

prototypes of the new bearing system. Computer modeling allows us to simulate various scenarios of the loader's load-bearing system behavior during the work process in a short time. In this way, we get results that can be used to identify design weaknesses and make changes at the design stage, and we save material, time, and money for the production of the first samples of new equipment.

This method of computer simulation of machine operating processes allows a complete assessment of the behavior of the supporting system and other elements of the machine and draw conclusions about design flaws in a short time, without manufacturing a metal product and conducting full-scale tests.

In addition, it is necessary to obtain a general understanding of the loads in various situations, for example, when the center of the bucket comes into contact with an obstacle, when the angle of the bucket is changed, when moving a full bucket to a dump point, when driving the loader on an uneven surface, when driving on a slope, and others work processes. Further analysis should be carried out to obtain an overall picture of the loads in various situations, such as when moving the forklift to the unloading point, when moving the forklift on uneven ground, when driving on a slope and during other work processes. After obtaining the overall picture, you can begin to design a supporting system with optimal parameters.

**loading, CAD, CAE, Solidworks, Ansys, bearing system, dynamics, hinged frame, strength**

*Одержано (Received) 12.10.2024*

*Прорецензовано (Reviewed) 20.10.2024*

*Прийнято до друку (Approved) 28.10.2024*

УДК 621.664

DOI: [https://doi.org/10.32515/2664-262X.2024.10\(41\).1.119-132](https://doi.org/10.32515/2664-262X.2024.10(41).1.119-132)

**Ю.В. Кулешков**, проф., д-р. техн. наук, **Т.В. Руденко**, доц., канд. техн. наук, **М.В. Красота**, доц., канд. техн. наук, **Є.Ю. Штомпель**, асп.

*Центральноукраїнський національний технічний університет, м. Кропивницький, Україна*

*e-mail: rudenkotv@kntu.kr.ua*

## Вдосконалення математичної моделі зубчатого зачеплення шестеренного насосу мобільної техніки

У даній статті пропонується вдосконалена математична модель роботи зубчатого зачеплення шестеренних гідромашин, яка базується на тому, що швидкості обертання шестерень і радіуси, що з'єднують осі обертання з точкою зачеплення зубів, є різними. Це пояснюється тим, що зуби шестерень, маючи евольвентний профіль, мають певне проковзування при русі один по одному.

Врахування цього фактору є важливим кроком у розвитку теорії шестеренних гідромашин. Це дозволить створити математичні моделі, які зможуть пояснити такі специфічні явища, як пульсація тиску і подачі, рух рідини у відсіченій порожнині, характер зміни навантаження на підшипники насоса та мотора, а також пульсацію крутного моменту в шестеренних гідромоторах. Цей новий підхід може суттєво вплинути на розробку більш ефективних і надійних гідромашин.

**евольвентні профілі зубів, ковзання евольвентних поверхонь, шестеренний насос**

**Постановка проблеми.** Широке застосування шестеренних гідромашин в гідравлічних системах пояснюється простотою і компактністю їх конструкції, надійністю, малою трудомісткістю і низькою собівартістю виготовлення, зручністю обслуговування, можливістю безпосереднього їх з'єднання з приводними механізмами. Подальше підвищення технічного рівня шестеренних гідромашин неможливе без подальших теоретичних та експериментальних досліджень. А тому, дана робота, присвячена одному з недостатньо вивчених теоретичних аспектів функціонування гідромашин, безсумнівно, є актуальною.

© Ю.В. Кулешков, Т.В. Руденко, М.В. Красота, Є.Ю. Штомпель, 2024

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Незважаючи на багаторічну історію розвитку шестеренних гідромашин та масу публікацій з цієї проблеми, досі залишаються не поясненими ряд особливостей їхньої роботи. Дослідники досі не можуть пояснити і встановити причинно - наслідковий зв'язок ряду особливостей роботи шестеренних гідромашин. До цих особливостей слід віднести: утворення і зміну геометричних параметрів відсіченої порожнини, зменшення робочого об'єму в порівнянні з очікуваним значенням, причини виникнення пульсації подачі і тиску, пульсуючу зміну крутного моменту шестеренного гідромотора.

Пульсація потоку рідини, що подається насосом за один оберт, відбувається з частотою, що дорівнює кількості зубів ведучої шестерні. Пульсація подачі повторюється при повороті шестерень на кут, що відповідає одному кутовому кроку, а амплітуда пульсації залежить від кута зачеплення та числа зубів.

У дисертаційній роботі Суреша Бебі Касарагадда, виконаної у Вищій школі Університету Міссурі-Колумбія (США) під керівництвом доктора Noah D. Manring [2] приділено велику увагу теоретичним дослідженням пульсації подачі робочої рідини шестеренного насоса становить  $\sigma_{np} = 63,0\%$ . Із збільшенням числа зубів ведучої шестерні пульсація зменшується, досягаючи значення  $\sigma_{np} = 28,0\%$ .

Публікація Го Яо Хуана та Чі Чі Чена, які представляють Інженерно-механічний факультет, Чунг Хуа університету № 707 у м. Сінчжу, Тайвань, присвячена кінематичній оптимізації подачі шестеренного насоса зовнішнього зачеплення. Але багато уваги приділено також дослідженню пульсації подачі. Так величина пульсації подачі від кута повороту шестерень та від коефіцієнта висоти головки зуба становить [3].

Особливий інтерес представляють результати досліджень пульсації подачі, представлені Paolo Casoli, Andrea Vacca та Germano Franzoni у статті [4, 5]. Особливістю цієї статті є ретельний аналіз одержаних результатів теоретичних досліджень та їх перевірка експериментальними дослідженнями. Особливістю теоретичних досліджень стало те, що математичну модель процесу подачі моделювали в спеціальному програмному середовищі. Після чого отримані результати перевіряли експериментально. До недоліків відомих теоретичних досліджень слід віднести той факт, що в жодному з цих джерел не зроблено спроби пояснити причини або механізм пульсації подачі та тиску робочої рідини в шестеренному насосі. Винятком з цього з'явилися роботи автора [6, 7], в яких явище пульсації пояснюється тим, що сума квадратів радіусів, що з'єднують центри обертання шестерень з точкою зачеплення зубів шестерень на лінії зачеплення, змінюється за параболічною залежністю від кута повороту шестерень.

На даний момент у літературних джерелах не враховувалася особливість роботи евольвентного зубчастого зачеплення, яка полягає в тому, що між евольвентами профілями зубів шестерень відбувається ковзання на всьому протязі зачеплення. І, лише у єдиній точці зубчастого зачеплення – у полюсі - ковзання переходить у кочення [8].

Результати досліджень, викладені у статті, мають стати базовими для подальшого розвитку теорії шестеренних гідромашин. Основні напрями цих теоретичних досліджень такі:

- дослідження характеру подачі з урахуванням вищевикладених особливостей у роботі шестеренних гідромашин;
- дослідження особливостей зміни відсіченої порожнини та гідродинамічних процесів, що відбуваються в ній;
- дослідження пульсації подачі та тиску;

- дослідження динаміки навантаження на підшипники насоса та мотора;
- дослідження динаміки крутного моменту, що розвивається шестеренний гідромотор;
- дослідження динаміки потужності, що розвивається шестеренним гідромотором.

**Постановка завдання.** Метою даного дослідження є:

- встановлення взаємозв'язку між кутом повороту ведучої шестерні  $\varphi_1$  і кутами повороту  $\chi_1, \chi_2$ , радіусів  $\rho_1, \rho_2$ , що з'єднують осі обертання шестерень  $O_1$  і  $O_2$  з точкою зачеплення  $T$  з урахуванням просковзування евольвентних профілів зубів шестерень, один щодо одного;
- визначення закономірності зміни довжин радіусів  $\rho_1, \rho_2$ , від параметра  $\varphi_1$ .

**Викладення основного матеріалу.** Мета дослідження, полягає у встановленні згаданих вище аналітичних залежностей, була досягнута шляхом використання традиційного математичного апарату: геометрії, тригонометрії та теорії евольвентного зубчастого зачеплення.

В якості геометричної інтерпретації зубчастого зачеплення представимо зуби шестерень у вигляді системи пластин  $O_1A_1, O_2A_2, O_1T$  та  $O_2T$  (рис. 1 - 4).

На рис. 1 представлена схема зубчастого зачеплення шестеренної гідромашини в момент вступу в зачеплення нової пари зубів, на рис. 2 - схема зубчастого зачеплення в поточний момент часу, на рис. 3 - схема зубчастого зачеплення в момент, коли зачеплення зубів відбувається в полюсі, на рис. 4 - схема зубчастого зачеплення у момент виходу першої пари зубів із зачеплення.

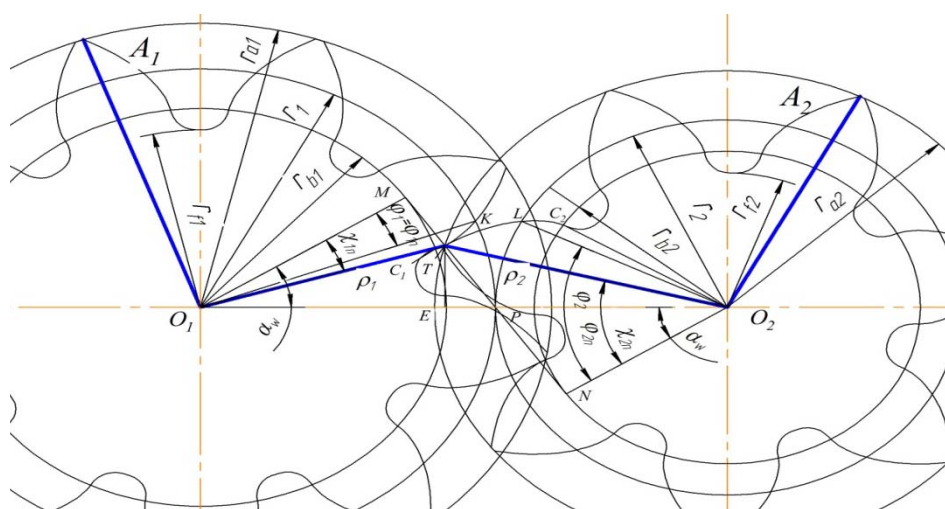


Рисунок 1 – Схема початку зачеплення пари зубів

*Джерело: розроблено авторами*

При розробці запропонованої математичної моделі шестеренної гідромашини за початок відліку приймемо радіус  $OM$  для визначення кутів повороту елементів провідної шестерні,  $ON$  радіус веденої шестерні.

Для ведучої шестерні за центр її обертання приймемо точку  $O_1$ . При цьому, за додатній напрямок приймемо обертання радіусу за годинниковою стрілкою.

Для веденої шестерні за центр її обертання приймемо точку  $O_2$ , при цьому, за додатній напрямок приймемо обертання радіусу проти годинникової стрілки.

Система відліку обрана таким чином, що кути повороту ведучої та веденої шестерень  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  від початку до кінця зубчатого зачеплення (рис. 1-4) будуть додатними, незважаючи на те, що шестерні обертаються в протилежні сторони. Це пояснюється тим, що об'єм робочої рідини є скалярною величиною і може бути тільки додатнім.

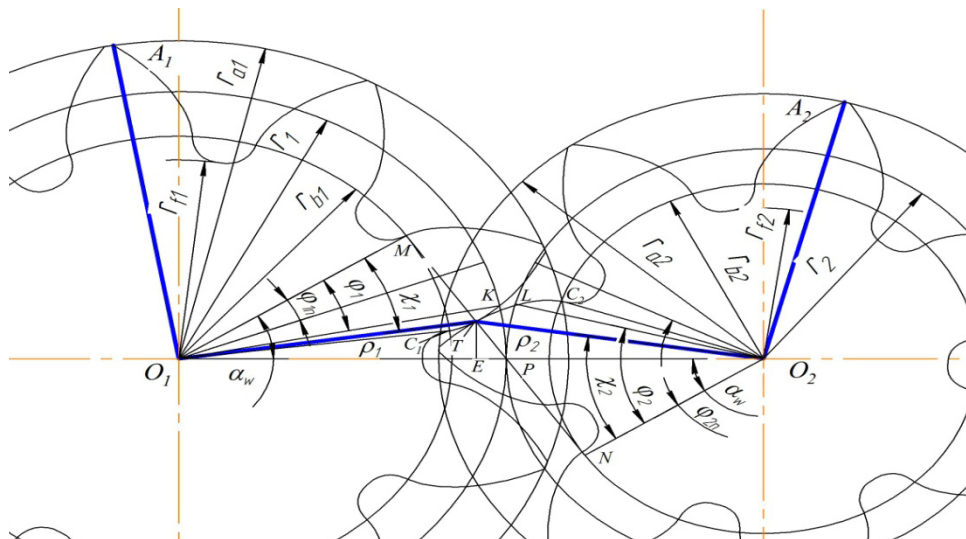


Рисунок 2 – Схема положення елементів зубчатого зачеплення в поточний момент часу  
Джерело: розроблено авторами

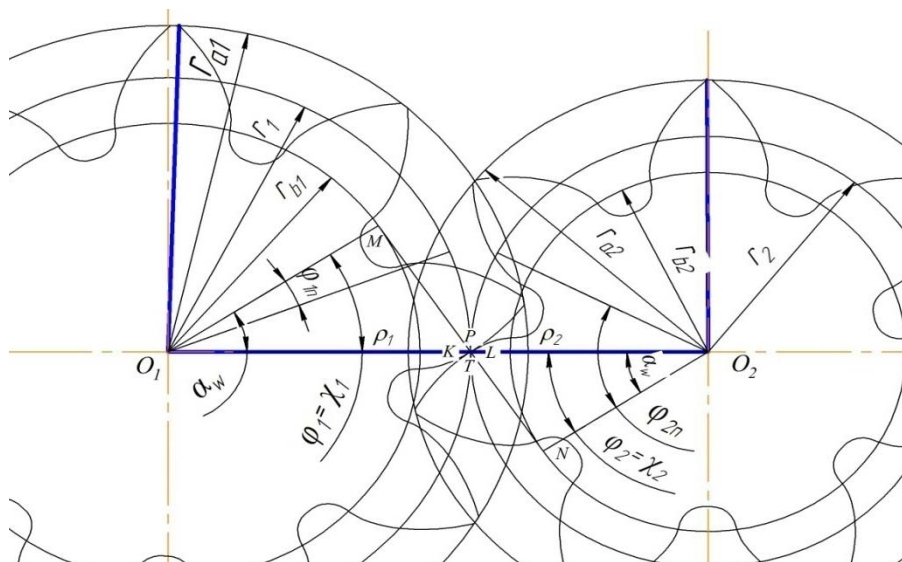


Рисунок 3 – Схема положення зубів полюсі зачеплення  
Джерело: розроблено авторами



$z_1, z_2$  - число зубів ведучої та веденої шестерні;

$r_1, r_2$  - радіуси початкових кіл ведучої і веденої шестерні;

$\omega_1, \omega_2$  - кутові швидкості обертання ведучої а веденої шестерні;

$n_1, n_2$  - частота обертання ведучої та веденої шестерні;

$\varphi_{1n}, \varphi_{2n}$  и  $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}$  - початкові і кінцеві кути повороту ведучої і веденої шестерні на початку і в кінці зачеплення, при відліку від радіусів  $OM$  - для ведучої  $ON$  – для веденої шестерні;

$\chi_{1n}, \chi_{2n}$  та  $\chi_{1k}, \chi_{2k}$  - початкові та кінцеві кути повороту радіусів  $O_1T = \rho_1$ ,  $O_2T = \rho_2$ , Проведених з центрів обертання шестерень  $O_1$  і  $O_2$  в поточну точку  $T$  зачеплення евольвентних профілів на лінії зачеплення.

Слід при цьому враховувати, що ведена шестерня обертається в протилежний бік щодо ведучої та кутові координати повороту веденої та ведучої шестерень мають різні точки відліку. На цьому ми зупинимося трохи згодом.

Далі, використовуючи схеми зубчатого зачеплення, представлені на рис. 1 – 4, покажемо відмінності у обертальному русі радіусів  $O_1K$  і  $O_2L$  та радіусів  $O_1T = \rho_1$  і  $O_2T = \rho_2$ . Як бачимо із рис. 1 – 4 радіуси  $O_1K$  і  $O_2L$ , безпосередньо пов'язані з початковим колом і рухаються разом із шестернями без проковзування. Радіуси ж  $O_1T = \rho_1$  і  $O_2T = \rho_2$ , пов'язані з точкою зачеплення і беруть участь у обертальному русі з проковзуванням евольвентних профілів шестерень. У цьому полягає відмінність у русі зазначених радіусів.

На рис. 1 представлено початок зубчастого зачеплення і радіус  $O_1K$  повернутий щодо радіуса  $O_1M$  на кут  $\varphi_{1n}$ , а радіус  $O_1T = \rho_1$  на кут  $\chi_{1n}$ . Відповідно для веденої шестерні радіус  $O_2L$  повернутий щодо радіуса  $O_2N$  на кут  $\varphi_{2n}$ , а радіус  $O_2T = \rho_2$  на кут  $\chi_{2n}$ . З рис.1 бачимо, що радіус  $O_1T = \rho_1$  у своєму обертанні випереджає радіус  $O_1K$  і різниця кутів їхнього повороту становить  $\chi_{1n} - \varphi_{1n}$ . Аналогічно і для веденої шестерні радіус  $O_2T = \rho_2$  у своєму обертанні випереджає радіус  $O_2L$  і різниця кутів їхнього повороту становить  $\chi_{2n} - \varphi_{2n}$ .

Простежуючи далі обертання цих радіусів із рис. 2 бачимо, що різниця кутів  $\chi_1 - \varphi_1$  та  $\chi_2 - \varphi_2$  скоротилася. А на рис. 3 бачимо момент, що точки  $K, T, L, T$ , одночасно прийшли в полюс зачеплення точку  $P$ . При цьому радіуси  $O_1K, O_1T = \rho_1$ , і радіуси  $O_2L, O_2T = \rho_2$  збіглися і лежать на міжцентровій лінії, а різниця кутів  $\chi_1 - \varphi_1 = 0$ ,  $\chi_2 - \varphi_2 = 0$ . Це говорить про те, що кутова швидкість обертання радіусів  $O_1K$  і  $O_2L$  більша кутової швидкості обертання радіусів  $O_1T = \rho_1$  і  $O_2T = \rho_2$ , що пояснюється, як зазначено вище, проковзуванням евольвентних профілів зубів шестерень. Ця тенденція зберігається і при подальшому обертанні шестерень, що наочно представлено на рис. 4.

Однак, вихідні передумови, полягають в тому, що кут повороту радіусів  $\rho_1$  і  $\rho_2$  жорстко пов'язаний з кутом повороту ведучої  $\varphi_1$  та веденої шестерні  $\varphi_2$  в роботі [2] є помилковим.

Знайдемо взаємозв'язок між кутом повороту ведучої шестерні  $\varphi_1$  та кутами повороту радіусів  $\rho_1$  і  $\rho_2$ . Такий взаємозв'язок можна отримати з визначення евольвенти [5, 15]

Виходячи із схем (рис. 1 - 4), для ведучої шестерні можна записати вираз з врахуванням поняття інволюти кута:

$$\chi_1 = \varphi_1 + \text{inv}\alpha_w - \text{inv}\chi_1; \quad (2)$$

$$\chi_1 = \text{arctg}(\varphi_1 + \text{tg}\alpha_w - \alpha_w) \text{ або } \chi_1 = \text{arctg}(\varphi_1 + \text{inv}\alpha_w) \quad (3)$$

З (3) отримаємо і залежність  $\varphi_1$  от  $\chi_1$ :

$$\varphi_1 = \text{tg}\chi_1 - \text{tg}\alpha_w + \alpha_w \text{ или } \varphi_1 = \text{tg}\chi_1 - \text{inv}\alpha_w. \quad (4)$$

Аналогічно, встановимо залежність між кутами  $\chi_2$  і  $\varphi_2$ . З рис. 1 - 4 можемо записати наступну залежність:

$$\chi_2 = \text{arctg}(\varphi_2 + \text{tg}\alpha_w - \alpha_w) \text{ або } \chi_2 = \text{arctg}(\varphi_2 + \text{inv}\alpha_w). \quad (5)$$

З (5) можемо отримати залежність  $\varphi_2$  від  $\chi_2$ :

$$\varphi_2 = \text{tg}\chi_2 - \text{tg}\alpha_w + \alpha_w \text{ або } \varphi_2 = \text{tg}\chi_2 - \text{inv}\alpha_w. \quad (6)$$

Була отримана залежність кута  $\chi_2$  (5) від змінної  $\varphi_2$ , що дещо незручно. Знайдемо залежність кута  $\chi_2$  від змінної  $\varphi_1$ , тобто залежність виду  $\chi_2(\varphi_1)$ . Для цього скористаємось поняттям передаточного відношення.

З вище наведеного поняття (1) і рис. 1 - 4 бачимо, що

$$\angle LO_2P = \angle KO_1P / i. \quad (7)$$

При цьому,

$$\angle KO_1P = \alpha_w - \varphi_1, \quad (8)$$

$$\varphi_2 = \alpha_w + \angle LO_2P. \quad (9)$$

Тоді, з врахуванням виразів (7) і (8) отримаємо

$$\varphi_2(\varphi_1) = \alpha_w + (\alpha_w - \varphi_1) / i. \quad (10)$$

Для зачеплення з однаковим числом зубів  $i = 1$ , а тому

$$\varphi_2(\varphi_1) = 2\alpha_w - \varphi_1. \quad (11)$$

Тоді, залежність (5) можна представити для загального випадку у вигляді:

$$\chi_2(\varphi_1) = \text{arctg}[(\alpha_w - \varphi_1) / i + \text{tg}\alpha_w] \text{ або } \chi_2(\varphi_1) = \text{arctg}[\alpha_w + (\alpha_w - \varphi_1) / i + \text{inv}\alpha_w]. \quad (12)$$

Для шестерень з однаковим числом зубів  $i = 1$  і залежності (12), можна записати у вигляді:

$$\chi_2(\varphi_1) = \text{arctg}(\alpha_w - \varphi_1 + \text{tg}\alpha_w) \text{ або } \chi_2(\varphi_1) = \text{arctg}[2\alpha_w - \varphi_1 + \text{inv}\alpha_w]. \quad (13)$$

Можуть бути корисними і залежності кутів повороту  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  та радіусів  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , від положення точки зачеплення зубів  $T$  на лінії зачеплення  $MN$ , яке визначається відстанню -  $x$  точки  $T$  від полюса зачеплення  $P$ .

З прямокутного  $\triangle MO_1T$  на рис. 1, 2 можемо записати, що

$$MT = r_{b1} \operatorname{tg} \chi_1, \quad (14)$$

звідки

$$\chi_1 = \operatorname{arctg}(MT/r_{b1}). \quad (15)$$

З іншої сторони, з прямокутного  $\triangle MO_1P$  (рис. 1, 2) можемо записати

$$MT = r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_w - TP = r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_w - x. \quad (16)$$

Підставимо в (15) значення  $MT$  з (16), отримаємо вираз для кута  $\chi_1$  від  $x$

$$\chi_1 = \operatorname{arctg}((r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_w - x)/r_{b1}). \quad (17)$$

Підставимо (17) в вираз (4), отримаємо після перетворень залежність кута  $\varphi_1$  від  $x$

$$\varphi_1 = \alpha_w - x/r_{b1}. \quad (18)$$

Також, можна отримати залежність кута повороту веденої шестерні  $\varphi_2$  від  $x$ .

З прямокутного  $\triangle NO_2T$  (рис. 1, 2), можемо записати

$$NT = r_{b2} \operatorname{tg} \alpha_w + x \quad (19)$$

та

$$\operatorname{tg} \chi_2 = NT/r_{b2}. \quad (20)$$

З (20) випливає, що

$$\chi_2 = \operatorname{arctg}(NT/r_{b2}). \quad (21)$$

Підставимо в (21) значення  $NT$  з (19), отримаємо

$$\chi_2 = \operatorname{arctg}((r_{b2} \operatorname{tg} \alpha_w + x)/r_{b2}). \quad (22)$$

Підставимо (22) в (5), після відповідних перетворень, отримаємо залежність кута повороту веденої шестерні від  $x$

$$\varphi_2 = \alpha_w + x/r_{b2}. \quad (23)$$

Відмітимо, що аналогічний результат можна отримати з залежностей (11) і (18).

З виразів (18) і (23) можна отримати і зворотні залежності виду:

$$x = r_{b1}(\alpha_w - \varphi_1); \quad (24)$$

$$x = r_{b2}(\varphi_2 - \alpha_w) = r_{b2}(\alpha_w - \varphi_1)/i. \quad (25)$$

Перш ніж перейти до дослідження отриманих виразів відмітимо, що графіки досліджуваних залежностей побудовані для зубчатих зачеплень з різними параметрами, але розрахованими на базі насосів типу GP3K32. Вибір даного насоса пояснюється тим, що це найбільш масовий тип, що випускається промисловістю України, що є базовим варіантом виконання шестеренного насосу (НШ), а його зубчасте зачеплення є типовим представником для НШ. Параметри досліджуваних зубчастих зачеплень НШ представлені в табл. 1.

Далі, визначимо область зміни аргументу  $\varphi_1$ . Виходячи з геометричної моделі подачі робочої рідини, представленої на рис. 1 – 4, можна стверджувати, що область зміни аргументу за цикл зачеплення однієї пари зубів може бути визначений як:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= [(\alpha_w - \pi \cdot \varepsilon / z_1); (\alpha_w + \pi \cdot \varepsilon / z_1)]; \\ \varphi_2 &= [(\alpha_w + \pi \cdot \varepsilon / z_2); (\alpha_w - \pi \cdot \varepsilon / z_2)],\end{aligned}\quad (26)$$

де  $z_1, z_2$  - відповідно число зубів ведучої і веденої шестерні;

$\varepsilon$  - коефіцієнт перекриття зубчатого зачеплення шестерень.

Межі зміни кутів повороту ведучої і веденої шестерні для зубчатих зачеплень з різними параметрами наведеними в табл. 2

Таблиця 1 – Технічні параметри зубчатих зачеплень насосів типу GP3K32

Назва параметру	Значення параметру, при				
	$z_1 = z_2 = 8$	$z_1 = 9$	$z_2 = 7$	$z_1 = 7$	$z_2 = 9$
Число зубів шестерень, $z$	8	$z_1 = 9$	$z_2 = 7$	$z_1 = 7$	$z_2 = 9$
Модуль зубчатого зачеплення $m$ , мм	5				
Кут вихідного профіля $\alpha$ , град	$20^0$				
Діаметр основного кола $d_b$ , мм	37,588	$d_{b1} = 42,3$	$d_{b2} = 32,8$	$d_{b1} = 32,83$	$d_{b2} = 42,29$
Діаметр вершин зубів шестерень $d_a$ , мм	55,0	$d_{a1} = 60$	$d_{a2} = 50$	$d_{a1} = 50$	$d_{a2} = 60$
Кут зачеплення $\alpha_w$ , град	33,355				
Міжцентрова відстань, $a_w$ , мм	45,0				
Товщина зуба шестерні при вершині зуба $S_a$ , мм	1,0				
Довжина більшої вісі НШ $G$ , мм	100,0				
Коефіцієнт перекриття зубчатого зачеплення, $\varepsilon$	1,044	1,030	1,032		

Джерело: розроблено авторами

Таблиця 2 – Інтервали зміни кутів повороту ведучої і веденої шестерні і радіусів  $\rho_1$  і

$\rho_2$

Параметри зубчатого зачеплення	Інтервал зміни кутів	
	Ведучої і веденої шестерні	радіусів $\rho_1$ і $\rho_2$
1. $z_1 = z_2 = 8$ , $\varepsilon = 1,044$	$\varphi_1 \in [9,86^0; 56,84^0]$ $\varphi_2 \in [56,84^0; 9,86^0]$	$\chi_1 \in [13,936^0; 46,886^0]$ $\chi_2 \in [46,886^0; 13,936^0]$
2. $z_1 = 9$ $z_2 = 7$ ,	$\varphi_1 \in [12,75^0; 53,95^0]$	$\chi_1 \in [16,695^0; 45,502^0]$

$\varepsilon = 1,030$	$\varphi_2 \in [59,836^0; 6,864^0]$	$\chi_2 \in [48,25^0; 11,082^0]$
3. $z_1 = 7$ $z_2 = 9$ , $\varepsilon = 1,032$	$\varphi_1 \in [6,813^0; 59,887^0]$ $\varphi_2 \in [53,99^0; 12,71^0]$	$\chi_1 \in [11,032^0; 48,272^0]$ $\chi_2 \in [45,521^0; 16,588^0]$

Джерело: розроблено авторами

Іншими словами, можна записати кутові координати початку та кінця зубчатих зачеплень. Кути повороту ведучої і веденої шестерень відносно радіусів  $O_1M$  і  $O_2N$  відповідно (рис. 1 - 4) будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned}\varphi_{1n} &= \alpha_w - \pi \cdot \varepsilon / z_1 ; \\ \varphi_{1k} &= \alpha_w + \pi \cdot \varepsilon / z_1 ; \\ \varphi_{2n} &= \alpha_w + \pi \cdot \varepsilon / z_2 ; \\ \varphi_{2k} &= \alpha_w - \pi \cdot \varepsilon / z_2 ;\end{aligned}\quad (27)$$

де  $z_1, z_2$  - відповідно число зубів ведучої та веденої шестерні;

$\varepsilon$  - коефіцієнт перекриття зубчатого зачеплення шестерні.

Маючи залежності (3) і (13) виду  $\chi_1(\varphi_1)$  та  $\chi_2(\varphi_1)$  можна, отримати залежності кутів повороту радіусів  $\rho_1$  та  $\rho_2$  відносно радіусів  $O_1M$  и  $O_2N$ , відповідно (рис. 1 - 4):

$$\begin{aligned}\chi_{1n} &= \arctg(\operatorname{tg} \alpha_w - \pi \cdot \varepsilon / z_1); \\ \chi_{1k} &= \arctg(\operatorname{tg} \alpha_w + \pi \cdot \varepsilon / z_1); \\ \chi_{2n} &= \arctg(\operatorname{tg} \alpha_w + \pi \cdot \varepsilon / z_2); \\ \chi_{2k} &= \arctg(\operatorname{tg} \alpha_w - \pi \cdot \varepsilon / z_2).\end{aligned}\quad (28)$$

Далі, знайдемо залежності довжин радіусів  $\rho_1$  та  $\rho_2$  від положення точки зачеплення на лінії зачеплення  $MN$  і від кута повороту ведучої шестерні  $\varphi$ . Це положення можна визначити лінійною координатою на лінії зачеплення  $MN$  -  $x = PT$  [3, 4].

З рис. 1-4, скориставшись теоремою Піфагора, можна записати:

$$\begin{aligned}\rho_1^2 &= (r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_w - x)^2 + r_{b1}^2; \\ \rho_2^2 &= (r_{b2} \operatorname{tg} \alpha_w + x)^2 + r_{b2}^2.\end{aligned}\quad (29)$$

Підставимо значення  $x$  від  $\varphi_1$  з (24) та (25) в (29) відповідно, після незначних перетворень, отримаємо:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= r_{b1} \sqrt{(\operatorname{tg} \alpha_w - \alpha_w + \varphi_1)^2 + 1}; \\ \rho_2 &= r_{b2} \sqrt{(\operatorname{tg} \alpha_w + \varphi_2 - \alpha_w)^2 + 1}.\end{aligned}\quad (30)$$

Вираз (40) можна записати в залежності від  $\varphi_1$  з врахуванням (10) у вигляді:

$$\rho_2 = r_{b2} \sqrt{(\operatorname{tg} \alpha_w + (\alpha_w - \varphi_1)/i)^2 + 1}.\quad (31)$$

Таким чином, були отримані залежності для визначення радіусів  $\rho_1$  і  $\rho_2$  (30) та кутів їх повороту  $\chi_1$  і  $\chi_2$  (3) та (5).

Побудуємо графіки отриманих виразів для зубчатих зачеплень з числом зубів  $z_1 = z_2 = 8$ ,  $z_1 = 9$   $z_2 = 7$  и  $z_1 = 7$   $z_2 = 9$ . Основні параметри цих зубчатих зачеплень, необхідних для побудови вказаних графіків, наведені в табл. 1.

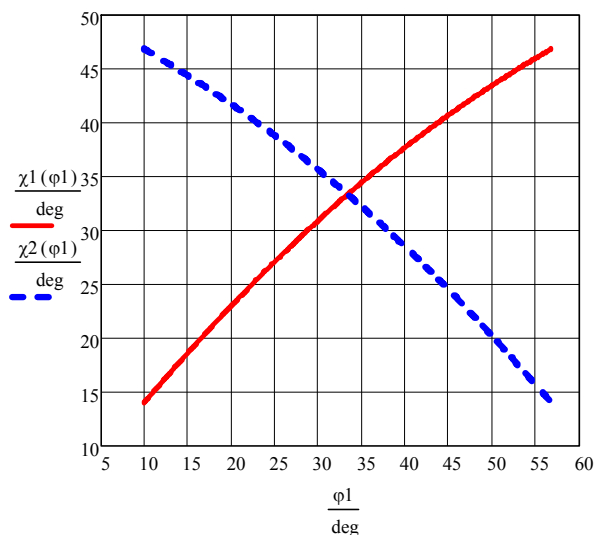


Рисунок 5 - Графіки залежностей кутів повороту  $\chi_1(\varphi)$  радіуса  $\rho_1$  і  $\chi_2(\varphi)$  радіуса  $\rho_2$  від кута повороту ведучої шестерні  $\varphi_1$  зубчатого зачеплення з числом зубів  $z_1 = z_2 = 8$ .

Джерело: розроблено авторами

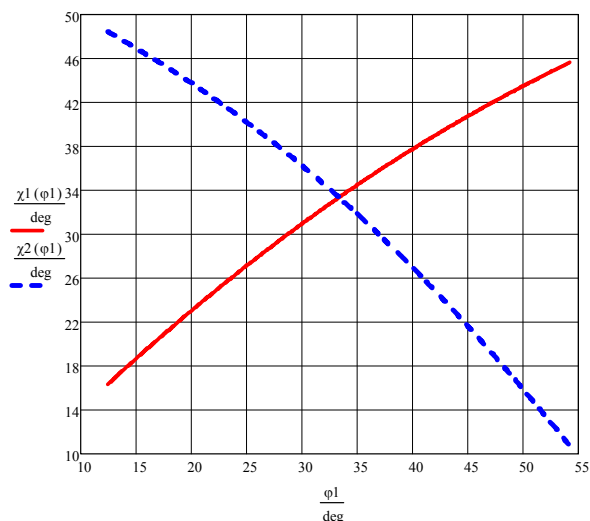


Рисунок 7 - Графіки залежностей кутів повороту  $\chi_1(\varphi)$  радіуса  $\rho_1$  і  $\chi_2(\varphi)$  радіуса  $\rho_2$  від кута повороту ведучої шестерні  $\varphi_1$  зубчатого зачеплення з числом зубів  $z_1 = 9$   $z_2 = 7$

Джерело: розроблено авторами

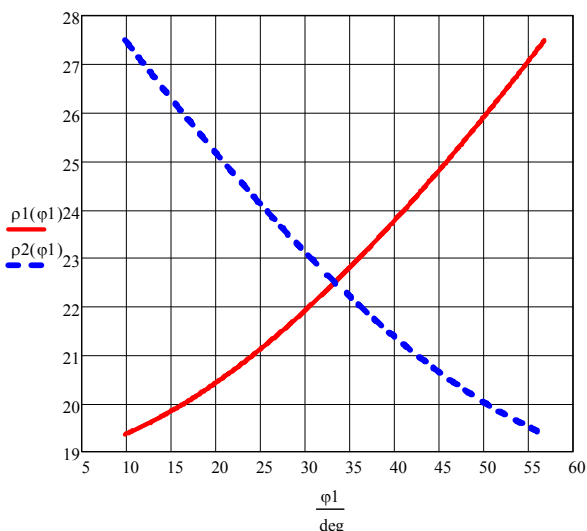


Рисунок 6 - Графіки залежностей довжин радіусів  $\rho_1$  і  $\rho_2$  від кута повороту ведучої шестерні  $\varphi_1$  зубчатого зачеплення з числом зубів  $z_1 = z_2 = 8$ .

Джерело: розроблено авторами

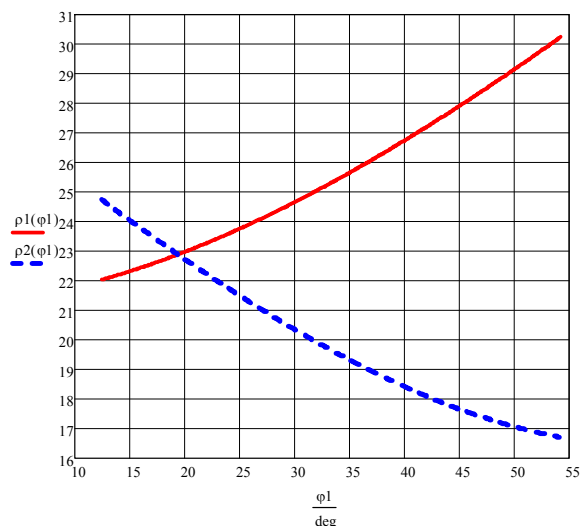


Рисунок 8 - Графіки залежностей довжин радіусів  $\rho_1$  і  $\rho_2$  від кута повороту ведучої шестерні  $\varphi_1$  зубчатого зачеплення з числом зубів  $z_1 = 9$   $z_2 = 7$

Джерело: розроблено авторами

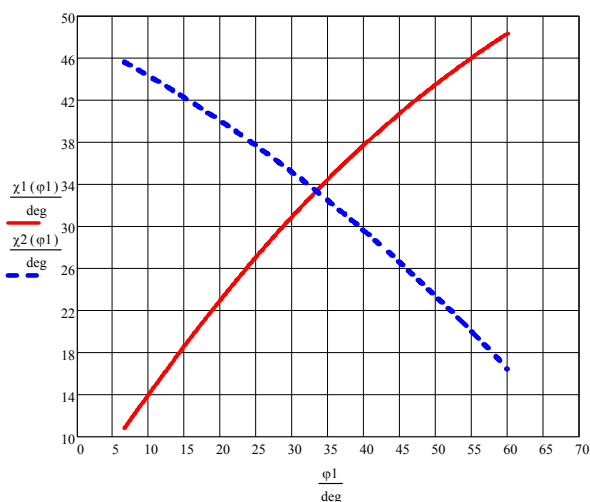


Рисунок 9 - Графіки залежностей кутів повороту  $\chi_1(\varphi)$  радіуса  $\rho_1$  і  $\chi_2(\varphi)$  радіуса повороту ведучої шестерні  $\varphi_1$  зубчатого зачеплення з числом зубів  $z_1 = 7$   $z_2 = 9$   
 Джерело: розроблено авторами

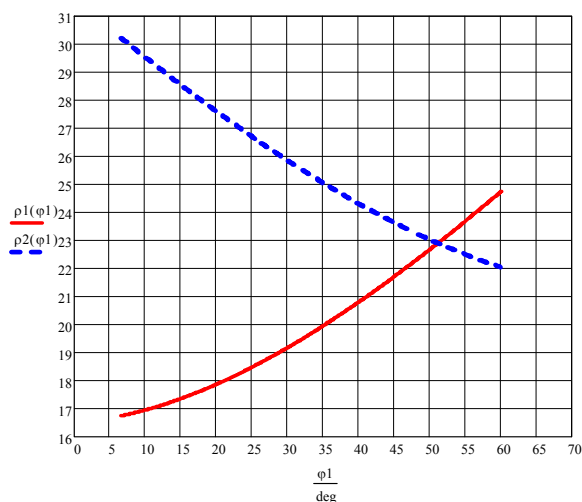


Рисунок 10 - Графіки залежностей довжин радіусів  $\rho_1$  і  $\rho_2$  від кута повороту ведучої шестерні  $\varphi_1$  зубчатого зачеплення з числом зубів  $z_1 = 7$   $z_2 = 9$   
 Джерело: розроблено авторами

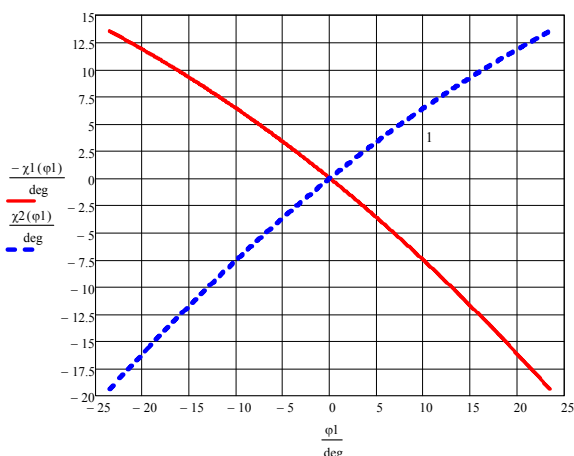


Рисунок 11 - Графіки залежностей кутів повороту радіуса  $\rho_1$  та  $\chi_2(\varphi)$  радіуса  $\rho_2$  від кута повороту влучої шестерні  $\varphi_1$  зубчатого зачеплення з числом зубів  $z_1 = z_2 = 8$  в системі відліку від вісі  $O_1O_2$ .  
 Джерело: розроблено авторами

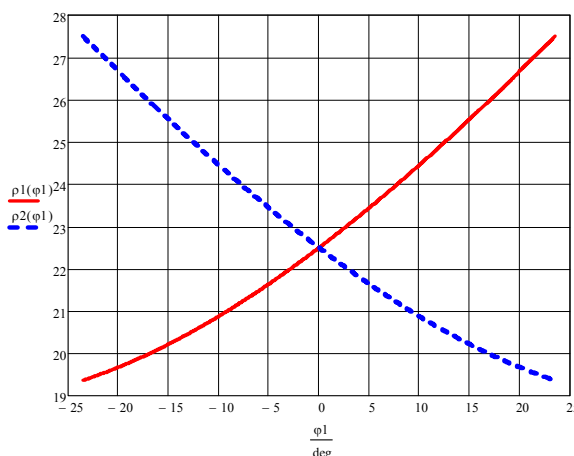


Рисунок 12 - Графіки залежностей довжин радіусів  $\rho_1$  та  $\rho_2$  від кута повороту ведучої шестерні  $\varphi_1$  зубчатого зачеплення з числом зубів  $z_1 = z_2 = 8$  в системі відліку від вісі  $O_1O_2$ .  
 Джерело: розроблено авторами

**Висновки:** 1. Аналіз джерел науково-технічної інформації показав, що в існуючих моделях робочого процесу шестеренних гідромашин не враховано особливість евольвентного зубчатого зачеплення, яка полягає в тому, що евольвентні профілі зубів в своєму русі взаємно проковзують один по одному.

2. Для вивчення цієї особливості була поставлена та вирішена задача визначення залежностей кутів повороту  $\chi_1$  і  $\chi_2$  та радіусів  $\rho_1$  і  $\rho_2$ , що з'єднують осі обертання шестерень з точкою зачеплення  $T$  від кута повороту ведучої шестерні або координати

положення точки зачеплення зубів  $T$  на лінії зачеплення. При цьому враховано проковзування евольвентних профілів зубів шестерень.

3. Знайдено залежності довжин радіусів  $\rho_1$  і  $\rho_2$ , що з'єднують осі обертання шестерень з точкою зачеплення  $T$ , від кута повороту ведучої шестерні  $\varphi_1$  або координати положення точки зачеплення зубів  $T$  лінії зачеплення.

4. Отримані вирази дозволяють вдосконалити існуючі математичні моделі руху робочої рідини в шестеренних гідромашинах, що дасть змогу дослідити низку процесів у гідромашинах, а саме:

- характер подачі з врахуванням нових особливостей в роботі шестеренних гідромашин;
- особливості зміни відсіченої порожнини та гідродинамічних процесів, що відбуваються в ній;
- пульсацію тиску та подачі робочої рідини;
- характер зміни навантаження на підшипники насоса та мотора;
- характер зміни крутного моменту, що розвиває шестеренний гідромотор;
- характер зміни потужності, що розвиває шестеренний гідромотор.

## Список літератури

1. Угінчус А.А. Гідравліка і гідравлічні машини. / Угінчус А.А. - 3-е перероб і доп. Харків, 1970 – 399 с.
2. THE THEORETICAL FLOW RIPPLE OF AN EXTERNAL GEAR PUMP A Thesis presented lo the Faculty of the Graduate School University of Missouri-Columbia In Partial Fulfillment Of the Requirements for the Degree Master of Science By SURESH BABU KASARAGADDA Dr. Noah D. Manning. Thesis Supervisor DECEMBER 2003.
3. Kinematic Displacement Optimization of External Helical Gear Pumps Kuo Jao Huang and Chih Chieh Chen. Department of Mechanical Engineering, Chung Hua University No. 707, Sec.2, Wu-Fu Rd., Hsinchu, Taiwan, 300 R.O.C.
4. A NUMERICAL MODEL FOR THE SIMULATION OF EXTERNAL GEAR PUMPS. Paolo CASOLI, Andrea VACCA and Germano FRANZONI Dipartimento di Ingegneria Industriale Università degli Studi di Parma Parco Area delle Scienze 181/A, 43100 Parma, Italy.
5. P. Casoli, A. Vacca, G.L. Berta. A numerical model for the simulation of flow in hydraulic external gear machines [Tener]: Power Transmission and Motion Control. 2006.-P. 147-165.
6. Кулешков Ю.В. Шестеренні насоси з асиметричною лінією зачеплення шестерен / [Кулешков Ю.В., Черновол М.І., Бевз О.В., Тітов Ю.А.] //Теорія, конструкція та розрахунок: монографія . Кіровоград: КОД, 2009. 243 с.
7. Кулешков Ю.В. Дослідження поведінки математичної моделі питомого робочого об'єму шестеренного насоса типу НШ від параметрів зубчастого зачеплення. / Кулешков Ю.В., Черновол М.І., Руденко Т.В. Гуцул В.І., Осін Р.А. // Збірник наукових праць Кіровоградського національного технічного університету. Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація Випуск 23 Кіровоград 2010, С. 278 – 390.
8. Кіницький Я. Т. Практикум із теорії механізмів і машин / Я. Т. Кіницький. – Львів : Афіша, 2002. – 450 с.
9. W.E. Wilson. Performance Criteria for Positive Displacement Pumps and Flind Motors. “Trans ASME” vol 71. Febr, 1949.
10. M.L. Unna. Innere Verlust sn Zannradpumpen. “Hydraulik und Pneumatik”, Nr 4, 1957.

## References

1. Uginchus A.A.(1970) Gidravlika I gidravlichni mashunu./ Uginchus A.A - 3-e pererob I dop. Kharkiv, – 399 s. [in Ukrainian]
2. THE THEORETICAL FLOW RIPPLE OF AN EXTERNAL GEAR PUMP A Thesis presented lo the Faculty of the Graduate School University of Missouri-Columbia In Partial Fulfillment Of the Requirements for the Degree Master of Science By SURESH BABU KASARAGADDA Dr. Noah D. Manning. Thesis Supervisor

- DECEMBER 2003.[in USA]
3. Kinematic Displacement Optimization of External Helical Gear Pumps Kuo Jao Huang and Chih Chieh Chen. Department of Mechanical Engineering, Chung Hua University No. 707, Sec.2, Wu-Fu Rd., Hsinchu, Taiwan, 300 R.O.C. [in Taiwan]
  4. A NUMERICAL MODEL FOR THE SIMULATION OF EXTERNAL GEAR PUMPS. Paolo CASOLI, Andrea VACCA and Germano FRANZONI Dipartimento di Ingegneria Industriale Università degli Studi di Parma Parco Area delle Scienze 181/A, 43100 Parma, [in Italy].
  5. P. Casoli, A. Vacca, G.L. Berta.( 2008) A numerical model for the simulatio 4. Chernovol M.I. Osnovni napryamy vdoskonalennya shesterennyh nasosiv silskogospodarskoy tehniky/ Kuleshkov Y.V., Chernovol M.I. // Visnyk agrarnoy nauky, serpen, № 8. P. 52 - 54. [in Italy].
  6. Kuleshkov Y.V.( 2009) Shesterennye nasosy s asimmetrichnoy liniey zacepleniya shesteren/ [Kuleshkov Y.V. Chernovol M.I, Bevz O.V., Titov Y.A.] //Teoriya, konstrukciya I raschet.- Monografiya – Kirivigrad: «KOD», – 243 p. [in Ukrainian]
  7. Kuleshkov Y.V. (2010) Doslidzhennya povedinky matematychnoy modeli putomogo robochogo obemu shesterennogo nasosa typu NSh vid parametriv zubchatogo pacheplennya. / Kuleshkov Y.V., Chernovol M.I., Rudenko T. V, Gucul V.I., Osin R.A. //Zbirnik naukovuh prac Kirivigradskogo nacionalnogo tehničnogo universytetu. Tehnika v silskogospodarskomy vyrobnyctvi, galuzeve mashinobuduvannya, avtomatyzaciya. Vypusk 23 Kirovograd. P. 278 – 390. [in Ukrainian]
  8. Kinickiy Ya. T. (2002) Praktikum z teorii mahanizmov I mashin/ Ya. T. Kinickiy. – Lviv : Afisha., – 450 p. [in Ukrainian]
  9. W.E. Wilson.(1949) Performance Criteria for Positive Displacement Pumps and Flind Motors. “Trans ASME” vol 71. Febr. [in English]
  10. M.L. Unna. (1957.) Innere Verlust sn Zannradpumpen. “Hydraulik und Pneumatik”, Nr 4, [in German]

**Yuriy Kuleshkov**, Prof., DSc, **Timofey Rudenko**, Assoc. Prof., PhD tech. sci., **Mikhail Krasota**, Assoc. Prof., PhD tech. sci., **Yevheniy Shtompel**, post-graduate  
*Central Ukrainian National Technical University*

### **The Features of Cog Engagement’s Functioning of Gear Hydraulic Machines**

The purpose of this paper is to establish the relationship between the angle of rotation of the driving gear of a gear hydraulic machine and the angles of rotation of the radii connecting the axes of rotation of the gears with the meshing point, as well as to take into account the slippage of involute profiles of gear teeth relative to each other in mathematical models of the movement of working fluid in gear hydraulic machines.

To study the peculiarities of slipping of involute profiles, the problem of determining the dependence of the angles of rotation of the radii connecting the axes of rotation of the gears with the meshing point on the angle of rotation of the driving gear or the coordinate of the position of the meshing point of the teeth T on the meshing line was set and successfully solved.

The dependences of the lengths of the radii connecting the axes of rotation of the gears with the meshing point on the angle of rotation of the drive gear or the coordinate of the position of the tooth meshing point on the meshing line were found.

The obtained expressions will improve the existing mathematical models of the working fluid motion, which will make it possible to study a number of processes occurring in gear hydraulic machines.

The analysis of scientific and technical information sources showed that existing models of the working process of gear hydraulic machines do not take into account the feature of involute gearing, which consists in the fact that involute tooth profiles in their movement mutually slip over each other.

To study this feature, the task of determining the dependence of the angles of rotation and radii connecting the axes of rotation of the gears with the meshing point T on the angle of rotation of the drive gear or the coordinate of the position of the meshing point of the teeth T on the meshing line was set and successfully solved. The slippage of the involute profiles of the gear teeth is taken into account.

**involute tooth profiles, sliding involute surfaces, gear pump**

*Одержано (Received) 11.10.2024*

*Прорецензовано (Reviewed) 21.10.2024*

*Прийнято до друку (Approved) 28.10.2024*