (2.55)$$

Используя выражение (2.55), возможно представить вектор  $\varepsilon$  сигналов ошибок системы (рис.2.6) таким образом:

$$\varepsilon = \hat{x} - \hat{i} = \{[G(Q_{\xi_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}}) + G_0(Q_{\xi} + \theta_{\hat{\varphi}})]B_1 - \Phi_0 \theta_{\hat{r}}\}L_{n \times 1}, \quad (2.56)$$

Пусть функционал качества измерений детерминированной информации в исследуемой системе имеет вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}(\varepsilon \varepsilon_* R) ds, \quad (2.57)$$

Подставив вектор (2.56) в функционал (2.57) и учитывая сказанное ранее, следует записать последний так

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}(\{[G(Q_{\xi_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}}) + G_0(Q_{\xi} + \theta_{\hat{\varphi}})]B_1 - \Phi_0\theta_{\hat{r}}\}L_n \times \\ & \times \{B_2[(Q_{\xi_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*})G_* + (Q_{\xi^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*})G_{0^*}] - \theta_{\hat{r}^*}\Phi_{0^*}\}R))ds. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Решая задачу синтеза оптимальной структуры  $G$  коррекции фильтра в исследуемой измерительной системе с применением процедуры метода Винера-Колмогорова, необходимо определить первую вариацию функционала (2.58). Ее нахождение позволяет получить такой результат:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}((R\{G(Q_{\xi_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}})L_{\nu}(Q_{\xi_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*}) + \\ & + [G_0(Q_{\xi} + \theta_{\hat{\varphi}}) - \Phi_0\theta_{\hat{r}}B_1^{\#}]B_1L_nB_2(Q_{\xi_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*})\}\delta G_* + \delta G\{(Q_{\xi_0} + \\ & + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}})B_1L_nB_2(Q_{\xi_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*})G_* + (Q_{\xi_0} + \theta_{\varphi_0} + \\ & \theta_{\hat{\varphi}})B_1L_nB_2[(Q_{\xi^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*})G_{0^*} - B_2^{\#}\theta_{\hat{r}^*}\Phi_{0^*}]\}R))ds. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Здесь целесообразно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Gamma_*\Gamma &= R; DLD_* = (Q_{\xi_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}})L_{\nu}(Q_{\xi_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*}); \\ T &= T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1}[G_0(Q_{\xi} + \theta_{\hat{\varphi}}) - \Phi_0\theta_{\hat{r}}B_1^{\#}][Q_{\xi_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}}]^{-1}D. \end{aligned} \quad (2.60)$$

В выражениях (2.60) производятся действия над элементами в соответствии с винеровскими операциями факторизации и сепарации матриц, какие и обозначены соответствующими символами.

С учетом обозначений (2.60) вариацию (2.59) можно переписать так:

$$\delta\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}[\Gamma_*(\Gamma GD + T)L_{\nu}D_*\delta G_* + \delta GDL_{\nu}(D_*G_*\Gamma_* + T_*)\Gamma]ds. \quad (2.61)$$

Условие тождественного равенства вариации (2.59) нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $G$  следует записать так

$$\Gamma GD = -(T_0 + T_+),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры  $G$  коррекции фильтра в системе представить в виде

$$G = -\Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^{-1}. \quad (2.62)$$

Таким образом, представленная задача синтеза решена.

Подстановка структуры (2.62) в функционал (2.58) позволяет исследовать изменчивость его величины в функции варьируемых параметров системы известным способом.

### **2.3.5 Задача и алгоритм синтеза двухканальной робастной оптимальной системы измерений (общий случай)**

Структурная схема системы, подлежащей исследованию в рассматриваемой задаче синтеза и предназначенной для переработки детерминированной информации, представлена на рисунке 2.6. Принятые в задаче обозначения моделей динамики элементов (сигналов и звеньев) системы не отличаются от рассмотренных в пункте 2.3.4 настоящей главы.

Как и в предыдущей задаче (пункт 2.3.4), здесь также рассматривается задача синтеза оптимальной структуры передаточных функций  $G$  фильтра дополнительной коррекции в системе, но уже путем минимизации нового функционала качества измерений полезной информации, имеющего слагаемые, способствующие достижению робастности синтезированной системы.

Как оговорено выше, в рассматриваемой задаче также используются модели динамики элементов (2.50)-(2.56) системы, природа каждого из которых достаточно ясна из структурной системы (рис. 2.6), а функция  $G_0$  описывается выражением типа (2.8).

В рассматриваемой задаче используется функционал качества измерений системой детерминированной информации, который имеет вид:

$$E = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (\varepsilon \varepsilon_* R + \Lambda \hat{x} x_{0*} + x_0 \hat{x}_* \Lambda) ds, \quad (2.63)$$

здесь  $R$  и  $\Lambda$  – положительно-определенные весовые матрицы, а модели динамики векторов  $x_0$ ,  $\hat{x}$  и  $\varepsilon$  описываются выражениями (2.53), (2.55) и (2.56) соответственно. Подстановка перечисленных моделей динамики в выражение (2.63) позволяет представить функционал качества фильтрации как показано ниже

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left( \left( \{G(Q_{\xi_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}})B_1L_nB_2(Q_{\xi_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*})G_* + \right. \right. \\
& + G(Q_{\xi_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}})B_1L_n[B_2(Q_{\xi^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*})G_{0^*} - \theta_{\hat{r}^*}\Phi_*] + [G_0(Q_{\xi} + \theta_{\hat{\varphi}})B_1 - \\
& - \Phi\theta_{\hat{r}}]L_nB_2(Q_{\xi_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*})G_* + [G_0(Q_{\xi} + \theta_{\hat{\varphi}})B_1 - \Phi\theta_{\hat{r}}]L_n[B_2(Q_{\xi^*} + \\
& + \theta_{\hat{\varphi}^*})G_{0^*} - \theta_{\hat{r}^*}\Phi_*] \} R + \Lambda [G(Q_{\xi_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}}) + G_0(Q_{\xi} + \\
& + \theta_{\hat{\varphi}})]B_1L_nB_2(Q_{\xi_0^*} + \theta_{\varphi_0^*})G_{0^*} + G_0(Q_{\xi_0} + \theta_{\varphi_0})B_1L_nB_2[(Q_{\xi_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \\
& + \theta_{\hat{\varphi}^*})G_* + (Q_{\xi^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*})G_{0^*}] \Lambda \left. \right) ds. \tag{2.64}
\end{aligned}$$

Решая задачу синтеза оптимальной структуры  $G$  методом Винера-Колмогорова и учитывая уже отмеченные особенности используемых матриц, необходимо определить первую вариацию функционала  $\delta\mathcal{E}$  и условие тождественного равенства ее нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций. Первая вариация  $\delta\mathcal{E}$  функционала (2.64) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{E} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left( \left( R \{ G(Q_{\xi_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}})L_v(Q_{\xi_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*}) + [(E_n + \right. \right. \\
& + R^{-1}\Lambda)G_0(Q_{\xi} + \theta_{\hat{\varphi}}) - \Phi\theta_{\hat{r}}B_1^\#]L_v(Q_{\xi_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*}) \} \delta G_* + \delta G \{ (Q_{\xi_0} + \theta_{\varphi_0} + \\
& + \theta_{\hat{\varphi}})L_v(Q_{\xi_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*})G_* + (Q_{\xi_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}})L_v[(Q_{\xi^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*})G_{0^*}(E_n + \\
& + R^{-1}\Lambda) - B_2^\#\theta_{\hat{r}^*}\Phi_*] \} R \left. \right) ds. \tag{2.65}
\end{aligned}$$

Целесообразно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\Gamma_*\Gamma = R; \quad DL_nD_* = (Q_{\xi_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}})L_v(Q_{\xi_0^*} + \theta_{\varphi_0^*} + \theta_{\hat{\varphi}^*}); \quad T = T_0 + T_+ + T_- = \\
= \Gamma_*^{-1}[(E_n + R^{-1}\Lambda)G_0(Q_{\xi} + \theta_{\hat{\varphi}}) - \Phi\theta_{\hat{r}}B_1^\#][Q_{\xi_0} + \theta_{\varphi_0} + \theta_{\hat{\varphi}}]^{-1}^\#D. \tag{2.66}
\end{aligned}$$

С учетом обозначений (2.66) вариацию (2.65) возможно переписать в виде:

$$\delta\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\Gamma_*(\Gamma GD + T)L_vD_*\delta G_* + \delta GDL_v(D_*G_*\Gamma_* + T_*)\Gamma] ds,$$

а условие тождественного равенства вариации (2.66) нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $G$  записать так:

$$\Gamma GD = -(T_0 + T_+). \tag{2.67}$$

Из условия (2.67) легко определить алгоритм синтеза оптимальной структуры  $G$ , который будет иметь вид

$$G = \Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^{-1}. \quad (2.68)$$

Как и ранее, в обозначениях (2.61) использованы символы выполнения винеровских операций факторизации и сепарации соответствующих матриц. Подстановка структуры  $G$  (2.68) в функционал (2.64) определит минимальное значение последнего.

## **2.4 Синтез многомерных разомкнутых линейных оптимальных систем управления при детерминированных воздействиях**

В современной теории автоматического управления вопросам синтеза оптимальных структур регуляторов в разомкнутых многомерных системах управления, подверженных действию детерминированных возмущений и сигналов, уделено недостаточное внимание и не обсуждаются многие проблемные вопросы обеспечения качества такого управления. В тоже время, проектирование и конструирование SCADA-систем требуют наличия соответствующих методов, приемов и средств проектирования оптимальных структур регуляторов в разомкнутых системах. Излагаемый ниже раздел монографии призван заполнить указанные пробелы и обеспечить выполнение данного требования.

### **2.4.1 Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры регулятора в разомкнутой системе слежения при равенстве размерностей векторов сигналов «вход-выход» измерителя, регулятора и всей системы**

Структурная схема типовой разомкнутой многомерной системы преобразования детерминированной информации представлена на рисунке 2.7. Здесь полагается, что модели динамики всех элементов (звеньев и сигналов) системы, кроме модели динамики (структуры) регулятора  $G$ , разработчику ориентировочно известны.

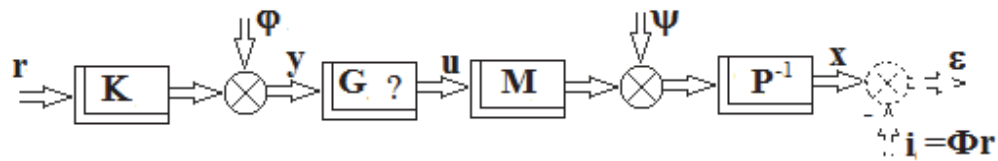


Рис. 2.7 Структурна схема типовой разомкнутой системы преобразования детерминированной информации

На схеме (рис. 2.7) исследуемой системы, состоящей из измерительного комплекса, регулятора и линейного многомерного объекта, приняты следующие обозначения:  $K$  – матрица передаточных функций измерительного комплекса;  $G$  – искомая в задаче синтеза матрица передаточных функций (структура) регулятора;  $\Phi$  – матрица передаточных функций желаемого преобразования программы;  $r$ ,  $\varphi$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $\psi$ ,  $x$ ,  $\varepsilon$  – изображения векторов сигналов соответственно отслеживаемой системой программы  $r$ , помех измерений  $\varphi$ , сигналов наблюдения  $y$ , сигналов управления объектом  $u$ , сигналов возмущений, действующего на объект управления  $\psi$ , выходных сигналов объекта  $x$ , сигналов ошибок слежения  $\varepsilon$ . Преобразованная по Фурье система известных дифференциальных уравнений, описывающих движение линейного объекта управления, в установившемся режиме работы, имеет вид:

$$Px = Mu + \psi,$$

где  $P$  и  $M$  – известные матрицы, элементами которых являются полиномы комплексной переменной  $s$

Как следует из структурной схемы (рис. 2.7), вектор выходных сигналов системы  $x$  имеет вид

$$x = P^{-1}MG(Kr + \varphi) + P^{-1}\psi. \quad (2.69)$$

Вектор сигналов управления системой  $u$  следует записать как

$$u = G(Kr + \varphi). \quad (2.70)$$

Учет уравнения (2.69) и вектора желаемых сигналов  $i = \Phi r$  позволяет найти следующий вектор сигналов ошибки системы  $\varepsilon$

$$\varepsilon = x - i = P^{-1}MG(Kr + \varphi) + P^{-1}\psi - \Phi r. \quad (2.71)$$

Для успешного нахождения структуры и параметров матрицы передаточных функций  $G$  целесообразно ввести следующие обозначения:

$$r = \theta_r L_{n \times 1}; \varphi = \theta_\varphi L_{v \times 1}; \psi = \theta_\psi L_{n \times 1}; u = \theta_u L_{m \times 1}; \varepsilon = \theta_\varepsilon L_{n \times 1}; \quad (2.72)$$

где  $\theta_r, \theta_\varphi, \theta_\psi, \theta_u, \theta_\varepsilon$  – диагональные матрицы, составленные из спектров компонентов векторов, обозначенных в индексах;  $L_{n \times 1}, L_{v \times 1}, L_{m \times 1}$  – единичные векторы-столбцы, имеющие размерности соответствующих векторов сигналов.

В общем случае задачи синтеза количество компонентов соответствующих векторов неодинаковы ( $n \neq v \neq m$ ). Но далее в пункте 2.3.1 главы, рассматривается лишь частный вариант задачи синтеза при условии одинаковости размерностей всех исследуемых векторов сигналов ( $n=v$ ).

Итак, решаемая ниже задача состоит в следующем. При условии равенства количества компонентов исследуемых векторов сигналов ( $n=v$ ) синтезировать оптимальную структуру регулятора  $G$  в системе преобразования детерминированной информации (рис 2.7) такую, которая доставит максимум следующему функционалу качества:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (\varepsilon \varepsilon_* R + u u_* C) ds, \quad (2.73)$$

где  $R$  и  $C$  – весовые положительно-определённые матрицы, вид которых определяется разработчиком системы по методике, изложенной например в монографии [34].

Учитывая введенные выше обозначения (2.72) и условие равенства числа компонентов исследуемых векторов ( $n=v$ ), выражения (2.70) и (2.71) можно переписать так:

$$u = G(K\theta_r + \theta_\varphi)L_{n \times 1}, \quad \varepsilon = [P^{-1}MG(K\theta_r + \theta_\varphi) + (P^{-1}\theta_\psi - \Phi\theta_r)]L_{n \times 1}. \quad (2.74)$$

После подстановки векторов (2.74) в функционал (2.73), последний приобретет вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [P^{-1}MG(K\theta_r + \theta_\varphi)L_n(\theta_{r*}K_* + \theta_{\varphi*})G_*M_*P_*^{-1} + P^{-1}MG(K\theta_r + \theta_\varphi)L_n(\theta_{\psi*}P_*^{-1} - \theta_{r*}\Phi_*) + (P^{-1}\theta_\psi - \Phi\theta_r)L_n(\theta_{r*}K_* + \theta_{\varphi*})G_*M_*P_*^{-1} +$$

$$+(P^{-1}\theta_\psi - \Phi\theta_r)L_n(\theta_{\psi_*}P_*^{-1} - \theta_{r_*}\Phi_*)]R + G(K\theta_r + \theta_\varphi)L_n(\theta_{r_*}K_* + \theta_{\varphi_*})G_*C\}ds, \quad (2.75)$$

где матрица  $L_n = L_{n \times 1}L_{1 \times n}$ .

Для минимизации функционала (2.75) методом Винера-Колмогорова определена его первая вариация

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{[(M_*P_*^{-1}RP^{-1}M + C)G(K\theta_r + \theta_\varphi)L_n(\theta_{r_*}K_* + \theta_{\varphi_*}) + \\ & + M_*P_*^{-1}R(P^{-1}\theta_\psi - \Phi\theta_r)L_n(\theta_{r_*}K_* + \theta_{\varphi_*})]\delta G_* + \delta G[(K\theta_r + \theta_\varphi)L_n(\theta_{r_*}K_* + \\ & + \theta_{\varphi_*})G_*(M_*P_*^{-1}RP^{-1}M + C) + (K\theta_r + \theta_\varphi)L_n(\theta_{\psi_*}P_*^{-1} - \theta_{r_*}\Phi_*)RP^{-1}M]\}ds. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Целесообразно ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_*\Gamma &= M_*P_*^{-1}RP^{-1}M + C; DL_nD_* = (K\theta_r + \theta_\varphi)L_n(\theta_{r_*}K_* + \theta_{\varphi_*}); \\ T &= T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1}M_*P_*^{-1}R(P^{-1}\theta_\psi - \Phi\theta_r), \end{aligned} \quad (2.77)$$

где использованы символы винеровских операций факторизации и сепарации матриц, оговоренные ранее.

Учитывая обозначения (2.77), вариацию (2.76) следует переписать так:

$$\delta\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_*(\Gamma GD + T)L_nD_*\delta G_* + \delta GDL_n(D_*G_*\Gamma_* + T_*)\Gamma]ds. \quad (2.78)$$

Условие тождественного равенства нулю вариации (2.78) на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $G$  определит управление

$$\Gamma GD = -(T_0 + T_+),$$

а алгоритмом синтеза оптимальной структуры  $G$  матрицы передаточных функций регулятора системы следует считать следующее выражение

$$G = -\Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^{-1}. \quad (2.79)$$

Подстановка матрицы  $G$  в функционал (2.75) определит его минимальную величину, изменение которой в функции варьируемого в широких диапазонах набора параметров, интересующих разработчика исследуемой системы управления, позволит построить поверхность наилучшего достижимого качества

(точности) преобразования системой исходной детерминированной информации и выбрать наилучшие режимы работы системы.

Если исследуемые модели динамики звеньев и векторов сигналов в системе известны достаточно определённо и устойчивы, то в описанном выше варианте задачи синтеза возможно и такое решение как результат обнуления вектора ошибки системы (2.74) а именно:

$$G_0 = M^{-1}P(\Phi\theta_r - P^{-1}\theta_\psi)(K\theta_r + \theta_\varphi)^{-1}. \quad (2.80)$$

#### 2.4.2 Метод и алгоритм синтеза оптимальных структур регуляторов в разомкнутых многомерных системах слежения

Пусть структурная схема и обозначения моделей динамики звеньев и сигналов исследуемой разомкнутой многомерной системы слежения практически не отличаются от таких же на структурной схеме системы, представленной на рисунке 2.7. Отличие состоит лишь в том, что размерности исследуемых векторов сигналов в системе различны и в соответствии с этим установлены размеры матриц, характеризующих модели динамики звеньев системы.

По аналогии с обозначениями (2.72) но уже с учётом различий в размерности векторов спектров сигналов целесообразно ввести следующие новые обозначения:

$$r = \theta_r L_{n \times 1}, \quad r_* = L_{1 \times n} \theta_{r_*}; \quad \varphi = \theta_\varphi L_{v \times 1}, \quad \varphi_* = L_{1 \times v} \theta_{\varphi_*};$$

$$\psi = \theta_\psi L_{n \times 1}, \quad \psi_* = L_{1 \times n} \theta_{\psi_*}; \quad \varepsilon = \theta_\varepsilon L_{n \times 1}, \quad \varepsilon_* = L_{1 \times n} \theta_{\varepsilon_*};$$

$$B_1 = [E_v, O_{(n-v) \times v}], \quad B_2 = \begin{bmatrix} E_v \\ O_{(n-v) \times v} \end{bmatrix};$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots & K_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{v1} & K_{v2} & K_{v3} & \dots & K_{vn} \end{bmatrix}; \quad r = \begin{bmatrix} \theta_{1r} \\ \theta_{2r} \\ \theta_{3r} \\ \dots \\ \theta_{nr} \end{bmatrix};$$



векторов, далее следует определить первую вариации функционала (2.84), которую можно записать так:

$$\begin{aligned} \delta E = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ & [(M_* P_*^{-1} R P^{-1} M + C) G (Q_\zeta + \theta_\varphi) L_\nu (Q_{\zeta_*} + \theta_{\varphi_*}) + \\ & + M_* P_*^{-1} R (P^{-1} \theta_\psi - \Phi \theta_r) B_1^\# L_\nu (Q_{\zeta_*} + \theta_{\varphi_*})] \delta G_* + \delta G [(Q_\zeta + \theta_\varphi) L_\nu (Q_{\zeta_*} + \\ & + \theta_{\varphi_*}) G_* (M_* P_*^{-1} R P^{-1} M + C) + (Q_\zeta + \theta_\varphi) L_\nu B_2^\# (\theta_{\psi_*} P_*^{-1} - \theta_{r_*} \Phi_*) R P^{-1} M] \} ds, \end{aligned} \quad (2.85)$$

где  $B_1 L_n B_2 = L_\nu, L_\nu = L_{\nu \times 1} L_{1 \times \nu}$ .

В вариации (2.85) необходимо ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Gamma_* \Gamma &= M_* P_*^{-1} R P^{-1} M + C; D L_\nu D_* = (Q_\zeta + \theta_\varphi) L_\nu (Q_{\zeta_*} + \theta_{\varphi_*}); \\ T &= T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1} M_* P_*^{-1} R (P^{-1} \theta_\psi - \Phi \theta_r) B_1^\# (Q_\zeta + \theta_\varphi)^{-1} D, \end{aligned} \quad (2.86)$$

где использованы символы виноровских операций факторизации и сепарации матриц, а также символ «#» псевдообратного преобразования прямоугольной матрицы.

Учитывая обозначения (2.86), первую вариацию (2.85) следует переписать так:

$$\delta E = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_* (\Gamma G D + T) L_\nu D_* \delta G_* + \delta G D L_\nu (D_* G_* \Gamma_* + T_*) \Gamma] ds. \quad (2.87)$$

Условием тождественного равенства нулю вариации (2.87) на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $G$  будет уравнение

$$\Gamma G D = -(T_0 + T_+),$$

а алгоритмом синтеза оптимальной структуры матрицы  $G$  выражение

$$G = -\Gamma^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1}. \quad (2.88)$$

Таким образом, задача, поставленная в пункте 2.4.2, решена. Предложены метод и алгоритм синтеза оптимальной структуры регулятора в многомерной линейной системе слежения подверженной действию только детерминированной информации и при ориентировочного известных моделях динамики звеньев и сигналов системы.

### 2.4.3 Примеры решения задач синтеза оптимальных структур фильтров и регуляторов в разомкнутых системах

*Пример №1.* Рассматривается задача синтеза оптимальной структуры фильтра скалярной измерительной системы, подверженной детерминированным воздействиям. Структурная схема исследуемой системы представлена на рисунке 2.4. Полагается известными передаточная функция измерителя в системе  $K = \frac{k}{Ts+1}$ , а также изображения Лапласа сигналов программы  $r$  и помехи измерений  $\varphi$ :

$$r = \theta_r = \frac{a}{(\tau s+1)}, \varphi = \theta_\varphi = \frac{b}{(\mu s+1)}.$$

Пусть передаточная функция желаемого преобразования программы  $r$  системой будет единичной ( $\Phi = 1,0$ ).

Учитывая исходные данные, изображение сигнала ошибки измерений системы  $\varepsilon$  согласно выражению (2.25) будет равно

$$\varepsilon = a \frac{G[\tau T \gamma s^2 + (T\gamma + \tau\gamma + \mu k)s + (\gamma + k)] - [\mu T s^2 + (\mu + T)s + 1]}{(Ts+1)(\tau s+1)(\mu s+1)},$$

где  $\gamma = \frac{b}{a}$ .

Полагая весовой коэффициент  $R$  в функционале (2.27) единичным, далее целесообразно определить выражения (2.28), которые в этом случае будут равны:

$$\Gamma_* = \Gamma = 1,0; D = \left[ \frac{k}{(Ts+1)} \frac{a}{(\tau s+1)} + \frac{b}{(\mu s+1)} \right] = a \frac{[\tau T \gamma s^2 + [(\tau + T)\gamma + \mu k]s + (\gamma + k)]}{(Ts+1)(\tau s+1)(\mu s+1)},$$

$$D_* = a \frac{\tau T \gamma s^2 - [(\tau + T)\gamma + \mu k]s + (\gamma + k)}{(-Ts+1)(-\tau s+1)(-\mu s+1)}; T = T_0 + T_+ + T_- = 1\theta_r = \frac{a}{(\tau s+1)} = T_0 + T_+. \quad (2.89)$$

Подстановка выражений (2.89) в алгоритм (2.30) определяет искомую оптимальную структуру фильтра в виде

$$G = \frac{(Ts+1)(\mu s+1)}{\tau T \gamma s^2 + [(\tau + T)\gamma + \mu k]s + (\gamma + k)} \quad (2.90)$$

Нетрудно заметить, что поскольку все исследуемые модели динамики устойчивы и размерности векторов сигналов, программы и наблюдения одинаковы, наилучшую структуру фильтра  $G$  можно определить непосредственно по формуле (2.4) и эта структура не отличается от структуры (2.90).

**Пример №2.** Этот пример иллюстрирует результаты решения задачи, описанной в пункте 2.4.2. Исходные данные примера следующие:

$$K = \left( \frac{k_1}{T_1s+1}, \frac{k_2}{T_2s+1} \right); M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} (\tau_1s+1) & 0 \\ 0 & (\tau_2s+1) \end{bmatrix};$$

$$r = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{(\mu_1s+1)} \\ \frac{n_2}{(\mu_2s+1)} \end{bmatrix}; \varphi = \theta_\varphi = \frac{b}{(vs+1)}; \psi = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{(\eta_1s+1)} \\ \frac{l_2}{(\eta_2s+1)} \end{bmatrix}; B_1 = (1,0), B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\theta_r = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{(\mu_1s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{(\mu_2s+1)} \end{bmatrix}; \theta_\psi = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{(\eta_1s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{(\eta_2s+1)} \end{bmatrix}; R = \Phi = E_2; B = \lambda^2 E_2. \quad (2.91)$$

$$Q_\zeta = Kr = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{(T_1s+1)} & \frac{k_2}{(T_2s+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{n_1}{(\mu_1s+1)} \\ \frac{n_2}{(\mu_2s+1)} \end{bmatrix} = \frac{k_1 n_1}{(T_1s+1)(\mu_1s+1)} + \frac{k_2 n_2}{(T_2s+1)(\mu_2s+1)} =$$

$$= \frac{k_1 n_1 [T_2 \mu_2 s^2 + (T_2 + \mu_2)s + 1] + k_2 n_2 [T_1 \mu_1 s^2 + (T_1 + \mu_1)s + 1]}{(T_1s+1)(T_2s+1)(\mu_1s+1)(\mu_2s+1)};$$

$$Q_\zeta + Q_\varphi = \frac{k_1 n_1 [T_2 \mu_2 s^2 + (T_2 + \mu_2)s + 1] + k_2 n_2 [T_1 \mu_1 s^2 + (T_1 + \mu_1)s + 1]}{(T_1s+1)(T_2s+1)(\mu_1s+1)(\mu_2s+1)} + \frac{b}{(vs+1)} =$$

$$= \frac{d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0}{(T_1s+1)(T_2s+1)(\mu_1s+1)(\mu_2s+1)(vs+1)}, \quad (2.92)$$

где  $d_4 = T_1 T_2 \mu_1 \mu_2 b$ ,

$$d_3 = k_1 n_1 T_2 \mu_2 v + k_2 n_2 T_1 \mu_1 v + b [T_1 T_2 (\mu_1 + \mu_2) + (T_1 + T_2) \mu_1 \mu_2],$$

$$d_2 = k_1 n_1 (T_2 + \mu_2) v + k_2 n_2 (T_1 + \mu_1) v + b [T_1 T_2 + \mu_1 \mu_2 + (T_1 + T_2) (\mu_1 + \mu_2)],$$

$$d_1 = k_1 n_1 (T_2 + \mu_2 + v) + k_2 n_2 (T_1 + \mu_1 + v) + b (T_1 + T_2 + \mu_1 + \mu_2),$$

$$d_0 = k_1 n_1 + k_2 n_2 + b.$$

$$P^{-1}M = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{(\tau_1s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{(\tau_2s+1)} \end{bmatrix}, M_* P_*^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{(-\tau_1s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{(-\tau_2s+1)} \end{bmatrix}. \quad (2.93)$$

$$P^{-1}\theta_\psi = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{(\tau_1s+1)(\eta_1s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{(\tau_2s+1)(\eta_2s+1)} \end{bmatrix}; \Phi\theta_r = E_n\theta_r;$$

$$P^{-1}\theta_\psi - \Phi\theta_r = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{(\tau_1s+1)(\eta_1s+1)} - \frac{n_1}{(\mu_1s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{(\tau_2s+1)(\eta_2s+1)} - \frac{n_2}{(\mu_2s+1)} \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} \frac{n_1 \tau_1 \eta_1 s^2 + (n_1 \tau_1 + n_1 \eta_1 - \mu_1 l_1) s + (n_1 - l_1)}{(\tau_1s+1)(\eta_1s+1)(\mu_1s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{n_2 \tau_2 \eta_2 s^2 + (n_2 \tau_2 + n_2 \eta_2 - \mu_2 l_2) s + (n_2 - l_2)}{(\tau_2s+1)(\eta_2s+1)(\mu_2s+1)} \end{bmatrix}. \quad (2.94)$$

Подставив выражения (2.91)-(2.94) в соотношения (2.86), можно определить требуемые составляющие алгоритма (2.89) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma_* \Gamma &= M_* P_*^{-1} R P^{-1} M + B = \begin{bmatrix} \frac{m_1^2}{(\tau_1 s + 1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2}{(\tau_2 s + 1)^2} \end{bmatrix} + \lambda^2 E_2 = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-\lambda^2 \tau_1^2 s^2 + (\lambda^2 + m_1^2)}{(\tau_1 s + 1)} & 0 \\ 0 & \frac{-\lambda^2 \tau_2^2 s^2 + (\lambda^2 + m_2^2)}{(\tau_2 s + 1)} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$\text{откуда } \Gamma = \begin{bmatrix} \frac{\lambda \tau_1 s + \sqrt{\lambda^2 + m_1^2}}{(\tau_1 s + 1)} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda \tau_2 s + \sqrt{\lambda^2 + m_2^2}}{(\tau_2 s + 1)} \end{bmatrix}, \Gamma_* = \begin{bmatrix} \frac{-\lambda \tau_1 s + \sqrt{\lambda^2 + m_1^2}}{(\tau_1 s + 1)} & 0 \\ 0 & \frac{-\lambda \tau_2 s + \sqrt{\lambda^2 + m_2^2}}{(\tau_2 s + 1)} \end{bmatrix};$$

$$D = \frac{d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(\mu_1 s + 1)(\mu_2 s + 1)(\nu s + 1)},$$

$$D_* = \frac{d_4 s^4 - d_3 s^3 + d_2 s^2 - d_1 s + d_0}{(-T_1 s + 1)(-T_2 s + 1)(-\mu_1 s + 1)(-\mu_2 s + 1)(-\nu s + 1)}; \quad (2.96)$$

$$T = T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1} M_* P_*^{-1} R (P^{-1} \theta_\psi - \Phi \theta_r) B_1^\# =$$

$$= - \begin{bmatrix} \frac{-\tau_1 s + 1}{-\lambda \tau_1 s + \sqrt{\lambda^2 + m_1^2}} & 0 \\ 0 & \frac{-\tau_2 s + 1}{-\lambda \tau_2 s + \sqrt{\lambda^2 + m_2^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m_1}{-\tau_1 s + 1} & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{-\tau_2 s + 1} \end{bmatrix} E_2 \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{n_1 \tau_1 \eta_1 s^2 + (n_1 \tau_1 + n_1 \eta_1 - \mu_1 l_1) s + (n_1 - l_1)}{(\tau_1 s + 1)(\eta_1 s + 1)(\mu_1 s + 1)} & 0 \\ 0 & \frac{n_2 \tau_2 \eta_2 s^2 + (n_2 \tau_2 + n_2 \eta_2 - \mu_2 l_2) s + (n_2 - l_2)}{(\tau_2 s + 1)(\eta_2 s + 1)(\mu_2 s + 1)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} \frac{m_1}{-\lambda \tau_1 s + \sqrt{\lambda^2 + m_1^2}} & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{-\lambda \tau_2 s + \sqrt{\lambda^2 + m_2^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{n_1 \tau_1 \eta_1 s^2 + (n_1 \tau_1 + n_1 \eta_1 - \mu_1 l_1) s + (n_1 - l_1)}{(\tau_1 s + 1)(\eta_1 s + 1)(\mu_1 s + 1)} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} \frac{m_1}{-\lambda \tau_1 s + \sqrt{\lambda^2 + m_1^2}} \frac{[n_1 \tau_1 \eta_1 s^2 + (n_1 \tau_1 + n_1 \eta_1 - \mu_1 l_1) s + (n_1 - l_1)]}{(\tau_1 s + 1)(\eta_1 s + 1)(\mu_1 s + 1)} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

Вид матрицы (2.97) позволяет определить требуемые для решения задачи синтеза составляющие, а именно:

$$T_0 = 0; T_+ \approx - \left[ \frac{A_1}{(\tau_1 s + 1)} + \frac{A_2}{(\eta_1 s + 1)} + \frac{A_3}{(\mu_1 s + 1)} \right],$$

$$1) \text{ из условия } s = -\frac{1}{\tau_1} \text{ коэффициент } A_1 = -\frac{m_1 l_1 \tau_1}{\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + m_1^2}\right)(\tau_1 - \eta_1)};$$

$$2) \text{ из условия } s = -\frac{1}{\mu_1} \text{ коэффициент } A_2 = \frac{m_1 n_1}{\left(\lambda \frac{\tau_1}{\mu_1} + \sqrt{\lambda^2 + m_1^2}\right)};$$

$$3) \text{ из условия } s = -\frac{1}{\eta_1} \text{ коэффициент } A_3 = -\frac{m_1 l_1 \eta_1}{\left(\lambda \frac{\tau_1}{\eta_1} + \sqrt{\lambda^2 + m_1^2}\right)(\eta_1 - \eta_1)}.$$

Таким образом, матрица  $T_+$  будет иметь вид:

$$T_+ \approx - \left[ \begin{array}{c} \frac{(\eta_1 \mu_1 A_1 + \tau_1 \mu_1 A_2 + \tau_1 \eta_1 A_3)s^2 + [(\eta_1 + \mu_1)A_1 + (\tau_1 + \mu_1)A_2 + (\tau_1 + \eta_1)A_3]s + (A_1 + A_2 + A_3)}{(\tau_1 s + 1)(\eta_1 s + 1)(\mu_1 s + 1)} \\ 0 \end{array} \right]. \quad (2.98)$$

Подставив матрицу (2.98) в алгоритм (2.88) можно определить искомую в примере структуру регулятора  $G$

$$G = -\Gamma^{-1} T_+ D^{-1} \approx \left[ \begin{array}{cc} \frac{\tau_1 s + 1}{\lambda \tau_1 s + \sqrt{\lambda^2 + m_1^2}} & 0 \\ 0 & \frac{\tau_2 s + 1}{\lambda \tau_2 s + \sqrt{\lambda^2 + m_2^2}} \end{array} \right] \times$$

$$\times \left[ \begin{array}{c} \frac{(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)}{(\tau_1 s + 1)(\eta_1 s + 1)(\mu_1 s + 1)} \\ 0 \end{array} \right] \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(\mu_1 s + 1)(\mu_2 s + 1)(v s + 1)}{d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0} =$$

$$= \left[ \begin{array}{c} \frac{(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(\mu_2 s + 1)(v s + 1)}{(\eta_1 s + 1)(\lambda \tau_1 s + \sqrt{\lambda^2 + m_1^2})(d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0)} \\ 0 \end{array} \right], \quad (2.99)$$

где  $a_2 = (\eta_1 \mu_1 A_1 + \tau_1 \mu_1 A_2 + \tau_1 \eta_1 A_3)$ ;

$a_1 = (\eta_1 + \mu_1)A_1 + (\tau_1 + \mu_1)A_2 + (\tau_1 + \eta_1)A_3$ ;

$a_0 = A_1 + A_2 + A_3$ .

Подставляя оптимальную структуру  $G$  (2.99) в функционал (2.84) и вычислив его значение можно определить величину  $E_{min}$  и исследовать её, то есть оценить изменение поверхности максимального качества управления системой при возможных изменениях реальных параметров моделей динамики звеньев и сигналов в исследуемой системе управления.

## ГЛАВА 3 ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ИНФОРМАЦИИ В МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ИЗМЕРЕНИЙ

Как известно, в сложных стохастических управляемых системах на объекты управления, а также на результаты измерений векторов наблюдения воздействуют как детерминированные, так и случайные возмущающие факторы. В длительных стационарных режимах работы систем измерений, а тем более сложных управляемых систем, когда модели динамики базовых звеньев, составляющие исследуемые системы, допустимо полагать линейными, возможно порознь исследовать влияние на конечные результаты функционирования этих систем как детерминированных, так и случайных стационарных возмущающих факторов.

В настоящей главе рассматривается ряд важных аспектов влияния стационарных случайных возмущающих эксплуатационных факторов на качество (точность) функционирования многомерных систем измерений в длительных режимах.

### 3.1 Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры базового (расчётного) фильтра системы измерений случайных сигналов

Пусть структурная схема известной (базовой) системы измерений случайной стационарной информации представлена на рисунке 3.1.

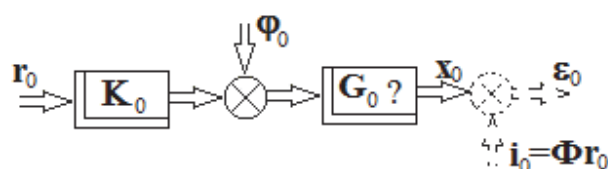


Рис. 3.1. Структурная схема известной (расчётной) системы измерений случайной стационарной информации

Звеньями системы являются измерительное устройство с известной матрицей передаточных функций  $K_0$ ; фильтрующее устройство с искомой в задаче матрицей передаточных функций  $G_0$ ;  $\Phi_0$  - матрица передаточных функций желаемого преобразования системой  $n$ -мерного вектора случайных стационарных сигналов  $r_0$  с известной матрицей его спектральных плотностей  $S_{r_0 r_0}$ ;  $\nu$ -мерный вектор помех изменений  $\varphi_0$  с известными матрицами его спектральных  $S_{\varphi_0 \varphi_0}$  и взаимных спектральных плотностей  $S_{r_0 \varphi_0}$  и  $S_{\varphi_0 r_0}$ ;  $y_0$  -  $\nu$ -мерный вектор сигналов наблюдения;  $x_0$  -  $n$ -мерный вектор выходных сигналов системы измерений;  $i_0$  -  $n$ -мерный вектор желаемых выходных сигналов системы;  $\varepsilon_0$  -  $n$ -мерный вектор ошибок измерений системой вектора программных сигналов  $r_0$ .

С учётом структурной схемы исследуемой системы (рис.3.1) и оговоренных выше обозначений несложно записать вектор выходных сигналов системы в виде:

$$x_0 = G_0 y_0 = G_0 (K_0 r_0 + \varphi_0), \quad (3.1)$$

где символ «\*» - отображает факт применения операции Эрмитова сопряжения.

Выражение (3.1) позволяет записать вектор сигналов ошибок измерений в системе  $\varepsilon_0$  таким образом

$$\varepsilon_0 = x_0 - i_0 = G_0 (K_0 r_0 + \varphi_0) - \Phi_0 r_0, \quad (3.2)$$

а его транспонированную матрицу спектральных плотностей с учётом вектора (3.2) и теоремы Винера-Хинчина [26] в виде

$$S'_{\varepsilon_0 \varepsilon_0} = G_0 (K_0 S'_{r_0 r_0} K_{0*} + K_0 S'_{\varphi_0 r_0} + S'_{r_0 \varphi_0} K_{0*} + S'_{\varphi_0 \varphi_0}) G_{0*} - \\ - G_0 (K_0 S'_{r_0 r_0} + S'_{r_0 \varphi_0}) \Phi_{0*} - \Phi_0 (S'_{r_0 r_0} K_{0*} + S'_{\varphi_0 r_0}) G_{0*} + \Phi_0 S'_{r_0 r_0} \Phi_{0*}. \quad (3.3)$$

Функционал качества измерений системой случайной информации при неизвестной структуре  $G_0$  фильтра, как следует из теории автоматического управления, будет иметь вид

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(S'_{\varepsilon_0 \varepsilon_0} R) ds, \quad s = j\omega, \quad (3.4)$$

где  $R$  - положительно определённая весовая матрица.

Решая поставленную задачу синтеза оптимальной структуры  $G_0$  фильтра в системе по методу Винера-Колмогорова [7, 9, 35], необходимо определить первую вариацию функционала (3.4), в котором используется выражение (3.3), и затем отыскать условие тождественного равенства вариации  $\delta_e$  нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций  $G_0$ . Первую вариацию  $\delta_e$  функционала (3.4) следует записать таким образом

$$\begin{aligned} \delta_e = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ R [ G_0 ( K_0 S'_{r_0 r_0} K_{0*} + K_0 S'_{\varphi_0 r_0} + S'_{r_0 \varphi_0} K_{0*} + S'_{\varphi_0 \varphi_0} ) - \\ & - \Phi_0 ( S'_{r_0 r_0} K_{0*} + S'_{\varphi_0 r_0} ) ] \delta G_{0*} + \delta G [ ( K_0 S'_{r_0 r_0} K_{0*} + K_0 S'_{\varphi_0 r_0} + \\ & + S'_{r_0 \varphi_0} K_{0*} + S'_{\varphi_0 \varphi_0} ) G_{0*} - ( K_0 S'_{r_0 r_0} + S'_{r_0 \varphi_0} ) \Phi_{0*} ] R \} ds. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Целесообразно вести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} R &= \Gamma_* \Gamma; \quad K_0 S'_{r_0 r_0} K_{0*} + K_0 S'_{\varphi_0 r_0} + S'_{r_0 \varphi_0} K_{0*} + S'_{\varphi_0 \varphi_0} = DD_*; \\ T &= T_0 + T_+ + T_- = \Gamma \Phi_0 ( S'_{r_0 r_0} K_{0*} + S'_{\varphi_0 r_0} ) D_*^{-1}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где символ «\*» – определяет винеровскую операцию факторизации матриц [49], символы «0», «+» и «-» – отражают необходимость выполнения винеровской операции сепарации соответствующей матрицы [9].

С учётом обозначений (3.6) вариацию (3.5) следует записать так

$$\delta_e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [ \Gamma_* ( \Gamma G_0 D - T ) D_* \delta G_{0*} + \delta G_0 D ( D_* G_{0*} \Gamma_* - T_* ) ] ds, \quad (3.7)$$

а условие тождественного равенства нулю вариации (3.7) на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций  $G_0$  в виде

$$\Gamma G_0 D = ( T_0 + T_+ ). \quad (3.8)$$

Уравнение (3.8) позволяет записать выражение для расчета оптимальной структуры матрицы передаточных функций фильтра в системе так

$$G_0 = \Gamma^{-1} ( T_0 + T_+ ) D^{-1}. \quad (3.9)$$

Подстановка структуры (3.9) в функционал (3.4) определит его минимальное значение (высшее достижимое качество измерений заданной случайной информации)  $e_{min}$ . Если же предполагаются возможные вариации базовых параметров моделей динамики элементов и сигналов системы, то возможно

построение поверхностей наилучшего качества измерений системой как функций интересующих вариаций указанных параметров.

### 3.2 Метод синтеза оптимальной структуры фильтра в измерительной системе при известных базовых и реальных моделях динамики её элементов

Представляет практический интерес задача синтеза оптимальной структуры дополнительной коррекции фильтра в измерительной системе при знании базовых (расчётных) и ориентировочно известных реальных моделях динамики звеньев и сигналов (элементов) конструируемой системы.

Структурная схема исследуемой в задаче системы представлена на рисунке (рис. 3.2).

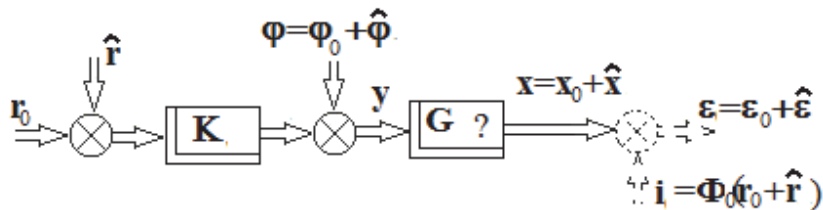


Рис.3.2. Структурная схема измерительной системы с учётом возможных отличий реальных моделей динамики её элементов от базовых (расчетных).

Модели динамики элементов исследуемой системы, представленные на рисунке 3.2 и помеченные индексом «0», такие же, как это принято в пункте 3.1 (рис.3.1). Модели динамики элементов системы, помеченные индексом “^”, определяют возможные отклонения реальных моделей динамики от аналогичных (рис.3.1), но базовых. Пусть, как и на схеме (рис.3.1), размерности векторов  $\hat{r}$ ,  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{i}$  и  $\hat{\epsilon}$  идентичны уже известным, а матрицы  $K$  и  $G$  равны

$$K = K_0 + \hat{K}; G = G_0 + \hat{G},$$

где матрица  $\hat{G}$  – искомая оптимальная структура дополнительной коррекции фильтра в системе.

С учётом сказанного и в соответствии со схемой (рис.3.2) вектор выходных случайных стационарных сигналов системы  $x$  следует записать так

$$x = x_0 + \hat{x} = G(Kr + \varphi) = (G_0 + \hat{G})[(K_0 + \hat{K})(r_0 + \hat{r}) + (\varphi_0 + \hat{\varphi})]. \quad (3.10)$$

Учитывая выражение (3.10), вектор сигналов ошибок измерений системы будет иметь вид:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \hat{\varepsilon} = [G_0(K_0r_0 + \varphi_0) - \Phi_0r_0] - \hat{G}\xi + (G_0\zeta - \Phi_0\hat{r}), \quad (3.11)$$

где  $\xi = (K_0 + \hat{K})(r_0 + \hat{r}) + (\varphi_0 + \hat{\varphi})$ ,  $\zeta = K_0\hat{r} + \hat{K}(r_0 + \hat{r}) + \hat{\varphi}$ ,

$$\varepsilon_0 = G_0(K_0r_0 + \varphi_0) - \Phi_0r_0$$

Таким образом, дополнительный вектор сигналов ошибок системы с учетом вектора  $\varepsilon_0$  можно определить из выражения (3.11) так:

$$\hat{\varepsilon} = \hat{G}\xi + (G_0\zeta - \Phi_0\hat{r}). \quad (3.12)$$

Поскольку вектор  $\varepsilon_0$  ранее уже определён выражениями (3.2) и (3.9), в данной задаче представляет интерес процедура и результаты минимизации функционала (3.11) путём синтеза оптимальной структуры дополнительной коррекции фильтра  $\hat{G}$  в исследуемой системе по методу Винера-Колмогорова. Функционал качества измерений в этой задаче имеет вид

$$\hat{e} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(S'_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}\hat{R})ds, \quad (3.13)$$

где  $S'_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}$  - транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\hat{\varepsilon}$ .

С учётом теоремы Винера-Хинчина, например [26], и вектора (3.12) матрицу  $S'_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}$  можно определить так:

$$\begin{aligned} S'_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} = & \hat{G}S'_{\xi\xi}\hat{G}_* + \hat{G} \left( S'_{\zeta\xi}G_{0*} - S'_{\hat{r}\xi}\Phi_{0*} \right) + (G_0S'_{\xi\zeta} - \Phi_0S'_{\xi\hat{r}}) \hat{G}_* + \\ & + (G_0S'_{\zeta\zeta}G_{0*} - G_0S'_{\hat{r}\zeta}\Phi_{0*} - \Phi_0S'_{\zeta\hat{r}}G_{0*} + \Phi_0S'_{\hat{r}\hat{r}}\Phi_{0*}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

С учётом матрицы (3.14) первая вариация функционала (3.13) преобразована следующим образом

$$\begin{aligned} \delta \hat{e} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ \hat{R} [ \hat{G} S'_{\xi\xi} + (G_0 S'_{\xi\xi} - \Phi_0 S'_{\xi\hat{r}}) ] \delta \hat{G}_* + \\ & + \delta \hat{G} [ S'_{\xi\xi} \hat{G}_* + (S'_{\zeta\xi} G_{0*} - S'_{\hat{r}\xi} \Phi_{0*}) ] \hat{R} \} ds. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Если ввести следующие

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_* \hat{\Gamma} &= \hat{R}; \quad \hat{D} \hat{D}_* = S'_{\xi\xi}; \\ \hat{T} &= \hat{T}_0 + \hat{T}_+ + \hat{T}_- = \hat{\Gamma} (G_0 S'_{\xi\xi} - \Phi_0 S'_{\xi\hat{r}}) \hat{D}_*^{-1}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где символы «\*», «0», «+», «-» - знаки винеровских операций факторизации и сепарации соответствующих матриц, то вариация (3.15) приобретает вид

$$\delta \hat{e} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [ \hat{\Gamma}_* ( \hat{\Gamma} \hat{G} \hat{D} - \hat{T} ) \hat{D}_* \delta \hat{G} + \delta \hat{G} \hat{D} ( \hat{D}_* \hat{G}_* \hat{\Gamma}_* - \hat{T}_* ) \hat{\Gamma} ] ds, \quad (3.17)$$

а условие тождественного равенства вариации (3.17) нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций  $\hat{G}$  следует записать так

$$\hat{\Gamma} \hat{G} \hat{D} = ( \hat{T}_0 + \hat{T}_+ ),$$

из которого следует алгоритм синтеза оптимальной структуры матрицы передаточных функций фильтра дополнительной коррекции

$$\hat{G} = \hat{\Gamma}^{-1} ( \hat{T}_0 + \hat{T}_+ ) \hat{D}^{-1}. \quad (3.18)$$

Очевидно, что подстановка матрицы (3.18) в функционал (3.13) определит его минимальное значение. Варьируя интересующими параметрами модели динамики элементов системы, возможно построить и оценить поверхности достижимого максимального качества системы в интересующих ситуациях, возникающих при ее эксплуатации.

### 3.3 Активизированная оптимальная фильтрация в двухканальной измерительной системе с учётом базовых моделей динамики её элементов

Пусть необходимо весьма точно оценить вектор  $r_0$  случайных стационарных сигналов при ориентировочно известных моделях динамики звеньев и сигналов многомерной измерительной системы и учёте возможных отклонений указанных моделей в реальных условиях. Известны базовые (расчётные) модели динамики

звеньев и сигналов, которые на структурной схеме системы (рис.3.3) помечены индексом «0». Индексом «^» на этой схеме отмечены модели динамики возможных отклонений динамики реальных элементов системы от расчётных и введены следующие обозначения

$$K = K_0 + \hat{K}; r = r_0 + \hat{r}; \varphi = \varphi_0 + \hat{\varphi}; y = y_0 + \hat{y}; i = i_0 + \hat{i}.$$

Модели динамики элементов нижней базовой ветви схемы (рис. 3.3) не отличаются от таких же, но описанных в разделе 3.1. Там же определён алгоритм синтеза (3.9) базовой структуры фильтра  $G_0$ .

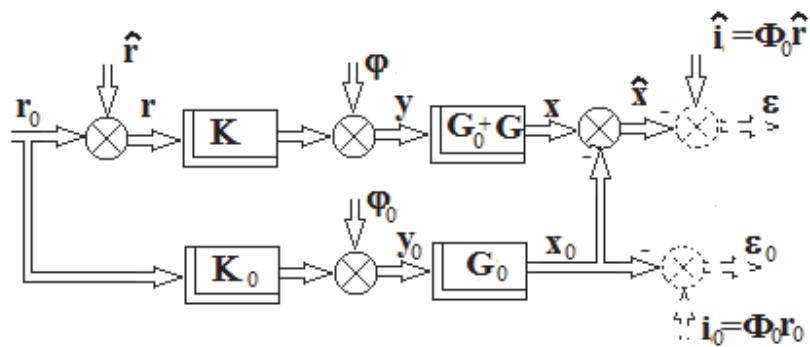


Рис. 3.3 Структурная схема активизированной системы оптимальной фильтрации.

Модели динамики элементов верхней ветви структурной схемы исследуемой системы практически совпадают с моделями, описанными в разделе 3.2: модель динамики входного вектора ветви  $x_0$  определяется выражением (3.10), а искомый в задаче вектор ошибок измерений системы  $\hat{\varepsilon}$  с учётом выражений (3.11) следует записать выражением (3.12) вида:

$$\hat{\varepsilon} = x - x_0 - \hat{i} = (x_0 + \hat{x}) - x_0 - \hat{i} = \hat{G}\xi + (G_0\zeta - \Phi_0\hat{r}).$$

Как следует из предыдущего раздела главы, транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\hat{\varepsilon}$  имеет вид (3.14). Транспонированная матрица спектральных плотностей вектора ошибок системы в расчётной ситуации определяется уже известным выражением (3.3) вида

$$S'_{\varepsilon_0\varepsilon_0} = G_0(K_0S'_{r_0r_0}K_{0*} + K_0S'_{\varphi_0r_0} + S'_{r_0\varphi_0}K_{0*} + S'_{\varphi_0\varphi_0}) - \\ - G_0(K_0S'_{r_0r_0} + S'_{r_0\varphi_0})\Phi_{0*} - \Phi_0(S'_{r_0r_0}K_{0*} + S'_{\varphi_0r_0})G_{0*} + \Phi_0S'_{r_0r_0}\Phi_{0*}.$$

Задачу синтеза оптимальной структуры  $\hat{G}$  дополнительной коррекции фильтра в системе также будет решена методом Винера-Колмогорова. Если предположить, что векторы ошибок  $\varepsilon$  и  $\hat{\varepsilon}$  независимы, то функционал качества измерений двухконтурной активизированной системы представляется в виде

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}(S'_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}A + S'_{\varepsilon_0\varepsilon_0}B)ds, \quad (3.19)$$

где  $A$  и  $B$  – положительно-определённые весовые матрицы.

Учитывая матрицы (3.3) и (3.14) и решая поставленную задачу синтеза структуры  $\hat{G}$  методом Винера-Колмогорова, первую вариацию функционала (3.19) следует записать так

$$\begin{aligned} \delta e = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}\{A[\hat{G}S'_{\xi\xi} + (G_0S'_{\xi\zeta} - \Phi_0S'_{\xi\hat{r}})]\delta\hat{G}_* + \\ & + \delta G[S'_{\xi\xi}\hat{G}_* + (S'_{\zeta\xi}G_{0*} - S'_{\hat{r}\xi}\Phi_{0*})]A\}ds. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Целесообразен ввод следующих обозначений:

$$\begin{aligned} \Gamma_*\Gamma &= A; \quad DD_* = S'_{\xi\xi}; \\ T &= T_0 + T_+ + T_- = \Gamma(G_0S'_{\xi\zeta} - \Phi_0S'_{\xi\hat{r}})D_*^{-1}; \end{aligned} \quad (3.21)$$

С учётом обозначений (3.21) вариация (3.20) приобретет вид

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}[\Gamma_* (\Gamma\hat{G}D - T)D_*\delta\hat{G}_* + \delta\hat{G}D(D_*\hat{G}_*\Gamma_* - T_*)\Gamma]ds,$$

условие её тождественного равенства нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций  $\hat{G}$  следует записать так

$$\Gamma\hat{G}D = (T_0 + T_+),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры  $\hat{G}$  матрицы передаточных функций дополнительной коррекции фильтра в системе описывает следующее уравнение

$$\hat{G} = \Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^{-1}. \quad (3.22)$$

Подстановка алгоритма (3.22), выражений (3.21) и (3.3) в функционал (3.19) определяет его минимальное значение. Варьируя интересующими параметрами системы и матрицами  $A$  и  $B$  можно строить и оценивать соответствующие изменения поверхностей достижимого качества измерений в различных эксплуатационных ситуациях.

### 3.4 Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры дополнительной коррекции фильтра в двухканальной робастной измерительной системе при учёте реальных и базовых моделей динамики её элементов

Структурная схема исследуемой системы представлена на рисунке 3.3, модели динамики её элементов также совпадают с уже введенными в разделе 3.3. Однако с целью обеспечения робастности исследуемой оптимальной системы фильтрации случайной стационарной информации в задаче используется новый функционал качества измерений вида

$$e_0 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(S'_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}R + \Lambda S'_{\hat{y}\hat{\varepsilon}} + S'_{\hat{\varepsilon}\hat{y}}\Lambda)ds, \quad (3.23)$$

в котором второе и третье слагаемые определяют влияние изменений в динамике элементов системы и свойств сигналов на качество измерений.

Транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\hat{\varepsilon}$  ошибок систем  $S'_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}$  представлена выражением (3.14), а транспонированные матрицы взаимных спектральных плотностей  $S'_{\hat{y}\hat{\varepsilon}}$  и  $S'_{\hat{\varepsilon}\hat{y}}$  следует доопределить.

Транспонированные матрицы взаимных спектральных плотностей  $S'_{\hat{y}\hat{\varepsilon}}$  и  $S'_{\hat{\varepsilon}\hat{y}}$ , как следует из теоремы Винера-Хинчина и выражений (3.10) и (3.11), имеют вид:

$$\begin{aligned} S'_{\hat{y}\hat{\varepsilon}} &= \hat{G}S'_{\zeta\xi} + (G_0S'_{\zeta\zeta} - \Phi_0S'_{\zeta\hat{r}}), \\ S'_{\hat{\varepsilon}\hat{y}} &= S'_{\xi\zeta}\hat{G}_* + (S'_{\zeta\zeta}G_{0*} - S'_{\hat{r}\zeta}\Phi_{0*}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Подстановка выражений (3.14) и (3.24) в функционал (3.23) позволяет записать его следующим образом

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [\hat{G}S'_{\xi\xi}\hat{G}_* - \hat{G}(-S'_{\zeta\xi}G_{0*} + S'_{\hat{r}\xi}\Phi_{0*}) - (-G_0S'_{\xi\zeta} + \\ &+ \Phi_0S'_{\xi\hat{r}})\hat{G}_* + (G_0S'_{\zeta\zeta}G_{0*} - G_0S'_{\hat{r}\zeta}\Phi_{0*} - \Phi_0S'_{\zeta\hat{r}} + \Phi_0S'_{\hat{r}\hat{r}}\Phi_{0*})]R + \\ &+ \Lambda[\hat{G}S'_{\zeta\xi} + (G_0S'_{\zeta\zeta} - \Phi_0S'_{\zeta\hat{r}}) + [S'_{\xi\zeta}\hat{G}_* + (S'_{\zeta\zeta}G_{0*} - S'_{\hat{r}\zeta}\Phi_{0*})]\Lambda] \} ds \end{aligned} \quad (3.25)$$

Решая указанную в пункте 3.4 задачу синтеза методом Винера-Колмогорова, необходимо определить первую вариацию функционала (3.25) и условие тождественного равенства вариации  $\delta e$  нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций  $\hat{G}$ . Первая вариация функционала (3.25) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta e = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr\{R[\hat{G}S'_{\xi\xi} - (\Phi_0 S'_{\xi\hat{r}} - G_0 S'_{\xi\zeta} - R^{-1}AS'_{\xi\zeta})]\delta\hat{G}_* + \\ & + \delta\hat{G}[S'_{\xi\xi}\hat{G}_* - (S'_{\hat{r}\xi}\Phi_{0*} - S'_{\zeta\xi}G_{0*} - S'_{\zeta\xi}AR^{-1})]R\}ds, \end{aligned} \quad (3.26)$$

Целесообразны следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Gamma_*\Gamma &= R; \quad DD_* = S'_{\xi\xi}; \\ T &= T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1}(S'_{\hat{r}\xi}\Phi_{0*} - S'_{\zeta\xi}G_{0*} - S'_{\zeta\xi}AR^{-1})D_*^{-1}; \end{aligned} \quad (3.27)$$

С учетом обозначений (3.27) вариацию (3.26) следует переписать так

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr[\Gamma_*(\Gamma\hat{G}D) - T]D_*\delta\hat{G}_* + \delta\hat{G}D(D_*\hat{G}_*\Gamma_* - T_*)\Gamma]ds,$$

условие тождественного равенства вариации (3.27) нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций будет иметь вид

$$\Gamma\hat{G}D = (T_0 + T_+),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры дополнительной коррекции фильтра  $\hat{G}$  в системе представлен выражением

$$\hat{G} = \Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^{-1}, \quad (3.28)$$

Подстановка матрицы  $\hat{G}$  (3.28) в функционал (3.25) определит минимальную величину последнего  $e_{min}$ .

Варьируя весовыми матрицами  $R$  и  $A$ , а также приращениями матрицы  $K$ , векторов программы и помех (приращения помечены индексом “^”) в допустимых пределах возможно известным методом построить поверхности достижимого максимального качества (минимальной величина  $e_{min}$ ) фильтрации в исследуемой системе.

### 3.5 Пример решения задачи синтеза оптимальной структуры коррекции фильтра в системе

Здесь представлен пример синтеза оптимальной структуры коррекции фильтра измерительной скалярной системы при учёте базовых и реальных моделей динамики её элементов. Структурная схема исследуемой системы не отличается от приведенной на рисунке 2.3. С учётом теоремы Винера-Хинчина, выражений (3.11), а также заданных частей моделей динамики элементов системы ниже составляются модели динамики всех сигналов в системе. Полагается, что сигналы  $r_0$ ,  $\hat{r}$ ,  $\varphi_0$ , и  $\hat{\varphi}$  между собой не коррелированы

Ниже представляются требуемые в задаче модели динамики элементов системы в таком виде:

$$\begin{aligned}
 K_0 &= 1.0; \hat{K} = \frac{k}{Ts+1}; \Phi_0 = 1; R=1.0; \hat{R}=1.0; \\
 S_{\xi\xi} &= (K_0 + \hat{K})(S_{r_0r_0} + S_{\hat{r}\hat{r}})(K_{0*} + \hat{K}_*) + (S_{\varphi_0\varphi_0} + S_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}) = \\
 &= \left| \frac{Ts+(1+k)}{Ts+1} \right|^2 \left[ \frac{\sigma_{r_0}^2 a_0^2}{\pi |\tau_0s+1|^2} + \frac{\sigma_{\hat{r}}^2 a^2}{\pi |\tau s+1|^2} \right] + \left( \frac{\sigma_{\varphi_0}^2 b_0^2}{\pi |v_0s+1|^2} + \frac{\sigma_{\hat{\varphi}}^2 b^2}{\pi |vs+1|^2} \right) = \\
 &= \frac{\sigma_{r_0}^2 a_0^2}{\pi} \left\{ \left| \frac{Ts+(1+k)}{Ts+1} \right|^2 \left[ \frac{1}{(-\tau_0^2 s^2 + 1)} + \frac{\gamma^2}{(-\tau^2 s^2 + 1)} \right] + \left[ \frac{\eta_0^2}{(-v_0^2 s^2 + 1)} + \frac{\eta^2}{(-v^2 s^2 + 1)} \right] \right\} = \\
 &= \frac{\sigma_{r_0}^2 a_0^2}{\pi} \left[ \frac{\left| Ts+(1+k) \right|^2 \sqrt{(\tau^2 + \gamma^2 \tau_0^2) s + \sqrt{1 + \gamma^2}}}{|(Ts+1)(\tau_0s+1)(\tau s+1)|^2} + \frac{\sqrt{(\eta_0^2 v^2 + \eta^2 v_0^2) s + \sqrt{\eta_0^2 + \eta^2}}}{|(v_0s+1)(vs+1)|^2} \right], \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

$$\text{где } \gamma^2 = \frac{\sigma_{\hat{r}}^2 a^2}{\sigma_{r_0}^2 a_0^2}, \quad \eta_0^2 = \frac{\sigma_{\varphi_0}^2 b_0^2}{\sigma_{r_0}^2 a_0^2}, \quad \eta^2 = \frac{\sigma_{\hat{\varphi}}^2 b^2}{\sigma_{r_0}^2 a_0^2};$$

$$\begin{aligned}
 S_{\zeta\zeta} &= (K_0 + \hat{K})S_{\hat{r}\hat{r}}(K_{0*} + \hat{K}_*) + (\hat{K}S_{r_0r_0}\hat{K}_* + S_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}) = \\
 &= \frac{\sigma_{r_0}^2 a_0^2}{\pi} \left[ \left| \frac{Ts+(1+k)}{Ts+1} \right|^2 \frac{\gamma^2}{|\tau s+1|^2} + \frac{k^2}{|(Ts+1)(\tau_0s+1)|^2} + \frac{\eta^2}{|vs+1|^2} \right]; \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{\xi\zeta} &= (K_0 + \hat{K})S_{\hat{r}\hat{r}}(K_{0*} + \hat{K}_*) + \hat{K}S_{r_0r_0}\hat{K}_*(K_{0*} + \hat{K}_*) + S_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \\
 &= \left| \frac{Ts+(1+k)}{Ts+1} \right|^2 \frac{\sigma_{\hat{r}}^2 a^2}{\pi |\tau s+1|^2} + \frac{k[-Ts+(1+k)] \sigma_{r_0}^2 a_0^2}{|Ts+1|^2 \pi |\tau_0s+1|^2} + \frac{\sigma_{\hat{\varphi}}^2 b^2}{\pi |vs+1|^2} = \\
 &= \frac{\sigma_{r_0}^2 a_0^2}{\pi} \left[ \frac{\gamma^2 |Ts+(1+k)|^2}{|(Ts+1)(\tau s+1)|^2} + \frac{k[-Ts+(1+k)]^2}{|(Ts+1)(\tau_0s+1)|^2} + \frac{\eta^2}{|vs+1|^2} \right]; \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

$$S_{\xi\hat{r}} = S_{\hat{r}\hat{r}} \frac{[-Ts+(1+k)]}{(-Ts+1)}, \quad (3.32)$$

Функция  $G_0$  известна из выражений (3.9) и (3.6), а именно:

$$\begin{aligned} \Gamma_* = \Gamma = 1.0; \quad DD_* = S_{r_0 r_0} + S_{\varphi_0 \varphi_0} &= \frac{\sigma_{r_0}^2}{\pi} \frac{a_0^2}{|\tau_0 s + 1|^2} + \frac{\sigma_{\varphi}^2}{\pi} \frac{b^2}{|v_0 s + 1|^2} = \\ &= \frac{\sigma_{r_0}^2 a_0^2}{\pi} \left[ \frac{1}{(-\tau_0^2 s^2 + 1)} + \frac{\eta_0^2}{(-v_0^2 s^2 + 1)} \right] = \frac{\sigma_{r_0}^2}{\pi} a_0^2 \left| \frac{\sqrt{(v_0^2 + \eta^2 \tau_0^2) s + \sqrt{1 + \eta_0^2}}}{(\tau_0 s + 1)(v_0 + 1)} \right|^2; \\ D &= \frac{\sigma_{r_0}}{\sqrt{\pi}} a_0 \frac{\sqrt{(v_0^2 + \eta^2 \tau_0^2) s + \sqrt{1 + \eta_0^2}}}{(\tau_0 s + 1)(v_0 + 1)}; \quad D_* = \frac{\sigma_{r_0}}{\sqrt{\pi}} a_0 \frac{-\sqrt{(v_0^2 + \eta^2 \tau_0^2) s + \sqrt{1 + \eta_0^2}}}{(-\tau_0 s + 1)(v_0 + 1)}; \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} T = T_0 + T_+ + T_- &= 1 \left( \frac{\sigma_{r_0}^2}{\pi} \frac{a_0^2}{|\tau_0 s + 1|^2} + 0 \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma_{r_0} a_0} \frac{1}{\left( -\sqrt{v_0^2 + \eta^2 \tau_0^2} s + \sqrt{1 + \eta_0^2} \right)} = \\ &= \frac{\sigma_{r_0}}{\sqrt{\pi}} a_0 \frac{(-v_0 s + 1)}{\left( -\sqrt{v_0^2 + \eta^2 \tau_0^2} s + \sqrt{1 + \eta_0^2} \right) (\tau_0 s + 1)}; \quad T_0 = 0; \quad T_+ = \frac{\sigma_{r_0} a_0}{\sqrt{\pi}} \frac{A}{(\tau_0 s + 1)}; \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\text{при } s = \frac{-1}{\tau_0}; \quad A = \frac{(1 + \frac{v_0}{\tau_0})}{\left( \frac{1}{\tau_0} \sqrt{(v_0^2 + \eta^2 \tau_0^2)} + \sqrt{1 + \eta_0^2} \right)}.$$

Используя выражения (3.33) и (3.34) по формуле (3.9) определить функцию  $G_0$

$$\begin{aligned} G_0 = T_+ D^{-1} &= \frac{\sigma_{r_0} a_0}{\sqrt{\pi}} \frac{A}{(\tau_0 s + 1)} \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma_{r_0} a_0} \frac{(\tau_0 s + 1)(v_0 s + 1)}{\left( \sqrt{(v_0^2 + \eta^2 \tau_0^2) s + \sqrt{1 + \eta_0^2}} \right)} = \\ &= \frac{A(v_0 + 1)}{\left( \sqrt{(v_0^2 + \eta^2 \tau_0^2) s + \sqrt{1 + \eta_0^2}} \right)}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Подстановка выражений (3.31) - (3.35) в уравнения (3.16) позволяет получить следующие новые функции

$$\hat{\Gamma} = 1.0; \quad \hat{D} \hat{D}_* = S^+_{\xi\xi} S^-_{\xi\xi}, \quad \hat{D} - \text{результат факторизации функции (3.29);}$$

$$\hat{T} = \hat{T}_0 + \hat{T}_+ + \hat{T}_- = \hat{\Gamma} (G_0 S'_{\xi\xi} - \Phi_0 S'_{\xi\hat{r}}) \hat{D}_*^{-1}.$$

Выполнив операцию сепарации функции  $\hat{T}$  известным методом [9], следует выделить функцию  $\hat{T}_0 + \hat{T}_+$  и подставить ее в алгоритм (3.18) для определения оптимальной структуры  $\hat{G}$  дополнительной коррекции фильтра, которая будет такой

$$\hat{G} = \hat{\Gamma}^{-1}(\hat{T}_0 + \hat{T}_+) \hat{D}^{-1} = (\hat{T}_0 + \hat{T}_+)(S^+_{\xi\xi})^{-1}. \quad (3.36)$$

Подстановка функции (3.29) и (3.30), а также матриц, найденных в соответствии с выражениями (3.35) и (3.36), в функционал (3.13) и вычисление его величины  $\hat{e}_{\min}$  позволяют установить четкую зависимость минимального значения функционала от интересующих разработчика варьируемых параметров, таких как  $\gamma^2$ ,  $\eta_0^2$ ,  $\eta^2$ ,  $\frac{\tau}{\tau_0}$ ,  $\frac{\mu_0}{\tau_0}$ ,  $\frac{\mu}{\tau_0}$  и других. По результатам подобных исследований, возможно построить поверхности изменения минимальной величины  $e_{\min}$  от изменчивости варьируемых параметров в допустимых диапазонах и определить целесообразные диапазоны изменчивости варьируемых параметров, при которых достигается наивысшее качество фильтрации в исследуемой системе.

### **3.6 Синтез многомерных разомкнутых линейных оптимальных систем слежения при случайных стационарных воздействиях**

Методы многомерной линейной оптимальной фильтрации позволяют находить наилучшие по точностным критериям структуры и параметры матриц передаточных функций регуляторов в разомкнутых многомерных системах слежения за случайными стационарными программными сигналами при учете влияния случайных стационарных возмущающих факторов. Как правило, например [5, 7, 9], методы указанных оптимальных фильтрации и управления базируются на идеях метода Винера-Колмогорова [15, 35] и представляют собой их некоторое развитие, позволяющее упростить использование указанных подходов на практике.

#### **3.6.1 Метод синтеза многомерных разомкнутых линейных следящих систем**

Пусть исследуется процесс управления многомерным линейным объектом при случайных стационарных воздействиях, движение которого возможно

описывать системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, преобразованных по Фурье, вида

$$Px = Mu + \psi, \quad (3.37)$$

где  $P$  и  $M$  – полиномиальные матрицы размерностей  $n \times n$  и  $n \times m$  соответственно,  $x$  –  $n$ -мерный вектор выходных координат объекта,  $u$  –  $m$ -мерный вектор управляющих сигналов,  $\psi$  –  $n$ -мерный вектор случайных стационарных воздействий на объект.

Структурная схема разомкнутой системы слежения представлена на рисунке 3.4.

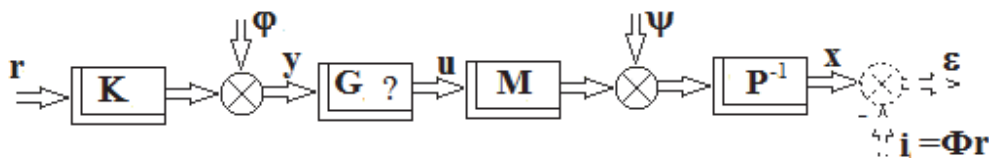


Рис. 3.4. структурная схема разомкнутой системы слежения за программным сигналом.

На структурной схеме системы представлены следующие ее элементы:

$K$  – матрица размерности  $v \times n$  передаточных функций задатчика (или измерителя)  $n$ -мерного вектора программных сигналов  $r$ ;  $\varphi$  –  $v$ -мерный вектор помех задания (или измерения) программы;  $G$  – искомая матрица передаточных функций регулятора системы размерности  $m \times v$ ;  $\Phi$  – матрица размерности  $n \times n$  желаемых преобразований системой вектора  $r$ ;  $i$  –  $n$ -мерный вектор желаемых сигналов на выходе системы;  $\varepsilon$  –  $n$ -мерный вектор сигналов ошибок системы. Векторы  $r$ ,  $\varphi$  и  $\psi$  полагаются случайными стационарными процессами с известными матрицами спектральных и взаимных спектральных плотностей  $S_{rr}$ ,  $S_{\varphi\varphi}$ ,  $S_{\psi\psi}$ ,  $S_{r\varphi}$ ,  $S_{r\psi}$ ,  $S_{\psi r}$ ,  $S_{\varphi r}$ ,  $S_{\varphi\psi}$ ,  $S_{\psi\varphi}$ . В некоторых случаях часть или все указанные процессы могут оказаться некоррелированными между собой, т.е. соответствующие матрицы взаимных спектральных плотностей могут оказаться нулевыми.

Пусть качество управления всей системой возможно оценивать функционалом вида

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}(S' R + S'_{uu}C) ds, \quad (3.28)$$

где  $R$  и  $C$  – весовые размерности  $n \times n$  и  $m \times m$  соответственно положительно определенные матрицы,  $S'_{\varepsilon\varepsilon}$  и  $S'_{uu}$  – транспонированные матрицы спектральных плотностей векторов ошибки  $\varepsilon$  и управления  $u$ .

Целесообразно более строго сформулировать исследуемую задачу синтеза оптимальной структуры матрицы передаточных функций регулятора  $G$ . Полагается, что движение объекта управления устойчиво и описывается системой управлений (3.37). Задача состоит в том, чтобы выбором структуры  $G$  минимизировать функционал (3.28) на классе линейных устойчивых дробно-рациональных функций (матриц передаточных функций регулятора)  $G$ , имеющих аналитическую только ЛПП первую вариацию  $\delta G$ .

Для решения поставленной задачи синтеза, прежде всего, необходимо выразить матрицы спектральных плотностей  $S'_{\varepsilon\varepsilon}$  и  $S'_{uu}$  через искомую матрицу  $G$ . Выражение для выходной реакции системы на все воздействия, обозначенные на ее структурной схеме (рис. 3.4) имеет вид

$$x = P^{-1}MG(Kr + \varphi) + P^{-1}\psi, \quad (3.29)$$

а вектор  $u$ , описывающий сигналы управления следует записать так

$$u = G(Kr + \varphi), \quad (3.30)$$

где «\*» – как и ранее символ эрмитова сопряжения векторов [30].

Выражение вектора ошибки системы, учитывая соотношение (3.29) и физический смысл вектора  $i$ , можно записать в следующем виде

$$\varepsilon = x - i = P^{-1}MG(Kr + \varphi) - (\Phi r - P^{-1}\psi). \quad (3.31)$$

Используя теорему Винера-Хинчина, транспонированные матрицы спектральных плотностей векторов  $\varepsilon$  (3.31) и  $u$  (3.30) следует определить так

$$S'_{\varepsilon\varepsilon} = P^{-1}MG(KS'_{rr}K_* + KS'_{\varphi r} + S'_{r\varphi}K_* + S'_{\varphi\varphi})G_*M_*P_*^{-1} - P^{-1}MG(KS'_{rr}\Phi_* + KS'_{\psi r}P_*^{-1} + S'_{r\varphi}\Phi_* - S'_{\psi\varphi}P_*^{-1}) - (\Phi S'_{rr}K_* + \Phi S'_{\varphi r} - P^{-1}S'_{r\psi}K_* - P^{-1}S'_{\varphi\psi})G_*M_*P_*^{-1} + (\Phi S'_{rr}\Phi_* - \Phi S'_{\psi r}P_*^{-1} - P^{-1}S'_{r\psi}\Phi_* + P^{-1}S'_{\psi\psi}P_*^{-1}); \quad (3.32)$$

$$S'_{uu}G(KS'_{rr}K_* + KS'_{\varphi r} + S'_{r\varphi}K_* + S'_{\varphi\varphi})G_*. \quad (3.33)$$

После подстановки матриц (3.32) и (3.33) в функционал (3.28) последний примет вид:

$$\begin{aligned}
e = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [P^{-1}MG(KS'_{rr}K_* + KS'_{\varphi r} + S'_{r\varphi}K_* + S'_{\varphi\varphi})G_*M_*P_*^{-1} - \\
& -P^{-1}MG(KS'_{rr}\Phi_* - KS'_{\psi r}P_*^{-1} + \Phi S'_{r\varphi} - S'_{\psi\varphi}P_*^{-1}) - (\Phi S'_{rr}K_* - \\
& -P^{-1}S'_{r\psi}K_* + \Phi S'_{\varphi r} - P^{-1}S'_{\varphi\psi})G_*M_*P_*^{-1} + (\Phi S'_{rr}\Phi_* - \Phi S'_{\psi r}P_*^{-1} - \\
& -P^{-1}S'_{r\psi}\Phi_* + P^{-1}S'_{\psi\psi}P_*^{-1})]R + \\
& +G(KS'_{rr}K_* + KS'_{\varphi r} + S'_{r\varphi}K_* + S'_{\varphi\varphi})G_*C\} ds. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Решая задачу синтеза структуры  $G$  методом Винера-Колмогорова, следует определить первую вариацию функционала (3.34) и условие ее тождественного равенства вариации нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций. Первая вариация функционала  $\delta e$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
\delta e = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [(M_*P_*^{-1}RP^{-1}M + C)G(KS'_{rr}K_* + KS'_{\varphi r} + S'_{r\varphi}K_* + \\
& + S'_{\varphi\varphi}) - M_*P_*^{-1}R(\Phi S'_{rr}K_* - P^{-1}S'_{r\psi}K_* + \Phi S'_{\varphi r} - P^{-1}S'_{\varphi\psi})] \delta G_* + \\
& + \delta G [(KS'_{rr}K_* + KS'_{\varphi r} + S'_{r\varphi}K_* + S'_{\varphi\varphi})G_*(M_*P_*^{-1}RP^{-1}M + C) - (KS'_{rr}\Phi_* - \\
& -KS'_{\psi r}P_*^{-1} + S'_{r\varphi}\Phi_* - S'_{\psi\varphi}P_*^{-1})RP^{-1}M] \} ds. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Если ввести обозначения:

$$\begin{aligned}
\Gamma_*\Gamma &= M_*P_*^{-1}RP^{-1}M + C, \quad DD_* = KS'_{rr}K_* + KS'_{\varphi r} + S'_{r\varphi}K_* + S'_{\varphi\varphi}; \\
T &= T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1}M_*P_*^{-1}R(\Phi S'_{rr}K_* - P^{-1}S'_{r\psi}K_* + \Phi S'_{\varphi r} - \\
& -P^{-1}S'_{\varphi\psi})D_*^{-1}), \tag{3.36}
\end{aligned}$$

то вариацию (3.35) можно записать в виде

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_*(\Gamma GD - T)D_*\delta G_* + \delta GD(D_*G_*\Gamma_* - T_*)\Gamma] ds, \tag{3.37}$$

а условие тождественного равенства вариации (3.37) нулю на выбранном классе варьируемых матриц передаточных функций будет таким

$$\Gamma GD = (T_0 + T_+),$$

где символы «0», «+» и «-» знаки винеровской операции сепарации.

Учитывая условие равенства вариации нулю, уравнение для расчета оптимальных структуры и параметров матрицы передаточных функций  $G$  регулятора (вычислителя) в исследуемой системе сводится к выражению

$$G = \Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^{-1}. \quad (3.38)$$

Подстановка структуры (3.38) в функционал (3.34) позволит вычислить его минимальную величину  $e_{min}$  и исследовать ее изменчивость при варьировании интересующими параметрами системы в возможных диапазонах их изменений.

### 3.6.2 Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры регулятора в базовой (расчетной) следующей системе

По аналогии с рисунком 3.4. на рисунке 3.5. представлена структурная схема базовой (расчетной) следящей системы. Здесь полагаются достаточно точно известными разработчику модели динамики всех элементов системы кроме искомой структуры регулятора  $G_0$ . Все указанные модели динамики имеют индекс «0».

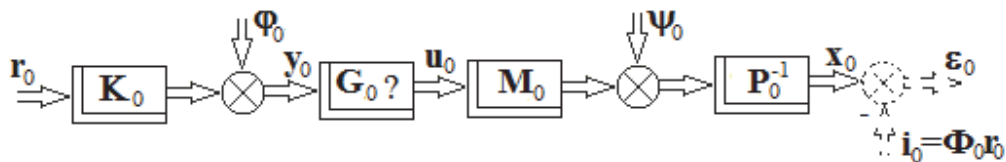


Рис. 3.5. Структурная схема разомкнутой линейной системы слежения с известными моделями динамики ее элементов.

Принятые на рис. 3.5 обозначения элементов системы отличаются от аналогичных обозначений, принятых на рис. 3.4, лишь наличием индекса «0».

Вектор выходных сигналов исследуемой системы в этом случае следует определить таким образом

$$x_0 = P_0^{-1}M_0G_0(K_0r_0 + \varphi_0) + P_0^{-1}\psi_0, \quad (3.39)$$

а вектор ошибок слежения  $\varepsilon_0$  и сигналов управления  $u_0$  должны быть представлены в виде

$$\varepsilon_0 = x_0 - i_0 = P_0^{-1}M_0G_0(K_0r_0 + \varphi_0) - (\Phi_0r_0 - P_0^{-1}\psi_0), \quad (3.40)$$

$$u_0 = G_0(K_0 r_0 + \varphi_0). \quad (3.41)$$

Критерием качества слежения и в этом случае может служить функционал вида

$$e_0 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (S'_{\varepsilon_0 \varepsilon_0} R_0 + S'_{u_0 u_0} C_0) ds \quad (3.42)$$

Используя уравнения (3.40) и (3.41), с помощью теоремы Винера-Хинчина возможно найти необходимые в функционале транспонированные матрицы спектральных плотностей  $S'_{\varepsilon_0 \varepsilon_0}$  и  $S'_{u_0 u_0}$  следующим образом

$$\begin{aligned} S'_{\varepsilon_0 \varepsilon_0} = & P_0^{-1} M_0 G_0 (K_0 S'_{r_0 r_0} K_{0*} + K_0 S'_{\varphi_0 r_0} + S'_{r_0 \varphi_0} K_{0*} + S'_{\varphi_0 \varphi_0}) G_{0*} M_{0*} P_{0*}^{-1} - \\ & - P_0^{-1} M_0 G_0 (K_0 S'_{r_0 r_0} \Phi_{0*} - K_0 S'_{\psi_0 r_0} P_{0*}^{-1} + S'_{r_0 \varphi_0} \Phi_{0*} - S'_{\psi_0 \varphi_0} P_{0*}^{-1}) - \\ & - (\Phi_0 S'_{r_0 r_0} K_{0*} + \Phi_0 S'_{\varphi_0 r_0} - P_0^{-1} S'_{r_0 \psi_0} K_{0*} - P_0^{-1} S'_{\psi_0 \psi_0}) G_{0*} M_{0*} P_{0*}^{-1} + \\ & + (\Phi_0 S'_{r_0 r_0} \Phi_{0*} - \Phi_0 S'_{\psi_0 r_0} P_{0*}^{-1} - P_0^{-1} S'_{r_0 \psi_0} + P_0^{-1} S'_{\psi_0 \psi_0} P_{0*}^{-1}); \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$S'_{u_0 u_0} = G_0 (K_0 S'_{r_0 r_0} K_{0*} + K_0 S'_{\varphi_0 r_0} + S'_{r_0 \varphi_0} K_{0*} + S'_{\varphi_0 \varphi_0}) G_{0*}. \quad (3.44)$$

После подстановки матриц (3.43) и (3.44) в функционал (3.42) последний приобретает вид

$$\begin{aligned} e_0 = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ [ P_0^{-1} M_0 G_0 (K_0 S'_{r_0 r_0} K_{0*} + K_0 S'_{\varphi_0 r_0} + S'_{r_0 \varphi_0} K_{0*} + \\ & + S'_{\varphi_0 \varphi_0}) G_{0*} M_{0*} P_{0*}^{-1} - P_0^{-1} M_0 G_0 (K_0 S'_{r_0 r_0} \Phi_{0*} - K_0 S'_{\psi_0 r_0} P_{0*}^{-1} + S'_{r_0 \varphi_0} \Phi_{0*} - \\ & - S'_{\psi_0 \varphi_0} P_{0*}^{-1}) - (\Phi_0 S'_{r_0 r_0} K_{0*} + \Phi_0 S'_{\varphi_0 r_0} - P_0^{-1} S'_{r_0 \psi_0} - \\ & - P_0^{-1} S'_{\varphi_0 \psi_0}) G_{0*} M_{0*} P_{0*}^{-1} + (\Phi_0 S'_{r_0 r_0} \Phi_{0*} - \Phi_0 S'_{\psi_0 r_0} P_{0*}^{-1} - P_0^{-1} S'_{r_0 \psi_0} + \\ & + P_0^{-1} S'_{\psi_0 \psi_0} P_{0*}^{-1}) ] R_0 + G_0 (K_0 S'_{r_0 r_0} K_{0*} + K_0 S'_{\varphi_0 r_0} + S'_{r_0 \varphi_0} K_{0*} + \\ & + S'_{\varphi_0 \varphi_0}) G_{0*} C_0 \} ds. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Решая задачу синтеза методом Винера-Колмогорова, необходимо определить первую вариацию функционала (3.45) и условие тождественного равенства ее нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $G_0$ .

Первая вариация  $\delta e_0$  имеет вид

$$\begin{aligned}
\delta e_0 = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ [(M_{0*} P_{0*}^{-1} R_0 P_0^{-1} M_0 + C_0) G_0 (K_0 S'_{r_0 r_0} K_{0*} + K_0 S'_{\varphi_0 r_0} + \\
& + S'_{r_0 \varphi_0} K_{0*} + S'_{\varphi_0 \varphi_0}) - M_{0*} P_{0*}^{-1} R_0 (\Phi_0 S'_{r_0 r_0} K_{0*} + \Phi_0 S'_{\varphi_0 r_0} - \\
& - P_0^{-1} S'_{r_0 \varphi_0} K_{0*} - P^{-1} S'_{\varphi_0 \psi_0})] \delta G_{0*} + \delta G_0 [(K_0 S'_{r_0 r_0} K_{0*} + K_0 S'_{\varphi_0 r_0} + \\
& + S'_{r_0 \varphi_0} K_{0*} + S'_{\varphi_0 \varphi_0}) G_{0*} (M_{0*} P_{0*}^{-1} R_0 P_0^{-1} M_0 + C_0) - (K_0 S'_{r_0 r_0} \Phi_{0*} - \\
& - K_0 S'_{\psi_0 r_0} P_{0*}^{-1} + S'_{r_0 \varphi_0} \Phi_{0*} - S'_{\psi_0 \varphi_0} P_{0*}^{-1}) R_0 P_0^{-1} M_0] \} ds. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Целесообразно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0*} \Gamma_0 &= M_{0*} P_{0*}^{-1} R_0 P_0^{-1} M_0 + C_0; \\
D_0 D_{0*} &= K_0 S'_{r_0 r_0} K_{0*} + K_0 S'_{\varphi_0 r_0} + S'_{r_0 \varphi_0} K_{0*} + S'_{\varphi_0 \varphi_0}; \\
T_0 &= T_{00} + T_{0+} + T_{0-} = \Gamma_{0*}^{-1} M_{0*} P_{0*}^{-1} R_0 (\Phi_0 S'_{r_0 r_0} K_{0*} + \Phi_0 S'_{\varphi_0 r_0} - \\
& - P_0^{-1} S'_{r_0 \varphi_0} K_{0*} - P^{-1} S'_{\varphi_0 \psi_0}) D_{0*}^{-1}. \tag{3.47}
\end{aligned}$$

С учётом обозначений (3.47) вариацию (3.46) можно записать так:

$$\delta e_0 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\Gamma_{0*} (\Gamma_0 G_0 D_0 - T_0) D_{0*} \delta G_{0*} + \delta G_0 D_0 (D_{0*} G_{0*} \Gamma_{0*} - T_{0*}) \Gamma_0] ds,$$

условие тождественного равенства вариации (3.46) нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $G_0$  будет иметь вид:

$$\Gamma_0 G_0 D_0 = (T_{00} + T_{0+}),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры базового регулятора в исследуемой системе управления представляется выражением

$$G_0 = \Gamma_0^{-1} (T_{00} + T_{0+}) D_0^{-1}. \tag{3.48}$$

Как и в предыдущих случаях, подставив в функционал (3.45) функцию (3.48) и вычислив его, можно определить минимальное значение функционала  $e_{0\min}$  и исследовать его изменчивость при варьировании интересующими параметрами системы в возможных диапазонах их изменений. После такого исследования разработчик установит предельно достижимые по качеству управления режимы функционирования оптимальной системы управления.

### 3.6.3 Задача синтеза оптимальной структуры дополнительной коррекции регулятора в разомкнутой системе слежения при учете возможных отклонений моделей динамики элементов системы от базовых

Учитывая основные постановки задачи (раздел 3.2), возможно представить структурную схему исследуемой ниже разомкнутой линейной системы управления по аналогии с рисунком 3.2. на рисунке 3.6.

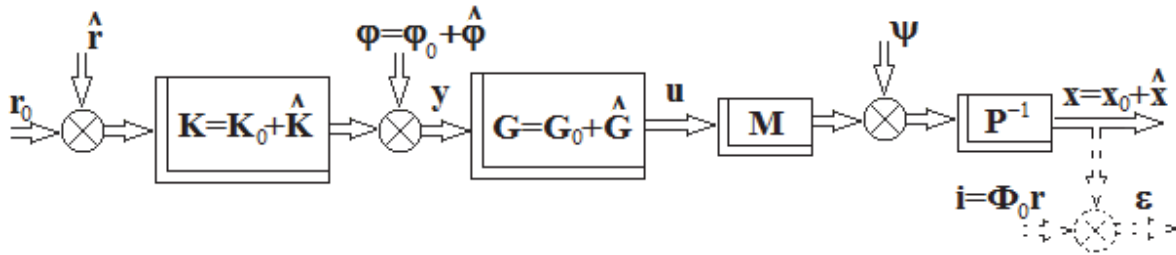


Рис. 3.6. Структурная схема разомкнутой системы управления с учетом возможных отличий реальных моделей динамики элементов системы от базовых

В задаче полагается, что реальные модели динамики объекта управления не отличаются от базовых и движение объекта описывается известной системой линейных дифференциальных уравнений, преобразованных по Фурье, вида

$$Px = Mu + \psi,$$

где  $\psi$  –  $n$  – мерный вектор случайных стационарных центрированных возмущений с известной матрицей спектральных плотностей  $S_{\psi\psi}$ , каждая из моделей динамики элементов системы, предшествующих объекту управления, представляет собой сумму базовой (расчетной) части, помеченной индексом «0», и возможной реальной части, возникающей в конкретном эксплуатационном режиме работы системы и помеченной индексом «^». Наличие реальной части приводит к появлению новых векторов  $y$ ,  $u$ ,  $\varepsilon$  таких, что

$$y = y_0 + \hat{y}; u = u_0 + \hat{u}; \varepsilon = \varepsilon_0 + \hat{\varepsilon}.$$

Полагается, что размерности векторов  $\hat{r}$ ,  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{i}$ , а также размерности матриц  $\hat{K}$  и  $\hat{G}$  идентичны. Кроме того, с целью упрощения рассматриваемой задачи предполагается некоррелированность векторов  $\hat{r}$ ,  $\hat{\phi}$ ,  $\psi$  между собой и базовыми

аналогами. Матрица  $\hat{G}$  – искомая оптимальная структура дополнительной коррекции регулятора в системе.

С учётом сказанного выше и в соответствии со структурной схемой (рис. 3.6) вектора случайных стационарных сигналов системы  $x = x_0 + \hat{x}$ ,  $u = u_0 + \hat{u}$  следует записать так

$$\begin{aligned} x &= P^{-1}MG(Kr + \varphi) + P^{-1}\psi = P^{-1}M(G_0 + \hat{G})[(K_0 + \hat{K})(r_0 + \hat{r}) + \\ &+ (\varphi_0 + \hat{\varphi})] + P^{-1}\psi; \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$u = G(Kr + \varphi).$$

Вектор ошибок уравнения в системе должен иметь вид

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon_0 + \hat{\varepsilon} &= P^{-1}MG(Kr + \varphi) - [\Phi_0(r_0 + \hat{r}) - P^{-1}\psi] = P^{-1}M(G_0 + \hat{G}) \times \\ &\times [(K_0 + \hat{K})(r_0 + \hat{r}) + (\varphi_0 + \hat{\varphi})] - [\Phi_0(r_0 + \hat{r}) - P^{-1}\psi]. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Выражение (3.79) целесообразно представить следующим образом

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon_0 + \hat{\varepsilon} &= [P^{-1}MG_0(K_0r_0 + \varphi_0) - \Phi_0r_0] + P^{-1}M\hat{G}[(K_0 + \hat{K})(r_0 + \hat{r}) + \\ &+ (\varphi_0 + \hat{\varphi})] + P^{-1}MG_0[K_0\hat{r} + \hat{K}(r_0 + \hat{r}) + \hat{\varphi}] - [\Phi_0\hat{r} - P^{-1}\psi] = \varepsilon_0 + P^{-1}M\hat{G}\xi + \\ &+ (P^{-1}MG_0\zeta - \Phi_0\hat{r} - P^{-1}\psi), \end{aligned} \quad (3.80)$$

где  $\varepsilon_0 = P^{-1}MG_0(K_0r_0 + \varphi_0) - \Phi_0r_0$ ;

$$\xi = (K_0 + \hat{K})(r_0 + \hat{r}) + (\varphi_0 + \hat{\varphi}); \zeta = K_0\hat{r} + \hat{K}(r_0 + \hat{r}) + \hat{\varphi};$$

а вектор сигналов уравнения, следовательно, нужно записать так

$$u = (G_0 + \hat{G})\xi. \quad (3.81)$$

Поскольку векторы  $\varepsilon_0$  и  $u_0$  ранее уже определены выражениями (3.40) и (3.48), в рассматриваемой задаче представляет интерес процедура и результаты минимизации функционала

$$\hat{e} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (S'_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} \hat{R} + S'_{uu} \hat{C}) ds \quad (3.82)$$

Таким образом, вектор  $\hat{e}$  в данной задаче имеет вид

$$\hat{e} = P^{-1}M\hat{G}\xi + (P^{-1}MG_0\zeta - \Phi_0\hat{r} + P^{-1}\psi), \quad (3.83)$$

а вектор  $u = (G_0 + \hat{G})\xi$ .

Транспонированную матрицу  $S'_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}$  в функционале (3.82) можно определить с помощью теоремы Винера-Хинчина

$$\begin{aligned}
S'_{\sim\sim} = & P^{-1}M\hat{G}S'_{\xi\xi}\hat{G}_*M_*P_*^{-1} + P^{-1}M\hat{G}(S'_{\zeta\xi}G_{0*}M_*P_*^{-1} - S'_{\hat{r}\xi}\Phi_{0*} + S'_{\psi\xi}P_*^{-1}) + \\
& + (P^{-1}MG_0S'_{\xi\xi} - \Phi_0S'_{\xi\hat{r}} + P^{-1}S'_{\xi\psi})\hat{G}_*M_*P_*^{-1} + (P^{-1}MG_0S'_{\zeta\xi}G_{0*}M_*P_*^{-1} - \\
& - P^{-1}MG_0S'_{\hat{r}\zeta}\Phi_{0*} + P^{-1}MG_0S'_{\psi\zeta}P_*^{-1} - \Phi_0S'_{\zeta\hat{r}}G_{0*}M_*P_*^{-1} + \Phi_0S'_{\hat{r}\hat{r}}\Phi_{0*} - \\
& - \Phi_0S'_{\psi\hat{r}}P_*^{-1} + P^{-1}S'_{\zeta\psi}G_{0*}M_*P_*^{-1} - P^{-1}S'_{\hat{r}\psi}\Phi_{0*} + P^{-1}S'_{\psi\psi}P_*^{-1}), \quad (3.84)
\end{aligned}$$

а транспонированную матрицу спектральных плотностей вектора уравнения  $S'_{uu}$  записать в виде

$$S'_{uu} = (G_0 + \hat{G})S'_{\xi\xi}(G_{0*} + \hat{G}_*), \quad (3.85)$$

После подстановки матриц (3.84) и (3.85) в функционал (3.83) последний приобретет следующий вид

$$\begin{aligned}
\hat{e} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [ P^{-1}M\hat{G}S'_{\xi\xi}\hat{G}_*M_*P_*^{-1} + P^{-1}M\hat{G}(S'_{\zeta\xi}G_{0*}M_*P_*^{-1} - S'_{\hat{r}\xi}\Phi_{0*} + \\
& + S'_{\psi\xi}P_*^{-1}) + (P^{-1}MG_0S'_{\xi\xi} - \Phi_0S'_{\xi\hat{r}} + P^{-1}S'_{\xi\psi})\hat{G}_*M_*P_*^{-1} + \\
& + (P^{-1}MG_0S'_{\zeta\xi}G_{0*}M_*P_*^{-1} - P^{-1}MG_0S'_{\hat{r}\zeta}\Phi_{0*} + P^{-1}MG_0S'_{\psi\zeta}P_*^{-1} - \\
& - \Phi_0S'_{\zeta\hat{r}}G_{0*}M_*P_*^{-1} + \Phi_0S'_{\hat{r}\hat{r}}\Phi_{0*} - \Phi_0S'_{\psi\hat{r}}P_*^{-1} + P^{-1}S'_{\zeta\psi}G_{0*}M_*P_*^{-1} - \\
& - P^{-1}S'_{\hat{r}\psi}\Phi_{0*} + P^{-1}S'_{\psi\psi}P_*^{-1}) ] \hat{R} + (G_0 + \hat{G})S'_{\xi\xi}(G_{0*} + \hat{G}_*)\hat{C} \} ds, \quad (3.86)
\end{aligned}$$

Решая поставленную задачу синтеза оптимальной структуры дополнительной коррекции регулятора  $\hat{G}$  в системе управления, сначала определим первую вариацию функционала (3.86) таким образом

$$\begin{aligned}
\delta\hat{e} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [ (M_*P_*^{-1}\hat{R}P^{-1}M + \hat{C})\hat{G}S'_{\xi\xi} + \hat{C}G_0S'_{\xi\xi} + \\
& + M_*P_*^{-1}\hat{R}(P^{-1}MG_0S'_{\xi\xi} - \Phi_0S'_{\xi\hat{r}} + P^{-1}S'_{\xi\psi}) ] \delta\hat{G}_* + \delta\hat{G}[S'_{\zeta\xi}G_{0*}\hat{C} + \\
& + S'_{\xi\xi}\hat{G}_*(M_*P_*^{-1}\hat{R}P^{-1}M + \hat{C}) + (S'_{\zeta\xi}G_{0*}M_*P_*^{-1} - S'_{\hat{r}\xi}\Phi_{0*} + S'_{\psi\xi}P_*^{-1}) ] \} ds, \quad (3.87)
\end{aligned}$$

Необходимо ввести следующие обозначения

$$\hat{\Gamma}_*\hat{\Gamma} = M_*P_*^{-1}\hat{R}P^{-1}M + \hat{C}; \quad \hat{D}\hat{D}_* = S'_{\xi\xi};$$

$$\begin{aligned}
\hat{T} = & \hat{T}_0 + \hat{T}_+ + \hat{T}_- = \Gamma_*^{-1}\hat{C}G_0\hat{D} + \Gamma_*^{-1}M_*P_*^{-1}\hat{R} \left( P^{-1}MG_0\hat{D} - \Phi_0S'_{\xi\hat{r}}\hat{D}_*^{-1} + \right. \\
& \left. + P^{-1}S'_{\xi\psi}\hat{D}_*^{-1} \right) = \hat{\Gamma}G_0\hat{D} - \Gamma_*^{-1}M_*P_*^{-1}\hat{R}(\Phi S'_{\xi\hat{r}} - P^{-1}S'_{\xi\psi})\hat{D}_*^{-1}, \quad (3.88)
\end{aligned}$$

С учетом обозначений (3.88) вариацию (3.87) следует переписать в виде

$$\delta\hat{e} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [ \hat{\Gamma}_*(\hat{\Gamma}\hat{G}\hat{D} + \hat{T})\hat{D}_*\delta\hat{G}_* + \delta\hat{G}\hat{D}(\hat{D}_*\hat{G}_*\hat{\Gamma}_* + \hat{T}_*)\hat{\Gamma} ] ds,$$

а условие тождественного равенства вариации  $\delta\hat{e}$  нулю записать так

$$\hat{\Gamma}\hat{G}\hat{D} = -(\hat{T}_0 + \hat{T}_+).$$

Алгоритм синтеза оптимальной структуры дополнительной коррекции регулятора системы управления будет иметь вид

$$\hat{G} = -\Gamma^{-1}(\hat{T}_0 + \hat{T}_+)D^{-1}. \quad (3.89)$$

Подстановка выражений (3.89) и (3.48) в функционал (3.86) и вычисление последнего определяет минимальное значение функционала  $\hat{e}_{min}$ , а также изменчивость этой величины при варьированиях реальными параметрами элементов системы в возможных диапазонах их изменений.

### 3.6.4 Оптимальное комплексирование случайной стационарной информации в многомерной разомкнутой линейной системе слежения

Полагается, что в исследуемой системе управления обрабатывается входная случайная информация, поступающая с набора измерительных устройств, выдающих информацию о различных координатах вектора наблюдений входных сигналов системы. Структурная схема такой комплексированной системы управления представлена на рисунке 3.7. На структурной схеме системы индексом «0» помечен базовый (основной) канал измерения случайной стационарной информации, а остальные  $q$  каналов упорядочены и имеют свою нумерацию ( $i = \overline{1, q}$ ). Матрицы  $K_0$  и  $K_i$  передаточных функций используемых измерительных устройств упорядочены и имеют следующие размерности  $K_0 n \times n$ ,  $K_1 v_1 \times n$ ,  $K_2 v_2 \times n$ , ...,  $K_i v_i \times n$ , ...,  $K_q v_q \times n$ , причём  $\sum_{i=1}^q v_i = \gamma$ , а сгруппированные матрицы передаточных функций измерителей целесообразно записать таким образом

$$y_i = L_i r + \varphi_i, \quad L_i = [K_i, O_{v_i \times (n-v_i)}], \quad i = \overline{1, q},$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_0 \\ L \end{bmatrix}_{(v_0+v) \times n}, \quad L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_q \end{bmatrix}_{v \times n}; \quad n \geq v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_i \geq \dots \geq v_q \geq 1. \quad (3.90)$$

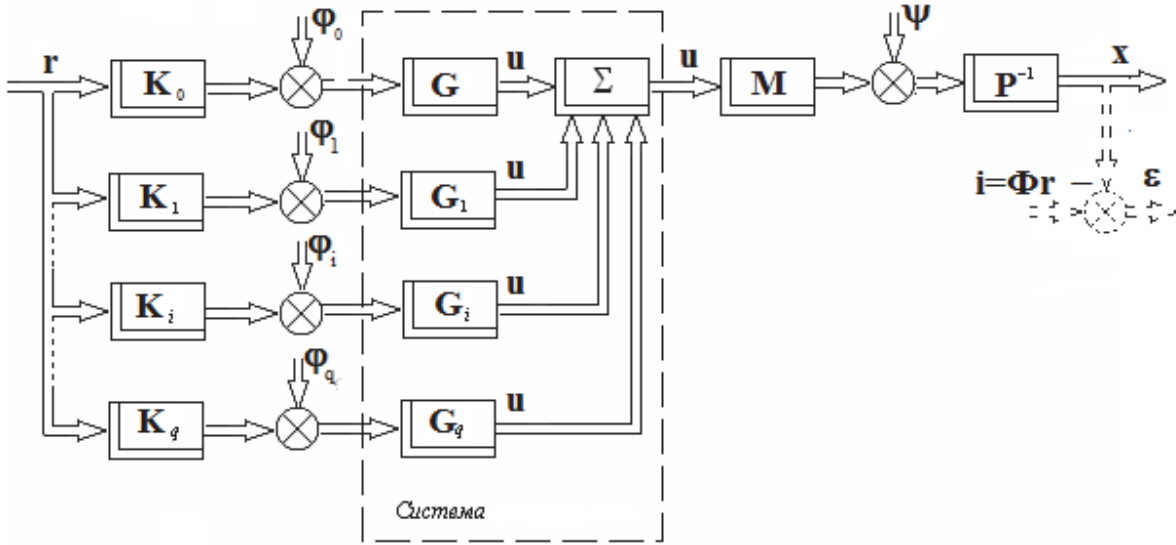


Рис. 3.7. Структурная схема комплексированной разомкнутой многомерной линейной системы управления.

Сгруппированный вектор помех измерений  $\bar{\varphi}$  записан так

$$\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_q \end{bmatrix}_{v \times 1}, \quad \varphi_0 \, n \times 1. \quad (3.91)$$

Сгруппированная структура регулятора в комплексированной системе должна быть представлена следующим образом

$$\bar{G} = (G_0, G_1, G_2, \dots, G_i, \dots, G_q)_{m \times (v_0 + v)}. \quad (3.92)$$

Вектор сигналов управления исследуемой системой имеет вид

$$u = \bar{G}(\bar{K}r + \bar{\varphi}); \quad (3.93)$$

вектор выходных сигналов системы выглядит так

$$x = P^{-1}M\bar{G}(\bar{K}r + \bar{\varphi}) + P^{-1}\psi, \quad (3.94)$$

а вектор сигналов ошибки этой системы нужно записать следующим образом

$$\varepsilon = x - i = P^{-1}M\bar{G}(\bar{K}r + \bar{\varphi}) - (\Phi r - P^{-1}\psi), \quad (3.95)$$

где вектор желаемых сигналов системы  $i = \Phi r$ ,  $r$  -  $n$ -мерный вектор программных известных случайных стационарных сигналов системы,  $\Phi_{n \times n}$  - матрица желаемых преобразований системой вектора программных сигналов  $r$ .

Полагается также, что движение объекта управления описывается известной системой линейных дифференциальных уравнений, преобразованной по Фурье и имеющей вид

$$Px = Mu + \psi,$$

где  $\psi$  –  $n$ -мерный вектор случайных стационарных центрированных воздействий с известной матрицей спектральных плотностей.

Функционал качества управления исследуемой системой полагается выражение вида

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (S'_{\varepsilon\varepsilon} R + S'_{uu} C) ds, \quad s = j\omega, \quad (3.96)$$

где  $S'_{\varepsilon\varepsilon}$  и  $S'_{uu}$  – транспонированные матрицы спектральных плотностей векторов сигналов ошибки и управления системы,  $R$  и  $C$  – положительно-определенные весовые матрицы.

Зная выражения (3.93) и (3.95), с помощью теоремы Винера-Хинчина можно определить требуемые матрицы  $S'_{\varepsilon\varepsilon}$  и  $S'_{uu}$ . Матрица  $S'_{\varepsilon\varepsilon}$  представляется таким образом

$$\begin{aligned} S'_{\varepsilon\varepsilon} = & P^{-1} M \bar{G} (\bar{K} S'_{rr} \bar{K}_* + \bar{K} S'_{\bar{\varphi}r} + S'_{r\bar{\varphi}} \bar{K}_* + S'_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}) \bar{G}_* M_* P_*^{-1} - \\ & - P^{-1} M \bar{G} (\bar{K} S'_{rr} \Phi_* - \bar{K} S'_{\psi r} P_*^{-1} + S'_{r\bar{\varphi}} \Phi_* - S'_{\psi\bar{\varphi}} P_*^{-1}) - (\Phi S'_{rr} \bar{K}_* + \\ & + \Phi S'_{\bar{\varphi}r} - P^{-1} S'_{r\psi} \bar{K}_* - P^{-1} S'_{\bar{\varphi}\psi}) \bar{G}_* M_* P_*^{-1} + (\Phi S'_{rr} \Phi_* - \Phi S'_{\psi r} P_*^{-1} - \\ & - P^{-1} S'_{r\psi} \Phi_* + P^{-1} S'_{\psi\psi} P_*^{-1}), \end{aligned} \quad (3.97)$$

а матрицу  $S'_{uu}$  следует определить как

$$S'_{uu} = \bar{G} (\bar{K} S'_{rr} \bar{K}_* + \bar{K} S'_{\bar{\varphi}r} + S'_{r\bar{\varphi}} \bar{K}_* + S'_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}) \bar{G}_*. \quad (3.98)$$

После подстановки матриц (3.97) и (3.98) в функционал (3.96) последний приобретает вид

$$\begin{aligned} e = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [P^{-1} M \bar{G} (\bar{K} S'_{rr} \bar{K}_* + \bar{K} S'_{\bar{\varphi}r} + S'_{r\bar{\varphi}} \bar{K}_* + S'_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}) \bar{G}_* M_* P_*^{-1} - \\ & - P^{-1} M \bar{G} (\bar{K} S'_{rr} \Phi_* - \bar{K} S'_{\psi r} P_*^{-1} + S'_{r\bar{\varphi}} \Phi_* - S'_{\psi\bar{\varphi}} P_*^{-1}) - (\Phi S'_{rr} \bar{K}_* + \Phi S'_{\bar{\varphi}r} - \\ & - P^{-1} S'_{r\psi} \bar{K}_* - P^{-1} S'_{\bar{\varphi}\psi}) \bar{G}_* M_* P_*^{-1} + (\Phi S'_{rr} \Phi_* - \Phi S'_{\psi r} P_*^{-1} - P^{-1} S'_{r\psi} \Phi_* + \\ & + P^{-1} S'_{\psi\psi} P_*^{-1})] R + \bar{G} (\bar{K} S'_{rr} \bar{K}_* + \bar{K} S'_{\bar{\varphi}r} + S'_{r\bar{\varphi}} \bar{K}_* + S'_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}) \bar{G}_* C \} ds. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Решая задачу синтеза оптимальной структуры регулятора в комплексированной системе управления методом Винера-Колмогорова, необходимо определить первую вариацию функционала (3.99) и условие тождественного равенства вариации нулю. Первая вариация функционала (3.99) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta e = \frac{1}{j} \int_{j\infty}^{j\infty} tr \{ & [(M_* P_*^{-1} R P_*^{-1} M + C) \bar{G} (\bar{K} S'_{rr} \bar{K}_* + \bar{K} S'_{\bar{\varphi}r} + S'_{r\bar{\varphi}} K_* + S'_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}) - \\ & - M_* P_*^{-1} R (\Phi S'_{rr} \bar{K}_* + \Phi S'_{\bar{\varphi}r} - P^{-1} S'_{r\psi} K_* - P^{-1} S'_{\bar{\varphi}\psi})] \delta \bar{G}_* + \delta G [( \bar{K} S'_{rr} \bar{K}_* + \\ & + \bar{K} S'_{\bar{\varphi}r} + S'_{r\bar{\varphi}} K_* + S'_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}) \bar{G}_* (M_* P_*^{-1} R P_*^{-1} M + C) - (\bar{K} S'_{rr} \bar{\Phi}_* + S'_{r\bar{\varphi}} \Phi_* - \\ & - \bar{K} S'_{\psi r} P_*^{-1} - S'_{\psi\bar{\varphi}} P_*^{-1}) R P_*^{-1} M] \} ds. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Целесообразен ввод следующих обозначений

$$\begin{aligned} \Gamma_* \Gamma &= M_* P_*^{-1} R P_*^{-1} M + C; \quad DD_* = \bar{K} S'_{rr} \bar{K}_* + \bar{K} S'_{\bar{\varphi}r} + S'_{r\bar{\varphi}} K_* + S'_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}; \\ T &= T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1} M_* P_*^{-1} R (\Phi S'_{rr} \bar{K}_* + \\ & + \Phi S'_{\bar{\varphi}r} + P^{-1} S'_{r\psi} \bar{K}_* - P^{-1} S'_{\bar{\varphi}\psi}) D_*^{-1}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

С учетом обозначений (3.101) вариацию (3.100) следует переписать таким образом

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_* (\Gamma \bar{G} D - T) D_* \delta \bar{G}_* + \delta \bar{G} D (D_* \bar{G}_* \Gamma_* - T_*) \Gamma] ds ,$$

а условие тождественного равенства нулю будет иметь вид

$$\Gamma \bar{G} D = (T_0 + T_+).$$

Алгоритм синтеза оптимальной структуры  $\bar{G}$  регулятора в комплексированной системе управления следует записать так

$$\bar{G} = \Gamma^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1}. \quad (3.102)$$

Подстановка функции (3.102) в функционал (3.99) и обсчет функционала определит минимальную величину последнего  $e_{min}$ , зная которую известными методами можно оценить ее изменчивость от вариаций, интересующих разработчика параметров системы в возможных диапазонах их изменений.

## **ГЛАВА 4 ОПТИМАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ ВЕКТОРА СИГНАЛОВ ВЫХОДА ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ЕГО ДВИЖЕНИЯ ИЛИ ИМИТАЦИИ ПОСЛЕДНЕГО**

Для эффективного решения различных задач анализа и синтеза оптимальных структур фильтров и регуляторов в сложных системах измерения стохастической информации или управления подвижными объектами целесообразно определить пути и этапы работ, приводящих к получению необходимой априорной информации о моделях динамики объекта управления, других звеньев систем управления, векторов сигналов управления, возмущений и помех в исследуемых системах. Поскольку предполагается использовать удобные в практике спектральные методы анализа и синтеза динамических систем в частотной области, то под необходимыми априорными знаниями понимаются полученные в конкретных режимах движений и систематизированные по результатам нескольких испытаний модели динамики (системы обыкновенных дифференциальных уравнений, матрицы передаточных функций, матрицы спектральных и взаимных спектральных плотностей векторов случайных стационарных сигналов и т.д.) звеньев и элементов систем управления, бортовых кибернетических комплексов различного назначения, основных воздействий и помех, имеющих место в исследуемых системах. Сбор и сертификацию необходимых знаний предполагается вести в режимах динамической аттестации [6, 16, 42] изделий на подвижных средствах имитации интересующих движений объектов, в режимах полунатурных испытаний прототипов разрабатываемых изделий, например [4, 16, 23], или непосредственно в режимах натурных испытаний опытных образцов изделий. Экспериментальные результаты, полученные при проведении перечисленных испытаний, безусловно, подлежат дальнейшей статистической обработке по соответствующим научно обоснованным методикам и алгоритмам. Обработка предназначена для

составления требуемых моделей динамики звеньев и воздействий в каждой конкретной ситуации.

#### **4.1 Некоторые задачи оптимального наблюдения векторов случайных стационарных выходных сигналов подвижного объекта и бортовых измерительных устройств по результатам динамической аттестации объекта**

В настоящее время сложилась противоречивая ситуация с аттестацией моделей динамики бортовых измерительных устройств и комплексов (гироприборов, измерителей скоростей и ускорений, высотомеров, а также стабилизированных бортовых платформ специального назначения и т.д.), предназначенных для целей управления и навигации. Подавляющее большинство перечисленных выше устройств аттестуется в статических условиях, а функционирует в динамике. Лишь в некоторых случаях для целей аттестации используются специальные динамические стенды, имитирующие искусственные движения, как правило, мало сходные с реальными стохастическими возмущаемыми движениями исследуемых подвижных объектов. Но именно в реальных штатных режимах движения объекта надо аттестовать модели динамики звеньев и векторов сигналов бортовых измерительных средств, да и сам объект управления. Только при достаточно точном воспроизведении на стендах реальных динамических условий в исследуемых режимах управления объектом возможно достаточно точно оценить искомые модели динамики элементов систем управления, пригодные для проведения намечаемых процессов оптимизации управления. Как известно [7], под динамической аттестацией бортового измерительного устройства понимаются процессы определения матриц его передаточных функций, спектральных и взаимных спектральных плотностей векторов случайных сигналов и помех, имеющих место в конкретных реальных режимах движения объекта.

К настоящему времени известно и решено достаточное количество различных задач оценивания (наблюдения) векторов «вход-выход» подвижных объектов и бортовых устройств при случайных или детерминированных воздействиях. К таким задачам следует отнести в первую очередь следующие:

- а) наблюдение выходного состояния устойчивого подвижного объекта при случайных возмущениях и неполных измерениях;
- б) оценивание состояния подвижного объекта при случайных воздействиях и неполных измерениях неустойчивой системой;
- в) оценивание состояния устойчивого подвижного объекта при детерминированных воздействиях и неполных измерениях;
- г) некоторые иные задачи.

С целью приблизить алгоритмы решения подобных задач наблюдения к практическим нуждам ниже в главе приведены новые формулировки и результаты решения ряда задач наблюдения, учитывающих некоторые практически значимые положения.

#### **4.1.1 Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя выходного состояния подвижного линейного объекта при случайных стационарных воздействиях и известных моделях динамики элементов измерительной системы**

Пусть по результатам динамической аттестации измерительной системы известны матрица передаточных функций измерительного устройства  $K$  размерности  $\nu \times n$  и модели динамики  $\nu$ -мерного вектора наблюдения измерителем  $y$ , вектора выходных координат объекта  $x$ , имеющего  $n$  компонент, и вектора помех измерений  $\varphi$ , такой же размерности (рис. 4.1).

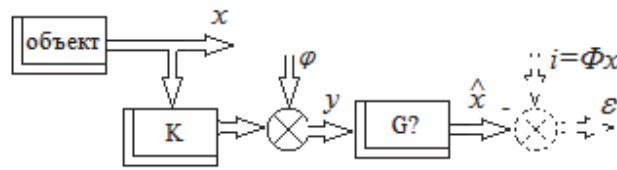


Рис. 4.1 Структурная схема системы наблюдения выходного состояния объекта управления

На структурной схеме показаны также искомая матрица передаточных функций наблюдателя  $G$  (размерности  $n \times v$ ), матрица желаемого преобразования  $\Phi$  размерности  $n \times n$   $n$ -мерного вектора  $x$  выходных сигналов подвижного объекта,  $n$ -мерный вектор сигналов ошибок наблюдения  $\varepsilon$ , а также  $n$ -мерный вектор наблюдаемых выходных сигналов  $\hat{x}$ .

Пусть движение объекта в рассматриваемом случае может быть описано системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, преобразованной по Фурье при нулевых начальных условиях, вида

$$Px = Mu + \psi,$$

где  $u$  – вектор управлений,  $\psi$  –  $n$ -мерный вектор центрированных стационарных случайных возмущений с известной матрицей спектральных плотностей  $S_{\psi\psi}$ .

Поскольку по результатам динамической аттестации измерительной системы известны модели динамики измерителя  $K$  и векторов наблюдения  $\hat{x}$  и помех измерения  $\varphi$ , то возможно определить вектор  $x$  как

$$x = K^{-1}(y - \varphi), \tag{4.1}$$

а вектор  $\hat{x}$ , наблюдаемый системой, представить следующим образом

$$\hat{x} = Gy. \tag{4.2}$$

Вектор ошибок наблюдения выходного состояния подвижного объекта предлагаемой системой с учетом выражений (4.1) и (4.2) будет иметь вид

$$\varepsilon = x - \hat{x} = Gy - \Phi K^{-1}(y - \varphi), \tag{4.3}$$

а эрмитово сопряженный к нему вектор будет равен

$$\varepsilon_* = y_* G_* - (y_* - \varphi_*) K_*^{-1} \Phi_*,$$

где  $i$  – вектор желаемых сигналов на выходе наблюдателя (рис. 4.1); \* - знак эрмитового сопряжения векторов.

Функционал качества наблюдения выходного состояния объекта, как и ранее, имеет вид

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(S'_{\varepsilon\varepsilon} R) ds, \quad (4.4)$$

где  $S'_{\varepsilon\varepsilon}$  - транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\varepsilon$ ;  $R$  – положительно определенная весовая матрица.

Учитывая выражение (4.3), матрицу  $S'_{\varepsilon\varepsilon}$  с помощью теоремы Винера-Хинчина возможно записать так

$$\begin{aligned} S'_{\varepsilon\varepsilon} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle \varepsilon_T \varepsilon_{T*} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle [G y_T - \Phi K^{-1} (y_T - \varphi_T)] [y_{T*} G_* - (y_{T*} - \varphi_{T*}) K_*^{-1} \Phi_*] \rangle = \\ &= G S'_{yy} G_* - G (S'_{yy} - S'_{y\varphi}) K_*^{-1} \Phi_* - \Phi K^{-1} (S'_{yy} - S'_{y\varphi}) G_* + \Phi K^{-1} (S'_{yy} - S'_{y\varphi} - S'_{y\varphi} + S'_{\varphi\varphi}) K_*^{-1} \Phi_*, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $\varepsilon_T$ ,  $y_T$ ,  $\varphi_T$  – векторы изображений Фурье реализаций соответствующих центрированных стационарных случайных процессов;  $T$  – время наблюдения.

После подстановки матрицы (4.5) в функционал(4.4) последний принимает вид

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [G S'_{yy} G_* - G (S'_{yy} - S'_{y\varphi}) K_*^{-1} \Phi_* - \Phi K^{-1} (S'_{yy} - S'_{y\varphi}) G_* + \\ &+ \Phi K^{-1} (S'_{yy} - S'_{y\varphi} - S'_{y\varphi} + S'_{\varphi\varphi}) K_*^{-1} \Phi_*] R \} ds. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Задачу синтеза оптимальной структуры  $G$  будем, как и предыдущих главах, решать методом Винера-Колмогорова в частотной области. Первая вариация функционала (4.6) будет иметь вид

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ R [G S'_{yy} - \Phi K^{-1} (S'_{yy} - S'_{y\varphi})] \delta G_* + \delta G [S'_{yy} G_* - (S'_{yy} - S'_{y\varphi}) K_*^{-1} \Phi_*] R \} ds. \quad (4.7)$$

Целесообразно ввести следующие обозначения:

$$\Gamma_* \Gamma = R; \quad D D_* = S'_{yy}; \quad T = T_0 + T_+ + T_- = \Gamma \Phi K^{-1} (D - S'_{y\varphi} D_*^{-1}). \quad (4.8)$$

С учетом обозначений (4.8) вариацию (4.7) можно переписать в виде

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\Gamma_* (G D - T) D_* \delta G_* + \delta G D (D_* G_* \Gamma_* - T_*) \Gamma] ds,$$

а условие тождественного равенства нулю этой вариации на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций  $G$  следует записать так

$$G D = T_0 + T_+,$$

тогда алгоритм синтеза оптимальной структуры наблюдателя  $G$  выражает уравнение

$$G = \Gamma^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1}. \quad (4.9)$$

Подстановка матрицы  $G$  из уравнения (4.9) в функционал (4.6) позволяет оценить минимальную величину последнего  $e_{min}$  и исследовать ее изменчивость при варьировании параметрами, интересующими разработчика системы наблюдения и изменяющимися в допустимых диапазонах.

#### **4.1.2 Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя выходного состояния подвижного объекта при случайных воздействиях по результатам его динамической аттестации и предшествующей компенсации помех измерений**

Представляется, что качество оптимального наблюдения выходного состояния подвижного объекта по сигналам от динамически аттестованной измерительной системы возможно повысить путем компенсации помех измерений. Структурная схема системы, реализующей компенсацию помехи измерений, которая предшествует решению намеченной задачи синтеза оптимальной структуры наблюдателя выходного состояния объекта, представлена на рис. 4.2. На этом рисунке сохранены основные обозначения, принятые для рис. 4.1.

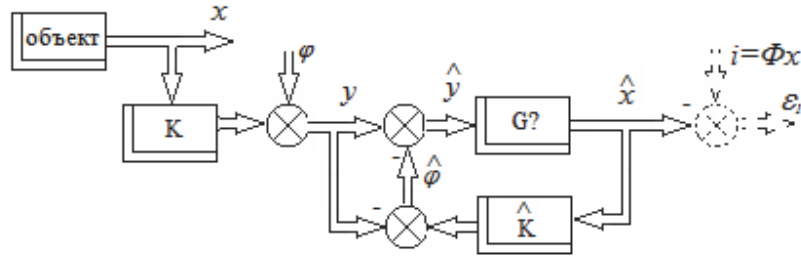


Рис. 4.2. Структурная схема системы оптимального наблюдения, имеющая контур компенсации помех измерений

Согласно структурной схеме (рис. 4.2), вектор компенсирующих помех измерений  $\hat{\varphi}$  должен быть связан с векторами сигналов на выходе измерителей  $y$  и оценки выходных состояний  $\hat{x}$  следующим соотношением

$$-\hat{\varphi} = -Kx - \varphi + \hat{K}\hat{x}, \quad (4.10)$$

где  $\hat{K}$  модель матрицы передаточных функций измерителей  $K$  воссозданная в наблюдателе по результату динамической аттестации;  $\hat{x}$  - оптимальная оценка вектора  $x$  в режиме его функционирования в процессе динамической аттестации, т.е.

$$\hat{K}\hat{x} \approx Kx.$$

Таким образом, учитывая условия (4.10) и структурную схему системы (рис. 4.2) наилучшую оценку наблюдаемого в исследуемом случае вектора  $x$  следует записать так

$$\hat{x} = G\hat{y} = G(y - \hat{\varphi}), \quad (4.11)$$

а вектор ошибок наблюдения  $\varepsilon_1$  и ермитово сопряженный с ним вектор  $\varepsilon_{1*}$  в следующем виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \hat{x} - i = G(y - \hat{\varphi}) - \Phi x = G(y - \hat{\varphi}) - \Phi K^{-1}(y - \hat{\varphi}), \\ \varepsilon_{1*} &= \hat{x}_* - i_* = (y_* - \hat{\varphi}_*)G_* - x_*\Phi_* = (y_* - \hat{\varphi}_*) - (y_* - \hat{\varphi}_*)\Phi_*K_*^{-1}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Как и в предыдущей задаче оптимального наблюдения (пункт 4.1.1) качество наблюдения характеризуется функционалом вида

$$e_1 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}(S'_{\varepsilon_1 \varepsilon_1} R_1) ds, \quad (4.13)$$

где  $S_{\varepsilon_1 \varepsilon_1}'$  - транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\varepsilon_1$ ,  $R_1$  – весовая матрица.

С помощью теоремы Винера-Хинчина [26] транспонированную матрицу спектральных плотностей ошибок наблюдения можно записать в виде

$$\begin{aligned} S_{\varepsilon_1 \varepsilon_1}' &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle \varepsilon_{1T} \varepsilon_{1T}^* \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle [G(y_{T^*} - \hat{\varphi}_{T^*}) - \Phi K^{-1}(y_T - \hat{\varphi}_T)] [(y_{T^*} - \hat{\varphi}_{T^*})G_* - (y_{T^*} - \hat{\varphi}_{T^*})K_*^{-1}\Phi_*] \rangle = \\ &= GS_{CC}G_* - GS_{CC}K_*^{-1}\Phi_* - \Phi K^{-1}S_{CC}G_* + \Phi K^{-1}S_{CC}K_*^{-1}\Phi_*, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где  $S_{CC}$  – сумма матриц спектральных и взаимных спектральных плотностей

$$S_{CC} = S_{yy}' - S_{\varphi y}' - S_{y\varphi}' + S_{\varphi\varphi}'.$$

Подстановка матрицы (4.14) в функционал (4.13) представляет последний в виде

$$e_1 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left[ (GS_{CC}G_* - GS_{CC}K_*^{-1}\Phi_* - \Phi K^{-1}S_{CC}G_* + \Phi K^{-1}S_{CC}K_*^{-1}\Phi_*) R_1 \right] ds. \quad (4.15)$$

Решая задачу синтеза оптимальной структуры наблюдателя в системе методом Винера-Колмогорова, целесообразно определить первую вариацию функционала (4.15) так

$$\delta e_1 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left[ R_1 (GS_{CC} - \Phi K^{-1}S_{CC}) \delta G_* + \delta G (S_{CC}G_* - S_{CC}K_*^{-1}\Phi_*) R_1 \right] ds. \quad (4.16)$$

Вводя обозначения

$$\Gamma_{1^*} \Gamma_1 = R_1; D_1 D_{1^*} = S_{yy}' - S_{\varphi y}' - S_{y\varphi}' + S_{\varphi\varphi}'; T_1 = T_{10} + T_{1+} + T_{1-} = \Gamma_{1^*}^{-1} \Phi K^{-1} D_1 \quad (4.17)$$

и переписав вариацию (4.16) в виде

$$\delta e_1 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left[ \Gamma_{1^*} (\Gamma_1 G D_1 - T_1) D_{1^*} \delta G_* + \delta G D_1 (D_{1^*} G_* \Gamma_{1^*} - T_{1^*}) \Gamma_1 \right] ds$$

можно получить следующее условие тождественного равенства нулю вариации (4.16) на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций  $G$

$$G D_1 = T_{10} + T_{1+}$$

и описать алгоритм синтеза оптимальной структуры наблюдателя таким выражением

$$G = \Gamma_1^{-1}(T_{10} + T_{1+})D_1^{-1}. \quad (4.18)$$

#### 4.2 Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя выходного состояния неустойчивого объекта при случайных стационарных воздействиях

Полагается, что необходимая информация о моделях динамики измерителя, наблюдаемых векторов выходов измерителя и помех уже получена в результате натуральных испытаний и динамической аттестации исследуемого подвижного неустойчивого объекта. При соответствующей обработке имеющейся информации возможно синтезировать оптимальную структуру и параметры наблюдателя, оценивающего выходное состояние объекта с наилучшим качеством (точностью).

Структурная схема исследуемой системы наблюдения выходного состояния объекта приведена на рис. 4.3.

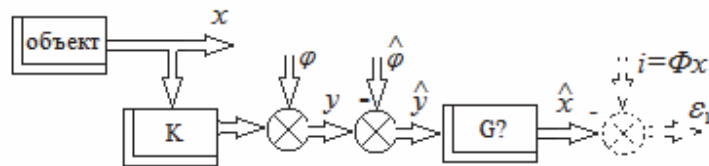


Рис. 4.3 Структурная схема наблюдения состояния неустойчивого объекта

На рис. 4.3 приняты следующие обозначения:  $K$  – известная матрица передаточных функций измерителей размерности  $v \times n$ ;  $x$  –  $n$ -мерный вектор выходных координат объекта;  $y$  и  $\hat{y}$  –  $v$ -мерные известные векторы выходных сигналов измерителей, причем  $\hat{y}$  – вектор сигналов измерителей, очищенный от помех измерений (вектор  $\hat{\varphi}$ ) в соответствии с процедурой, изложенной в п.п. 4.1.2,  $\varphi$  и  $\hat{\varphi}$  – известные векторы помех измерений (реальных и компенсирующих);  $G$  – искомая матрица передаточных функций наблюдателя размерности  $n \times v$ ;  $\Phi$  – известная матрица желаемых передаточных функций сигналов объекта системы

наблюдения;  $\hat{x}$  -  $n$ -мерный вектор оценок сигналов на выходе объекта;  $\varepsilon_1$  -  $n$ -мерный вектор ошибок наблюдения системой выходного состояния объекта.

Предполагается, что при неустойчивом объекте, вектор его выходных сигналов  $x$  состоит из двух составляющих (устойчивой  $x_+$  и неустойчивой  $x_-$ ):

$$x = x_+ + x_-$$

и этот вектор возможно выразить следующим образом

$$x = K^\#(y - \varphi) = K^\#(y_+ + y_- - \varphi), \quad (4.19)$$

где  $y_+$  и  $y_-$  - устойчивая и неустойчивая части вектора наблюдения  $y$ .

Целесообразно неустойчивую часть вектора наблюдения  $y_-$  представить соотношением

$$y_- = B_*^{-1}l, \quad (4.20)$$

где диагональная матрица  $B_*^{-1}$  размерности  $\nu \times \nu$  включает все неустойчивые полюса вектора  $y_-$ , а вектор  $l$  оказывается  $\nu$ -мерным известным вектором.

Целесообразно также предположить следующую структуру искомой матрицы передаточных функций наблюдателя

$$G = VB_* + A, \quad (4.21)$$

где  $V$  - варьируемая при решении задачи синтеза структуры  $G$  матрица передаточных функций; матрица  $A$  должна однозначно определяться при выполнении указанной процедуры синтеза.

С учетом выражений (4.19), (4.20), (4.21) и уравнения

$$\hat{y} = y - \hat{\varphi} = y_+ + B_*^{-1}l - \hat{\varphi}$$

оценку вектора наблюдаемого выходного состояния объекта  $\hat{x}$  следует представить как сумму произведений

$$\hat{x} = G\hat{y} = VB_*y_+ + Vl + Ay_+ + AB_*^{-1}l - VB_*\hat{\varphi} - A\hat{\varphi}. \quad (4.22)$$

Вектор желаемых сигналов наблюдения  $i$  имеет вид

$$i = \Phi x = \Phi K^\#(y_+ + B_*^{-1}l - \varphi), \quad (4.23)$$

а вектор сигналов ошибок наблюдения выходного состояния объекта  $\varepsilon$  с учетом выражений (4.22), (4.23) и структурной схемы рис. 4.3 следует представить так

$$\varepsilon_1 = VB_*y_+ + Vl - VB_*\widehat{\varphi} + AB_*^{-1}l - A\widehat{\varphi} + Ay_+ - \Phi K^\# y_+ - \Phi K^\# B_*^{-1}l + \Phi K^\# \varphi. \quad (4.24)$$

Выбором матрицы  $A$ , равной матрице  $\Phi K^\#$

$$A = \Phi K^\#,$$

обеспечивается отсутствие расходящихся составляющих в векторе сигналов ошибки наблюдения  $\varepsilon_1$  выходного состояния неустойчивого объекта, который при этом определится так

$$\varepsilon_1 = V[B_*(y_+ - \widehat{\varphi}) + l] + \Phi K^\#(\varphi - \widehat{\varphi}), \quad (4.25)$$

а транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\varepsilon_1$ , найденная с помощью теоремы Винера-Хинчина, приобретает вид

$$\begin{aligned} S'_{\varepsilon\varepsilon} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle \varepsilon_{1T} \varepsilon_{1T}^* \rangle = & V[B_*(S'_{y+y_+} - S'_{\widehat{\varphi}y_+} - S'_{y+\widehat{\varphi}} + S'_{\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}})B + B_*(S'_{ly_+} - S'_{l\widehat{\varphi}}) + (S'_{y+l} - S'_{\varphi l})B + S'_{ll}]V_* + \\ & + V[B_*(S'_{\varphi y_+} - S'_{\widehat{\varphi}y_+} - S'_{\widehat{\varphi}\varphi} + S'_{\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}}) + (S'_{\varphi l} - S'_{\widehat{\varphi}l})]K_*^\# \Phi_* + \Phi K^\# [(S'_{y+\varphi} - S'_{y+\widehat{\varphi}} - S'_{\varphi\widehat{\varphi}} + S'_{\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}})B + (S'_{l\varphi} - S'_{l\widehat{\varphi}})]V_* + \\ & + \Phi K^\# (S'_{\varphi\varphi} - S'_{\widehat{\varphi}\varphi} - S'_{\varphi\widehat{\varphi}} + S'_{\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}})K_*^\# \Phi_*. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Функционал качества наблюдения выходных сигналов неустойчивого объекта имеет вид

$$e_1 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(S'_{\varepsilon_1 \varepsilon_1} R_1) ds, \quad (4.27)$$

который после подстановки в него матрицы (4.26) должен быть записан так

$$\begin{aligned} e_1 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \| & V[B_*(S'_{y+y_+} - S'_{\widehat{\varphi}y_+} - S'_{y+\widehat{\varphi}} + S'_{\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}})B + B_*(S'_{ly_+} - S'_{l\widehat{\varphi}}) + (S'_{y+l} - S'_{\varphi l})B + S'_{ll}]V_* + \\ & + V[B_*(S'_{\varphi y_+} - S'_{\widehat{\varphi}y_+} - S'_{\widehat{\varphi}\varphi} + S'_{\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}}) + (S'_{\varphi l} - S'_{\widehat{\varphi}l})]K_*^\# \Phi_* + \Phi K^\# [(S'_{y+\varphi} - S'_{y+\widehat{\varphi}} - S'_{\varphi\widehat{\varphi}} + S'_{\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}})B + (S'_{l\varphi} - S'_{l\widehat{\varphi}})]V_* + \\ & + \Phi K^\# (S'_{\varphi\varphi} - S'_{\widehat{\varphi}\varphi} - S'_{\varphi\widehat{\varphi}} + S'_{\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}})K_*^\# \Phi_* \| R_1 \| ds. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Синтезируя варьируемую матрицу  $V$  по методу Винера-Колмогорова, необходимо определить первую вариацию функционала (4.28) и обеспечить условие тождественного равенства ее нулю путем соответствующего выбора физически реализуемой и устойчивой матрицы  $V$ . Первая вариация функционала (4.28) имеет вид

$$\delta e_1 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \| R_1 \{ V[B_*(S'_{y+y_+} - S'_{\widehat{\varphi}y_+} - S'_{y+\widehat{\varphi}} + S'_{\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}})B + B_*(S'_{ly_+} - S'_{l\widehat{\varphi}}) + (S'_{y+l} - S'_{\varphi l})B + S'_{ll}] + \Phi K^\# [(S'_{y+\varphi} -$$

$$\begin{aligned}
& -S'_{y+\bar{\varphi}} - S'_{\varphi\bar{\varphi}} + S'_{\varphi\varphi})B + (S'_{l\varphi} - S'_{l\bar{\varphi}})]\delta V_* + \delta V \{ [B_* (S'_{y+y_+} - S'_{\bar{\varphi}y_+} - S'_{y+\bar{\varphi}} + S'_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}})B + (S'_{y+l} - S'_{\bar{\varphi}l})B + \\
& + B_* (S'_{ly_+} - S'_{l\bar{\varphi}}) + S'_{ll}]V_* + [(S'_{\varphi y_+} - S'_{\bar{\varphi}y_+} - S'_{\varphi\bar{\varphi}} + S'_{\varphi\varphi})B_* + (S'_{\varphi l} - S'_{\bar{\varphi}l})]K_*^\# \Phi_* \} R_1 \| ds. \quad (4.29)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
D_1 D_{1*} &= B_* (S'_{y+y_+} - S'_{\bar{\varphi}y_+} - S'_{y+\bar{\varphi}} + S'_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}})B + B_* (S'_{ly_+} - S'_{l\bar{\varphi}}) + (S'_{y+l} - S'_{\bar{\varphi}l})B + S'_{ll}; \quad \Gamma_{1*} \Gamma_1 = R_1; \\
T_1 &= T_{10} + T_{1+} + T_{1-} = \Gamma_{1*}^{-1} \Phi K^\# [(S'_{y+\varphi} - S'_{y+\bar{\varphi}} - S'_{\varphi\bar{\varphi}} + S'_{\varphi\varphi})B + S'_{l\varphi} - S'_{l\bar{\varphi}}] D_{1*}^{-1}, \quad (4.30)
\end{aligned}$$

тогда первую вариацию (4.29) следует переписать так

$$\delta e_1 = \frac{1}{j} \int tr [\Gamma_{1*} (\Gamma_1 V D_1 + T_1) D_{1*} \delta V_* + \delta V D_1 (D_{1*} V_* \Gamma_{1*} + T_{1*}) \Gamma_1] ds,$$

условие тождественного равенства нулю вариации (4.29) на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций при этом будет иметь вид

$$\Gamma_1 V D_1 = -(T_{10} + T_{1+}),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры варьируемой матрицы  $V$  отсюда выражается как

$$V = -\Gamma_1^{-1} (T_{10} + T_{1+}) D_{1*}^{-1}. \quad (4.30)$$

Учитывая полученную с помощью формулы (4.30) матрицу  $V$ , оптимальная структура матрицы передаточных функций наблюдателя в исследуемой системе (4.21) определяется в виде

$$G = V B_* + \Phi K^\#. \quad (4.31)$$

Учет полученной структуры (4.31), выражений (4.22) и вида матрицы  $A$  позволяет определить устойчивую  $\hat{x}_+$  и неустойчивую  $\hat{x}_-$  части вектора оценок выходных сигналов системы наблюдения

$$\hat{x}_+ = V [B_* (y_+ - \bar{\varphi}) + l] + \Phi K^\# (y_+ - \bar{\varphi}), \quad \hat{x}_- = \Phi K^\# B_*^{-1} l. \quad (4.32)$$

При определении вектора сигналов ошибок наблюдения  $\varepsilon_1$  неустойчивый вектор  $\hat{x}_-$  компенсируется выбором матрицы  $A$  в соответствии с выражением

$$A = \Phi K^\#.$$

### 4.3 Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя выходного состояния объекта с произволом в динамике при случайных воздействиях и известными моделями динамики сигналов его измерителя

Предполагается, что при натуральных (полунатурных) испытаниях интересующего подвижного объекта обнаружен и соответствующим образом зафиксирован произвол (неустойчивость) в его динамике, а также в результате динамической аттестации определены модели динамики измерительного комплекса (системы сенсоров) и помех измерений. Таким образом, в качестве исходной информации известны: матрицы  $P$  и  $M$  размерности  $n \times n$  и  $n \times m$  соответственно как базовая часть ранее записанной системы уравнений

$$Px = Mu + \psi,$$

определяющей исследуемое движение многомерного подвижного объекта в частотной области; модель динамики вектора случайных стационарных воздействий  $\psi$  размерности  $n \times 1$ , действующих на объект в исследуемом режиме его функционирования; матрица передаточных функций измерительного комплекса  $K$  размерности  $v \times n$ ; модель динамики  $v$ -мерного вектора  $\varphi$  стационарных центрированных случайных помех измерений (матрица спектральных плотностей помех). Структурная схема исследуемой системы наблюдения представлена на рис. 4.4.

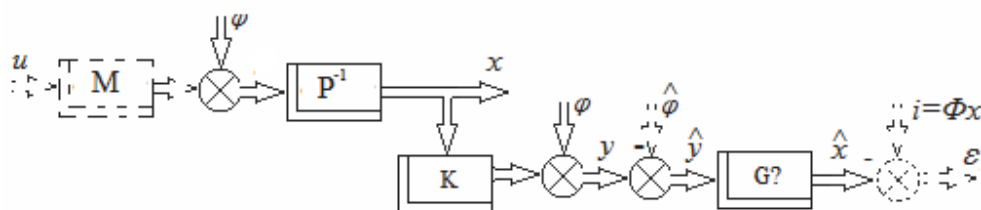


Рис. 4.4. Структурная схема системы наблюдения выходного состояния объекта с произволом в динамике в вариантах без компенсации и с компенсацией помех измерений

Как это принято в теории управления полагается, что процесс наблюдения не требует знания моделей динамики вектора управляющих сигналов объекта ( $u=0$ ).

Согласно рис. 4.4 наблюдаемый вектор  $x$  выходных сигналов объекта определяется выражением

$$x = P^{-1}\psi, \quad (4.33)$$

причем матрица  $P^{-1}$  имеет особенности как в левой, так и в правой полуплоскости комплексного переменного  $s=j\omega$ .

В результате левостороннего вынесения неустойчивых полюсов [49] матрицу  $P^{-1}$  можно представить в таком виде

$$P^{-1} = B_*^{-1}\theta, \quad (4.34)$$

где  $B_*$  - диагональная полиномиальная матрица размерности  $n \times n$ , полюсы определителя которой совпадают с неустойчивыми полюсами определителя матрицы  $P$ , а матрица  $\theta$  – матрица дробно-рациональных функций, полюсы которых – устойчивы.

С учетом выражения (4.34) уравнение (4.33) следует переписать так

$$x = B_*^{-1}\theta\psi. \quad (4.35)$$

В варианте задачи синтеза оптимальной структуры наблюдателя без компенсации помех измерений  $\nu$ -мерный вектор сигналов наблюдения выходов объекта  $y$  с учетом выражения (4.21) будет иметь вид

$$y = Kx + \varphi = KP^{-1}\psi + \varphi = KB_*^{-1}\theta\psi + \varphi, \quad (4.36)$$

а в той же задаче синтеза, но с компенсацией помех измерений, где компенсация выполняется по процедуре пункта 4.1.2, вектор наблюдения выхода объекта будет равен

$$\hat{y} = Kx + (\varphi - \hat{\varphi}) = KB_*^{-1}\theta\psi + \varphi - \hat{\varphi}. \quad (4.37)$$

Неустойчивость объекта приводит к необходимости формирования структуры искомой матрицы передаточных функций оптимального наблюдателя  $G$  размерности  $n \times \nu$  на основе следующего правила

$$G = FB_*K^\# + A, \quad (4.38)$$

где  $F$  – варьируемая матрица передаточных функций размерности  $\nu \times n$ ,  $A$  – определенным образом выбираемая при синтезе полиномиальная матрица размерности  $\nu \times n$ , символ «#» - знак псевдообращения прямоугольных матриц.

Очевидно, что результат наблюдения вектора выходных сигналов объекта (вектор оценок  $\hat{x}$ ) при произволе в динамике объекта и без компенсации помех измерений должен содержать устойчивую  $\hat{x}^+$  и неустойчивую  $\hat{x}^-$  части. Причем

$$\hat{x} = \hat{x}^+ + \hat{x}^-.$$

С учетом выражений (4.34), (4.36) и (4.38) вектор  $\hat{x}$  можно представить как

$$\hat{x} = Gy = [F(\theta\psi + B_*K^\#\varphi) + A\varphi]^+ + [AKB_*^{-1}\theta\psi]^-. \quad (4.39)$$

Если определить вектор желаемых сигналов наблюдения  $i$  в виде

$$i = \Phi x = \Phi B_*^{-1}\theta\psi, \quad (4.40)$$

то вектор сигналов ошибок наблюдения  $\varepsilon$  следует записать так

$$\varepsilon = \hat{x} - i = F(\theta\psi + B_*K^\#\varphi) + A\varphi + AKB_*^{-1}\theta\psi - \Phi B_*^{-1}\theta\psi. \quad (4.41)$$

Для того, чтобы вектор (4.41) не имел расходящихся трендов, обусловленных неустойчивостью объекта наблюдения, необходимо матрицу  $A$  в выражении (4.38) выбрать равной произведению  $\Phi K^\#$ . В таком случае вектор  $\varepsilon$  становится равным

$$\varepsilon = F(\theta\psi + B_*K^\#\varphi) + \Phi K^\#\varphi, \quad (4.42)$$

а обе части (устойчивую и неустойчивую) вектора оценок (4.39) следует записать так

$$\hat{x} = Gy = [F(\theta\psi + B_*K^\#\varphi) + \Phi K^\#\varphi]^+ + [\Phi B_*^{-1}\theta\psi]^-. \quad (4.43)$$

В варианте задачи синтеза оптимальной структуры наблюдателя с компенсацией помех измерений наблюдаемый вектор сигналов оценок  $\hat{x}$  с учетом выражений (4.34), (4.37) и (4.38) будет иметь вид

$$\hat{x} = G\bar{y} = \{F[\theta\psi + B_*K^\#(\varphi - \bar{\varphi})] + A(\varphi - \bar{\varphi})\}^+ + \{AKB_*^{-1}\theta\psi\}^-, \quad (4.44)$$

а вектор желаемых сигналов наблюдения  $i$  должен быть описан уравнением (4.40). Тогда, с учетом соотношений (4.40) и (4.44), вектор сигналов ошибок наблюдения  $\hat{\varepsilon}$  определяется так

$$\widehat{\varepsilon} = \{F[\theta\psi + B_*K^\#(\varphi - \widehat{\varphi})] + A(\varphi - \widehat{\varphi})\}^+ + \{AKB_*^{-1}\theta\psi\}^- - \Phi B_*^{-1}\theta\psi.$$

При соответствующем выборе матрицы  $A$  в уравнении (4.38) вектор равенстве  $\widehat{\varepsilon}$  не умеет расходящихся трендов и может быть переписан как

$$\widehat{\varepsilon} = F[A\psi + B_*K^\#(\varphi - \widehat{\varphi})] + \Phi K^\#(\varphi - \widehat{\varphi}). \quad (4.45)$$

Для дальнейшего решения поставленных задач синтеза структур оптимальных матриц передаточных функций наблюдателя целесообразно определить транспонированные матрицы спектральных плотностей ошибок наблюдения  $S_{\varepsilon\varepsilon}'$  и  $S_{\widehat{\varepsilon}\widehat{\varepsilon}}'$ . Воспользовавшись теоремой Винера-Хинчина в векторной форме [26] и уравнением (4.42), искомую транспонированную матрицу  $S_{\varepsilon\varepsilon}'$  следует определить в виде

$$S_{\varepsilon\varepsilon}' = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle \varepsilon_T \varepsilon_T^* \rangle = F(\theta S_{\psi\psi}' \theta_* + \theta S_{\varphi\psi}' K_*^\# B + B_* K_*^\# S_{\psi\varphi}' \theta_* + B_* K_*^\# S_{\varphi\varphi}' K_*^\# B) F_* + F(\theta S_{\varphi\psi}' + B_* K S_{\varphi\varphi}') K_*^\# \Phi_* + \Phi K^\# (S_{\psi\varphi}' + S_{\varphi\varphi}' K_*^\# B) F_* + \Phi K^\# S_{\varphi\varphi}' K_*^\# \Phi_*. \quad (4.46)$$

Учитывая выражение (4.45), на основании теоремы Винера – Хинчина уравнение для поиска матрицы  $S_{\widehat{\varepsilon}\widehat{\varepsilon}}'$  представлено как

$$S_{\widehat{\varepsilon}\widehat{\varepsilon}}' = F[\theta S_{\psi\psi}' \theta_* + \theta (S_{\varphi\psi}' - S_{\widehat{\varphi}\psi}') K_*^\# B + B_* K_*^\# (S_{\psi\varphi}' - S_{\psi\widehat{\varphi}}') \theta_* + B_* K_*^\# (S_{\varphi\varphi}' - S_{\widehat{\varphi}\varphi}' - S_{\varphi\widehat{\varphi}}' + S_{\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}}') K_*^\# B] F_* + F[\theta (S_{\varphi\psi}' - S_{\widehat{\varphi}\psi}') + B_* K_*^\# (S_{\varphi\varphi}' - S_{\widehat{\varphi}\varphi}' - S_{\varphi\widehat{\varphi}}' + S_{\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}}')] K_*^\# \Phi_* + \Phi K^\# [(S_{\psi\varphi}' - S_{\psi\widehat{\varphi}}') \theta_* + (S_{\varphi\varphi}' - S_{\widehat{\varphi}\varphi}' - S_{\varphi\widehat{\varphi}}' + S_{\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}}') K_*^\# B] \times \\ \times F_* + \Phi K^\# (S_{\varphi\varphi}' - S_{\widehat{\varphi}\varphi}' - S_{\varphi\widehat{\varphi}}' + S_{\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}}') K_*^\# \Phi_*. \quad (4.47)$$

Полученные таким образом соотношения (4.46), (4.47) позволяют перейти к решению поставленных задач синтеза в частотной области.

### 4.3.1 Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя вектора выходных сигналов объекта с произволом в динамике и без компенсации помех измерений

Функционал качества наблюдения вектора выходных сигналов объекта с учетом выражений (4.4) и (4.46) будет иметь вид

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [F(\theta S_{\psi\psi}' \theta_* + \theta S_{\varphi\psi}' K_*^\# B + B_* K_*^\# S_{\psi\varphi}' \theta_* + B_* K_*^\# S_{\varphi\varphi}' K_*^\# B) F_* + F(\theta S_{\varphi\psi}' + B_* K S_{\varphi\varphi}') K_*^\# \Phi_* + \\ + \Phi K^\# (S_{\psi\varphi}' + S_{\varphi\varphi}' K_*^\# B) F_* + \Phi K^\# S_{\varphi\varphi}' K_*^\# \Phi_*] R \} ds. \quad (4.48)$$

Для решения поставленной выше задачи синтеза оптимальной структуры матрицы передаточных функций наблюдателя  $G$  необходимо найти матрицу варьируемых передаточных функций  $F$ , которая была бы устойчива вместе с обратной и доставляла минимум функционалу (4.48). В соответствии с методом Винера-Колмогорова для поиска такой матрицы необходимо найти первую вариацию функционала (4.48) и условие тождественного равенства ее нулю. Первая вариация функционала (4.48) равна

$$\begin{aligned} \delta e = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ R [ F ( \theta S'_{\psi\psi} \theta_* + \theta S'_{\varphi\psi} K_*^\# B + B_* K^\# S'_{\psi\varphi} \theta_* + B_* K^\# S'_{\varphi\varphi} K_*^\# B ) + \Phi K^\# ( S'_{\psi\varphi} \theta_* + S'_{\varphi\varphi} K_*^\# B ) ] \delta F_* + \\ & + \delta F [ ( \theta S'_{\psi\psi} \theta_* + \theta S'_{\varphi\psi} K_*^\# B + B_* K^\# S'_{\psi\varphi} \theta_* + B_* K^\# S'_{\varphi\varphi} K_*^\# B ) F_* + ( \theta S'_{\varphi\psi} + B_* K S'_{\varphi\varphi} ) K_*^\# \Phi_* ] R \} ds. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Целесообразно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Gamma_* \Gamma &= R; \quad DD_* = \theta S'_{\psi\psi} \theta_* + \theta S'_{\varphi\psi} K_*^\# B + B_* K^\# S'_{\psi\varphi} \theta_* + B_* K^\# S'_{\varphi\varphi} K_*^\# B; \\ T &= T_0 + T_+ + T_- = \Gamma \Phi K^\# ( S'_{\psi\varphi} \theta_* + S'_{\varphi\varphi} K_*^\# B ) D_*^{-1}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

С учетом обозначений (4.50) вариацию (4.49) следует представить так

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [ \Gamma_* ( \Gamma F D + T ) D_* \delta F_* + \delta F D ( D_* F_* \Gamma_* + T_* ) \Gamma ] ds,$$

условие тождественного равенства этой вариации нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций  $F$  следует определить в виде

$$\Gamma F D = -(T_0 + T_+),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры дробно-рациональной устойчивой матрицы  $F$  – следующим образом

$$F = -\Gamma^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1}. \quad (4.51)$$

После подстановки структуры (4.51) в выражение (4.38) с учетом условия формирования матрицы  $A$  оптимальная структура матрицы передаточных функций наблюдателя принимает вид

$$G = F B_* K^\# + \Phi K^\#. \quad (4.52)$$

Подстановка матрицы (4.51) в функционал (4.48) определяет его минимальную величину  $e_{min}$ , изменение которой при изменении параметров

системы, интересующих разработчика, возможно исследовать уже по известной процедуре.

### 4.3.2 Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя вектора выходных сигналов объекта с произволом в динамике и при условии компенсации помех измерений

Функционал качества наблюдения вектора выходных сигналов объекта с произволом в динамике с учетом выражений (4.45) и (4.47) имеет вид

$$\bar{e} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(S'_{\varepsilon\varepsilon} R) ds,$$

который после подстановки матрицы (4.47) представляется как

$$\begin{aligned} \bar{e} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left\{ F \left[ \theta S'_{\psi\psi} \theta_* + \theta (S'_{\varphi\psi} - S'_{\bar{\varphi}\psi}) K_*^\# B + B_* K^\# (S'_{\psi\varphi} - S'_{\psi\bar{\varphi}}) \theta_* + B_* K^\# (S'_{\varphi\varphi} - S'_{\bar{\varphi}\varphi} - S'_{\varphi\bar{\varphi}} + S'_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}) K_*^\# B \right] F_* + \right. \\ & + F \left[ \theta (S'_{\varphi\psi} - S'_{\bar{\varphi}\psi}) + B_* K^\# (S'_{\varphi\varphi} - S'_{\bar{\varphi}\varphi} - S'_{\varphi\bar{\varphi}} + S'_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}) \right] K_*^\# \Phi_* + \Phi K^\# \left[ (S'_{\psi\varphi} - S'_{\psi\bar{\varphi}}) \theta_* + (S'_{\varphi\varphi} - S'_{\bar{\varphi}\varphi} - S'_{\varphi\bar{\varphi}} + S'_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}) K_*^\# B \right] \times \\ & \left. \times F_* + \Phi K^\# (S'_{\varphi\varphi} - S'_{\bar{\varphi}\varphi} - S'_{\varphi\bar{\varphi}} + S'_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}) K_*^\# \Phi_* \right\} R \Big| ds. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Для решения поставленной задачи синтеза по методу Винера-Колмогорова необходимо найти первую вариацию функционала (4.53) и условие ее тождественного равенства нулю на классе устойчивых и физически реализуемых варьируемых дробно-рациональных матриц  $F$ .

Первая вариация функционала (4.53), как показано в монографии [9], имеет вид

$$\delta \bar{e} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(RQ \delta F_* + \delta F Q_* R) ds, \quad (4.54)$$

где  $Q$  – дробно-рациональная матрица соответствующего размера, которая равна следующей сумме произведений

$$\begin{aligned} Q = & F \left[ \theta S'_{\psi\psi} \theta_* + \theta (S'_{\varphi\psi} - S'_{\bar{\varphi}\psi}) K_*^\# B + B_* K^\# (S'_{\psi\varphi} - S'_{\psi\bar{\varphi}}) \theta_* + B_* K^\# (S'_{\varphi\varphi} - S'_{\bar{\varphi}\varphi} - S'_{\varphi\bar{\varphi}} + S'_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}) K_*^\# B \right] + \\ & + \Phi K^\# \left[ (S'_{\psi\varphi} - S'_{\psi\bar{\varphi}}) \theta_* + (S'_{\varphi\varphi} - S'_{\bar{\varphi}\varphi} - S'_{\varphi\bar{\varphi}} + S'_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}) K_*^\# B \right]. \end{aligned}$$

Целесообразно ввести следующие обозначения:

$$\Gamma_* \Gamma = R; DD_* = \theta S'_{\psi\psi} \theta_* + \theta (S'_{\varphi\psi} - S'_{\psi\varphi}) K_*^\# B + B_* K^\# (S'_{\psi\varphi} - S'_{\varphi\psi}) \theta_* + B_* K^\# (S'_{\varphi\varphi} - S'_{\varphi\varphi} - S'_{\varphi\varphi} + S'_{\varphi\varphi}) K_*^\# B; \\ T = T_0 + T_+ + T_- = \Gamma \Phi K^\# [(S'_{\psi\varphi} - S'_{\varphi\psi}) \theta_* + (S'_{\varphi\varphi} - S'_{\varphi\varphi} - S'_{\varphi\varphi} + S'_{\varphi\varphi}) K_*^\# B]. \quad (4.55)$$

С учетом выражений (4.55) вариация (4.54) приобретает вид

$$\delta \bar{e} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\Gamma_* (\Gamma \Phi D + T) D_* \delta F_* + \delta F D (D_* \Phi_* \Gamma_* + T_*) \Gamma] ds,$$

условие равенства первой вариации (4.54) нулю на классе устойчивых варьируемых матриц передаточных функций  $F$  следует записать так

$$\Gamma \Phi D = -(T_0 + T_+),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры дробно-рациональной устойчивой матрицы  $F$  определить следующим образом

$$F = -\Gamma^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1}. \quad (4.56)$$

После подстановки структуры (4.56) в уравнение (4.38) с учетом известного равенства

$$A = \Phi K^\#$$

Оптимальная структура наблюдателя в исследуемом варианте задачи синтеза примет вид

$$G = FB_* K^\# + \Phi K^\#. \quad (4.57)$$

Подстановка матрицы (4.57) в функционал (4.53) определит его минимальную величину, изменчивость которой в функции от интересующих параметров системы можно проследить по известной уже процедуре.

#### **4.4 Некоторые задачи оптимального наблюдения векторов детерминированных выходных сигналов подвижного объекта по результатам его динамической аттестации**

Базовые положения, характеризующие процессы наблюдения выходного состояния подвижного объекта по данным его динамической аттестации,

достаточно полно изложены во вводных положениях к главе 4. Там же обсуждаются и особенности идентификации моделей динамики подвижного объекта по данным натурных испытаний его прототипов. Особенности удобных для практического использования моделей динамики как самих объектов, их базовых звеньев, а также воздействий и возмущений в интересующих режимах функционирования объектов достаточно полно пояснены в первых трех главах настоящей монографии. Ниже в обобщенном виде приведены лишь некоторые задачи оптимального наблюдения выходных детерминированных сигналов подвижных объектов, базирующиеся на уже известных из предыдущего изложения фактах.

#### 4.4.1 Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя детерминированной выходной информации многомерного устойчивого стабилизируемого объекта

Полагается, что по данным динамической аттестации и натурных испытаний разработчик системы наблюдения знает оценки необходимых моделей динамики звеньев и векторов сигналов измерительной части разрабатываемой системы.

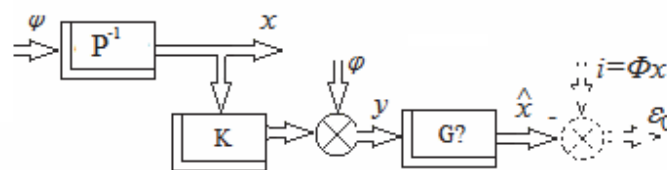


Рис. 4.5. Структурная схема системы наблюдения выходных сигналов объекта при детерминированных воздействиях

На рис. 4.5 показаны: модель динамики объекта, дробно-рациональная матрица  $P^{-1}$  размерности  $n \times n$ , матрица передаточных функций измерителей  $K$  размерности  $\nu \times n$ ,  $\nu$ -мерные векторы сигналов наблюдения выхода  $y$  и помех измерений  $\varphi$ , искомая матрица передаточных функций разрабатываемого наблюдателя  $G$  размерности  $n \times \nu$ , матрица передаточных функций  $\Phi$  размерности

$n \times n$  желаемого преобразования  $n$ -мерного вектора выходных сигналов объекта  $x$ , оценка  $\hat{x}$  вектора сигналов выхода объекта с помощью системы наблюдения,  $n$ -мерный вектор сигналов ошибок наблюдения системой выходных сигналов объекта  $\varepsilon_0$ .

Модели динамики векторов детерминированных сигналов целесообразно представить в виде следующих произведений

$$\psi = \theta_\psi L_{n \times 1}, \quad y = \theta_y L_{v \times 1}, \quad \varphi = \theta_\varphi L_{v \times 1}, \quad x = P^{-1} \theta_\psi L_{n \times 1},$$

где  $\theta_\psi$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_\varphi$  – диагональные матрицы, составленные из компонентов векторов, указанных в индексах;  $L_{n \times 1}$ ,  $L_{v \times 1}$  – единичные векторы, указанных в индексах размерностей.

Если представить единичный вектор  $L_{v \times 1}$  как

$$L_{v \times 1} = [E_v \quad O_{v \times (n-v)}] L_{n \times 1},$$

то вектор сигналов наблюдения выходов измерителей  $y$  (рис. 4.5) можно определить следующим образом

$$y = Kx + \varphi = \theta_{kx} L_{n \times 1} + \theta_\varphi L_{v \times 1} = (\theta_{kx} + \theta_\varphi \Omega_1) L_{n \times 1}, \quad (4.58)$$

где  $\theta_{kx}$  – дробно-рациональная матрица размерности  $v \times n$ , которая равна

$$\theta_{kx} = KP^{-1} \theta_\psi;$$

$\Omega_1$  – числовая матрица, имеющая следующую структуру

$$\Omega_1 = [E_v \quad O_{v \times (n-v)}];$$

$O_{v \times (n-v)}$  – нулевая матрица размерности  $v \times (n-v)$ .

Вектор оценок выходных сигналов объекта  $\hat{x}$  в таком случае приобретает вид

$$\hat{x} = Gy = G(\theta_{kx} + \theta_\varphi \Omega_1) L_{n \times 1}, \quad (4.59)$$

а вектор сигналов ошибок наблюдения представляется так

$$\varepsilon_0 = \hat{x} - i = [G(\theta_{kx} - \theta_\varphi \Omega_1) - \Phi P^{-1} \theta_\psi] L_{n \times 1} = [G(\theta_{kx} - \theta_\varphi \Omega_1) - \Phi Q] L_{n \times 1}, \quad (4.60)$$

где

$$Q = P^{-1} \theta_\psi.$$

Функционал качества наблюдения выходов объекта в рассматриваемой задаче имеет следующий вид

$$I_0 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}(\varepsilon_0 \varepsilon_{0*} R) ds. \quad (4.61)$$

После подстановки выражения (4.60) в функционал (4.61) последний должен быть переписан в виде

$$I_0 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ [G(\theta_{kx} + \theta_\varphi \Omega_1) - \Phi Q] L_n [(\theta_{kx*} + \Omega_{1*} \theta_{\varphi*}) G_* - Q_* \Phi_*] R \} ds, \quad (4.62)$$

где  $L_n$  – матрица размерности  $n \times n$ , все элементы которой равны единице.

Решая задачу синтеза оптимальной структуры наблюдателя в рассматриваемой системе (рис. 4.5) методом Винера-Колмогорова, следует определить первую вариацию функционала (4.62) и условие тождественного равенства ее нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $G$ . Первую вариацию функционала (4.62) нужно представить так

$$\begin{aligned} \delta I_0 = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ R [G(\theta_{kx} + \theta_\varphi \Omega_1) - \Phi Q] L_n (\theta_{kx*} + \Omega_{1*} \theta_{\varphi*}) \delta G_* + \\ & + \delta G(\theta_{kx} + \theta_\varphi \Omega_1) L_n [(\theta_{kx*} + \Omega_{1*} \theta_{\varphi*}) G_* - Q_* \Phi_*] R \} ds. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Если исследование динамики матрицы  $D_0$ , равной сумме

$$D_0 = \theta_{kx} + \theta_\varphi \Omega_1,$$

позволит сделать вывод об отсутствии неустойчивых полюсов у ее элементов, а также верно утверждение об устойчивости элементов псевдообратной матрицы  $D_0^\#$ , то необходимо ввести следующие обозначения:

$$\Gamma_* \Gamma = R; D_0 L_n D_{0*} = (\theta_{kx} + \theta_\varphi \Omega_1) L_n (\theta_{kx*} + \theta_{\varphi*} \Omega_{1*}); T_0 = T_{00} + T_{0+} + T_{0-} = \Gamma \Phi Q. \quad (4.64)$$

С учетом выражений (4.64) вариацию (4.63) следует преобразовать к форме

$$\delta I_0 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\Gamma_* (\Gamma G D_0 - T_0) L_n D_{0*} \delta G_* + \delta G D_0 L_n (D_{0*} G_* \Gamma_* - T_{0*}) \Gamma] ds,$$

условие тождественного равенства ее нулю на определенном классе матриц  $G$  определить так

$$IGD_0 = T_{00} + T_{0+},$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры наблюдателя в системе записать в виде

$$G = \Gamma^{-1}(T_{00} + T_{0+})D^{\#}, \quad (4.65)$$

где символ # - знак псевдообращения матриц.

Подстановка матрицы передаточных функций (4.65) в функционал (4.62) позволяет определить его минимальную величину  $I_{0min}$  и исследовать ее изменчивость известными процедурами анализа.

Следует отметить, что в общем случае псевдообращение матрицы процесс неоднозначный. Один из приемов удобного определения псевдообратной матрицы будет показан в примере синтеза оптимальной структуры наблюдателя детерминированной информации выходов объекта (пункт 4.4.4).

#### **4.4.2 Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя детерминированной выходной информации объекта с произволом в динамике**

При решении данной задачи полагается, что разработчику системы наблюдения уже известны оценки моделей динамики как самого объекта и действующего на него в интересующем режиме функционирования вектора детерминированных сигналов, так и оценки моделей динамики наблюдаемых векторов сигналов выходов измерителя в интересующем режиме работы объекта и используемого измерительного устройства. Структурная схема исследуемой системы наблюдения имеет вид аналогичный рис. 4.5. Как и ранее в задаче наблюдения (пункт 4.4.1) вектор сигналов управлением движением объекта  $u$  полагается нулевым, а вектор сигналов выхода объекта равным

$$x = P^{-1}\psi,$$

где  $\psi$  –  $n$ -мерный вектор детерминированных воздействий на объект управления. Как и в предыдущем пункте  $K$  – матрица передаточных функций измерителя

размерности  $\nu \times n$ , искомая матрица передаточных функций наблюдателя  $G$  размерности  $n \times \nu$ , матрица желаемых наблюдений вектора сигналов  $\Phi$  размерности  $n \times n$ . Кроме того на структурной схеме показаны  $\nu$ -мерные детерминированные векторы наблюдения  $y$  и помех измерения  $\varphi$ ,  $n$ -мерный вектор сигналов оценивания выхода объекта по результатам наблюдения  $\hat{x}$ ,  $n$ -мерные векторы желаемых сигналов наблюдения  $i$  и ошибок наблюдения  $\varepsilon$ .

Воспользовавшись представлением моделей векторов сигналов  $x$ ,  $y$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$  и преобразованиями (4.58)-(4.60), целесообразно определить вектор сигналов оценок выходов объекта в виде

$$\hat{x} = Gy = G(\theta_{kx} + \theta_{\varphi} \Omega_1) L_{n \times 1}, \quad (4.66)$$

а вектор сигналов ошибок наблюдения выходных сигналов объекта так

$$\varepsilon = \hat{x} - i = [G(\theta_{kx} - \theta_{\varphi} \Omega_1) - \Phi P^{-1} \theta_{\psi}] L_{n \times 1} = [G(\theta_{kx} - \theta_{\varphi} \Omega_1) - \Phi Q] L_{n \times 1}. \quad (4.67)$$

Если объект управления имеет произвол в динамике, а именно часть его полюсов неустойчива, т.е.

$$P^{-1} = P_+^{-1} + P_-^{-1},$$

где символ «+» указывает на устойчивую, а символ «-» - на неустойчивую части модели динамики объекта, то требуются существенные изменения в уравнениях (4.66), (4.67). В этом случае произведение матриц  $KP^{-1}$  удобно представить так:

$$KP^{-1} = KP_+^{-1} + B_*^{-1} N, \quad (4.68)$$

где  $B_*^{-1}$  – диагональная матрица, полученная в результате левостороннего удаления неустойчивых полюсов произведения  $KP_-^{-1}$

$$B_*^{-1} N = KP_-^{-1};$$

$N$  – дробно-рациональная матрица, элементы которой содержат только устойчивые полюсы. С учетом принятых обозначений вектор  $\hat{x}$  сигналов оценок наблюдения (4.66) примет вид

$$\hat{x} = \hat{x}_+ + \hat{x}_- = G[(\theta_{kx}^+ + \theta_{\varphi} \Omega_1)_+ + B_*^{-1} Q_{kx}], \quad (4.69)$$

где  $\theta_{kx}^+$ ,  $Q_{kx}$  – дробно-рациональные матрицы, которые найдены с помощью соотношений

$$\theta_{kx}^+ = KP_+^{-1}\theta_\psi; Q_{kx} = N\theta_\psi.$$

Целесообразно также представить матрицу  $G$  так:

$$G = FB_* + A, \quad (4.70)$$

где  $F$  – свободно варьируемая матрица передаточных функций,  $A$  – матрица нужным образом выбираемая при составлении вектора сигналов ошибок наблюдения  $\varepsilon$ .

Вектор желаемых сигналов наблюдения  $i$  следует записать в виде

$$i = \Phi x = \Phi K^\# (\theta_{kx}^+ + B_*^{-1} Q_{kx}) L_{n \times 1}. \quad (4.71)$$

С учетом выражений (4.69), (4.70) и (4.71) вектор сигналов ошибок наблюдения в рассматриваемой задаче синтеза будет иметь вид

$$\varepsilon = [FB_*(\theta_{kx}^+ + \theta_\varphi \Omega_1) + FQ_{kx} + A(\theta_{kx}^+ + \theta_\varphi \Omega_1) + AB_*^{-1}Q_{kx} - \Phi K^\# (\theta_{kx}^+ + B_*^{-1}Q_{kx})] L_{n \times 1}. \quad (4.72)$$

Если в выражении (4.72) свободно выбираемую матрицу  $A$  определить как

$$A = \Phi K^\#,$$

то вектор уже устойчивых сигналов ошибок наблюдения должен быть переписан так

$$\varepsilon = \{F[B_*(\theta_{kx}^+ + \theta_\varphi \Omega_1) + Q_{kx}] + \Phi K^\# \theta_\varphi \Omega_1\} L_{n \times 1}. \quad (4.73)$$

Очевидно, что функционал качества (точности) наблюдения выходных координат объекта в рассматриваемой задаче синтеза оптимальной структуры наблюдателя имеет вид

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(\varepsilon \varepsilon^* R) ds, \quad (4.74)$$

где  $R$  – выбираемая разработчиком положительно определенная весовая матрица размерности  $n \times n$ . После подстановки вектора (4.73) в функционал (4.74) последний можно переписать в виде

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [FB_*(\theta_{kx}^+ + \theta_\varphi \Omega_1) + FQ_{kx} + \Phi K^\# \theta_\varphi \Omega_1] L_n [(\theta_{kx}^+ + \Omega_{1*} \theta_{\varphi*}) BF_* + Q_{kx*} F_* + \Omega_{1*} \theta_{\varphi*} K_*^\# \Phi_*] R \} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ F [B_*(\theta_{kx}^+ + \theta_\varphi \Omega_1) + Q_{kx}] L_n [(\theta_{kx}^+ + \Omega_{1*} \theta_{\varphi*}) B + Q_{kx*}] F_* R + F [B_*(\theta_{kx}^+ + \theta_\varphi \Omega_1) + Q_{kx}] L_n \Omega_{1*} \theta_{\varphi*} \times \end{aligned}$$

$$\times K_*^\# \Phi_* R + \Phi K^\# \theta_\varphi \Omega_1 L_n \left[ (\theta_{kx}^+ + \Omega_{1*} \theta_{\varphi*}) B + Q_{kx*} \right] F_* R + \Phi K^\# \theta_\varphi \Omega_1 L_n \Omega_{1*} \theta_{\varphi*} K_*^\# \Phi_* R \Big] ds. \quad (4.75)$$

Варьируемую матрицу  $F$  целесообразно выбирать по методу Винера-Колмогорова, т.е. определить первую вариацию (4.75) и условие ее тождественного равенства нулю. Первая вариация функционала (4.75) равна

$$\begin{aligned} \delta I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \Big\{ R \Big\{ F \Big[ B_* (\theta_{kx}^+ + \theta_\varphi \Omega_1) + Q_{kx} \Big] L_n \Big[ (\theta_{kx}^+ + \Omega_{1*} \theta_{\varphi*}) B + Q_{kx*} \Big] + \Phi K^\# \theta_\varphi \Omega_1 L_n \Big[ (\theta_{kx}^+ + \Omega_{1*} \theta_{\varphi*}) B + \\ + Q_{kx*} \Big] \Big\} \delta F_* + \delta F \Big\{ \Big[ B_* (\theta_{kx}^+ + \theta_\varphi \Omega_1) + Q_{kx} \Big] L_n \Big[ (\theta_{kx}^+ + \Omega_{1*} \theta_{\varphi*}) B + Q_{kx*} \Big] F_* + \Big[ B_* (\theta_{kx}^+ + \theta_\varphi \Omega_1) + Q_{kx} \Big] L_n \Omega_{1*} \theta_{\varphi*} \times \\ \times K_*^\# \Phi_* \Big\} \Big\} ds. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Обозначим

$$\Gamma_* \Gamma = R; \quad DLD_* = \left[ B_* (\theta_{kx}^+ + \theta_\varphi \Omega_1) + Q_{kx} \right] L_n \left[ (\theta_{kx}^+ + \Omega_{1*} \theta_{\varphi*}) B + Q_{kx*} \right]. \quad (4.77)$$

В условиях, когда компоненты векторов  $\psi$  и  $\varphi$  являются ограниченными детерминированными функциями, а матрицы  $\Omega_1$ ,  $B_*$ ,  $\theta_{kx}^+$ ,  $Q_{kx}$  сформированы в соответствии с выражениями (4.58), (4.68) и (4.69), полюсы матрицы

$$V = B_* (\theta_{kx}^+ + \theta_\varphi \Omega_1) + Q_{kx}$$

являются устойчивыми. Если полюсы элементов псевдообратной матрицы  $V^\#$  также устойчивы, то можно выразить матрицы  $D$  и  $L$  из уравнения (4.77) в виде

$$D = B_* (\theta_{kx}^+ + \theta_\varphi \Omega_1) + Q_{kx}, \quad L = L_n. \quad (4.78)$$

Если при этом ввести следующее обозначение

$$T = T_0 + T_+ + T_- = \Gamma \Phi K^\# \theta_\varphi \Omega_1, \quad (4.79)$$

то вариацию (4.76) следует переписать так

$$\delta I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left[ \Gamma_* (\Gamma F D + T) L_n D_* \delta F_* + \delta F D L_n (\Gamma_* F_* D_* + T_*) \Gamma \right] ds.$$

Таким образом, условие тождественного равенства нулю первой вариации функционала (4.75) на классе устойчивых и физически реализуемых матриц  $F$  имеет вид

$$\Gamma F D = -(T_0 + T_+),$$

а алгоритм синтеза структуры оптимальной варьируемой матрицы сводится к нахождению произведения

$$F = -\Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^\# . \quad (4.80)$$

Подстановка структуры (4.80) и значения свободно варьируемой матрицы  $A$  в выражение (4.70) определит оптимальную матрицу передаточных функций наблюдателя  $G$  так

$$G = FB_* + \Phi K^\# . \quad (4.81)$$

Подстановка матрицы (4.80) в функционал (4.75) определяет его минимальное значение  $I_{min}$ . Разработчик системы с помощью уже известной процедуры может исследовать изменчивость величины  $I_{min}$  в реальных динамических условиях изменения интересующих параметров системы наблюдения и сигналов, действующих в ее трактах.

#### **4.4.3 Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя детерминированной выходной информации объекта с произволом в динамике при условии компенсации помех измерений**

Подлежащая решению задача синтеза мало чем отличается от, задачи, рассмотренной в пункте 4.4.2. Отличие задач состоит в том, что вместо вектора сигналов детерминированных помех измерений  $\varphi$  на входе наблюдателя действует близкий к нулю разностный вектор сигналов помех измерений  $\Delta$

$$\Delta = \varphi - \hat{\varphi} .$$

Процедура ввода в действие компенсационного вектора помех  $\hat{\varphi}$  не отличается от рассмотренной в пункте 4.3.2.

Структурная схема системы наблюдения вектора выходных детерминированных сигналов объекта с произволом в динамике при условии компенсации помех представлена на рисунке 4.6. На этой схеме сохранены все основные обозначения, введенные ранее. Пусть как и в предыдущей задаче матрица  $P^{-1}$  представлена в виде суммы

$$P^{-1} = P_+^{-1} + P_-^{-1} ,$$

т.е. объект имеет устойчивую  $P_+^{-1}$  и неустойчивую  $P_-^{-1}$  части, а произведение матриц  $KP^{-1}$  приведено к сумме

$$KP^{-1} = KP_+^{-1} + B_*^{-1}N. \quad (4.82)$$

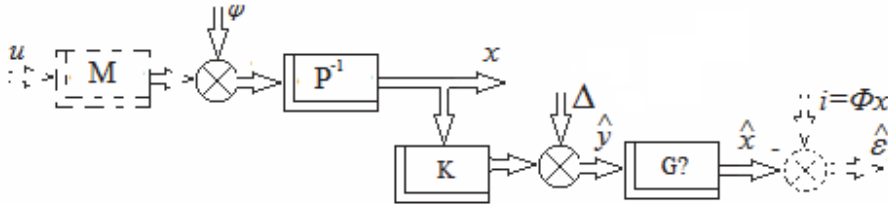


Рис. 4.6 Структурная схема наблюдения выходной детерминированной информации объекта с компенсацией помех измерений

Представив вектор  $\Delta$  как произведение двух матриц

$$\Delta = \theta_{\Delta} L_{v \times 1}$$

и учитывая обозначения (4.67) и (4.69), вектор оценок наблюдения выходных сигналов объекта  $\hat{x}$  (рис. 4.6) следует записать так

$$\hat{x} = G\hat{y} = G\left[\left(\theta_{kx}^+ + \theta_{\Delta} \Omega_1\right) + B_*^{-1}Q_{kx}\right]L_{n \times 1} = \hat{x}_+ + \hat{x}_-. \quad (4.83)$$

Вектор желаемых сигналов наблюдения  $i$ , как и ранее, следует определить выражением (4.71), а искомую структуру матрицы передаточных функций наблюдателя  $G$  формулой (4.71).

С учетом выражений (4.70), (4.71) и (4.83) вектор сигналов ошибок наблюдения  $\hat{\varepsilon}$  в задаче синтеза структуры  $G$  будет иметь вид

$$\hat{\varepsilon} = \hat{x} - i = \left[FB_*\left(\theta_{kx}^+ + \theta_{\Delta} \Omega_1\right) + FQ_{kx} + A\left(\theta_{kx}^+ + \theta_{\Delta} \Omega_1\right) + AB_*^{-1}Q_{kx} - \Phi K^{\#}\left(\theta_{kx}^+ + B_*^{-1}Q_{kx}\right)\right]L_{n \times 1}. \quad (4.84)$$

Если в выражении (4.84) свободно варьируемую матрицу  $A$  представить как произведение

$$A = \Phi K^{\#},$$

то вектор уже ограниченных сигналов ошибок наблюдения должен быть представлен в виде

$$\hat{\varepsilon} = \left\{F\left[B_*\left(\theta_{kx}^+ + \theta_{\Delta} \Omega_1\right) + Q_{kx}\right] + \Phi K^{\#}\theta_{\Delta} \Omega_1\right\}L_{n \times 1}. \quad (4.85)$$

Функционал качества наблюдения вектора выходных сигналов объекта в рассматриваемом случае имеет вид

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}(\widehat{\varepsilon}\widehat{\varepsilon}^*R)ds, \quad (4.86)$$

который аналогичен функционалу (4.74).

После подстановки вектора (4.85) в выражение (4.86) последнее становится таким

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left\| \left\{ F \left[ B_* (\theta_{kx}^+ + \theta_{\Delta} \Omega_1) + Q_{kx} \right] L_n \left[ (\theta_{kx^*}^+ + \Omega_{1^*} \theta_{\Delta^*}) B + Q_{kx^*} \right] F_* + F \left[ B_* (\theta_{kx}^+ + \theta_{\Delta} \Omega_1) + Q_{kx} \right] L_n \Omega_{1^*} \theta_{\Delta^*} K_*^{\#} \Phi_* + \right. \right. \\ \left. \left. + \Phi K^{\#} \theta_{\Delta} \Omega_1 L_n \left[ (\theta_{kx^*}^+ + \Omega_{1^*} \theta_{\Delta^*}) B + Q_{kx^*} \right] F_* + \Phi K^{\#} \theta_{\Delta} \Omega_1 L_n \Omega_{1^*} \theta_{\Delta^*} K_*^{\#} \Phi_* \right\} R \right\| ds. \quad (4.87)$$

Поскольку функционал (4.87) определен в частотной области, то для обоснования алгоритма поиска оптимальной матрицы варьируемых функций  $F$  целесообразно использовать метод Винера-Колмогорова. В соответствии с этим методом необходимо определить первую вариацию этого функционала по  $F$ , а затем сформулировать условие тождественного равенства нулю этой вариации на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $F$ .

Первая вариация функционала (4.87) имеет вид

$$\delta I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left\| R \left\{ F \left[ B_* (\theta_{kx}^+ + \theta_{\Delta} \Omega_1) + Q_{kx} \right] L_n \left[ (\theta_{kx^*}^+ + \Omega_{1^*} \theta_{\Delta^*}) B + Q_{kx^*} \right] + \Phi K^{\#} \theta_{\Delta} \Omega_1 L_n \left[ (\theta_{kx^*}^+ + \Omega_{1^*} \theta_{\Delta^*}) B + Q_{kx^*} \right] \right\} \times \right. \\ \left. \times \delta F_* + \delta F \left\{ \left[ B_* (\theta_{kx}^+ + \theta_{\Delta} \Omega_1) + Q_{kx} \right] L_n \left[ (\theta_{kx^*}^+ + \Omega_{1^*} \theta_{\Delta^*}) B + Q_{kx^*} \right] F_* + \left[ B_* (\theta_{kx}^+ + \theta_{\Delta} \Omega_1) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + Q_{kx} \right] L_n \Omega_{1^*} \theta_{\Delta^*} \Phi_* \right\} R \right\| ds. \quad (4.88)$$

В условиях, когда компоненты векторов  $\psi$  и  $\Delta$  являются ограниченными детерминированными функциями, а матрицы  $\Omega_1$ ,  $B_*$ ,  $\theta_{kx}^+$ ,  $Q_{kx}$  сформированы в соответствии с выражениями (4.58), (4.68) и (4.69), полюсы матрицы

$$V = B_* (\theta_{kx}^+ + \theta_{\varphi} \Omega_1) + Q_{kx}$$

являются устойчивыми. Если полюсы элементов псевдообратной матрицы  $V^{\#}$  также устойчивы, то целесообразно ввести следующие обозначения:

$$\Gamma_* \Gamma = R; D = V; T = T_0 + T_+ + T_- = \Gamma \Phi K^{\#} \theta_{\Delta} \Omega_1. \quad (4.89)$$

С учетом обозначений (4.89) вариация (4.88) будет иметь вид

$$\delta I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left[ \Gamma_* (IFD + T) L_n D_* \delta F_* + \delta F D L_n (D_* F_* \Gamma_* + T_*) \Gamma \right] ds,$$

условие тождественного равенства вариации (4.88) нулю, определенное на классе устойчивых и физически реализуемых варьируемых матриц, будет представлено уравнением:

$$IFD = -(T_0 + T_+),$$

а алгоритм синтеза оптимальной матрицы F должен быть выражен формулой

$$F = -\Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^\# . \quad (4.90)$$

Подстановка дробно-рациональной матрицы (4.90) в функционал (4.84) определяет его минимальное значение  $I_{min}$ , а в выражение (4.70) определяет следующий алгоритм синтеза оптимальной структуры наблюдателя:

$$G = FB_* + \Phi K^\# . \quad (4.91)$$

При необходимости разработчик системы наблюдения может исследовать изменчивость величины  $I_{min}$  при изменении интересующих его параметров создаваемой системы в возможных диапазонах.

#### 4.4.4 Пример синтеза оптимальной структуры наблюдателя вектора детерминированных выходных сигналов устойчивого объекта

Предположим, что заданы структурная схема устойчивого объекта управления с наблюдателем аналогичная рис. 4.5 и известны следующие модели динамики ее элементов: объект управления

$$P = \begin{bmatrix} T_1 s + 1 & 0 \\ 0 & T_2 s + 1 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1 s + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_2 s + 1} \end{bmatrix};$$

измерительное устройство

$$K = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\mu_1 s + 1} & \frac{k_2}{\mu_2 s + 1} \end{bmatrix};$$

изображение Лапласа вектора возмущений, действующего на входе объекта

$$\psi = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{\tau_1 s + 1} \\ \frac{a_2}{\tau_2 s + 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{\tau_1 s + 1} & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{\tau_2 s + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

изображение Лапласа помехи измерений, возникающей на выходе измерителей

$$\varphi = \frac{b}{\eta s + 1};$$

матрица желаемых преобразований выходных сигналов объекта

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

весовой коэффициент  $R=1$ .

Необходимо найти матрицу передаточных функций наблюдателя  $G$ , при которой показатель качества (4.61) достигает минимума.

Для решения задачи используем соотношения (4.58), (4.60), (4.64), (4.65). Подстановка исходных данных в уравнения (4.58), (4.60) позволяет найти вспомогательные матрицы  $\Omega_1$ ,  $\theta_{kx}$  и  $Q$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \theta_{kx} = \begin{bmatrix} \frac{k_1 a_1}{(\mu_1 s + 1)(T_1 s + 1)(\tau_1 s + 1)} & \frac{k_2 a_2}{(\mu_2 s + 1)(T_2 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{(T_1 s + 1)(\tau_1 s + 1)} & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{(T_2 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \end{bmatrix}.$$

Полученные таким образом матрицы позволяют записать следующее представление вектора  $D_0$  из уравнения (4.64):

$$D_0 = \begin{bmatrix} \frac{l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0}{(T_1 s + 1)(\tau_1 s + 1)(\mu_1 s + 1)(\eta s + 1)} & \frac{k_2 a_2}{(T_2 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\mu_2 s + 1)} \end{bmatrix}, \quad (4.92)$$

где

$$l_3 = b \tau_1 \mu_1 T_1; \quad l_2 = b(\tau_1 T_1 + \mu_1 T_1 + \mu_1 \tau_1); \quad l_1 = b(\tau_1 + \mu_1 + T_1) + a_1 k_1 \eta; \quad l_0 = b + a_1 k_1.$$

Отыскание псевдообратной матрицы  $D_0^\#$  представляет серьезные трудности и может оказаться лишь приближенным и неоднозначным. В данном примере предлагается следующий прием поиска  $D_0^\#$ . Очевидно, что псевдообратная матрица должна удовлетворять условию [30]

$$D_0 D_0^\# = 1,$$

поэтому ее структура должна иметь такой вид

$$D_0^\# = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix},$$

где  $\xi_1, \xi_2$  – полиномы соответствующей степени. Таким образом, нетрудно убедиться, что

$$\xi_1 = 0.5 \frac{(T_1 s + 1)(\tau_1 s + 1)(\mu_1 s + 1)(\eta s + 1)}{l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0}, \quad \xi_2 = 0.5 \frac{(T_2 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\mu_2 s + 1)}{k_2 a_2}. \quad (4.93)$$

Рассмотрение выражения (4.92) показало, что при положительных постоянных времени неустойчивые полюсы в элементах матрицы  $D_0$  отсутствуют. Элемент  $\xi_2$  матрицы  $D_0^\#$  также не имеет полюсов в правой полуплоскости комплексной переменной  $s$ . Воспользовавшись критерием устойчивости Гурвица получено следующее условие отсутствия неустойчивых полюсов у дробно-рациональной функции  $\xi_1$

$$[(\mu_1 + T_1 + \tau_1)b^2 \mu_1 + b^2 T_1 \tau_1](T_1 + \tau_1) + b \mu_1 k_1 a_1 (T_1 \eta + \tau_1 \eta - T_1 \tau_1) + b T_1 \tau_1 k_1 a_1 \eta > 0.$$

Подстановка полученных данных в формулу (4.64) позволила найти выражение для матрицы  $T_0$

$$T_0 = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{(T_1 s + 1)(\tau_1 s + 1)} & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{(T_2 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \end{bmatrix}. \quad (4.94)$$

Поскольку все полюсы элементов матрицы (4.94) находятся в левой полуплоскости комплексной переменной  $s$ , то, как известно из [9] результат сепарации равен

$$T_{00} + T_{0+} = T_0. \quad (4.95)$$

Учитывая полученные матрицы (4.92)-(4.95) и используя соотношение (4.65) решение поставленной задачи: матрицы передаточных функций наблюдателя представляется как

$$G = 0.5 \begin{bmatrix} \frac{a_1 (\mu_1 s + 1)(\eta s + 1)}{l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0} \\ \frac{(\mu_2 s + 1)}{k_2} \end{bmatrix}. \quad (4.96)$$

Подстановка матрицы передаточных функций (4.96) в функционал (4.62) позволяет определить его минимальную величину и исследовать ее изменение по известной методике.

## **ГЛАВА 5 СТРУКТУРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НАБЛЮДЕНИЯ ИНТЕРЕСУЮЩИХ ВЕКТОРОВ СЛУЧАЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИГНАЛОВ «ВХОД-ВЫХОД»**

Как известно, например [1, 7, 9, 11, 18] создание оптимальных стабилизируемых подвижных комплексов различного назначения должно базироваться на современных методах синтеза оптимальных управляемых систем. Но лишь наличия подходящего метода недостаточно для решения указанных задач. Необходима по возможности более полная информация о реальных динамических характеристиках, как самих объектов управления, так и о моделях динамики воздействий, сигналов и помех, имеющих место в исследуемом контуре управления в каждом интересующем режиме его работы. Кроме того требуется назначать желаемые выходы системы управления (стабилизации) и однозначно определиться с выбором критериев качества управления всей системой и отдельных её звеньев. Вся эта информация должна быть подготовлена к началу динамического проектирования [7] оптимальной системы. Знание моделей динамики реальных заданной части синтезируемой системы, сигналов и помех в интересующих её режимах работы является определяющим моментом эффективного проведения этапа динамического проектирования разрабатываемой системы. Более точным знаниям способствует систематическое накопление интересующей информации о моделях динамики системы и её элементов, получаемых в результате выполнения этапов идентификации моделей при проведении натурных, лабораторно-стендовых испытаний и исследований систем и их элементов. Идентификация моделей динамики многомерных подвижных объектов возможна при наличии соответствующих алгоритмов технологий идентификации, особенно структурной. Результаты идентификации существующих подвижных объектов в штатных режимах их функционирования могли бы составить исчерпывающую информацию для эффективного проведения

этапов динамического проектирования новых и оптимальной коррекции существующих систем управления или стабилизации.

### 5.1 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики устойчивого подвижного объекта по данным «идеальных» наблюдений интересующих векторов сигналов его входов и выходов и некоррелированности векторов управления и возмущения

Пусть структурная схема идентифицируемого объекта представлена на рисунке 5.1.

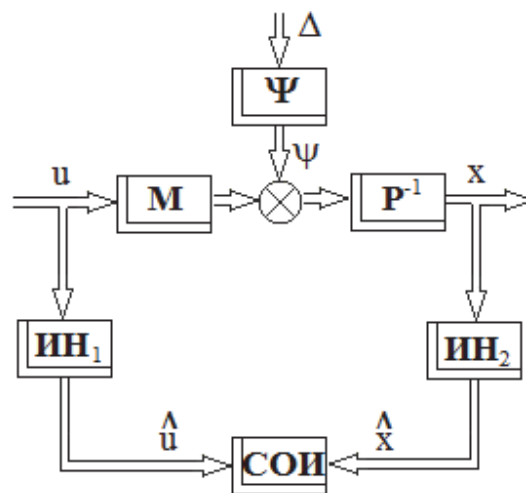


Рис.5.1 Структурная схема «идеально» наблюдаемого подвижного объекта

На рисунке приняты следующие обозначения. Как и ранее, движение объекта в режиме стабилизации пусть описывается системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, преобразованных по Фурье и имеющих вид

$$Px = Mu + \psi = Mu + \Psi\Delta, \quad (5.1)$$

где  $x$  – вектор выходных координат объекта размерности  $n \times 1$ ,  $u$  – вектор управлений размерности  $m \times 1$ ,  $\psi = \Psi\Delta$  – вектор неконтролируемых случайных возмущений на объект управления,  $\Psi$  – матрица размерности  $n \times n$ , формирующая вектор  $\psi$  из вектора «белых» шумов  $\Delta$ ; векторы  $\hat{u}$  и  $\hat{x}$  – оценки векторов  $u$  и  $x$

«идеальными» наблюдателями «ИН<sub>1</sub>» и «ИН<sub>2</sub>»; блок СОО – отображает систему обработки получаемой при «натурном» эксперименте информации; векторы  $u$  и  $\psi$  полагаются некоррелированными.

Учитывая выше сказанное и введя вектор  $f = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \Delta \end{pmatrix}$  уравнение (5.1)

возможно переписать в виде

$$x = (P^{-1}M, P^{-1}\Psi)f = \Phi f, \quad (5.2)$$

а вектор ошибок идентификации выхода объекта следует записать так

$$\varepsilon = x - \hat{x} = \Phi f - \hat{x}, \quad (5.3)$$

Функционалом качества структурной идентификации подвижного объекта в рассматриваемом варианте задачи следует считать такое выражение

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (S'_{\varepsilon\varepsilon} R) ds, \quad (5.4)$$

где транспонированная матрица спектральных плотностей вектора ошибки  $\varepsilon$  согласно теореме Винера-Хинчина будет иметь вид

$$S'_{\varepsilon\varepsilon} = \Phi S'_{ff} \Phi_* - \Phi S'_{\hat{x}f} - S'_{f\hat{x}} \Phi_* + S'_{\hat{x}\hat{x}}. \quad (5.5)$$

В функционале (5.4) матрица  $R$  весовая, положительно определенная; матрица  $S'_{ff}$  с учетом условия некоррелированности векторов  $u$  и  $\Delta$  будет

$$S'_{ff} = \begin{pmatrix} S'_{\hat{u}\hat{u}} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_n \end{pmatrix}; \quad (5.6)$$

матрицы  $S'_{\hat{x}f}$  и  $S'_{f\hat{x}}$  должны иметь вид

$$S'_{\hat{x}f} = \begin{pmatrix} S'_{\hat{x}\hat{u}} \\ S'_{\hat{x}\Delta} \end{pmatrix}, \quad S'_{f\hat{x}} = (S'_{\hat{u}\hat{x}}, S'_{\Delta\hat{x}}). \quad (5.7)$$

Подставив матрицу (5.5) в функционал (5.4) и учитывая выражение (5.6) и (5.7) необходимо переписать последний в виде

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [(\Phi S'_{ff} \Phi_* - \Phi S'_{\hat{x}f} - S'_{f\hat{x}} \Phi_* + S'_{\hat{x}\hat{x}}) R] ds. \quad (5.8)$$

Задачу идентификации структуры  $\Phi$  целесообразно решать методом Винера-Колмогорова. Согласно этому методу необходимо определить первую вариацию функционала (5.8) и условие тождественного равенства вариации нулю. Первая вариация функционала (5.8) будет иметь вид

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [R(\Phi S'_{ff} - S'_{f\hat{x}})\delta\Phi_* + \delta\Phi(S'_{ff}\Phi_* - S'_{\hat{x}f})R] ds \quad (5.9)$$

Необходимы следующие обозначения

$$\Gamma_*\Gamma = R; DD_* = S'_{ff}; T = T_0 + T_+ + T_- = \Gamma S'_{f\hat{x}} D_*^{-1}. \quad (5.10)$$

Учитывая обозначения (5.10) вариацию (5.9) нужно переписать так

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_*(\Gamma\Phi D - T)D_*\delta\Phi_* + \delta\Phi D(D_*\Phi_*\Gamma_* - T_*\Gamma)] ds,$$

условие тождественного равенства вариации (5.9) нулю будет

$$\Gamma\Phi D = (T_0 + T_+),$$

а алгоритм выбора структуры  $\Phi$  следует записать так

$$\hat{\Phi} = \Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^{-1}. \quad (5.11)$$

В выражениях (5.10), (5.11), как и ранее использованы символы операций факторизации и сепарации спектральных матриц.

Таким образом, поставленная в разделе задача структурной идентификации моделей динамики подвижного объекта по данным эксперимента решена полностью.

## **5.2 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики подвижного объекта по данным «улучшенных» наблюдений интересующих векторов сигналов «вход-выход»**

Пусть «улучшенные» наблюдения отличаются от наблюдений, описанных в разделе 5.1, лишь учетом измеряемых помех при наблюдении каждого из векторов интересующих сигналов. Это отличие отражено на рис. 5.2 вводом векторов оценок помех  $\hat{\varphi}_1$  и  $\hat{\varphi}_2$ .

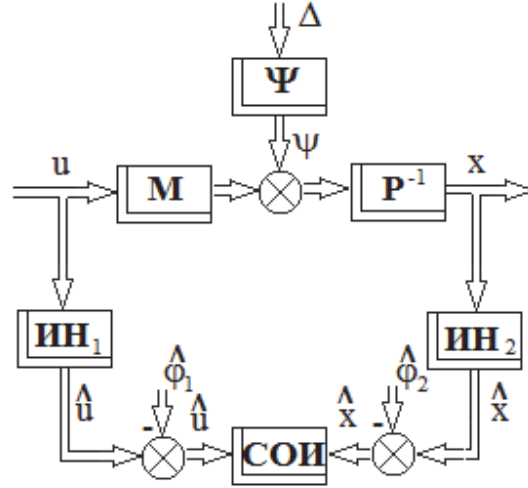


Рис. 5.2. структурная схема системы при «улучшенных» наблюдениях

Как и ранее, движение объекта описывается уравнениями

$$Px = Mu + \psi \text{ или } x = \Phi f = (P^{-1}M, P^{-1}\Psi_0)f, \quad (5.2)$$

где вектор  $f$  имеет вид  $f = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \Delta \end{pmatrix}$ .

Наблюдаемые в этом варианте задачи векторы сигналов «вход-выход» должны быть записаны так

$$\hat{u}_0 = \hat{u} - \hat{\varphi}_1, \hat{x}_0 = \hat{x} - \hat{\varphi}_2, \quad (5.12)$$

вектор  $f = \begin{pmatrix} \hat{u} - \hat{\varphi}_1 \\ \Delta \end{pmatrix}$ , а вектор сигналов ошибок наблюдения выходных координат объекта  $\varepsilon_0$  должен будет выглядеть так

$$\varepsilon_0 = x - \hat{x}_0 = \Phi \begin{pmatrix} \hat{u} - \hat{\varphi}_1 \\ \Delta \end{pmatrix} - (\hat{x} - \hat{\varphi}_2). \quad (5.13)$$

По теореме Винера-Хинчина транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\varepsilon_0$ , будет иметь вид

$$\begin{aligned} S'_{\varepsilon_0\varepsilon_0} = & \Phi \begin{bmatrix} S'_{\hat{u}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_1\hat{u}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_1} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_n \end{bmatrix} \Phi_* - \\ & - \Phi \begin{bmatrix} S'_{\hat{x}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_2\hat{u}} - S'_{\hat{x}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_1} \\ O_{n \times n} \end{bmatrix} - [S'_{\hat{u}\hat{x}} - S'_{\hat{\varphi}_1\hat{x}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_2} + S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_2}, O_{n \times n}] \Phi_* + \\ & + (S'_{\hat{x}\hat{x}} - S'_{\hat{\varphi}_2\hat{x}} - S'_{\hat{x}\hat{\varphi}_2} + S'_{\hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_2}); \end{aligned} \quad (5.14)$$

Функционал качества идентификации структуры  $\Phi$  в рассматриваемой задаче будет

$$e_0 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (S'_{\varepsilon_0 \varepsilon_0} R) ds .$$

После подстановки в этот функционал матрицы (5.14) последний примет вид

$$\begin{aligned} e_0 = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left( \left( \left\{ \Phi \begin{bmatrix} S'_{\hat{u}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_1 \hat{u}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_1 \hat{\varphi}_1} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_n \end{bmatrix} \Phi_* - \right. \right. \\ & - \Phi \begin{bmatrix} S'_{\hat{x}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_2 \hat{u}} - S'_{\hat{x}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_2 \hat{\varphi}_1} \\ O_{n \times n} \end{bmatrix} - [S'_{\hat{u}\hat{x}} - S'_{\hat{\varphi}_1 \hat{x}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_2} + S'_{\hat{\varphi}_1 \hat{\varphi}_2}, O_{n \times n}] \Phi_* + \\ & \left. \left. + (S'_{\hat{x}\hat{x}} - S'_{\hat{\varphi}_2 \hat{x}} - S'_{\hat{x}\hat{\varphi}_2} + S'_{\hat{\varphi}_2 \hat{\varphi}_2}) \right\} R \right) ds. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Решая задачу методом Винера-Колмогорова, вначале следует определить первую вариацию функционала (5.15), а затем условие тождественного равенства вариации нулю. Первую вариацию функционала (5.15), следует записать в виде

$$\begin{aligned} \delta e_0 = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left\{ R \left[ \Phi \begin{bmatrix} S'_{\hat{u}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_1 \hat{u}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_1 \hat{\varphi}_1} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_n \end{bmatrix} - (S'_{\hat{u}\hat{x}} - S'_{\hat{\varphi}_1 \hat{x}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_2} + S'_{\hat{\varphi}_1 \hat{\varphi}_2}, O_{n \times n}) \right] \delta \Phi_* + \delta \Phi \left[ \begin{bmatrix} S'_{\hat{u}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_1 \hat{u}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_1 \hat{\varphi}_1} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_n \end{bmatrix} \Phi_* - \right. \\ & \left. \left. \begin{bmatrix} S'_{\hat{x}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_2 \hat{u}} - S'_{\hat{x}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_2 \hat{\varphi}_1} \\ O_{n \times n} \end{bmatrix} \right] R \right\} ds \end{aligned} \quad (5.16)$$

Необходимо ввести следующее обозначение

$$\begin{aligned} \Gamma_* \Gamma = R; D_0 D_{0*} = & \begin{bmatrix} S'_{\hat{u}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_1 \hat{u}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_1 \hat{\varphi}_1} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_n \end{bmatrix}; \\ T_0 = T_{00} + T_{0+} + T_{0-} = & \Gamma (S'_{\hat{u}\hat{x}} - S'_{\hat{\varphi}_1 \hat{x}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_2} + S'_{\hat{\varphi}_1 \hat{\varphi}_2}, O_{n \times n}) D_{0*}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

С учетом обозначений (5.17) вариация (5.16) получит вид

$$\delta e_0 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_* (\Gamma \Phi D_0 - T_0) D_{0*} \delta \Phi_* + \delta \Phi D_0 (D_{0*} \Phi_* \Gamma_* - T_{0*}) \Gamma] ds,$$

а условие тождественного равенства вариации нулю следует записать так

$$\Gamma \Phi D_0 = T_{00} + T_{0+},$$

по которому нетрудно составить алгоритм идентификации матрицы передаточных функций  $\Phi$  в виде

$$\Phi = \Gamma^{-1}(T_{00} + T_{0+})D_0^{-1}.$$

Таким образом, поставленная выше задача идентификации моделей динамики подвижного объекта решена.

### 5.3 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики подвижного объекта при «идеальном» наблюдении векторов сигналов «вход-выход» и возмущения объекта

В этой задаче помимо векторов сигналов «вход-выход» объекта, как это представлено было в разделе 5.1, дополнительно измеряется и вектор сигналов случайных возмущений на объекте с помощью специального измерителя с матрицей передаточных функций  $K_0$  (рис. 5.3).

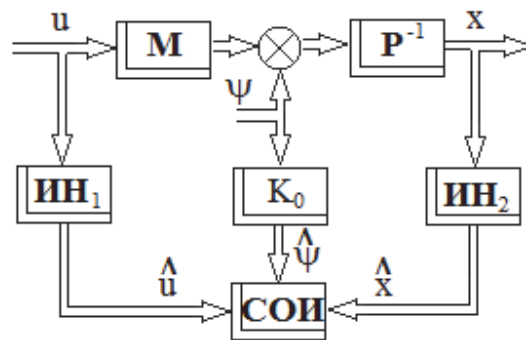


Рис. 5.3. Структурная схема систем идентификации моделей динамики объекта в рассматриваемой задаче.

Полагая, что измеряемый вектор сигналов возмущений равен

$$\psi = K_0^{-1}\hat{\psi},$$

уравнение движения стабилизируемого объекта следует записать так

$$x = P^{-1}Mu + P^{-1}\psi = P^{-1}Mu + K_0^{-1}\hat{\psi}. \quad (5.19)$$

Вводя обозначения

$$\Phi = (P^{-1}M, P^{-1}) \text{ и } \hat{f} = \begin{pmatrix} u \\ K_0^{-1}\hat{\psi} \end{pmatrix},$$

и считая измерения «идеальными» уравнение (5.19) можно переписать в виде

$$\hat{x} = \Phi \hat{f}, \quad (5.20)$$

где вектор  $\hat{f} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ K_0^{-1} \hat{\psi} \end{pmatrix}$ .

Вектор сигналов ошибок идентификации структуры  $\Phi$  можно записать таким образом

$$\varepsilon = \hat{x} - x = \Phi \hat{f} - \hat{x}, \quad (5.21)$$

а его транспонированную матрицу спектральных плотностей на основе теоремы Винера-Хинчина представить в виде

$$\begin{aligned} S'_{\varepsilon\varepsilon} = & \Phi \begin{pmatrix} S'_{\hat{u}\hat{u}} & S'_{\hat{\psi}\hat{u}} K_0^{-1} \\ K_0^{-1} S'_{\hat{u}\hat{\psi}} & K_0^{-1} S'_{\hat{\psi}\hat{\psi}} K_0^{-1} \end{pmatrix} \Phi_* - \Phi \begin{pmatrix} S'_{\hat{x}\hat{u}} \\ K_0^{-1} S'_{\hat{x}\hat{\psi}} \end{pmatrix} - \\ & - \left( S'_{\hat{u}\hat{x}}, S'_{\hat{\psi}\hat{x}} K_0^{-1} \right) \Phi_* + S'_{\hat{x}\hat{x}}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Функционал качества идентификации структуры  $\Phi$  будет иметь вид

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (S'_{\varepsilon\varepsilon} R) ds.$$

Подстановка в функционал матрицы (5.22) позволяет записать его в виде

$$\begin{aligned} e = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left\{ \left[ \Phi \begin{pmatrix} S'_{\hat{u}\hat{u}} & S'_{\hat{\psi}\hat{u}} K_0^{-1} \\ K_0^{-1} S'_{\hat{u}\hat{\psi}} & K_0^{-1} S'_{\hat{\psi}\hat{\psi}} K_0^{-1} \end{pmatrix} \Phi_* - \Phi \begin{pmatrix} S'_{\hat{x}\hat{u}} \\ K_0^{-1} S'_{\hat{x}\hat{\psi}} \end{pmatrix} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( S'_{\hat{u}\hat{x}}, S'_{\hat{\psi}\hat{x}} K_0^{-1} \right) \Phi_* + S'_{\hat{x}\hat{x}} \right] R \right\} ds. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Решая задачу методом Винера-Колмогорова, вначале следует определить первую вариацию функционала (5.23), а затем условие тождественного равенства её нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $\Phi$ .

Первая вариация функционала (5.23) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta e = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left\{ R \left[ \Phi \begin{pmatrix} S'_{\hat{u}\hat{u}} & S'_{\hat{\psi}\hat{u}} K_0^{-1} \\ K_0^{-1} S'_{\hat{u}\hat{\psi}} & K_0^{-1} S'_{\hat{\psi}\hat{\psi}} K_0^{-1} \end{pmatrix} - \left( S'_{\hat{u}\hat{x}}, S'_{\hat{\psi}\hat{x}} K_0^{-1} \right) \right] \delta \Phi_* + \right. \\ & \left. + \delta \Phi \left[ \begin{pmatrix} S'_{\hat{u}\hat{u}} & S'_{\hat{\psi}\hat{u}} K_0^{-1} \\ K_0^{-1} S'_{\hat{u}\hat{\psi}} & K_0^{-1} S'_{\hat{\psi}\hat{\psi}} K_0^{-1} \end{pmatrix} \Phi_* - \begin{pmatrix} S'_{\hat{x}\hat{u}} \\ K_0^{-1} S'_{\hat{x}\hat{\psi}} \end{pmatrix} \right] R \right\} ds \end{aligned} \quad (5.24)$$

Необходимо ввести следующие обозначения

$$\Gamma_* \Gamma = R; DD_* = \begin{pmatrix} S'_{\hat{u}\hat{u}} & S'_{\hat{\psi}\hat{u}} K_{0*}^{-1} \\ K_0^{-1} S'_{\hat{u}\hat{\psi}} & K_0^{-1} S'_{\hat{\psi}\hat{\psi}} K_{0*}^{-1} \end{pmatrix};$$

$$T = T_0 + T_+ + T_- = \Gamma \left( S'_{\hat{u}\hat{x}}, S'_{\hat{\psi}\hat{x}} K_{0*}^{-1} \right) D_*^{-1}. \quad (5.25)$$

С учетом обозначений (5.25) вариация (5.24) примет вид

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_* (\Gamma \Phi D - T) D_* \delta \Phi_* + \delta \Phi D (D_* \Phi_* \Gamma_* - T_*) \Gamma] ds,$$

условие тождественного равенства вариации нулю будет

$$\Gamma \Phi D = (T_0 + T_+),$$

а алгоритм идентификации структуры  $\Phi$  следует записать так

$$\Phi = \Gamma^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1}. \quad (5.26)$$

Таким образом, поставленная задача решена полностью.

#### **5.4 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики устойчивого линейного подвижного объекта при «неидеальном» измерении векторов сигналов «вход-выход» и случайных воздействиях**

Пусть по данным натуральных испытаний подвижного объекта известны сигналы наблюдения  $y_1$  и  $y_2$ , а также помехи измерений  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (рис. 5.4). На этом рисунке по аналогии с предыдущими разделами главы 5 показана структурная схема объекта в режиме стабилизации, а также блоки измерительных устройств векторов сигналов «вход-выход» с их матрицами передаточных функций  $K_1$  и  $K_2$ .

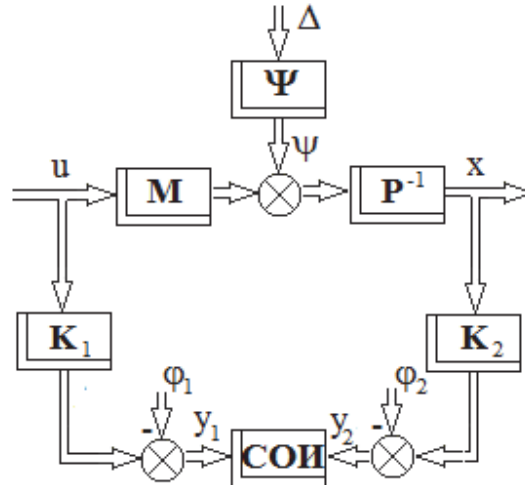


Рис. 5.4. Структурная схема идентификации объекта с измерительным комплексом

Как и ранее, движение объекта следует описать системой уравнений

$$Px = Mu + \psi = Mu + \Psi\Delta, \quad (5.1)$$

а после ввода обозначений

$$\Phi = (P^{-1}M, P^{-1}\Psi) \text{ и } f = \begin{pmatrix} u \\ \Delta \end{pmatrix},$$

систему уравнений (5.1) возможно переписать так

$$x = \Phi f. \quad (5.2)$$

Сигналы наблюдений  $y_1$  и  $y_2$  следует записать следующим образом

$$y_1 = K_1 u + \varphi_1; y_2 = K_2 x + \varphi_2. \quad (5.27)$$

Выражения (5.27) позволяют определить интересующие вектора сигналов управления и выхода объекта в виде

$$u = K_1^{-1}(y_1 - \varphi_1), x = K_2^{-1}(y_2 - \varphi_2), \quad (5.28)$$

а вектор  $\hat{f}$  переписать так

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} K_1^{-1}(y_1 - \varphi_1) \\ \Delta \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

С учётом выражений (5.2) и (5.28), вектор оценок выходных координат объекта можно записать следующим образом

$$\hat{x} = \Phi \begin{bmatrix} K_1^{-1}(y_1 - \varphi_1) \\ \Delta \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

а вектор сигналов ошибок в оценивании выхода объекта  $\varepsilon$ , будет иметь вид

$$\varepsilon = \hat{x} - x = \Phi \left[ \begin{array}{c} K_1^{-1}(y_1 - \varphi_1) \\ \Delta \end{array} \right] - K_2^{-1}(y_2 - \varphi_2). \quad (5.31)$$

Функционал качества идентификации структуры  $\Phi$  объекта представляется выражением

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (S'_{\varepsilon\varepsilon} R) ds,$$

где в соответствии с теоремой Винера-Хинчина и соотношениями (5.31) транспонированная матрица спектральных плотностей вектора (5.31) будет иметь вид

$$\begin{aligned} S'_{\varepsilon\varepsilon} = & \Phi \left[ \begin{array}{cc} K_1^{-1}(S'_{y_1 y_1} - S'_{\varphi_1 y_1} - S'_{y_1 \varphi_1} + S'_{\varphi_1 \varphi_1}) K_{1*}^{-1} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_n \end{array} \right] \Phi_* - \\ & - \Phi \left[ \begin{array}{c} K_1^{-1}(S'_{y_2 y_1} - S'_{\varphi_2 y_1} - S'_{y_2 \varphi_1} + S'_{\varphi_2 \varphi_1}) K_{2*}^{-1} \\ O_{n \times n} \end{array} \right] - [K_2^{-1}(S'_{y_1 y_2} - S'_{\varphi_1 y_2} - S'_{y_1 \varphi_2} + \\ & + S'_{\varphi_1 \varphi_2}) K_{1*}^{-1}, O_{n \times n}] \Phi_* + K_2^{-1}(S'_{y_2 y_2} - S'_{\varphi_2 y_2} - S'_{y_2 \varphi_2} + S'_{\varphi_2 \varphi_2}) K_{2*}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

После подстановки матрицы (5.32) в функционал качества идентификации последний запишется так

$$\begin{aligned} e = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left( \left( \left\{ \Phi \left[ \begin{array}{cc} K_1^{-1}(S'_{y_1 y_1} - S'_{\varphi_1 y_1} - S'_{y_1 \varphi_1} + S'_{\varphi_1 \varphi_1}) K_{1*}^{-1} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_n \end{array} \right] \Phi_* - \right. \right. \\ & - \Phi \left[ \begin{array}{c} K_1^{-1}(S'_{y_2 y_1} - S'_{\varphi_2 y_1} - S'_{y_2 \varphi_1} + S'_{\varphi_2 \varphi_1}) K_{2*}^{-1} \\ O_{n \times n} \end{array} \right] - [K_2^{-1}(S'_{y_1 y_2} - S'_{\varphi_1 y_2} - S'_{y_1 \varphi_2} + \\ & \left. \left. + S'_{\varphi_1 \varphi_2}) K_{1*}^{-1}, O_{n \times n}] \Phi_* + K_2^{-1}(S'_{y_2 y_2} - S'_{\varphi_2 y_2} - S'_{y_2 \varphi_2} + S'_{\varphi_2 \varphi_2}) K_{2*}^{-1} \right\} R \right) \right) ds. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Решая задачу идентификации структуры матрицы передаточных функций объекта идентификации  $\Phi$  методом Винера-Колмогорова, вначале необходимо определить первую вариацию функционала (5.33), а затем условие тождественного равенства вариации нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $\Phi$ .

Первая вариация функционала (5.33) имеет вид

$$\begin{aligned}
\delta e = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left( \left( R \left\{ \Phi \left[ \begin{array}{cc} K_1^{-1}(S'_{y_1 y_1} - S'_{\varphi_1 y_1} - S'_{y_1 \varphi_1} + S'_{\varphi_1 \varphi_1}) K_1^{-1} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_n \end{array} \right] - \right. \right. \\
& - \left. \left. [K_2^{-1}(S'_{y_1 y_2} - S'_{\varphi_1 y_2} - S'_{y_1 \varphi_2} + S'_{\varphi_1 \varphi_2}) K_1^{-1}, O_{n \times n}] \right\} \delta \Phi_* + \right. \\
& + \delta \Phi \left\{ \left[ \begin{array}{cc} K_1^{-1}(S'_{y_1 y_1} - S'_{\varphi_1 y_1} - S'_{y_1 \varphi_1} + S'_{\varphi_1 \varphi_1}) K_1^{-1} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_n \end{array} \right] \Phi_* - \right. \\
& \left. \left. - \left[ \begin{array}{cc} K_1^{-1}(S'_{y_2 y_1} - S'_{\varphi_2 y_1} - S'_{y_2 \varphi_1} + S'_{\varphi_2 \varphi_1}) K_2^{-1} & \\ O_{n \times n} & \end{array} \right] \right\} R \right) \right) ds. \quad (5.34)
\end{aligned}$$

Целесообразно ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned}
\Gamma_* \Gamma = R; D D_* = & \left[ \begin{array}{cc} K_1^{-1}(S'_{y_1 y_1} - S'_{\varphi_1 y_1} - S'_{y_1 \varphi_1} + S'_{\varphi_1 \varphi_1}) K_1^{-1} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_n \end{array} \right]; \\
T = T_0 + T_+ + T_- = & \Gamma [K_2^{-1}(S'_{y_1 y_2} - S'_{\varphi_1 y_2} - S'_{y_1 \varphi_2} + S'_{\varphi_1 \varphi_2}) K_1^{-1}, O_{n \times n}] D_*^{-1}. \quad (5.35)
\end{aligned}$$

С учётом обозначений (5.35) вариация (5.34) получит следующий вид

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_* (\Gamma \Phi D - T) D_* \delta \Phi_* + \delta \Phi D (D_* \Phi_* \Gamma_* - T_*) \Gamma] ds,$$

условие тождественного равенства вариации нулю будет таким

$$\Gamma \Phi D = (T_0 + T_+),$$

а алгоритм идентификации структуры  $\Phi$  по исходным данным задачи следует записать так

$$\Phi = \Gamma^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1}. \quad (5.36)$$

Таким образом, и эта новая задача идентификации структуры  $\Phi$  по исходным данным решена полностью.

### **5.5 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики подвижного линейного объекта по данным «неидеальных» измерений его векторов сигналов «вход-выход» и возмущения**

Структурная схема исследуемой в данной задаче системы идентификации несколько отличается от системы (рис. 5.4) предыдущего раздела и представлена на рисунке 5.5

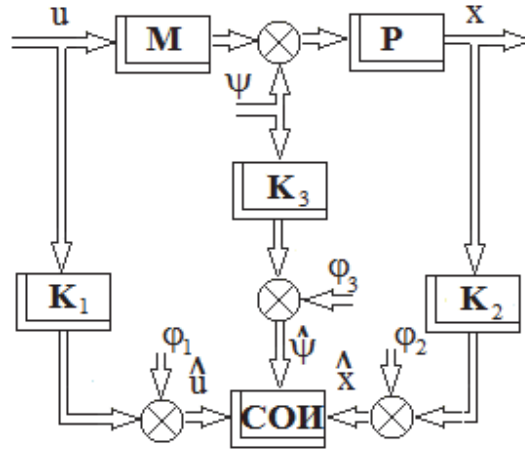


Рис.5.5. Структурная схема идентифицирующей системы объекта, измерения интересующих векторов сигналов которого неидеальны.

Здесь имеется тракт измерения устройством с матрицей передаточных функций  $K_3$  вектора случайных возмущений объекта в исследуемом режиме его функционирования. Все измерения интересующих векторов сигналов объекта сопровождаются случайными помехами ( $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ) с известными спектральными характеристиками.

Как и ранее, движение идентифицируемого объекта в интересующем режиме его работы описывается уравнением (5.1)

$$Px = Mu + \psi.$$

По результатам натурных испытаний известны оценки моделей динамики векторов сигналов  $u, x$  и  $\psi$ , а также помех их измерений  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . По результатам измерений, можно записать следующие выражения

$$\hat{u} = K_1 u + \hat{\varphi}_1, \hat{x} = K_2 x + \hat{\varphi}_2, \hat{\psi} = K_3 \psi + \hat{\varphi}_3, \quad (5.37)$$

из которых следуют выражения, непосредственно определяющие интересующие векторы сигналов объекта

$$u = K_1^{-1}(\hat{u} - \hat{\varphi}_1), x = K_2^{-1}(\hat{x} - \hat{\varphi}_2), \psi = K_3^{-1}(\hat{\psi} - \hat{\varphi}_3). \quad (5.38)$$

Как и ранее целесообразно записать следующее уравнение движения объекта, учитывая выражения (5.38)

$$\hat{\hat{x}} = \Phi \hat{f},$$

где  $\Phi = (P^{-1}M, P^{-1})$ ,  $\hat{f} = \begin{bmatrix} u \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1^{-1}(\hat{u} - \hat{\varphi}_1) \\ K_3^{-1}(\hat{\psi} - \hat{\varphi}_3) \end{bmatrix}$ ,

а вектор сигналов ошибок идентификации матрицы  $\Phi$ , используя первое из уравнений (5.37), можно представить так

$$\varepsilon = \hat{x} - x = \Phi \begin{bmatrix} K_1^{-1}(\hat{u} - \hat{\varphi}_1) \\ K_3^{-1}(\hat{\psi} - \hat{\varphi}_3) \end{bmatrix} - K_2^{-1}(\hat{x} - \hat{\varphi}_2). \quad (5.39)$$

Учитывая теорему Винера-Хинчина, транспонированную матрицу спектральных плотностей  $S'_{\varepsilon\varepsilon}$  следует записать в виде

$$\begin{aligned} S'_{\varepsilon\varepsilon} &= \\ &= \Phi \begin{bmatrix} K_1^{-1}(S'_{\hat{u}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_1\hat{u}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_1})K_{1*}^{-1} & K_1^{-1}(S'_{\hat{\psi}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_3\hat{u}} - S'_{\hat{\psi}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_1})K_{1*}^{-1} \\ K_3^{-1}(S'_{\hat{u}\hat{\psi}} - S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\psi}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_3} + S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_3})K_{1*}^{-1} & K_3^{-1}(S'_{\hat{\psi}\hat{\psi}} - S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\psi}} - S'_{\hat{\psi}\hat{\varphi}_3} + S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_3})K_{1*}^{-1} \end{bmatrix} \Phi_* - \\ &- \Phi \begin{bmatrix} K_1^{-1}(S'_{\hat{x}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_2\hat{u}} - S'_{\hat{x}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_1})K_{2*}^{-1} \\ K_3^{-1}(S'_{\hat{x}\hat{\psi}} - S'_{\hat{\varphi}_2\hat{\psi}} - S'_{\hat{x}\hat{\varphi}_3} + S'_{\hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_3})K_{2*}^{-1} \end{bmatrix} - \\ &- [K_2^{-1}(S'_{\hat{u}\hat{x}} - S'_{\hat{\varphi}_1\hat{x}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_2} + S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_2})K_{1*}^{-1}, \quad K_2^{-1}(S'_{\hat{\psi}\hat{x}} - S'_{\hat{\varphi}_3\hat{x}} - S'_{\hat{\psi}\hat{\varphi}_2} + S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_2})K_{3*}^{-1}] \Phi_* + \\ &+ K_2^{-1}(S'_{\hat{x}\hat{x}} - S'_{\hat{\varphi}_2\hat{x}} - S'_{\hat{x}\hat{\varphi}_2} + S'_{\hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_2})K_{2*}^{-1} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Как и в предыдущих задачах, функционал качества идентификации матрицы передаточных функций  $\Phi$  имеет вид

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(S'_{\varepsilon\varepsilon}R)ds,$$

Подстановкой матрицы (5.40) в функционал, возможно представить последний следующим выражением

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left( \left\{ \Phi \begin{bmatrix} K_1^{-1}(S'_{\hat{u}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_1\hat{u}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_1})K_{1*}^{-1} & K_1^{-1}(S'_{\hat{\psi}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_3\hat{u}} - S'_{\hat{\psi}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_1})K_{1*}^{-1} \\ K_3^{-1}(S'_{\hat{u}\hat{\psi}} - S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\psi}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_3} + S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_3})K_{1*}^{-1} & K_3^{-1}(S'_{\hat{\psi}\hat{\psi}} - S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\psi}} - S'_{\hat{\psi}\hat{\varphi}_3} + S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_3})K_{1*}^{-1} \end{bmatrix} \Phi_* - \right. \\ &- \Phi \begin{bmatrix} K_1^{-1}(S'_{\hat{x}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_2\hat{u}} - S'_{\hat{x}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_1})K_{2*}^{-1} \\ K_3^{-1}(S'_{\hat{x}\hat{\psi}} - S'_{\hat{\varphi}_2\hat{\psi}} - S'_{\hat{x}\hat{\varphi}_3} + S'_{\hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_3})K_{2*}^{-1} \end{bmatrix} - \\ &- [K_2^{-1}(S'_{\hat{u}\hat{x}} - S'_{\hat{\varphi}_1\hat{x}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_2} + S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_2})K_{1*}^{-1}, \quad K_2^{-1}(S'_{\hat{\psi}\hat{x}} - S'_{\hat{\varphi}_3\hat{x}} - S'_{\hat{\psi}\hat{\varphi}_2} + S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_2})K_{3*}^{-1}] \Phi_* + \\ &\left. + K_2^{-1}(S'_{\hat{x}\hat{x}} - S'_{\hat{\varphi}_2\hat{x}} - S'_{\hat{x}\hat{\varphi}_2} + S'_{\hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_2})K_{2*}^{-1} \right\} R) ds. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Решая задачу идентификации структуры  $\Phi$  методом Винера-Колмогорова, вначале следует определить первую вариацию функционала (5.41), а затем условие тождественного равенства этой вариации нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $\Phi$ .

Первая вариация функционала (5.41) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta e = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left( (R \left\{ \begin{array}{cc} K_1^{-1} (S'_{\hat{u}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_1\hat{u}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_1}) K_{1*}^{-1} & K_1^{-1} (S'_{\hat{\psi}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_3\hat{u}} - S'_{\hat{\psi}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_1}) K_{1*}^{-1} \\ K_3^{-1} (S'_{\hat{u}\hat{\psi}} - S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\psi}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_3} + S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_3}) K_{1*}^{-1} & K_3^{-1} (S'_{\hat{\psi}\hat{\psi}} - S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\psi}} - S'_{\hat{\psi}\hat{\varphi}_3} + S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_3}) K_{1*}^{-1} \end{array} \right\} - \right. \\ & - \left[ K_2^{-1} (S'_{\hat{u}\hat{x}} - S'_{\hat{\varphi}_1\hat{x}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_2} + S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_2}) K_{1*}^{-1}, \quad K_2^{-1} (S'_{\hat{\psi}\hat{x}} - S'_{\hat{\varphi}_3\hat{x}} - S'_{\hat{\psi}\hat{\varphi}_2} + S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_2}) K_{3*}^{-1} \right] \delta \Phi_* + \\ & + \delta \Phi \left\{ \begin{array}{cc} K_1^{-1} (S'_{\hat{u}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_1\hat{u}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_1}) K_{1*}^{-1} & K_1^{-1} (S'_{\hat{\psi}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_3\hat{u}} - S'_{\hat{\psi}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_1}) K_{1*}^{-1} \\ K_3^{-1} (S'_{\hat{u}\hat{\psi}} - S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\psi}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_3} + S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_3}) K_{1*}^{-1} & K_3^{-1} (S'_{\hat{\psi}\hat{\psi}} - S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\psi}} - S'_{\hat{\psi}\hat{\varphi}_3} + S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_3}) K_{1*}^{-1} \end{array} \right\} \Phi_* - \\ & - \left[ \begin{array}{c} K_1^{-1} (S'_{\hat{x}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_2\hat{u}} - S'_{\hat{x}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_1}) K_{2*}^{-1} \\ K_3^{-1} (S'_{\hat{x}\hat{\psi}} - S'_{\hat{\varphi}_2\hat{\psi}} - S'_{\hat{x}\hat{\varphi}_3} + S'_{\hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_3}) K_{2*}^{-1} \end{array} \right] \} R) ds. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Целесообразно ввести обозначения

$$\Gamma_* \Gamma = R;$$

$$\begin{aligned} DD_* &= \begin{bmatrix} K_1^{-1} (S'_{\hat{u}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_1\hat{u}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_1}) K_{1*}^{-1} & K_1^{-1} (S'_{\hat{\psi}\hat{u}} - S'_{\hat{\varphi}_3\hat{u}} - S'_{\hat{\psi}\hat{\varphi}_1} + S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_1}) K_{1*}^{-1} \\ K_3^{-1} (S'_{\hat{u}\hat{\psi}} - S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\psi}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_3} + S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_3}) K_{1*}^{-1} & K_3^{-1} (S'_{\hat{\psi}\hat{\psi}} - S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\psi}} - S'_{\hat{\psi}\hat{\varphi}_3} + S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_3}) K_{1*}^{-1} \end{bmatrix}; \\ T &= T_0 + T_+ + T_- = \Gamma \left[ K_2^{-1} (S'_{\hat{u}\hat{x}} - S'_{\hat{\varphi}_1\hat{x}} - S'_{\hat{u}\hat{\varphi}_2} + S'_{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_2}) K_{1*}^{-1}, K_2^{-1} (S'_{\hat{\psi}\hat{x}} - S'_{\hat{\varphi}_3\hat{x}} - S'_{\hat{\psi}\hat{\varphi}_2} + S'_{\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_2}) K_{3*}^{-1} \right] D_*^{-1}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

С учетом обозначений (5.43) вариация (5.42) представляется как

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\Gamma_* (\Gamma \Phi D - T) D_* \delta \Phi_* + \delta \Phi D (D_* \Phi_* \Gamma_* - T_*) \Gamma] ds,$$

условие равенства вариации (5.43) нулю на выбранном классе матриц  $\Phi$  будет

$$\Gamma \Phi D = (T_0 + T_+),$$

а алгоритм идентификации структуры  $\Phi$  в рассматриваемой задаче, будет таким

$$\Phi = \Gamma^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1}. \quad (5.44)$$

Очевидно, что подстановка в алгоритм (5.44) исходных данных рассматриваемой задачи, сразу же определит искомую структуру матрицы  $\Phi$  (5.38).

## 5.6 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики линейного подвижного объекта по данным оптимального наблюдения векторов сигналов «вход-выход»

Структурная схема исследуемой системы идентификации отличается от представленной на рисунке 5.4 схемы лишь вводом в измерительные тракты блоков оптимальных наблюдений, матрицы передаточных функций  $G_1$  и  $G_2$  подлежат определению на первом этапе решаемой задачи.

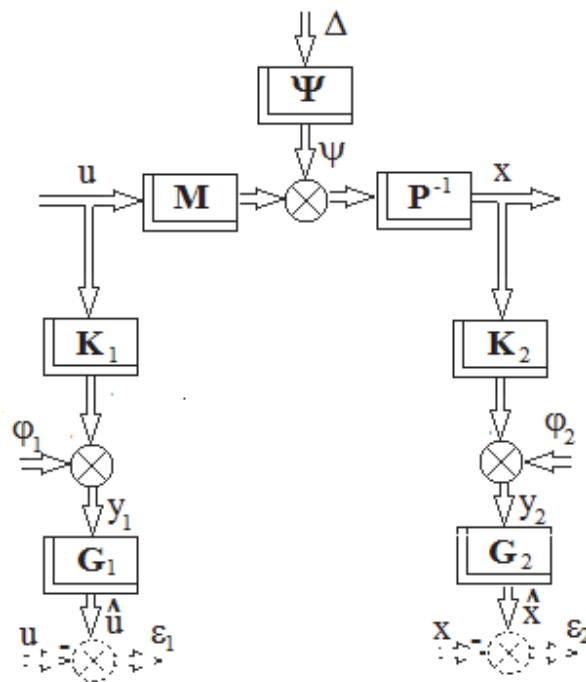


Рис. 5.6. Структурная схема системы идентификации моделей динамики объекта, рассматриваемого в задаче.

Полагается, что по результатам предшествующих полунатурных испытаний бортового измерительного комплекса рассматриваемого объекта известны оценки матриц передаточных функций  $K_1$  и  $K_2$ , статистические характеристики векторов наблюдений  $y_1$  и  $y_2$  измерительных трактов, а также векторов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  помех измерений.

Поставленную задачу целесообразно решать в два этапа. На первом этапе следует, по уже известной (см. главу 4) процедуре, синтезировать оптимальные

структуры  $G_1$  и  $G_2$  наблюдателей в каждом из измерительных трактов и получить наилучшие оценки статистических характеристик векторов сигналов «вход-выход» идентифицируемого подвижного объекта.

Второй этап поставленной выше задачи, должен быть посвящён непосредственно решению задачи идентификации моделей динамики объекта.

### 5.6.1 Первый этап решения задачи – синтез оптимальных структур $G_1$ и $G_2$ измерительных трактов входов и выходов объекта, предполагает следующие действия

Используя уже известные данные, вначале следует составить выражения для векторов наблюдения входов и выходов объекта в виде

$$y_1 = K_1 u + \varphi_1; \quad (5.45)$$

$$y_2 = K_2 x + \varphi_2; \quad (5.46)$$

по которым нетрудно оценить векторы сигналов входа и выхода объекта, таким образом

$$u = K_1^{-1}(y_1 - \varphi_1); \quad (5.47)$$

$$x = K_2^{-1}(y_2 - \varphi_2); \quad (5.48)$$

и выразить оценки указанных векторов после их наблюдения

$$\hat{u} = G_1 y_1; \quad (5.49)$$

$$\hat{x} = G_2 y_2. \quad (5.50)$$

Попарно используя выражения (5.47) и (5.49), (5.48) и (5.50), возможно составить выражения для векторов ошибок в определении векторов сигналов управления и выходных сигналов объекта в виде

$$\varepsilon_1 = \hat{u} - u = (G_1 - K_1^{-1})y_1 + K_1^{-1}\varphi_1, \quad \varepsilon_{1*} = y_{1*}(G_{1*} - K_{1*}^{-1}) + \varphi_{1*}K_{1*}^{-1} \quad (5.51)$$

$$\varepsilon_2 = \hat{x} - x = (G_2 - K_2^{-1})y_2 + K_2^{-1}\varphi_2, \quad \varepsilon_{2*} = y_{2*}(G_{2*} - K_{2*}^{-1}) + \varphi_{2*}K_{2*}^{-1} \quad (5.52)$$

С помощью теоремы Винера-Хинчина и выражений (5.51) и (5.52) возможно транспонированные матрицы спектральных плотностей  $S'_{\varepsilon_1 \varepsilon_1}$  и  $S'_{\varepsilon_2 \varepsilon_2}$  представить так

$$S'_{\varepsilon_1 \varepsilon_1} = (G_1 - K_1^{-1})S'_{y_1 y_1} (G_{1*} - K_{1*}^{-1}) + (G_1 - K_1^{-1})S'_{\varphi_1 y_1} K_{1*}^{-1} + K_1^{-1}S'_{y_1 \varphi_1} (G_{1*} - K_{1*}^{-1}) + K_1^{-1}S'_{\varphi_1 \varphi_1} K_{1*}^{-1}; \quad (5.53)$$

$$S'_{\varepsilon_2 \varepsilon_2} = (G_2 - K_2^{-1})S'_{y_2 y_2} (G_{2*} - K_{2*}^{-1}) + (G_2 - K_2^{-1})S'_{\varphi_2 y_2} K_{2*}^{-1} + K_2^{-1}S'_{y_2 \varphi_2} (G_{2*} - K_{2*}^{-1}) + K_2^{-1}S'_{\varphi_2 \varphi_2} K_{2*}^{-1}; \quad (5.54)$$

Функционалы качества наблюдения сигналов «вход-выход» объекта, имеют вид

$$e_1 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (S'_{\varepsilon_1 \varepsilon_1} R) ds; \quad (5.55)$$

$$e_2 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (S'_{\varepsilon_2 \varepsilon_2} R) ds, \quad (5.56)$$

После подстановки матриц (5.53) и (5.54) в функционалы (5.55) и (5.56) соответственно, последние становятся равны

$$e_1 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [(G_1 - K_1^{-1})S'_{y_1 y_1} (G_{1*} - K_{1*}^{-1}) + (G_1 - K_1^{-1})S'_{\varphi_1 y_1} K_{1*}^{-1} + K_1^{-1}S'_{y_1 \varphi_1} (G_{1*} - K_{1*}^{-1}) + K_1^{-1}S'_{\varphi_1 \varphi_1} K_{1*}^{-1}] R \} ds; \quad (5.57)$$

$$e_2 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [(G_2 - K_2^{-1})S'_{y_2 y_2} (G_{2*} - K_{2*}^{-1}) + (G_2 - K_2^{-1})S'_{\varphi_2 y_2} K_{2*}^{-1} + K_2^{-1}S'_{y_2 \varphi_2} (G_{2*} - K_{2*}^{-1}) + K_2^{-1}S'_{\varphi_2 \varphi_2} K_{2*}^{-1}] R \} ds. \quad (5.58)$$

Решая задачи синтеза оптимальных структур наблюдателей  $G_1$  и  $G_2$  методом Винера-Колмогорова, вначале необходимо определить первые вариации функционалов (5.57) и (5.58), а затем условия тождественного равенства нулю, каждой из них.

Первые вариации функционалов  $e_1$  и  $e_2$ , будут иметь виды

$$\delta e_1 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [R(G_1 S'_{y_1 y_1} + K_1^{-1} S'_{y_1 \varphi_1}) \delta G_{1*} + \delta G_1 (S'_{y_1 y_1} G_{1*} + S'_{\varphi_1 y_1} K_{1*}^{-1}) R] ds; \quad (5.59)$$

$$\delta e_2 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [R(G_2 S'_{y_2 y_2} + K_2^{-1} S'_{y_2 \varphi_2}) \delta G_{2*} + \delta G_2 (S'_{y_2 y_2} G_{2*} + S'_{\varphi_2 y_2} K_{2*}^{-1}) R] ds. \quad (5.60)$$

Необходимо ввести следующие обозначения

$$\Gamma_* \Gamma = R; D_1 D_{1*} = S'_{y_1 y_1}; T_1 = T_{10} + T_{1+} + T_{1-} = \Gamma K_1^{-1} S'_{y_1 \varphi_1} D_{1*}^{-1}; \quad (5.61)$$

$$\Gamma_* \Gamma = R; D_2 D_{2*} = S'_{y_2 y_2}; T_2 = T_{20} + T_{2+} + T_{2-} = \Gamma K_2^{-1} S'_{y_2 \varphi_2} D_{2*}^{-1}. \quad (5.62)$$

С учётом обозначений (5.61) и (5.62), вариации (5.59) и (5.60), можно записать так

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_* (\Gamma G_1 D_1 - T_1) D_{1*} \delta G_{1*} + \delta G_1 D_1 (D_{1*} G_{1*} \Gamma_* - T_{1*}) \Gamma] ds;$$

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_* (\Gamma G_2 D_2 - T_2) D_{2*} \delta G_{2*} + \delta G_2 D_2 (D_{2*} G_{2*} \Gamma_* - T_{2*}) \Gamma] ds,$$

условия их тождественного равенства нулю, следует записать в виде

$$\Gamma G_1 D_1 = (T_{10} + T_{1+}) \text{ и } \Gamma G_2 D_2 = (T_{20} + T_{2+}),$$

а алгоритм определения оптимальных структур наблюдателей  $\hat{G}_1$  и  $\hat{G}_2$  по исходным данным задач, будут такими

$$\hat{G}_1 = \Gamma^{-1} (T_{10} + T_{1+}) D_1^{-1}, \quad (5.63)$$

$$\hat{G}_2 = \Gamma^{-1} (T_{20} + T_{2+}) D_2^{-1}. \quad (5.64)$$

Выражения (5.63) и (5.64) – итог успешного завершения первого этапа рассматриваемой в разделе 5.6 задачи.

### 5.6.2 Второй этап решения поставленной задачи – непосредственно структурная идентификация моделей динамики линейного объекта по данным его полунатурных испытаний

Для успешного решения задачи идентификации, необходимо учитывая полученные выше структуры наблюдателей  $\hat{G}_1$  и  $\hat{G}_2$ , соответствующие спектральные характеристики оценок (5.49) и (5.50) векторов сигналов «вход-выход» и уравнение движения объекта вида

$$x = P^{-1} M u + P^{-1} \Psi \Delta, \quad (5.65)$$

ввести следующие обозначения

$$\Phi = (P^{-1} M, P^{-1} \Psi), \hat{f} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \Delta \end{pmatrix}, \quad (5.66)$$

и представить уравнение (5.65) таким образом

$$\hat{x} = \Phi \hat{f} \quad (5.67)$$

С учётом уравнения (5.67) и выражений (5.49) и (5.50), вектор сигналов ошибок идентификации моделей динамики объекта, следует записать так

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \hat{x} - x = \Phi \hat{f} - \hat{G}_2 y_2 = \Phi \begin{pmatrix} \hat{G}_1 y_1 \\ \Delta \end{pmatrix} - \hat{G}_2 y_2, \\ \varepsilon_{0*} &= (y_{1*} \hat{G}_{1*}, \Delta_*) \Phi_* - y_{2*} \hat{G}_{2*}, \end{aligned} \quad (5.68)$$

а с учётом теоремы Винера-Хинчина транспонированная матрица  $S'_{\varepsilon_0\varepsilon_0}$  представляется в следующем виде

$$S'_{\varepsilon_0\varepsilon_0} = \Phi \begin{pmatrix} \hat{G}_1 S'_{y_1 y_1} \hat{G}_{1*} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_n \end{pmatrix} \Phi_* - \Phi \begin{pmatrix} \hat{G}_1 S'_{y_2 y_1} \hat{G}_{2*} \\ O_{n \times n} \end{pmatrix} - (\hat{G}_2 S'_{y_1 y_2} \hat{G}_{1*}, O_{n \times n}) \Phi_* + \hat{G}_2 S'_{y_2 y_2} \hat{G}_{2*}. \quad (5.69)$$

Функционал качества идентификации моделей динамики объекта будет иметь вид

$$e_0 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (S'_{\varepsilon_0\varepsilon_0} R) ds,$$

а после подстановки матрицы (5.69) функционал следует переписать так

$$e_0 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left\{ \left[ \Phi \begin{pmatrix} \hat{G}_1 S'_{y_1 y_1} \hat{G}_{1*} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_n \end{pmatrix} \Phi_* - \Phi \begin{pmatrix} \hat{G}_1 S'_{y_2 y_1} \hat{G}_{2*} \\ O_{n \times n} \end{pmatrix} - \right. \right. \\ \left. \left. - (\hat{G}_2 S'_{y_1 y_2} \hat{G}_{1*}, O_{n \times n}) \Phi_* + \hat{G}_2 S'_{y_2 y_2} \hat{G}_{2*} \right] R \right\} ds \quad (5.70)$$

Решая задачу синтеза структуры  $\Phi$  методом Винера-Колмогорова, вначале следует определить первую вариацию функционала (5.70), затем определить условие её тождественного равенства нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $\Phi$ . Первая вариация функционала (5.70) будет иметь вид

$$\delta e_0 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left\{ R \left[ \Phi \begin{pmatrix} \hat{G}_1 S'_{y_1 y_1} \hat{G}_{1*} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_n \end{pmatrix} - (\hat{G}_2 S'_{y_1 y_2} \hat{G}_{1*}, O_{n \times n}) \right] \delta \Phi_* + \right. \\ \left. + \delta \Phi \left[ \begin{pmatrix} \hat{G}_1 S'_{y_1 y_1} \hat{G}_{1*} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_n \end{pmatrix} \Phi_* - \begin{pmatrix} \hat{G}_1 S'_{y_2 y_1} \hat{G}_{2*} \\ O_{n \times n} \end{pmatrix} \right] R \right\} ds. \quad (5.71)$$

Необходимо вести следующие обозначения

$$\Gamma_* \Gamma = R; D_0 D_{0*} = \begin{pmatrix} \hat{G}_1 S'_{y_1 y_1} \hat{G}_{1*} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_n \end{pmatrix}; \\ T_0 = T_{00} + T_{0+} + T_{0-} = \Gamma (\hat{G}_2 S'_{y_1 y_2} \hat{G}_{1*}, O_{n \times n}) D_{0*}^{-1}. \quad (5.72)$$

С учётом обозначений (5.72), вариацию (5.71) следует переписать как

$$\delta e_0 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_* (\Gamma \Phi D_0 - T_0) D_{0*} \delta \Phi_* + \delta \Phi D_0 (D_{0*} \Phi_* \Gamma_* - T_{0*}) \Gamma] ds,$$

условие равенства вариации (5.71) нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $\Phi$ , будет следующим

$$\Gamma\Phi D_0 = (T_{00} + T_{0+}),$$

а алгоритм синтеза по исходным данным задачи оптимальной структуры  $\Phi$  следует записать так

$$\Phi = \Gamma^{-1}(T_{00} + T_{0+})D_0^{-1}. \quad (5.73)$$

Таким образом, поставленная выше задача решена полностью.

### 5.7 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики линейного объекта по данным «улучшенных» оптимальных наблюдений векторов сигналов «вход-выход»

Для решения поставленной задачи, вначале следует составить структурную схему системы, которая может быть использована в рассматриваемом случае и представлена на рисунке 5.7. Эта структурная схема отличается от показанной на рисунке 5.6, лишь дополнительным вводом в схему извне предполагаемых оценок помех измерений  $\eta_1 = \varphi_1 - \hat{\varphi}_1$  и  $\eta_2 = \varphi_2 - \hat{\varphi}_2$  предполагаются известными.

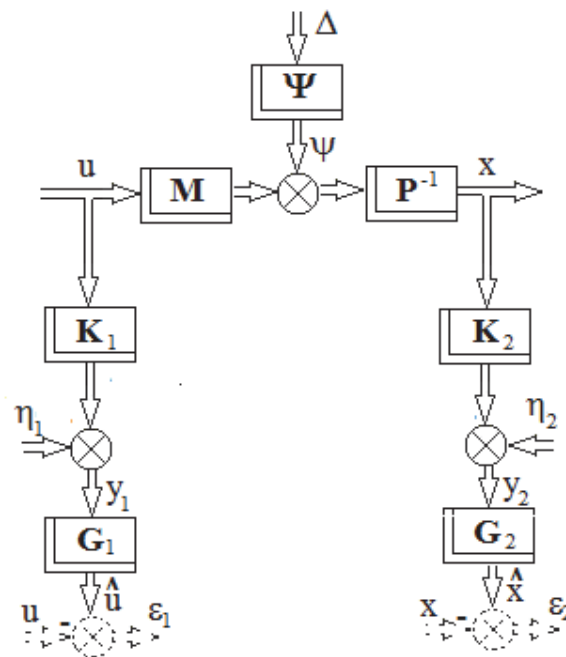


Рис. 5.7. Структурная схема системы идентификации моделей динамики объекта с «компенсацией» помех измерений.

Рассматриваемая задача, как и предшествующая, должна решаться в два этапа. Первый этап направлен на синтез оптимальных структур наблюдателей  $\hat{G}_1$  и  $\hat{G}_2$ , но уже при условии замены реальных помех измерений  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  их разностными аналогами  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , получаемыми путём частичной компенсации реальных помех.

При решении задач синтеза процедуры решения, описанные для первого этапа решения в разделе 5.6, полностью сохраняются. Необходимы лишь замены статистических характеристик помех  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  их аналогами – статистическими моделями сигналов  $\eta_1$  и  $\eta_2$  соответственно.

Как и в сопоставленном случае, здесь выражения (5.45) и (5.46), следует записать так

$$y_1 = K_1 u + \eta_1; \quad (5.74)$$

$$y_2 = K_2 x + \eta_2, \quad (5.75)$$

а выражения (5.47) и (5.48) в виде

$$u = K_1^{-1}(y_1 - \eta_1); \quad (5.76)$$

$$x = K_2^{-1}(y_2 - \eta_2), \quad (5.77)$$

а векторы  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  представить следующим образом

$$\varepsilon_1 = \hat{u} - u = (G_1 - K_1^{-1})y_1 + K_1^{-1}\eta_1, \quad \varepsilon_{1*} = y_{1*}(G_{1*} - K_{1*}^{-1}) + \eta_{1*}K_{1*}^{-1}; \quad (5.78)$$

$$\varepsilon_2 = \hat{x} - x = (G_2 - K_2^{-1})y_2 + K_2^{-1}\eta_2, \quad \varepsilon_{2*} = y_{2*}(G_{2*} - K_{2*}^{-1}) + \eta_{2*}K_{2*}^{-1}. \quad (5.79)$$

С учётом указанных выше изменений, транспонированные матрицы спектральных плотностей  $S'_{\varepsilon_1 \varepsilon_1}$  и  $S'_{\varepsilon_2 \varepsilon_2}$ , получает вид

$$S'_{\varepsilon_1 \varepsilon_1} = (G_1 - K_1^{-1})S'_{y_1 y_1} (G_{1*} - K_{1*}^{-1}) + (G_1 - K_1^{-1})S'_{\eta_1 y_1} K_{1*}^{-1} + K_{1*}^{-1}S'_{y_1 \eta_1} (G_{1*} - K_{1*}^{-1}) + K_{1*}^{-1}S'_{\eta_1 \eta_1} K_{1*}^{-1}, \quad (5.80)$$

$$S'_{\varepsilon_2 \varepsilon_2} = (G_2 - K_2^{-1})S'_{y_2 y_2} (G_{2*} - K_{2*}^{-1}) + (G_2 - K_2^{-1})S'_{\eta_2 y_2} K_{2*}^{-1} + K_{2*}^{-1}S'_{y_2 \eta_2} (G_{2*} - K_{2*}^{-1}) + K_{2*}^{-1}S'_{\eta_2 \eta_2} K_{2*}^{-1}. \quad (5.81)$$

Как и ранее, функционалы качества наблюдения сигналов «вход-выход», должны иметь вид, указанный в выражениях (5.55) и (5.56), а их первые вариации с учётом указанных выше изменений, будут такими

$$\delta e_1 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [R(G_1 S'_{y_1 y_1} + K_1^{-1} S'_{y_1 \eta_1}) \delta G_{1*} + \delta G_1 (S'_{y_1 y_1} G_{1*} + S'_{\eta_1 y_1} K_1^{-1}) R] ds; (5.82)$$

$$\delta e_2 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [R(G_2 S'_{y_2 y_2} + K_2^{-1} S'_{y_2 \eta_2}) \delta G_{2*} + \delta G_2 (S'_{y_2 y_2} G_{2*} + S'_{\eta_2 y_2} K_2^{-1}) R] ds. (5.83)$$

Обозначения (5.61) и (5.62) приобретут вид

$$\Gamma_* \Gamma = R; D_1 D_{1*} = S'_{y_1 y_1}; T_1 = T_{10} + T_{1+} + T_{1-} = \Gamma K_1^{-1} S'_{y_1 \eta_1} D_{1*}^{-1};$$

$$\Gamma_* \Gamma = R; D_2 D_{2*} = S'_{y_2 y_2}; T_2 = T_{20} + T_{2+} + T_{2-} = \Gamma K_2^{-1} S'_{y_2 \eta_2} D_{2*}^{-1},$$

а алгоритмы синтеза оптимальных структур  $G_1$  и  $G_2$ , следует записать по аналогии с уравнениями (5.63) и (5.64)

$$\hat{G}_1 = \Gamma^{-1} (T_{10} + T_{1+}) D_1^{-1}, \hat{G}_2 = \Gamma^{-1} (T_{20} + T_{2+}) D_2^{-1}.$$

Второй этап решения поставленной задачи, при учёте указанных выше изменений в обозначениях помех не отличен от описанного в разделе 5.6. Здесь сохранены выражения (5.65), (5.66), (5.67), (5.68) и (5.69). Как и ранее, функционал качества идентификации модели динамики  $\Phi$  объекта, может быть представлен выражением (5.70), первая вариации этого функционала выражением (5.71), а алгоритм определения искомой структуры  $\Phi$ , выражением (5.73), где использованы обозначения (5.72)

$$\Gamma_* \Gamma = R; D_0 D_{0*} = \begin{pmatrix} \hat{G}_1 S'_{y_1 y_1} \hat{G}_{1*} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_n \end{pmatrix};$$

$$T_0 = T_{00} + T_{0+} + T_{0-} = \Gamma (\hat{G}_2 S'_{y_1 y_2} \hat{G}_{1*}, O_{n \times n}) D_{0*}^{-1}.$$

Таким образом, поставленная в разделе 5.7 задача решена полностью. Учитывая проделанную коррекцию («компенсацию») реальных помех измерений, точностные результаты структурной идентификации моделей динамики  $\Phi$  в практических решаемых задачах, должны быть выше получаемых по процедурам, описанным в разделе 5.6.

## ГЛАВА 6 СТРУКТУРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ МНОГОМЕРНОГО ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА ПРИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В главе полагается, что движение линейного объекта подверженного действию детерминированных возмущений, в стабилизационных режимах функционирования можно описать системой обыкновенных дифференциальных уравнений, преобразованных по Фурье, вида

$$x = P^{-1}Mu + P^{-1}\Psi\delta,$$

где возмущение  $\psi = \Psi\delta$  представлено некой матрицей передаточных функций  $\Psi$  и  $n$ -мерным вектором единичных функций. Предполагается также, что после натурных испытаний исследуемого объекта становятся известными оценки матриц передаточных функций измерительных устройств  $K_1$  и  $K_2$ , установленных на входе и выходе исследуемого объекта соответственно, а также динамические характеристики векторов сигналов выходов измерителей  $y_1$  и  $y_2$  и помех измерений  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  векторов сигналов входов и выходов исследуемого объекта.

Здесь принят следующий вид записи динамических характеристик исследуемых известных детерминированных сигналов

$$y_1 = \theta_{y_1}L_{m \times 1}, y_2 = \theta_{y_2}L_{n \times 1}, \varphi_1 = \theta_{\varphi_1}L_{v_1 \times 1}, \varphi_2 = \theta_{\varphi_2}L_{v_2 \times 1}, \quad (6.1)$$

где  $\theta_{y_1}$ ,  $\theta_{y_2}$ ,  $\theta_{\varphi_1}$ ,  $\theta_{\varphi_2}$  - квадратные диагональные матрицы из составляющих соответствующих характеристик,  $L_{i \times 1}$  - единичные векторы столбцы указанных в индексах размерностей.

### **6.1 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики устойчивого объекта при детерминированных воздействиях и отсутствии наблюдателей векторов сигналов «вход-выход»**

Структурную схему объекта, исследуемого в данном разделе, можно представить рисунком 6.1. Здесь матрицы  $P$ ,  $M$  и  $\Psi$  до идентификации считаются

неизвестными, как и векторы сигналов управления  $u$  и выходных координат объекта  $x$ , которые имеют размерности  $m$  и  $n$  соответственно. Кроме того матрицы  $K_1$  и  $K_2$  полагаются квадратными.

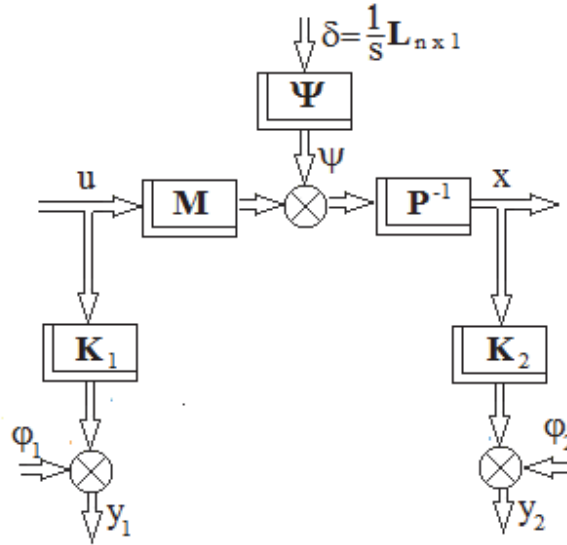


Рис. 6.1 Структурная схема объекта, модели динамики которого подлежат идентификации

Наблюдаемые сигналы  $y_1$  и  $y_2$  можно записать в следующем виде

$$y_1 = K_1 u + \varphi_1 \quad y_2 = K_2 x + \varphi_2, \quad (6.2)$$

а искомые векторы сигналов  $u$  и  $x$  таким образом

$$u = K_1^{-1}(y_1 - \varphi_1) \quad x = K_2^{-1}(y_2 - \varphi_2). \quad (6.3)$$

Введя обозначения

$$\Phi = (P^{-1}M, P^{-1}\Psi) \quad \text{и} \quad f = \begin{pmatrix} u \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_1^{-1}(y_1 - \varphi_1) \\ \frac{1}{s} L_{n \times 1} \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

и учитывая выражения (6.4), уравнение движения объекта следует записать так

$$\hat{x} = \Phi \hat{f}. \quad (6.5)$$

Учитывая обозначения (6.1) и выражения (6.4), вектор возмущений  $f$  можно записать в таком виде

$$f = \begin{bmatrix} K_1^{-1}(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1}) L_{m \times 1} \\ \frac{1}{s} L_{n \times 1} \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Полагая справедливыми выражения

$$L_{m \times 1} = B_1 L_{n \times 1}, \text{ где } B_1 = [E_m, O_{m \times (n-m)}]$$

$$L_{1 \times m} = B_2 L_{1 \times n}, \text{ где } B_2 = \begin{bmatrix} E_m \\ O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

вектор  $f$  должен быть должен быть изменен

$$f = \begin{bmatrix} K_1^{-1}(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} L_{n \times 1}, f_* = L_{1 \times n} \left[ B_2(\theta_{y_1^*} - \theta_{\varphi_1^*})K_{1^*}^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right], \quad (6.8)$$

а вектор сигналов ошибок идентификации перестроен так

$$\varepsilon = \hat{x} - x = \left\{ \Phi \begin{bmatrix} K_1^{-1}(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} - K_2^{-1}(\theta_{y_2} - \theta_{\varphi_2}) \right\} L_{n \times 1},$$

$$\varepsilon_* = L_{1 \times n} \left\{ \left[ B_2(\theta_{y_1^*} - \theta_{\varphi_1^*})K_{1^*}^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right] \Phi_* - (\theta_{y_2^*} - \theta_{\varphi_2^*})K_{2^*}^{-1} \right\}. \quad (6.9)$$

Функционал качества структурной идентификации исследуемого объекта при детерминированных воздействиях будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(\varepsilon \varepsilon_* R) ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left( \left( \left( \Phi \begin{bmatrix} K_1^{-1}(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} - K_2^{-1}(\theta_{y_2} - \theta_{\varphi_2}) \right) L_n \left\{ \left[ B_2(\theta_{y_1^*} - \theta_{\varphi_1^*})K_{1^*}^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right] \Phi_* - (\theta_{y_2^*} - \theta_{\varphi_2^*})K_{2^*}^{-1} \right\} R \right) \right) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left( \left( \left( \Phi \begin{bmatrix} K_1^{-1}(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} L_n \left[ B_2(\theta_{y_1^*} - \theta_{\varphi_1^*})K_{1^*}^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right] \Phi_* - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. - \Phi \begin{bmatrix} K_1^{-1}(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} L_n (\theta_{y_2^*} - \theta_{\varphi_2^*})K_{2^*}^{-1} - K_2^{-1}(\theta_{y_2} - \theta_{\varphi_2}) L_n \left[ B_2(\theta_{y_1^*} - \theta_{\varphi_1^*})K_{1^*}^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right] \Phi_* + K_2^{-1}(\theta_{y_2} - \theta_{\varphi_2}) L_n (\theta_{y_2^*} - \theta_{\varphi_2^*})K_{2^*}^{-1} \right\} R \right) \right) ds. \quad (6.10) \end{aligned}$$

Решая задачу идентификации матрицы передаточных функций  $\Phi$  методом Винера-Колмогорова, сначала необходимо определить первую вариацию

функционала (6.10), а затем условие ее тождественного равенства нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций. Первая вариация функционала (6.10) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{E} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left( \left( R \left\{ \Phi \begin{bmatrix} K_1^{-1}(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} L_n \left[ B_2(\theta_{y_1^*} - \theta_{\varphi_1^*})K_{1^*}^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right] - \right. \right. \right. \\
& - K_2^{-1}(\theta_{y_2} - \theta_{\varphi_2})L_n \left[ B_2(\theta_{y_1^*} - \theta_{\varphi_1^*})K_{1^*}^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right] \left. \left. \right\} \delta \Phi_* + \right. \\
& + \delta \Phi \left\{ \begin{bmatrix} K_1^{-1}(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} L_n \left[ B_2(\theta_{y_1^*} - \theta_{\varphi_1^*})K_{1^*}^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right] \Phi_* - \right. \\
& \left. \left. - \begin{bmatrix} K_1^{-1}(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} L_n(\theta_{y_2^*} - \theta_{\varphi_2^*})K_{2^*}^{-1} \right\} R \right) \right) ds. \tag{6.11}
\end{aligned}$$

В общем случае минимизация функционала (6.10) требует ввода следующих обозначений

$$\begin{aligned}
\Gamma_* \Gamma &= R D L_n D_* = \begin{bmatrix} K_1^{-1}(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} L_n \left[ B_2(\theta_{y_1^*} - \theta_{\varphi_1^*})K_{1^*}^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right] \\
T &= T_0 + T_+ + T_- = \Gamma K_2^{-1}(\theta_{y_2} - \theta_{\varphi_2})L_n \left[ B_2(\theta_{y_1^*} - \theta_{\varphi_1^*})K_{1^*}^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right] \times \\
&\quad \times \left[ B_2(\theta_{y_1^*} - \theta_{\varphi_1^*})K_{1^*}^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right]^\# (L_n)^{-1}, \tag{6.12}
\end{aligned}$$

где «#» – символ псевдообращения матрицы.

Если свойства динамических характеристик элементов исследуемой системы таковы, что результат факторизации матрицы  $D L_n D_*$  приводит к равенству матриц

$$D_* = \left[ B_2(\theta_{y_1^*} - \theta_{\varphi_1^*})K_{1^*}^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right], \tag{6.13}$$

то вариацию (6.11) следует переписать в виде

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left( \left( R \left\{ \Phi \begin{bmatrix} K_1^{-1}(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} - K_2^{-1}(\theta_{y_2} - \theta_{\varphi_2}) \right\} L_n \left[ B_2(\theta_{y_1^*} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \theta_{\varphi_1^*})K_{1^*}^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right] \delta \Phi_* + \delta \Phi \begin{bmatrix} K_1^{-1}(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} L_n \left\{ \left[ B_2(\theta_{y_1^*} - \theta_{\varphi_1^*})K_{1^*}^{-1}, \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{1}{-s}E_n \right] \Phi_* - (\theta_{y_2^*} - \theta_{\varphi_2^*})K_{2^*}^{-1} \right\} R \right) \right) ds, \end{aligned} \quad (6.14)$$

а обозначения (6.12) представить так

$$\begin{aligned} \Gamma_* \Gamma = R D L_n D_* = \begin{bmatrix} K_1^{-1}(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} L_n \left[ B_2(\theta_{y_1^*} - \theta_{\varphi_1^*})K_{1^*}^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right] \\ T = T_0 + T_+ + T_- = \Gamma K_2^{-1}(\theta_{y_2} - \theta_{\varphi_2}). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Вариант равенства матриц (6.13) частная, но более часто встречающаяся в практике ситуация, которую в дальнейшем следует считать базовой.

С учетом обозначений (6.12) вариации (6.11) и (6.14) обобщенно следует записать так

$$\delta \mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\Gamma_* (\Gamma \Phi D - T) L_n D_* \delta \Phi_* + \delta \Phi D L_n (D_* \Phi_* \Gamma_* - T_*) \Gamma] ds,$$

а условие равенства вариации  $\delta \mathcal{E}$  нулю представить как

$$\Gamma \Phi D = (T_0 + T_+),$$

тогда алгоритм идентификации матрицы  $\Phi$  примет вид уравнения

$$\Phi = \Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^{-1}. \quad (6.16)$$

Таким образом, поставленная в разделе задача решена.

## **6.2 Задача и алгоритм структурной идентификации моделей динамики устойчивого объекта при детерминированных воздействиях и оптимальном наблюдении векторов сигналов «вход-выход»**

Пусть движение идентифицируемого объекта (рис.6.2) возможно описать системой уравнений вида (5.1)

$$x = P^{-1}Mu + P^{-1}\Psi\delta.$$

Как и предыдущем разделе, после полунатурных испытаний объекта считаются известными квадратные матрицы передаточных функций измерителей  $K_1$  и  $K_2$ , а также динамические характеристики векторов детерминированных сигналов  $y_1$  и  $y_2$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Динамические характеристики указанных векторов сигналов будут записываться выражениями (6.1). На рисунке 6.2 указаны блоки наблюдателей векторов сигналов «вход-выход», оптимальные структуры  $G_1$  и  $G_2$  матриц передаточных функций наблюдателей должны быть определены на первом этапе решения поставленной задачи.

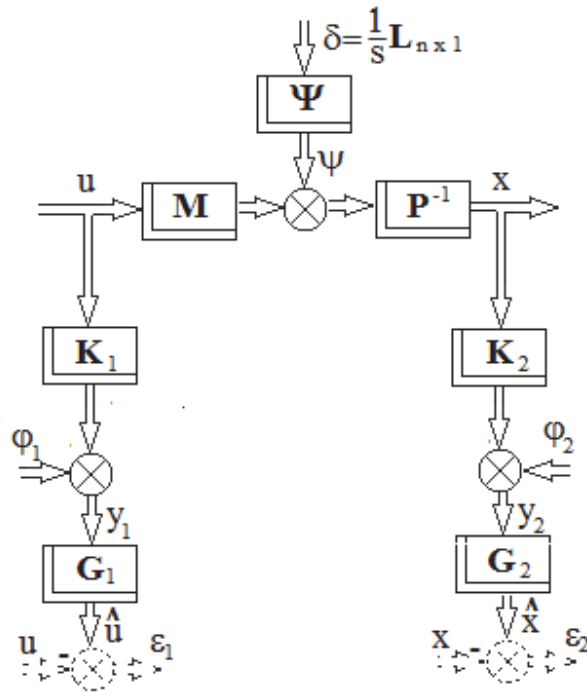


Рис.6.2 Структурная схема идентификации модели динамики объекта с наблюдением векторов сигналов «вход-выход»

Первый этап решения задачи начинается с синтеза оптимальной структуры матрицы передаточных функций  $G_1$  и отыскания оценки вектора сигналов входа  $\hat{u}$ .

В соответствии с выражениями (6.2) и (6.3) можно записать

$$y_1 = K_1 u + \varphi_1 u = K_1^{-1}(y_1 - \varphi_1),$$

второе, из которых с учетом выражений (6.1) примет вид

$$u = K_1^{-1}(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1})L_{m \times 1}. \quad (6.17)$$

Оценка  $\hat{u}$  вектора управлений и имеет вид

$$\hat{u} = G_1 y_1 = G_1 \theta_{y_1} L_{m \times 1}. \quad (6.18)$$

Учитывая выражения (6.17) и (6.18), вектор сигналов ошибок оценивая входа в объект следует записать так

$$\varepsilon_1 = \hat{u} - u = [G_1 \theta_{y_1} - K_1^{-1}(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1})]L_{m \times 1}. \quad (6.19)$$

Функционал качества наблюдения вектора управлений  $u$  с учетом выражения (6.19) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ [G_1 \theta_{y_1} L_m \theta_{y_1^*} G_{1^*} - G_1 \theta_{y_1} L_m (\theta_{y_1^*} - \theta_{\varphi_1^*}) K_{1^*}^{-1} - K_1^{-1} (\theta_{y_1} - \\ - \theta_{\varphi_1}) L_m \theta_{y_1^*} G_{1^*} + K_1^{-1} (\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1}) L_m (\theta_{y_1^*} - \theta_{\varphi_1^*}) K_{1^*}^{-1}] R_1 \} ds. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Первая вариация этого функционала, найденная при варьировании матрицей передаточных функций  $G_1$ , будет равна

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ R_1 [G_1 \theta_{y_1} - K_1^{-1} (\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1})] L_m \theta_{y_1^*} \delta G_{1^*} + \delta G_1 \theta_{y_1} L_m [\theta_{y_1^*} G_{1^*} - \\ - (\theta_{y_1^*} - \theta_{\varphi_1^*}) K_{1^*}^{-1}] R_1 \} ds, \end{aligned} \quad (6.21)$$

если все особенности матрицы  $\theta_{y_1}$  лежат только в левой полуплоскости комплексной переменной  $s = j\omega$ .

Целесообразны следующие обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_{1^*} \Gamma_1 = R_1 D_1 L_m D_{1^*} = \theta_{y_1} L_m \theta_{y_1^*} \\ T_1 = T_{10} + T_{1+} + T_{1-} = \Gamma_1 K_1^{-1} (\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1}). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Как уже известно из предыдущих глав, оптимальная структура  $G_1$  матрицы передаточных функций наблюдателя вектора сигналов управлений определится алгоритмом

$$G_1 = \Gamma_1^{-1} (T_{10} + T_{1+}) D_1^{-1}, \quad (6.23)$$

наилучшая по точности оценка вектора  $u$  будет следующей

$$\hat{u} = G_1 \theta_{y_1} L_{m \times 1}. \quad (6.24)$$

По аналогии с предыдущей задачей синтеза следует определить оптимальную структуру  $G_2$  матрицы передаточных функций наблюдателя выходных координат объекта. Как следует из рисунка 6.2 и выражения (6.3), вектор  $x$  должен иметь вид

$$x = K_2^{-1}(y_2 - \varphi_2) = K_2^{-1}(\theta_{y_2} - \theta_{\varphi_2})L_{n \times 1},$$

а вектор сигналов ошибок наблюдения вектора  $x$  будет таким

$$\varepsilon_2 = \hat{x} - x = [G_2\theta_{y_2} - K_2^{-1}(\theta_{y_2} - \theta_{\varphi_2})]L_{n \times 1}. \quad (6.25)$$

Функционал качества наблюдения вектора выходных сигналов с учетом выражения (6.25) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [G_2\theta_{y_2}L_n\theta_{y_2^*}G_{2^*} - G_2\theta_{y_2}L_n(\theta_{y_2^*} - \theta_{\varphi_2^*})K_{2^*}^{-1} - K_2^{-1}(\theta_{y_2} - \theta_{\varphi_2})L_n\theta_{y_2^*}G_{2^*} + \\ + K_2^{-1}(\theta_{y_2} - \theta_{\varphi_2})L_n(\theta_{y_2^*} - \theta_{\varphi_2^*})K_{2^*}^{-1}] R_2 \} ds. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Для решения задачи синтеза методом Винера-Колмогорова необходимо определить первую вариацию функционала (6.26)

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ R_2 [G_2\theta_{y_2} - K_2^{-1}(\theta_{y_2} - \theta_{\varphi_2})] L_n \theta_{y_2^*} \delta G_{2^*} + \delta G_2 \theta_{y_2} L_n [\theta_{y_2^*} G_{2^*} - \\ - (\theta_{y_2^*} - \theta_{\varphi_2^*}) K_{2^*}^{-1}] R_2 \} ds. \end{aligned} \quad (6.27)$$

В вариации (6.27) необходимы следующие обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_{2^*}\Gamma_2 = R_2 D_2 L_n D_{2^*} = \theta_{y_2} L_n \theta_{y_2^*} \\ T_2 = T_{20} + T_{2+} + T_{2-} = \Gamma_2 K_2^{-1} (\theta_{y_2} - \theta_{\varphi_2}). \end{aligned} \quad (6.28)$$

При определении вариации (6.27), как и ранее полагалось, что  $D_2 = \theta_{y_2}$ .

С учетом обозначений (6.28) вариацию (6.27) следует переписать в виде

$$\delta\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_{2^*} (\Gamma_2 G_2 D_2 - T_2) L_n D_{2^*} \delta G_{2^*} + \delta G_2 D_2 L_n (D_{2^*} G_{2^*} \Gamma_{2^*} - T_{2^*}) \Gamma_2] ds,$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры  $G_2$  матрицы передаточных функций оптимального наблюдателя выходных координат объекта определить выражением

$$G_2 = \Gamma_2^{-1} (T_{20} + T_{2+}) D_2^{-1}. \quad (6.29)$$

Вектор сигналов оценок выходных координат объекта будет иметь вид

$$\hat{x} = G_2 y_2 = G_2 \theta_{y_2} L_{n \times 1}. \quad (6.30)$$

Следующий этап решения поставленной выше задачи состоит в непосредственной структурной идентификации исследуемого подвижного объекта.

Введя обозначения типа (6.4), которые теперь имеют вид

$$\Phi = (P^{-1}M, P^{-1}\Psi) \text{ и } \hat{f} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 y_1 \\ \delta \end{pmatrix}, \quad (6.31)$$

можно представить вектор сигналов оценок выходных координат объекта таким образом

$$\hat{x} = G_2 \theta_{y_2} L_{n \times 1}. \quad (6.32)$$

Вектор сигналов выходных координат объекта будет иметь вид

$$x = \Phi \hat{f} = \Phi \begin{pmatrix} G_1 \theta_{y_1} B_1 \\ \frac{1}{s} E_n \end{pmatrix} L_{n \times 1}, \quad (6.33)$$

$$\text{где } B_1 = [E_m, O_{m \times (n-m)}], B_2 = B_{1*} = \begin{bmatrix} E_m \\ O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Вектор сигналов ошибок идентификации матрицы  $\Phi$  следует записать так

$$\varepsilon_0 = x - \hat{x} = \left[ \Phi \begin{pmatrix} G_1 \theta_{y_1} B_1 \\ \frac{1}{s} E_n \end{pmatrix} - G_2 \theta_{y_2} \right] L_{n \times 1}. \quad (6.34)$$

С учетом вектора (6.34) функционал качества идентификации матрицы передаточных функций  $\Phi$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_0 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left\{ \left[ \Phi \begin{pmatrix} G_1 \theta_{y_1} B_1 \\ \frac{1}{s} E_n \end{pmatrix} L_n \left( B_2 \theta_{y_1*} G_{1*}, \frac{1}{-s} E_n \right) \Phi_* - \Phi \begin{pmatrix} G_1 \theta_{y_1} B_1 \\ \frac{1}{s} E_n \end{pmatrix} L_n \theta_{y_2*} G_{2*} - \right. \right. \\ \left. \left. - G_2 \theta_{y_2} L_n \left( B_2 \theta_{y_1*} G_{1*}, \frac{1}{-s} E_n \right) \Phi_* + G_2 \theta_{y_2} L_n \theta_{y_2*} G_{2*} \right] R_0 \right\} ds. \quad (6.35) \end{aligned}$$

Поставленная задача решается методом Винера-Колмогорова. Первая вариация функционала (6.35) равна

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathcal{E}}_0 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left\{ R_0 \left[ \Phi \begin{pmatrix} G_1 \theta_{y_1} B_1 \\ \frac{1}{s} E_n \end{pmatrix} L_n \left( B_2 \theta_{y_1*} G_{1*}, \frac{1}{-s} E_n \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - G_2 \theta_{y_2} L_n \left( B_2 \theta_{y_1*} G_{1*}, \frac{1}{-s} E_n \right) \right] \delta \Phi_* + \delta \Phi \left[ \begin{pmatrix} G_1 \theta_{y_1} B_1 \\ \frac{1}{s} E_n \end{pmatrix} L_n \left( B_2 \theta_{y_1*} G_{1*}, \frac{1}{-s} E_n \right) \Phi_* - \right. \right. \\ \left. \left. - \begin{pmatrix} G_1 \theta_{y_1} B_1 \\ \frac{1}{s} E_n \end{pmatrix} L_n \theta_{y_2*} G_{2*} \right] R_0 \right\} ds. \quad (6.36) \end{aligned}$$

Пологая, что матрица  $\begin{pmatrix} G_1 \theta_{y_1} B_1 \\ \frac{1}{s} E_n \end{pmatrix}$  имеет особенности только в левой полуплоскости комплексного переменного  $s = j\omega$ , можно ввести следующие обозначения

$$\Gamma_{0*} \Gamma_0 = R_0 D_0 L_n D_{0*} = \begin{pmatrix} G_1 \theta_{y_1} B_1 \\ \frac{1}{s} E_n \end{pmatrix} L_n \left( B_2 \theta_{y_1*} G_{1*}, \frac{1}{-s} E_n \right)$$

$$T_0 = T_{00} + T_{0+} + T_{0-} = \Gamma_0 G_2 \theta_{y_2}. \quad (6.37)$$

С учетом обозначений (6.37) вариацию (6.36) можно переписать в виде

$$\delta \Xi_0 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\Gamma_{0*} (\Gamma_0 \Phi D_0 - T_0) L_n D_{0*} \delta \Phi_* + \\ + \delta \Phi D_0 L_n (D_{0*} \Phi_* \Gamma_{0*} - T_{0*}) \Gamma_0] ds,$$

а алгоритм идентификации по исходным данным задачи записать так

$$\Phi = \Gamma_0^{-1} (T_{00} + T_{0+}) D_0^{-1}. \quad (6.38)$$

### 6.3 Задача и алгоритм структурной идентификации неустойчивого объекта при детерминированных воздействиях и без оптимального наблюдения векторов сигналов «вход-выход»

Структура схемы системы идентификации объекта с произволом в динамике при детерминированных воздействиях представлена на рисунке 6.3. Здесь принято, что динамика объекта имеет устойчивые и неустойчивые полюсы и матрица  $P^{-1}$  в уравнениях движения объекта вида (5.1) может быть представлена выражением

$$P^{-1} = P_+^{-1} + P_-^{-1}, \quad (6.39)$$

где ее слагаемое  $P_+^{-1}$  определяет поведение устойчивой части объекта, а слагаемое  $P_-^{-1}$  – неустойчивой.

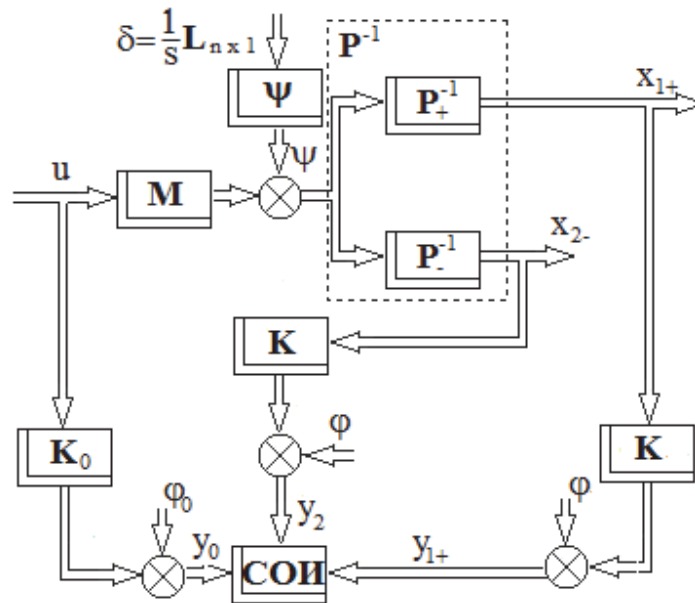


Рис.6.3 Структурная схема системы идентификации неустойчивого объекта

Разделение выходных координат объекта на устойчивую  $x_{1+}$  и неустойчивую  $x_{2-}$  части проводится по результатам экспериментальных исследований объекта. По результатам эксперимента становятся известными матрицы передаточных функций измерителей  $K_0$  и  $K$ , а также динамические характеристики векторов детерминированных сигналов наблюдения  $y_0, y_{1+}, y_{2-}$  и помех измерений  $\varphi_0$  и  $\varphi$ , причем векторы сигналов  $y_0, \varphi_0, y_{1+}, \varphi$  не имеют расходящихся трендов.

В соответствии со структурной схемой (рис.6.3) систему дифференциальных уравнений, преобразованную по Фурье для устойчивой части объекта следует записать так

$$x_{1+} = P_{1+}^{-1}Mu + P_{1+}^{-1}\Psi\delta, \quad (6.40)$$

а систему уравнений движения неустойчивой части объекта в виде

$$x_{2-} = P_{2-}^{-1}Mu + P_{2-}^{-1}\Psi\delta. \quad (6.41)$$

Введя обозначения

$$\Phi_1 = (P_{1+}^{-1}M, P_{1+}^{-1}\Psi), \Phi_2 = (P_{2-}^{-1}M, P_{2-}^{-1}\Psi) \text{ и } f = \begin{pmatrix} u \\ \delta \end{pmatrix}, \quad (6.42)$$

уравнения (6.40) и (6.41) можно записать так

$$x_{1+} = \Phi_1 f, x_{2-} = \Phi_2 f, \quad (6.43)$$

причем учитывая выражения (6.6) и (6.7), вектор  $f$  должен представляться в виде

$$f = \begin{bmatrix} K_0^{-1}(\theta_{y_0} - \theta_{\varphi_0})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} L_{n \times 1}. \quad (6.44)$$

Учитывая особенности неустойчивого канала объекта, можно записать вектор сигналов  $x_{2-}$  следующим образом

$$x_{2-} = K^{-1}(y_2 - \varphi) = K^{-1}(\theta_{y_{2+}} + \theta_{y_{2-}} - \theta_{\varphi})L_{n \times 1} \approx K^{-1}\theta_{y_{2-}}L_{n \times 1}. \quad (6.45)$$

Так как устойчивые части выражения (6.45) исчезают, вектор  $x_{1+}$  устойчивых сигналов выхода объекта может быть записан так

$$x_{1+} = K^{-1}(y_{1+} - \varphi) = K^{-1}(\theta_{y_{1+}} - \theta_{\varphi})L_{n \times 1}. \quad (6.46)$$

Теперь есть возможность приступить к структурной идентификации моделей динамики устойчивого и неустойчивого каналов объекта последовательно.

Учитывая первое из уравнений (6.43) и выражение (6.46) вектор сигналов ошибок идентификации структуры  $\Phi_1$  матрицы передаточных функций устойчивого канала объекта можно записать так

$$\varepsilon_{1+} = \hat{x}_{1+} - x_{1+} = \left\{ \Phi_1 \begin{bmatrix} K_0^{-1}(\theta_{y_0} - \theta_{\varphi_0})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} - K^{-1}(\theta_{y_{1+}} - \theta_{\varphi}) \right\} L_{n \times 1}. \quad (6.47)$$

С учетом вектора (6.47) функционал качества идентификации структуры  $\Phi_1$  представляется таким образом

$$\begin{aligned} \bar{E}_+ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (\varepsilon_{1+} \varepsilon_{1+}^* R^+) ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left( \left( \left( \Phi_1 \begin{bmatrix} K_0^{-1}(\theta_{y_0} - \theta_{\varphi_0})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} - \right. \right. \right. \\ &- K^{-1}(\theta_{y_{1+}} - \theta_{\varphi}) \left. \left. \left. \right) L_n \left\{ \left[ B_2(\theta_{y_{0*}} - \theta_{\varphi_{0*}})K_{0*}^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right] \Phi_{1*} - -(\theta_{y_{1+*}} - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. \theta_{\varphi_*})K_*^{-1} \right\} R^+ \right) \right) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left( \left( \left( \Phi_1 \begin{bmatrix} K_0^{-1}(\theta_{y_0} - \theta_{\varphi_0})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} L_n \left[ B_2(\theta_{y_{0*}} - \theta_{\varphi_{0*}})K_{0*}^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right] \Phi_{1*} - \right. \right. \right. \\ &- \Phi_1 \begin{bmatrix} K_0^{-1}(\theta_{y_0} - \theta_{\varphi_0})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} L_n (\theta_{y_{1+*}} - \theta_{\varphi_*})K_*^{-1} - K^{-1}(\theta_{y_{1+}} - \theta_{\varphi})L_n \left[ B_2(\theta_{y_{0*}} - \right. \right. \\ &\left. \left. \left. - \theta_{\varphi_{0*}})K_{0*}^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right] \Phi_{1*} + K^{-1}(\theta_{y_{1+}} - \theta_{\varphi})L_n (\theta_{y_{1+*}} - \theta_{\varphi_*})K_*^{-1} \right\} R^+ \right) \right) ds. \quad (6.48) \end{aligned}$$

Задача идентификации матрицы  $\Phi_1$  решается методом Винера-Колмогорова. Первая вариация функционала (6.48) будет такой

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_+ = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left( \left( R^+ \left\{ \Phi_1 \begin{bmatrix} K_0^{-1}(\theta_{y_0} - \theta_{\varphi_0})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} - K^{-1}(\theta_{y_{1+}} - \theta_{\varphi}) \right\} L_n \left[ B_2(\theta_{y_0^*} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \theta_{\varphi_0^*})K_0^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right] \delta \Phi_{1^*} + \delta \Phi_1 \begin{bmatrix} K_0^{-1}(\theta_{y_0} - \theta_{\varphi_0})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} L_n \left\{ \left[ B_2(\theta_{y_0^*} - \theta_{\varphi_0^*})K_0^{-1}, \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{1}{-s}E_n \right] \Phi_{1^*} - (\theta_{y_{1+}} - \theta_{\varphi})K^{-1} \right\} R^+ \right) \right) ds. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Необходимо ввести обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_{1^*}\Gamma_1 = R^+D_1L_nD_{1^*} = \begin{bmatrix} K_0^{-1}(\theta_{y_0} - \theta_{\varphi_0})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} L_n \left[ B_2(\theta_{y_0^*} - \theta_{\varphi_0^*})K_0^{-1}, \frac{1}{-s}E_n \right] \\ T_1 = T_{10} + T_{1+} + T_{1-} = \Gamma_1 K^{-1}(\theta_{y_{1+}} - \theta_{\varphi}). \end{aligned} \quad (6.50)$$

С учетом обозначений (6.50) вариацию (6.49) следует записать в виде

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_+ = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left[ \Gamma_{1^*}(\Gamma_1\Phi_1D_1 - T_1)L_nD_{1^*}\delta\Phi_{1^*} + \right. \\ \left. + \delta\Phi_1D_1L_n(D_{1^*}\Phi_{1^*}\Gamma_{1^*} - T_{1^*})\Gamma_1 \right] ds, \end{aligned}$$

а алгоритм идентификации по исходным данным задачи представляется выражением

$$\Phi_1 = \Gamma_1^{-1}(T_{10} + T_{1+})D_1^{-1}. \quad (6.51)$$

Процедура идентификации структуры  $\Phi_2$  существенно отлична от описанной выше.

Введенные ранее обозначения (6.42) можем записать следующим образом

$$\begin{aligned} \Phi_1 = (P_+^{-1}M, P_+^{-1}\Psi) = P_+^{-1}(M, \Psi) = P_+^{-1}\Phi_0, \\ , \Phi_2 = (P_-^{-1}M, P_-^{-1}\Psi) = P_-^{-1}(M, \Psi) = P_-^{-1}\Phi_0 \end{aligned} \quad (6.52)$$

Определив структуру  $\Phi_1$  с помощью уравнения (6.51), нетрудно уточнить и матрицу  $\Phi_0 = (M, \Psi)$  по выражению

$$\Phi_0 = P_+\Phi_1, \quad (6.53)$$

а зная матрицу  $\Phi_0$  (6.53), для определения структуры  $\Phi$  необходимо установить лишь матрицу  $P_2^{-1}$ . Определение матрицы  $P_2^{-1}$  можно выполнить следующим образом. Полагая, что вектор  $x_{2-}$  имеет только неустойчивые динамические характеристики своих компонентов и, воспользовавшись выражением (6.45), вектор оценок сигналов  $\hat{x}_{2-}$  можно записать как

$$\hat{x}_{2-} \approx K^{-1}\theta_{y_{2-}}L_{n \times 1},$$

а вектор выходных координат  $x_{2-}$  идентифицируемого объекта, учитывая выражения (6.52) и (6.53), представить в виде

$$x_{2-} = \Phi_2 f = P_2^{-1}\Phi_0 f = P_2^{-1}P_+ \Phi_1 \begin{bmatrix} K_0^{-1}(\theta_{y_0} - \theta_{\varphi_0})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} L_{n \times 1}. \quad (6.54)$$

Вектор сигналов ошибок идентификации структуры  $\Phi_2$ , учитывая выражения (6.45), (6.53) и (6.54), целесообразно представить так

$$\varepsilon_{2-} = x_{2-} - \hat{x}_{2-} = \left\{ P_2^{-1}P_+ \Phi_1 \begin{bmatrix} K_0^{-1}(\theta_{y_0} - \theta_{\varphi_0})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} - K^{-1}\theta_{y_{2-}} \right\} L_{n \times 1} \quad (6.55)$$

Полагая вектор сигналов  $\varepsilon_2$  стремящимся к нулю, можно записать равенство

$$P_2^{-1}(M, \Psi) \begin{bmatrix} K_0^{-1}(\theta_{y_0} - \theta_{\varphi_0})B_1 \\ \frac{1}{s}E_n \end{bmatrix} = K^{-1}\theta_{y_{2-}}, \quad (6.56)$$

где неизвестной матрицей будет  $P_2^{-1}$ .

Разрешив уравнение (6.56) относительно матрицы  $P_2^{-1}$ , возможно получить результат в виде

$$P_2^{-1} = K^{-1}\theta_{y_{2-}} \left[ MK_0^{-1}(\theta_{y_0} - \theta_{\varphi_0})B_1 + \frac{1}{s}\Psi \right]^{-1}, \quad (6.57)$$

а подставив, результат (6.57) в соответствующее выражение из (6.42), можно идентифицировать структуру матрицы передаточных функций неустойчивого канала объекта идентификации  $\Phi_2$

$$\Phi_2 = P_2^{-1}\Phi_0 = P_2^{-1}(M, \Psi).$$

Таким образом, задача идентификации объекта с произволом в динамике, поставленная в разделе 6.3, решена полностью.

## **ГЛАВА 7 ОСОБЕННОСТИ ПОСТАНОВКИ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ БАЗОВЫХ ЗАДАЧ СТРУКТУРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ОБЪЕКТОВ ПРИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ ПО ДАНЫМ НАТУРНЫХ И ПОЛУНАТУРНЫХ ИСПЫТАНИЙ ИЗДЕЛИЙ**

Как уже оговорено ранее, реальные подвижные объекты, как правило, функционируют при стохастических (совместных детерминированных и случайных воздействиях). Это обстоятельство требует от разработчиков систем управления или стабилизации подвижных объектов достаточно сложных особых подходов как к задачам идентификации моделей динамики объектов и воздействий на них, так и к задачам управления (стабилизации) исследуемых объектов.

### **7.1 Постановки и стадии решения задач структурной идентификации моделей динамики объектов при стохастических воздействиях на них**

Если исследуемый подвижный объект линеен, устойчив, многомерен и подвержен стохастическим возмущениям, то структурную схему такого объекта и его используемых бортовых средств измерений и наблюдения выходных координат объекта (по аналогии, например, с рисунком 6.1) можно представить как показано на рис. 7.1. Здесь индексами «~» помечены случайные стационарные сигналы входов-выходов объекта, а индексами «-» – детерминированные сигналы. Бортовой блок измерителей характеризуется известной матрицей передаточных функций  $K$ ; блоки оптимальных наблюдателей выходов объекта определены синтезируемыми матрицами передаточных функций  $\bar{\Phi}$  и  $\tilde{\Phi}$ ;  $\bar{\psi}$  и  $\tilde{\psi}$  - векторы возмущений, действующий на исследуемый объект и подлежащие определению;  $\bar{\varphi}$  и  $\tilde{\varphi}$  - векторы помех измерений векторов выходных координат объекта  $\bar{x}$  и  $\tilde{x}$ ;  $\bar{y}$  и  $\tilde{y}$  – векторы наблюдений соответствующих векторов выходов объекта.

Изменяемыми при испытаниях будут векторы сигналов управлений  $\bar{u}$  и  $\tilde{u}$ , векторы наблюдений  $\bar{y}$  и  $\tilde{y}$ , а также векторы помех  $\bar{\varphi}$  и  $\tilde{\varphi}$ . Векторами  $\hat{x}$  и  $\tilde{x}$  обозначены результаты наблюдений соответствующих векторов выходов объекта синтезированными оптимальными наблюдателями с передаточными функциями  $\bar{\Phi}$  и  $\tilde{\Phi}$ .

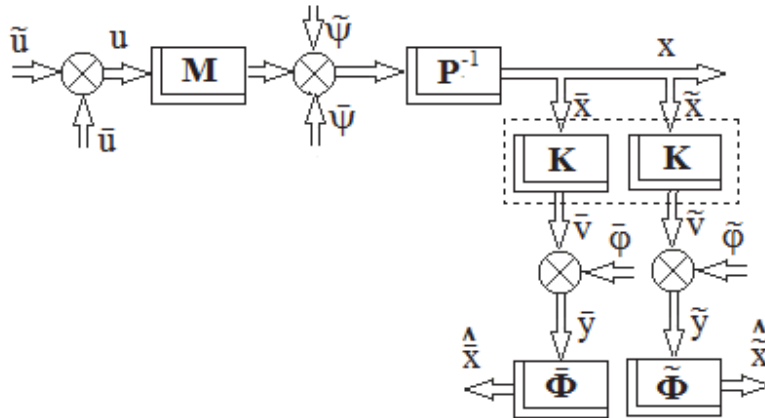


Рис. 7.1 Структурная схема идентифицируемого устойчивого объекта при стохастических воздействиях

Системы дифференциальных уравнений, преобразованные по Фурье и описывающие случайные и детерминированные движения исследуемого объекта, можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} P\tilde{x} &= M\tilde{u} + \tilde{\psi}; \\ P\bar{x} &= M\bar{u} + \bar{\psi} \end{aligned} \quad (7.1)$$

а измеряемые в процессах испытаний интересующие составляющие вектора выходных сигналов объекта имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= K^\#(\tilde{y} - \tilde{\varphi}); \\ \bar{x} &= K^\#(\bar{y} - \bar{\varphi}), \end{aligned} \quad (7.2)$$

здесь знак «#» - символ обращения прямоугольной матрицы. Учитывая выражения (7.1) и (7.2), возможно записать следующие выражения

$$\varepsilon = K^\#(\tilde{y} - \tilde{\varphi}) - (P^{-1}M)_\sim \tilde{u} - (P^{-1}\tilde{\psi})_\sim \Delta; \quad (7.3)$$

$$\bar{\varepsilon} = K^\#(\bar{y} - \bar{\varphi}) - (P^{-1}M)_- \bar{u} - (P^{-1}\bar{\psi})_-, \quad (7.4)$$

которые описывают возникающие рассогласования в трактах случайных и детерминированных сигналов. Здесь вектор « $\Delta$ » - вектор «белых» шумов.

Как и ранее детерминированные сигналы в системе изменений представляются так

$$\bar{y} = \theta_y L_{v \times 1}, \bar{\varphi} = \theta_\varphi L_{v \times 1}, \bar{u} = \theta_u L_{m \times 1}, \bar{\psi} = \theta_\psi L_{n \times 1},$$

где  $\theta_i$  - диагональные квадратные матрицы соответствующих сигналов, на главной диагонали которых стоят изображения Лапласа соответствующих сигналов;  $L_{i \times 1}$  - единичные векторы соответствующих разностей; размерности исследуемых матриц будут такими  $P_{n \times n}$ ,  $M_{n \times m}$ ,  $K_{n \times v}$ .

С учётом указанного описания тракта детерминированных сигналов выражение (7.4) можно представить так

$$\bar{\varepsilon} = \theta_\varepsilon L_{n \times 1} = [K^\#(\theta_y - \theta_\varphi) - (P^{-1}M)_- \theta_u - (P^{-1}\theta_\psi)_-] L_{n \times 1}$$

или 
$$\theta_\varepsilon = K^\#(\theta_y - \theta_\varphi) - (P^{-1}M)_- \theta_u - (P^{-1}\theta_\psi)_-. \quad (7.5)$$

Если исследуемый объект имеет произвол в динамике (неустойчивую часть), то в этом варианте структурная схема системы идентификации объекта будет иметь вид (рис. 7.2).

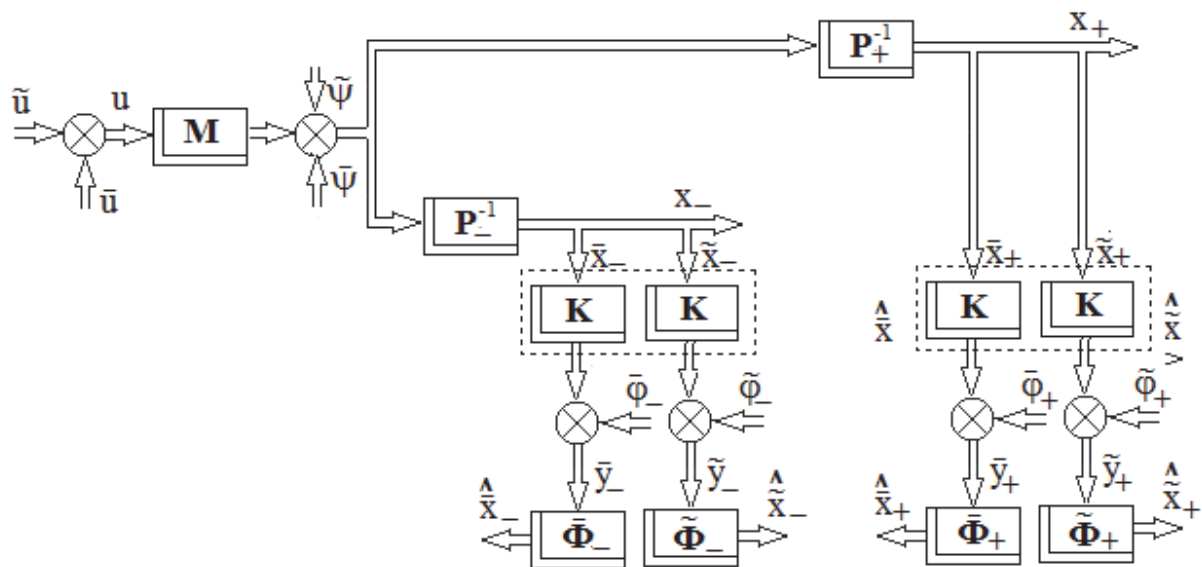


Рис. 7.2 Структурная схема системы идентификации моделей объекта с произволом в динамике при стохастических воздействиях

Отличительные особенности рис. 7.2 от рис. 7.1 лишь в появлении неустойчивого тракта, начинающегося с неустойчивой матрицы  $P^{-1}$ .

Поскольку в предыдущих главах смысл оптимальных структур  $\tilde{\Phi}(\bar{\Phi})$  в ситуациях, близких к показанным на рисунках 7.1 и 7.2, описан достаточно подробно, в этой главе будут рассмотрены лишь задачи, непосредственно описывающие структурную идентификацию моделей динамики объекта в вариантах отраженных на рисунках 7.1 и 7.2.

Для начала целесообразно провести структурную идентификацию устойчивой части линейного многомерного подвижного объекта при стохастических воздействиях, структурная схема системы идентификации моделей динамики которого показаны на рис. 7.3.

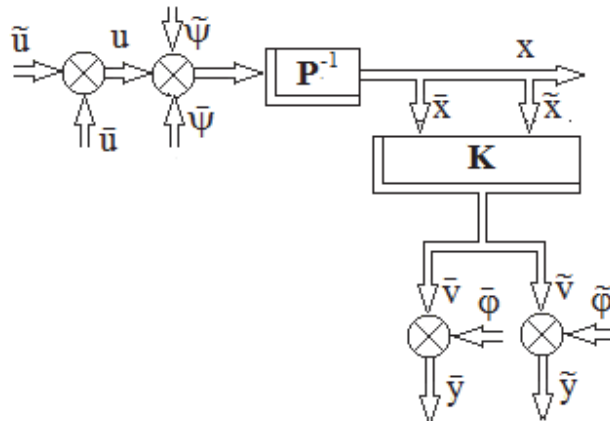


Рис. 7.3 Структурная схема системы идентификации моделей динамики устойчивого объекта при стохастических воздействиях

На рис. 7.3 сохранены выше введенные базовые обозначения.

## 7.2 Стадии и алгоритм решения задачи структурной идентификации линейного многомерного объекта при стохастических воздействиях

Полагается, что задача идентификации моделей динамики указанного объекта решается в две стадии. На первой стадии идентифицируется тракт

объекта, подверженного только детерминированным воздействиям, на второй стадии – тракт объекта, подверженного стационарным случайным возмущениям.

### 7.2.1 Стадия структурной идентификации моделей динамики тракта исследуемого объекта, подверженного только детерминированным воздействиям

Для решения поставленной задачи эксперимент, дающий данные для идентификации, следует повторить дважды при векторах сигналов управления  $\bar{u}_1 = \theta_{u_1} L_{m \times 1}$  и  $\bar{u}_2 = \theta_{u_2} L_{m \times 1}$ , неконтролируемое детерминированное возмущение  $\bar{\psi}$  полагается неизменным. По результатам испытаний возможно составить следующую систему уравнений движения детерминированного тракта исследуемого объекта

$$\begin{aligned} K^\#(\bar{y}_1 - \bar{\varphi}_1) &= (P^{-1}M)_- \bar{u}_1 + (P^{-1}\bar{\psi})_-, \\ K^\#(\bar{y}_2 - \bar{\varphi}_2) &= (P^{-1}M)_- \bar{u}_2 + (P^{-1}\bar{\psi})_-. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Решая систему уравнений (7.6) совместно и учитывая ранее принятые обозначения (7.5) следует записать такой результат

$$\begin{aligned} K^\#[(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1}) - (\theta_{y_2} - \theta_{\varphi_2})] L_{v \times 1} &= \\ = (P^{-1}M)_- (\theta_{u_1} - \theta_{u_2}) L_{m \times 1} &= (P^{-1}M)_- \theta_u L_{m \times 1}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Полагая величины размерностей векторов таковыми, что справедливы соотношения  $m \geq v$  и  $n \geq m$ , можно составить матрицу  $\theta_u$

$$\theta_u = \begin{bmatrix} Q_{u(v \times v)} & O_{v \times (m-v)} \\ O_{(m-v) \times v} & Q_{(m-v) \times (m-v)} \end{bmatrix}, \quad (7.8)$$

где матрицы  $Q_u$  и  $Q$  – диагональные.

С учётом матрицы (7.8) выражение (7.7) возможно записать так

$$(\widehat{P^{-1}M})_- \approx K^\#[(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1}) - (\theta_{y_2} - \theta_{\varphi_2})] Q_u^{-1}. \quad (7.9)$$

Если слагаемое  $(P^{-1}\bar{\psi})_-$  в выражении (7.6) переставить в виде

$$(P^{-1}\bar{\psi})_- = (P^{-1}\theta_\psi)_- L_{n \times 1},$$

то с учётом уже найденной матрицы (7.9) искомую матрицу  $(\widehat{P^{-1}\theta_\psi})_-$  следует записать так

$$(\widehat{P^{-1}\theta_\psi})_- = K^\#(\theta_{y_1} - \theta_{\varphi_1}) - (\widehat{P^{-1}M})_- \theta_{u_1}. \quad (7.10)$$

Таким образом, искомые модели динамики детерминированного тракта линейного объекта (рис. 7.3) найдены.

### 7.2.2 Стадия структурной идентификации моделей динамики тракта исследуемого линейного объекта, подверженного только случайным стационарным воздействиям

Для проведения стадии структурной идентификации моделей динамики тракта исследуемого линейного объекта, подверженного только случайным стационарным воздействиям также целесообразно использовать рисунок 7.3, согласно которому можно записать что

$$\tilde{x}_+ = K^\#(\tilde{y} - \tilde{\varphi}) \approx P^{-1}M\tilde{u} + P^{-1}\tilde{\psi} = \tilde{x}. \quad (7.11)$$

Полагается, что вектор сигналов случайных воздействий  $\tilde{\psi}$  является собой «белый» шум с интенсивностью  $A$

$$\tilde{\psi} = A\Delta, \quad (7.12)$$

вектор ошибок в определении выходных координат исследуемого тракта объекта целесообразно записать, используя выражения (7.11) и (7.12) таким образом

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{x} - \tilde{x}_+ = P^{-1}M\tilde{u} + P^{-1}A\Delta - K^\#(\tilde{y} - \tilde{\varphi}). \quad (7.13)$$

Транспонированную матрицу спектральных плотностей вектора  $\tilde{\varepsilon}$  следует записать в виде

$$S'_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}} = (P^{-1}M)_{\sim} S'_{\tilde{u}\tilde{u}} (P^{-1}M)_{\sim*} - (P^{-1}M)_{\sim} (S'_{\tilde{y}\tilde{u}} - S'_{\tilde{\varphi}\tilde{u}}) K^\#_{*} + \\ + (P^{-1}A)_{\sim} (P^{-1}A)_{\sim*} - K^\# (S'_{\tilde{u}\tilde{y}} - S'_{\tilde{u}\tilde{\varphi}}) (P^{-1}M)_{\sim*} + K^\# (S'_{\tilde{y}\tilde{y}} - S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}) K^\#_{*}, \quad (7.14)$$

где транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\tilde{x}_+$  будет такой

$$S'_{\tilde{x}_+\tilde{x}_+} = K^\# (S'_{\tilde{y}\tilde{y}} - S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}) K^\#_{*},$$

а транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\tilde{x}$  имеет вид

$$S'_{\tilde{x}\tilde{x}} = (P^{-1}M)_{\sim} S'_{\tilde{u}\tilde{u}} (P^{-1}M)_{\sim*} + (P^{-1}A)_{\sim} (P^{-1}A)_{\sim*}.$$

Пусть функционал качества идентификации структуры  $(P^{-1}M)$  можно представить так

$$e_{\tilde{\varepsilon}} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(S'_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}} R_{\sim}) ds. \quad (7.15)$$

Подстановка в функционал (7.15) матрицы (7.14) позволяет переписать последний в виде

$$\begin{aligned} e_{\tilde{\varepsilon}} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr\{[(P^{-1}M)_{\sim} S'_{\tilde{u}\tilde{u}} (P^{-1}M)_{\sim*} - (P^{-1}M)_{\sim} (S'_{\tilde{y}\tilde{u}} - S'_{\tilde{\varphi}\tilde{u}}) K_{*}^{\#} + \\ & + (P^{-1}A)_{\sim} (P^{-1}A)_{\sim*} - K^{\#} (S'_{\tilde{u}\tilde{y}} - S'_{\tilde{u}\tilde{\varphi}}) (P^{-1}M)_{\sim*} + \\ & + K^{\#} (S'_{\tilde{y}\tilde{y}} - S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}) K_{*}^{\#}] R_{\sim}\} ds \end{aligned} \quad (7.16)$$

Первую вариацию функционала (7.16) следует записать так

$$\begin{aligned} \delta e_{\tilde{\varepsilon}} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr\{R_{\sim} [(P^{-1}M)_{\sim} S'_{\tilde{u}\tilde{u}} - K^{\#} (S'_{\tilde{u}\tilde{y}} - S'_{\tilde{u}\tilde{\varphi}})] \delta (P^{-1}M)_{\sim*} + \\ & + \delta (P^{-1}M)_{\sim} [S'_{\tilde{u}\tilde{u}} (P^{-1}M)_{\sim*} - (S'_{\tilde{y}\tilde{u}} - S'_{\tilde{\varphi}\tilde{u}}) K_{*}^{\#}] R_{\sim}\} ds. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Целесообразно ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sim*} \Gamma_{\sim} &= R_{\sim}; D_{\sim} D_{\sim*} = S'_{\tilde{u}\tilde{u}}; \\ T_{\sim} &= T_{\sim 0} + T_{\sim+} + T_{\sim-} = \Gamma_{\sim*}^{-1} K^{\#} (S'_{\tilde{u}\tilde{y}} - S'_{\tilde{u}\tilde{\varphi}}) D_{\sim*}^{-1}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

С учётом обозначений (7.18) вариацию (7.17) возможно переписать в виде

$$\begin{aligned} \delta e_{\tilde{\varepsilon}} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr\{\Gamma_{\sim*} [\Gamma_{\sim} (P^{-1}M)_{\sim} D_{\sim} - (T_{\sim 0} + T_{\sim+})] \delta (P^{-1}M)_{\sim*} + \\ & + \delta (P^{-1}M)_{\sim} [D_{\sim*} (P^{-1}M)_{\sim*} \Gamma_{\sim*} - (T_{\sim 0} + T_{\sim+})_*] \Gamma_{\sim}\} ds. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Условие тождественно равенства вариации (7.19) нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $(P^{-1}M)_{\sim}$  выглядит так

$$\Gamma_{\sim} (P^{-1}M)_{\sim} D_{\sim} = (T_{\sim 0} + T_{\sim+}),$$

а алгоритм определения оптимальной структуры  $(P^{-1}M)_{\sim}$  будет таким

$$(P^{-1}M)_{\sim} = \Gamma_{\sim}^{-1} (T_{\sim 0} + T_{\sim+}) D_{\sim}^{-1}. \quad (7.20)$$

Транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\xi = (P^{-1}A)$  будет такой (7.21)

$$S'_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} = K^{\#} (S'_{\tilde{y}\tilde{y}} - S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}) K_{*}^{\#} - K^{\#} (S'_{\tilde{u}\tilde{y}} - S'_{\tilde{u}\tilde{\varphi}}) (P^{-1}M)_{\sim*} -$$

$$-(P^{-1}M)_{\sim}(S'_{\tilde{y}\tilde{u}} - S'_{\tilde{\varphi}\tilde{u}})K_{*}^{\#} + (P^{-1}M)_{\sim}S'_{\tilde{u}\tilde{u}}(P^{-1}M)_{\sim*} = \widehat{D}\widehat{D}_{*}. \quad (7.21)$$

Как результат факторизации функции (7.21) искомая матрица будет иметь вид (7.22)

$$(P^{-1}A)_{\sim} = \widehat{D}. \quad (7.22)$$

### 7.3 Постановка и стадии решения задачи структурной идентификации моделей объекта с произволом в динамике

С целью облегчения поставленной задачи идентификации объекта с произволом в динамике, структурная схема системы идентификации которого представлена на рисунке 7.2, следует несколько видоизменить с учётом целесообразного форматирования из помех измерений уточненных моделей векторов возмущений. Видоизмененная структурная схема системы идентификации исследуемого объекта показана на рисунке 7.4

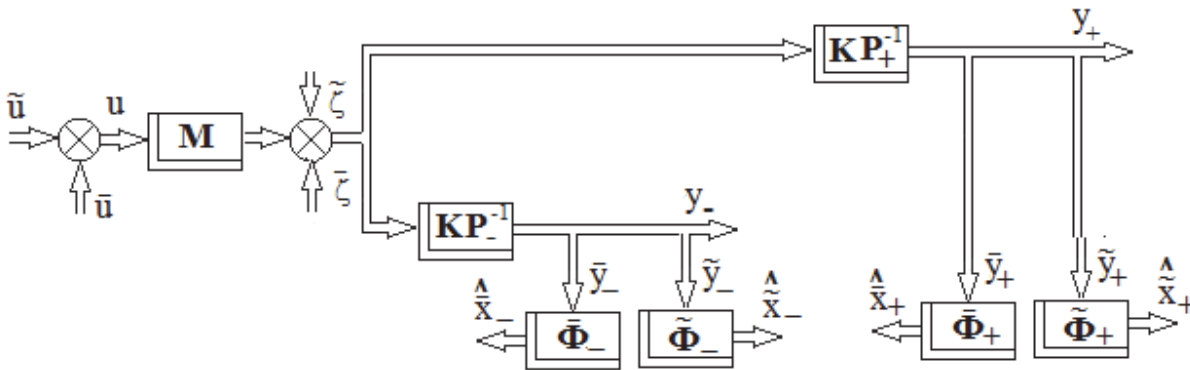


Рис 7.4 Модернизированная структурная схема системы идентификации моделей неустойчивого объекта

На рис. 7.4 предоставлены преобразованные модели динамики векторов возмущений, действующих на объект – векторы  $\tilde{\zeta}$  и  $\bar{\zeta}$ , которые следует записать так

$$\tilde{\zeta} = \tilde{\psi} + P_{+}K^{\#}\tilde{\varphi}_{+};$$

$$\bar{\zeta} = \bar{\psi} + P_- K^\# \bar{\varphi}_-. \quad (7.23)$$

Сигналы наблюдений в обоих трактах исследуемого объекта можно записать в виде (7.24)

$$\begin{aligned} \tilde{y}_+ &= KP_+^{-1}(M\tilde{u} + \tilde{\zeta}) = KP_+^{-1}(M\tilde{u} + \tilde{\psi}) + \tilde{\varphi}_+ = K\tilde{x}_+ + \tilde{\varphi}_+; \\ \bar{y}_+ &= KP_+^{-1}(M\bar{u} + \bar{\zeta}) = KP_+^{-1}(M\bar{u} + \bar{\psi}) + \bar{\varphi}_+ = K\bar{x}_+ + \bar{\varphi}_+; \\ \tilde{y}_- &= KP_-^{-1}(M\tilde{u} + \tilde{\zeta}) = KP_-^{-1}(M\tilde{u} + \tilde{\psi}) + \tilde{\varphi}_- = K\tilde{x}_- + \tilde{\varphi}_-; \\ \bar{y}_- &= KP_-^{-1}(M\bar{u} + \bar{\zeta}) = KP_-^{-1}(M\bar{u} + \bar{\psi}) + \bar{\varphi}_- = K\bar{x}_- + \bar{\varphi}_-; \\ \tilde{x}_+ &= K^\#(\tilde{y}_+ - \tilde{\varphi}_+); \bar{x}_+ = K^\#(\bar{y}_+ - \bar{\varphi}_+); \\ \tilde{x}_- &= K^\#(\tilde{y}_- - \tilde{\varphi}_-); \bar{x}_- = K^\#(\bar{y}_- - \bar{\varphi}_-), \end{aligned} \quad (7.24)$$

а векторы оценок выходов обоих исследуемых трактов объекта после предстоящего синтеза оптимальных структур всех наблюдателей будут такими

$$\hat{\tilde{x}}_+ = \tilde{\Phi}_+ \tilde{y}_+; \hat{\bar{x}}_+ = \bar{\Phi}_+ \bar{y}_+; \hat{\tilde{x}}_- = \tilde{\Phi}_- \tilde{y}_-; \hat{\bar{x}}_- = \bar{\Phi}_- \bar{y}_-. \quad (7.25)$$

### 7.3.1 Алгоритмы решения задач структурной идентификации моделей динамики звеньев тракта объекта, учитывающего лишь неустойчивую часть объекта

Вначале целесообразно идентифицировать модели частей неустойчивого тракта объекта, перерабатывающие лишь детерминированную информацию. Как и ранее, необходимый для этого эксперимент по съему достигнутой информации нужно провести дважды. Учитывая соответствующие выражения (7.24) и (7.25), можно составить следующую систему равенств

$$\begin{aligned} K^\#(\bar{y}_{1-} - \bar{\varphi}_{1-}) &\approx (P_-^{-1}M)_- \bar{u}_1 + (P_-^{-1}\bar{\psi})_-, \\ K^\#(\bar{y}_{2-} - \bar{\varphi}_{2-}) &\approx (P_-^{-1}M)_- \bar{u}_2 + (P_-^{-1}\bar{\psi})_-. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Решая систему уравнений (7.26) совместно и используя ранее введенные обозначения (7.7), возможно получить соотношение в виде

$$K^\#(\theta_{\bar{y}_1} - \theta_{\bar{\varphi}_1} - \theta_{\bar{y}_2} + \theta_{\bar{\varphi}_2}) \approx (P_-^{-1}M)_-(\theta_{\bar{u}_1} - \theta_{\bar{u}_2}) = (P_-^{-1}M)_-\theta_{\bar{u}}. \quad (7.27)$$

Учитывая размерности векторов  $m \geq n$ ,  $n \geq m$  и матрицу (7.8) по аналогии с уравнением (7.9) возможно определить искомую модель динамики  $(P^{-1}M)_-$  в таком виде

$$(\widehat{P^{-1}M})_- = K^\#[(\theta_{\bar{y}_1} - \theta_{\bar{\varphi}_1}) - (\theta_{\bar{y}_2} + \theta_{\bar{\varphi}_2})]\theta_{\bar{u}}^{-1}, \quad (7.28)$$

а искомую модель динамики  $(P^{-1}\theta_{\bar{\psi}})_-$  так

$$(\widehat{P^{-1}\theta_{\bar{\psi}}})_- = K^\#(\theta_{\bar{y}_1} - \theta_{\bar{\varphi}_1}) - (\widehat{P^{-1}M})_- \theta_{\bar{u}_1}. \quad (7.29)$$

По аналогии с процедурой составления уравнения (7.11) и учитывая выражения (7.24) и (7.25), следует составить уравнение

$$\tilde{x}_{1-} = K^\#(\tilde{y}_{1-} - \tilde{\varphi}_{1-}) \approx (P^{-1}M)_\sim \tilde{u} + (P^{-1}A)_\sim \Delta = \tilde{x}_-, \quad (7.30)$$

а вектор ошибок определения координат исследуемого тракта объекта целесообразно записать в виде

$$\tilde{\varepsilon}_- = \tilde{x}_- - \tilde{x}_{1-}.$$

Транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\tilde{\varepsilon}_-$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} S'_{\tilde{\varepsilon}_-\tilde{\varepsilon}_-} = & (P^{-1}M)_\sim S'_{uu}(P^{-1}M)_{\sim*} - (P^{-1}M)_\sim (S'_{y_{1-u}} - S'_{\varphi_{1-u}})K^\# + \\ & + (P^{-1}A)_\sim (P^{-1}A)_{\sim*} - K^\#(S'_{uy_{1-}} - S'_{u\varphi_{1-}})(P^{-1}M)_{\sim*} + K^\#(S'_{y_{1-y_{1-}}} - \\ & - S'_{\varphi_{1-\varphi_{1-}}})K^\#, \end{aligned} \quad (7.31)$$

где  $S'_{\tilde{x}_{1-}\tilde{x}_{1-}} = K^\#(S'_{y_{1-y_{1-}}} - S'_{\varphi_{1-\varphi_{1-}}})K^\#$ ,

$$S'_{\tilde{x}_-\tilde{x}_-} = (P^{-1}M)_\sim S'_{uu}(P^{-1}M)_{\sim*} + (P^{-1}A)_\sim (P^{-1}A)_{\sim*}.$$

Пусть функционал качества идентификации в исследуемом варианте тракта объекта будет

$$e_{\tilde{\varepsilon}_-} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (S'_{\tilde{\varepsilon}_-\tilde{\varepsilon}_-} R_\sim) ds. \quad (7.32)$$

Подстановка выражений (7.31) в функционал (7.32) позволяет записать последний в виде

$$\begin{aligned} e_{\tilde{\varepsilon}_-} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ [(P^{-1}M)_\sim S'_{uu}(P^{-1}M)_{\sim*} - (P^{-1}M)_\sim (S'_{y_{1-u}} - S'_{\varphi_{1-u}})K^\# + \\ & + (P^{-1}A)_\sim (P^{-1}A)_{\sim*} - K^\#(S'_{uy_{1-}} - S'_{u\varphi_{1-}})(P^{-1}M)_{\sim*} + \\ & + K^\#(S'_{y_{1-y_{1-}}} - S'_{\varphi_{1-\varphi_{1-}}})K^\#] R_\sim \} ds. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Первая вариация функционала (7.33) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta e_{\tilde{\xi}_-} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr\{R_{\sim} [(P_{-}^{-1}M)_{\sim} S'_{uu} - K^{\#}(S'_{uy_{1-}} - S'_{u\varphi_{1-}})] \delta(P_{-}^{-1}M)_{\sim*} + \\ & + \delta(P_{-}^{-1}M)_{\sim} [S'_{uu}(P_{-}^{-1}M)_{\sim*} - (S'_{y_{1-u}} - S'_{\varphi_{1-u}})K_{*}^{\#}] R_{\sim}\} ds. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Целесообразен ввод следующих выражений

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sim*} \Gamma_{\sim} &= R_{\sim}; D_{\sim} D_{\sim*} = S'_{uu}; \\ T_{\sim} &= T_{\sim 0} + T_{\sim +} + T_{\sim -} = \Gamma_{\sim*}^{-1} K^{\#} (S'_{uy_{1-}} - S'_{u\varphi_{1-}}) D_{\sim*}^{-1}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

С учётом обозначений (7.35) вариацию (7.34) следует записать так

$$\begin{aligned} \delta e_{\tilde{\xi}_-} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr\{\Gamma_{\sim*} [\Gamma_{\sim} (P_{-}^{-1}M)_{\sim} D_{\sim} - (T_{\sim 0} + T_{\sim +})] \delta(P_{-}^{-1}M)_{\sim*} + \\ & + \delta(P_{-}^{-1}M)_{\sim} [D_{\sim*} (P_{-}^{-1}M)_{\sim*} \Gamma_{\sim*} - (T_{\sim 0} + T_{\sim +})_*] \Gamma_{\sim}\} ds. \end{aligned}$$

Условия тождественного равенства вариации нулю будет таким

$$\Gamma_{\sim} (P_{-}^{-1}M)_{\sim} D_{\sim} = (T_{\sim 0} + T_{\sim +}),$$

а алгоритм вывода оптимальной структуры  $(\widehat{P_{-}^{-1}M})_{-}$  имеет вид

$$(\widehat{P_{-}^{-1}M})_{\sim} = \Gamma_{\sim}^{-1} (T_{\sim 0} + T_{\sim +}) D_{\sim}^{-1}. \quad (7.36)$$

По аналогии с матрицей (7.21), транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\xi_{-} = (P_{-}^{-1}A)_{-}$  будет иметь такой вид

$$\begin{aligned} S'_{\xi_{-}\xi_{-}} = & \widehat{D}_{-} \widehat{D}_{-*} = K^{\#} (S'_{y_{1-y_{1-}}} - S'_{\varphi_{1-\varphi_{1-}}}) K_{*}^{\#} - K^{\#} (S'_{uy_{1-}} - S'_{u\varphi_{1-}}) (\widehat{P_{-}^{-1}M})_{-*} - \\ & - (\widehat{P_{-}^{-1}M})_{-} (S'_{y_{1-u}} - S'_{\varphi_{1-u}}) K_{*}^{\#} + (\widehat{P_{-}^{-1}M})_{-} S'_{uu} (\widehat{P_{-}^{-1}M})_{-*}, \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } (P_{-}^{-1}A)_{\sim} = \widehat{D}_{-}. \quad (7.37)$$

### 7.3.2 Алгоритмы решения задачи структурной идентификации моделей динамики звеньев тракта объекта, учитывающую лишь устойчивую часть последнего

Как и ранее, сначала следует идентифицировать модели частей устойчивого тракта объекта, перерабатывающие лишь случайную информацию. В этом случае эксперимент по съему доступной информации нужно проводить дважды.

Воспользовавшись выражениями (7.24) и (7.25), возможно составить такую систему равенств, характеризующую лишь детерминированные части исследуемого тракта

$$\begin{aligned} K^\#(\bar{y}_{1+} - \bar{\varphi}_{1+}) &\approx (P_+^{-1}M)_- \bar{u}_1 + (P_+^{-1}\bar{\psi})_-, \\ K^\#(\bar{y}_{2+} - \bar{\varphi}_{2+}) &\approx (P_+^{-1}M)_- \bar{u}_2 + (P_+^{-1}\bar{\psi})_-. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Решив систему уравнений (7.38) используя ранее введенные обозначения (7.7), возможно получить соотношение

$$K^\#[(\theta_{\bar{y}_1} - \theta_{\bar{\varphi}_1}) - (\theta_{\bar{y}_2} + \theta_{\bar{\varphi}_2})] \approx (P_+^{-1}M)_-(\theta_{\bar{u}_1} - \theta_{\bar{u}_2}) = (P_+^{-1}M)_-\theta_{\bar{u}}. \quad (7.39)$$

Учитывая возможные ситуации с разностями векторов ( $m \geq n$ ,  $n \geq m$ ) и матрицы (7.8) по аналогии с уравнением (7.9) можно определить искомую модель динамики  $(P_+^{-1}M)_-$  в виде

$$(\widehat{P_+^{-1}M})_- = K^\#[(\theta_{\bar{y}_1} - \theta_{\bar{\varphi}_1}) - (\theta_{\bar{y}_2} + \theta_{\bar{\varphi}_2})]\theta_{\bar{u}}^{-1}, \quad (7.40)$$

а искомую модель  $(P_+^{-1}\theta_{\bar{\psi}})_-$  записать так

$$(\widehat{P_+^{-1}\theta_{\bar{\psi}}})_- = K^\#(\theta_{\bar{y}_1} - \theta_{\bar{\varphi}_1}) - (\widehat{P_+^{-1}M})_- \theta_{\bar{u}_1}. \quad (7.41)$$

По аналогии с процедурой составления уравнений (7.11) или (7.30) и учитывая нужные составляющие выражений (7.24) и (7.25), возможно составить уравнение

$$\tilde{x}_{1+} = K^\#(\tilde{y}_{1+} - \tilde{\varphi}_{1+}) \approx (P_+^{-1}M)_- \tilde{u} + (P_+^{-1}A)_- \Delta = \tilde{x}_+. \quad (7.42)$$

Вектор ошибок определения координат исследуемого в данном разделе тракта объекта целесообразно представить так

$$\tilde{\varepsilon}_+ = \tilde{x}_+ - \tilde{x}_{1+}.$$

Транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\tilde{\varepsilon}_+$  записывается таким способом (7.43)

$$\begin{aligned} S'_{\tilde{\varepsilon}_+ \tilde{\varepsilon}_+} &= (P_+^{-1}M)_- S'_{uu} (P_+^{-1}M)_-^* - (P_+^{-1}M)_- (S'_{y_{1+}u} - S'_{\varphi_{1+}u}) K_*^\# + \\ &+ (P_+^{-1}A)_- (P_+^{-1}A)_-^* - K^\# (S'_{uy_{1+}} - S'_{u\varphi_{1+}}) (P_+^{-1}M)_-^* + K^\# (S'_{y_{1+}y_{1+}} - S'_{\varphi_{1+}\varphi_{1+}}) K_*^\#, \end{aligned} \quad (7.43)$$

где  $S'_{\tilde{x}_{1+} \tilde{x}_{1+}} = K^\# (S'_{y_{1+}y_{1+}} - S'_{\varphi_{1+}\varphi_{1+}}) K_*^\#$ ,

$$S'_{\tilde{x}_+ \tilde{x}_+} = (P_+^{-1}M)_- S'_{uu} (P_+^{-1}M)_-^* + (P_+^{-1}A)_- (P_+^{-1}A)_-^*$$

Функционал качества идентификации в исследуемом варианте тракта объекта имеет вид

$$e_{\tilde{\xi}_+} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (S'_{\tilde{\xi}_+\tilde{\xi}_+} R_{\sim}) ds. \quad (7.44)$$

Подстановка матрицы (7.43) в дифференциал (7.44) позволяет переписать его так

$$\begin{aligned} e_{\tilde{\xi}_+} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [(P_+^{-1}M)_{\sim} S'_{uu} (P_+^{-1}M)_{\sim*} - (P_+^{-1}M)_{\sim} (S'_{y_{1+}u} - S'_{\varphi_{1+}u}) K_*^{\#} + \\ & + (P_+^{-1}A)_{\sim} (P_+^{-1}A)_{\sim*} - K^{\#} (S'_{uy_{1+}} - S'_{u\varphi_{1+}}) (P_+^{-1}M)_{\sim*} + \\ & + K^{\#} (S'_{y_{1+}y_{1+}} - S'_{\varphi_{1+}\varphi_{1+}}) K_*^{\#}] R_{\sim} \} ds. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Первая вариация функционала (7.45) такая

$$\begin{aligned} \delta e_{\tilde{\xi}_+} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ R_{\sim} [(P_+^{-1}M)_{\sim} S'_{uu} - K^{\#} (S'_{uy_{1+}} - S'_{u\varphi_{1+}})] \delta (P_+^{-1}M)_{\sim*} + \\ & + \delta (P_+^{-1}M)_{\sim} [S'_{uu} (P_+^{-1}M)_{\sim*} - (S'_{y_{1+}u} - S'_{\varphi_{1+}u}) K_*^{\#}] R_{\sim} \} ds. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Целесообразно ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sim*} \Gamma_{\sim} &= R_{\sim}; \quad D_{\sim} D_{\sim*} = S'_{uu}; \\ T_{\sim} &= T_{\sim 0} + T_{\sim +} + T_{\sim -} = \Gamma_{\sim*}^{-1} K^{\#} (S'_{uy_{1+}} - S'_{u\varphi_{1+}}) D_{\sim*}^{-1}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

С учётом обозначений (7.47) вариацию (7.46) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \delta e_{\tilde{\xi}_+} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ \Gamma_{\sim*} [\Gamma_{\sim} (P_+^{-1}M)_{\sim} D_{\sim} - (T_{\sim 0} + T_{\sim +})] \delta (P_+^{-1}M)_{\sim*} + \\ & + \delta (P_+^{-1}M)_{\sim} [D_{\sim*} (P_+^{-1}M)_{\sim*} \Gamma_{\sim*} - (T_{\sim 0} + T_{\sim +})_*] \Gamma_{\sim} \} ds. \end{aligned}$$

Условие тождественного равенства вариации (7.46) нулю должно быть таким

$$\Gamma_{\sim} (P_+^{-1}M)_{\sim} D_{\sim} = (T_{\sim 0} + T_{\sim +}).$$

Алгоритм определения оптимальной структуры  $(\widehat{P_+^{-1}M})_{\sim}$  будет иметь вид

$$(\widehat{P_+^{-1}M})_{\sim} = \Gamma_{\sim}^{-1} (T_{\sim 0} + T_{\sim +}) D_{\sim}^{-1}. \quad (7.48)$$

По аналогии с матрицей (7.21), транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\xi_+ = (P_+^{-1}A)_{\sim}$  будет такой

$$\begin{aligned} S'_{\xi_+\xi_+} = & \widehat{D}_+ \widehat{D}_{+*} = K^{\#} (S'_{y_{1+}y_{1+}} - S'_{\varphi_{1+}\varphi_{1+}}) K_*^{\#} - K^{\#} (S'_{uy_{1+}} - S'_{u\varphi_{1+}}) (\widehat{P_+^{-1}M})_{\sim*} - \\ & - (\widehat{P_+^{-1}M})_{\sim} (S'_{y_{1+}u} - S'_{\varphi_{1+}u}) K_*^{\#} + (\widehat{P_+^{-1}M})_{\sim} S'_{uu} (\widehat{P_+^{-1}M})_{\sim*}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Факторизовав матрицу (7.49) сразу же можно получить искомую оптимальную структуру

$$(\widehat{P_+^{-1}A})_{\sim} = \widehat{D}_+. \quad (7.50)$$

Таким образом, в настоящем разделе главы представлены алгоритмы, с помощью которых возможно производить структурную идентификацию моделей основных трактов и элементов объекта с произволом в динамике при стохастических воздействиях. Структурная схема с основными результатами такой идентификации (требуемыми моделями динамики объекта в исследованном варианте системы) представлена на рисунке 7.5.

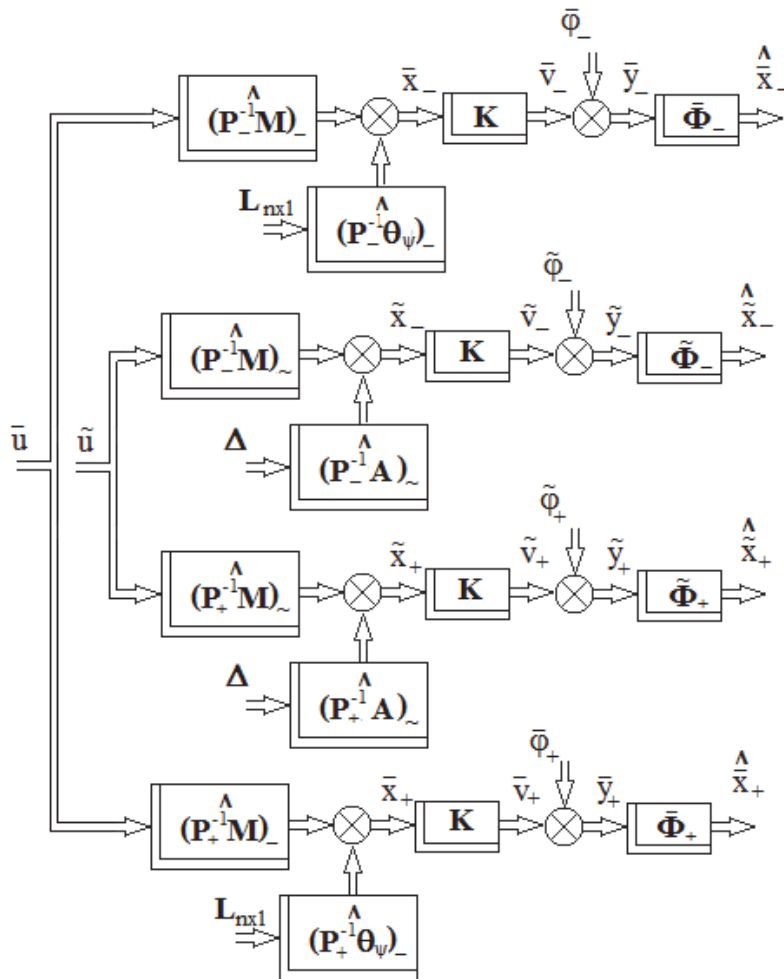


Рис. 7.5 Структурная схема с базовыми моделями элементов исследуемых трактов как результатов идентификации объекта с произволом в динамике при стохастических воздействиях, а также базовыми элементами системы измерений выходных координат объекта

## ГЛАВА 8 ЗАМКНУТЫЕ И РАЗОМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ, УСЛОВИЯ ИХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ. ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Стандартные структуры разомкнутых и замкнутых многомерных систем стабилизации представлены на рисунке 8.1 (а, б).

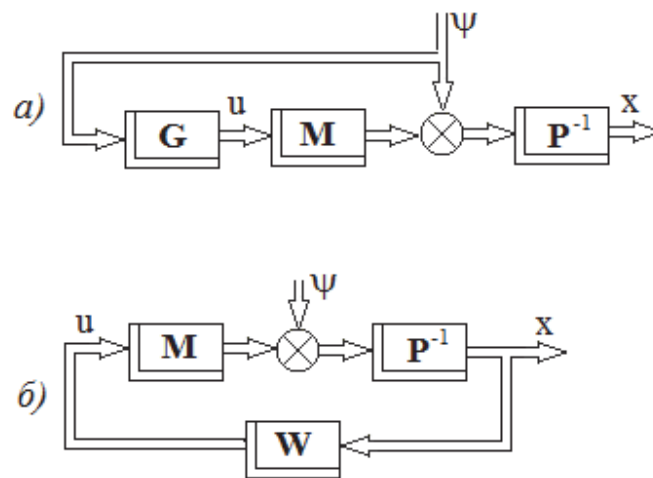


Рис. 8.1. Стандартные структурные схемы разомкнутых а) и замкнутых б) систем стабилизации

Здесь в обоих случаях движение многомерного линейного объекта в режиме стабилизации его выходных координат можно, как и ранее, описать системой обыкновенных дифференциальных уравнений, преобразованной по Фурье, вида

$$Px = Mu + \psi, \quad (8.1)$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор выходных координат объекта стабилизации;  $u$  –  $m$ -мерный вектор его управляющих координат;  $\psi$  –  $n$ -мерный вектор либо случайных, либо детерминированных, либо стохастических воздействий;  $G$  – матрица передаточных функций регулятора в разомкнутой системе размерности

$m \times n$ ,  $W$  – матрица передаточных функций регулятора замкнутой системы размерности  $m \times n$ .

Более близкие к реальности типовые структурные схемы разомкнутой и замкнутой систем, учитывающие свойства датчиков, представлены на рисунке 8.2 (а, б).

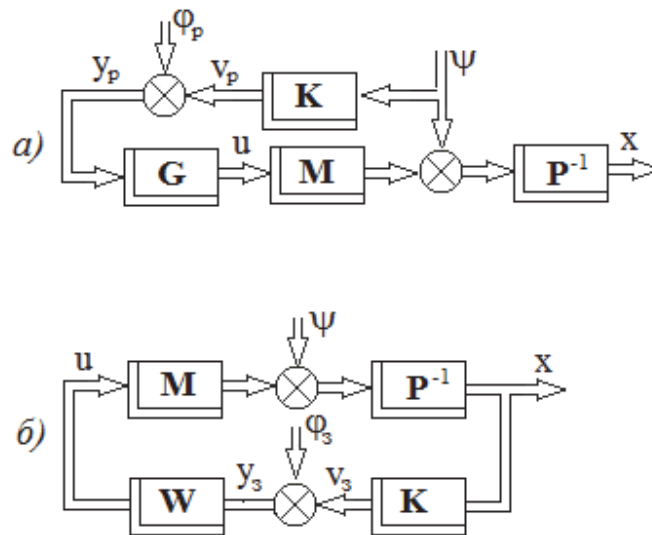


Рис. 8.2. Типовые структурные схемы разомкнутой а) и замкнутой б) систем

На рисунке 8.2 в отличие от рисунка 8.1 дополнительно отражены матрицы передаточных функций измерительных устройств разомкнутых  $K_p$  и замкнутых  $K_3$  систем стабилизации (размерность матрицы  $K_p$  –  $n \times n$ , размерность матрицы  $K_3$  –  $v \times n$ ), а также соответствующие вектора сигналов помех  $\varphi_p$  и  $\varphi_3$ .

Структурные схемы могут быть построены для так называемых базовых (расчётных) систем. В этом случае ко всем элементам структур, показанных на рисунке 8.1 и 8.2, необходимо добавлять индекс «0».

При необходимости перестройки типовой структурной схемы разомкнутой системы (рис. 8.2,а) к стандартной целесообразно установить структуру вектора наблюдения  $\hat{y}_p$  в виде

$$\hat{y}_p = K_p \psi + \varphi_p,$$

а затем использовать наблюдаемый вектор  $\hat{y}_p$  в типовой структуре разомкнутой системы стабилизации (рис. 8.3), а уравнение движения объекта в этом варианте записать так

$$x = P^{-1}(MG\hat{y}_p + \psi). \quad (8.2)$$

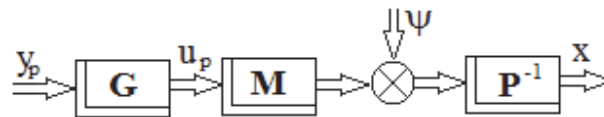


Рис. 8.3. Типовая структурная схема разомкнутой системы стабилизации

Для перестройки типовой структуры замкнутой системы (рис. 8.2,б) к стандартной форме целесообразно сначала составить уравнение

$$V_3 = K_3 \cdot x \text{ или } x = K_3^\# \cdot V_3 \quad (8.3)$$

и подставить его в уравнение (8.1), умножив на матрицу  $K_3$  ( $K_3 K_3^\# = E_V$ ). Это приведет к такому уравнению движения объекта

$$V_3 = K_3 P^{-1}(Mu + \psi) \quad (8.4)$$

и к новой структурной схеме замкнутой системы, вида (рис. 8.4).

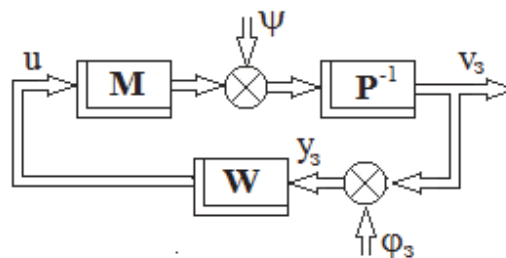


Рис. 8.4. Структурная схема частично преобразованной типовой системы стабилизации

Необходимо еще одно преобразование структурной схемы (рис. 8.4) для определения стандартной структурной схемы системы – эквивалентное устранение вектора помех  $\varphi_3$  из обратной связи. Такое преобразование приводит к структурной схеме, представленной на рисунке 8.5.

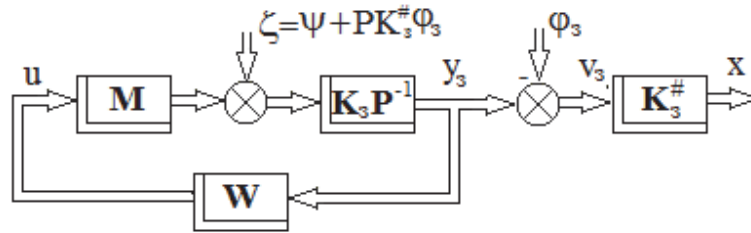


Рис. 8.5. Структурная схема типовой системы стабилизации, преобразованная к стандартной форме

### 8.1 Основные понятия о базовых (расчётных) и реальных системах стабилизации. Эквивалентность рассматриваемых систем

Очевидно, что модели динамики элементов реальных систем могут существенно отличаться от их расчётных аналогов. Ниже будут рассмотрены указанные отличия более детально.

На рисунке 8.6 представлены стандартные структурные схемы базовых (расчётных) и реальных разомкнутых систем стабилизации.

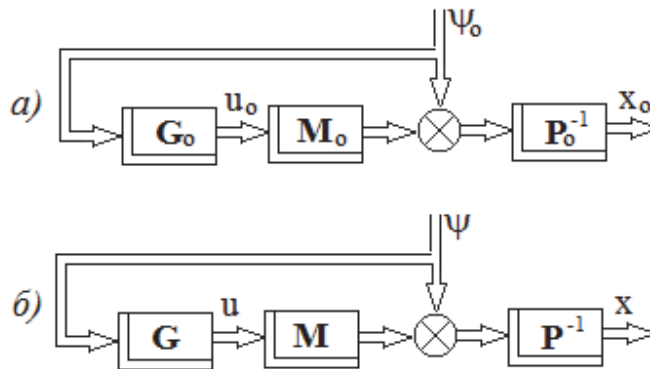


Рис. 8.6. Стандартные структурные схемы расчётной а) и реальной б) разомкнутых систем стабилизации движения объекта

Очевидно, что векторы выходных сигналов объекта  $x_0$  и  $x$  для обеих разомкнутых систем можно определить так

$$x_0 = P_0^{-1}(M_0 G_0 + E_n)\psi_0,$$

$$x = P^{-1}(MG + E_n)\psi. \quad (8.5)$$

Исходя из структурной схемы (рис. 8.6 а) в расчетной разомкнутой системе выполняются следующие уравнения связи

$$x_0 = F_{x_0}\psi_0; \quad u_0 = G_0\psi_0; \quad F_{x_0} = P_0^{-1}(M_0G_0 + E_n), \quad (8.6)$$

где  $F_{x_0}$  и  $G_0$  – матрицы передаточных функций расчётной разомкнутой системы по выходной координате и по управлению.

Аналогично в реальной разомкнутой системе стабилизации (рис. 8.6 б) выполняются соотношения

$$x = F_x\psi, \quad u = G\psi, \quad F_x = P^{-1}(MG + E_n), \quad (8.7)$$

где  $F_x$  и  $G$  матрицы передаточных функций реальной системы стабилизации движения объекта.

Структурные схемы стандартных замкнутых расчётной и реальной систем стабилизации движения объекта представлены на рисунке 8.7.

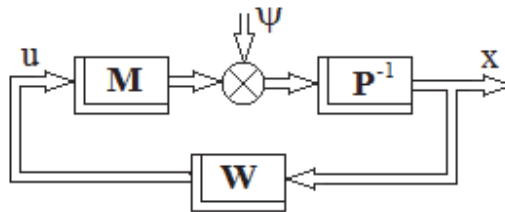


Рис. 8.7. Стандартные структурные схемы расчётной а) и реальной б) замкнутых систем стабилизации движения объекта

По аналогии с разомкнутыми системами в замкнутых также выполняются следующие уравнения для расчётной системы

$$x_0 = F_{x_0}\psi_0, \quad u_0 = F_{u_0}\psi_0, \quad F_{x_0} = P_0^{-1}(M_0F_{u_0} + E_n) \quad (8.8)$$

и для реальной системы

$$x = F_x\psi, \quad u = F_u\psi, \quad F_x = P^{-1}(MF_u + E_n) \quad (8.9)$$

где  $F_{x_0}(F_x), F_{u_0}(F_u)$  - матрицы передаточных функций замкнутых систем от возмущений к векторам  $x_0(x)$  и  $u_0(u)$  соответственно.

Из выражений (8.6) и (8.8) видно, что расчётные разомкнутая (рис. 8.6 а) и замкнутая (рис. 8.7 б) системы стабилизации могут быть эквиваленты по результатам стабилизации и условием эквивалентности будет такое равенство

$$G_0 = F_{u_0}^3. \quad (8.10)$$

Если равенство (8.10) соблюдено, то справедливы и уравнения

$$F_{x_0}^3 = P_0^{-1}(M_0 G_0 + E_n), G_0 = W_0 F_{x_0}^3. \quad (8.11)$$

Если на расчётные разомкнутую и замкнутую эквивалентные системы воздействуют одинаковые возмущения  $\psi_0$ , то можно составить следующие выражения

$$u_0 = G_0 \psi_0 = W_0 F_{x_0}^3 \psi_0, \quad W_0 = G_0 (F_{x_0}^3)^{-1}. \quad (8.12)$$

При одинаковых возмущениях  $\psi = \psi_0$ , вектор ошибки результатов стабилизации объекта в расчётных и реальных разомкнутых системах будет иметь вид

$$\begin{aligned} \varepsilon = x_0 - x &= [P_0^{-1}(M_0 G_0 + E_n) - P^{-1}(MG + E_n)]\psi_0 = \\ &= [(P_0^{-1} - P^{-1}) + (P_0^{-1} M_0 G_0 - P^{-1} MG)]\psi_0, \end{aligned} \quad (8.13)$$

а вектор ошибок в оценивании результатов стабилизации объекта в расчётной и реальной замкнутых системах будет таким

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} = \bar{x}_0 - \bar{x} &= [P_0^{-1}(M_0 F_{u_0} + E_n) - P^{-1}(M F_u + E_n)]\psi_0 = \\ &= [(P_0^{-1} - P^{-1}) + (P_0^{-1} M_0 F_{u_0} - P^{-1} M F_u)]\psi_0. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Вектор рассогласования результатов стабилизации объекта разомкнутой и замкнутой системами с учетом соотношений (8.13), (8.14) имеет вид

$$\eta = \varepsilon - \bar{\varepsilon} = [(P_0^{-1} M_0 G_0 - P^{-1} MG)\psi_0 - (P_0^{-1} M_0 F_{u_0} - P^{-1} M F_u)]\psi_0. \quad (8.15)$$

Вектор  $\eta$  (8.15) возможно определить как функцию чувствительности систем. Если выполняется условия эквивалентности разомкнутых и замкнутых расчётных систем, то вектор (8.15) следует записать так

$$\eta^3 = P^{-1} M (F_u - G)\psi_0. \quad (8.16)$$

Для исследования чувствительности разомкнутой и замкнутой систем стабилизации к отклонениям параметров объекта управления от расчётных

целесообразно определить оптимальные структуры функций  $F_u$  и  $G$  в системах при одинаковом случайном стационарном воздействии  $\psi_0$ .

Вначале синтезируется структура  $G$  матрицы передаточных функций регулятора в разомкнутой системе стабилизации. Функционал качества стабилизации в этом случае имеет вид

$$e_x = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}(S'_{xx}R)ds, \quad (8.17)$$

а транспонированная матрица спектральных плотностей  $S'_{xx}$  представляется как

$$S'_{xx} = P^{-1}(MGS'_{\psi_0\psi_0}G_*M_* + MGS'_{\psi_0\psi_0} + S'_{\psi_0\psi_0}G_*M_* + S'_{\psi_0\psi_0})P_*^{-1}. \quad (8.18)$$

Подставив матрицу (8.18) в функционал (8.17) и определив его первую вариацию можно получить следующий результат

$$\begin{aligned} \delta e_x = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [(M_*P_*^{-1}RP^{-1}MGS'_{\psi_0\psi_0} + M_*P_*^{-1}RP^{-1}S'_{\psi_0\psi_0})\delta G_* + \\ & + \delta G(S'_{\psi_0\psi_0}G_*M_*P_*^{-1}RP^{-1}M + S'_{\psi_0\psi_0}P_*^{-1}RP^{-1}M)]ds. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Целесообразны следующие обозначения

$$\Gamma_*\Gamma = M_*P_*^{-1}RP^{-1}M; DD_* = S'_{\psi_0\psi_0}; T = T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1}M_*P_*^{-1}RP^{-1}D,$$

с учётом которых вариация (8.19) примет вид

$$\delta e_x = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\Gamma_* (\Gamma GD + T)D_*\delta G_* + \delta GD(D_*G_*\Gamma_* + T_*)\Gamma]ds.$$

Условие её равенства нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $G$  выражается уравнением

$$\Gamma GD = -(T_0 + T_+),$$

тогда алгоритм синтеза оптимальной структуры  $G$  представляется формулой

$$G = -\Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^{-1}. \quad (8.20)$$

Функционал качества стабилизации объекта замкнутой системой имеет вид, аналогичный выражению (8.17), но используемая в нём транспонированная матрица  $S'_{\hat{x}\hat{x}}$  несколько отлична от выражения (8.18)

$$S'_{\hat{x}\hat{x}} = P^{-1}(MF_uS'_{\psi_0\psi_0}F_{u*}M_* + MF_uS'_{\psi_0\psi_0} + S'_{\psi_0\psi_0}F_{u*}M_* + S'_{\psi_0\psi_0})P_*^{-1}.$$

Подстановка в функционал качества полученной матрицы позволяет записать последний так

$$e_{\hat{x}} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (S'_{\hat{x}\hat{x}} R) ds = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [P^{-1} (MF_u S'_{\psi_0\psi_0} F_{u*} M_* + MF_u S'_{\psi_0\psi_0} + S'_{\psi_0\psi_0} F_{u*} M_* + S'_{\psi_0\psi_0}) P_*^{-1} R] ds.$$

Решая задачу методом Винер-Колмогорова, необходимо определить первую вариацию функционала, которая будет иметь вид

$$\delta e_{\hat{x}} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [(M_* P_*^{-1} R P_*^{-1} M F_u S'_{\psi_0\psi_0} + M_* P_*^{-1} R S'_{\psi_0\psi_0}) \delta F_{u*} + \delta F_u (S'_{\psi_0\psi_0} F_{u*} M_* P_*^{-1} R P_*^{-1} M + S'_{\psi_0\psi_0} R P_*^{-1} M)] ds.$$

Если ввести обозначения

$$\Gamma_* \Gamma = M_* P_*^{-1} R P_*^{-1} M; DD_* = S'_{\psi_0\psi_0}; T = T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1} M_* P_*^{-1} R D,$$

то условие тождественного равенства этой вариации нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций  $F_u$  может быть представлено как

$$\Gamma F_u D = -(T_0 + T_+),$$

а алгоритм выбора оптимальной структуры матрицы  $F_u$  выражен соотношением

$$F_u = -\Gamma^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1}. \quad (8.21)$$

Сравнение функций чувствительности систем стабилизации, выполненное в монографии [7], показало преимущество замкнутых систем перед разомкнутыми. Более того, только в замкнутых системах стабилизации возможно достижение робастности.

## 8.2 Задача и алгоритм синтеза оптимальных робастных замкнутых систем стабилизации подвижных объектов при случайных стационарных воздействиях (общий случай)

Целесообразно рассмотреть возможное преобразование традиционной (рис. 8.8) системы стабилизации многомерного подвижного устойчивого объекта к стандартному виду (рис. 8.1 б). На рисунке 8.8 представлена традиционная структурная схема замкнутой системы стабилизации объекта. При построении

этой схемы считается, что уравнение движения объекта управления представлено так

$$P_1 x = M_1 u + \psi_1, \quad (8.1)$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор выходных координат объекта;  $P_1$  – полиномиальная матрица размерности  $n \times n$ , элементы которой – полиномы от оператора дифференцирования;  $u$  –  $m$ -мерный вектор сигналов управления;  $M_1$  – полиномиальная матрица размерности  $n \times m$ ;  $\psi_1$  –  $n$ -мерный вектор стационарных центрированных случайных возмущений, с известной матрицей спектральных плотностей  $S_{\psi_1 \psi_1}$ . Учтено также, что измерение отклонений компонентов вектора выходных координат осуществляют неидеальное бортовое измерительное устройство с матрицей передаточных функций  $K$ , имеющей размерность  $\nu \times n$ , на выходе которой действуют  $\nu$ -мерные векторы сигналов выхода бортового измерительного устройства  $v$  и центрированных стационарных шумов измерения  $\varphi$  с известной матрицей спектральных плотностей  $S_{\varphi \varphi}$ .

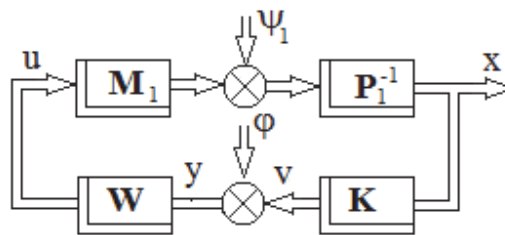


Рис. 8.8 Структурная схема традиционной замкнутой системы стабилизации подвижного объекта

Связь между векторами  $x$  и  $v$  с учетом рис. 8.8 выражается уравнением

$$v = Kx. \quad (8.22)$$

Приступая к процедуре преобразования традиционной схемы к стандартному виду (эта процедура кратко рассмотрена в разделе 8.1) сначала по выражению (8.22) следует представить вектор  $x$  в виде

$$x = K^\# v, \quad (8.23)$$

где «#» – символ псевдообращения соответствующей прямоугольной матрицы (в данном случае матрицы  $K$ ).

Подстановка вектора (8.23) в уравнение (8.1) приведет к новому уравнению движения объекта вида

$$K^\# v = P_1^{-1} M_1 u + P_1^{-1} \psi_1,$$

умножение которого на матрицу  $K$  приведет к результату

$$v = K P_1^{-1} M_1 u + K P_1^{-1} \psi_1 \quad (8.24)$$

и новой структурной схеме системы (рис. 8.9). На рисунке показаны  $\nu$ -мерные векторы помех измерений  $\varphi$  и сигналов наблюдения  $y$ .

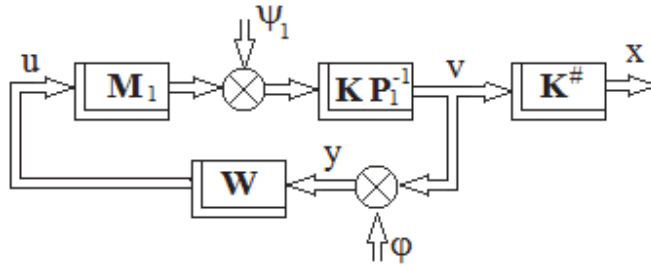


Рис. 8.9. Промежуточная структурная схема системы стабилизации

Следующий этап преобразования полученной структурной схемы к стандартному виду связан со специальным переносом вектора  $\varphi$  в точку приложения возмущения к объекту (рис. 8.10)

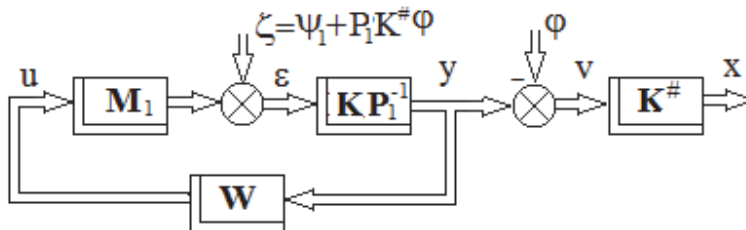


Рис. 8.10. Структурная схема стандартной системы стабилизации объекта

В соответствии с рисунком векторы сигналов на выходе блока измерителей  $y$  и эквивалентного возмущения  $\zeta$  определяются уравнениями

$$y = K P_1^{-1} (M_1 u + \zeta), \quad \zeta = (\psi_1 + P_1 K^\# \varphi), \quad (8.25)$$

а вектор выходных координат объекта  $x$  будет иметь вид

$$x = P_1^{-1}(M_1 u + \psi_1). \quad (8.26)$$

Вектор сигналов управления системой  $u$  следует записать так

$$u = F_u \zeta, \quad (8.27)$$

где  $F_u$  – матрица передаточных функций замкнутого контура стандартной системы стабилизации от вектора сигналов возмущения  $\zeta$  к вектору сигналов  $u$ , структура которой подлежит определению в решаемой ниже задаче синтеза.

Вектор выходных сигналов замкнутого контура структуры (рис. 8.10) должен выглядеть следующим образом

$$y = F_y \zeta, \quad (8.28)$$

где  $F_y$  – матрица передаточных функций замкнутого контура структуры (рис. 8.10) от вектора сигналов возмущения  $\zeta$  к вектору сигналов  $y$ , причём матрица  $F_y$  может быть выражена через матрицу  $F_u$  следующим уравнением связи

$$F_y = K P_1^{-1}(M_1 F_u + E_n). \quad (8.29)$$

С учетом выражений (8.27) и (8.28) вектор сигналов  $x$  примет вид

$$x = P_1^{-1}(M_1 F_u \zeta + \psi_1), \quad (8.30)$$

а вектор сигналов  $u$  уже представлен выражениями (8.27).

Транспонированные матрицы спектральных плотностей  $S'_{xx}$ ,  $S'_{uu}$  и  $S'_{\zeta\zeta}$ , которые необходимы в предполагаемой задаче синтеза при использовании выражений (8.25) - (8.27) будут такими

$$S'_{xx} = P_1^{-1}(M_1 F_u S'_{\zeta\zeta} F_u^* M_1^* + M_1 F_u S'_{\psi_1\zeta} + S'_{\zeta\psi_1} F_u^* M_1^* + S'_{\psi_1\psi_1}) P_1^{-1*}; \quad (8.31)$$

$$S'_{uu} = F_u S'_{\zeta\zeta} F_u^*; \quad (8.32)$$

$$S'_{\zeta\zeta} = \Psi_1 \Psi_1^* + P_1 K^{\#} S'_{\varphi\varphi} K^{\#} P_1^*. \quad (8.33)$$

Функционал качества стабилизации по аналогии с монографиями [7, 9] представляется в виде интеграла

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (S'_{xx} R + S'_{uu} C) ds,$$

в котором  $R$  и  $C$  – положительно определенные весовые матрицы размерности  $n \times n$  и  $m \times m$ , определяющие влияние дисперсий компонент векторов  $x$  и  $u$  на качество стабилизации.

Подстановка выражений (8.31) - (8.33) в этот функционал позволяет представить последний в виде

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [P_1^{-1}(M_1 F_u S'_{\zeta\zeta} F_{u*} M_{1*} + M_1 F_u S'_{\psi_1\zeta} + S'_{\zeta\psi_1} F_{u*} M_{1*} + S'_{\psi_1\psi_1}) P_{1*}^{-1} R + F_u S'_{\zeta\zeta} F_{u*} C] ds. \quad (8.34)$$

Решая задачу синтеза оптимальной структуры  $F_u$  методом Винера-Колмогорова, необходимо определить первую вариацию функционала (8.34) и условие тождественного равенства её нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций.

Первая вариация функционала (8.34) будет такой

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ ([M_{1*} P_{1*}^{-1} R P_1^{-1} M_1 + C) F_u S'_{\zeta\zeta} + M_{1*} P_{1*}^{-1} R P_1^{-1} S'_{\zeta\psi_1} ] \delta F_{u*} + \delta F_u [S'_{\zeta\zeta} F_{u*} (M_{1*} P_{1*}^{-1} R P_1^{-1} M_1 + C) + S'_{\psi_1\zeta} P_{1*}^{-1} R P_1^{-1} M_1] \} ds. \quad (8.35)$$

Целесообразны следующие обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_* \Gamma &= M_{1*} P_{1*}^{-1} R P_1^{-1} M_1 + C; \quad D D_* = S'_{\zeta\zeta}; \\ T &= T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1} M_{1*} P_{1*}^{-1} R P_1^{-1} S'_{\zeta\psi_1} D_*^{-1}. \end{aligned} \quad (8.36)$$

С учётом обозначений (8.36), первая вариация (8.35) примет вид

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_* (\Gamma F_u D + T) D_* \delta F_{u*} + \delta F_u D (D_* F_{u*} \Gamma_* + T_*) \Gamma] ds,$$

тогда условие тождественного равенства вариации нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц  $F_u$  выражает следующее уравнение

$$\Gamma F_u D = -(T_0 + T_+),$$

а алгоритм синтеза по исходным данным задачи оптимальной структуры матрицы передаточных функций  $F_u$  примет вид

$$F_u = -\Gamma^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1}. \quad (8.37)$$

С учётом матрицы (8.37) оптимальная структура матрицы  $F_y$  (8.29) должна быть записана так

$$F_y = KP_1^{-1}(M_1F_u + E_n),$$

а оптимальная структура регулятора  $W$  будет иметь вид

$$W = F_u(F_y)^{-1}. \quad (8.38)$$

При решении задач синтеза оптимальных систем стабилизации имеются возможности наделять последние свойством робастности [7], что должно положительно сказываться на результатах такого синтеза.

Структурная схема стандартной системы стабилизации (рис. 8.10) отражает наличие вектора сигналов рассогласования  $\varepsilon$ , являющего собой разность векторов сигналов возмущений на объект стабилизации  $\zeta$  и сигналов управления  $M_1u$  в системе (рис. 8.10)

$$\varepsilon = \zeta - M_1u = (E_n - M_1F_u)\zeta.$$

Вектор сигналов  $\varepsilon$  возможно использовать для построения робастной оптимальной системы стабилизации.

Пусть функционал качества системы стабилизации объекта (рис. 8.10) имеет вид

$$e_0 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (S'_{xx}R + S'_{uu}C + \Lambda S'_{\zeta\varepsilon} + S'_{\varepsilon\zeta}\Lambda) ds, \quad (8.39)$$

где, как и ранее,  $R$ ,  $C$  и  $\Lambda$  - весовые положительно определенные матрицы,  $S'_{\zeta\varepsilon}$  и  $S'_{\varepsilon\zeta}$  - транспонированные матрицы взаимных спектральных плотностей векторов сигналов, указанных в индексах, которые определены спомощью уравнений

$$S'_{\varepsilon\zeta} = S'_{\zeta\zeta}(E_n - F_{u*}M_{1*}); S'_{\zeta\varepsilon} = (E_n - M_1F_u)S'_{\zeta\zeta}. \quad (8.40)$$

С учетом выражений (8.31), (8.32), (8.33) и (8.40) функционал качества стабилизации (8.39) следует переписать так

$$e_0 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ P_1^{-1} (M_1F_u S'_{\zeta\zeta} F_{u*} M_{1*} + M_1F_u S'_{\psi_1\zeta} + S'_{\zeta\psi_1} F_{u*} M_{1*} + S'_{\psi_1\psi_1}) P_1^{-1} R + \\ + F_u S'_{\zeta\zeta} F_{u*} C + \Lambda (E_n - M_1F_u) S'_{\zeta\zeta} + S'_{\zeta\zeta} (E_n - F_{u*} M_{1*}) \Lambda \} ds. \quad (8.41)$$

Решая задачу синтеза оптимальной структуры  $\hat{F}_u$  методом Винера-Колмогорова необходимо определить первую вариацию функционала (8.41) и

условие тождественного равенства её нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц  $F_u$ . Первая вариация функционала имеет вид

$$\delta e_0 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [(M_{1*} P_{1*}^{-1} R P_1^{-1} M_1 + C) F_u S'_{\zeta\zeta} + M_{1*} P_{1*}^{-1} R P_1^{-1} S'_{\zeta\psi_1} - M_{1*} \Lambda S'_{\zeta\zeta}] \delta F_{u*} + \delta F_u [S'_{\zeta\zeta} F_{u*} (M_{1*} P_{1*}^{-1} R P_1^{-1} M + C) + S'_{\psi_1\zeta} P_{1*}^{-1} R P_1^{-1} M_1 - S'_{\zeta\zeta} \Lambda M_1] \} ds. \quad (8.42)$$

Целесообразно ввести следующие обозначения

$$\Gamma_* \Gamma = M_{1*} P_{1*}^{-1} R P_1^{-1} M + C; DD_* = S'_{\zeta\zeta};$$

$$T_0 = T_{00} + T_{0+} + T_{0-} = \Gamma_*^{-1} M_{1*} (P_{1*}^{-1} R P_1^{-1} S'_{\zeta\psi_1} D_*^{-1} - \Lambda D). \quad (8.43)$$

С учётом обозначений (8.43) выражение (8.42) изменится и станет равным

$$\delta e_0 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_* (\Gamma F_u D + T_0) D_* \delta F_{u*} + \delta F_u D (D_* F_{u*} \Gamma_* + T_{0*}) \Gamma] ds,$$

условие тождественного равенства этой вариации нулю будет

$$\Gamma F_u D = -(T_{00} + T_{0+}),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры матрицы  $F_u$  по исходным данным решаемой задачи синтеза будет

$$F_u = -\Gamma^{-1} (T_{00} + T_{0+}) D^{-1}.$$

Оптимальная структура матрицы  $F_y$ , учитывая выражения (8.29), будет

$$F_y = K P^{-1} (M_1 F_u + E_n),$$

а оптимальная структура регулятора  $W$  должна определяться так

$$W = F_u (F_y)^{-1}. \quad (8.44)$$

### 8.3 Основные понятия, задачи и алгоритмы синтеза оптимальной структуры модели динамики регулятора в замкнутой системе стабилизации линейного многомерного устойчивого объекта при стохастических воздействиях и знании результатов структурной идентификации моделей динамики объекта

Структурную схему исследуемой системы стабилизации, имеющую контуры (тракты) прохождения детерминированной и случайной стационарной

информации, возможно представить в виде (рис. 8.11). Элементы и векторы сигналов контура прохождения случайной информации на схеме помечены индексом «~». На схеме матрица передаточных функций измерительного устройства обозначена как  $K_{v \times n}$ , векторы детерминированных сигналов  $\bar{\psi}$  и  $\bar{\varphi}$ , как и ранее, обозначены

$$\bar{\psi} = \theta_{\psi} \cdot L_{n \times 1} \text{ и } \bar{\varphi} = \theta_{\varphi} \cdot L_{v \times 1},$$

а вектор случайных возмущений объекта

$$\tilde{\psi} = \Psi_{\sim} \Delta,$$

где  $\Psi_{\sim}$  - матрица передаточных функций формирующего фильтра,  $\Delta$  - вектор «белого» шума,  $\bar{\Phi}$  и  $\tilde{\Phi}$  - матрицы передаточных функций оптимальных наблюдателей векторов сигналов  $\bar{x}$  и  $\tilde{x}$ , структуры которых в дальнейшем подлежат синтезу. Структуры  $W_{\sim}$  и  $W_{\sim}$  матриц передаточных функций регуляторов в соответствующих контурах стабилизации, синтез оптимальных которых определяет конечные цели поставленной в разделе задачи. Вектор  $x_{\Sigma}$  -  $n$ -мерный суммарный вектор выходных координат исследуемой системы.

Векторы сигналов наблюдений в обоих контурах исследуемой системы целесообразно определить уравнениями

$$\tilde{y} = y_{\Sigma} - \bar{y} = K\tilde{x} + \tilde{\varphi}; \bar{y} = K\bar{x} + \bar{\varphi}, \quad (8.45)$$

а векторы оптимальных наблюдений выходных сигналов обоих контуров представленные в виде

$$\hat{\tilde{x}} = \tilde{\Phi}\tilde{y}, \hat{\bar{x}} = \bar{\Phi}\bar{y}, \quad (8.46)$$

могут быть определены после синтеза оптимальных структур наблюдателей  $\bar{\Phi}$  и  $\tilde{\Phi}$ .



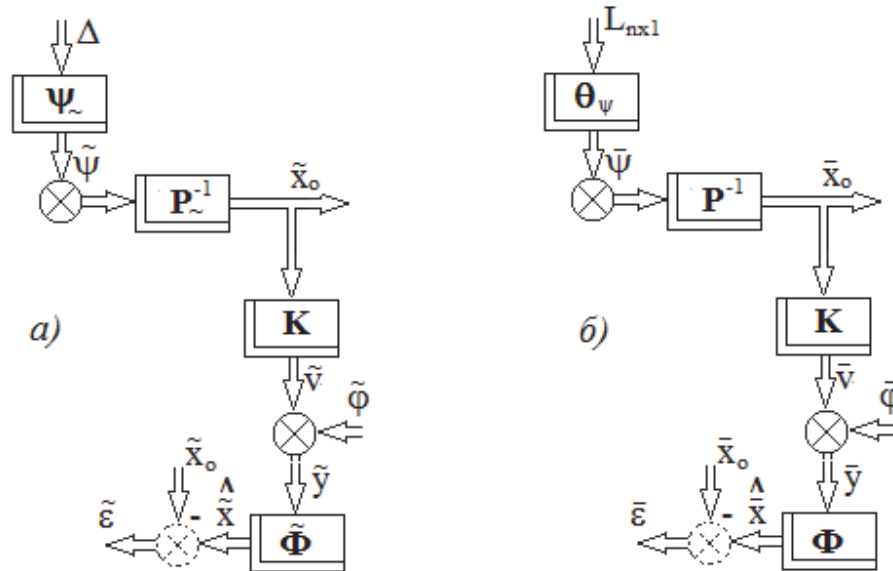


Рис. 8.12. Структурные схемы трактов синтеза оптимальных структур  $\tilde{\Phi}$  и  $\bar{\Phi}$  наблюдателей случайной а) и детерминированной б) информации в системе стабилизации объекта.

Вектор наблюдений случайной информации в системе (рис. 8.12 а) имеет вид

$$\tilde{y} = K\tilde{x} + \tilde{\varphi} = KP^{-1}\Psi\Delta + \tilde{\varphi}, \quad (8.47)$$

тогда вектор оптимальных оценок случайных выходных координат объекта должен быть записан так

$$\hat{\tilde{x}} = \tilde{\Phi}\tilde{y} = \tilde{\Phi}(KP^{-1}\Psi\Delta + \tilde{\varphi}). \quad (8.48)$$

По аналогии, если вектор наблюдений детерминированной информации в системе (рис. 8.12 б) представить в виде

$$\bar{y} = K\bar{x} + \bar{\varphi} = (KP^{-1}\theta_{\psi} + \theta_{\varphi})L_{v \times 1}, \quad (8.49)$$

то вектор оптимальных оценок детерминированных выходных координат объекта представляется так

$$\hat{\bar{x}} = \bar{\Phi}\bar{y} = \bar{\Phi}(KP^{-1}\theta_{\psi} + \theta_{\varphi})L_{n \times 1}. \quad (8.50)$$

С учётом выражений (8.45)-(8.48) и структуры (рис. 8.12а) вектор ошибок определения случайных сигналов выходных координат объекта будет иметь вид

$$\tilde{\varepsilon} = \hat{x} - \tilde{x}_0 = \tilde{\Phi}(KP^{-1}\Psi\Delta + \tilde{\varphi}) - P^{-1}\Psi\Delta; \quad (8.51)$$

а матрица спектральных плотностей этого вектора, следовательно, такая

$$S'_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}} = \tilde{\Phi}(KP^{-1}\Psi\Psi_*P_*^{-1}K_* + S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}})\tilde{\Phi}_* - \tilde{\Phi}KP^{-1}\Psi\Psi_*P_*^{-1} - \\ - P^{-1}\Psi\Psi_*P_*^{-1}K_*\tilde{\Phi}_* + P^{-1}\Psi\Psi_*P_*^{-1} \quad (8.52)$$

С учётом выражений (8.45)-(8.50) и структуры (рис. 8.12б) вектор оптимальных оценок ошибок наблюдения детерминированных сигналов выходных координат объекта следует записать так

$$\bar{\varepsilon} = \hat{x} - \bar{x}_0 = [\bar{\Phi}(KP^{-1}\theta_\psi + \theta_\varphi) - P^{-1}\theta_\psi]L_{n \times 1}; \\ \bar{\varepsilon}_* = L_{1 \times n}[(\theta_{\psi_*}P_*^{-1}K_* + \theta_{\varphi_*})\bar{\Phi}_* - \theta_{\psi_*}P_*^{-1}], \quad (8.53)$$

а произведение векторов  $\bar{\varepsilon}$  и  $\bar{\varepsilon}_*$  представляется в виде

$$\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}_* = [\bar{\Phi}(KP^{-1}\theta_\psi + \theta_\varphi) - P^{-1}\theta_\psi]L_n[(\theta_{\psi_*}P_*^{-1}K_* + \theta_{\varphi_*})\bar{\Phi}_* - \theta_{\psi_*}P_*^{-1}] = \\ = \bar{\Phi}(KP^{-1}\theta_\psi + \theta_\varphi)L_n(\theta_{\psi_*}P_*^{-1}K_* + \theta_{\varphi_*})\bar{\Phi}_* - \bar{\Phi}(KP^{-1}\theta_\psi + \theta_\varphi)L_n\theta_{\psi_*}P_*^{-1} - \\ - P^{-1}\theta_\psi L_n(\theta_{\psi_*}P_*^{-1}K_* + \theta_{\varphi_*})\bar{\Phi}_* + P^{-1}\theta_\psi L_n\theta_{\psi_*}P_*^{-1}, \quad (8.54)$$

где  $L_n = L_{n \times 1}L_{1 \times n}$ .

Зная выражения (8.45)-(8.54), возможно приступить к решению задач синтеза оптимальных структур  $\tilde{\Phi}$  и  $\bar{\Phi}$ .

Функционал качества наблюдения вектора выходных случайных сигналов  $\tilde{\varepsilon}$  объекта имеет вид

$$\tilde{e} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(S'_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}}R)ds \quad (8.55)$$

Подстановка матрицы (8.52) в функционал (8.55), позволяет переписать последний так

$$\tilde{e} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [\tilde{\Phi}(KP^{-1}\Psi\Psi_*P_*^{-1}K_* + S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}})\tilde{\Phi}_* - \tilde{\Phi}KP^{-1}\Psi\Psi_*P_*^{-1} - \\ - P^{-1}\Psi\Psi_*P_*^{-1}K_*\tilde{\Phi}_* + P^{-1}\Psi\Psi_*P_*^{-1}]R \} ds. \quad (8.56)$$

Решая задачу синтеза оптимальной структуры наблюдателя методом Винера-Колмогорова, следует определить первую вариацию функционала (8.56) и условие тождественного равенства её нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций.

Первая вариация  $\delta\tilde{e}$  будет такой

$$\begin{aligned} \delta\tilde{e} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ R [\tilde{\Phi} (KP^{-1}\Psi_{\sim}\Psi_{\sim*}P^{-1}K_* + S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}) - P^{-1}\Psi_{\sim}\Psi_{\sim*}P^{-1}K_*] \delta\tilde{\Phi}_* + \\ & + \delta\tilde{\Phi} [(KP^{-1}\Psi_{\sim}\Psi_{\sim*}P^{-1}K_* + S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}})\tilde{\Phi}_* - KP^{-1}\Psi_{\sim}\Psi_{\sim*}P^{-1}] R \} ds \end{aligned} \quad (8.57)$$

Вводим обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_*\Gamma &= R; DD_* = KP^{-1}\Psi_{\sim}\Psi_{\sim*}P^{-1}K_* + S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}; \\ T &= T_0 + T_+ + T_- = KP^{-1}\Psi_{\sim}\Psi_{\sim*}P^{-1}D_*^{-1}. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Учитывая ранее высказанные положения об операциях факторизации и сепарации матриц, следует записать условия тождественного равенства вариации (8.58) нулю на выбранном классе матриц передаточных функций так

$$\Gamma\tilde{\Phi}D = (T_0 + T_+),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры  $\hat{\tilde{\Phi}}$  в виде

$$\hat{\tilde{\Phi}} = \Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^{-1}. \quad (8.59)$$

Как уже определено ранее, вектор наблюдений детерминированной информации в исследуемой системе имеет вид

$$\bar{y} = K\bar{x} + \bar{\varphi} = (KP^{-1}\theta_{\psi} + \theta_{\varphi})L_{v \times 1}, \quad (8.49)$$

а вектор оптимальных оценок детерминированных выходных координат объекта должен быть записан так

$$\hat{\bar{x}} = \bar{\Phi}\bar{y} = \bar{\Phi}(KP^{-1}\theta_{\psi} + \theta_{\varphi})L_{n \times 1}. \quad (8.50)$$

Как и ранее, с учётом структурной схемы (рис. 8.12б) и выражения (8.50) вектор оптимальных оценок ошибок наблюдения детерминированных выходных координат объекта должен иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \hat{\bar{x}} - \bar{x}_0 = [\bar{\Phi}(KP^{-1}\theta_{\psi} + \theta_{\varphi}) - P^{-1}\theta_{\psi}]L_{n \times 1}; \\ \bar{\varepsilon}_* &= L_{1 \times n} [(\theta_{\psi*}P_*^{-1}K_* + \theta_{\varphi*})\bar{\Phi}_* - \theta_{\psi*}P_*^{-1}], \end{aligned} \quad (8.53)$$

а произведение векторов  $\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}_*$  представлено так

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}_* &= \bar{\Phi}(KP^{-1}\theta_{\psi} + \theta_{\varphi})L_n(\theta_{\psi*}P_*^{-1}K_* + \theta_{\varphi*})\bar{\Phi}_* - \bar{\Phi}(KP^{-1}\theta_{\psi} + \theta_{\varphi})L_n\theta_{\psi*}P_*^{-1} - \\ &- P^{-1}\theta_{\psi}L_n(\theta_{\psi*}P_*^{-1}K_* + \theta_{\varphi*})\bar{\Phi}_* + P^{-1}\theta_{\psi}L_n\theta_{\psi*}P_*^{-1}. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Функционал качества синтеза оптимальной структуры  $\bar{\Phi}$  наблюдателя детерминированной информации выхода объекта должен быть записан так

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (\bar{\varepsilon} \bar{\varepsilon}_*^* R) ds. \quad (8.60)$$

Подстановка произведения (8.54) в функционал (8.60) позволяет переписать его в виде

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ [\bar{\Phi} (KP^{-1}\theta_\psi + \theta_\varphi) L_n (\theta_{\psi^*} P_*^{-1} K_* + \theta_{\varphi^*}) \bar{\Phi}_* - \bar{\Phi} (KP^{-1}\theta_\psi + \theta_\varphi) L_n \theta_{\psi^*} P_*^{-1} - P^{-1}\theta_\psi L_n (\theta_{\psi^*} P_*^{-1} K_* + \theta_{\varphi^*}) \bar{\Phi}_* + P^{-1}\theta_\psi L_n \theta_{\psi^*} P_*^{-1}] R \} ds. \quad (8.61)$$

Решая подставленную задачу синтеза методом Винера-Колмогорова, необходимо вначале определить первую вариацию функционала (8.61), а затем условие тождественного равенства её нулю и алгоритм синтеза по исходной информации оптимальной структуры  $\bar{\Phi}$  наблюдателя.

Первая вариация функционала  $\delta\mathcal{E}$  будет иметь вид

$$\delta\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ R [\bar{\Phi} (KP^{-1}\theta_\psi + \theta_\varphi) L_n (\theta_{\psi^*} P_*^{-1} K_* + \theta_{\varphi^*}) - P^{-1}\theta_\psi L_n (\theta_{\psi^*} P_*^{-1} K_* + \theta_{\varphi^*})] \delta\bar{\Phi}_* + \delta\bar{\Phi} [(KP^{-1}\theta_\psi + \theta_\varphi) L_n (\theta_{\psi^*} P_*^{-1} K_* + \theta_{\varphi^*}) \bar{\Phi}_* - (KP^{-1}\theta_\psi + \theta_\varphi) L_n \theta_{\psi^*} P_*^{-1}] R \} ds. \quad (8.62)$$

Целесообразны обозначения

$$\Gamma_* \Gamma = R; D L_n D_* = (KP^{-1}\theta_\psi + \theta_\varphi) L_n (\theta_{\psi^*} P_*^{-1} K_* + \theta_{\varphi^*});$$

$$T = T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1} P^{-1} \theta_\psi L_n (\theta_{\psi^*} P_*^{-1} K_* + \theta_{\varphi^*}) D_*^{-1} (L_n)^{-1}.$$

Если  $(\theta_{\psi^*} P_*^{-1} K_* + \theta_{\varphi^*}) = D_*$ , то  $T = T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1} P^{-1} \theta_\psi$ .

Условие тождественного равенства вариации (8.62) нулю будет

$$\Gamma \bar{\Phi} D = (T_0 + T_+),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры  $\hat{\Phi}$  наблюдателя вектора детерминированных сигналов выхода объекта

$$\hat{\Phi} = \Gamma^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1}. \quad (8.63)$$

После определения оптимальных структур наблюдателей  $\hat{\Phi}$  (8.59) и  $\hat{\Phi}$  (8.63) стало возможным разделить контуры обработки детерминированной и случайной

информации в исследуемой системе стабилизации объекта при стохастических воздействиях и приступить непосредственно к синтезу оптимальных структур регуляторов в каждом из контуров.

На рис. 8.13 (а, б) представлены структурные схемы контуров стабилизации объекта при случайных и детерминированных воздействиях с учётом известных структур матриц передаточных функций  $\hat{\Phi}$  и  $\hat{\Phi}$ .

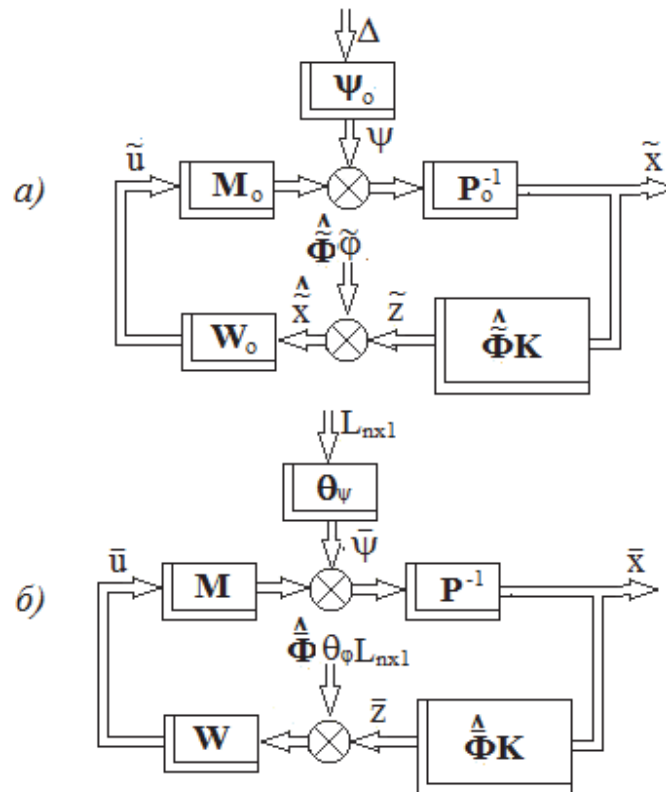


Рис. 8.13 (а, б). Промежуточные структурные схемы контуров стабилизации случайной (а) и детерминированной (б) информации.

Вектор  $\tilde{z}$  и  $\bar{z}$  имеют вид

$$\tilde{z} = \hat{\Phi}K\tilde{x}, \quad (8.64)$$

$$\bar{z} = \hat{\Phi}K\bar{x}. \quad (8.65)$$

Векторы  $\tilde{x}$  и  $\bar{x}$  представим таким образом

$$\tilde{x} = (\hat{\Phi}K)^{-1}\tilde{z}, \quad (8.66)$$

$$\bar{x} = (\hat{\Phi}K)^{-1}\bar{z}. \quad (8.67)$$

Подстановка выражений (8.66) и (8.67) в соответствующие уравнения движения объекта

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= P_{\sim}^{-1}(M_{\sim}\tilde{u} + \Psi_{\sim}\Delta), \\ \bar{x} &= P^{-1}(M\theta_{\bar{u}} + \theta_{\psi})L_{n \times 1}, \end{aligned}$$

приводит к выражениям

$$\tilde{z} = (\hat{\Phi}K)P_{\sim}^{-1}(M_{\sim}\tilde{u} + \Psi_{\sim}\Delta), \quad (8.68)$$

$$\bar{z} = (\hat{\Phi}K)P^{-1}(M\theta_{\bar{u}} + \theta_{\psi})L_{n \times 1}. \quad (8.69)$$

С учётом уравнений (8.68) и (8.69) промежуточные структурные схемы обоих каналов будут иметь вид (рис. 8.14).

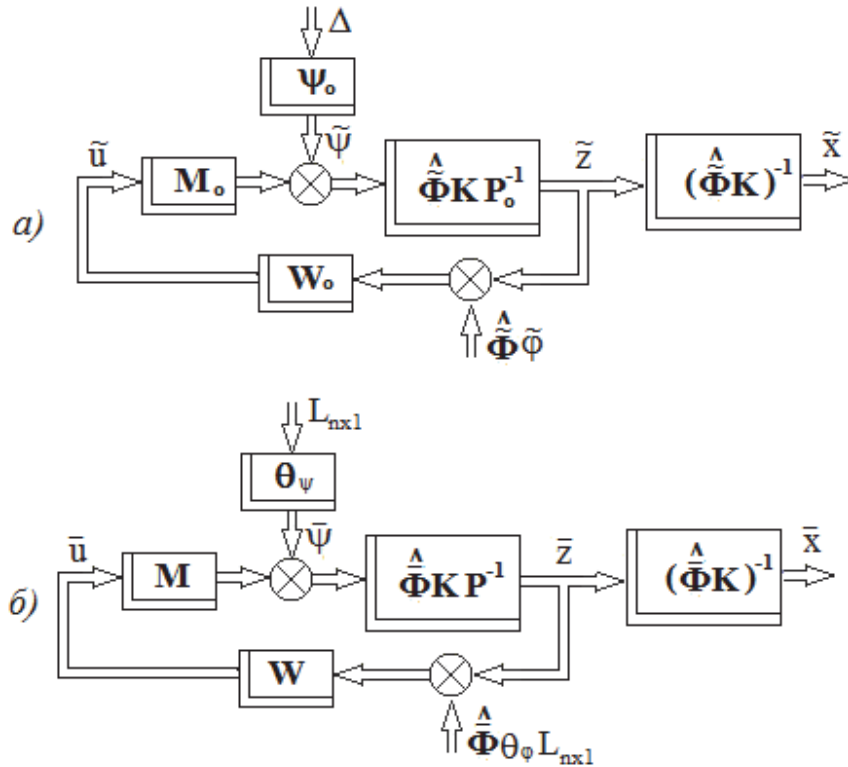


Рис. 8.14 (а,б) Промежуточные структурные схемы контуров стабилизации случайной а) и детерминированной б) информации в исследуемой системе.

Для приведения структурных схем (рис. 8.14) к стандартному виду, необходимо в обратных связях избавиться от помех измерений и перенести их в точку приложения возмущений.

Приведенное воздействие в контуре а) будет

$$\tilde{\zeta} = \Psi \Delta + P (\hat{\Phi} K)^{-1} \hat{\Phi} \tilde{\varphi}, \quad (8.70)$$

а приведенное воздействие в контуре б) имеет вид

$$\bar{\zeta} = \theta_\psi L_{n \times 1} + P (\hat{\Phi} K)^{-1} \hat{\Phi} \theta_\varphi L_{v \times 1} = [\theta_\psi + P (\hat{\Phi} K)^{-1} \hat{\Phi} \theta_\varphi] L_{n \times 1}. \quad (8.71)$$

С учётом выражений (8.70) и (8.71) стандартные структурные схемы каналов а) и б) примут вид (рис. 8.15).

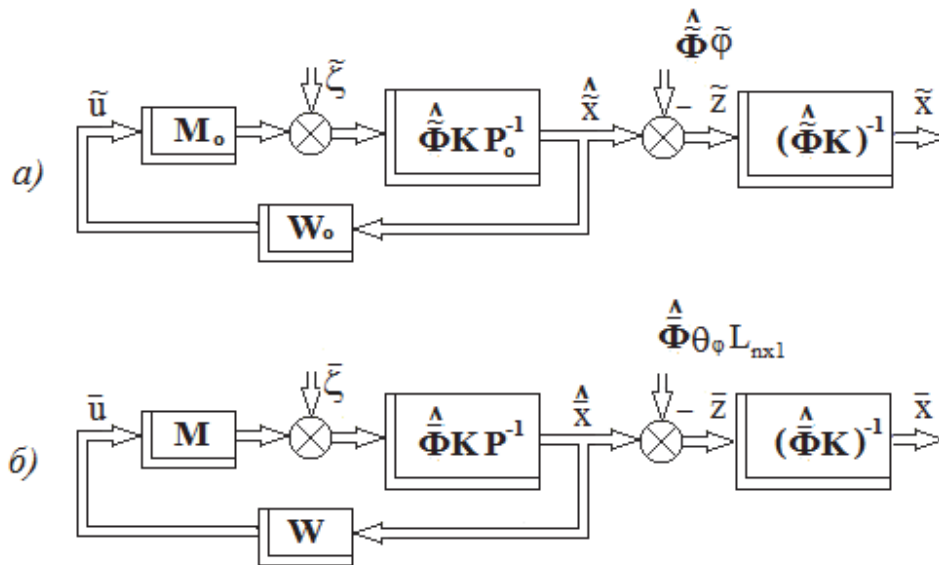


Рис. 8.15 (а,б) Традиционные структурные схемы каналов стабилизации объекта при случайных а) и детерминированных б) воздействиях.

По схеме (рис. 8.15) видно, что возможно ввести искомую матрицу передаточных функций системы  $F_{\tilde{u}}$  и с её помощью оценить вектор сигналов управления контура

$$\tilde{u} = F_{\tilde{u}} \tilde{\zeta}. \quad (8.72)$$

Вектор сигналов оценок выходов объекта будет

$$\hat{\tilde{x}} = F_{\hat{\tilde{x}}}\tilde{\zeta}, \quad (8.73)$$

причем матрица  $F_{\hat{\tilde{x}}}$  связана с матрицей  $F_{\tilde{u}}$  уравнением связи вида

$$F_{\hat{\tilde{x}}} = (\widehat{\Phi}K)P_{\sim}^{-1}(M_{\sim}\tilde{u} + \tilde{\zeta}) = (\widehat{\Phi}K)P_{\sim}^{-1}(M_{\sim}F_{\tilde{u}} + E_n), \quad (8.74)$$

а искомая матрица передаточных функций регулятора  $W_{\sim}$  в канале определяется выражением

$$W_{\sim} = F_{\tilde{u}}(F_{\hat{\tilde{x}}})^{-1}. \quad (8.75)$$

Полагается, что качество обработки случайной информации в рассматриваемом контуре можно оценить функционалом вида

$$\tilde{e} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (S'_{\hat{\tilde{x}}\hat{\tilde{x}}}R + S'_{\tilde{u}\tilde{u}}C) ds. \quad (8.76)$$

Транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\hat{\tilde{x}}$  будет согласно теореме Винера-Хинчина иметь вид

$$S'_{\hat{\tilde{x}}\hat{\tilde{x}}} = (\widehat{\Phi}K)P_{\sim}^{-1}(M_{\sim}F_{\tilde{u}}S'_{\tilde{\zeta}\tilde{\zeta}}F_{\tilde{u}*}M_{\sim*} + M_{\sim}F_{\tilde{u}}S'_{\tilde{\zeta}\tilde{\zeta}} + S'_{\tilde{\zeta}\tilde{\zeta}}F_{\tilde{u}*}M_{\sim*} + S'_{\tilde{\zeta}\tilde{\zeta}})P_{\sim*}^{-1}(\widehat{\Phi}K)*, \quad (8.77)$$

$$S'_{\tilde{u}\tilde{u}} = F_{\tilde{u}}S'_{\tilde{\zeta}\tilde{\zeta}}F_{\tilde{u}*}; \quad (8.78)$$

$$S'_{\tilde{\zeta}\tilde{\zeta}} = \Psi_{\sim}\Psi_{\sim*} + P_{\sim}(\widehat{\Phi}K)^{-1}\widehat{\Phi}S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}\widehat{\Phi}*(\widehat{\Phi}K)^{-1}P_{\sim*}. \quad (8.79)$$

Подстановка матриц (8.77), (8.78) и (8.79) в функционал (8.76) позволяет переписать последний в виде

$$\begin{aligned} \tilde{e} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ & [(\widehat{\Phi}K)P_{\sim}^{-1}(M_{\sim}F_{\tilde{u}}S'_{\tilde{\zeta}\tilde{\zeta}}F_{\tilde{u}*}M_{\sim*} + M_{\sim}F_{\tilde{u}}S'_{\tilde{\zeta}\tilde{\zeta}} + S'_{\tilde{\zeta}\tilde{\zeta}}F_{\tilde{u}*}M_{\sim*} + \\ & + S'_{\tilde{\zeta}\tilde{\zeta}})P_{\sim*}^{-1}(\widehat{\Phi}K)*]R + F_{\tilde{u}}S'_{\tilde{\zeta}\tilde{\zeta}}F_{\tilde{u}*}C \} ds. \end{aligned} \quad (8.80)$$

Решая задачу синтеза структуры  $F_{\tilde{u}}$  методом Винера-Колмогорова, нужно определить первую вариацию функционала (8.80) и приравнять её к нулю. Первая вариация функционала будет иметь вид

$$\delta\tilde{e} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ ([M_{\sim*}P_{\sim*}^{-1}(\widehat{\Phi}K)*R(\widehat{\Phi}K)P_{\sim}^{-1}M_{\sim} + C]F_{\tilde{u}}S'_{\tilde{\zeta}\tilde{\zeta}} +$$

$$\begin{aligned}
& +M_{\sim*}P_{\sim*}^{-1}(\widehat{\Phi}K)_*R(\widehat{\Phi}K)P_{\sim}^{-1}S'_{\zeta\zeta}\delta F_{\tilde{u}*} + \\
& +\delta F_{\tilde{u}}\{S'_{\zeta\zeta}F_{\tilde{u}*}[M_{\sim*}P_{\sim*}^{-1}(\widehat{\Phi}K)_*R(\widehat{\Phi}K)P_{\sim}^{-1}M_{\sim} + C] + \\
& +S'_{\zeta\zeta}P_{\sim*}^{-1}(\widehat{\Phi}K)_*R(\widehat{\Phi}K)P_{\sim}^{-1}M_{\sim}\})ds. \tag{8.81}
\end{aligned}$$

Необходимо ввести обозначения

$$\Gamma_{\sim*}\Gamma_{\sim} = M_{\sim*}P_{\sim*}^{-1}(\widehat{\Phi}K)_*R(\widehat{\Phi}K)P_{\sim}^{-1}M_{\sim} + C; D_{\sim}D_{\sim*} = S'_{\zeta\zeta};$$

$$T_{\sim} = T_{\sim 0} + T_{\sim +} + T_{\sim -} = \Gamma_{\sim*}^{-1}M_{\sim*}P_{\sim*}^{-1}(\widehat{\Phi}K)_*R(\widehat{\Phi}K)P_{\sim}^{-1}D_{\sim}.$$

Условие тождественных равенств вариации (8.81) нулю будет

$$\Gamma_{\sim}F_{\tilde{u}}D_{\sim} = -(T_{\sim 0} + T_{\sim +}),$$

а алгоритм выбора структуры  $\widehat{F}_{\tilde{u}}$  следует записать так

$$\widehat{F}_{\tilde{u}} = -\Gamma_{\sim}^{-1}(T_{\sim 0} + T_{\sim +})D_{\sim}^{-1},$$

алгоритм выбора структуры  $\widehat{F}_{\hat{x}}$  будет таким

$$\widehat{F}_{\hat{x}} = (\widehat{\Phi}K)P_{\sim}^{-1}(M_{\sim}\widehat{F}_{\tilde{u}} + E_n),$$

а оптимальная структура регулятора  $W_{\sim}$  имеет вид (8.75)

$$W_{\sim} = \widehat{F}_{\tilde{u}}(\widehat{F}_{\hat{x}})^{-1}. \tag{8.82}$$

При знании типовой структуры канала преобразования детерминированной информации (рис. 8.15 б), а также выражения (8.71), есть возможность приступить к задаче синтеза оптимальной структуры  $W$  регулятора в канале стабилизации вектора детерминированных сигналов  $\hat{x}$ , а при необходимости и  $x$ .

Как видно из схемы (рис. 8.15 б), всегда есть возможность ввести искомую матрицу передаточных функций канала от возмущения  $\zeta$  к вектору сигналов управления  $u$ , которая будет соответствовать уравнению

$$\bar{u} = F_u\bar{\zeta}, \tag{8.83}$$

а также матрицу передаточных функций канала от возмущений  $\bar{\zeta}$  к вектору  $\hat{x}$  оценок выходных детерминированных сигналов объекта вида

$$\hat{x} = F_{\hat{x}}\bar{\zeta}, \quad (8.84)$$

причём согласно схеме (рис. 8.15 б) вектор сигналов  $\hat{x}$  возможно записать так

$$\hat{x} = (\hat{\Phi}K)P^{-1}(M\bar{u} + \bar{\zeta}) = (\hat{\Phi}K)P^{-1}(MF_u + E_n)\bar{\zeta}, \quad (8.85)$$

а матрицу  $F_{\hat{x}}$  найти по уравнению связи

$$F_{\hat{x}} = (GK)P^{-1}(MF_u + E_n). \quad (8.86)$$

Учитывая уравнения (8.71), (8.83) и (8.85) возможно составить такие произведения эрмитово сопряженных векторов как  $\hat{x}\hat{x}_*$ ,  $\bar{u}\bar{u}_*$  и  $\bar{\zeta}\bar{\zeta}_*$ , которые потребуются при решении поставленной выше задачи синтеза структуры  $F_u$ .

Итак, учитывая выражение (8.71), следует записать произведение  $\bar{\zeta}\bar{\zeta}_*$  таким образом

$$\bar{\zeta}\bar{\zeta}_* = [\theta_{\psi} + P(\hat{G}K)^{-1}\hat{G}\theta_{\varphi}]L_n[\theta_{\psi_*} + \theta_{\varphi_*}\hat{G}_*(\hat{G}K)_*^{-1}P_*]; \quad (8.87)$$

$$\hat{x}\hat{x}_* = (\hat{\Phi}K)P^{-1}(MF_u + E_n)\bar{\zeta}\bar{\zeta}_*(F_{u_*}M_* + E_n)P_*^{-1}(\hat{\Phi}K)_*; \quad (8.88)$$

$$\bar{u}\bar{u}_* = F_u\bar{\zeta}\bar{\zeta}_*F_{u_*}; \quad (8.89)$$

Как функционал качества преобразования детерминированной информации в исследуемом контуре стабилизации используется выражение

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(\hat{x}\hat{x}_*R + \bar{u}\bar{u}_*C)ds. \quad (8.90)$$

Подстановка выражений (8.87)-(8.89) в функционал (8.90) предполагает представление последнего в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [(\hat{\Phi}K)P^{-1}(MF_u + E_n)\bar{\zeta}\bar{\zeta}_*(F_{u_*}M_* + E_n)P_*^{-1}(\hat{\Phi}K)_*R + \\ & + F_u\bar{\zeta}\bar{\zeta}_*F_{u_*}C]ds. \end{aligned} \quad (8.91)$$

Решая задачу синтеза структуры  $F_u$  методом Винера-Колмогорова, вначале определим первую вариацию функционала (8.91) и условие тождественного

равенства её нулю, а затем алгоритм синтеза по исходным данным задачи оптимальной структуры  $\hat{F}_u$ , оптимальных структур матриц  $\hat{F}_{\hat{x}}$  и  $\hat{W}$ .

Первая вариация функционала (8.91) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (\{ [M_* P_*^{-1} (\hat{\Phi} K)_* R (\hat{\Phi} K) P^{-1} M + C] F_u \bar{\zeta} \bar{\zeta}^* + \\ & + M_* P_*^{-1} (\hat{\Phi} K)_* R (\hat{\Phi} K) P^{-1} \bar{\zeta} \bar{\zeta}^* \} \delta F_{u*} + \delta F_u \{ \bar{\zeta} \bar{\zeta}^* F_{u*} [M_* P_*^{-1} (\hat{\Phi} K)_* R (\hat{\Phi} K) P^{-1} M + \\ & + C] + \bar{\zeta} \bar{\zeta}^* P_*^{-1} (\hat{\Phi} K)_* R (\hat{\Phi} K) P^{-1} M \}) ds. \end{aligned} \quad (8.92)$$

Необходимые следующие обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_{-*} \Gamma_{-} &= M_* P_*^{-1} (\hat{\Phi} K)_* R (\hat{\Phi} K) P^{-1} M + C; D_{-} L_n D_{-*} = S'_{\bar{\zeta} \bar{\zeta}^*}; \\ T_{-} &= T_{-0} + T_{-+} + T_{--} = \Gamma_{-*}^{-1} M_* P_*^{-1} (\hat{\Phi} K)_* R (\hat{\Phi} K) P^{-1} D_{-}. \end{aligned} \quad (8.93)$$

С учётом обозначений (8.93) вариацию (8.92) следует переписать в виде

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\Gamma_{-*} (\Gamma_{-} F_u D_{-} + T_{-}) L_n D_{-*} \delta F_{u*} + \\ & + \delta F_u D_{-} L_n (D_{-*} F_{u*} \Gamma_{-*} + T_{-}) \Gamma_{-}] ds, \end{aligned}$$

а условие тождественного равенства вариации нулю так

$$\Gamma_{-} F_u D_{-} = -(T_{-0} + T_{-+}).$$

Алгоритм синтеза оптимальной структуры матрицы  $\hat{F}_u$  будет следующим

$$\hat{F}_u = -\Gamma_{-}^{-1} (T_{-0} + T_{-+}) D_{-}^{-1}, \quad (8.94)$$

алгоритм синтеза оптимальной структуры матрицы  $\hat{F}_{\hat{x}}$  (8.86) представляется так

$$\hat{F}_{\hat{x}} = (GK) P^{-1} (M \hat{F}_u + E_n),$$

а оптимальная структура матрицы  $\hat{W}$  регулятора будет

$$\hat{W} = \hat{F}_u (\hat{F}_{\hat{x}})^{-1}. \quad (8.95)$$

## **ГЛАВА 9 ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ИЛИ НА ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА ПРИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

Как известно из раздела 1.1.2 монографии [7] «Пути, приводящие к созданию оптимальных систем стабилизации подвижных объектов и их бортовых кибернетических комплексов различного назначения», структурные схемы оптимальных систем стабилизации и управления движением возможно определять путем решения задач оптимального синтеза регуляторов указанных систем как при случайных, так и детерминированных воздействиях. Известно также, что реальные системы стабилизации или управления движением подвержены одновременному суммарному (стохастическому) воздействию обоих видов возмущающих факторов. Линейные оптимальные системы стабилизации объектов предполагают возможность построения отдельных трактов стабилизации движений объекта при воздействии на него только детерминированных или только случайных возмущений.

В настоящей главе рассматривается ряд возможных постановок и алгоритмов решения практических задач синтеза оптимальных структур регуляторов в системах стабилизации движений объекта при детерминированных возмущающих факторах.

### **9.1 Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры регулятора в системе стабилизации при «идеальных» измерениях**

Пусть структурная схема системы стабилизации движения многомерного линейного объекта, модели динамики которого уже известны по данным предшествующего этапа его структурной идентификации, представлена на рисунке 9.1.

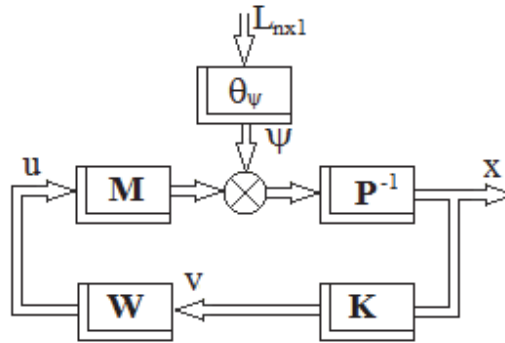


Рис.9.1 Структурная схема исследуемой системы стабилизации подвижного объекта.

Здесь, как и ранее движение объекта описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, преобразованной по Фурье, вида

$$Px = Mu + \psi, \quad (9.1)$$

в которой вектор детерминированных возмущений  $\psi$ , как и ранее, следует представить в виде

$$\psi = \theta_\psi L_{n \times 1}, \quad (9.2)$$

где  $\theta_\psi$  – диагональная матрица, с элементами на главной диагонали равными изображениям Лапласа компонентов вектора  $\psi$ ,  $L_{n \times 1}$  - единичный вектор-столбец.

На рисунке 9.1. блоком «K» показана матрица передаточных функции «идеального» бортового измерителя размерности  $n \times n$ , а блоком «W» – искомая матрица придаточных функций регулятора в системе стабилизации размерности  $m \times n$ .

Вектор наблюдений, в данном случае, сигналов выходов объекта  $v$  можно записать так

$$v = Kx. \quad (9.3)$$

Из выражения (9.3) следует, что вектор  $x$  может быть представлен в следующем виде

$$x = K^{-1}v. \quad (9.4)$$

Подставив вектор (9.4) в уравнение (9.1), последнее возможно переписать так

$$v = KP^{-1}(Mu + \psi). \quad (9.5)$$

Как и ранее, полагая возможным представление детерминированного вектора  $u$  в виде выражения  $u = F_u \psi$ , и учитывая выражение (9.2), уравнение (9.5) возможно переписать так

$$v = KP^{-1}(MF_u + E_n)\theta_\psi L_{n \times 1}, \quad (9.6)$$

где  $F_u$  - введенная ранее матрица передаточных функций замкнутой системы.

Соответствующую выражению (9.6) структурную схему преобразованной системы стабилизации можно представить в виде (рис.9.2).

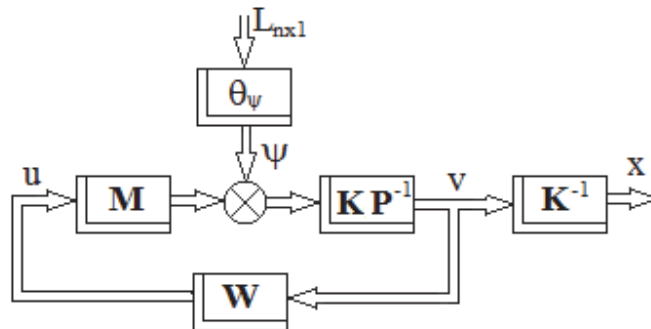


Рис.9.2. Преобразованная структурная схема исследуемой системы стабилизации движения объекта.

Для структурной схемы (рис.9.2) удобно ввести следующие выражения

$$u = F_u \psi; v = F_v \psi, \quad (9.7)$$

где  $F_u$  – искомая в задаче матрица передаточных функций замкнутой системы от возмущения  $\psi$  к управлению  $u$ ,  $F_v$  – матрица передаточных функций замкнутой системы от возмущения  $\psi$  к выходу  $v$ , которая выражается через матрицу  $F_u$  уравнением связи вида

$$F_v = KP^{-1}(MF_u + E_n). \quad (9.8)$$

Учитывая очевидное выражение

$$u = Wv, \quad (9.9)$$

а также уравнения (9.7), нетрудно установить равенство

$$W = F_u(F_v)^{-1}. \quad (9.10)$$

Пусть функционал качества стабилизации движения объекта исследуемой системы будет иметь вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (vv_*R + uu_*C) ds, \quad s = j\omega \quad (9.11)$$

Подстановка в функционал (9.11) выражений (9.7) и (9.8) позволяет переписать последний в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ [KP^{-1}(MF_u + E_n)\theta_\psi L_n \theta_{\psi^*} (F_{u^*} M_* + E_n) P_*^{-1} K_*] R + \\ & + F_u \theta_\psi L_n \theta_{\psi^*} F_{u^*} C \} ds, \end{aligned} \quad (9.12)$$

где  $L_n = L_{n \times 1} L_{1 \times n}$ .

Решая задачу синтеза оптимальной структуры  $F_u$  методом Винера-Колмогорова, необходимо вначале определить первую вариацию функционала (9.12), а затем условие её тождественного равенства нулю на классе устойчивых и физически реализуемых варьируемых матриц  $F_u$ .

Первая вариация функционала  $\delta\mathcal{E}$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [(M_* P_*^{-1} K_* R K P^{-1} M + C) F_u \theta_\psi L_n \theta_{\psi^*} + \\ & + M_* P_*^{-1} K_* R K P^{-1} \theta_\psi L_n \theta_{\psi^*}] \delta F_{u^*} + \delta F_u [\theta_\psi L_n \theta_{\psi^*} F_{u^*} (M_* P_*^{-1} K_* R K P^{-1} M + C) + \\ & + \theta_\psi L_n \theta_{\psi^*} P_*^{-1} K_* R K P^{-1} M] ds. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Необходимы обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_* \Gamma &= M_* P_*^{-1} K_* R K P^{-1} M + C; \quad DL_n D_* = \theta_\psi L_n \theta_{\psi^*}; \\ T &= T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1} M_* P_*^{-1} K_* R K P^{-1} D; \end{aligned} \quad (9.14)$$

С учетом обозначения (9.14) условие тождественного равенства вариации (9.13) нулю будет

$$\Gamma F_u D = -(T_0 + T_+),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры  $F_u$  по исходным данным задачи

$$F_u = -\Gamma^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1}, \quad (9.15)$$

оптимальная структура матрицы  $F_v$

$$F_v = KP^{-1}(MF_u + E_n),$$

а оптимальная структура матрицы передаточных функций регулятора

$$W = F_u(F_v)^{-1}. \quad (9.16)$$

## 9.2 Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры регулятора в системе стабилизации в пространстве объекта при измерении интересующих векторов сигналов системы с помехами

Рассматриваемая ниже задача отличается от приведенной в разделе 9.1 лишь учетом детерминированных помех измерений интересующих векторов спектров сигналов исследуемой системы и некоторыми дополнительными особенностями преобразования исследуемой структуры системы к стандартному виду. Структурная схема исследуемой системы стабилизации в традиционной форме показана на рисунке 9.3. Здесь, как и ранее, полагается, что модели динамики векторов сигналов объекта и измерительного устройства уже известны после этапов их структурной идентификации.

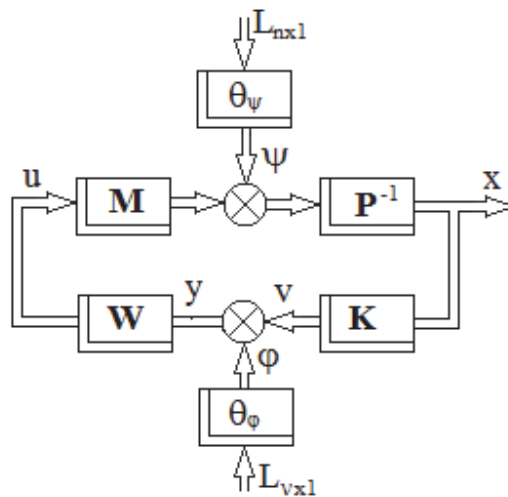


Рис.9.3. структурная схема системы стабилизации объекта в традиционной форме.

Как и ранее, вектор сигналов на выходе матрицы  $K$  передаточных функций измерительного устройства размерности  $(v \times n)$  должен быть записан так

$$v = Kx, \quad (9.3)$$

а вектор сигналов (выходы объекта)  $x$  следующим образом

$$x = K^\# v, \quad (9.17)$$

где «#» – символ псевдообращения прямоугольных матриц.

Подстановка выражения (9.17) в известное уравнение движения объекта вида

$$x = P^{-1}(Mu + \psi),$$

проводит последнее к виду

$$v = KP^{-1}(Mu + \psi) \quad (9.18)$$

и к возможности построения промежуточной структурной схемы системы стабилизации (рис.9.4).

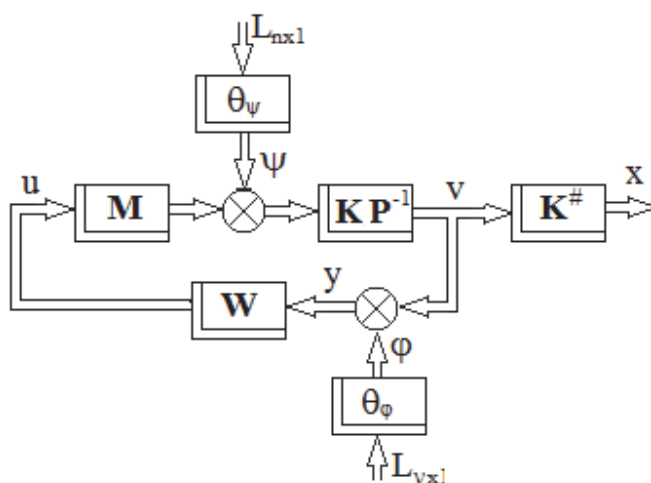


Рис.9.4. Промежуточный вариант построения структурной схемы исследуемой системы стабилизации движения объекта.

Для приведения структуры (рис.9.4.) к стандартному виду требуется эквивалентный перенос вектора сигналов помех в точку приложения возмущения.

При этом структурная схема исследуемой системы стабилизации получает стандартный вид (рис.9.5). Приведенный на рис.9.5 эквивалентный суммарный детерминированный вектор сигнала возмущений  $\zeta$  равен

$$\zeta = (\theta_\psi + PK^\#\theta_\phi)L_{n \times 1} = \theta_\zeta L_{n \times 1}. \quad (9.19)$$

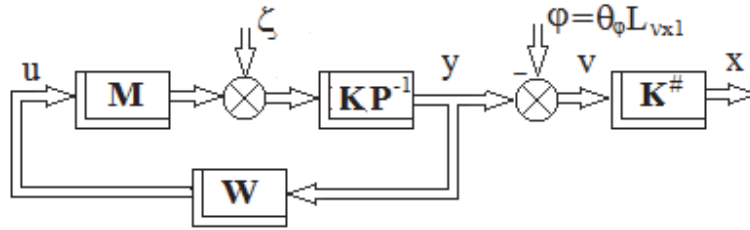


Рис.9.5. Структурная схема исследуемой системы стабилизации движения объекта в стандартной форме

Целесообразно ввести матрицы передаточных функций замкнутой системы  $F_u$  и  $F_y$ , которые связывают суммарный вектор возмущений с векторами сигналов  $u$  и  $y$  уравнениями

$$u = F_u \zeta, \quad y = F_y \zeta, \quad (9.20)$$

причем матрицы  $F_u$  и  $F_y$  связаны между собою соотношением

$$F_y = KP^{-1}(MF_u + E_n), \quad (9.21)$$

а искомая, в конечном счете, оптимальная структура матрицы передаточных функций регулятора в системе стабилизации должна иметь вид

$$W = F_u (F_y)^{-1}.$$

Как показатель (функционал) качества стабилизации движения объекта в исследуемой системе можно использовать функционал вида

$$\bar{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (xx_* R + uu_* C) ds.$$

В соответствии со схемой (рис.95) вектор  $x$  спектров выходных сигналов стабилизируемого объекта будет иметь вид

$$x = K^\# v = K^\# (y - \varphi) = K^\# F_y \zeta - K^\# \varphi. \quad (9.22)$$

Подстановка выражений (9.18), (9.19), (9.20) и (9.22) в функционал  $\bar{E}$  позволяет представить последний таким образом

$$\begin{aligned} \bar{E} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [P^{-1}(MF_u + E_n)\theta_\zeta - K^\#\theta_\varphi] L_n [\theta_{\zeta_*}(F_u_*M_* + \\ + E_n) P_*^{-1} - \theta_{\varphi_*}K^\#] R + F_u \theta_\zeta L_n \theta_{\zeta_*} F_u_* C \} ds. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Решая поставленную задачу методом Винера-Колмогорова необходимо определить первую вариацию функционала (9.23) и условие тождественного равенства её нулю. Первая вариация  $\delta\bar{E}$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta\bar{E} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [(M_*P_*^{-1}RP^{-1}M + C)F_u\theta_\zeta L_n\theta_{\zeta^*} + M_*P_*^{-1}RP^{-1}\theta_\zeta L_n\theta_{\zeta^*} - \\ & - M_*P_*^{-1}RK^\#\theta_\varphi L_n\theta_{\zeta^*}] \delta F_{u^*} + \delta F_u [\theta_\zeta L_n\theta_{\zeta^*} F_{u^*} (M_*P_*^{-1}RP^{-1}M + C) + \\ & - \theta_\zeta L_n\theta_{\zeta^*} P_*^{-1}RP^{-1}M + \theta_\zeta L_n\theta_{\varphi^*} K^\# RP^{-1}M] \} ds. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Целесообразно ввести такие обозначения

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_* \bar{\Gamma} &= M_*P_*^{-1}RP^{-1} + C; \quad \bar{D}L_n\bar{D}_* = \theta_\zeta L_n\theta_{\zeta^*}; \\ \bar{T} &= \bar{T}_0 + \bar{T}_+ + \bar{T}_- = \bar{\Gamma}_*^{-1}M_*P_*^{-1}R(P^{-1}\theta_\zeta - K^\#\theta_\varphi)L_n\theta_{\zeta^*}(L_n\bar{D}_*)^{-1}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

С учетом обозначений (9.25) условие тождественного равенства вариации (9.24) нулю имеет вид

$$\bar{\Gamma}F_u\bar{D} = -(\bar{T}_0 + \bar{T}_+),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры устойчивой и физически реализуемой матрицы варьируемых передаточных функций  $F_u$  по исходным данным задачи

$$F_u = -\bar{\Gamma}^{-1}(\bar{T}_0 + \bar{T}_+)\bar{D}^{-1}, \quad (9.26)$$

оптимальная структура  $F_y$  на основании уравнения связи будет

$$F_y = KP^{-1}(M\hat{F}_u + E_n),$$

а оптимальная структура матрицы передаточных функций регулятора в исследуемой системе стабилизации будет представлена таким образом

$$W = F_u(F_y)^{-1}. \quad (9.27)$$

### 9.3 Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры регулятора в системе стабилизации неустойчивого объекта при детерминированных воздействиях и при учете помех измерений

Структурная схема системы стабилизации движения объекта с произволом в динамике представлена на рисунке 9.6. Полагается, что движение объекта в режиме стабилизации может быть описано известным уравнением вида

$$x = P^{-1}(Mu + \psi),$$

имеющим такую особенность

$$P^{-1} = P_+^{-1} + P_-^{-1}, \quad (9.28)$$

где матрица  $P_+^{-1}$  – устойчива, матрица  $P_-^{-1}$  – неустойчива. На схеме (рис.9.6) показаны структуры блоков  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$  наблюдателей устойчивой и неустойчивой информации выходов объекта  $x_+$  и  $x_-$ , которые измеряются устройством с матрицей передаточных функций  $K$  размерности  $v \times n$ , а измерения сопровождаются вектором сигналов детерминированных помех  $\varphi = \theta_\varphi L_{v \times 1}$ .

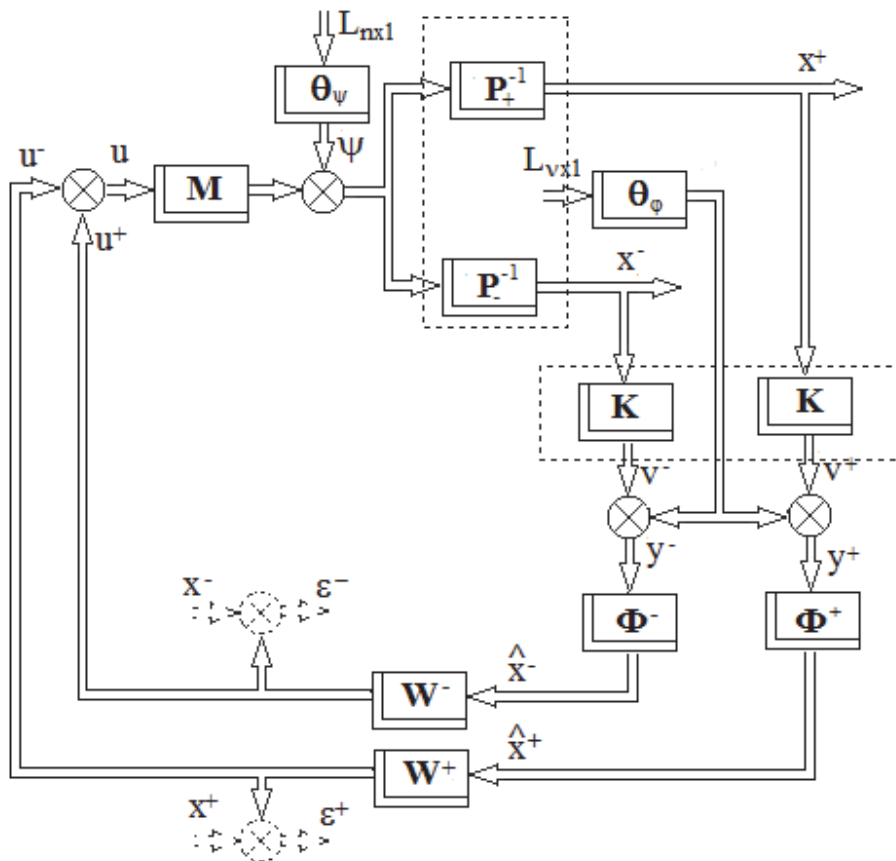


Рис.9.6. Структурная схема исследуемой системы стабилизации движения объекта.

На входы наблюдателей поступают векторы сигналов наблюдений  $y_+$  и  $y_-$ , полученные с помощью датчиков, а на их выходах возникают векторы сигналов наилучших точностных оценок выходных координат объекта  $\hat{x}_+$  и  $\hat{x}_-$ . Выбор

оптимальных структур наблюдателей  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$  производится с учетом теоремы разделения, т.е. вектор  $u$  полагается нулевым, а векторы сигналов выходов объекта имеют вид

$$x_+ = P_+^{-1}\theta_\psi L_{n \times 1}, \quad x_- = P_-^{-1}\theta_\psi L_{n \times 1}. \quad (9.29)$$

Для дальнейшего необходимо учитывать следующие очевидные соотношения.

$$\begin{aligned} v_- &= Kx_-, \quad v_+ = Kx_+; \\ x_- &= K^\#v_-, \quad x_+ = K^\#v_+, \end{aligned} \quad (9.30)$$

где «#» – символ псевдообращения матрицы;

$$\begin{aligned} y_- &= v_- + \varphi = Kx_- + \varphi, \\ y_+ &= v_+ + \varphi = Kx_+ + \varphi. \end{aligned} \quad (9.31)$$

С учетом выражений (9.30) и (9.31) возможно представить векторы сигналов ошибок наблюдений выходных координат объекта в таком виде

$$\varepsilon^- = \hat{x}_- - x_- = \Phi^- y_- - x_- = (\Phi^- \theta_{y_-} - P_-^{-1} \theta_\psi) L_{n \times 1}; \quad (9.32)$$

$$\varepsilon^+ = \hat{x}_+ - x_+ = \Phi^+ y_+ - x_+ = (\Phi^+ \theta_{y_+} - P_+^{-1} \theta_\psi) L_{n \times 1}. \quad (9.33)$$

Зная выражения (9.32) и (9.33), можно приступить к решению задач синтеза оптимальных структур матриц передаточных функций наблюдателей  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$ .

Функционал качества наблюдения неустойчивой составляющей вектора выходных сигналов объекта может иметь вид

$$E^- = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (\varepsilon^- \varepsilon_*^- R_1) ds. \quad (9.34)$$

Подстановка в функционал (9.34) векторов (9.32) позволяет записать последний в виде

$$E^- = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [(\Phi^- \theta_{y_-} - P_-^{-1} \theta_\psi) L_n (\theta_{y_*} \Phi_*^- - \theta_{\psi_*} P_*^{-1}) R_1] ds. \quad (9.35)$$

Задача синтеза оптимальной структуры  $\Phi^-$  решается методом Винера-Колмогорова. Для этого необходимо определить первую вариацию функционала и условие тождественного равенства её нулю при условии устойчивости и физической реализуемости варьируемой матрицы  $\Phi^-$ . Первая вариация функционала (9.35) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}^- &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [R_1 (\Phi^- \theta_{y_-} L_n \theta_{y_-^*} - P_-^{-1} \theta_\psi L_n \theta_{y_-^*}) \delta \Phi_*^- + \\ &+ \delta \Phi^- (\theta_{y_-} L_n \theta_{y_-^*} \Phi_*^- - \theta_{y_-} L_n \theta_\psi P_*^{-1}) R_1] ds. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Необходимы обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \Gamma_{1*} &= R_1; \quad D_*^- L_n D^- = \theta_{y_-} L_n \theta_{y_-^*}; \\ T^- &= T_0^- + T_+^- + T_-^- = \Gamma_1^{-1} \theta_\psi L_n \theta_{y_-^*} (L_n D^-)^{-1}. \end{aligned} \quad (9.37)$$

С учетом обозначений (9.37) вариацию (9.36) следует переписать так

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}^- &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\Gamma_1 (\Gamma_{1*} \Phi^- D_*^- - T^-) L_n D^- \delta \Phi_*^- + \\ &+ \delta \Phi^- D_*^- L_n (D^- \Phi_*^- \Gamma_1 - T_*^-) \Gamma_{1*}] ds, \end{aligned}$$

условие тождественного равенства этой вариации нулю в виде

$$\Gamma_{1*} \Phi^- D_*^- = T_*^-,$$

а алгоритм синтеза по исходным данным решаемой задачи оптимальной структуры матрицы передаточных функций наблюдателя  $\Phi^-$  следующим уравнением

$$\Phi^- = \Gamma_{1*}^{-1} T_*^- (D_*^-)^{-1} \quad (9.38)$$

Функционал качества наблюдения устойчивой составляющей вектора выходных сигналов объекта следует считать таким

$$\mathcal{E}^+ = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (\varepsilon^+ \varepsilon_*^+ R_2) ds. \quad (9.39)$$

Подстановка векторов (9.33) в функционал (9.39) позволяет записать последний следующим образом

$$\mathcal{E}^+ = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [(\Phi^+ \theta_{y_+} - P_+^{-1} \theta_\psi) L_n (\theta_{y_+^*} \Phi_*^+ - \theta_\psi P_{+*}^{-1}) R_2] ds. \quad (9.40)$$

Как и в предыдущем случае, решая задачу синтеза оптимальной структуры наблюдателя  $\Phi^+$  методом Винера-Колмогорова сначала необходимо определить первую вариацию функционала (9.40) и условие тождественного равенства её нулю при условии соблюдения устойчивости и физической реализуемости матрицы  $\Phi^+$ . Первая вариация функционала (9.40) имеет вид

$$\delta \mathcal{E}^+ = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [R_2 (\Phi^+ \theta_{y_+} L_n \theta_{y_+^*} - P_+^{-1} \theta_\psi L_n \theta_{y_+^*}) \delta \Phi_*^+ +$$

$$+\delta\Phi^+(\theta_{y_+}L_n\theta_{y_+*}\Phi_*^+ - \theta_{y_+}L_n\theta_{\psi*}P_{+*}^{-1})R_2]ds. \quad (9.41)$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_{2*}\Gamma_2 &= R_2; \quad D^+L_nD_*^+ = \theta_{y_+}L_n\theta_{y_+*}; \\ T^+ &= T_0^+ + T_+^+ + T_-^+ = \Gamma_{2*}^{-1}P_+^{-1}\theta_{\psi}L_n\theta_{y_+*}(L_nD_*^+)^{-1}, \end{aligned} \quad (9.42)$$

то первая вариация функционала (9.41) получит вид

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}^+ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_{2*}(\Gamma_2\Phi^+D^+ - T^+)L_nD_*^+\delta\Phi_*^+ + \\ &+ \delta\Phi^+D^+L_n(D_*^+\Phi_*^+\Gamma_{2*} - T_*^+)\Gamma_2]ds. \end{aligned}$$

Условие тождественного равенства вариации (9.41) нулю определяется равенством

$$\Gamma_2\Phi^+D^+ = (T_0^+ + T_+^+),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры матрицы передаточных функций наблюдается  $\Phi^+$  будет таким

$$\Phi^+ = \Gamma_2^{-1}(T_0^+ + T_+^+)(D^+)^{-1}. \quad (9.43)$$

После синтеза оптимальной структуры наблюдателя  $\Phi^-$  [алгоритм (9.38)] возможно приступить к синтезу оптимальной структуры регулятора  $W^-$  в неустойчивом тракте системы стабилизации. Для решения этой задачи целесообразно произвести перестройку структуры исследуемого тракта системы стабилизации к стандартному виду. Промежуточный этап перестройки структуры указанного тракта показан на рисунке 9.7.

Стандартная структурная схема (рис. 9.8) неустойчивого тракта исследуемой системы возникает после переноса помехи  $\varphi^-$  в точку приложения воздействия.

Целесообразно ввести матрицы  $F_{u^-}$  и  $F_{\hat{x}^-}$  передаточных функций сигналов приведенных возмущений  $\zeta^-$ , которые следует записать в таком виде

$$\begin{aligned} \zeta^- &= [\theta_{\psi} + (\Phi^-KP_-^{-1})^{-1}\Phi^-\theta_{\varphi}]L_{n \times 1} = \theta_{\zeta^-}L_{n \times 1} \\ \zeta_*^- &= L_{1 \times n}[\theta_{\psi*} + \theta_{\varphi*}\Phi_*^-(\Phi^-KP_-^{-1})_*^{-1}] = L_{1 \times n}\theta_{\zeta_*^-}. \end{aligned} \quad (9.44)$$

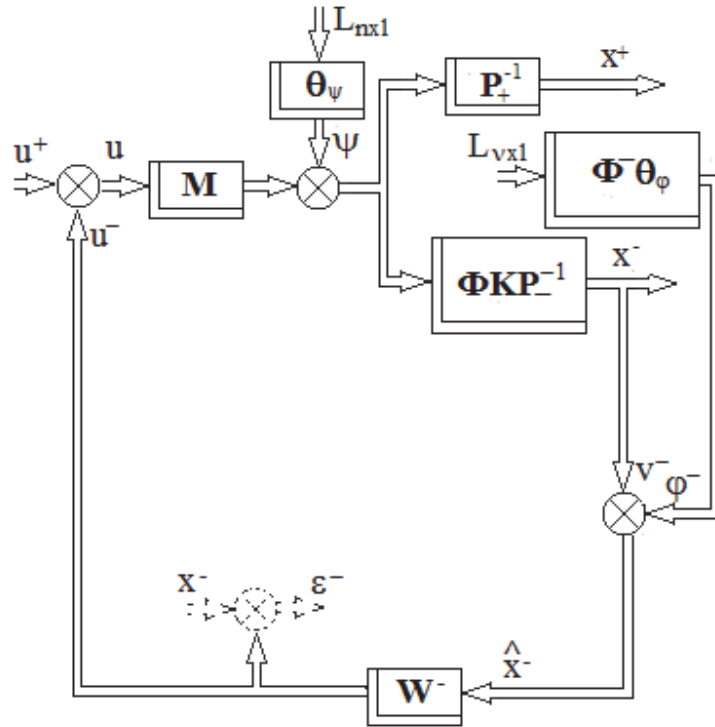


Рис.9.7. Промежуточная структурная схема неустойчивого тракта системы стабилизации исследуемого объекта.

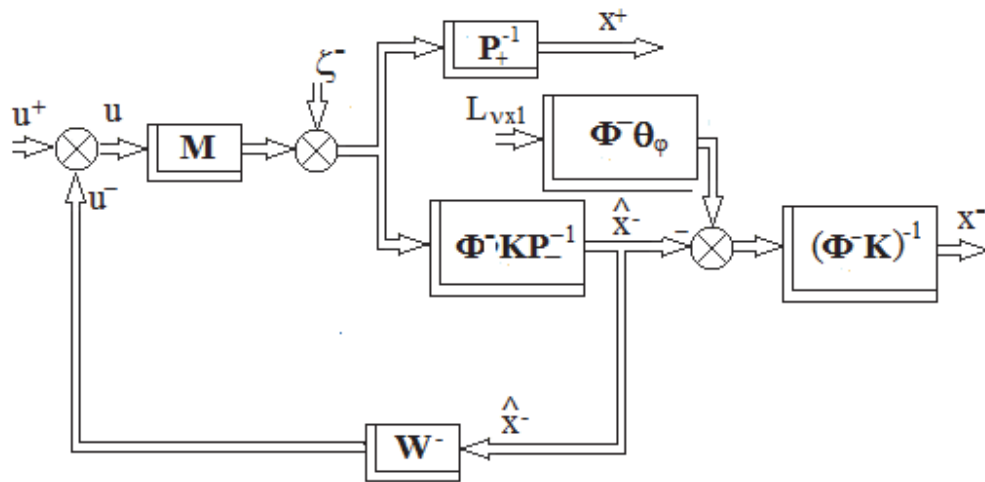


Рис.9.8. Традиционная структурная схема неустойчивого тракта системы стабилизации исследуемого объекта.

Указанные выше матрицы, которые должны обеспечить устойчивость стабилизируемого контура представляются так

$$u^- = F_{u^-} \zeta^-, \quad \hat{x}^- = F_{\hat{x}^-} \zeta^-, \quad (9.45)$$

причем матрица  $F_{\hat{x}^-}$  связана с матрицей  $F_{u^-}$  уравнением вида

$$F_{\hat{x}^-} = (\Phi^- K P_-^{-1})(M F_{u^-} + E_n), \quad (9.46)$$

а подлежащая оптимальному выбору структура регулятора  $W^-$  должна определяться выражением

$$W^- = F_{u^-} (F_{\hat{x}^-})^{-1} \quad (9.47)$$

Пусть функционал качества стабилизации объекта в неустойчивом тракте исследуемой системы имеет вид

$$\mathcal{E}^- = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (\hat{x}^- \hat{x}_*^- R_1 + u^- u_*^- C_1) ds \quad (9.48)$$

Учитывая структуру (рис.9.8) и уравнение (9.45), вектор оценок сигналов стабилизируемого выхода объекта  $\hat{x}^-$  следует записать так

$$\hat{x}^- = (\Phi^- K P_-^{-1})(M F_{u^-} + E_n) \zeta^-, \quad (9.49)$$

а вектор управлений в следующем виде

$$u^- = F_{u^-} \zeta^-. \quad (9.50)$$

Подставив векторы (9.49) и (9.50) в функционал (9.48) можно представить последний таким образом

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^- = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [(\Phi^- K P_-^{-1})(M F_{u^-} + E_n) \theta_{\zeta^-} L_n \theta_{\zeta_*^-} (F_{u_*^-} M_* + \\ & + E_n) (\Phi^- K P_-^{-1})_* R_1 + F_{u^-} \theta_{\zeta^-} L_n \theta_{\zeta_*^-} F_{u_*^-} C_1] ds. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Решая задачу синтеза оптимальной структуры  $F_{u^-}$  методом Винера-Колмогорова, необходимо определить первую вариацию функционала (9.51) и условие тождественного равенства её нулю на определённом выше классе матриц  $F_{u^-}$ .

Первая вариация функционала (9.51) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}^- = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (\{ [M_* (\Phi^- K P_-^{-1})_* R_1 (\Phi^- K P_-^{-1}) M + C_1] F_{u^-} \theta_{\zeta^-} L_n \theta_{\zeta_*^-} + \\ & + M_* (\Phi^- K P_-^{-1})_* R_1 (\Phi^- K P_-^{-1}) \theta_{\zeta^-} L_n \theta_{\zeta_*^-} \} \delta F_{u_*^-} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\delta F_{u^-} \{ \theta_{\zeta^-} L_n \theta_{\zeta^-} F_{u_*^-} [M_*(\Phi^- K P_-^{-1})_* R_1(\Phi^- K P_-^{-1})M + C_1] + \\
& + \theta_{\zeta^-} L_n \theta_{\zeta_*^-} F_{u_*^-} (\Phi^- K P_-^{-1})_* R_1(\Phi^- K P_-^{-1})M \} \} ds
\end{aligned} \tag{9.52}$$

Необходимо ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1*}^- \Gamma_1^- &= M_*(\Phi^- K P_-^{-1})_* R_1(\Phi^- K P_-^{-1})M + C_1; \quad D_1^- D_{1*}^- = \theta_{\zeta^-} L_n \theta_{\zeta_*^-}; \\
T^- &= T_0^- + T_+^- + T_-^- = (\Gamma_{1*}^-)^{-1} M_*(\Phi^- K P_-^{-1})_* R_1(\Phi^- K P_-^{-1}) \theta_{\zeta^-} L_n \theta_{\zeta_*^-} F_{u_*^-} (L_n D_{1*}^-)^{-1}
\end{aligned} \tag{9.53}$$

С учетом обозначений (9.53) вариацию (9.52) следует переписать так

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{E}^- &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ \Gamma_{1*}^- (\Gamma_1^- F_{u^-} D_1^- + T^-) L_n D_{1*}^- \delta F_{u_*^-} + \\
& + \delta F_{u^-} D_1^- L_n (D_{1*}^- F_{u^-} \Gamma_{1*}^- + T_*^-) \Gamma_1^{-1} \} ds.
\end{aligned} \tag{9.54}$$

Условие тождественного равенства вариации (9.54) нулю будет таким

$$\Gamma_1^- F_{u^-} D_1^- = -(T_0^- + T_+^-),$$

алгоритм синтеза оптимальной структуры  $F_{u^-}$  имеет вид

$$F_{u^-} = -(\Gamma_1^-)^{-1} (T_0^- + T_+^-) (D_1^-)^{-1}, \tag{9.55}$$

оптимальная структура матрицы  $F_{\hat{x}^-}$  (9.49), (9.50) должна быть такой

$$F_{\hat{x}^-} = (\Phi^- K P_-^{-1}) (M F_{u^-} + E_n),$$

а оптимальная структура регулятора в неустойчивом тракте системы стабилизации объекта определяется так

$$W^- = (F_{u^-}) (F_{\hat{x}^-})^{-1}. \tag{9.56}$$

Имея результаты синтеза оптимальных структур наблюдателя  $\Phi^+$  в устойчивом тракте и регулятора  $W^-$  в неустойчивом тракте исследуемой системы стабилизации, стало возможным приступить к решению задачи синтеза оптимальной структуры  $W^+$  в устойчивом тракте системы (рис.9.6).

Перестроенная с указанной целью структурная схема исследуемой системы стабилизации представлена на рисунке 9.9.

Здесь векторы управления  $u^-$  и возмущения  $\zeta^-$ , действующие в неустойчивом тракте системы, уже описаны управлениями (9.44) – (9.45). Эти векторы сигналов действуют и в устойчивом тракте. Дополнительный вектор  $\zeta^+$ , выражение которого имеет вид

$$\zeta^+ = (\Phi^+ K P_+^{-1})^{-1} \Phi^+ \theta_{\varphi} L_{n \times 1}, \tag{9.57}$$

также действует в устойчивом тракте системы.

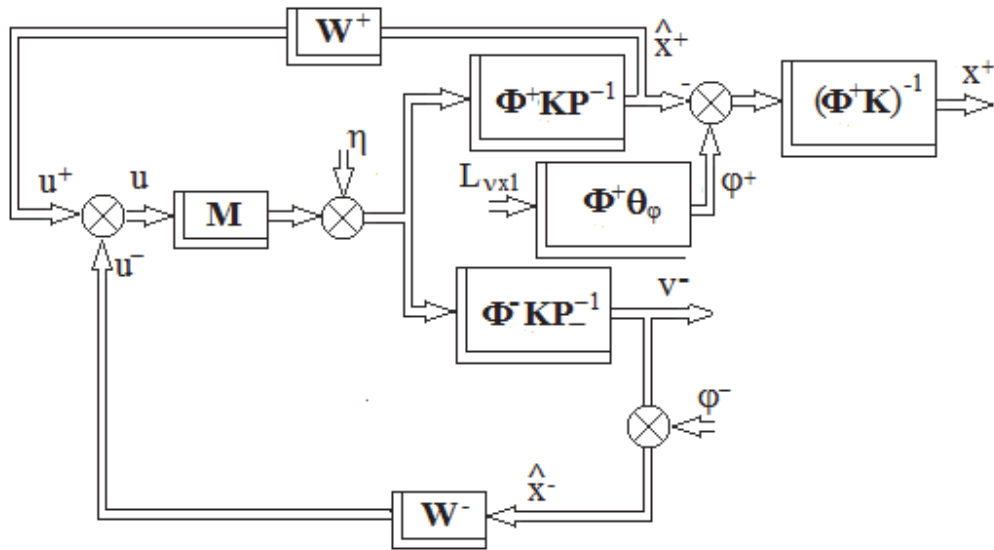


Рис.9.9. Традиционная структурная схема устойчивого тракта исследуемой системы стабилизации при детерминированных воздействиях

Суммарный вектор приведенных сигналов возмущений, действующих в устойчивом тракте исследуемой системы стабилизации – это сумма выражений (9.44) и (9.57), а именно

$$\xi^+ = \zeta^- + \zeta^+ = [\theta_\psi + (\Phi^- KP_-^{-1})^{-1} \Phi^- \theta_\varphi + (\Phi^+ KP_+^{-1})^{-1} \Phi^+ \theta_\varphi] L_{n \times 1}. \quad (9.58)$$

В устойчивом тракте системы действует как возмущение также вектор сигналов  $\xi_u$

$$\xi_u = M u^- + M F_{u^-} \zeta^- = \theta_{\xi_u} L_{n \times 1}, \quad (9.59)$$

где  $F_{u^-}$  определяется выражением (9.55).

С учетом векторов (9.58) и (9.59), вектор результирующего возмущения  $\eta$  в устойчивом тракте следует записать так

$$\eta = \xi^+ + \xi_u = \{(E_n + M \hat{F}_{u^-}) [\theta_\psi + (\Phi^- KP_-^{-1})^{-1} \Phi^- \theta_\varphi] + (\Phi^+ KP_+^{-1})^{-1} \Phi^+ \theta_\varphi\} L_{n \times 1} = \theta_\eta L_{n \times 1}. \quad (9.60)$$

Как и в предыдущей, так и в решаемой задаче необходимо ввести матрицы  $F_{u^+}$  и  $F_{\hat{x}^+}$  передаточных функций замкнутой системы, которые характеризуют связь результирующего вектора возмущений  $\eta$  с векторами  $u^+$  и  $\hat{x}^+$

$$u^+ = F_{u^+}\eta, \quad \hat{x}^+ = F_{\hat{x}^+}\eta, \quad (9.61)$$

причем матрица  $F_{\hat{x}^+}$  связана с матрицей  $F_{u^+}$  уравнением вида

$$F_{\hat{x}^+} = (\Phi^+ K P_+^{-1})(M F_{u^+} + E_n), \quad (9.62)$$

а подлежащая непосредственному выбору структура регулятора  $W^+$  определяется выражением

$$W^+ = F_{u^+}(F_{\hat{x}^+})^{-1}. \quad (9.63)$$

Функционал качества стабилизации объекта в устойчивом тракте исследуемой системы имеет вид

$$\mathcal{E}^+ = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (x^+ x_*^+ R_2 + u^+ u_*^+ C_2) ds. \quad (9.64)$$

Учитывая структурную схему (рис.9.9) и уравнения (9.60) и (9.62) оценок сигналов спектров выхода объекта в устойчивом тракте, возможно вектор  $x^+$  записать в виде

$$\begin{aligned} x^+ &= (\Phi^+ K)^{-1}(\hat{x}^+ - \varphi^+) = (\Phi^+ K)^{-1}(F_{\hat{x}^+} y_+ - \varphi^+) = \\ &= (\Phi^+ K)^{-1}[(\Phi^+ K P_+^{-1})(M u^+ + \eta) - \varphi^+] = (\Phi^+ K)^{-1}[(\Phi^+ K P_+^{-1})(M F_{u^+} + E_n)\eta - \\ &- \Phi^+ \varphi^+] = (\Phi^+ K)^{-1}[(\Phi^+ K P_+^{-1})(M F_{u^+} + E_n)\theta_\eta - \Phi^+ \theta_\varphi] L_{n \times 1}; \end{aligned} \quad (9.65)$$

а вектор управлений  $u^+$  таким образом

$$u^+ = F_{u^+}\eta = F_{u^+}\theta_\eta L_{n \times 1}. \quad (9.66)$$

Подстановка векторов (9.60), (9.65) и (9.66) в функционал (9.64) позволяет переписать последний так

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^+ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ (\Phi^+ K)^{-1} [(\Phi^+ K P_+^{-1})(M F_{u^+} + E_n)\theta_\eta - \Phi^+ \theta_\varphi] L_n \times \\ &\times [\theta_{\eta_*} (F_{u_*^+} M_* + E_n)(\Phi^+ K P_+^{-1})_* - \theta_{\varphi_*} \Phi_*^+] (\Phi^+ K)_*^{-1} R_2 + \\ &+ F_{u^+} \theta_\eta L_n \theta_{\eta_*} F_{u_*^+} C_2 \} ds \end{aligned} \quad (9.67)$$

Полагая варьируемой функцией матрицу  $F_{u^+}$  и решая задачу синтеза методом Винера-Колмогорова, необходимо определить первую вариацию функционала (9.67) и условие тождественного равенства её нулю.

Первая вариация  $\delta \mathcal{E}^+$  будет иметь вид

$$\delta \mathcal{E}^+ = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} ( \{ [M_* (\Phi^+ K P_+^{-1})_* (\Phi^+ K)_*^{-1} R_2 (\Phi^+ K)^{-1} (\Phi^+ K P_+^{-1}) M +$$

$$\begin{aligned}
& +C_2]F_{u^+}\theta_\eta L_n\theta_{\eta_*} + M_*(\Phi^+KP_+^{-1})_*(\Phi^+K)_*^{-1}R_2(\Phi^+K)^{-1}(\Phi^+KP_+^{-1})\theta_\eta L_n\theta_{\eta_*} - \\
& -M_*(\Phi^+KP_+^{-1})_*(\Phi^+K)_*^{-1}R_2(\Phi^+K)^{-1}\Phi^+\theta_\varphi L_n\theta_{\eta_*}\}\delta F_{u_*^+} + \\
& +\delta F_{u^+}\{\theta_\eta L_n\theta_{\eta_*}F_{u_*^+}[M_*(\Phi^+KP_+^{-1})_*(\Phi^+K)_*^{-1}R_2(\Phi^+K)^{-1}(\Phi^+KP_+^{-1})M + C_2] + \\
& +\theta_\eta L_n\theta_{\eta_*}(\Phi^+KP_+^{-1})_*(\Phi^+K)_*^{-1}R_2(\Phi^+K)^{-1}(\Phi^+KP_+^{-1})M - \\
& -\theta_\eta L_n\theta_{\varphi_*}\Phi_*^+(\Phi^+K)^{-1}R_2(\Phi^+K)^{-1}(\Phi^+KP_+^{-1})M\})ds. \tag{9.68}
\end{aligned}$$

Целесообразно ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned}
\Gamma_{2*}^+\Gamma_2^+ &= M_*(\Phi^+KP_+^{-1})_*(\Phi^+K)_*^{-1}R_2(\Phi^+K)^{-1}(\Phi^+KP_+^{-1})M + C_2; \\
D_2^+L_nD_{2*}^+ &= \theta_\eta L_n\theta_{\eta_*}; \\
T^+ &= T_0^+ + T_+^+ + T_-^+ = (\Gamma_{2*}^+)^{-1}M_*(\Phi^+KP_+^{-1})_*(\Phi^+K)_*^{-1}R_2(\Phi^+K)^{-1} \times \\
& \times [(\Phi^+KP_+^{-1})\theta_\eta - \Phi^+\theta_\varphi]L_n\theta_{\eta_*}(L_nD_{2*}^+)^{-1}. \tag{9.69}
\end{aligned}$$

С учетом обозначений (9.69) вариацию (9.68) логично записать так

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{E}^+ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_{2*}^+(\Gamma_2^+F_{u^+}D_2^+ + T^+)L_nD_{2*}^+\delta F_{u_*^+} + \\
& +\delta F_{u^+}D_2^+L_n(D_{2*}^+F_{u_*^+}\Gamma_{2*}^+ + T_*^+)\Gamma_2^+]ds, \tag{9.70}
\end{aligned}$$

а условие тождественного равенства вариации (9.70) нулю на классе устойчивых матриц передаточных функций  $F_{u^+}$  записать в виде

$$\Gamma_2^+F_{u^+}D_2^+ = -(T_0^+ + T_+^+). \tag{9.71}$$

Алгоритм синтеза оптимальной структуры матрицы  $F_{u^+}$  будет таким

$$F_{u^+} = -(\Gamma_2^+)^{-1}(T_0^+ + T_+^+)(D_2^+)^{-1}, \tag{9.72}$$

оптимальная структура матрицы  $F_{\hat{x}^+}$  будет иметь вид (9.62)

$$F_{\hat{x}^+} = (\Phi^+KP_+^{-1})(M\hat{F}_{u^+} + E_n),$$

а оптимальная структура регулятора в устойчивом тракте исследуемой системы стабилизации с учетом выражения (9.63) определяется выражением

$$W^+ = (F_{u^+})(F_{\hat{x}^+})^{-1}. \tag{9.73}$$

Таким образом, задача синтеза оптимальной структуры регулятора, в устойчивом тракте системы стабилизации исследуемого объекта решена полностью.

#### 9.4 Задача и алгоритм синтеза оптимальной структуры регулятора в системе стабилизации движения объекта с произволом в динамике по заданной детерминированной траектории и при детерминированных воздействиях

Структурная схема исследуемой системы стабилизации движения объекта с произволом в динамике, подверженного детерминированным возмущением, по заданной детерминированной траектории представлена на рисунке 9.10. Как ранее оговорено, система в этом случае имеет устойчивый и неустойчивый контуры. При синтезе полагается, что вектор  $\hat{r}^-$  выхода неустойчивого тракта системы является вектором ошибок тракта вектор  $\varepsilon^-$ , а разностный вектор  $\varepsilon^+$  выхода устойчивого тракта системы  $\hat{r}^+$  и вектора программы движения  $r_0$  характеризует вектор ошибок исследуемой системы.

На структурной схеме (рис.9.10) представлены вектор  $r_0$  размерности  $n \times 1$  детерминированных сигналов программы движения, матрица  $N_0$  размерности  $n \times n$  передаточных функций задатчика программы движения, вектор  $\varphi_0$  размерности  $n \times 1$  детерминированных помех задания программы движения, вектор  $y_0$  –  $n$ -мерный вектор сигналов наблюдения выходов задатчика программы; известная по результатам предшествующих этапов идентификации моделей динамики объекта система дифференциальных уравнений, преобразованная по Фурье и описывающая движение объекта, имеющая вид

$$Pr = Mu + \psi, \quad (9.1)$$

где вектор  $r = r^+ + r^-$  –  $n$ -мерный вектор сигналов отклонений объекта от заданной траектории движения,  $m$ -мерный вектор управлений  $u$  системой равен сумме векторов управлений в трактах и наблюдения программы ( $u = u^+ + u^- + y_0$ ),  $\psi$  –  $n$ -мерный вектор детерминированных воздействий на объект стабилизации. Здесь матрица  $P^{-1}$  состоит из двух частей  $P^{-1} = P_+^{-1} + P_-^{-1}$ , причем её часть  $P_+^{-1}$  формирует устойчивый тракт системы, часть  $P_-^{-1}$  формирует неустойчивый тракт.

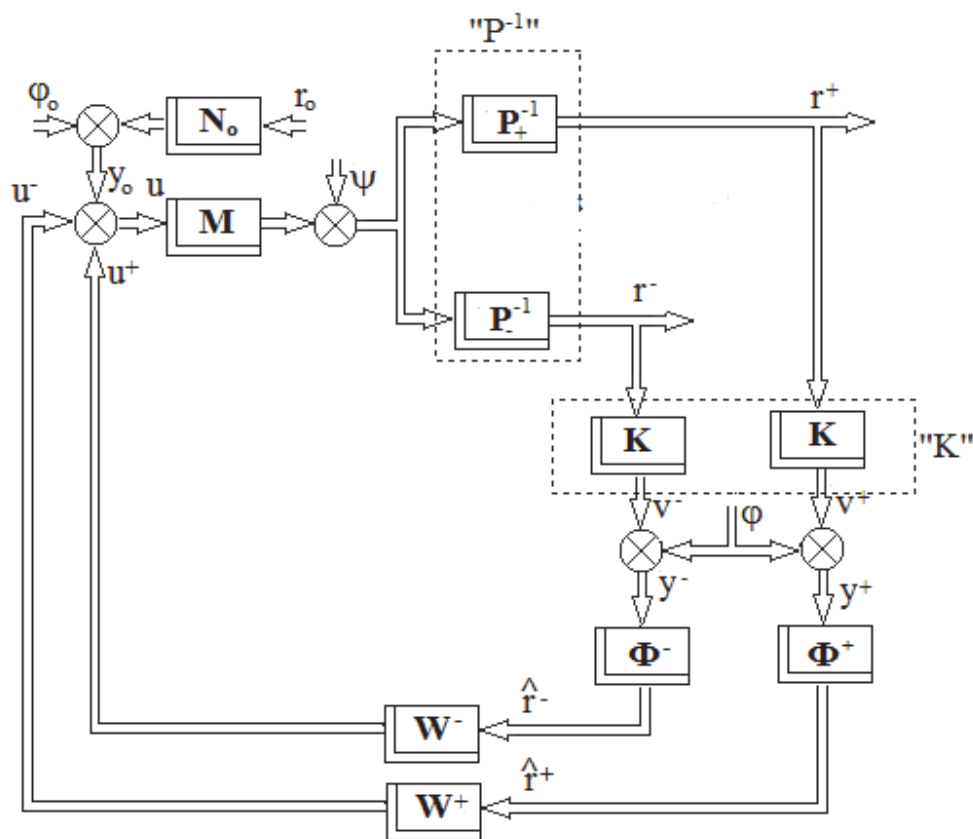


Рис.9.10. Структурная схема исследуемой системы стабилизации на траектории движения объекта с произволом в динамике

Сигналы выходов трактов  $r_+$  и  $r_-$  поступают на единый измеритель  $K$  размерности  $\nu \times n$ , а измерения сопровождаются помехами  $\varphi$  (вектор её спектров имеет размерность  $\nu \times 1$ ).

Как и ранее, все векторы детерминированных сигналов в системе записываются как произведения диагональных матриц преобразований Лапласа компонентов каждого из векторов на соответствующей размерности единичный вектор-столбец (например  $\varphi_0 = \theta_{\varphi_0} L_{n \times 1}$ ,  $\varphi = \theta_{\varphi} L_{\nu \times 1}$ ,  $y_0 = \theta_{y_0} L_{n \times n}$  и т.д.).

Как и во многих ранее рассмотренных вариантах задач, в схеме исследуемой системы (рис.9.10) предусмотрены оптимальные наблюдатели с матрицами передаточных функций  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$ , которые должны быть синтезированы

определенным, уже известным из предыдущего изложения материала книги способом. Выходные сигналы наблюдателей  $\hat{r}^+$  и  $\hat{r}^-$  являют собой, во-первых, наилучшие точностные оценки векторов  $r_+$  и  $r_-$ , и, во-вторых, векторы входных сигналов в структуры регуляторов  $W^+$  и  $W^-$  соответственно.

В указанных условиях для выбора структур матриц  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$  необходимы следующие действия. Полагая, что в вариантах синтеза структур наблюдателей векторы  $u^+$  и  $u^-$  можно считать нулевыми, следует определить эквивалентную в этом случае структуру обобщенного возмущения на объект таким образом

$$\psi_0 = M(N_0 r_0 + \varphi_0) + \psi = [M(N_0 \theta_{r_0} + \theta_{\varphi_0}) + \theta_{\psi}] L_{n \times 1} = \theta_{\psi_0} L_{n \times 1}, \quad (9.74)$$

а векторы выходных сигналов объекта в этих случаях должны иметь вид

$$r_0^+ = P_+^{-1} \psi_0 = P_+^{-1} \theta_{\psi_0} L_{n \times 1}, \quad (9.75)$$

$$r_0^- = P_-^{-1} \psi_0 = P_-^{-1} \theta_{\psi_0} L_{n \times 1}. \quad (9.76)$$

Векторы сигналов ошибок наблюдения обоих выходов объекта с учётом выражений (9.74)-(9.76) будут такими

$$\varepsilon^+ = \Phi^+ y^+ - r_0^+ = (\Phi^+ \theta_{y^+} - P_+^{-1} \theta_{\psi_0}) L_{n \times 1}; \quad (9.77)$$

$$\varepsilon^- = \Phi^- y^- - r_0^- = (\Phi^- \theta_{y^-} - P_-^{-1} \theta_{\psi_0}) L_{n \times 1}. \quad (9.78)$$

После чего сформулировать и решить задачу синтеза оптимальной структуры матрицы  $\Phi^+$ . Для решения этой задачи используется функционал качества вида

$$\Xi_0^+ = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (\varepsilon^+ \varepsilon_*^+ R_{01}) ds, \quad s = j\omega. \quad (9.79)$$

Подстановка выражения (9.77) в функционал (9.79) позволяет переписать последний так

$$\Xi_0^+ = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [(\Phi^+ \theta_{y^+} - P_+^{-1} \theta_{\psi_0}) L_n (\theta_{y_*^+} \Phi_*^+ - \theta_{\psi_{0*}} P_{+*}^{-1}) R_{01}] ds. \quad (9.80)$$

Решая задачу синтеза оптимальной структуры  $\Phi^+$  методом Винера-Колмогорова, необходимо определить первую вариацию функционала (9.80) и найти устойчивую матрицу  $\Phi^+$ , обеспечивающую условие тождественного равенства нулю первой вариации функционала.

Первая вариация функционала (9.80) будет иметь вид.

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_0^+ = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [R_{01}(\Phi^+ \theta_{y^+} L_n \theta_{y_*^+} - P_+^{-1} \theta_{\psi_0} L_n \theta_{y_*^+}) \delta \Phi_*^+ + \\ & + \delta \Phi^+ (\theta_{y^+} L_n \theta_{y_*^+} \Phi_*^+ - \theta_{y^+} L_n \theta_{\psi_0} P_{+*}^{-1}) R_{01}] ds. \end{aligned} \quad (9.81)$$

Необходим ввод следующих обозначений

$$\begin{aligned} \Gamma_{01*} \Gamma_{01} &= R_{01}; \quad D_{01}^+ L_n D_{01*}^+ = \theta_{y^+} L_n \theta_{y_*^+}; \\ T_0^+ &= T_{00}^+ + T_{0+}^+ + T_{0-}^+ = \Gamma_{01*}^{-1} P_+^{-1} \theta_{\psi_0} L_n \theta_{y_*^+} (L_n D_{01*}^+)^{-1}. \end{aligned} \quad (9.82)$$

С учетом обозначений (9.82) вариация (9.81) приобретает вид

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_0^+ = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_{01*} (\Gamma_{01} \Phi^+ D_{01}^+ - T_0^+) L_n D_{01*}^+ \delta \Phi_*^+ + \\ & + \delta \Phi^+ D_{01}^+ L_n (D_{01*}^+ \Phi_*^+ \Gamma_{01*} - T_{0*}^+) \Gamma_{01}] ds, \end{aligned}$$

а условие тождественного равенства её нулю выражает равенство

$$\Gamma_{01} \Phi^+ D_{01}^+ = (T_{00}^+ + T_{0+}^+).$$

Следовательно, алгоритм синтеза оптимальной структуры наблюдателя  $\Phi^+$  можно представить так

$$\Phi^+ = \Gamma_{01}^{-1} (T_{00}^+ + T_{0+}^+) (D_{01}^+)^{-1}. \quad (9.83)$$

Подставив в алгоритм (9.83) необходимые исходные данные исследуемой задачи, сразу же можно определить и реализовать средствами вычислительной техники полученную структуру  $\Phi^+$ , а также исследовать её изменчивость при варьировании исходными данными.

Для синтеза оптимальной структуры наблюдателя  $\Phi^-$  целесообразно использовать функционал качества наблюдения неустойчивой части выходных сигналов объекта такого вида

$$\mathcal{E}_0^- = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (\varepsilon^- \varepsilon_*^- R_{02}) ds. \quad (9.84)$$

После подстановки в функционал (9.84) выражения (9.78) используемый показатель качества будет выглядеть так

$$\mathcal{E}_0^- = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [(\Phi^- \theta_{y^-} - P_-^{-1} \theta_{\psi_0}) L_n (\theta_{y_*^-} \Phi_*^- - \theta_{\psi_0} P_{-*}^{-1}) R_{02}] ds. \quad (9.85)$$

Как и ранее для решения задачи синтеза оптимальной структуры наблюдателя  $\Phi^-$  методом Винера-Колмогорова определяются первая вариация

функционала (9.85) и условие тождественного равенства её нулю. Первую вариацию функционала следует записать так

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_0^- = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [R_{02}(\Phi^- \theta_{y^-} L_n \theta_{y_*^-} - P_{-}^{-1} \theta_{\psi_0} L_n \theta_{y_*^-}) \delta \Phi_*^- + \\ & + \delta \Phi^- (\theta_{y^-} L_n \theta_{y_*^-} \Phi_*^- - \theta_{y^-} L_n \theta_{\psi_0} P_{-}^{-1}) R_{02}] ds. \end{aligned} \quad (9.86)$$

Необходимо ввести такие обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_{02} \Gamma_{02*} &= R_{02}; \quad D_{02*}^- L_n D_{02}^- = \theta_{y^-} L_n \theta_{y_*^-}; \\ T_0^- &= T_{00}^- + T_{0+}^- + T_{0-}^- = \Gamma_{02}^{-1} P_{-}^{-1} \theta_{\psi_0} L_n \theta_{y_*^-} (L_n D_{02}^-)^{-1}. \end{aligned} \quad (9.87)$$

С учётом обозначений (9.87) первую вариацию (9.86) следует переписать так

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_0^- = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\Gamma_{02} (\Gamma_{02*} \Phi^- D_{02*}^- - T^-) L_n D_{02}^- \delta \Phi_*^- + \\ & + \delta \Phi_*^- D_{02*}^- L_n (D_{02}^- \Phi_*^- \Gamma_{02} - T_*^-) \Gamma_{02*}] ds, \end{aligned}$$

а условие тождественного равенства вариации (8.86) нулю определить в виде

$$\Gamma_{02*} \Phi^- D_{02*}^- = T_-^-.$$

Таким образом, алгоритм синтеза оптимальной структуры матрицы передаточных функций наблюдателя  $\Phi^-$  должен быть таким

$$\Phi^- = \Gamma_{02*}^{-1} T_-^- (D_{02*}^-)^{-1}. \quad (9.88)$$

Как и ранее, в алгоритм (9.88) можно подставить исходные данные этой задачи синтеза, реализовать результаты синтеза структуры  $\Phi^-$  и проследить их изменчивость при варьировании исходными данными.

Для подстановок и последующих решений намеченных задач синтеза оптимальных структур матриц передаточных функций  $W^+$  и  $W^-$  частей регулятора, расположенных соответственно в устойчивом и неустойчивом контурах системы стабилизации движения объекта по заданной детерминированной траектории, учитывая уже известные оптимальные структуры  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$  наблюдателей в указанных каналах, необходимо составить уравнения интересующих векторов сигналов и структурную схему всей системы стабилизации в удобном для дальнейших целей виде.

Как видно из структурной схемы системы (рис.9.10) на входы частей регулятора  $W^+$  и  $W^-$  поступают соответственно векторы наилучших точностных

оценок выходов объекта  $\hat{r}^+$  и  $\hat{r}^-$ , которые связаны с векторами наблюдаемых выходов объекта  $y^+$  и  $y^-$  следующим образом

$$\hat{r}^+ = \Phi^+ y^+ = \Phi^+ \theta_{y^+} L_{n \times 1}. \quad (9.89)$$

$$\hat{r}^- = \Phi^- y^- = \Phi^- \theta_{y^-} L_{n \times 1}. \quad (9.90)$$

Если векторы (9.89) и (9.90) считать входами обеих замкнутых контуров исследуемой приведенной к промежуточному виду системы стабилизации, то справедлива структура системы (рис. 9.11).

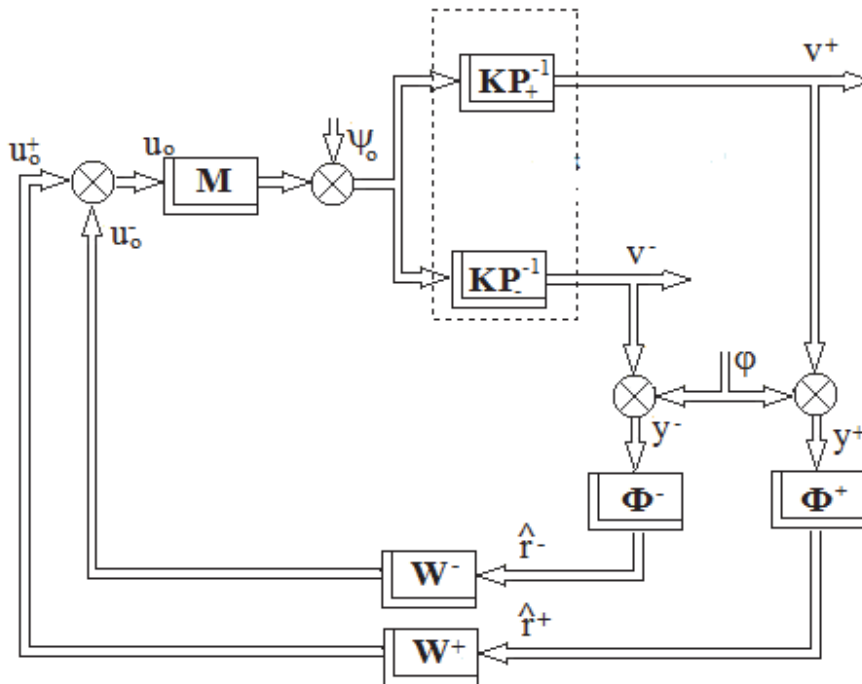


Рис.9.11. Промежуточный вариант структурной схемы системы стабилизации объекта с произволом в динамике на заданной траектории движения.

Для построения промежуточной схемы исследуемой системы стабилизации необходимо учесть векторы (9.74), (9.75), действующие на объект (рис.9.10) и определить общий вектор возмущений вида

$$\eta_0 = \psi_0 + \zeta_0^+ + \zeta_0^- = (\theta_{\psi_0} + \theta_{\zeta_0^+} + \theta_{\zeta_0^-}) L_{n \times 1} = \theta_{\eta_0} L_{n \times 1}; \quad (9.91)$$

где  $\zeta_0^-$ ,  $\zeta_0^+$  - векторы шумов измерений устойчивой и неустойчивой частей, приведенные ко входу возмущения  $\psi_0$  (рис. 9.10), которые равны

$$\zeta_0^- = (KP_-^{-1})^{-1} \theta_{\psi_0} L_{n \times 1} = \theta_{\zeta_0^-} L_{n \times 1}; \quad (9.92)$$

$$\zeta_0^+ = (KP_+^{-1})^{-1}\theta_\varphi L_{n \times 1} = \theta_{\zeta_0^+} L_{n \times 1}. \quad (9.93)$$

Структурная схема исследуемой системы стабилизации в промежуточном варианте представлена на рисунке 9.11.

С учётом выражений (9.74), (9.75), (9.91)-(9.93) можно составить структурную схему исследуемой системы стабилизации в традиционном варианте (рис.9.12).

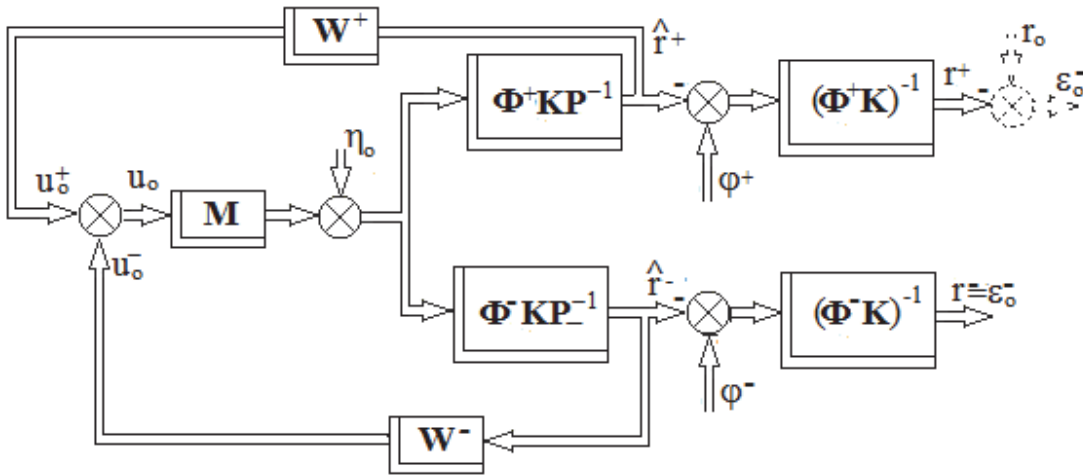


Рис.9.12. Традиционная структурная схема системы стабилизации объекта с произволом в динамике на заданной детерминированной траектории движения.

По структурной схеме системы (рис.9.12), учитывая выражения (9.74), (9.75), (9.91)-(9.93), можно составить векторы выходных сигналов каждого из её исследуемых трактов стабилизации, предполагая автономию процедуры синтеза части регулятора  $W^-$  в неустойчивом тракте

$$r^+ = (\Phi^+ K)^{-1} [(\Phi^+ K P_+^{-1})(M F_{u^+} + E_n)\theta_{\eta_0} - \Phi^+ \theta_\varphi] L_{n \times 1}; \quad (9.94)$$

$$r^- = (\Phi^- K)^{-1} [(\Phi^- K P_-^{-1})(M F_{u^-} + E_n)\theta_{\eta_0} - \Phi^- \theta_\varphi] L_{n \times 1}; \quad (9.95)$$

где векторы помех имеют вид  $\varphi^+ = \Phi^+ \theta_\varphi L_{n \times 1}$ ,  $\varphi^- = \Phi^- \theta_\varphi L_{n \times 1}$ .

В выражениях (9.94) и (9.95) введены функции  $F_{u^+}$  и  $F_{u^-}$ , которые являются матрицами передаточных функций от воздействия  $\eta_0$  к векторам оценок

выходов объекта  $\hat{r}^+$  и  $\hat{r}^-$  системы. С помощью этих матриц можно записать уравнения

$$u^+ = F_{u^+}\eta_0, \quad u^- = F_{u^-}\eta_0, \quad (9.96)$$

которые описывают векторы управлений в устойчивом и неустойчивом трактах системы, а также выражения

$$\hat{r}^+ = F_{\hat{x}^+}\eta_0, \quad \hat{r}^- = F_{\hat{x}^-}\eta_0, \quad (9.97)$$

описывающие точностные оценки выходов устойчивого и неустойчивого замкнутых трактов, системы стабилизации.

Известно также, что матрицы  $F_{\hat{x}^+}$  и  $F_{u^+}$ ,  $F_{\hat{x}^-}$  и  $F_{u^-}$  связаны между собой уравнениями связи

$$\begin{aligned} F_{\hat{x}^+} &= (\Phi^+ K P_+^{-1}) [M(F_{u^+} + F_{u^-}) + E_n]; \\ F_{\hat{x}^-} &= (\Phi^- K P_-^{-1}) (M F_{u^-} + E_n). \end{aligned} \quad (9.98)$$

Очевидно, что, зная матрицы  $F_{\hat{x}^+}$  и  $F_{u^+}$ ,  $F_{\hat{x}^-}$  и  $F_{u^-}$ , нетрудно определить структуры частей регулятора в каждом из трактов и непосредственно векторы управлений  $u^+$  и  $u^-$  таким образом

$$\begin{aligned} W^+ &= (F_{u^+})(F_{\hat{x}^+})^{-1}, \quad u^+ = W^+ \hat{r}^+; \\ W^- &= (F_{u^-})(F_{\hat{x}^-})^{-1}, \quad u^- = W^- \hat{r}^-. \end{aligned} \quad (9.99)$$

Если в предстоящих задачах синтеза структур  $W^+$  и  $W^-$  регулятора как варьируемые в соответствующих функционалах качества выбирать функции  $F_{u^+}$  и  $F_{u^-}$ , то с учётом выражений (9.96)-(9.99) поставленные задачи синтеза будут иметь решения.

Для синтеза оптимальной структуры  $W^-$  предположим, что вектор выходных сигналов тракта  $r^-$  представляет собой вектор сигналов ошибок неустойчивого тракта системы  $\varepsilon_0^-$ , которые также представляют собой расходящиеся сигналы. Полагается также, что матрицы  $F_{\hat{x}^-}$  и  $F_{u^-}$  характеризуют движения в замкнутом неустойчивом контуре.

Для решения поставленной задачи используем определить вектор  $r^-$ , найденный согласно схеме (рис.9.12) в виде соотношения (9.95). Вектор сигналов управлений  $u^-$  в исследуемом контуре определяется выражениями (9.96).

Функционал качества стабилизации объекта неустойчивым замкнутым контуром исследуемой системы будет таким

$$\bar{E}_{0-} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (\varepsilon_{0-} \varepsilon_{0-*} R_{01} + u^- u_*^- C_{01}) ds. \quad (9.100)$$

Подстановка выражений (9.95) и (9.96) в функционал (9.100) определит такой вид функционала качества

$$\begin{aligned} \bar{E}_{0-} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ (\Phi^- K)^{-1} [ (\Phi^- K P_-^{-1}) (M F_{u^-} + E_n) \theta_{\eta_0} - \Phi^- \theta_\varphi ] L_n \times \\ & \times [ \theta_{\eta_{0*}} (F_{u_*^-} M_* + E_n) (\Phi^- K P_-^{-1})_* - \theta_{\varphi_*} \Phi_*^- ] (\Phi^- K)_*^{-1} R_{01} + \\ & + F_{u^-} \theta_{\eta_0} L_n \theta_{\eta_{0*}} F_{u_*^-} C_{01} \} ds. \end{aligned} \quad (9.101)$$

Решая задачу синтеза оптимальной структуры  $F_{u^-}$  методом Винера-Колмогорова, необходимо определить первую вариацию функционала (9.101) и условие тождественного равенства её нулю.

Первая вариация функционала  $\delta \bar{E}_{0-}$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta \bar{E}_{0-} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} ( \{ [ M_* (\Phi^- K P_-^{-1})_* (\Phi^- K)_*^{-1} R_{01} (\Phi^- K)^{-1} (\Phi^- K P_-^{-1}) M + C_{01} ] \times \\ & \times F_{u^-} \theta_{\eta_0} L_n \theta_{\eta_{0*}} + M_* (\Phi^- K P_-^{-1})_* (\Phi^- K)_*^{-1} R_{01} (\Phi^- K)^{-1} (\Phi^- K P_-^{-1}) \theta_{\eta_0} L_n \theta_{\eta_{0*}} - \\ & - M_* (\Phi^- K P_-^{-1})_* (\Phi^- K)_*^{-1} R_{01} (\Phi^- K)^{-1} \Phi^- \theta_\varphi L_n \theta_{\eta_{0*}} \} \delta F_{u_*^-} + \\ & + \delta F_{u^-} \{ \theta_{\eta_0} L_n \theta_{\eta_{0*}} F_{u_*^-} [ M_* (\Phi^- K P_-^{-1})_* (\Phi^- K)_*^{-1} R_{01} (\Phi^- K)^{-1} (\Phi^- K P_-^{-1}) M + C_{01} ] + \\ & + \theta_{\eta_0} L_n \theta_{\eta_{0*}} (\Phi^- K P_-^{-1})_* (\Phi^- K)_*^{-1} R_{01} (\Phi^- K)^{-1} (\Phi^- K P_-^{-1}) M - \\ & - \theta_{\eta_0} L_n \theta_{\varphi_*} \Phi_*^- (\Phi^- K)_*^{-1} R_{01} (\Phi^- K)^{-1} (\Phi^- K P_-^{-1}) M \} ) ds. \end{aligned} \quad (9.102)$$

Целесообразно ввести следующие обозначения

$$\Gamma_0^- \Gamma_{0*}^- = M_* (\Phi^- K P_-^{-1})_* (\Phi^- K)_*^{-1} R_{01} (\Phi^- K)^{-1} (\Phi^- K P_-^{-1}) M + C_{01};$$

$$D_{0*}^- L_n D_0^- = \theta_{\eta_0} L_n \theta_{\eta_{0*}};$$

$$\begin{aligned} T_0^- = & T_{00}^- + T_{0+}^- + T_{0-}^- = (\Gamma_0^-)^{-1} M_* (\Phi^- K P_-^{-1})_* (\Phi^- K)_*^{-1} R_{01} (\Phi^- K)^{-1} \times \\ & \times [ (\Phi^- K P_-^{-1}) \theta_{\eta_0} - \Phi^- \theta_\varphi ] L_n \theta_{\eta_{0*}} (L_n D_0^-)^{-1}. \end{aligned} \quad (9.103)$$

С учётом обозначений (9.103) вариация (9.102) будет иметь вид

$$\delta \mathcal{E}_{0-} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\Gamma_0^- (\Gamma_{0*}^- F_{u-} D_{0*}^- + T_0^-) L_n D_0^- \delta F_{u_*}^- + \\ + \delta F_{u-} D_{0*}^- L_n (D_0^- F_{u_*}^- \Gamma_0^- + T_{0*}^-) \Gamma_{0*}^-] ds.$$

Условие тождественного равенства вариации (9.102) нулю будет таким

$$\Gamma_{0*}^- F_{u-} D_{0*}^- = -(T_{0-}^-),$$

а алгоритм синтеза по исходным данным задачи оптимальной структуры матрицы  $F_{u-}$  следует записать так

$$F_{u-} = -(\Gamma_{0*}^-)^{-1} (T_{0-}^-) (D_{0*}^-)^{-1}. \quad (9.104)$$

Согласно уравнению (9.95) оптимальная структура матрицы  $F_{r-}$  будет иметь вид

$$F_{r-} = (\Phi^- K)^{-1} (\Phi^- K P_-^{-1}) (M F_{u-} + E_n),$$

а оптимальная структура матрицы передаточных функций  $W^-$  части регулятора в неустойчивом контуре системы стабилизации будет такой (см. выражение (9.99))

$$W^- = F_{u-} (F_{r-})^{-1}. \quad (9.105)$$

Для синтеза оптимальной структуры матрицы передаточных функций  $W^+$  (рис.9.12) можно составить уравнение, определяющее вектор сигналов  $r^+$  как входной для устойчивого тракта, в таком виде

$$r^+ = (\Phi^+ K)^{-1} \{ (\Phi^+ K P_+^{-1}) [M (F_{u^+} + \hat{F}_{u-}^-) + E_n] \theta_{\eta_0} - \Phi^+ \theta_{\varphi} \} L_{n \times 1}. \quad (9.106)$$

В выражении (9.106) ведена неизвестная искомая функция  $F_{u^+}$  и уже известная (9.104) матрица  $\hat{F}_{u-}^-$ . Функция  $F_{u^+}$  является матрицей передаточных функций от суммарного воздействия  $\eta_0$  к вектору сигналов  $u^+$  управления в устойчивом контуре системы

$$u^+ = F_{u^+} \eta_0, \quad (9.107)$$

а матрица  $F_{\hat{r}^+}$  формирует вектор  $\hat{r}^+$  наилучших по точности оценок выходов объекта исследуемого контура управления

$$\hat{r}^+ = F_{\hat{x}^+} \eta_0.$$

Зная матрицы  $F_{\hat{x}^+}$  и  $F_{u^+}$ , возможно определить структуру искомой части регулятора так

$$W^+ = (F_{u^+})(F_{\hat{x}^+})^{-1}.$$

Приступая непосредственно к решению задачи синтеза оптимальной структуры  $W^+$  части регулятора исследуемой системы целесообразно функционал качества стабилизации объекта в устойчивом замкнутом контуре представить следующим образом

$$\mathcal{E}_{0+} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (\varepsilon_{0+} \varepsilon_{0+*} R_{02} + u^+ u_*^+ C_{02}) ds. \quad (9.108)$$

Подстановка выражений (9.106) и (9.107) в функционал (9.108) предопределит такой его вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{0+} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (((\Phi^+ K)^{-1} \{(\Phi^+ K P_+^{-1}) [M(F_{u^+} + \hat{F}_{u^-}) + E_n] \theta_{\eta_0} - \Phi^+ \theta_\varphi\} L_n \times \\ & \times \{\theta_{\eta_0*} [(F_{u_*^+} + \hat{F}_{u_*^-}) M_* + E_n] (\Phi^+ K P_+^{-1})_* - \theta_{\varphi*} \Phi_*^+\} (\Phi^+ K)_*^{-1} R_{02} + \\ & + F_{u^+} \theta_{\eta_0} L_n \theta_{\eta_0*} F_{u_*^+} C_{02})) ds. \end{aligned} \quad (9.109)$$

Как и ранее, решая задачу синтеза оптимальной структуры матрицы  $F_{u^+}$  методом Винера-Колмогорова, необходимо определить первую вариацию функционала (9.109) и условие тождественного равенства её нулю.

Первая вариация  $\delta \mathcal{E}_{0+}$  будет такой

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_{0+} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} ((([M_* (\Phi^+ K P_+^{-1})_* (\Phi^+ K)_*^{-1} R_{02} (\Phi^+ K)^{-1} (\Phi^+ K P_+^{-1}) M + C_{02}] \times \\ & \times F_{u^+} \theta_{\eta_0} L_n \theta_{\eta_0*} + M_* (\Phi^+ K P_+^{-1})_* (\Phi^+ K)_*^{-1} R_{02} (\Phi^+ K)^{-1} (\Phi^+ K P_+^{-1}) \times \\ & \times (M \hat{F}_{u^-} + E_n) \theta_{\eta_0} L_n \theta_{\eta_0*} - M_* (\Phi^+ K P_+^{-1})_* (\Phi^+ K)_*^{-1} R_{02} (\Phi^+ K)^{-1} \times \\ & \times \Phi^+ \theta_\varphi L_n \theta_{\eta_0*} \} \delta F_{u_*^+} + \delta F_{u^+} \{ \theta_{\eta_0} L_n \theta_{\eta_0*} F_{u_*^+} \times \\ & \times [M_* (\Phi^+ K P_+^{-1})_* (\Phi^+ K)_*^{-1} R_{02} (\Phi^+ K)^{-1} (\Phi^+ K P_+^{-1}) M + C_{02}] + \\ & + \theta_{\eta_0} L_n \theta_{\eta_0*} (\hat{F}_{u_*^-} M_* + E_n) (\Phi^+ K P_+^{-1})_* (\Phi^+ K)_*^{-1} R_{02} (\Phi^+ K)^{-1} (\Phi^+ K P_+^{-1}) M - \\ & - \theta_{\eta_0} L_n \theta_{\varphi*} \Phi_*^+ (\Phi^+ K)_*^{-1} R_{02} (\Phi^+ K)^{-1} (\Phi^+ K P_+^{-1}) M \} ds. \end{aligned} \quad (9.110)$$

Целесообразно ввести следующие обозначения

$$\Gamma_{0*}^+ \Gamma_0^+ = M_*(\Phi^+ K P_+^{-1})_*(\Phi^+ K)_*^{-1} R_{02} (\Phi^+ K)^{-1} (\Phi^+ K P_+^{-1}) M + C_{02};$$

$$D_0^+ L_n D_{0*}^+ = \theta_{\eta_0} L_n \theta_{\eta_{0*}};$$

$$T_0^+ = T_{00}^+ + T_{0+}^+ + T_{0-}^+ = (\Gamma_{0*}^+)^{-1} M_*(\Phi^+ K P_+^{-1})_*(\Phi^+ K)_*^{-1} R_{02} (\Phi^+ K)^{-1} \times \\ \times [(\Phi^+ K P_+^{-1})(M \hat{F}_{u^-} + E_n) \theta_{\eta_0} - \Phi^+ \theta_\varphi] L_n \theta_{\eta_{0*}} (L_n D_{0*}^+)^{-1}. \quad (9.111)$$

С учётом обозначений (9.111) вариацию (9.110) можно записать так

$$\delta \mathcal{E}_{0+} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\Gamma_{0*}^+ (\Gamma_0^+ F_{u^+} D_0^+ + T_0^+) L_n D_{0*}^+ \delta F_{u_*^+} + \\ + \delta F_{u^+} D_0^+ L_n (D_{0*}^+ F_{u_*^+} \Gamma_{0*}^+ + T_{0*}^+) \Gamma_0^+] ds.$$

Условия тождественного равенства вариации (9.110) нулю будет иметь вид

$$\Gamma_0^+ F_{u^+} D_0^+ = -(T_{00}^+ + T_{0+}^+).$$

Алгоритм синтеза по исходным данным решаемой задачи оптимальной структуры матрицы  $F_{u^+}$  будет таким

$$F_{u^+} = -(\Gamma_0^+)^{-1} (T_{00}^+ + T_{0+}^+) (D_0^+)^{-1}. \quad (9.112)$$

Согласно структурной схеме (рис.9.12) матрицу  $F_{\hat{x}^+}$  передаточных функций устойчивого замкнутого контура от воздействия  $\eta_0$  к выходу  $\hat{r}^+$  следует определять по уравнению

$$\hat{x}^+ = \hat{F}_{\hat{x}^+ \eta_0} = (\Phi^+ K P_+^{-1}) [M (\hat{F}_{u^+} + \hat{F}_{u^-}) + E_n] \theta_{\eta_0} L_{n \times 1}$$

следующим образом

$$F_{\hat{x}^+} = (\Phi^+ K P_+^{-1}) [M (\hat{F}_{u^+} + \hat{F}_{u^-}) + E_n]. \quad (9.113)$$

Учитывая матрицы (9.112) и (9.113), оптимальную структуру части регулятора  $W^+$  можно определить так

$$W^+ = (F_{u^+}) (F_{\hat{x}^+})^{-1}. \quad (9.114)$$

## **ГЛАВА 10 ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА ПРИ СЛУЧАЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

Постановки и алгоритмы решения задач синтеза оптимальных структур регулятора в системе стабилизации в пространстве или на заданной траектории движения многомерного линейного объекта, подверженного случайным стационарным воздействиям, имеют существенные отличия от описанных в предыдущей главе.

### **10.1 Системы стабилизации объекта с произволом в динамике и оптимальным наблюдением векторов спектров сигналов, характеризующих достигаемое положение объекта на заданной траектории движения**

В рассматриваемых условиях функционирования исследуемого объекта структурная схема системы стабилизации принципиально отличается от представленной на рисунке 9.6. Отличия новой структуры, показанной на рисунке 10.1, состоят в отражении на схеме случайного характера векторов воздействий, учёте особенностей заданной траектории движения объекта, являющей собой многомерный стационарный случайный процесс с известными статистическими характеристиками. При построении структурной схемы (рис 10.1) полагается также что, предварительно, после этапов структурной идентификации моделей динамики объекта и динамической аттестации его бортовых измерителей уже известны модели динамики устойчивой и неустойчивой частей объекта, матрица передаточных функций измерителя и статистические характеристики помех измерений. Оптимальные структуры матриц передаточных функций частей регулятора  $W^+$  и  $W^-$  в дальнейшем подлежат определению (см. соответствующие разделы главы).

Поскольку у объекта стабилизации, подверженного лишь случайным воздействиям, при его испытаниях возможно фиксировать и оценивать только случайные суммарные и неустойчивые сигналы выходов объекта (сигналы наблюдений  $\hat{y}^-$  и  $\tilde{y}^\Sigma$ ), то для оценивания устойчивого случайного выхода объекта при его функционировании необходимо определять разность векторов  $\tilde{y}^\Sigma - \hat{y}^- = \hat{y}^+$ . Вектор  $\hat{y}^+$  в дальнейшем нужно использовать как некий аналог реального вектора  $\tilde{y}^+$ .

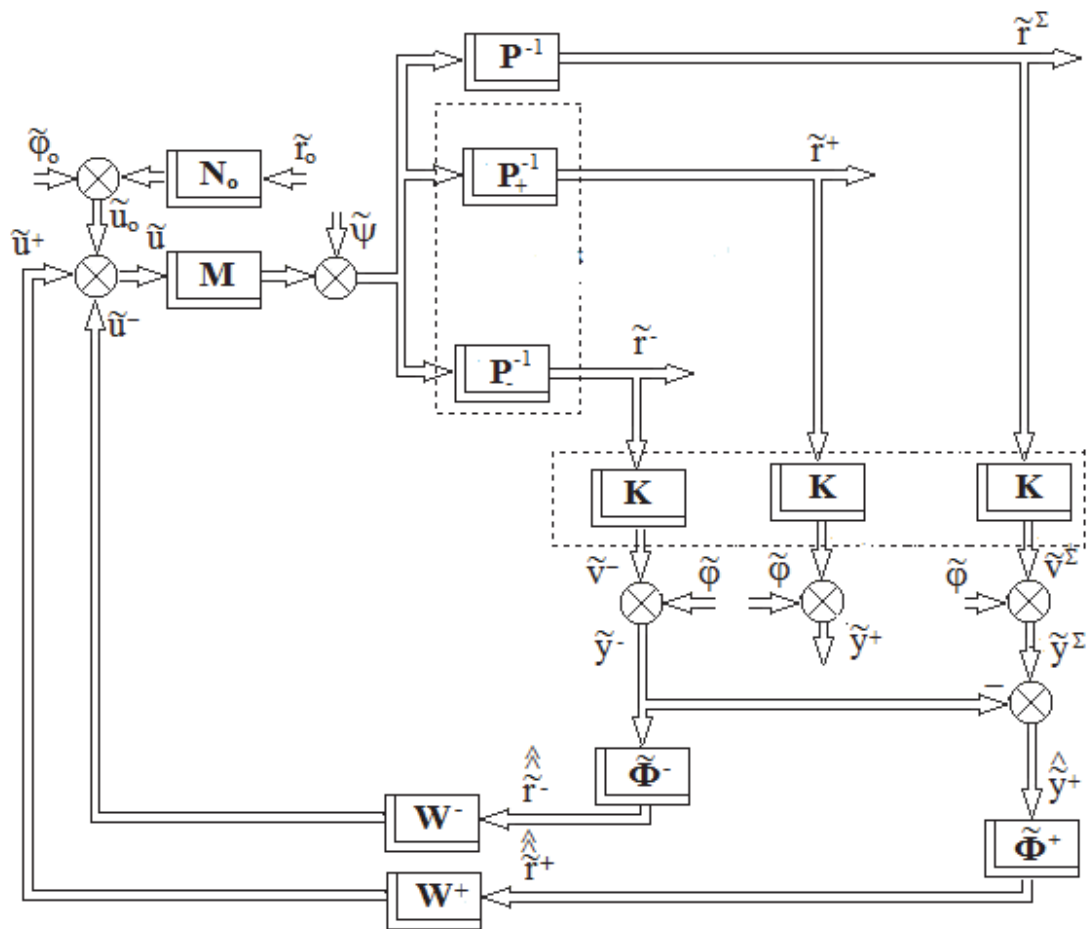


Рис.10.1 Структурная схема стабилизации объекта с произволом в динамике, подверженного случайным воздействием.

Как и ранее, при решении задач синтеза структур оптимальных наблюдателей  $\tilde{\Phi}^+$  и  $\tilde{\Phi}^-$  (рис 10.1) необходимо считать нулевым вектор

управлений  $\tilde{u}$ . Тогда векторы выходных сигналов объекта в неустойчивом и устойчивом трактах следует записывать так

$$\tilde{r}_0^- = P_-^{-1}\tilde{\psi}, \tilde{r}_0^+ = P_+^{-1}\tilde{\psi}, \quad (10.1)$$

а оптимальные оценки этих векторов с помощью вводимых блоков наблюдателей должны иметь вид

$$\hat{r}^- = \tilde{\Phi}^-\hat{y}^-, \hat{r}^+ = \tilde{\Phi}^+\hat{y}^+ \quad (10.2)$$

### 10.1.1 Задача синтеза оптимальной структуры наблюдателя $\tilde{\Phi}^-$ в неустойчивом тракте системы стабилизации объекта

Вектор ошибок оценивания выходного вектора наблюдателя с учётом выражений (10.1) и (10.2) в неустойчивом тракте системы стабилизации будет таким

$$\tilde{\varepsilon}_H^- = \hat{r}^- - \tilde{r}_0^- = \tilde{\Phi}^-\hat{y}^- - P_-^{-1}\tilde{\psi}; \quad (10.3)$$

а функционал качества наблюдения вектора  $\tilde{r}^-$  следует записать так

$$\tilde{e}_H^- = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(S'_{\tilde{\varepsilon}_H^- \tilde{\varepsilon}_H^-} R_H^-) ds, \quad (10.4)$$

где согласно теореме Винера-Хинчина транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\tilde{\varepsilon}_H^-$  будет иметь вид

$$S'_{\tilde{\varepsilon}_H^- \tilde{\varepsilon}_H^-} = \tilde{\Phi}^- S'_{\tilde{y}^- \tilde{y}^-} \tilde{\Phi}_*^- - \tilde{\Phi}^- S'_{\tilde{\psi} \tilde{y}^-} P_{-*}^{-1} - P_-^{-1} S'_{\tilde{y}^- \tilde{\psi}} \tilde{\Phi}_*^- + P_-^{-1} S'_{\tilde{\psi} \tilde{\psi}} P_{-*}^{-1}. \quad (10.5)$$

Подставив матрицу (10.5) в функционал (10.4), следует переписать последний так

$$\begin{aligned} \tilde{e}_H^- = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [ & (\tilde{\Phi}^- S'_{\tilde{y}^- \tilde{y}^-} \tilde{\Phi}_*^- - \tilde{\Phi}^- S'_{\tilde{\psi} \tilde{y}^-} P_{-*}^{-1} - P_-^{-1} S'_{\tilde{y}^- \tilde{\psi}} \tilde{\Phi}_*^- + \\ & + P_-^{-1} S'_{\tilde{\psi} \tilde{\psi}} P_{-*}^{-1}) R_H^- ] ds. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Решая задачу синтеза структуры матрицы  $\tilde{\Phi}^-$  методом Винера-Колмогорова, необходимо определить первую вариацию функционала (10.6) и условие тождественного равенства ее нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц передаточных функций наблюдателя. Первая вариация функционала (10.6) будет такой

$$\delta \tilde{e}_H^- = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [R_H^- (\tilde{\Phi}^- S'_{\tilde{y}^- \tilde{y}^-} - P_-^{-1} S'_{\tilde{y}^- \tilde{\psi}}) \delta \tilde{\Phi}_*^- + \delta \tilde{\Phi}^- (S'_{\tilde{y}^- \tilde{y}^-} \tilde{\Phi}_*^- - S'_{\tilde{\psi} \tilde{y}^-} P_{-*}^{-1}) R_H^-] ds. \quad (10.7)$$

В рассматриваемом ниже варианте задачи синтеза структуры  $\tilde{\Phi}^-$  обсуждаются два варианта ввода обозначений используемых в вариации (10.7), что связано с двумя возможностями факторизации матриц  $S'_{\tilde{y}^- \tilde{y}^-}$  и  $R_H^-$ . Первый вариант вводимых обозначений может быть таким

$$\begin{aligned} \Gamma_{1H*}^- \Gamma_{1H}^- &= R_H^-; D_1^- D_{1*}^- = S'_{\tilde{y}^- \tilde{y}^-}; \\ T_{1H}^- &= T_{1H0}^- + T_{1H+}^- + T_{1H-}^- = \Gamma_{1H}^- P_-^{-1} S'_{\tilde{y}^- \tilde{\psi}} (D_{1*}^-)^{-1}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Второй вариант вводимых обозначений нужно записать так

$$\begin{aligned} \Gamma_{2H}^- \Gamma_{2H*}^- &= R_H^-; D_{2*}^- D_2^- = S'_{\tilde{y}^- \tilde{y}^-}; \\ T_{2H}^- &= T_{2H0}^- + T_{2H+}^- + T_{2H-}^- = \Gamma_{2H*}^- P_-^{-1} S'_{\tilde{y}^- \tilde{\psi}} (D_2^-)^{-1}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

С учетом первого варианта обозначений (10.8) условие тождественного равенства нулю вариации (10.7) нужно представить в виде

$$\Gamma_{1H}^- \tilde{\Phi}^- D_1^- = T_{1H0}^- + T_{1H+}^-,$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры  $\hat{\tilde{\Phi}}^-$  будет таким

$$\hat{\tilde{\Phi}}_1^- = (\Gamma_{1H}^-)^{-1} (T_{1H0}^- + T_{1H+}^-) (D_1^-)^{-1}. \quad (10.10)$$

При использовании второго варианта обозначений условия тождественного равенства нулю вариации (10.7) оказывается таким

$$\Gamma_{2H*}^- \tilde{\Phi}^- D_{2*}^- = T_{2H-}^-,$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры  $\hat{\tilde{\Phi}}^-$  должен выглядеть так

$$\hat{\tilde{\Phi}}_2^- = (\Gamma_{2H*}^-)^{-1} T_{2H-}^- (D_{2*}^-)^{-1}. \quad (10.11)$$

Поскольку наблюдается вектор неустойчивых случайных сигналов  $\hat{\tilde{y}}^-$ , следует ожидать наибольшего качества наблюдений во втором варианте задачи. Это можно подтвердить на примере, который изложен ниже.

**10.1.2 Пример, иллюстрирующий целесообразный выбор варианта решения задачи синтеза оптимальной структуры наблюдателя неустойчивых случайных выходов объекта**

Исходные данные примера:

$$R_{\text{н}}^- = A^2; P_{\text{н}}^{-1} = \frac{1}{(-Ts+1)}; S'_{\tilde{y}^-\tilde{y}^-} = \frac{\sigma_{\tilde{y}^-}^2}{\pi} \frac{1}{|s(\tau s+1)|^2}; S'_{\tilde{\psi}^-\tilde{\psi}^-} = \frac{\sigma_{\tilde{\psi}^-}^2}{\pi} \frac{1}{|\mu s+1|^2}; \quad (10.12)$$

Вариант I примера:

$$S'_{\tilde{\psi}^-\tilde{y}^-} = \frac{\sigma_{\tilde{y}^-}\sigma_{\tilde{\psi}^-}}{\pi} \frac{1}{s(\tau s+1)(-\mu s+1)}, \quad S'_{\tilde{y}^-\tilde{\psi}^-} = \frac{\sigma_{\tilde{y}^-}\sigma_{\tilde{\psi}^-}}{\pi} \frac{1}{-s(-\tau s+1)(\mu s+1)}. \quad (10.13)$$

Вариант II примера:

$$S'_{\tilde{\psi}^-\tilde{y}^-} = \frac{\sigma_{\tilde{y}^-}\sigma_{\tilde{\psi}^-}}{\pi} \frac{1}{s(\tau s+1)(\mu s+1)}, \quad S'_{\tilde{y}^-\tilde{\psi}^-} = \frac{\sigma_{\tilde{y}^-}\sigma_{\tilde{\psi}^-}}{\pi} \frac{1}{-s(-\tau s+1)(-\mu s+1)}. \quad (10.14)$$

Процедура синтеза оптимальной структуры  $\widehat{\Phi}^-$  наблюдателя в первом варианте примера такова. Подставив исходные данные (10.12) и (10.13) в выражения (10.8), можно получить следующие результаты

$$\Gamma_{1\text{н}}^- = \Gamma_{1\text{н}*}^- = A; D_{1\text{н}}^- = \frac{\sigma_{\tilde{y}^-}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{s(\tau s+1)}; D_{1\text{н}*}^- = \frac{\sigma_{\tilde{y}^-}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{-s(-\tau s+1)};$$

$$T_{1\text{н}}^- = -\frac{\sigma_{\tilde{\psi}^-}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{A} \frac{-\tau s+1}{(-Ts+1)(\tau s+1)(-\mu s+1)}; T_{1\text{н}0}^- = 0; T_{1\text{н}+}^- = -\frac{\sigma_{\tilde{\psi}^-}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{A} \frac{2\tau}{(\tau+\mu)} \frac{1}{(\tau s+1)}.$$

Постановка результатов первого варианта задачи в формулу (10.10) определит оптимальную структуру  $\widehat{\Phi}^-$  наблюдателя в первом варианте задачи в виде

$$\widehat{\Phi}_{1\text{н}}^- = \frac{\sigma_{\tilde{\psi}^-}}{\sigma_{\tilde{y}^-}} \frac{2\tau}{A^2(\tau+\mu)} \frac{-s(-\tau s+1)}{(\tau s+1)} \quad (10.15)$$

Процедура синтеза оптимальной структуры  $\widehat{\Phi}^-$  наблюдателя во втором варианте примера следующая. Подставив исходные данные задачи в выражение (10.9), можно получить следующие равенства

$$\Gamma_{2\text{н}}^- = \Gamma_{2\text{н}*}^- = A; D_{2\text{н}}^- = \frac{\sigma_{\tilde{y}^-}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{s(\tau s+1)}; D_{2\text{н}*}^- = \frac{\sigma_{\tilde{y}^-}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{-s(-\tau s+1)};$$

$$T_{2\text{н}}^- = -\frac{\sigma_{\tilde{\psi}^-}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{A} \frac{\tau s+1}{(-Ts+1)(-\tau s+1)(\mu s+1)}; T_{2\text{н}0}^- = 0; T_{2\text{н}-}^- = -\frac{\sigma_{\tilde{\psi}^-}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{A} \frac{T(T-\tau)}{(T+\tau)(T-\mu)} \frac{1}{(-Ts+1)}.$$

Подстановка указанных равенств в выражение (10.11) позволит определить оптимальную структуру  $\widehat{\Phi}^-$  наблюдателя во втором варианте задачи такой

$$\widehat{\Phi}_2^- = \frac{\sigma_{\tilde{y}^-}}{\sigma_{\tilde{y}^-}} \frac{T(T-\tau)}{A^2(T+\tau)(T-\mu)} \frac{s(\tau s+1)}{(-Ts+1)}. \quad (10.16)$$

Необходимо оценить и сравнить достижимое в примере качество наблюдения вектора спектров сигналов  $\tilde{r}_0^-$  (10.1) оптимальными структурами (10.15) и (10.16). Используя результаты факторизации матриц  $S'_{\tilde{y}^- \tilde{y}^-}$  и  $S'_{\tilde{\psi} \tilde{\psi}}$  для оценки векторов  $\hat{y}^-$  и  $\hat{\psi}$ , возможно, во-первых, определить оценки векторов спектров сигналов выхода из наблюдателя с синтезированными структурами  $\widehat{\Phi}_1^-$  и  $\widehat{\Phi}_2^-$ , определить вектор  $\tilde{r}_0^-$ , а, во-вторых, определить качественное различие оценок векторов  $\hat{r}_1^-$  и  $\hat{r}_2^-$  путем сравнения последних с оценкой вектора  $\tilde{r}_0^-$ . Оценку вектора  $\tilde{r}_0^-$  (10.1) с учетом вышесказанного следует записать так

$$\tilde{r}_0^- = \frac{\sigma_{\tilde{\psi}}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(-Ts+1)(\mu s+1)}, \quad (10.17)$$

а оценки векторов  $\hat{r}_1^-$  и  $\hat{r}_2^-$  с учетом выражений (10.15) и (10.16), а также оговоренного выше результата организации матрицы  $S'_{\tilde{y}^- \tilde{y}^-}$  представить в виде

$$\hat{r}_1^- = \widehat{\Phi}_1^- \tilde{y}^- = -\frac{\sigma_{\tilde{y}^-}}{\sigma_{\tilde{y}^-}} \frac{2\tau}{A^2(\tau+\mu)} \frac{-s(-\tau s+1)}{(\tau s+1)} \frac{\sigma_{\tilde{y}^-}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{-s(-\tau s+1)} = -\frac{\sigma_{\tilde{y}^-}}{\sqrt{\pi}} \frac{2\tau}{A^2(\tau+\mu)} \frac{1}{(\tau s+1)}; \quad (10.18)$$

$$\begin{aligned} \hat{r}_2^- &= \widehat{\Phi}_2^- \tilde{y}^- = \frac{\sigma_{\tilde{y}^-}}{\sigma_{\tilde{y}^-}} \frac{T(T-\tau)}{A^2(T+\tau)(T-\mu)} \frac{s(\tau s+1)}{(-Ts+1)} \frac{\sigma_{\tilde{y}^-}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{-s(-\tau s+1)} = \\ &= \frac{\sigma_{\tilde{y}^-}}{\sqrt{\pi}} \frac{T(T-\tau)}{A^2(T+\tau)(T-\mu)} \frac{(\tau s+1)}{(-Ts+1)(-\tau s+1)}. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Оценки качества наблюдения вектора  $\tilde{r}_0^-$  (10.17) вначале наблюдателем со структурой  $\widehat{\Phi}_1^-$  (10.15), а затем наблюдателем со структурой  $\widehat{\Phi}_2^-$  (10.16) возможно получить, сравнивая разности  $\hat{r}_1^-/\hat{r}_0^-$  и  $\hat{r}_2^-/\hat{r}_0^-$ , которые при учете выражения (10.17) будут такими

$$\tilde{v}_1^- = \frac{\hat{r}_1^-}{\hat{r}_0^-} = -\frac{2\tau}{A^2(\tau+\mu)} \frac{(-Ts+1)(\mu s+1)}{(\tau s+1)}, \quad (10.20)$$

$$\tilde{v}_2^- = \frac{\hat{r}_2^-}{\hat{r}_0^-} = \frac{T(T-\tau)}{A^2(T+\tau)(T-\mu)} \frac{(\tau s+1)(\mu s+1)}{(-\tau s+1)}. \quad (10.21)$$

По результатам анализа разностей (10.20) и (10.21) видно, что поскольку постоянная времени  $T$  много больше постоянных  $\tau$  и  $\mu$ , а разность полиномов

$\frac{(\tau s+1)}{(-\tau s+1)}$  такова, что эффект от влияния каждого из них минимален, то характеристика (10.21) существенно слабее искажает вектор  $\hat{r}_0^-$  в сравнении с характеристикой (10.20). Другими словами, для оптимального наблюдения неустойчивого вектора спектров сигналов  $\hat{r}_0^-$  с помощью оптимального наблюдателя синтез структуры последнего  $\hat{\Phi}^-$  по второму из рассмотренных вариантов задач синтеза предпочтительнее.

### 10.1.3 Синтез оптимальной структуры наблюдателя в устойчивом тракте системы стабилизации объекта на заданной траектории движения, являющей собой случайный многомерный процесс

Как показано на структурной схеме системы стабилизации (рис.10.1.) оценка вектора спектров сигналов наблюдения в устойчивом тракте рассматривается как разность векторов наблюдения результирующих выходных сигналов системы  $\hat{y}^\Sigma$  и вектора  $\hat{y}^-$  оценок сигналов наблюдения выходов неустойчивого тракта системы (вектор  $\hat{y}^+$ ).

Если известна оптимальная структура наблюдателя в устойчивом тракте  $\tilde{\Phi}^+$ , то вектор оценок сигналов наблюдения в устойчивом тракте системы следует записать так

$$\hat{r}^+ = \tilde{\Phi}^+ \hat{y}^+ = \tilde{\Phi}^+ (\hat{y}^\Sigma - \hat{y}^-), \quad (10.22)$$

а вектор оценок начальных сигналов выходов устойчивого тракта в предположении (как и в предыдущем разделе настоящей главы монографии), что вектор управлений  $\tilde{u}$  равен нулю, должен иметь вид

$$\hat{r}_0^+ = P_+^{-1} \tilde{\psi}. \quad (10.23)$$

Учитывая векторы (10.22) и (10.23), вектор спектров сигналов ошибок устойчивого тракта при определении структуры наблюдателя  $\hat{\Phi}^+$ , необходимо представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_n^+ &= \tilde{\Phi}^+ (\hat{y}^\Sigma - \hat{y}^-) - P_+^{-1} \tilde{\psi} = \tilde{\Phi}^+ \hat{y}^+ - P_+^{-1} \tilde{\psi}; \\ \tilde{\varepsilon}_{n*}^+ &= (\hat{y}_*^\Sigma - \hat{y}_*^-) \tilde{\Phi}_*^+ - \tilde{\psi}_* P_{+*}^{-1} = \hat{y}_*^+ \tilde{\Phi}_*^+ - \tilde{\psi}_* P_{+*}^{-1}. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Функционал качества наблюдения выходных сигналов устойчивого тракта системы стабилизации имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{e}_H^+ = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (S'_{\tilde{\varepsilon}_H^+ \tilde{\varepsilon}_H^+} R_H^+) ds = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [(\tilde{\Phi}^+ S'_{\tilde{y}^+ \tilde{y}^+} \tilde{\Phi}_*^+ - \tilde{\Phi}^+ S'_{\tilde{\psi} \tilde{y}^+} P_{+*}^{-1} - \\ - P_{+*}^{-1} S'_{\tilde{y}^+ \tilde{\psi}} \tilde{\Phi}_*^+ + P_{+*}^{-1} S'_{\tilde{\psi} \tilde{\psi}} P_{+*}^{-1}) R_H^+] ds, \end{aligned} \quad (10.25)$$

где, на основании теоремы Винера-Хинчина, транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\tilde{y}^+$  ( $S'_{\tilde{y}^+ \tilde{y}^+}$ ) представляется такой

$$S'_{\tilde{y}^+ \tilde{y}^+} = S'_{\tilde{y}^z \tilde{y}^z} - S'_{\tilde{y}^z \tilde{y}^-} - S'_{\tilde{y}^- \tilde{y}^z} + S'_{\tilde{y}^- \tilde{y}^-}, \quad (10.26)$$

а транспонированные матрицы  $S'_{\tilde{y}^+ \tilde{\psi}}$  и  $S'_{\tilde{\psi} \tilde{y}^+}$  следует писать в виде

$$S'_{\tilde{y}^+ \tilde{\psi}} = S'_{\tilde{y}^z \tilde{\psi}} - S'_{\tilde{y}^- \tilde{\psi}}, \quad S'_{\tilde{\psi} \tilde{y}^+} = S'_{\tilde{\psi} \tilde{y}^z} - S'_{\tilde{\psi} \tilde{y}^-}. \quad (10.27)$$

Задачу синтеза оптимальной структуры  $\tilde{\Phi}^+$  наблюдателя в устойчивом тракте системы стабилизации следует решать методом Винера-Колмогорова. Для этого необходимо определить первую вариацию функционала (10.25) и определить условие тождественного равенства вариаций нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц  $\tilde{\Phi}^+$ .

Первая вариация функционала (10.25) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta \tilde{e}_H^+ = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [R_H^+ (\tilde{\Phi}^+ S'_{\tilde{y}^+ \tilde{y}^+} - P_{+*}^{-1} S'_{\tilde{y}^+ \tilde{\psi}}) \delta \tilde{\Phi}_*^+ + \delta \tilde{\Phi}^+ (S'_{\tilde{y}^+ \tilde{y}^+} \tilde{\Phi}_*^+ - \\ - S'_{\tilde{\psi} \tilde{y}^+} P_{+*}^{-1})] ds. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Целесообразно ввести обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_H \Gamma_{H*} = R_H^+; \quad D_H D_{H*} = S'_{\tilde{y}^+ \tilde{y}^+} = S'_{\tilde{y}^z \tilde{y}^z} - S'_{\tilde{y}^z \tilde{y}^-} - S'_{\tilde{y}^- \tilde{y}^z} + S'_{\tilde{y}^- \tilde{y}^-}; \\ T_H = T_{H0} + T_{H+} + T_{H-} = \Gamma_H P_{+*}^{-1} (S'_{\tilde{y}^z \tilde{\psi}} - S'_{\tilde{y}^- \tilde{\psi}}) D_{H*}^{-1}. \end{aligned} \quad (10.29)$$

В обозначениях (10.29) использованы выражения (10.26) и (10.27).

С учетом обозначений (10.29) вариацию (10.28) можно переписать так

$$\delta \tilde{e}_H^+ = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_{H*} (\Gamma_H \tilde{\Phi}^+ D_H - T_H) \delta \tilde{\Phi}_*^+ + \delta \tilde{\Phi}^+ (D_{H*} \tilde{\Phi}_*^+ \Gamma_{H*} - T_{H*}) \Gamma_H] ds,$$

а условие тождественного равенства вариации (10.28) нулю будет выглядеть таким образом

$$\Gamma_H \tilde{\Phi}^+ D_H = (T_{H0} + T_{H+}).$$

Алгоритм синтеза оптимальной структуры  $\tilde{\Phi}^+$  наблюдателя в устойчивом тракте системы стабилизации имеет вид следующего уравнения

$$\hat{\tilde{\Phi}}^+ = \Gamma_n^{-1}(T_{n0} + T_{n+})D_n^{-1}. \quad (10.30)$$

Таким образом, задача синтеза структуры  $\hat{\tilde{\Phi}}^+$  решена.

## 10.2 Постановки и алгоритмы решения задач синтеза оптимальных структур частей регулятора в системе стабилизации объекта с произволом в динамике на заданной траектории движения, носящей случайный характер

Для решения поставленных задач сначала необходимо составить вектора эквивалентных воздействий на исследуемую систему. Вводится вектор спектров сигналов из векторов спектров программной траектории объекта  $\tilde{r}_0$  и базового возмущения  $\tilde{\psi}$  на объект

$$\tilde{\xi} = M(N_0\tilde{r}_0 + \tilde{\varphi}_0) + \tilde{\psi}, \quad \tilde{\xi}_* = (\tilde{r}_{0*}N_{0*} + \tilde{\varphi}_{0*})M_* + \tilde{\psi}_*, \quad (10.31)$$

а также векторы спектров возмущений, вызываемых помехами измерений интересующих векторов  $\tilde{r}^-$  и  $\tilde{r}^+$

$$\tilde{\zeta}_1 = K^\#P_- \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\zeta}_{1*} = \tilde{\varphi}_*P_{-*}K_*^\#; \quad \tilde{\zeta}_2 = K^\#P \tilde{\varphi}; \quad \tilde{\zeta}_{2*} = \tilde{\varphi}_*P_*K_*^\#. \quad (10.32)$$

Учитывая выражения (10.31) и (10.32) вектор спектров  $\eta$  суммарного воздействия на объект можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= \tilde{\xi} + \tilde{\zeta}_1 + \tilde{\zeta}_2 = M(N_0\tilde{r}_0 + \tilde{\varphi}_0) + \tilde{\psi} + K^\#(P_- + P)\tilde{\varphi}; \\ \tilde{\eta}_* &= (\tilde{r}_{0*}N_{0*} + \tilde{\varphi}_{0*})M_* + \tilde{\psi}_* + \tilde{\varphi}_*(P_{-*} + P_*)K_*^\#. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Для синтеза структур  $W^+$  и  $W^-$  частей регулятора в системе стабилизации целесообразно перестроить структурную схему системы стабилизации (рис.10.1) к виду, представленному на рисунке 10.2. Этот вид

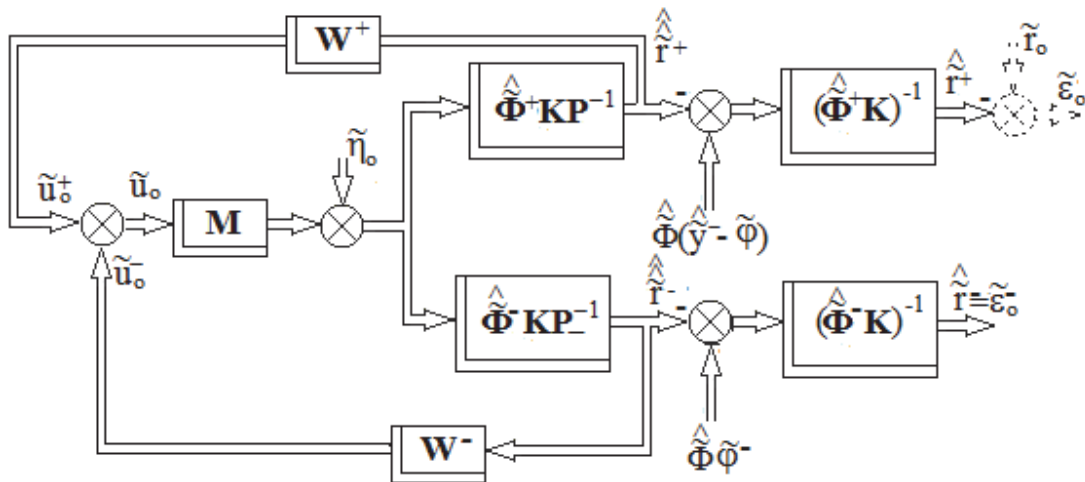


Рис.10.2. Структурная схема систем стабилизации объекта с произволом в динамике при случайных воздействиях

структурной схемы системы образуется после необходимой ее перестройки для правильного учета векторов сигналов наблюдения  $\tilde{y}^{\Sigma}$ ,  $\hat{y}^-$  и  $\hat{y}^+$ . Кроме того необходимо составить ряд выражений связи векторов сигналов системы между собой. Для тракта неустойчивых сигналов системы справедливы следующие уравнения:

$$\hat{r}^- = \hat{\Phi}^- \hat{y}^- = \hat{\Phi}^- (K \tilde{r}^- + \tilde{\varphi}), \quad \tilde{r}^- = (\hat{\Phi}^- K)^{-1} (\hat{r}^- - \hat{\Phi}^- \tilde{\varphi}), \quad (10.34)$$

а для устойчивого тракта системы необходимы такие выражения

$$\begin{aligned} \hat{r}^+ &= \hat{\Phi}^+ \hat{y}^+ = \hat{\Phi}^+ (\tilde{y}^{\Sigma} - \hat{y}^-) = \hat{\Phi}^+ (K \tilde{r}^+ + \tilde{\varphi} - \hat{y}^-), \\ \tilde{r}^+ &= (\hat{\Phi}^+ K)^{-1} [\hat{r}^+ - \hat{\Phi}^+ (\hat{y}^- - \tilde{\varphi})]. \end{aligned} \quad (10.35)$$

С учетом выражений (10.31)-(10.35) новый вариант структурной схемы системы стабилизации будет иметь вид (рис.10.2).

На структурной схеме (рис.10.2) легко выделяются два замкнутых контура (устойчивый и неустойчивый тракты), включающие в себя искомые части регулятора в системе, оптимальные структуры  $W^+$  и  $W^-$  которых следует отыскать по результатам решения соответствующих задач синтеза.

### 10.2.1 Задача синтеза оптимальной структуры $W^-$ части регулятора в неустойчивом тракте системы стабилизации объекта

Пусть движения объекта стабилизации в неустойчивом тракте системы, согласно его структурной схемы (рис.10.2), с учетом выражения (10.23) описывается выражением

$$\begin{aligned}\hat{r}^- &= (\widehat{\Phi}^- K)^{-1}(\hat{r}^- - \widehat{\Phi}^- \tilde{\varphi}) = (\widehat{\Phi}^- K)^{-1}[(\widehat{\Phi}^- K P_-^{-1})(M\tilde{u}^- + \tilde{\eta}) - \widehat{\Phi}^- \tilde{\varphi}] = \\ &= (\widehat{\Phi}^- K)^{-1}[(\widehat{\Phi}^- K P_-^{-1})(M F_{\tilde{u}^-} + E_n)\tilde{\eta} - \widehat{\Phi}^- \tilde{\varphi}] = (\widehat{\Phi}^- K)^{-1}\{(\widehat{\Phi}^- K P_-^{-1})(M F_{\tilde{u}^-} + \\ &+ E_n)[M(N_0 \tilde{r}_0 + \tilde{\varphi}_0) + \tilde{\psi} + K^\#(P_- + P)\tilde{\varphi}] - \widehat{\Phi}^- \tilde{\varphi}\},\end{aligned}\quad (10.36)$$

где  $F_{\tilde{u}^-}$  - матрица передаточных функций неустойчивого тракта системы от эквивалентного воздействия  $\tilde{\eta}$  к вектору управлений  $\tilde{u}^-$ . Связь между выходом указанного выше тракта  $\hat{r}^-$  и вектором управлений  $\tilde{u}^-$  определяется уравнением

$$\tilde{u}^- = W^- \hat{r}^- = F_{\tilde{u}^-} \tilde{\eta}, \quad (10.37)$$

где  $W^-$  искомая структура (матрица передаточных функций) части регулятора в неустойчивом тракте.

Матрица передаточных функций замкнутого неустойчивого тракта системы от эквивалентного возмущения  $\tilde{\eta}$  к выходу контура  $\hat{r}^-$  обозначена  $F_{\hat{r}^-}$ , определяемое ею уравнение тракта имеет вид

$$\hat{r}^- = F_{\hat{r}^-} \tilde{\eta}, \quad (10.38)$$

а структуру части регулятора в контуре  $W^-$  можно оценить по уравнению

$$W^- = (F_{\tilde{u}^-})(F_{\hat{r}^-})^{-1}, \quad (10.39)$$

если каким-то образом окажутся известными функции  $F_{\tilde{u}^-}$  и  $F_{\hat{r}^-}$ , которые как легко показать, однозначно связаны между собой

$$F_{\hat{r}^-} = (\widehat{\Phi}^- K P_-^{-1})(M F_{\tilde{u}^-} + E_n). \quad (10.40)$$

Теперь есть возможность приступить непосредственно к задаче синтеза оптимальной структуры  $W^-$ .

Полагается, что функционал качества стабилизации объекта в неустойчивом тракте имеет вид

$$\tilde{e}^- = \frac{1}{j} \int_{-j}^{j\infty} tr (S'_{\hat{r}^-\hat{r}^-} R_1 + S'_{\tilde{u}^-\tilde{u}^-} C_1) ds, \quad (10.41)$$

где  $S'_{\hat{r}^-\hat{r}^-}$  и  $S'_{\tilde{u}^-\tilde{u}^-}$  - транспонированные матрицы спектральных плоскостей векторов  $\hat{r}^-$  и  $\tilde{u}^-$ , которые согласно теореме Винера-Хинчина и выражений (10.36) и (10.37) имеют вид:

$$\begin{aligned} S'_{\hat{r}^-\hat{r}^-} = & (\widehat{\Phi}^- K)^{-1} \{ (\widehat{\Phi}^- K P_-^{-1}) (M F_{\tilde{u}^-} + E_n) [M (N_0 S'_{\tilde{r}_0 \tilde{r}_0} N_{0*} + S'_{\tilde{\varphi}_0 \tilde{\varphi}_0}) M_* + \\ & + S'_{\tilde{\psi} \tilde{\psi}} + K^\# (P_- + P) S'_{\tilde{\varphi} \tilde{\varphi}} (P_{-*} + P_*) K_*^\#] (F_{\tilde{u}_*^-} M_* + E_n) (\widehat{\Phi}^- K P_-^{-1})_* - \\ & - (\widehat{\Phi}^- K P_-^{-1}) (M F_{\tilde{u}^-} + E_n) K^\# (P_- + P) S'_{\tilde{\varphi} \tilde{\varphi}} \widehat{\Phi}_*^- - \widehat{\Phi}^- S'_{\tilde{\varphi} \tilde{\varphi}} (P_{-*} + P_*) K_*^\# (F_{\tilde{u}_*^-} M_* + \\ & + E_n) (\widehat{\Phi}^- K P_-^{-1})_* + \widehat{\Phi}^- S'_{\tilde{\varphi} \tilde{\varphi}} \widehat{\Phi}_*^- \} (\widehat{\Phi}^- K)_*^{-1}; \end{aligned} \quad (10.42)$$

$$\begin{aligned} S'_{\tilde{u}^-\tilde{u}^-} = & F_{\tilde{u}^-} [M (N_0 S'_{\tilde{r}_0 \tilde{r}_0} N_{0*} + S'_{\tilde{\varphi}_0 \tilde{\varphi}_0}) M_* + S'_{\tilde{\psi} \tilde{\psi}} + K^\# (P_- + P) S'_{\tilde{\varphi} \tilde{\varphi}} (P_{-*} + \\ & + P_*) K_*^\#] F_{\tilde{u}_*^-}. \end{aligned} \quad (10.43)$$

В матрицах (10.42) и (10.43) полагается, что векторы сигналов  $\tilde{r}_0$ ,  $\tilde{\varphi}_0$ ,  $\tilde{\psi}$  и  $\tilde{\varphi}$  некоррелированные между собой.

Подстановка матриц (10.42) и (10.43) в функционал (10.41) определит такой вид последнего

$$\begin{aligned} \tilde{e}^- = & \frac{1}{j} \int_{-j}^{j\infty} tr ( ((\widehat{\Phi}^- K)^{-1} \{ (\widehat{\Phi}^- K P_-^{-1}) (M F_{\tilde{u}^-} + E_n) [M (N_0 S'_{\tilde{r}_0 \tilde{r}_0} N_{0*} + \\ & + S'_{\tilde{\varphi}_0 \tilde{\varphi}_0}) M_* + S'_{\tilde{\psi} \tilde{\psi}} + K^\# (P_- + P) S'_{\tilde{\varphi} \tilde{\varphi}} (P_{-*} + P_*) K_*^\#] (F_{\tilde{u}_*^-} M_* + E_n) (\widehat{\Phi}^- K P_-^{-1})_* - \\ & - (\widehat{\Phi}^- K P_-^{-1}) (M F_{\tilde{u}^-} + E_n) K^\# (P_- + P) S'_{\tilde{\varphi} \tilde{\varphi}} \widehat{\Phi}_*^- - \widehat{\Phi}^- S'_{\tilde{\varphi} \tilde{\varphi}} (P_{-*} + P_*) K_*^\# (F_{\tilde{u}_*^-} M_* + \\ & + E_n) (\widehat{\Phi}^- K P_-^{-1})_* + \widehat{\Phi}^- S'_{\tilde{\varphi} \tilde{\varphi}} \widehat{\Phi}_*^- \} (\widehat{\Phi}^- K)_*^{-1} R_1 + F_{\tilde{u}^-} [M (N_0 S'_{\tilde{r}_0 \tilde{r}_0} N_{0*} + \\ & + S'_{\tilde{\varphi}_0 \tilde{\varphi}_0}) M_* + S'_{\tilde{\psi} \tilde{\psi}} + K^\# (P_- + P) S'_{\tilde{\varphi} \tilde{\varphi}} (P_{-*} + P_*) K_*^\#] F_{\tilde{u}_*^-} C_1) ) ds. \end{aligned} \quad (10.44)$$

Решая задачу синтеза методом Винера-Колмогорова, необходимо найти первую вариацию функционала (10.44) и условие тождественного равенства ее нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций  $F_{\tilde{u}^-}$ . Первая вариация функционала будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{e}^- = & \frac{1}{j} \int_{-j}^{j\infty} tr ( ( \{ [M_* (\widehat{\Phi}^- K P_-^{-1})_* (\widehat{\Phi}^- K)_*^{-1} R_1 (\widehat{\Phi}^- K)^{-1} (\widehat{\Phi}^- K P_-^{-1}) M + \\ & + C_1] F_{\tilde{u}^-} S'_{\tilde{\eta} \tilde{\eta}} + M_* (\widehat{\Phi}^- K P_-^{-1})_* (\widehat{\Phi}^- K)_*^{-1} R_1 (\widehat{\Phi}^- K)^{-1} (\widehat{\Phi}^- K P_-^{-1}) S'_{\tilde{\eta} \tilde{\eta}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -M_*(\widehat{\Phi}^- KP_-^{-1})_*(\widehat{\Phi}^- K)_*^{-1} R_1 \widehat{\Phi}^- S' \tilde{\varphi} \tilde{\varphi} (P_{-*} + P_*) K_*^\# \} \delta F_{\tilde{u}_*^-} + \\
& + \delta F_{\tilde{u}^-} \{ S'_{\tilde{\eta} \tilde{\eta}} F_{\tilde{u}_*^-} [M_*(\widehat{\Phi}^- KP_-^{-1})_*(\widehat{\Phi}^- K)_*^{-1} R_1 (\widehat{\Phi}^- K)^{-1} (\widehat{\Phi}^- KP_-^{-1}) M + C_1] + \\
& + S'_{\tilde{\eta} \tilde{\eta}} (\widehat{\Phi}^- KP_-^{-1})_*(\widehat{\Phi}^- K)_*^{-1} R_1 (\widehat{\Phi}^- K)^{-1} (\widehat{\Phi}^- KP_-^{-1}) M - -K^\# (P_- + \\
& P) S'_{\tilde{\varphi} \tilde{\varphi}} \widehat{\Phi}_*^- R_1 (\widehat{\Phi}^- K)^{-1} (\widehat{\Phi}^- KP_-^{-1}) M \} ds. \tag{10.45}
\end{aligned}$$

В вариацию (10.45) необходимо ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned}
\Gamma^- \Gamma_*^- &= M_*(\widehat{\Phi}^- KP_-^{-1})_*(\widehat{\Phi}^- K)_*^{-1} R_1 (\widehat{\Phi}^- K)^{-1} (\widehat{\Phi}^- KP_-^{-1}) M + C_1; \\
D_*^- D^- &= S'_{\tilde{\eta} \tilde{\eta}} = M(N_0 S'_{\tilde{r}_0 \tilde{r}_0} N_{0*} + + S'_{\tilde{\varphi}_0 \tilde{\varphi}_0}) M_* + S'_{\tilde{\psi} \tilde{\psi}} + \\
& + K^\# (P_- + P) S'_{\tilde{\varphi} \tilde{\varphi}} (P_{-*} + P_*) K_*^\#; \\
T^- &= T_0^- + T_+^- + T_-^- = (\Gamma^-)^{-1} M_*(\widehat{\Phi}^- KP_-^{-1})_*(\widehat{\Phi}^- K)_*^{-1} R_1 [(\widehat{\Phi}^- K)^{-1} (\widehat{\Phi}^- KP_-^{-1}) - \\
& - \widehat{\Phi}^- S'_{\tilde{\varphi} \tilde{\varphi}} (P_{-*} + P_*) K_*^\# (D^-)^{-1}]. \tag{10.46}
\end{aligned}$$

С учетом обозначений (10.46) вариация (10.45) примет вид

$$\delta \tilde{e}^- = \frac{1}{j} \int_{-j}^{j\infty} tr [\Gamma^- (\Gamma_*^- F_{\tilde{u}^-} D_*^- - T^-) D^- \delta F_{\tilde{u}_*^-} + \delta F_{\tilde{u}^-} D_*^- (D^- F_{\tilde{u}_*^-} \Gamma^- - T_*^-) \Gamma_*^-] ds,$$

а условие тождественного равенства вариации нулю будет таким

$$\Gamma_*^- F_{\tilde{u}^-} D_*^- = T_-^-,$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры  $\hat{F}_{\tilde{u}^-}$  выглядит так

$$\hat{F}_{\tilde{u}^-} = (\Gamma_*^-)^{-1} T_-^- (D_*^-)^{-1}. \tag{10.47}$$

С учетом выражения (10.40) алгоритм синтеза оптимальной структуры  $\hat{F}_{\hat{r}^-}$  должен быть таким

$$\hat{F}_{\hat{r}^-} = (\widehat{\Phi}^- KP_-^{-1}) (M \hat{F}_{\tilde{u}^-} + E_n),$$

а, учитывая еще матрицу (10.39), оптимальную структуру  $\hat{W}^-$  части регулятора неустойчивого тракта нужно записать так

$$\hat{W}^- = (\hat{F}_{\tilde{u}^-}) (\hat{F}_{\hat{r}^-})^{-1}. \tag{10.48}$$

## 10.2.2 Задача синтеза оптимального структуры $W^+$ части регулятора в устойчивом тракте системы стабилизации объекта

Движения объекта стабилизации в устойчивом тракте системы согласно схеме (рис.10.2) с учетом вектора (10.33) можно описать так

$$\begin{aligned}\hat{r}^+ &= (\widehat{\Phi}^+K)^{-1}(\hat{r}^+ - \widehat{\Phi}^+\tilde{\varphi}) = (\widehat{\Phi}^+K)^{-1}[(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})(M\tilde{u}^+ + \tilde{\eta}) - \widehat{\Phi}^+\tilde{\varphi}] = \\ &= (\widehat{\Phi}^+K)^{-1}[(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})(MF_{\tilde{u}^+} + E_n)\tilde{\eta} - \widehat{\Phi}^+\tilde{\varphi}],\end{aligned}\quad (10.49)$$

где  $F_{\tilde{u}^+}$  - матрица передаточных функций устойчивого тракта системы от эквивалентного воздействия  $\tilde{\eta}$  к вектору управлений  $\tilde{u}^+$ , а именно

$$\tilde{u}^+ = F_{\tilde{u}^+}\tilde{\eta}.\quad (10.50)$$

Матрица передаточных функций замкнутого устойчивого тракта системы от эквивалентного возмущения  $\tilde{\eta}$  к выходу контура  $\hat{r}^+$  обозначена  $F_{\hat{r}^+}$

$$\hat{r}^+ = F_{\hat{r}^+}\tilde{\eta}\quad (10.51)$$

и должна определяться уравнением

$$F_{\hat{r}^+} = (\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})(MF_{\tilde{u}^+} + E_n),\quad (10.52)$$

а матрица передаточных функций части регулятора в устойчивом тракте системы будет иметь вид

$$W^+ = (F_{\tilde{u}^+})(F_{\hat{r}^+})^{-1}\quad (10.53)$$

Далее непосредственно решается задача синтеза оптимальной структуры  $W^+$  интересующей части регулятора.

Как функционал качества стабилизации объекта в рассматриваемом варианте задачи синтеза используется выражение

$$\tilde{e}^+ = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (S'_{\tilde{\varepsilon}^+\tilde{\varepsilon}^+}R_2 + S'_{\tilde{u}^+\tilde{u}^+}C_2)ds,\quad (10.54)$$

где  $S'_{\tilde{\varepsilon}^+\tilde{\varepsilon}^+}$  и  $S'_{\tilde{u}^+\tilde{u}^+}$  транспонированные матрицы спектральных плотностей векторов  $\tilde{\varepsilon}^+$  и  $\tilde{u}^+$  (рис.10.2).

Вектор спектров сигналов ошибок основного тракта  $\tilde{\varepsilon}^+$  с учетом выражения (10.49) будет иметь вид

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}^+ &= \hat{r}^+ - \tilde{r}_0 = (\widehat{\Phi}^+K)^{-1}(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})(MF_{\tilde{u}^+} + E_n)[M(N_0\tilde{r}_0 + \tilde{\varphi}_0) + \tilde{\psi} + \\ &+ K^\#(P_- + P)\tilde{\varphi}] - [(\widehat{\Phi}^+K)^{-1}\widehat{\Phi}^+\tilde{\varphi} + \tilde{r}_0] = (\widehat{\Phi}^+K)^{-1}(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})(MF_{\tilde{u}^+} + E_n)\tilde{\eta} - \\ &- [(\widehat{\Phi}^+K)^{-1}\widehat{\Phi}^+\tilde{\varphi} + \tilde{r}_0],\end{aligned}$$

а его транспонированная матрица спектральных плотностей  $S'_{\tilde{\varepsilon}^+\tilde{\varepsilon}^+}$  по теореме Винера-Хинчина с учетом выражения (10.33) определится так

$$\begin{aligned}
S'_{\tilde{\varepsilon}+\tilde{\varepsilon}^+} &= (\widehat{\Phi}^+K)^{-1}(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})(MF_{\tilde{u}^+} + E_n)S'_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}(F_{\tilde{u}_*^+}M_* + E_n)(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}^+K)_*^{-1} - \\
&- (\widehat{\Phi}^+K)^{-1}(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})(MF_{\tilde{u}^+} + E_n)[S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\eta}}\widehat{\Phi}_*^+(\widehat{\Phi}^+K)_*^{-1} + S'_{\tilde{r}_0\tilde{\eta}}] - \\
&- [(\widehat{\Phi}^+K)^{-1}\widehat{\Phi}^+S'_{\tilde{\eta}\tilde{\varphi}} + S'_{\tilde{\eta}\tilde{r}_0}](F_{\tilde{u}_*^+}M_* + E_n)(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}^+K)_*^{-1} + \\
&+ [(\widehat{\Phi}^+K)^{-1}\widehat{\Phi}^+S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}\widehat{\Phi}_*^+(\widehat{\Phi}^+K)_*^{-1} + S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}], \tag{10.55}
\end{aligned}$$

где матрица  $S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\eta}} = K^\#(P_- + P)S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}$ , матрица  $S'_{\tilde{r}_0\tilde{\eta}} = MN_0S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}$ , матрица  $S'_{\tilde{\eta}\tilde{\varphi}} = S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}(P_{-*} + P_*)K^\#$ , матрица  $S'_{\tilde{\eta}\tilde{r}_0} = S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}N_{0*}M_*$ , матрицы  $S'_{\tilde{\varphi}\tilde{r}_0}$  и  $S'_{\tilde{r}_0\tilde{\varphi}}$  нулевые.

Используя выражения (10.36), можно записать матрицу  $S'_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}$  так

$$\begin{aligned}
S'_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} &= M(N_0S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}N_{0*} + S'_{\tilde{\varphi}_0\tilde{\varphi}_0})M_* + S'_{\tilde{\psi}\tilde{\psi}} + K_*(P_- + P)S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}(P_{-*} + P_*)K_*^\#; \\
S'_{\tilde{u}^+\tilde{u}^+} &= F_{\tilde{u}^+}S'_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}F_{\tilde{u}_*^+}. \tag{10.56}
\end{aligned}$$

Используя матрицы (10.55) и (10.56) функционал (10.54) следует записать в виде

$$\begin{aligned}
\tilde{e}^+ &= \frac{1}{j} \int_{-j}^{j\infty} tr ((\{(\widehat{\Phi}^+K)^{-1}(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})(MF_{\tilde{u}^+} + E_n)S'_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}(F_{\tilde{u}_*^+}M_* + E_n) \times \\
&\times (\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}^+K)_*^{-1} - (\widehat{\Phi}^+K)^{-1}(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})(MF_{\tilde{u}^+} + E_n)[S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\eta}}\widehat{\Phi}_*^+(\widehat{\Phi}^+K)_*^{-1} + \\
&+ S'_{\tilde{r}_0\tilde{\eta}}] - [(\widehat{\Phi}^+K)^{-1}\widehat{\Phi}^+S'_{\tilde{\eta}\tilde{\varphi}} + S'_{\tilde{\eta}\tilde{r}_0}](F_{\tilde{u}_*^+}M_* + E_n)(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}^+K)_*^{-1} + \\
&+ [(\widehat{\Phi}^+K)^{-1}\widehat{\Phi}^+S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}\widehat{\Phi}_*^+(\widehat{\Phi}^+K)_*^{-1} + S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}]\})R_2 + F_{\tilde{u}^+}S'_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}F_{\tilde{u}_*^+}C_2))ds. \tag{10.57}
\end{aligned}$$

Решая задачу синтеза оптимальной структуры матрицы передаточных функций  $W^+$  методом Винера-Колмогорова, необходимо определить первую вариацию функционала (10.57) и условие тождественного равенства ее нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций  $F_{\tilde{u}^+}$ . Первая вариация функционала (10.57) будет такой

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{e}^+ &= \frac{1}{j} \int_{-j}^{j\infty} tr ((\{[M_*(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}^+K)_*^{-1}R_2(\widehat{\Phi}^+K)^{-1}(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})M + \\
&+ C_2]F_{\tilde{u}^+}S'_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} + M_*(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}^+K)_*^{-1}R_2(\widehat{\Phi}^+K)^{-1}(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})S'_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} - \\
&- M_*(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}^+K)_*^{-1}R_2[(\widehat{\Phi}^+K)^{-1}\widehat{\Phi}^+S'_{\tilde{\eta}\tilde{\varphi}} + S'_{\tilde{\eta}\tilde{r}_0}]\})\delta F_{\tilde{u}_*^+}M_* + \\
&+ \delta F_{\tilde{u}^+}\{S'_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}F_{\tilde{u}_*^+}[M_*(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}^+K)_*^{-1}R_2(\widehat{\Phi}^+K)^{-1}(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})M + C_2] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +S'_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}^+K)_*^{-1}R_2(\widehat{\Phi}^+K)^{-1}(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})M - [S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\eta}}\widehat{\Phi}^*_+(\widehat{\Phi}^+K)_*^{-1} + \\
& +S'_{\tilde{r}_0\tilde{\eta}}]R_2(\widehat{\Phi}^+K)^{-1}(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})M)ds. \tag{10.58}
\end{aligned}$$

В вариацию (10.58) следует ввести обозначения

$$\begin{aligned}
\Gamma_*^+\Gamma^+ &= M_*(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}^+K)_*^{-1}R_2(\widehat{\Phi}^+K)^{-1}(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})M + C_2; \\
D^+D_*^+ &= S'_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} = M(N_0S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}N_{0*} + S'_{\tilde{\varphi}_0\tilde{\varphi}_0})M_* + S'_{\tilde{\psi}\tilde{\psi}} + \\
& +K^\#(P_- + P)S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}(P_{-*} + P_*)K_*^\#; \\
T^+ &= T_0^+ + T_+^+ + T_-^+ = (\Gamma_*^+)^{-1}M_*(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}^+K)_*^{-1}R_2[(\widehat{\Phi}^+K)^{-1}(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})D^+ - \\
& -(\widehat{\Phi}^+K)^{-1}\widehat{\Phi}^+S'_{\tilde{\eta}\tilde{\varphi}} + S'_{\tilde{\eta}\tilde{r}_0}] = (\Gamma_*^+)^{-1}M_*(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}^+K)_*^{-1}R_2 \times \\
& \times [(\widehat{\Phi}^+K)^{-1}(\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})D^+ - (\widehat{\Phi}^+K)^{-1}\widehat{\Phi}^+S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}(P_{-*} + P_*)K_*^\# - S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}N_{0*}M_*]. \tag{10.59}
\end{aligned}$$

С учетом обозначений (10.59) вариацию (10.58) следует переписать так

$$\delta\tilde{e}^+ = \frac{1}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} tr [\Gamma_*^+(\Gamma^+F_{\tilde{u}^+}D^+ - T^+)D_*^+\delta F_{\tilde{u}^+} + \delta F_{\tilde{u}^+}D^+(D_*^+F_{\tilde{u}^+}\Gamma_*^+ - T_*^+)\Gamma^+]ds,$$

а условие равенства ее нулю будет таким

$$\Gamma^+F_{\tilde{u}^+}D^+ = -(T_0^+ + T_+^+).$$

Алгоритм синтеза оптимальной структуры  $\hat{F}_{\tilde{u}^+}$  следует записать так

$$\hat{F}_{\tilde{u}^+} = -(\Gamma^+)^{-1}(T_0^+ + T_+^+)(D^+)^{-1}, \tag{10.60}$$

оптимальную структуру матрицы  $\hat{F}_{\hat{\tilde{r}}^+}$  согласно выражению (10.52) представить в виде

$$\hat{F}_{\hat{\tilde{r}}^+} = (\widehat{\Phi}^+KP_+^{-1})(M\hat{F}_{\tilde{u}^+} + E_n),$$

а оптимальную структуру  $\widehat{W}^+$  матрицы передаточных функций части регулятора устойчивого контура системы стабилизации таким образом

$$\widehat{W}^+ = (\hat{F}_{\tilde{u}^+})(\hat{F}_{\hat{\tilde{r}}^+})^{-1}. \tag{10.61}$$

Итак, задача синтеза оптимальной структуры части регулятора в исследуемом объекте решена.

### **10.3 Постановка и алгоритм решения задачи синтеза оптимальной робастной системы стабилизации объекта на заданной траектории движения, носящей случайный характер**

В связи с прогрессом в технике, ростом конкуренции на рынках ее сбыта и потребления к качеству функционирования целого ряда стабилизуемых систем, главной стороной которого выступает точность, современная практика выдвигает все возрастающие требования. Отличительной особенностью современных постановок задач синтеза высокоточных систем стабилизации оказываются такие моменты как обязательный учет возможных произволов в моделях динамики объекта стабилизации, стохастический характер внешних и внутренних возмущающих факторов, несовершенные представления о реальных механизмах действия последних, характер изменчивости моделей динамики объекта и возмущений в процессах длительной эксплуатации, другие существенные моменты. Для ослабления негативных последствий, вызванных нечеткими представлениями о требуемых в конкретных задачах синтеза моделях динамики объекта, возмущений и механизмах действия последних, синтезируют так называемые робастные, малочувствительные к возмущениям системы.

Очевидно, что традиционные оптимальные системы уже обладают весомой мерой «нечувствительности» к нечётким представлениям об используемых в задачах синтеза моделях. Однако этого в некоторых задачах синтеза высокоточных систем оказывается недостаточно.

В этих задачах синтеза необходимо учитывать некоторые дополнительные обстоятельства, например, обеспечение робастности оптимальных систем.

Далее рассматривается задача синтеза структуры регулятора в системе оптимальной робастной стабилизации линейного многомерного объекта на заданной траектории его движения, носящей случайный стационарный характер.

По аналогии со структурной схемой системы (рис.10.1) структурную схему системы стабилизации в исследуемом варианте следует представить в виде

(рис.10.3). Здесь, как и ранее, движение объекта стабилизации описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, преобразованной по Фурье вида

$$P\tilde{r} = M\tilde{u}_0 + \tilde{\psi}, \quad (10.62)$$

где  $\tilde{r}$ ,  $\tilde{u}_0$  и  $\tilde{\psi}$  - векторы спектров сигналов выходов системы, управления и возмущения в системе,  $P$  и  $M$  - известные матрицы передаточных функций исследуемого объекта размерностей  $n \times n$  и  $n \times t$ ;  $\tilde{\varphi}_0$  и  $\tilde{\varphi}$  - векторы спектров сигналов помех задания программы движения  $\tilde{r}_0$  и измерений выхода объекта;  $K$  - матрица передаточных функций измерителя в системе размерности  $v \times n$ ,  $W$  - искомая структура (матрица передаточных функций) регулятора.

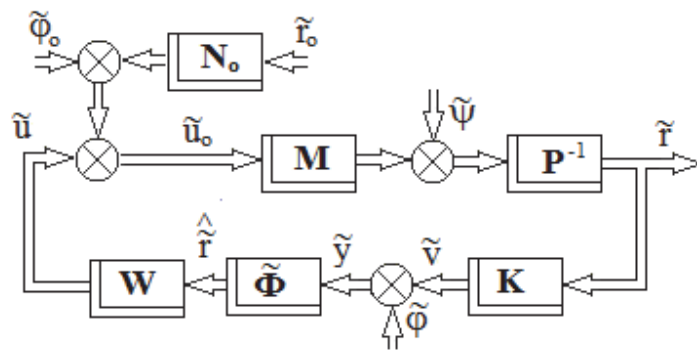


Рис. 10.3. Структурная схема исследуемой системы оптимальной стабилизации объекта

Для решения задачи синтеза оптимальной структуры (матрицы передаточных функций) наблюдателя  $\tilde{\Phi}$  полагается, что суммарный вектор управлений  $\tilde{u}_0$  равен нулю, а вектор спектров выходных сигналов  $\tilde{r}_0$  в этом случае равен

$$\tilde{r}_0 = P^{-1}\tilde{\psi}. \quad (10.63)$$

Оценивание вектора спектров сигналов выходов объекта  $\hat{\tilde{r}}$  синтезированной оптимальной структурой  $\tilde{\Phi}$  соответствует уравнению

$$\hat{\tilde{r}} = \tilde{\Phi}\tilde{y}, \quad (10.64)$$

где  $\tilde{y}$  -  $v$ -мерный вектор спектров сигналов наблюдения в системе, который равен

$$\tilde{y} = K\tilde{r} + \tilde{\varphi}. \quad (10.65)$$

Уравнение (10.65) по результатам измерений в системе определяет вектор  $\tilde{r}$  так

$$\tilde{r} = K^\#(\tilde{y} - \tilde{\varphi}), \quad (10.66)$$

где символ «#» - знак псевдообращения прямоугольных матриц.

Используя уравнения (10.63) и (10.65) возможно приступить к задаче синтеза оптимальной структуры наблюдателя  $\hat{\Phi}$  в системе.

### 10.3.1 Задача синтеза оптимальной структуры $\hat{\Phi}$ наблюдателя в системе

С учетом уравнения (10.63) вектор спектров сигналов ошибок наблюдения вектора  $\tilde{r}$  будет иметь вид

$$\tilde{\varepsilon}_H = \tilde{\Phi}\tilde{y} - \tilde{r}_0 = \tilde{\Phi}\tilde{y} - P^{-1}\tilde{\psi}, \quad (10.67)$$

а транспонированная матрица спектральных плотностей указанного вектора согласно теореме Винера-Хинчина будет такой

$$S'_{\tilde{\varepsilon}_H\tilde{\varepsilon}_H} = \tilde{\Phi}S'_{\tilde{y}\tilde{y}}\tilde{\Phi}_* - \tilde{\Phi}S'_{\tilde{\psi}\tilde{y}}P_*^{-1} - P^{-1}S'_{\tilde{y}\tilde{\psi}}\tilde{\Phi}_* + P^{-1}S'_{\tilde{\psi}\tilde{\psi}}P_*^{-1}. \quad (10.68)$$

Функционал качества наблюдения выходных сигналов объекта имеет вид

$$\tilde{e}_H = \frac{1}{j} \int_{-j^\infty}^{j^\infty} tr(S'_{\tilde{\varepsilon}_H\tilde{\varepsilon}_H} R_0) ds,$$

а с учетом матрицы (10.68) функционал можно представить как

$$\tilde{e}_H = \frac{1}{j} \int_{-j^\infty}^{j^\infty} tr[(\tilde{\Phi}S'_{\tilde{y}\tilde{y}}\tilde{\Phi}_* - \tilde{\Phi}S'_{\tilde{\psi}\tilde{y}}P_*^{-1} - P^{-1}S'_{\tilde{y}\tilde{\psi}}\tilde{\Phi}_* + P^{-1}S'_{\tilde{\psi}\tilde{\psi}}P_*^{-1})R_0] ds. \quad (10.69)$$

В соответствии с методом Винера-Колмогорова первая вариация функционала (10.69) определяется выражением

$$\delta\tilde{e}_H = \frac{1}{j} \int_{-j^\infty}^{j^\infty} tr[R_0(\tilde{\Phi}S'_{\tilde{y}\tilde{y}} - P^{-1}S'_{\tilde{y}\tilde{\psi}})\delta\tilde{\Phi}_* + \delta\tilde{\Phi}(S'_{\tilde{y}\tilde{y}}\tilde{\Phi}_* - S'_{\tilde{\psi}\tilde{y}}P_*^{-1})R_0] ds. \quad (10.70)$$

Необходим ввод следующих обозначений

$$\Gamma_{0*}\Gamma_0 = R_0; D_{0*}D_0 = S'_{\tilde{y}\tilde{y}}; T_0 = T_{00} + T_{0+} + T_{0-} = \Gamma_{0*}^{-1}P^{-1}S'_{\tilde{y}\tilde{\psi}}D_{0*}^{-1}. \quad (10.71)$$

С учетом обозначений (10.71) условие тождественного равенства нулю вариации (10.70) на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций будет таким

$$\Gamma_0 \tilde{\Phi} D_0 = (T_{00} + T_{0+}),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры матрицы передаточных функций наблюдателя примет вид

$$\hat{\tilde{\Phi}} = \Gamma_0^{-1} (T_{00} + T_{0+}) D_0^{-1}. \quad (10.72)$$

### 10.3.2 Задача синтеза структуры регулятора в исследуемой оптимальной системе стабилизации объекта

Необходимо привести структурную схему исследуемой системы (рис.10.3) к стандартному виду. Перевод, как и ранее, связан в первую очередь с формированием эквивалентного воздействия на систему стабилизации, вектор которого должен иметь вид

$$\tilde{\eta}_0 = M(N_0 \tilde{r}_0 + \tilde{\varphi}_0) + \tilde{\psi} + K^\# P \tilde{\varphi}, \quad (10.73)$$

а его транспонированная матрица спектральных плотностей при условии некоррелированности векторов  $\tilde{r}_0$ ,  $\tilde{\varphi}_0$ ,  $\tilde{\psi}$  и  $\tilde{\varphi}$  между собой будет такой

$$S'_{\tilde{\eta}_0 \tilde{\eta}_0} = M(N_0 S'_{\tilde{r}_0 \tilde{r}_0} N_{0*} + S'_{\tilde{\varphi}_0 \tilde{\varphi}_0}) M_* + S'_{\tilde{\psi} \tilde{\psi}} + K^\# P S'_{\tilde{\varphi} \tilde{\varphi}} P_* K_*^\#. \quad (10.74)$$

Стандартная структурная схема исследуемой системы стабилизации с учетом выражений (10.64) и (10.65) представлена на рисунке 10.4.

По аналогии с выражением (10.49) возможно определить вектор  $\tilde{r}$  следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= (\hat{\tilde{\Phi}} K)^{-1} (\hat{\tilde{r}} - \hat{\tilde{\Phi}} \tilde{\varphi}) = (\hat{\tilde{\Phi}} K)^{-1} [(\hat{\tilde{\Phi}} K P^{-1})(M \tilde{u} + \tilde{\eta}_0) - \hat{\tilde{\Phi}} \tilde{\varphi}] = \\ &= (\hat{\tilde{\Phi}} K)^{-1} [(\hat{\tilde{\Phi}} K P^{-1})(M F_{\tilde{u}} + E_n) \tilde{\eta}_0 - \hat{\tilde{\Phi}} \tilde{\varphi}] = \\ &= (\hat{\tilde{\Phi}} K)^{-1} \{(\hat{\tilde{\Phi}} K P^{-1})(M F_{\tilde{u}} + E_n) [M(N_0 \tilde{r}_0 + \tilde{\varphi}_0) + \tilde{\psi} + K^\# P \tilde{\varphi}] - \hat{\tilde{\Phi}} \tilde{\varphi}\}. \end{aligned} \quad (10.75)$$

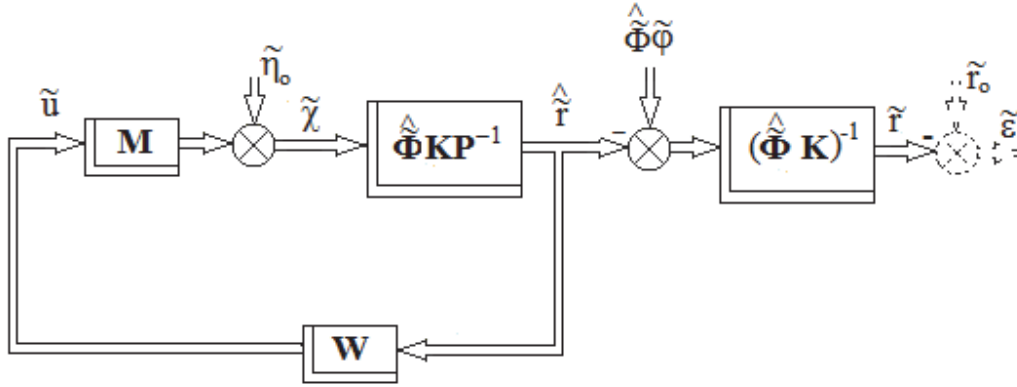


Рис.10.4. Стандартная структурная схема исследуемой в задаче системы стабилизации объекта на траектории движения

Вектор сигналов ошибки стабилизации исследуемой системы в таком случае будет таким

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{r} - \tilde{r}_0 = (\hat{\Phi}K)^{-1}(\hat{\Phi}KP^{-1})(MF_{\tilde{u}} + E_n)\tilde{\eta}_0 - [(\hat{\Phi}K)^{-1}\hat{\Phi}\tilde{\varphi} + \tilde{r}_0],$$

а транспонированную матрицу спектральных плотностей вектора сигналов ошибок системы следует определить в виде

$$\begin{aligned} S'_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}} = & (\hat{\Phi}K)^{-1}(\hat{\Phi}KP^{-1})(MF_{\tilde{u}} + E_n)S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0}(F_{\tilde{u}*}M_* + E_n)(\hat{\Phi}KP^{-1})_* (\hat{\Phi}K)^{-1} - \\ & - (\hat{\Phi}K)^{-1}(\hat{\Phi}KP^{-1})(MF_{\tilde{u}} + E_n)[S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\eta}_0}\hat{\Phi}_*(\hat{\Phi}K)^{-1} + S'_{\tilde{r}_0\tilde{\eta}_0}] - \\ & - [(\hat{\Phi}K)^{-1}\hat{\Phi}S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\varphi}} + S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{r}_0}](F_{\tilde{u}*}M_* + E_n)(\hat{\Phi}KP^{-1})_* (\hat{\Phi}K)^{-1} + \\ & + (\hat{\Phi}K)^{-1}\hat{\Phi}S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}\hat{\Phi}_*(\hat{\Phi}K)^{-1} + S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}, \end{aligned} \quad (10.76)$$

где матрица  $S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0}$  определяется выражением (10.73) и (10.74), матрица  $S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\eta}_0}$  выражением  $S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}P_*K_*^\#$ , матрица  $S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{r}_0}$  выражением  $S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}N_{0*}M_*$ , а матрицы взаимных спектральных плотностей некоррелированных векторов сигналов нулевые.

Транспонированная матрица спектральных плотностей вектора сигналов управления  $\tilde{u}$  будет такой

$$S'_{\tilde{u}\tilde{u}} = F_{\tilde{u}}S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0}F_{\tilde{u}*}. \quad (10.77)$$

Функционал качества исследуемой системы стабилизации следует записать так

$$\tilde{e} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (S'_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}}R + S'_{\tilde{u}\tilde{u}}C) ds. \quad (10.78)$$

Подстановка в функционал (10.78) выражений (10.76) и (10.77) позволяет переписать последний в таком виде

$$\begin{aligned} \tilde{e} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr ((\{\widehat{\Phi}K\}^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})(MF_{\tilde{u}} + E_n)S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0}(F_{\tilde{u}*}M_* + E_n)(\widehat{\Phi}KP^{-1})_* \times \\ & \times (\widehat{\Phi}K)_*^{-1} - (\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})(MF_{\tilde{u}} + E_n)[K^\#PS'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}\widehat{\Phi}_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1} + MN_0S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}] - \\ & - [(\widehat{\Phi}K)^{-1}\widehat{\Phi}S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}P_*K^\# + S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}N_{0*}M_*](F_{\tilde{u}*}M_* + E_n)(\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1} + \\ & + (\widehat{\Phi}K)^{-1}\widehat{\Phi}S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}\widehat{\Phi}_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1} + S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}\}R + F_{\tilde{u}}S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0}F_{\tilde{u}*}C)) ds. \end{aligned} \quad (10.79)$$

По методу Винера-Колмогорова первая вариация функционала (10.79) равна

$$\begin{aligned} \delta\tilde{e} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr ((\{[M_*(\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1}R(\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})M + C]F_{\tilde{u}}S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0} + \\ & + M_*(\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1}R(\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0} - M_*(\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1}R \times \\ & \times [(\widehat{\Phi}K)^{-1}\widehat{\Phi}S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}P_*K^\# + S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}N_{0*}M_*]\}\delta F_{\tilde{u}*} + \\ & + \delta F_{\tilde{u}}\{S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0}F_{\tilde{u}*}[M_*(\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1}R(\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})M + C] + \\ & + S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0}(\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1}R(\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})M - [K^\#PS'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}\widehat{\Phi}_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1} + \\ & + MN_0S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}]R(\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})M\})) ds. \end{aligned} \quad (10.80)$$

В вариацию (10.80) необходимо ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_*\Gamma &= [M_*(\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1}R(\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})M + C]; \\ DD_* &= S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0} = M(N_0S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}N_{0*} + S'_{\tilde{\varphi}_0\tilde{\varphi}_0})M_* + S'_{\tilde{\psi}\tilde{\psi}} + K^\#PS'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}P_*K^\#; \\ T &= T_0 + T_+ + T_- = \Gamma_*^{-1}M_*(\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1}R \times \\ & \times [(\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})D - (\widehat{\Phi}K)^{-1}\widehat{\Phi}S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}P_*K^\# + S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}N_{0*}M_*]. \end{aligned} \quad (10.81)$$

В обозначениях (10.81) вариация (10.80) преобразуется следующим образом

$$\delta\tilde{e} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_*(\Gamma F_{\tilde{u}}D + T)D_*\delta F_{\tilde{u}*} + \delta F_{\tilde{u}}D(D_*F_{\tilde{u}*}\Gamma_* + T_*)\Gamma] ds,$$

а условие тождественного равенства вариации нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций будет таким

$$\Gamma F_{\tilde{u}} D = -(T_0 + T_+).$$

Алгоритм синтеза по исходным данным решаемой задачи имеет вид

$$\hat{F}_{\tilde{u}} = -\Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^{-1} \quad (10.82)$$

Оптимальная структура (матрица передаточных функций замкнутого контура (рис.10.4))  $\hat{F}_{\hat{r}}$  при этом такова

$$\hat{F}_{\hat{r}} = (\hat{\Phi} K P^{-1})(\hat{F}_{\tilde{u}} M + E_n), \quad (10.83)$$

а оптимальная структура матрицы передаточных функций регулятора  $\hat{W}$  в системе стабилизации определяется выражением

$$\hat{W} = (\hat{F}_{\tilde{u}})(\hat{F}_{\hat{r}})^{-1}. \quad (10.84)$$

Таким образом, поставленная выше задача синтеза оптимальной структуры регулятора  $\hat{W}$  решена полностью.

### 10.3.3 Задача и алгоритм синтеза оптимальной робастной системы стабилизации объекта на заданной траектории движения

Структурная схема исследуемой в этом случае системы стабилизации не отличается от приведенной на рисунке 10.4, однако теперь необходимо при синтезе регулятора учитывать вектор сигналов  $\tilde{\chi}$ , учитывая, что он составляет разность векторов

$$\tilde{\chi} = -M\tilde{u} + \tilde{\eta}_0 = (-MF_{\tilde{u}} + E_n)\tilde{\eta}_0 \quad (10.85)$$

и полагая, что его учет в процедуре синтеза регулятора может существенно усилить свойство робастности синтезируемой системы.

Как и в задаче синтеза регулятора (пункт 10.3.2) в рассматриваемой задаче справедливо выражение (10.75) для выходного вектора системы

$$\tilde{r} = (\hat{\Phi} K)^{-1}[(\hat{\Phi} K P^{-1})(MF_{\tilde{u}} + E_n)\tilde{\eta}_0 - \hat{\Phi}\tilde{\varphi}],$$

а также выражения вектора ошибок стабилизации исследуемой системы

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{r} - \tilde{r}_0 = (\hat{\Phi} K)^{-1}[(\hat{\Phi} K P^{-1})(MF_{\tilde{u}} + E_n)\tilde{\eta}_0 - [(\hat{\Phi} K)^{-1}\hat{\Phi}\tilde{\varphi} + \tilde{r}_0]]$$

и матрицы транспонированных спектральных плотностей указанного вектора  $\tilde{\varepsilon}$

$$\begin{aligned}
S'_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}} = & (\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})(MF_{\tilde{u}} + E_n)S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0}(F_{\tilde{u}*}M_* + E_n)(\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1} - \\
& - (\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})(MF_{\tilde{u}} + E_n)[S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\eta}_0}\widehat{\Phi}_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1} + S'_{\tilde{r}_0\tilde{\eta}_0}] - \\
& - [(\widehat{\Phi}K)^{-1}\widehat{\Phi}S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\varphi}} + S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{r}_0}](F_{\tilde{u}*}M_* + E_n)(\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1} + \\
& + (\widehat{\Phi}K)^{-1}\widehat{\Phi}S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}\widehat{\Phi}_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1} + S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}, \tag{10.76}
\end{aligned}$$

Транспонированная матрица спектральных плотностей вектора управлений  $\tilde{u}$  в системе определяется выражением (10.77)

$$S'_{\tilde{u}\tilde{u}} = F_{\tilde{u}}S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0}F_{\tilde{u}*}.$$

Для обеспечения желаемого свойства робастности синтезируемой оптимальной системы стабилизации целесообразно использовать такой функционал качества

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{j} \int_{-j}^{j\infty} tr (S'_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}}R + S'_{\tilde{u}\tilde{u}}C + S'_{\tilde{\chi}\tilde{\eta}_0}\Lambda + \Lambda S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\chi}}) ds, \tag{10.86}$$

где  $S'_{\tilde{\chi}\tilde{\eta}_0}$  и  $S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\chi}}$  - транспонированные матрицы взаимных спектральных плотностей векторов  $\tilde{\chi}$  и  $\tilde{\eta}_0$ , а  $R$ ,  $C$  и  $\Lambda$  - положительно-определенные весовые матрицы.

Транспонированные матрицы взаимных спектральных плотностей, используя формулу (10.85) возможно определить по теореме Винера-Хинчина таким образом

$$S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\chi}} = (-MF_{\tilde{u}} + E_n)S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0}; S'_{\tilde{\chi}\tilde{\eta}_0} = S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0}(-M_*F_{\tilde{u}*} + E_n). \tag{10.87}$$

Подстановка выражений (10.76, 10.77 и 10.87) в функционал (10.86) представляет последний в виде:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon} = & \frac{1}{j} \int_{-j}^{j\infty} tr ((\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})(MF_{\tilde{u}} + E_n)S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0}(F_{\tilde{u}*}M_* + E_n)(\widehat{\Phi}KP^{-1})_* \times \\
& \times (\widehat{\Phi}K)_*^{-1} - (\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})(MF_{\tilde{u}} + E_n)[S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\eta}_0}\widehat{\Phi}_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1} + S'_{\tilde{r}_0\tilde{\eta}_0}] - \\
& - [(\widehat{\Phi}K)^{-1}\widehat{\Phi}S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\varphi}} + S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{r}_0}](F_{\tilde{u}*}M_* + E_n)(\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1} + \\
& + (\widehat{\Phi}K)^{-1}\widehat{\Phi}S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}\widehat{\Phi}_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1} + S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0})R + F_{\tilde{u}}S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0}F_{\tilde{u}*}C + \\
& + S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0}(-M_*F_{\tilde{u}*} + E_n)\Lambda + \Lambda(-MF_{\tilde{u}} + E_n)S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0})) ds. \tag{10.88}
\end{aligned}$$

Как и ранее, задача синтеза оптимальной структуры  $F_{\tilde{u}}$  должна решаться методом Винера-Колмогорова. Первая вариация  $\delta\tilde{\varepsilon}$  функционала (10.88) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{e} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left( ([M_*(\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1}R(\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})M + C]F_{\tilde{u}}S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0} + \right. \\
& + M_*(\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1}R(\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0} - M_*(\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1}R \times \\
& \times [(\widehat{\Phi}K)^{-1}\widehat{\Phi}S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\varphi}} + S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{r}_0}] - M_*\Lambda S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0} \left. \right) \delta F_{\tilde{u}*} + \\
& + \delta F_{\tilde{u}} \{ S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0} F_{\tilde{u}*} [M_*(\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1}R(\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})M + C] + \\
& + S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0} (\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1}R(\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})M - [S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\eta}_0} \widehat{\Phi}_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1} + S'_{\tilde{r}_0\tilde{\eta}_0}] \times \\
& \times R(\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})M - S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0} \Lambda M \} \} ds. \tag{10.89}
\end{aligned}$$

где

$$S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\varphi}} = S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} P_* K_*^\#, S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\eta}_0} = K_*^\# P S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}};$$

$$S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{r}_0} = S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0} N_{0*} M_*, S'_{\tilde{r}_0\tilde{\eta}_0} = M N_{0*} S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0}.$$

В выражении (10.89) необходимо ввести следующие обозначения

$$\Gamma_{0*}\Gamma_0 = [M_*(\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1}R(\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})M + C]; D_0 D_{0*} = S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0};$$

$$\begin{aligned}
T_0 = T_{00} + T_{0+} + T_{0-} = & \Gamma_{0*}^{-1} \{ M_*(\widehat{\Phi}KP^{-1})_*(\widehat{\Phi}K)_*^{-1}R[(\widehat{\Phi}K)^{-1}(\widehat{\Phi}KP^{-1})S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0} - \\
& - (\widehat{\Phi}K)^{-1}\widehat{\Phi}S'_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} P_* K_*^\# + S'_{\tilde{r}_0\tilde{r}_0} N_{0*} M_*] - M_*\Lambda S'_{\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0} \} D_{0*}^{-1}. \tag{10.90}
\end{aligned}$$

С учетом обозначений (10.90) вариация (10.89) представляется выражением

$$\delta \tilde{e} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\Gamma_{0*}(\Gamma_0 F_{\tilde{u}} D_0 + T_0) D_{0*} \delta F_{\tilde{u}*} + \delta F_{\tilde{u}} D_0 (D_{0*} F_{\tilde{u}*} \Gamma_{0*} + T_{0*}) \Gamma_0] ds,$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры  $\widehat{F}_{\tilde{u}}$  по исходным данным решаемой задачи имеет вид

$$\widehat{F}_{\tilde{u}} = -\Gamma_0^{-1} (T_{00} + T_{0+}) D_0^{-1}, \tag{10.91}$$

оптимальная матрица передаточных функций замкнутого контура системы будет такой

$$\widehat{F}_{\hat{r}} = (\widehat{\Phi}KP^{-1})(\widehat{F}_{\tilde{u}}M + E_n),$$

а оптимальную структуру матрицы передаточных функций регулятора в системе  $\widehat{W}$  следует определить по формуле

$$\widehat{W} = (\widehat{F}_{\tilde{u}})(\widehat{F}_{\hat{r}})^{-1}. \tag{10.92}$$

Таким образом, поставленная в рассматриваемом пункте раздела задача синтеза оптимальной робастной системы стабилизации объекта на заданной случайной траектории движения решена полностью.

## **ГЛАВА 11 ПОСТАНОВКА И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ БАЗОВОЙ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ ПРИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

С развитием техники складываются ситуации, когда в процессах управления особенно подвижными объектами необходимо учитывать непредсказуемые сигналы и помехи измерений многих труднодоступных параметров. Возникла необходимость в оптимальном, именно стохастическом управлении.

Один из основоположников учения о стохастическом управлении Дж. Саридис [43] так определил особенности стохастического управления «Задача стохастического управления характеризуется тем, что степень неопределенности, присущая исследуемому процессу, не может быть уменьшена в ходе процесса за счет стохастической обработки измеряемых величин». Другими словами, возникла необходимость алгоритмически учитывать внешние и внутренние стохастические возмущения в исследуемой системе. В схемах без обратной связи – это вообще неустранимые неопределенности, степень которых иногда может быть понижена за счет сведений, получаемых в процессах работы исследований системы. Для этого понадобились специальные методы оценивания состояния управляемой системы и ее частей, методы идентификации моделей динамики системы и ее сигналов, которые позволяли бы понижать степень неопределенности в системе непосредственно в процессе управления или хотя бы использовать полученные результаты в будущих разработках. Некоторые эффективные в практике методы и алгоритмы оценивания и идентификации обсуждены в первых главах настоящей монографии

## 11.1 Основные моменты постановок базовых задач синтеза оптимальных структур частей регуляторов в линейных системах стохастической стабилизации

Цель настоящего раздела монографии – обсудить один из возможных для использования в практике подходов к решению сложных задач оптимальной стохастической стабилизации в пространстве подвижных объектов.

Ниже рассматриваются постановка и алгоритмы решения задачи синтеза оптимальных структур систем стабилизации подвижного объекта на заданной траектории движения в пространстве при учете стохастических воздействий на исследуемый объект.

На рисунке 11.1 представлена структурная схема исследуемой системы стабилизации подвижного объекта при эксплуатационных стохастических воздействиях на него. Основные обозначения и элементы исследуемой структурной схемы не отличаются от введенных в предыдущих главах монографии. Отличие лишь в том, что векторы, характеризующие

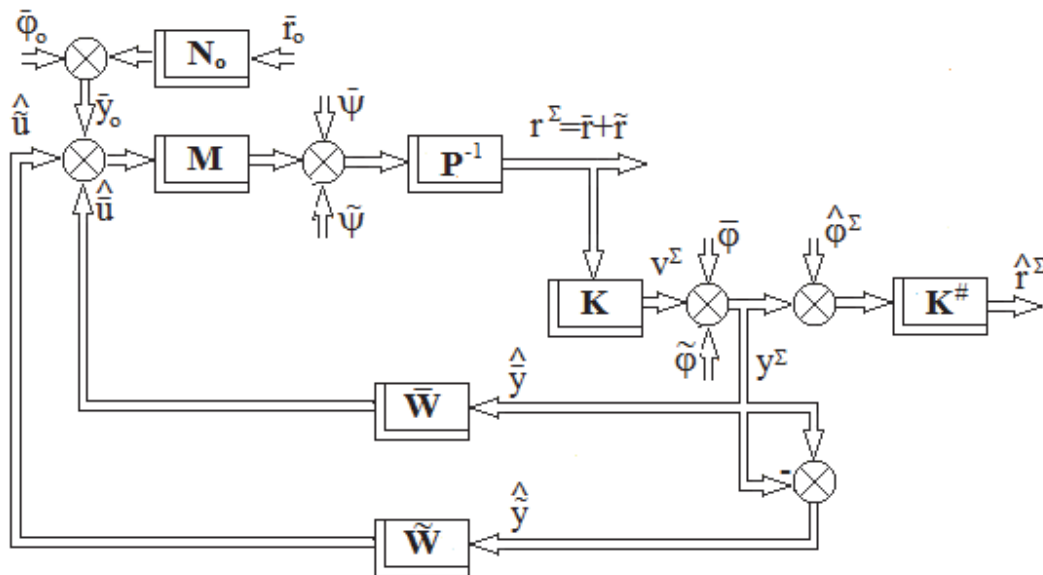


Рис. 11.1. структурная схема исследуемой системы стабилизации подвижного объекта при стохастических воздействиях

детерминированные воздействия и сигналы, обозначены чертой над вектором «-», а случайные векторы воздействий и сигналов помечены символом «~» над каждым вектором. Такие же пометки отличают части регулятора  $\bar{W}$  и  $\tilde{W}$  в детерминированных и случайных трактах системы стабилизации. Учитывается также обстоятельство, что при практических исследованиях системы первоначально возможны лишь приближенные оценки детерминированных воздействий и сигналов.

Затем, учитывая уже указанные оценки, в ряде случаев, возможно, приближенно оценивать и случайные векторы воздействий и сигналов.

На структурной схеме системы (рис 11.1) представлены векторы следующих воздействий и сигналов:

вектор заданной детерминированной программы движения объекта

$$\bar{y}_0 = (N_0 \bar{r}_0 + \bar{\varphi}_0); \quad (11.1)$$

вектор суммарного детерминированного воздействия на объект стабилизации

$$\hat{\eta}_0 = M(N_0 \bar{r}_0 + \bar{\varphi}_0) + \hat{\psi} + \hat{\zeta} = M(N_0 \bar{r}_0 + \bar{\varphi}_0) + \hat{\psi} + PK^\# \hat{\varphi}; \quad (11.2)$$

вектор суммарного случайного стационарного воздействия

$$\hat{\eta}_0 = \hat{\psi} + \hat{\zeta} = \hat{\psi} + PK^\# \hat{\varphi}. \quad (11.3)$$

Появление слагаемых векторов  $\hat{\zeta}$  и  $\hat{\zeta}$  связано с эквивалентным переносом векторов помех измерений  $\hat{\varphi}$  и  $\hat{\varphi}$  в точку приложений суммарных воздействий непосредственно на объект стабилизации.

Важным моментом в изложении материала оказывается выражение, отражающее оценку вектора  $\hat{r}^\Sigma$ , получаемую по измерениям вектора суммарных сигналов наблюдения

$$y^\Sigma = Kr^\Sigma + \hat{\varphi}^\Sigma,$$

т. е. вектора

$$\hat{r}^\Sigma = K^\#(y^\Sigma - \hat{\varphi}^\Sigma). \quad (11.4)$$



Так, по структурной схеме (рис. 11.2) возможно составить описание оценочных векторов сигналов выходов детерминированного тракта системы в таком виде

$$\begin{aligned}\hat{r} &= K^\#(\hat{y} - \hat{\varphi}) = K^\#[(KP^{-1})(M\bar{u} + \hat{\eta}_0) - \hat{\varphi}] = \\ &= K^\#(KP^{-1})(MF_{\bar{u}} + E_n)\hat{\eta}_0 - K^\#\hat{\varphi},\end{aligned}\quad (11.6)$$

где  $F_{\bar{u}}$  - матрица передаточных функций замкнутого детерминированного контура системы стабилизации от возмущения  $\hat{\eta}_0$  к сигналу управления в контуре  $\bar{u}$ .

Аналогично по структурной схеме (рис. 11.2) можно описать вектор оценок сигналов выходов случайного тракта исследуемой системы

$$\begin{aligned}\hat{r} &= K^\#(\hat{y} - \hat{\varphi}) = K^\#[(KP^{-1})(M\tilde{u} + \hat{\eta}_0) - \hat{\varphi}] = \\ &= K^\#(KP^{-1})(MF_{\tilde{u}} + E_n)\hat{\eta}_0 - K^\#\hat{\varphi},\end{aligned}\quad (11.7)$$

где  $F_{\tilde{u}}$  - матрица передаточных функций замкнутого случайного контура системы стабилизации от случайного возмущения  $\hat{\eta}_0$  к сигналу управления в исследуемом контуре  $\tilde{u}$ .

Таким образом, матрицы  $F_{\bar{u}}$  и  $F_{\tilde{u}}$  являются основой уравнений

$$\bar{u} = F_{\bar{u}}\hat{\eta}_0, \quad (11.8)$$

$$\tilde{u} = F_{\tilde{u}}\hat{\eta}_0. \quad (11.9)$$

Матрица передаточных функций детерминированного контура системы от возмущения  $\hat{\eta}_0$  к выходу контура  $\hat{y}$  обозначена  $F_{\bar{y}}$ , а матрица передаточных функций случайного контура системы от возмущения  $\hat{\eta}_0$  к выходу контура  $\hat{y}$  обозначена  $F_{\tilde{y}}$ .

Матрицы  $F_{\bar{y}}$  и  $F_{\tilde{y}}$  - базовая часть уравнений

$$\hat{y} = F_{\bar{y}}\hat{\eta}_0, \quad (11.10)$$

$$\hat{y} = F_{\tilde{y}}\hat{\eta}_0. \quad (11.11)$$

Учитывая уравнения частей регулятора  $\bar{u} = \bar{W}\hat{y}$ , и  $\tilde{u} = \tilde{W}\hat{y}$ , а также уравнения (11.8) - (11.11), несложно составить алгоритмы определения матриц передаточных функций  $\bar{W}$  и  $\tilde{W}$  таким образом

$$\bar{W} = (F_{\bar{u}})(F_{\bar{y}})^{-1}, \quad (11.12)$$

$$\tilde{W} = (F_{\tilde{u}})(F_{\tilde{y}})^{-1}. \quad (11.13)$$

Полагая функции  $F_{\tilde{u}}$  и  $F_{\tilde{y}}$  как варьируемые в соответствующих функционалах качества стабилизации объекта для каждого из исследуемых контуров, возможно приступить к решению намеченных выше задач оптимального синтеза управляющих структур обоих исследуемых контуров, для этого необходимо еще определить управления связи между указанными матрицами  $F_{\tilde{u}}$  и  $F_{\tilde{y}}$ ,  $F_{\tilde{u}}$  и  $F_{\tilde{y}}$ . Как следует из структурной схемы системы (рис. 11.2) и уравнений

$$\hat{y} = F_{\tilde{y}}\hat{\eta}_0 = (KP^{-1})(MF_{\tilde{u}} + E_n)\hat{\eta}_0,$$

$$\hat{y} = F_{\tilde{y}}\hat{\eta}_0 = (KP^{-1})(MF_{\tilde{u}} + E_n)\hat{\eta}_0,$$

искомые уравнения связи будут такими

$$F_{\tilde{y}} = (KP^{-1})(MF_{\tilde{u}} + E_n), \quad (11.14)$$

$$F_{\tilde{y}} = (KP^{-1})(MF_{\tilde{u}} + E_n). \quad (11.15)$$

Приступая к решению намеченной задачи синтеза структуры части регулятора  $\bar{W}$  необходимо определить вектор спектров оценочных сигналов ошибки в детерминированном контуре системы  $\bar{\varepsilon}_0$  в выполнении предписанной программы движения (вектор  $\bar{r}_0$ ).

### 11.1.1 Алгоритм решения задачи синтеза оптимальной структуры части регулятора $\bar{W}$ , расположенной в детерминированном контуре системы стабилизации объекта

Вектор оценочных детерминированных сигналов выхода системы уже определен уравнением (11.6).

Таким образом, вектор ошибок определения оценочных сигналов контура можно описать так

$$\hat{\varepsilon} = \hat{r} - \bar{r}_0 = K^\#(KP^{-1})(MF_{\tilde{u}} + E_n)\hat{\eta}_0 - (K^\#\hat{\varphi} + \bar{r}_0), \quad (11.16)$$

а вектор сигналов управления в детерминированном контуре определяется уравнением (11.8).

Как известно из современной теории управления, функционал качества стабилизации детерминированного контура на заданной программе движения будет таким

$$\mathcal{E}_{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}(\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}_*R_1 + \bar{u}\bar{u}_*C_1) ds. \quad (11.17)$$

Подстановка выражений (11.16) и (11.8) в функционал (11.17) позволит записать последний в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\bar{\varepsilon}} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ [K^\#(KP^{-1})(MF_{\bar{u}} + E_n)\hat{\eta}_0 - (K^\#\hat{\varphi} + \bar{r}_0)] \times \\ &\times [\hat{\eta}_0^*(F_{\bar{u}*}M_* + E_n)(KP^{-1})_*K_*^\# - (\hat{\varphi}_*K_*^\# + \bar{r}_{0*})]R_1 + F_{\bar{u}}\hat{\eta}_0\hat{\eta}_0^*F_{\bar{u}*}C_1 \} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ [K^\#(KP^{-1})(MF_{\bar{u}} + E_n)\hat{\eta}_0\hat{\eta}_0^*(F_{\bar{u}*}M_* + E_n)(KP^{-1})_*K_*^\# - \\ &- K^\#(KP^{-1})(MF_{\bar{u}} + E_n)(\hat{\eta}_0\hat{\varphi}_*K_*^\# + \hat{\eta}_0\bar{r}_{0*}) - (K^\#\hat{\varphi}\hat{\eta}_0^* + \bar{r}_0\hat{\eta}_0^*) \times \\ &\times (F_{\bar{u}*}M_* + E_n)(KP^{-1})_*K_*^\# + (K^\#\hat{\varphi}\hat{\varphi}_*K_*^\# + K^\#\hat{\varphi}\bar{r}_{0*} + \bar{r}_0\hat{\varphi}_*K_*^\# + \bar{r}_0\bar{r}_{0*})] R_1 + \\ &+ F_{\bar{u}}\hat{\eta}_0\hat{\eta}_0^*F_{\bar{u}*}C_1 \} ds. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Решая поставленную задачу синтеза оптимальной структуры  $\hat{W}$  методом Винера-Колмогорова, необходимо определить первую вариацию функционала (11.18) на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций и условие тождественного равенства ее нулю.

Первая вариация функционала (11.18) будет такой

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_{\bar{\varepsilon}} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ ([M_*(KP^{-1})_*K_*^\#R_1K^\#(KP^{-1})M + C_1]F_{\bar{u}}\hat{\eta}_0\hat{\eta}_0^* + \\ &+ M_*(KP^{-1})_*K_*^\#R_1K^\#(KP^{-1})\hat{\eta}_0\hat{\eta}_0^* - M_*(KP^{-1})_*K_*^\#R_1(K^\#\hat{\varphi}\hat{\eta}_0^* + \bar{r}_0\hat{\eta}_0^*)\} \delta F_{\bar{u}*} + \\ &+ \delta F_{\bar{u}} \{ \hat{\eta}_0\hat{\eta}_0^*F_{\bar{u}*} [M_*(KP^{-1})_*K_*^\#R_1K^\#(KP^{-1})M + C_1] + \hat{\eta}_0\hat{\eta}_0^*(KP^{-1})_*K_*^\# \times \\ &\times R_1K^\#(KP^{-1})M - (\hat{\eta}_0\hat{\varphi}_*K_*^\# + \hat{\eta}_0\bar{r}_{0*})R_1K^\#(KP^{-1})M \} \} ds. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Необходимы следующие обозначения

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_*\bar{\Gamma} &= M_*(KP^{-1})_*K_*^\#R_1K^\#(KP^{-1})M + C_1; \bar{D}\bar{D}_* = \hat{\eta}_0\hat{\eta}_0^*; \\ \bar{T} &= \bar{T}_0 + \bar{T}_+ + \bar{T}_- = (\bar{\Gamma}_*)^{-1}M_*(KP^{-1})_*K_*^\#R_1[K^\#(KP^{-1})\bar{D} - \\ &- (K^\#\hat{\varphi}\hat{\eta}_0^* + \bar{r}_0\hat{\eta}_0^*)]. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Условия тождественного равенства ее нулю на требуемом классе матриц передаточных функций  $F_{\bar{u}}$  имеет вид

$$\bar{\Gamma}F_{\bar{u}}\bar{D} = -(\bar{T}_0 + \bar{T}_+),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры  $\hat{F}_{\bar{u}}$  следует записать так

$$\hat{F}_{\bar{u}} = -(\bar{\Gamma})^{-1}(\bar{T}_0 + \bar{T}_+)(\bar{D})^{-1}. \quad (11.21)$$

Зная оптимальную матрицу  $\hat{F}_{\bar{u}}$  (11.21), по уравнения связи (11.4) возможно определить и оптимальную матрицу  $\hat{F}_{\bar{y}}$ .

Учитывая матрицы (11.21) и (11.4) и формулу (11.12), можно определить и оптимальную матрицу передаточных функций  $\hat{W}$  части регулятора, расположенной в детерминированном контуре системы стабилизации. Матрица  $\hat{W}$  будет определяться так

$$\hat{W} = (\hat{F}_{\bar{u}})(\hat{F}_{\bar{y}})^{-1}. \quad (11.23)$$

Она подлежит реализации в соответствующей части вычислительного блока системы.

### 11.1.2 Алгоритм решения задачи синтеза оптимальной структуры части регулятора $\hat{W}$ , расположенной в контуре системы стабилизации, подверженном случайным стационарным воздействиям

Как и в предыдущем случае (пункт 11.2 раздела), сначала необходимо определить вектор случайных составляющих ошибок оценочных сигналов  $\tilde{\varepsilon}_0$  в исследуемом теперь контуре системы стабилизации. Поскольку объект стабилизируется лишь на детерминированной программной траектории движения, очевидно, что искомый вектор  $\tilde{\varepsilon}_0$  будет равен вектору спектров выходных случайных сигналов системы (11.7), т. е.

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \hat{r}.$$

Согласно теореме Винера-Хинчина, транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\tilde{\varepsilon}_0$  будет такой

$$\begin{aligned} S'_{\tilde{\varepsilon}_0\tilde{\varepsilon}_0} &= K^\#(KP^{-1})(MF_{\bar{u}} + E_n)S'_{\hat{\eta}_0\hat{\eta}_0} \times \\ &\times (F_{\bar{u}*}M_* + E_n)(KP^{-1})_*K^\# - K^\#(KP^{-1})(MF_{\bar{u}} + E_n)S'_{\hat{\varphi}\hat{\eta}_0}K^\# - \\ &- K^\#S'_{\hat{\eta}_0\hat{\varphi}}(F_{\bar{u}*}M_* + E_n)(KP^{-1})_*K^\# + K^\#S'_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}K^\#, \end{aligned} \quad (11.24)$$

а транспонированная матрица  $S'_{\tilde{u}\tilde{u}}$  спектральных плотностей вектора управления  $\tilde{u}$  с учетом уравнения (11.9) будет иметь вид

$$S'_{\tilde{u}\tilde{u}} = F_{\tilde{u}} S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} F_{\tilde{u}*}. \quad (11.25)$$

Функционал качества стабилизации объекта исследуемым контуром системы следует представить так

$$e_{\tilde{\varepsilon}} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (S'_{\tilde{\varepsilon}_0 \tilde{\varepsilon}_0} R_2 + S'_{\tilde{u}\tilde{u}} C_2) ds. \quad (11.26)$$

Подстановка матриц (11.24) и (11.25) в функционал (11.26) приводит последний к виду

$$\begin{aligned} e_{\tilde{\varepsilon}} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [K^\# (KP^{-1}) (MF_{\tilde{u}} + E_n) S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} (F_{\tilde{u}*} M_* + E_n) (KP^{-1})_* K^\# - \\ & - K^\# (KP^{-1}) (MF_{\tilde{u}} + E_n) S'_{\hat{\varphi} \hat{\eta}_0} K^\# - K^\# S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\varphi}} (F_{\tilde{u}*} M_* + E_n) (KP^{-1})_* K^\# + \\ & + K^\# S'_{\hat{\varphi} \hat{\varphi}} K^\# ] R_2 + F_{\tilde{u}} S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} F_{\tilde{u}*} C_2 \} ds. \end{aligned} \quad (11.27)$$

Решая задачу оптимизации функционала (11.27) методом Винера-Колмогорова, необходимо сначала определить первую вариацию функционала, а затем условие тождественного равенства ее нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций.

Первая вариация функционала (11.27) будет такой

$$\begin{aligned} \delta e_{\tilde{\varepsilon}} = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr ( \{ [M_* (KP^{-1})_* K^\# R_2 K^\# (KP^{-1}) M + C_2] F_{\tilde{u}} S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} + \\ & + M_* (KP^{-1})_* K^\# R_2 K^\# (KP^{-1}) S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} - M_* (KP^{-1})_* K^\# R_2 K^\# S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\varphi}} \} \delta F_{\tilde{u}*} + \\ & + \delta F_{\tilde{u}} \{ S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} F_{\tilde{u}*} [M_* (KP^{-1})_* K^\# R_2 K^\# (KP^{-1}) M + C_2] + \\ & + S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} (KP^{-1})_* K^\# R_2 K^\# (KP^{-1}) M - S'_{\hat{\varphi} \hat{\eta}_0} K^\# R_2 K^\# (KP^{-1}) M \} ) ds. \end{aligned} \quad (11.28)$$

С учетом выражения (11.2) необходимо ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_* \tilde{\Gamma} &= M_* (KP^{-1})_* K^\# R_2 K^\# (KP^{-1}) M + C_2; \quad \tilde{D} \tilde{D}_* = S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0}; \\ \tilde{T} &= \tilde{T}_0 + \tilde{T}_+ + \tilde{T}_- = (\tilde{\Gamma}_*)^{-1} M_* (KP^{-1})_* K^\# R_2 K^\# [(KP^{-1}) \tilde{D} - S'_{\hat{\varphi} \hat{\eta}_0} K^\# P_*], \end{aligned} \quad (11.29)$$

а матрицу  $S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0}$  спектральных плоскостей вектора  $\hat{\eta}_0$  записать так

$$\begin{aligned} S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} &= \langle \hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0^* \rangle = \langle (\hat{\psi} + PK^\# \hat{\varphi}) (\hat{\psi}_* + \hat{\varphi}_* K^\# P_*) \rangle = \\ &= S'_{\hat{\psi} \hat{\psi}} + PK^\# S'_{\hat{\varphi} \hat{\varphi}} K^\# P_*. \end{aligned} \quad (11.30)$$

Подстановка обозначений (11.29) в вариацию (11.28) позволяет представить последнюю в виде

$$\delta e_{\tilde{\varepsilon}} = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\tilde{\Gamma}_* (\tilde{\Gamma} F_{\tilde{u}} \tilde{D} + \tilde{T}) \tilde{D} \delta F_{\tilde{u}*} + \delta F_{\tilde{u}} \tilde{D} (\tilde{D}_* F_{\tilde{u}*} \tilde{\Gamma}_* + \tilde{T}_*) \tilde{\Gamma}] ds,$$

условие равенства вариации нулю на указанном выше классе матриц передаточных функций  $F_{\tilde{u}}$  записать так

$$\tilde{\Gamma} F_{\tilde{u}} \tilde{D} = -(\tilde{T}_0 + \tilde{T}_+),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры матрицы  $\hat{F}_{\tilde{u}}$  нужно определить следующим соотношением

$$\hat{F}_{\tilde{u}} = -\tilde{\Gamma}^{-1}(\tilde{T}_0 + \tilde{T}_+) \tilde{D}^{-1}. \quad (11.31)$$

Зная оптимальную структуру матрицы  $\hat{F}_{\tilde{u}}$  (11.31) по уравнению связи (11.15) несложно оценить оптимальную структуру матрицы передаточных функций  $\hat{F}_{\hat{y}}$ .

Учитывая матрицы (11.31) и (11.14), а также формулу (11.13), можно описать оптимальную структуру искомой матрицы передаточных функций  $\hat{W}$  таким образом

$$\hat{W} = (\hat{F}_{\tilde{u}})(\hat{F}_{\hat{y}})^{-1}. \quad (11.33)$$

Матрица (11.33) также подлежит реализации в соответствующей части вычислительного блока системы стабилизации.

Таким образом, задача синтеза оптимальной структуры регулятора стохастической системы стабилизации движения устойчивого многомерного объекта по детерминированной программной траектории решена полностью

## **11.2 Постановка задачи синтеза оптимальных структур наблюдателей расположенных в устойчивом и неустойчивом контурах системы стохастической стабилизации подвижного объекта с произволом в динамике**

В общем случае структурная схема системы стохастической стабилизации на детерминированной траектории движения линейного многомерного объекта с произволом в динамике являет собой громоздкую структуру, включающую в себя



Здесь полагается, что при испытаниях векторы  $\hat{y}^z$  и  $\hat{y}_-$  ( $\hat{y}_-, \hat{y}_-$ ) оцениваются непосредственно, а вектор  $\hat{y}_+$  ( $\hat{y}_+, \hat{y}_+$ ) - результат вычитания ( $\hat{y}_+ = \hat{y}^z - \hat{y}_-$ ), выполненного после эксперимента. Все элементы устойчивых контуров в системе стабилизации помечены снизу символом «+», а все элементы неустойчивых контуров – символом «-» снизу. Все элементы структурной схемы системы, помеченные символом «^» являются оценочными. Все блоки на схеме охваченные пунктиром, являют собой единые блоки « $P^{-1}$ » и « $K$ » и, когда это необходимо, части самих блоков.

Целесообразно приступить к решению задач синтеза оптимальных структур наблюдателей  $\bar{\Phi}_-, \tilde{\Phi}_-, \bar{\Phi}_+$  и  $\tilde{\Phi}_+$  в соответствующих контурах стабилизации объекта. При решении задач синтеза оптимальных структур наблюдателей вектор управлений  $\hat{u}$  полагается нулевым, а выходные векторы сигналов в измерительных трактах  $\bar{r}_-, \tilde{r}_-, \bar{r}_+$  и  $\tilde{r}_+$  такими

$$\bar{r}_{0+} = P_+^{-1}\hat{\psi}; \tilde{r}_{0+} = P_+^{-1}\hat{\psi}; \bar{r}_{0-} = P_-^{-1}\hat{\psi}; \tilde{r}_{0-} = P_-^{-1}\hat{\psi}. \quad (11.35)$$

### 11.2.1 Алгоритмы решения задач синтеза оптимальных структур наблюдателей в неустойчивом контуре системы стабилизации

Сначала определяется алгоритм решения задачи синтеза оптимальной структуры наблюдателя  $\bar{\Phi}_-$ , расположенного в неустойчивом контуре системы стабилизации объекта и подверженного детерминированным воздействиям.

В соответствии со структурной схемой (рис. 11.3) вектор сигналов наблюдения  $\bar{\Phi}_-$  равен

$$\hat{y}_- = K\hat{r}_- + \hat{\phi}. \quad (11.36)$$

С учетом уравнения (11.36) легко определить вектор сигналов выходов синтезируемого фильтра  $\bar{\Phi}_-$  - оптимальную оценку вектора  $\hat{x}_-$ , которая будет иметь вид

$$\hat{x}_- = \bar{\Phi}_-\hat{y}_- = \bar{\Phi}_-(K\hat{r}_- + \hat{\phi}) = \bar{\Phi}_-K\hat{r}_- + \bar{\Phi}_-\hat{\phi}. \quad (11.37)$$

Из уравнения (11.37) возможно оценить и вектор выходных сигналов объекта  $\hat{r}_-$  таким образом

$$\hat{r}_- = (\bar{\Phi}_- K)^{-1}(\hat{x}_- - \bar{\Phi}_- \hat{\varphi}), \quad (11.38)$$

который может быть использован при построении стандартной структурной схемы исследуемой системы стабилизации.

Вектор  $\hat{\varepsilon}_{0-}$  сигналов разности векторов  $\hat{x}_-$  (11.37) и  $\hat{r}_{0-}$  (11.35), необходимый для синтеза оптимальной структуры  $\hat{\Phi}_-$  наблюдателя в исследуемом контуре стабилизации должен быть представлен так

$$\hat{\varepsilon}_{0-} = \hat{x}_- - \hat{r}_{0-} = \bar{\Phi}_- \hat{y}_- - P_-^{-1} \hat{\psi}. \quad (11.39)$$

Функционал качества наблюдения вектора  $\hat{r}_{0-}$  имеет вид

$$\bar{\mathcal{E}}_{0-} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(\hat{\varepsilon}_{0-} \hat{\varepsilon}_{0-*} \bar{R}_{0-}) ds, \quad (11.40)$$

в который необходимо подставлять выражение (11.39). После указанной подстановки функционал (11.40) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_{0-} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [(\bar{\Phi}_- \hat{y}_- \hat{y}_{-*} \bar{\Phi}_{-*} - \bar{\Phi}_- \hat{y}_- \hat{\psi}_* P_{-*}^{-1} - P_-^{-1} \hat{\psi} \hat{y}_{-*} \bar{\Phi}_{-*} + \\ & + P_-^{-1} \hat{\psi} \hat{\psi}_* P_{-*}^{-1}) \bar{R}_{0-}] ds. \end{aligned} \quad (11.41)$$

Решая задачу синтеза оптимальной структуры  $\hat{\Phi}_-$  методом Винера-Колмогорова необходимо вначале определить первую вариацию функционала (11.41), а затем условие тождественного равенства вариации нулю.

Первая вариация функционала (11.41) выглядит таким образом

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathcal{E}}_{0-} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\bar{R}_{0-} (\bar{\Phi}_- \hat{y}_- \hat{y}_{-*} - P_-^{-1} \hat{\psi} \hat{y}_{-*}) \delta \bar{\Phi}_{-*} + \delta \bar{\Phi}_- (\hat{y}_- \hat{y}_{-*} \bar{\Phi}_{-*} - \\ & - \hat{y}_- \hat{\psi}_* P_{-*}^{-1}) \bar{R}_{0-}] ds. \end{aligned} \quad (11.42)$$

Целесообразно ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned} \bar{R}_{0-} &= \bar{\Gamma}_{0-} \bar{\Gamma}_{0-*}; \quad \bar{D}_{0-*} \bar{D}_{0-} = \hat{y}_- \hat{y}_{-*}; \\ \bar{T}_{0-} &= \bar{T}_{0-0} + \bar{T}_{0-+} + \bar{T}_{0--} = (\bar{\Gamma}_{0-})^{-1} P_-^{-1} \hat{\psi} \hat{y}_{-*} (\bar{D}_{0-})^{-1}. \end{aligned} \quad (11.43)$$

С учетом обозначений (11.43) вариация (11.42) примет вид

$$\delta \bar{\mathcal{E}}_{0-} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\bar{\Gamma}_{0-} (\bar{\Gamma}_{0-*} \bar{\Phi}_- \bar{D}_{0-*} - \bar{T}_{0-}) \bar{D}_{0-} \delta \bar{\Phi}_{-*} +$$

$$+\delta\bar{\Phi}_-\bar{D}_{0-*}(\bar{D}_{0-}\bar{\Phi}_{-*}\bar{\Gamma}_{0-}-\bar{T}_{0-*})\bar{\Gamma}_{0-*}]ds,$$

условие тождественного равенства вариации нулю будет таким

$$\bar{\Gamma}_{0-*}\bar{\Phi}_-\bar{D}_{0-*}=(\bar{T}_{0--}),$$

а алгоритм синтеза структуры  $\hat{\Phi}_-$  необходимо записать так

$$\hat{\Phi}_-=(\bar{\Gamma}_{0-*})^{-1}(\bar{T}_{0--})(\bar{D}_{0-*})^{-1}. \quad (11.44)$$

Теперь определяется алгоритм решения задачи синтеза оптимальной структуры наблюдения  $\tilde{\Phi}_-$ , расположенного в неустойчивом контуре стабилизации объекта, подверженного случайным воздействиям.

Вектор  $\hat{\varepsilon}_-$  спектров сигналов разности векторов  $\hat{\hat{x}}_-$  и  $\hat{\hat{r}}_{0-}$  (11.35), используемых для синтеза оптимальной структуры  $\hat{\Phi}_-$  наблюдателя в исследуемом контуре стабилизации (рис. 11.3), имеет вид

$$\hat{\varepsilon}_-=\hat{\hat{x}}_--\hat{\hat{r}}_{0-}=\tilde{\Phi}_-\hat{\hat{y}}_-P_-^{-1}\hat{\hat{\psi}}. \quad (11.45)$$

Функционал качества наблюдения вектора  $\hat{\hat{r}}_{0-}$  представляется таким

$$\tilde{e}_-=\frac{1}{j}\int_{-j\infty}^{j\infty}tr(S'_{\tilde{\varepsilon}_-\tilde{\varepsilon}_-}\tilde{R}_{0-})ds, \quad (11.46)$$

где транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\hat{\hat{\varepsilon}}_-$ , полученная на основании теоремы Винера-Хинчина, должна быть такой

$$\begin{aligned} S'_{\tilde{\varepsilon}_-\tilde{\varepsilon}_-} &= \\ &= \tilde{\Phi}_-S'_{\hat{\hat{y}}_-\hat{\hat{y}}_-}\tilde{\Phi}_{-*}-\tilde{\Phi}_-S'_{\hat{\hat{\psi}}_-\hat{\hat{y}}_-}P_{-*}^{-1}-P_-^{-1}S'_{\hat{\hat{y}}_-\hat{\hat{\psi}}_-}\tilde{\Phi}_{-*}+P_-^{-1}S'_{\hat{\hat{\psi}}_-\hat{\hat{\psi}}_-}P_{-*}^{-1}. \end{aligned} \quad (11.47)$$

По структурной схеме (рис. 11.3) видно, что начальный вектор наблюдения  $\hat{\hat{y}}_-$  в исследуемом тракте системы будет иметь вид

$$\hat{\hat{y}}_- = KP_-^{-1}\hat{\hat{\psi}} + \hat{\hat{\phi}}. \quad (11.48)$$

Используя выражение (11.48) и учитывая некоррелированность векторов  $\hat{\hat{\psi}}$  и  $\hat{\hat{\phi}}$ , транспонированную матрицу взаимных спектральных плотностей указанных векторов  $S'_{\hat{\hat{y}}_-\hat{\hat{\psi}}_-}$  следует представить так

$$S'_{\hat{\hat{y}}_-\hat{\hat{\psi}}_-} = S'_{\hat{\hat{\psi}}_-\hat{\hat{\psi}}_-}P_{-*}^{-1}K_*.$$

Задачу синтеза оптимальной структуры  $\widehat{\Phi}_-$  целесообразно решать методом Винера-Колмогорова. Первая вариация функционала (11.46) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta \tilde{e}_- = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\tilde{R}_{0-} (\tilde{\Phi}_- S'_{\tilde{y}_- \tilde{y}_-} - P_-^{-1} S'_{\tilde{y}_- \tilde{\psi}}) \delta \tilde{\Phi}_{-*} + \\ & + \delta \tilde{\Phi}_- (S'_{\tilde{y}_- \tilde{y}_-} \tilde{\Phi}_{-*} - S'_{\tilde{\psi} \tilde{y}_-} P_-^{-1}) \tilde{R}_{0-}] ds. \end{aligned} \quad (11.49)$$

Целесообразно ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{0-} \tilde{\Gamma}_{0-*} &= \tilde{R}_{0-}; \quad \tilde{D}_{0-*} \tilde{D}_{0-} = S'_{\tilde{y}_- \tilde{y}_-}; \\ \tilde{T}_{0-} &= \tilde{T}_{0-0} + \tilde{T}_{0-+} + \tilde{T}_{0--} = (\tilde{\Gamma}_{0-})^{-1} P_-^{-1} S'_{\tilde{y}_- \tilde{\psi}} (\tilde{D}_{0-})^{-1}. \end{aligned} \quad (11.50)$$

С учетом обозначений (11.50) вариация (11.49) примет вид

$$\begin{aligned} \delta \tilde{e}_- = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\tilde{\Gamma}_{0-} (\tilde{\Gamma}_{0-*} \tilde{\Phi}_- \tilde{D}_{0-*} - \tilde{T}_{0-}) \tilde{D}_{0-} \delta \tilde{\Phi}_{-*} + \\ & + \delta \tilde{\Phi}_- \tilde{D}_{0-*} (\tilde{D}_{0-} \tilde{\Phi}_- \tilde{\Gamma}_{0-} - \tilde{T}_{0-*}) \tilde{\Gamma}_{0-*}] ds, \end{aligned}$$

Условие тождественного равенства вариации (11.49) нулю будет таким

$$\tilde{\Gamma}_{0-*} \tilde{\Phi}_- \tilde{D}_{0-*} = (\tilde{T}_{0--}),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры  $\widehat{\Phi}_-$  наблюдателя по исходным данным решаемой задачи должен быть таким

$$\widehat{\Phi}_- = (\tilde{\Gamma}_{0-*})^{-1} (\tilde{T}_{0--}) (\tilde{D}_{0-*})^{-1} \quad (11.51)$$

Полученный результат позволяет перейти к рассмотрению устойчивого контура стабилизации.

### 11.2.2 Алгоритм решения задач оптимальных структур наблюдателей, расположенных в устойчивом контуре исследуемой системы стабилизации

Вначале определяется в соответствии со структурной схемой (рис. 11.3) оценка вектора спектров сигналов наблюдения  $\widehat{y}_+$ , которая находится как разность векторов  $\widehat{y}^\Sigma - \widehat{y}_-$  и подразделяется на оценки векторов  $\widehat{y}_+$  и  $\widehat{y}_+$ . Наилучшая точностная оценка  $\widehat{x}_+$  детерминированных выходов находится таким образом

$$\widehat{x}_+ = \bar{\Phi}_+ \widehat{y}_+,$$

а разность векторов  $\widehat{x}_+$  и  $\bar{r}_{0+}$  (11.35) определяет оценку вектора ошибок

$$\hat{\varepsilon}_{0+} = \hat{\hat{x}}_+ - \bar{r}_{0+} = \bar{\Phi}_+ \hat{y}_+ - P_+^{-1} \hat{\psi}. \quad (11.52)$$

Функционал качества наблюдения вектора  $\hat{r}_{0+}$  тогда должен быть таким

$$\bar{\varepsilon}_{0+} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}(\hat{\varepsilon}_{0+} \hat{\varepsilon}_{0+}^* \bar{R}_{0+}) ds.$$

После подстановки в него выражений (11.52) этот функционал представляется как

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{0+} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [(\bar{\Phi}_+ \hat{y}_+ - P_+^{-1} \hat{\psi})(\hat{y}_{+*} \bar{\Phi}_{+*} - \hat{\psi}_* P_{+*}^{-1}) \bar{R}_{0+}] ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [(\bar{\Phi}_+ \hat{y}_+ \hat{y}_{+*} \bar{\Phi}_{+*} - \bar{\Phi}_+ \hat{y}_+ \hat{\psi}_* P_{+*}^{-1} - P_+^{-1} \hat{\psi} \hat{y}_{+*} \bar{\Phi}_{+*} + \\ &+ P_+^{-1} \hat{\psi} \hat{\psi}_* P_{+*}^{-1}) \bar{R}_{0+}] ds \end{aligned} \quad (11.53)$$

Решая поставленную задачу синтеза оптимальной структуры  $\hat{\Phi}_+$  методом Винера-Колмогорова, сначала необходимо определить первую вариацию функционала (11.53), а затем условие тождественного равенства этой вариации нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций  $\bar{\Phi}_+$ .

Первая вариация функционала (11.53) будет такой

$$\begin{aligned} \delta \bar{\varepsilon}_{0+} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\bar{R}_{0+} (\bar{\Phi}_+ \hat{y}_+ \hat{y}_{+*} - P_+^{-1} \hat{\psi} \hat{y}_{+*}) \delta \bar{\Phi}_{+*} + \\ &+ \delta \bar{\Phi}_+ (\hat{y}_+ \hat{y}_{+*} \bar{\Phi}_{+*} - \hat{y}_+ \hat{\psi}_* P_{+*}^{-1}) \bar{R}_{0+}] ds \end{aligned} \quad (11.54)$$

Целесообразен ввод следующих обозначений

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{0+*} \bar{\Gamma}_{0+} &= \bar{R}_{0+}; \quad \bar{D}_{0+} \bar{D}_{0+*} = \hat{y}_+ \hat{y}_{+*}; \\ \bar{T}_{0+} &= \bar{T}_{0+0} + \bar{T}_{0++} + \bar{T}_{0+-} = (\bar{\Gamma}_{0+*})^{-1} P_+^{-1} \hat{\psi} \hat{y}_{+*} (\bar{D}_{0+*})^{-1}. \end{aligned} \quad (11.55)$$

С учетом обозначений (11.43) вариация (11.42) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta \bar{\varepsilon}_{0+} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\bar{\Gamma}_{0+*} (\bar{\Gamma}_{0+} \bar{\Phi}_+ \bar{D}_{0+} - \bar{T}_{0+}) \bar{D}_{0+*} \delta \bar{\Phi}_{+*} + \\ &+ \delta \bar{\Phi}_+ \bar{D}_{0+} (\bar{D}_{0+*} \bar{\Phi}_{+*} \bar{\Gamma}_{0+*} - \bar{T}_{0+*}) \bar{\Gamma}_{0+}] ds, \end{aligned}$$

условие тождественного равенства вариации (11.54) нулю записывается так

$$\bar{\Gamma}_{0+} \bar{\Phi}_+ \bar{D}_{0+} = (\bar{T}_{0+0} + \bar{T}_{0++}),$$

а алгоритм синтеза по исходным данным задачи оптимальной структуры наблюдателя  $\hat{\Phi}_+$  выражается уравнением

$$\hat{\Phi}_+ = (\bar{\Gamma}_{0+})^{-1} (\bar{T}_{0+0} + \bar{T}_{0++}) (\bar{D}_{0+})^{-1}. \quad (11.56)$$

Ниже определяется алгоритм решения задачи синтеза оптимальной структуры наблюдателя, расположенного в устойчивом контуре стабилизации объекта и подверженного случайным воздействиям.

Вектор  $\hat{\varepsilon}_+$  сигналов разности векторов  $\hat{\hat{x}}_+$  и  $\tilde{r}_{0+}$  (11.35), необходимый для процедуры синтеза оптимальной структуры  $\hat{\Phi}_+$  наблюдателя в исследуемом контуре стабилизации (рис.11.3), имеет вид

$$\hat{\varepsilon}_+ = \hat{\hat{x}}_+ - \tilde{r}_{0+} = \tilde{\Phi}_+ \hat{y}_+ - P_+^{-1} \hat{\psi}. \quad (11.57)$$

Функционал качества наблюдения вектора  $\hat{r}_{0+}$  тогда должен быть таким

$$\tilde{e}_+ = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(S'_{\tilde{\varepsilon}_+ \tilde{\varepsilon}_+} \tilde{R}_{0+}) ds, \quad (11.58)$$

где  $S'_{\tilde{\varepsilon}_+ \tilde{\varepsilon}_+}$  - транспонированная матрица спектральных плотностей вектора  $\hat{\varepsilon}_+$ , полученная на основании теоремы Винера-Хинчина, такова

$$S'_{\tilde{\varepsilon}_+ \tilde{\varepsilon}_+} = \tilde{\Phi}_+ S'_{\tilde{y}_+ \tilde{y}_+} \tilde{\Phi}_{+*} - \tilde{\Phi}_+ S'_{\tilde{\psi} \tilde{y}_+} P_{+*}^{-1} - P_+^{-1} S'_{\tilde{y}_+ \tilde{\psi}} \tilde{\Phi}_{+*} + P_+^{-1} S'_{\tilde{\psi} \tilde{\psi}} P_{+*}^{-1}. \quad (11.59)$$

На структурной схеме (рис.11.3) показано, что наблюдаемый в этом случае вектор  $\hat{y}_+$  может быть вычислен по векторам шумов и возмущений

$$\hat{y}_+ = \hat{y}^Z - \hat{y}_- = KP_+^{-1} \hat{\psi} + \hat{\varphi}. \quad (11.60)$$

Используя уравнение (11.60) и учитывая факт некоррелированности векторов  $\hat{\psi}$  и  $\hat{\varphi}$ , транспонированную матрицу взаимных спектральных плотностей указанных векторов следует оценивать так

$$S'_{\tilde{y}_+ \tilde{\psi}} = S'_{\tilde{\psi} \tilde{\psi}} P_{+*}^{-1} K_*.$$

Задачу синтеза оптимальной структуры  $\hat{\Phi}_+$  целесообразно решать также методом Винера-Колмогорова. Первая вариация функционала (11.58) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta \tilde{e}_+ = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\tilde{R}_{0+} (\tilde{\Phi}_+ S'_{\tilde{y}_+ \tilde{y}_+} - P_+^{-1} S'_{\tilde{y}_+ \tilde{\psi}}) \delta \tilde{\Phi}_{+*} + \\ & + \delta \tilde{\Phi}_+ (S'_{\tilde{y}_+ \tilde{y}_+} \tilde{\Phi}_{+*} - S'_{\tilde{\psi} \tilde{y}_+} P_{+*}^{-1}) \tilde{R}_{0+}] ds. \end{aligned} \quad (11.61)$$

Целесообразно ввести обозначения в вариацию

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{0+*} \tilde{\Gamma}_{0+} &= \tilde{R}_{0+}; \tilde{D}_{0+} \tilde{D}_{0+*} = S'_{\tilde{y}_+ \tilde{y}_+}; \\ \tilde{T}_{0+} &= \tilde{T}_{0+0} + \tilde{T}_{0++} + \tilde{T}_{0+-} = (\tilde{\Gamma}_{0+*})^{-1} P_+^{-1} S'_{\tilde{y}_+ \tilde{\psi}} (\tilde{D}_{0+})^{-1}. \end{aligned} \quad (11.62)$$

С учетом обозначений (11.50) вариация (11.49) примет вид

$$\delta \tilde{e}_+ = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\tilde{\Gamma}_{0+*} (\tilde{\Gamma}_{0+} \tilde{\Phi}_+ \tilde{D}_{0+} - \tilde{T}_{0+}) \tilde{D}_{0+*} \delta \tilde{\Phi}_{+*} + \\ + \delta \tilde{\Phi}_+ \tilde{D}_{0+} (\tilde{D}_{0+*} \tilde{\Phi}_{+*} \tilde{\Gamma}_{0+*} - \tilde{T}_{0+*}) \tilde{\Gamma}_{0+}] ds,$$

условие тождественного равенства вариации (11.61) нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц варьируемых передаточных функций выглядит так

$$\tilde{\Gamma}_{0+} \tilde{\Phi}_+ \tilde{D}_{0+} = (\tilde{T}_{0+0} + \tilde{T}_{0++}),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры матрицы передаточных функций наблюдателя  $\hat{\tilde{\Phi}}_+$  формализован в виде соотношения

$$\hat{\tilde{\Phi}}_+ = (\tilde{\Gamma}_{0+})^{-1} (\tilde{T}_{0+0} + \tilde{T}_{0++}) (\tilde{D}_{0+})^{-1}. \quad (11.63)$$

После определения оптимальных структур частей наблюдателя в системе стабилизации появляется возможность синтезировать структуры частей  $\bar{W}_-$ ,  $\tilde{W}_-$ ,  $\bar{W}_+$  и  $\tilde{W}_+$  регулятора в исследуемой системе.

### 11.3 Постановка задач синтеза оптимальных структур частей регулятора в устойчивом и неустойчивом контурах исследуемой системы стабилизации

С учетом структурной схемы (рис. 11.3), базовых результатов пункта 11.3 и некоторых результатов пункта 11.2 возможно составить стандартную структурную схему исследуемой системы стохастической стабилизации (рис. 11.4). По аналогии с пунктом 11.2 (формулы (11.2) и (11.3)) на рисунке 11.4 показаны приведенные возмущения

$$\hat{\eta} = M(N_0 \bar{r}_0 + \bar{\varphi}_0) + \bar{\psi} + PK^\# \hat{\varphi}; \\ \hat{\eta}_0 = \hat{\psi} + PK^\# \hat{\varphi}. \quad (11.64)$$

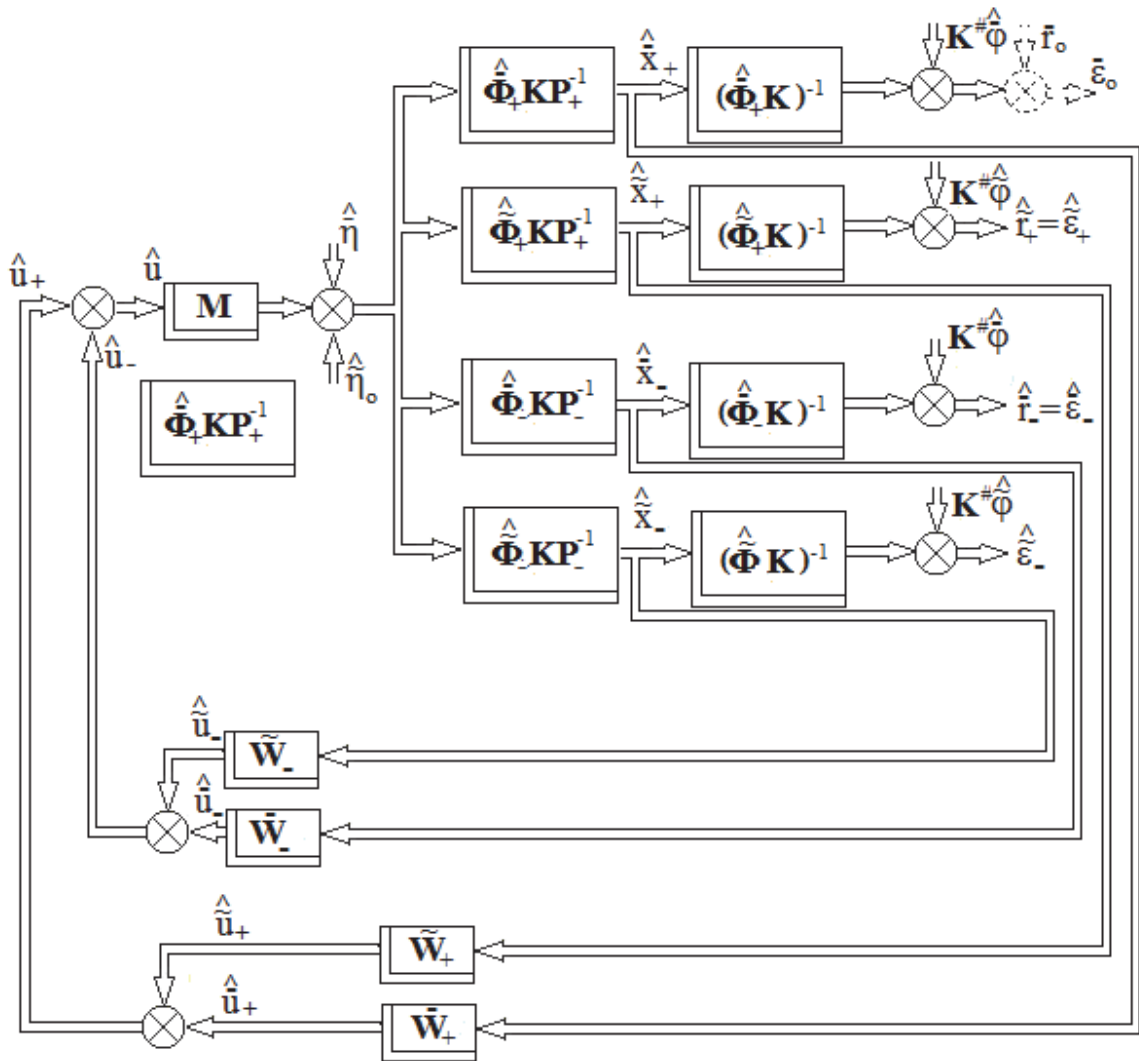


Рис. 11.4. Стандартная структурная схема исследуемой системы стохастической стабилизации подвижного объекта

Из структурной схемы (рис. 11.4.) можно заключить, что исследуемая система стохастической стабилизации включает в себя два устойчивых и два неустойчивых контура стабилизации. В первых двух определению подлежат оптимальные структуры матриц передаточных функций  $\tilde{W}_+$  и  $\tilde{W}_+$  первых двух частей регулятора в системе, во вторых – оптимальные структуры  $\tilde{W}_-$  и  $\tilde{W}_-$  третьей и четвертой частей регулятора. Качество стабилизации определяет в первую очередь вектор  $\bar{\varepsilon}_0$ , характеризующий отклонение подвижного объекта от детерминированной программы движения, а векторы отклонений объекта от

программы  $\hat{r}_+$ ,  $\hat{r}_-$  и  $\hat{r}_-$  также должны быть уменьшены. Полагается также, что базовые векторы  $\hat{u} = \hat{u}_+ + \hat{u}_-$ ,  $\hat{\eta}$  и  $\hat{\eta}$  действуют слажено и не противодействуют друг другу.

### 11.3.1 Алгоритмы решения задач синтеза оптимальных структур $\bar{W}_-$ и $\bar{W}_-$ частей регулятора (неустойчивые контуры)

Для решения задачи синтеза оптимальной структуры  $\bar{W}_-$  части регулятора в неустойчивом контуре, парирующей детерминированные воздействия, вначале необходимо составить уравнения вектора выходных сигналов исследуемого контура  $\hat{r}_-$ , которое в соответствии со схемой (рис. 11.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{r}_- &= (\hat{\Phi}_-K)^{-1}(\hat{x}_- - \hat{\Phi}_-\hat{\phi}) = (\hat{\Phi}_-K)^{-1}[(\hat{\Phi}_-KP^{-1})(M\hat{u}_- + \hat{\eta}) - \hat{\Phi}_-\hat{\phi}] = \\ &= (\hat{\Phi}_-K)^{-1}[(\hat{\Phi}_-KP^{-1})(MF_{\bar{u}_-} + E_n)\hat{\eta}_0 - \hat{\Phi}_-\hat{\phi}], \end{aligned} \quad (11.65)$$

где  $F_{\bar{u}_-}$  - матрица передаточных функций замкнутого контура от вектора приведенных возмущений  $\hat{\eta}$  к вектору сигналов управления контуром  $\hat{u}$ . Матрица  $F_{\bar{u}_-}$  связана с матрицей  $F_{\hat{x}_-}$  уравнением вида

$$F_{\hat{x}_-} = (\hat{\Phi}_-KP^{-1})(MF_{\bar{u}_-} + E_n). \quad (11.66)$$

Искомая матрица передаточных функций  $\bar{W}_-$  части регулятора в исследуемом контуре, как следует из уравнений

$$\hat{u}_- = F_{\bar{u}_-}\hat{\eta} = \bar{W}_-F_{\hat{x}_-}\hat{\eta},$$

может быть найдена из следующего соотношения

$$\bar{W}_- = (F_{\bar{u}_-})(F_{\hat{x}_-})^{-1}. \quad (11.67)$$

Матрица  $F_{\bar{u}_-}$  является частью уравнений (11.65) и (11.66) и может служить в качестве варьируемой в процедурах синтеза оптимальной структуры части регулятора  $\bar{W}_-$ .

Как функционал качества стабилизации объекта исследуемым контуром системы возможно использовать такой

$$\bar{E}_- = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (\hat{r}_-\hat{r}_-^*\bar{R}_1 + \hat{u}_-\hat{u}_-^*\bar{C}_1) ds. \quad (11.68)$$

Подстановка в функционал (11.68) выражений (11.65) и (11.66) позволяет записать последний в виде

$$\begin{aligned}
\bar{E}_- &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ (\hat{\Phi}_- K)^{-1} [ (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1}) (M F_{\bar{u}_-} + E_n) \hat{\eta}_0 - \hat{\Phi}_- \hat{\varphi} ] \times \\
&\times [ \hat{\eta}_0^* (F_{\bar{u}_-} M_* + E_n) (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})_* - \hat{\varphi}_* \hat{\Phi}_- ] (\hat{\Phi}_- K)^{-1} \bar{R}_1 + F_{\bar{u}_-} \hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0^* F_{\bar{u}_-} \bar{C}_1 \} ds = \\
&= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ (\hat{\Phi}_- K)^{-1} [ (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1}) (M F_{\bar{u}_-} + E_n) \hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0^* (F_{\bar{u}_-} M_* + E_n) (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})_* - \\
&- (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1}) (M F_{\bar{u}_-} + E_n) \hat{\eta}_0 \hat{\varphi}_* \hat{\Phi}_- - \hat{\Phi}_- \hat{\varphi} \hat{\eta}_0^* (F_{\bar{u}_-} M_* + E_n) (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})_* + \\
&+ \hat{\Phi}_- \hat{\varphi} \hat{\varphi}_* \hat{\Phi}_- ] (\hat{\Phi}_- K)^{-1} \bar{R}_1 + F_{\bar{u}_-} \hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0^* F_{\bar{u}_-} \bar{C}_1 \} ds \tag{11.69}
\end{aligned}$$

Решая задачу синтеза оптимальных структур матриц передаточных функций регулятора в системе стабилизации методом Винера-Колмогорова, необходимо вначале определить первую вариацию функционала (11.69), а затем условие тождественного равенства ее нулю. Первая вариация функционала (11.69) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\delta \bar{E}_- &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ ( [ M_* (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})_* (\hat{\Phi}_- K)^{-1} \bar{R}_1 (\hat{\Phi}_- K)^{-1} (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1}) M + \bar{C}_1 ] \times \\
&\times F_{\bar{u}_-} \hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0^* + M_* (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})_* (\hat{\Phi}_- K)^{-1} \bar{R}_1 (\hat{\Phi}_- K)^{-1} (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1}) \hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0^* - \\
&- M_* (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})_* (\hat{\Phi}_- K)^{-1} \bar{R}_1 \hat{\Phi}_- \hat{\varphi} \hat{\eta}_0^* \} \delta F_{\bar{u}_-} + \\
&+ \delta F_{\bar{u}_-} \{ \hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0^* F_{\bar{u}_-} [ M_* (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})_* (\hat{\Phi}_- K)^{-1} \bar{R}_1 (\hat{\Phi}_- K)^{-1} (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1}) M + \bar{C}_1 ] + \\
&+ \hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0^* (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})_* (\hat{\Phi}_- K)^{-1} \bar{R}_1 (\hat{\Phi}_- K)^{-1} (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1}) M - \\
&- \hat{\eta}_0 \hat{\varphi}_* \hat{\Phi}_- \bar{R}_1 (\hat{\Phi}_- K)^{-1} (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1}) M \} \} ds. \tag{11.70}
\end{aligned}$$

Необходимо ввести обозначения

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_- \bar{\Gamma}_- &= M_* (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})_* (\hat{\Phi}_- K)^{-1} \bar{R}_1 (\hat{\Phi}_- K)^{-1} (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1}) M + \bar{C}_1; \quad \bar{D}_- \bar{D}_- = \hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0^*; \\
\bar{T}_- &= \bar{T}_- + \bar{T}_+ + \bar{T}_- = (\bar{\Gamma}_-)^{-1} M_* (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})_* (\hat{\Phi}_- K)^{-1} \bar{R}_1 \times \\
&\times [ (\hat{\Phi}_- K)^{-1} (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1}) \hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0^* - \hat{\Phi}_- \hat{\varphi} \hat{\eta}_0^* ] (\bar{D}_-)^{-1}. \tag{11.71}
\end{aligned}$$

Вариация (11.70) с учетом обозначений (11.71) будет иметь такой вид

$$\begin{aligned}
\delta \bar{E}_- &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [ \bar{\Gamma}_- (\bar{\Gamma}_- F_{\bar{u}_-} \bar{D}_- + \bar{T}_-) \bar{D}_- \delta F_{\bar{u}_-} + \\
&+ \delta F_{\bar{u}_-} \bar{D}_- (\bar{D}_- F_{\bar{u}_-} \bar{\Gamma}_- + \bar{T}_-) \bar{\Gamma}_- ] ds.
\end{aligned}$$

Условие ее тождественного равенства нулю представляется уравнением

$$\bar{\Gamma}_- F_{\bar{u}_-} \bar{D}_- = -(\bar{T}_{-+} + \bar{T}_{--}),$$

решение которого формализует алгоритм синтеза оптимальной структуры матрицы  $\hat{F}_{\bar{u}_-}$  таким соотношением

$$\hat{F}_{\bar{u}_-} = -(\bar{\Gamma}_-)^{-1}(\bar{T}_{-+} + \bar{T}_{--})(\bar{D}_-)^{-1}. \quad (11.72)$$

Воспользовавшись выражением (11.66) и уравнением (11.67), учитывая матрицу (11.72), соотношение для определения структуры  $\widehat{W}_-$  части регулятора в неустойчивом контуре системы стабилизации следует записать так

$$\widehat{W}_- = (\hat{F}_{\bar{u}_-})(\hat{F}_{\hat{x}_-})^{-1}. \quad (11.73)$$

Таким образом, оптимальная структура матрицы передаточных функций части регулятора неустойчивого контура системы  $\widehat{W}_-$ , подверженная действию детерминированных возмущений в системе определена.

Следующей стадией решения задачи синтеза будет синтез оптимальной структуры  $\widetilde{W}_-$  второй части регулятора в неустойчивых контурах системы стабилизации. Для ее выполнения, как и ранее, сначала необходимо составить уравнение вектора выходных сигналов исследуемого контура  $\hat{r}_-$ , которое в соответствии со схемой (рис. 11.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{r}_- &= (\widehat{\Phi}_- K)^{-1}(\widehat{x}_- - \widehat{\Phi}_- \widehat{\varphi}) = (\widehat{\Phi}_- K)^{-1}[(\widehat{\Phi}_- K P_-^{-1})(M \widehat{u}_- + \widehat{\eta}) - \widehat{\Phi}_- \widehat{\varphi}] = \\ &= (\widehat{\Phi}_- K)^{-1}[(\widehat{\Phi}_- K P_-^{-1})(M F_{\bar{u}_-} + E_n) \widehat{\eta}_0 - \widehat{\Phi}_- \widehat{\varphi}], \end{aligned} \quad (11.74)$$

где  $F_{\bar{u}_-}$  - матрица передаточных функций замкнутого контура от вектора случайных возмущений  $\widehat{\eta}$  к вектору случайных сигналов управления контуром  $\widehat{u}_-$ . Матрица  $F_{\bar{u}_-}$  связана с матрицей передаточных функций контура  $F_{\widehat{x}_-}$  от вектора возмущений  $\widehat{\eta}$  к вектору выходов контура  $\widehat{x}_-$ , и определяется уравнением

$$F_{\widehat{x}_-} = (\widehat{\Phi}_- K P_-^{-1})(M F_{\bar{u}_-} + E_n). \quad (11.75)$$

Искомая матрица передаточных функций  $\widetilde{W}_-$  части регулятора в исследуемом неустойчивом контуре, как это следует из уравнений

$$\hat{u}_- = F_{\hat{u}_-} \hat{\eta} = \tilde{W}_- F_{\hat{x}_-} \hat{\eta}$$

определяется так

$$\tilde{W}_- = (F_{\hat{u}_-})(F_{\hat{x}_-})^{-1}. \quad (11.76)$$

Как функционал качества стабилизации исследуемого неустойчивого контура системы используется такой

$$\tilde{e}_- = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(S'_{\hat{r}_- \hat{r}_-} \tilde{R}_1 + S'_{\hat{u}_- \hat{u}_-} \tilde{C}_1) ds \quad (11.77)$$

Согласно теореме Винера-Хинчина матрица спектральных плотностей вектора  $\hat{r}_-$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} S'_{\hat{r}_- \hat{r}_-} = & (\hat{\Phi}_- K)^{-1} [(\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})(M F_{\hat{u}_-} + E_n) S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} (F_{\hat{u}_-} M_* + E_n) (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})_* - \\ & - (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})(M F_{\hat{u}_-} + E_n) S'_{\hat{\varphi} \hat{\eta}_0} \hat{\Phi}_- - \hat{\Phi}_- S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\varphi}} (F_{\hat{u}_-} M_* + E_n) (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})_* + \\ & + \hat{\Phi}_- S'_{\hat{\varphi} \hat{\varphi}} \hat{\Phi}_-] (\hat{\Phi}_- K)^{-1}, \end{aligned} \quad (11.78)$$

а матрица  $S'_{\hat{u}_- \hat{u}_-}$  должна быть записана так

$$S'_{\hat{u}_- \hat{u}_-} = F_{\hat{u}_-} S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} F_{\hat{u}_-}^*. \quad (11.79)$$

Подстановка матриц (11.78) и (11.79) в функционал (11.77) позволяет переписать последний в виде

$$\begin{aligned} \tilde{e}_- = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ (\hat{\Phi}_- K)^{-1} [(\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})(M F_{\hat{u}_-} + E_n) S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} \times \\ & \times (F_{\hat{u}_-} M_* + E_n) (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})_* - (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})(M F_{\hat{u}_-} + E_n) S'_{\hat{\varphi} \hat{\eta}_0} \hat{\Phi}_- - \\ & - \hat{\Phi}_- S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\varphi}} (F_{\hat{u}_-} M_* + E_n) (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})_* + \hat{\Phi}_- S'_{\hat{\varphi} \hat{\varphi}} \hat{\Phi}_-] (\hat{\Phi}_- K)^{-1} \tilde{R}_1 + \\ & + F_{\hat{u}_-} S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} F_{\hat{u}_-}^* \tilde{C}_1 \} ds. \end{aligned} \quad (11.80)$$

Как и ранее, решая задачу оптимального синтеза методом Винера-Колмогорова, необходимо определить первую вариацию функционала (11.80), а затем условие тождественного равенства ее нулю.

Первая вариация функционала (11.80) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta \tilde{e}_- = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ ([M_* (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})_* (\hat{\Phi}_- K)^{-1} \tilde{R}_1 (\hat{\Phi}_- K)^{-1} (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1}) M + \tilde{C}_1] \times \\ & \times F_{\hat{u}_-} S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} + M_* (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1})_* (\hat{\Phi}_- K)^{-1} \tilde{R}_1 (\hat{\Phi}_- K)^{-1} (\hat{\Phi}_- K P_-^{-1}) S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -M_*(\widehat{\Phi}_-KP_-^{-1})_*(\widehat{\Phi}_-K)^{-1}\widetilde{R}_1\widehat{\Phi}_-S'_{\widehat{\eta}_0\widehat{\varphi}}\} \delta F_{\widetilde{u}_-*} + \\
& +\delta F_{\widetilde{u}_-}\{S'_{\widehat{\eta}_0\widehat{\eta}_0}F_{\widetilde{u}_-*}[M_*(\widehat{\Phi}_-KP_-^{-1})_*(\widehat{\Phi}_-K)^{-1}\widetilde{R}_1(\widehat{\Phi}_-K)^{-1}(\widehat{\Phi}_-KP_-^{-1})M + \widetilde{C}_1] + \\
& +S'_{\widehat{\eta}_0\widehat{\eta}_0}(\widehat{\Phi}_-KP_-^{-1})_*(\widehat{\Phi}_-K)^{-1}\widetilde{R}_1(\widehat{\Phi}_-K)^{-1}(\widehat{\Phi}_-KP_-^{-1})M - \\
& -S'_{\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}}\widehat{\Phi}_-_*\widetilde{R}_1(\widehat{\Phi}_-K)^{-1}(\widehat{\Phi}_-KP_-^{-1})M\})ds. \tag{11.81}
\end{aligned}$$

Целесообразно ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_-_*\widetilde{\Gamma}_- &= M_*(\widehat{\Phi}_-KP_-^{-1})_*(\widehat{\Phi}_-K)^{-1}\widetilde{R}_1(\widehat{\Phi}_-K)^{-1}(\widehat{\Phi}_-KP_-^{-1})M + \widetilde{C}_1; \widetilde{D}_-\widetilde{D}_-_* = S'_{\widehat{\eta}_0\widehat{\eta}_0}; \\
\widetilde{T}_- &= \widetilde{T}_- + \widetilde{T}_- + \widetilde{T}_- = (\widetilde{\Gamma}_-)^{-1}M_*(\widehat{\Phi}_-KP_-^{-1})_*(\widehat{\Phi}_-K)^{-1}\widetilde{R}_1 \times \\
& \times [(\widehat{\Phi}_-K)^{-1}(\widehat{\Phi}_-KP_-^{-1})S'_{\widehat{\eta}_0\widehat{\eta}_0} - \widehat{\Phi}_-S'_{\widehat{\eta}_0\widehat{\varphi}}](\widetilde{D}_-)^{-1}. \tag{11.82}
\end{aligned}$$

В обозначениях (11.82) вариация (11.81) примет вид

$$\begin{aligned}
\delta \check{e}_- &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\widetilde{\Gamma}_-_* (\widetilde{\Gamma}_- F_{\widetilde{u}_-} \widetilde{D}_- + \widetilde{T}_-) \widetilde{D}_-_* \delta F_{\widetilde{u}_-*} + \\
& + \delta F_{\widetilde{u}_-} \widetilde{D}_- (\widetilde{D}_-_* F_{\widetilde{u}_-*} \widetilde{\Gamma}_-_* + \widetilde{T}_-)_* \widetilde{\Gamma}_-] ds,
\end{aligned}$$

условие тождественного равенства вариации (11.81) нулю будет таким

$$\widetilde{\Gamma}_- F_{\widetilde{u}_-} \widetilde{D}_- = -(\widetilde{T}_- + \widetilde{T}_-),$$

а алгоритм синтеза по исходным данным решаемой задачи оптимальной структуры  $\widehat{F}_{\widetilde{u}_-}$  представляется в виде уравнения

$$\widehat{F}_{\widetilde{u}_-} = -(\widetilde{\Gamma}_-)^{-1}(\widetilde{T}_- + \widetilde{T}_-)(\widetilde{D}_-)^{-1}. \tag{11.83}$$

Воспользовавшись уравнениями (11.75) и (11.76), учитывая матрицу (11.83), выражение, определяющее искомую оптимальную структуру  $\widehat{W}_-$  части регулятора в неустойчивом контуре системы стабилизации следует записать таким образом

$$\widehat{W}_- = (F_{\widetilde{u}_-})(F_{\widehat{x}_-})^{-1} \tag{11.84}$$

Итак, искомая оптимальная структура матрицы передаточных функций части регулятора неустойчивого контура системы стабилизации  $\widehat{W}_-$ , подверженная действию случайных возмущений, синтезирована.

### 11.3.2 Алгоритмы решения задач синтеза оптимальных структур $\bar{W}_+$ и $\bar{W}_+$ (устойчивые контуры)

Для решения задачи синтеза оптимальной структуры  $\bar{W}_+$  части регулятора в устойчивом контуре, парирующей детерминированные воздействия, необходимо составить уравнение вектора выходных сигналов  $\hat{r}_+$ , которое согласно схемы (рис. 11.4) имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{r}_+ &= (\hat{\Phi}_+ K)^{-1}(\hat{x}_+ - \hat{\Phi}_+ \hat{\varphi}) = (\hat{\Phi}_+ K)^{-1}[(\hat{\Phi}_+ K P_+^{-1})(M \hat{u}_+ + \hat{\eta}) - \hat{\Phi}_+ \hat{\varphi}] = \\ &= (\hat{\Phi}_+ K)^{-1}[(\hat{\Phi}_+ K P_+^{-1})(M F_{\bar{u}_+} + E_n) \hat{\eta} - \hat{\Phi}_+ \hat{\varphi}],\end{aligned}\quad (11.85)$$

где  $F_{\bar{u}_+}$  - матрица передаточных функций замкнутого контура от вектора входных детерминированных возмущений  $\hat{\eta}$  к вектору сигналов управления  $\bar{u}$ . Матрица  $F_{\bar{u}_+}$  связана с  $F_{\hat{x}_+}$  (матрицей передаточных функций от вектора  $\hat{\eta}$  к вектору  $\hat{x}_+$ ) уравнением вида

$$F_{\hat{x}_+} = (\hat{\Phi}_+ K P_+^{-1})(M F_{\bar{u}_+} + E_n). \quad (11.86)$$

Искомая матрица передаточных функций  $\bar{W}_+$  части регулятора в исследуемом контуре, как следует из уравнения

$$\hat{u}_+ = F_{\bar{u}_+} \hat{\eta} = \bar{W}_+ F_{\hat{x}_+} \hat{\eta},$$

определяется таким образом

$$\bar{W}_+ = (F_{\bar{u}_+})(F_{\hat{x}_+})^{-1}. \quad (11.87)$$

Необходимо оценить также вид разности векторов  $\hat{r}_+$  и  $\bar{r}_0$  (ошибки стабилизации), т.е. достигаемой и заданной программ движения объекта

$$\bar{\varepsilon}_0 = \hat{r}_+ - \bar{r}_0 = (\hat{\Phi}_+ K)^{-1}(\hat{\Phi}_+ K P_+^{-1})(M F_{\bar{u}_+} + E_n) \hat{\eta} - [K^\# \hat{\varphi} + \bar{r}_0]. \quad (11.88)$$

Как функционал качества стабилизации объекта исследуемым устойчивым контуром системы возможен такой

$$\bar{E}_+ = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr (\bar{\varepsilon}_0 \bar{\varepsilon}_0^* \bar{R}_2 + \bar{u}_+ \bar{u}_+^* \bar{C}_2) ds. \quad (11.89)$$

Подставив в функционал (11.89) уравнения (11.88) и

$$\hat{u}_+ = F_{\bar{u}_+} \hat{\eta}$$

можно переписать его в следующем виде

$$\begin{aligned} \bar{E}_+ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (\{(\widehat{\Phi}_+ K)^{-1}(\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})(M F_{\bar{u}_+} + E_n)\hat{\eta} - [K^\# \widehat{\varphi} + \bar{r}_0]\} \times \\ &\times \{\hat{\eta}_*(F_{\bar{u}_+} M_* + E_n)(\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}_- K)_*^{-1} - [\widehat{\varphi}_* K_*^\# + \bar{r}_{0*}]\} \bar{R}_2 + \\ &+ F_{\bar{u}_+} \hat{\eta} \hat{\eta}_* F_{\bar{u}_+} \bar{C}_2) ds. \end{aligned} \quad (11.90)$$

По методу Винера-Колмогорова, решая задачу синтеза оптимальной структуры матрицы  $F_{\bar{u}_+}$ , вначале необходимо определить первую вариацию функционала (11.90), а затем условие тождественного равенства ее нулю на классе устойчивых и физически реализуемых матриц  $F_{\bar{u}_+}$ .

Первая вариация функционала (11.90) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta \bar{E}_+ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} (\{[M_*(\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}_+ K)_*^{-1} \bar{R}_2 (\widehat{\Phi}_+ K)^{-1} (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1}) M + \bar{C}_2] \times \\ &\times F_{\bar{u}_+} \hat{\eta} \hat{\eta}_* + M_*(\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}_+ K)_*^{-1} \bar{R}_2 (\widehat{\Phi}_+ K)^{-1} (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1}) \hat{\eta} \hat{\eta}_* - \\ &- M_*(\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}_+ K)_*^{-1} \bar{R}_2 [K^\# \widehat{\varphi} \hat{\eta}_* + \bar{r}_0 \hat{\eta}_*]\} \delta F_{\bar{u}_+} + \\ &+ \delta F_{\bar{u}_+} \{\hat{\eta} \hat{\eta}_* F_{\bar{u}_+} [M_*(\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}_+ K)_*^{-1} \bar{R}_2 (\widehat{\Phi}_+ K)^{-1} (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1}) M + \bar{C}_2] + \\ &+ \hat{\eta} \hat{\eta}_* (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}_+ K)_*^{-1} \bar{R}_2 (\widehat{\Phi}_+ K)^{-1} (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1}) M - \\ &- [\hat{\eta} \widehat{\varphi}_* K_*^\# + \hat{\eta} \bar{r}_{0*}] \bar{R}_2 (\widehat{\Phi}_+ K)^{-1} (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1}) M\}) ds. \end{aligned} \quad (11.91)$$

Необходим ввод таких обозначений

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_+ \bar{\Gamma}_+ &= M_*(\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}_+ K)_*^{-1} \bar{R}_2 (\widehat{\Phi}_+ K)^{-1} (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1}) M + \bar{C}_2; \bar{D}_+ \bar{D}_+ = \hat{\eta} \hat{\eta}_*; \\ \bar{T}_+ &= \bar{T}_{+0} + \bar{T}_{++} + \bar{T}_{+-} = (\bar{\Gamma}_+)^{-1} M_*(\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_*(\widehat{\Phi}_+ K)_*^{-1} \bar{R}_2 \times \\ &\times [(\widehat{\Phi}_+ K)^{-1} (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1}) \hat{\eta} \hat{\eta}_* - K^\# \widehat{\varphi} \hat{\eta}_* + \bar{r}_0 \hat{\eta}_*] (\bar{D}_+)^{-1}. \end{aligned} \quad (11.92)$$

С учетом обозначений (11.92) вариация (11.91) получится такой

$$\begin{aligned} \delta \bar{E}_+ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\bar{\Gamma}_+ (\bar{\Gamma}_+ F_{\bar{u}_+} \bar{D}_+ + \bar{T}_+) \bar{D}_+ \delta F_{\bar{u}_+} + \\ &+ \delta F_{\bar{u}_+} \bar{D}_+ (\bar{D}_+ F_{\bar{u}_+} \bar{\Gamma}_+ + \bar{T}_+) \bar{\Gamma}_+] ds, \end{aligned}$$

условие тождественного равенства вариации (11.90) нулю представляется матричным уравнением

$$\bar{\Gamma}_+ F_{\bar{u}_+} \bar{D}_+ = -(\bar{T}_{+0} + \bar{T}_{++}),$$

а алгоритм синтеза по исходным данным оптимальной структуры матрицы  $\hat{F}_{\bar{u}_+}$  имеет вид

$$\hat{F}_{\bar{u}_-} = -(\bar{\Gamma}_+)^{-1}(\bar{T}_{+0} + \bar{T}_{++})(\bar{D}_+)^{-1}. \quad (11.93)$$

Воспользовавшись уравнением (11.86) в виде, а также уравнением (11.87), можно определять оптимальную структуру матрицы передаточных функций части регулятора в устойчивом контуре системы  $\bar{W}_+$  так

$$\hat{W}_+ = (\hat{F}_{\bar{u}_+})(\hat{F}_{\hat{x}_+})^{-1}. \quad (11.94)$$

Таким образом, оптимальная структура  $\hat{W}_+$  части регулятора в устойчивом контуре системы стабилизации при детерминированных воздействиях определена.

Для решения задачи синтеза оптимальной структуры  $\tilde{W}_+$  части регулятора, парирующей случайные возмущения, необходимо вначале составить уравнение вектора выходных сигналов  $\hat{r}_+$ , которое согласно схеме (рис.11.4) имеет вид

$$\hat{r}_+ = (\hat{\Phi}_+K)^{-1}[(\hat{\Phi}_+KP_+^{-1})(MF_{\hat{u}_+} + E_n)\hat{\eta}_0 - \hat{\Phi}_+\hat{\phi}]. \quad (11.95)$$

Здесь функция  $F_{\hat{u}_+}$  - матрица передаточных функций замкнутого контура от вектора входных случайных возмущений  $\hat{\eta}_0$  к вектору сигналов управления  $\hat{u}_+$ , как части вектора  $\hat{u}_+$ .

Матрица  $F_{\hat{u}_+}$  связана с матрицей передаточных функций  $F_{\hat{x}_+}$  от вектора  $\hat{\eta}_0$  к вектору  $\hat{x}_+$  уравнением вида

$$F_{\hat{x}_+} = (\hat{\Phi}_+KP_+^{-1})(MF_{\hat{u}_+} + E_n) \quad (11.96)$$

Матрица  $F_{\hat{u}_+}$  связана с матрицами  $F_{\hat{x}_+}$  и  $\tilde{W}_+$  (искомой структурой матрицы передаточных функций части регулятора в исследуемом замкнутом контуре стабилизации) таким выражением

$$\hat{u}_+ = F_{\hat{u}_+}\hat{\eta}_0 = \tilde{W}_+F_{\hat{x}_+}\hat{\eta}_0 \text{ или } F_{\hat{u}_+} = \tilde{W}_+F_{\hat{x}_+}. \quad (11.97)$$

Вектор  $\hat{r}_+$  (11.95) является одновременно и вектором сигналов ошибок стабилизации в исследуемом контуре.

Как функционал качества стабилизации случайных сигналов исследуемым контуром стабилизации следует использовать выражение вида

$$\tilde{e}_- = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr(S'_{\hat{r}_+ \hat{r}_+} \tilde{R}_2 + S'_{\hat{u}_+ \hat{u}_+} \tilde{C}_2) ds. \quad (11.98)$$

Согласно теореме Винера-Хинчина транспонированную матрицу спектральных плоскостей вектора  $\hat{r}_+$  (11.95) следует определить таким образом

$$\begin{aligned} S'_{\hat{r}_+ \hat{r}_+} = & (\widehat{\Phi}_+ K)^{-1} [(\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})(M F_{\hat{u}_+} + E_n) S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} (F_{\hat{u}_+} M_* + E_n) (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_* - \\ & - (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})(M F_{\hat{u}_+} + E_n) S'_{\hat{\varphi} \hat{\eta}_0} \widehat{\Phi}_{+*} - \widehat{\Phi}_+ S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\varphi}} (F_{\hat{u}_+} M_* + E_n) (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_* + \\ & + \widehat{\Phi}_+ S'_{\hat{\varphi} \hat{\varphi}} \widehat{\Phi}_{+*}] (\widehat{\Phi}_+ K)^{-1}, \end{aligned} \quad (11.99)$$

где с учетом уравнения (11.3) матрица  $S'_{\hat{\varphi} \hat{\eta}_0} = P_+ K^\# S'_{\hat{\varphi} \hat{\varphi}}$ , матрица  $S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\varphi}} = S'_{\hat{\varphi} \hat{\varphi}} K^\# P_{+*}$ .

В соответствии с уравнением (11.97) транспонированная матрица  $S'_{\hat{u}_+ \hat{u}_+}$  будет такой

$$S'_{\hat{u}_+ \hat{u}_+} = F_{\hat{u}_+} S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} F_{\hat{u}_+}^* \quad (11.100)$$

Подстановка выражений (11.99) и (11.100) в функционал (11.97) позволяет переписать последний в виде

$$\begin{aligned} \tilde{e}_+ = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ (\widehat{\Phi}_+ K)^{-1} [(\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})(M F_{\hat{u}_+} + E_n) S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} \times \\ & \times (F_{\hat{u}_+} M_* + E_n) (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_* - (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})(M F_{\hat{u}_+} + E_n) P_+ K^\# S'_{\hat{\varphi} \hat{\varphi}} \widehat{\Phi}_{+*} - \\ & - \widehat{\Phi}_+ S'_{\hat{\varphi} \hat{\varphi}} K^\# P_{+*} (F_{\hat{u}_+} M_* + E_n) (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_* + \widehat{\Phi}_+ S'_{\hat{\varphi} \hat{\varphi}} \widehat{\Phi}_{+*}] (\widehat{\Phi}_+ K)^{-1} \tilde{R}_2 + \\ & + F_{\hat{u}_+} S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} F_{\hat{u}_+}^* \tilde{C}_2 \} ds. \end{aligned} \quad (11.101)$$

Задача синтеза оптимальной структуры матрицы  $F_{\hat{u}_+}$  решается методом Винера-Колмогорова.

Первая вариация функционала (11.101) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta \tilde{e}_+ = & \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ ( \{ [M_* (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_* (\widehat{\Phi}_+ K)^{-1} \tilde{R}_2 (\widehat{\Phi}_+ K)^{-1} (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1}) M + \tilde{C}_2 ] \times \\ & \times F_{\hat{u}_+} S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} + M_* (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_* (\widehat{\Phi}_+ K)^{-1} \tilde{R}_2 (\widehat{\Phi}_+ K)^{-1} (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1}) S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} - \\ & - M_* (\widehat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_* (\widehat{\Phi}_+ K)^{-1} \tilde{R}_2 (\widehat{\Phi}_+ K)^{-1} \widehat{\Phi}_+ S'_{\hat{\varphi} \hat{\varphi}} K^\# P_{+*} \} \delta F_{\hat{u}_+} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\delta F_{\tilde{u}_+} \{S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} F_{\tilde{u}_+} [M_*(\hat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_*(\hat{\Phi}_+ K)^{-1} \tilde{R}_2(\hat{\Phi}_+ K)^{-1}(\hat{\Phi}_+ K P_+^{-1})M + \tilde{C}_2] + \\
& +S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0} (\hat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_*(\hat{\Phi}_+ K)^{-1} \tilde{R}_2(\hat{\Phi}_+ K)^{-1}(\hat{\Phi}_+ K P_+^{-1})M - \\
& -P_+ K^\# S'_{\hat{\varphi} \hat{\varphi}} \hat{\Phi}_{+*} (\hat{\Phi}_+ K)^{-1} \tilde{R}_2(\hat{\Phi}_+ K)^{-1}(\hat{\Phi}_+ K P_+^{-1})M\} ds. \tag{11.102}
\end{aligned}$$

Необходимо ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{+*} \tilde{\Gamma}_+ &= M_*(\hat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_*(\hat{\Phi}_+ K)^{-1} \tilde{R}_2(\hat{\Phi}_+ K)^{-1}(\hat{\Phi}_+ K P_+^{-1})M + \tilde{C}_2; \tilde{D}_+ \tilde{D}_{+*} = S'_{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_0}; \\
\tilde{T}_+ &= \tilde{T}_{+0} + \tilde{T}_{++} + \tilde{T}_{+-} = (\tilde{\Gamma}_{+*})^{-1} M_*(\hat{\Phi}_+ K P_+^{-1})_*(\hat{\Phi}_+ K)^{-1} \tilde{R}_2(\hat{\Phi}_+ K)^{-1} \times \\
& \times [(\hat{\Phi}_+ K P_+^{-1}) \tilde{D}_+ - \hat{\Phi}_+ S'_{\hat{\varphi} \hat{\varphi}} K^\# P_{+*}]. \tag{11.103}
\end{aligned}$$

С учетом обозначений (11.103) вариацию (11.102) следует переписать так

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{e}_+ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\tilde{\Gamma}_{+*} (\tilde{\Gamma}_+ F_{\tilde{u}_+} \tilde{D}_+ + \tilde{T}_+) \tilde{D}_{+*} \delta F_{\tilde{u}_+} + \\
& + \delta F_{\tilde{u}_+} \tilde{D}_+ (\tilde{D}_{+*} F_{\tilde{u}_+} \tilde{\Gamma}_{+*} + \tilde{T}_{+*}) \tilde{\Gamma}_+] ds,
\end{aligned}$$

условие тождественного равенства вариации нулю имеет вид

$$\tilde{\Gamma}_+ F_{\tilde{u}_+} \tilde{D}_+ = -(\tilde{T}_{+0} + \tilde{T}_{++}),$$

а алгоритм синтеза оптимальной структуры устойчивой и физически реализуемой матрицы  $\hat{F}_{\tilde{u}_+}$  следует записать так

$$\hat{F}_{\tilde{u}_+} = -(\tilde{\Gamma}_+)^{-1} (\tilde{T}_{+0} + \tilde{T}_{++}) (\tilde{D}_+)^{-1}. \tag{11.104}$$

Используя уравнение типа (11.96) и (11.97) оптимальную структуру матрицы передаточных функций части регулятора  $\hat{W}_+$  в исследуемом контуре стабилизации следует записать так

$$\hat{W}_+ = (F_{\tilde{u}_+}) (F_{\hat{x}_+})^{-1}. \tag{11.105}$$

Таким образом, поставленная задача синтеза оптимальной структуры части регулятора  $\hat{W}_+$  в устойчивом контуре стабилизации объекта, подверженного случайным воздействиям решена. Этой стадией решений заканчивается поставленная выше задача синтеза оптимальных частей регулятора в устойчивом и неустойчивом контурах исследуемой системы стохастической стабилизации.

По результатам решения задач синтеза оптимальных структур в исследованной системе стохастического управления возможно сделать следующие выводы

- результаты, достигаемые при решении задачи синтеза оптимальной структуры части регулятора конкретного контура управления (устойчивого или неустойчивого, парирующего детерминированные и стационарные случайные воздействия) строго гарантированы лишь при автономной работе исследуемого канала;

- эффективное и отлаженное оптимальное управление исследуемой системой, с помощью которого можно получать представленные в рассматриваемой главе монографии результаты, достигается лишь при управлении линейным объектом или в режимах жесткой стабилизации объекта на заданной детерминированной программе движения;

- рассмотренные иллюстративные примеры синтеза управления неустойчивыми каналами исследуемой системы показывают, что, как правило, выходные оптимальные сигналы указанных каналов также являются неустойчивыми.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

1. Из-за отсутствия простых и удобных в инженерной практике методов и алгоритмов синтеза оптимальных структур систем стабилизации или управления программным движением таких динамических объектов, как летательный аппарат, надводное и подводное судно, различные имитаторы движений, некоторые бортовые функциональные комплексы подвижных объектов, другие сложные динамические системы, а также достоверной информации о моделях динамики звеньев, сигналов и воздействий в этих системах, существующие регуляторы движения указанных объектов, как правило, не являются оптимальными. Указанная причина ведет к снижению достижимых уровней безопасности и

эффективности движений объектов стабилизации или управления, потери конкурентоспособности управляемых объектов.

2. При наличии удобных в практике методов и алгоритмов оптимальных систем стохастических стабилизации или управления возможно предварительное динамическое проектирование указанных систем. При положительном заключении о качестве будущей системы по результатам ее динамического проектирования, появляется возможность приступить к базовому проектированию конкурентоспособной системы.

3. Указанные выше ситуации, а также факты изменчивости моделей динамики исследуемых подвижных объектов и их элементов в процессе их длительной эксплуатации ставят на повестку дня необходимость систематической динамической аттестации как самих объектов, так и их бортовых информационных комплексов в условиях, близких к реальным эксплуатационным. Сравнительная простота и прозрачность предложенных в монографии методов и алгоритмов синтеза и наблюдения позволяют использовать последние в качестве теоретической базы при проектировании оптимальных систем стабилизации или управления ответственными подвижными объектами.

4. Предложенные алгоритмы структурной идентификации моделей динамики объектов и их элементов в реальных эксплуатационных режимах их действия, имеют весьма большую эффективность. По результатам структурной идентификации возможно использовать для коррекции исследуемых изменяемых систем известные методы оптимизации параметров управления.

5. Предложенные в монографии алгоритмы многомерной фильтрации и комплексирования могут составить основу создания конкурентоспособных по качеству бортовых информационно-измерительных комплексов подвижных объектов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзенберг А.Е., Сухоребрый В.Г. Проектирование систем стабилизации носителей космических аппаратов. – М. Машиностроение, 1986. – 224 с.
2. Ажогин В.В., Костюк В.И. Оптимальные системы цифрового управления технологическими процессами. – К. Техніка, 1982. – 175 с.
3. Азарсков В.Н., Блохин Л.Н. Об одной задаче аналитического конструирования регуляторов. – Кибернетика и вычислительная техника. – К. Наук. думка, 1981. – Вып.51. – С. 59-61.
4. Азарсков В.Н., Блохин Л.Н. К вопросу оптимизации точности тренажеров с системой подвижности // Эргономические вопросы тренировки и подготовки операторов. – К. КИИГА, 1983. – С. 68-72.
5. Азарсков В.Н., Блохин Л.Н., Житецкий Л.С., КуССуль Н.Н. Робастные методы оценивания, идентификации и адаптивного управления. – К. НАУ. 2004. – 498 с.
6. Азарсков В.Н., Блохин Л.Н. Постановка, методика и некоторые результаты решения проблемы идентификации модели динамики пилота при полуавтоматическом управлении полетом // Кибернетика и вычислительная техника. – 2003. – Вып. 140. – С. 12-22
7. Азарсков В.Н., Блохин Л.Н., Житецкий Л.С. Методология конструирования оптимальных систем стохастической стабилизации, монография. – К. НАУ. – 2006. – 438 с.
8. Александров Н.Д. Перспективные системы автоматического управления полетом // Информационные материалы научного совета АН СССР по кибернетике. – ВИНТИ. – 1970. - №7(44). – С. 20-28
9. Алиев Ф.А., Ларин В.Б., Науменко К.И., Сунцев В.Н. Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления. – Наук. думка, 1978. – 327 с.
10. Алиев Ф.А., Ларин В.Б. Синтез оптимальных импульсных регуляторов при идеальном измерении координат объекта // Навигационные гироскопические системы. – К. Ин-т математики АН УССР, 1973. – с. 5-28.
11. Алиев Ф.А., Ларин В.Б. Синтез дискретных инвариантных во времени систем стабилизации // Дискретные системы управления. – К. Ин-т кибернетики АН УССР, 1974. – с. 3-22
12. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. – М. Наука, 1971. – 424 с.
13. Батков А.М и др. Методы оптимизации в статистических задачах управления. – М. Машиностроение, 1974. – 240 с.
14. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. – М. Наука, 1964.
15. Блохин Л.Н. Аналитическое конструирование системы стабилизации линейного объекта // Электронное моделирование. – К. Наук. думка, 1977. – С. 120-128

16. Блохин Л.Н. Некоторые проблемные вопросы создания подвижных имитаторов полета Сб. трудов Гагаринских чтений. – М. 1985.
17. Блохин Л.Н., Кадышев И.К., Трифонов-Богданов П.И. Основы навигации и пилотажно-навигационные комплексы Учебник для вузов ГА/ Под ред. Блохина Л.Н. – М. Воздушный транспорт, 1993. – 244 с.
18. Блохин Л.Н., Осадчий С.И. Аналитическое конструирование систем стабилизации ЛА и оценка эффективности результатов на примере канала стабилизации вертолета. Навигация и управление движением механических систем. – К. Издательство ИМ АН УССР, 1980. – С. 107-121
19. Блохин Л.Н., Казак В.Н. Синтез оптимальной робастной системы стабилизации объекта с отказывающимися элементами // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – Вып. 3. – С. 151-158.
20. Блохин Л.Н. Модернизированная многомерная винеровская фильтрация // Кибернетика и вычислительная техника. – 2002. – Вып.136. – С. 77-88.
21. Блохин Л.Н., Житецкий Л.С. Нелинейные оптимальные системы стохастической стабилизации // Кибернетика и вычислительная техника. – 2003. – Вып. 139. – С. 12-23.
22. Блохин Л.Н., Билак Н.В. Новый функционал и задача синтеза робастных оптимальных систем стохастической стабилизации // Кибернетика и вычислительная техника. – 2004. – Вып. 144. – С. 83-98.
23. Блохін Л.М. Найважливіша науково-організаційна проблема вітчизняної авіації // Вісник ПНЦ ТАУ. – 1999. – Вип.2. – С. 5-6
24. Блохин Л.Н. Оптимальные системы стабилизации. – К. Техніка. – 1982. – 143 с.
25. Блохін Л.М., Буриченко Н.Ю. Статистична динаміка систем управління. – Підручник для ВНЗ. – К. НАУ, - 2003. – 208 с.
26. Блохін Л.М., Білак Н.В. та інші. Статистична динаміка систем управління. – Підручник для ВНЗ. – К. НАУ. – 2014. – 299 с.
27. Богуславский И.А. Методы навигации и управления при неполной статистической информации. – М. Машиностроение, 1970. – 256 с.
28. Боднер В.А. Системы управления летательными аппаратами. – М. Машиностроение, 1973. – 594 с.
29. Брайсон А., Хо-ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация оценки управления. – М. Мир, 1972. – 544 с.
30. Гантмахер Ф.Ф. Теория матриц. – М. Наука, 1967. – 575 с.
31. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М. Наука, 1977. – 568 с.
32. Доброленский Ю.П. Динамика полета в неспокойной атмосфере. – М. Машиностроение, 1969. – 256 с.
33. Евланов Л.Г., Константинов В.М. Системы со случайными параметрами. – М. Наука, 1976. – 586 с.
34. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы. – М. Мир, 1977. – 650 с.

35. Колмогоров А.Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. – Изв. АН СССР, 1941, Серия матем. №1, - С. 3-14.
36. Кузков Н.Т. Системы стабилизации летательных аппаратов. – М. Высшая шк., 1976. – 304 с.
37. Ларин В.Б. О временном и спектральном методах синтеза оптимальных линейных систем // Кибернетика и вычислительная техника. – 1975. – Вып.27. – С. 87-92.
38. Лебедев В.В. Стабилизация летательного аппарата беспилотной инерциальной системой. – М. Машиностроение, 1977. – 144. с.
39. Малышев В.В. Программирование оптимального управления летательными аппаратами. – М. МАИ, 1982.
40. Михалёв И.А., Окаемов Б.Н., Чикулаев М.С. Системы автоматического управления самолетом. – М. Машиностроение, 1987. – 240 с.
41. Небылов А.В. Гарантирование точности управления. – М. Наука, 1998. – 304 с.
42. Ривкин С.С. Стабилизация измерительных устройств на качающемся основании. – М. Наука, 1978. – 320 с.
43. Саридис Дж. Самоорганизующиеся статистические системы управления. – М. Наука, 1980. – 400 с.
44. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. – М. Наука, 1974 – 330 с.
45. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К.Т. Леондеса – М. Мир, 1980. – 407 с.
46. Челпанов И.Б. Оптимальная обработка сигналов в навигационных системах. – М. Наука, 1967. – 392 с.
47. Якубович В.А. Оптимизация и инвариантность линейных стационарных систем управления // Автоматика и телемеханика. – 1984. – вып. 8.
48. Davis M.C. Factoring the Spectral Matrix. – IEEE Trans. Auto Cont., 1963, AG-8, №4. – p. 296-305.
49. Saridis G.N., Stein G. Stochastic Approximation Algorithms for Linear Discrete – Time System Identification. – IEEE Trans. Auto. Cont., 1968, AC – 13(5). – p. 515-523.
50. Klein V. Structure and Parameters of an Airplane from Pre-and-Post Stall Flight Data. – AJAA Pap. NASA, Langley Fesearch Centre Hampton V.A., 1981, №1876. – p. 10.

Монографія

**Блохін Леонід Миколайович,  
Осадчий Сергій Іванович,  
Дідик Олександр Костянтинович,  
Рудюк Григорій Іванович**

**Технології конструювання  
сучасних конкурентоспроможних комплексів  
управління стохастичним рухом об'єктів**

Російською мовою

Під редакцією Блохіна Л.М.  
Технічний редактор Лисенко В.Ф.

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. лист. 16,7. Обл. видав. лист. 8,69. Тираж 300. Зам. № 123

Видавець та виготовлювач СПД ФО Лисенко В. Ф.  
25029, м. Кіровоград, вул. Пацаєва, 14, корп. 1, кв. 101. Тел.: (0522) 322-326  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: серія ДК № 3904 від 22.10.2010.