

$$P_{\alpha} = G \cos \alpha + mv^2 \Delta + m\omega^2 \rho \cos(\omega t - \alpha), \quad (10)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения;  $m$  – неуравновешенная масса,  $\rho$  – расстояние от геометрического центра до массы  $m$ ;  $v$  – скорость вращения диска в подшипнике;  $\alpha$  – угловое смещение диска от положения равновесия.

Выражение (10) является граничным условием соприкосновения диска с подшипником. Объединяя уравнения (9) с граничным условием (10), получим уравнение движения с учётом граничного условия.

Дифференцируя уравнение (9) по  $\alpha$

$$\frac{d \cdot \left( m \Delta \frac{dv}{dt} \right)}{d\alpha} = -G \cos \alpha - m\omega^2 \rho \cos(\omega t - \alpha) - \frac{dF}{d\alpha}$$

и складывая производную с выражением (10), получим

$$\frac{d \left( m \Delta \frac{dv}{dt} \right)}{d\alpha} = mv^2 \Delta - P_{\alpha} - \frac{dF}{d\alpha};$$

Пренебрегая изменением силы трения  $\frac{dF}{d\alpha} = 0$ , при-

нимая  $m = \frac{G}{g}$ , получим

$$d \left( \frac{G}{g} \cdot \frac{dv}{dt} \Delta \right) = \frac{G}{g} \cdot v^2 \Delta d\alpha - P_{\alpha} \cdot d\alpha. \quad (11)$$

Разделим на  $\Delta$  и  $\frac{G}{g}$  каждую составляющую последнего

уравнения

$$d \left( \frac{dv}{dt} \right) = v^2 d\alpha - \frac{g}{\Delta} \cdot \frac{P_{\alpha}}{G} \cdot d\alpha$$

откуда

$$d \frac{dv}{dt} = v^2 d\alpha - \omega_m^2 \frac{P_{\alpha}}{G} d\alpha, \quad (12)$$

где  $\omega_m^2 = \frac{g}{\Delta}$  – квадрат частоты маятниковых колебаний диска.

Умножим обе части выражения (12) на  $\frac{dv}{dt}$  и учиты-

вая, что  $\frac{d\alpha}{dt} = v$ , получим после интегрирования

$$\left( \frac{dv}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} v^4 - \frac{P}{G} \omega_m^2 v^2 + C_1, \quad (13)$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования;  $C_1=0$  так как  $v=0$  и  $\frac{dv}{dt}=0$ .

Таким образом, решая уравнение (13), получим

$$\frac{dv}{dt} = \vartheta \omega_m \cdot \sqrt{\frac{P}{G} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{P} \cdot \frac{v^2}{\omega_m^2} - 1 \right)^{0,5}}. \quad (14)$$

Если принять  $X = av$ ,  $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{G}{P}} \cdot \frac{1}{\omega_m}$ , то уравне-

ние (14) преобразуется к виду  $\frac{dx}{dt} = \pm \frac{x}{\sqrt{2a}} \cdot \sqrt{x^2 - 1}$ , откуда

$$t = \pm \sqrt{2a} \cdot \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} + C_2 = \pm \sqrt{2} \cdot a \cdot \arcsin \frac{1}{x} + C_2$$

где  $C_2=0$  [3].

Таким образом, время металлического контакта поверхности диска с подшипниковую опору определится выражением:

$$t = \pm \sqrt{2a} \cdot \arcsin \frac{1}{x}.$$

Выполненные исследования позволяют определить угол поворота диска и изменение его скорости при переходе со 2-го на 3-й режим работы, время металлического контакта диска с опорой. Кроме того, дано математическое представление о переходном процессе уравнивания шпиндельного узла с корректирующими дисками при их разгоне и торможении в гидроопоре.

#### Список использованной литературы

1. Гутер Р.С., Янпольский А.Р. Дифференциальные уравнения М.: «Высшая школа», 1976.-303с.
2. Сахно Є.Ю., Федориненко Д.Ю. Балансування шпиндельного вузла при механічній обробці неврівноваженої заготовки // Наукові вісті НТУУ «КПІ». -2001.-№2.-С.72-77.
3. Шубин А.А. Исследование влияния колебаний, возникающих в подшипнике качения на точность уравнивания роторов. В сб. Уравнивание роторов и механизмов / Под ред. В.А. Шепетьльникова. – М.: Машиностроение, 1978.-320с.

УДК 621.941.025-521

Ю.В.Петраков, д-р техн.наук, проф. О.В.Лисенко, інж.  
НТУУ „Київський політехнічний інститут“, м.Київ, Україна

## МОДЕЛЮВАННЯ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕХНОЛОГІЧНОЇ ОБРОБЛЮВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ТОКАРНОГО ВЕРСТАТА

*Представлена методика визначення технологічної спадковості при токарній обробці на етапі технологічної підготовки виробництва. Методика спирається на уявлення технологічної оброблювальної системи у вигляді замкненої нелінійної динамічної моделі шостого порядку. Для моделювання використовується прикладна програма, розроблена в Лабораторії віртуальних засобів навчання Міністерства освіти і науки України.*

Технологічна оброблювальна система (ТОС) під час різання знаходиться під впливом різноманітних збурень, які мають як детермінований так і стохастичний характер. Швидкоплинні (у порівнянні з частотами власних коливань

ТОС) збурення викликають відносні коливання, що накладаються на формоутворюючий рух інструмента і заготовки і таким чином впливають не тільки на шорсткість, а й на форму оброблювальної поверхні.

Основні швидкоплинні збурення ТОС в наслідок процесу різання можна поділити на силові, що обумовлені зміною сили різання, та кінематичні, що викликані формоутворюючим рухом інструменту і заготовки. При деяких видах токарної обробки, зокрема токарно-копіювальної, ТОС одночасно знаходиться під дією як кінематичних, так і силових збурень. Наприклад, при точінні зовнішньої поверхні поршня двигуна внутрішнього згорання, який має некрутий поперечний переріз, кінематичне збурення обумовлене формоутворюючим рухом копіювального супорта від копіра, а силові збурення – перемінною глибиною припуску, що зрізається. Таким чином, кінематичне і в більшості силові збурення є детермінованими і можуть бути з достатньою точністю визначені на етапі технологічної підготовки виробництва. Та все ж таки для більшості видів токарної обробки ТОС знаходиться переважно під дією силових збурень, що викликані, в перше чергу, зміною глибини припуску у поперечному перерізі заготовки.

Визначення реакції ТОС на ці збурення на етапі проектування технологічної операції є важливим завданням, розв'язання якого допоможе правильно розрахувати так звану технологічну спадковість, оцінити динамічні властивості ТОС, верстату, правильно визначити режим різання.

Для вирішення цього завдання необхідно отримати частотні характеристики ТОС, які, як правило, визначаються у вигляді амплітудно-фазової частотної характеристики. Найбільш достовірні дані отримують в результаті експериментальних досліджень частотних характеристик ТОС під час різання. При цьому розрізняють частотні характеристики першого та другого роду. Частотні характеристики першого роду одержують при завданні інструменту і деталі відносних коливань (тобто від кінематичного збурення), а частотні характеристики другого роду – під час точіння спеціально спрофільованої заготовки (тобто від силового збурення).

Оскільки, як було зазначено вище, переважна більшість видів токарної обробки супроводжується силовим збуренням від змінного припуску, розглянемо саме його вплив на ТОС, який залежить від частотних характеристик другого роду.

При токарній обробці круглих поверхонь найбільш часто зустрічається випадок ексцентричного розташування припуску в наслідок неспівпадіння вісі обертання шпинделя верстата і вісі циліндричної заготовки (рис.1). Таке неспівпадіння визначається ексцентриситетом  $e = OO_1$ . Величина заданого припуску (заданої глибини різання), як функція полярного кута  $\varphi$  визначається з трикутника  $OO_1A$ . За теоремою косинусів маємо:

$$O_1A^2 = OA^2 + OO_1^2 - 2 \cdot OA \cdot OO_1 \cdot \cos(\pi - \varphi). \quad (1)$$

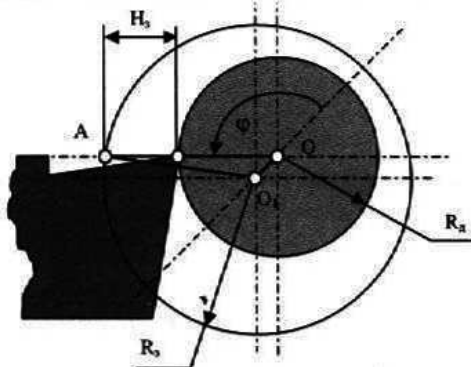


Рис.1. Схема визначення глибини різання

Оскільки  $H_s = O_1A - R_s$ , а  $O_1A = R_0$ , де  $R_s$ ,  $R_0$  – радіуси заготовки і деталі відповідно, остаточно отримуємо:

$$H_s(\varphi) = \sqrt{R_0^2 - e^2 \sin^2(\varphi)} - R_s - e \cos(\varphi). \quad (2)$$

При токарній обробці  $\varphi = \omega t$  і таким чином отримуємо періодичну функцію залежності заданої глибини різання від геометричних параметрів ТОС, яка визначає силове періодичне збурення з періодом  $T = 2\pi/\omega$ :

$$H_s(\omega t) = \sqrt{R_0^2 - e^2 \sin^2(\omega t)} - R_s - e \cos(\omega t). \quad (3)$$

Для визначення впливу такої зміни припуску на технологічну спадковість, що, в свою чергу, визначає похибку форми деталі потрібно діяти за алгоритмом, схема якого показана на рис.2.

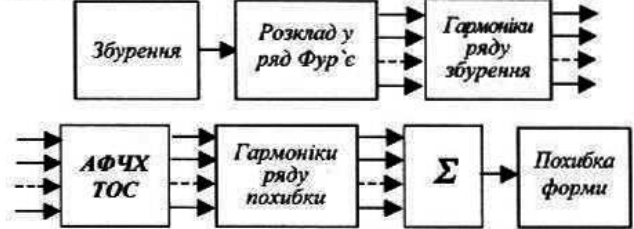


Рис.2. Схема алгоритму визначення похибки форми за допомогою АФЧХ ТОС

Таким чином, у відповідності до алгоритму, кожна гармоніка розкладу збурення у ряд Фур'є перетворюється у складову гармоніку похибки (технологічної спадковості), трансформуючись через частотну передаточну функцію ТОС, що представлена амплітудно-фазовою частотною характеристикою (АФЧХ) системи.

Як показує аналіз залежності (3), функція  $H_s(\omega t)$  є періодичною і парною, тому у розкладі у ряд Фур'є відсутні складові з синусом, а спектр амплітуд перетворення Фур'є є дискретним:

$$H_s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_0 n t), \quad (4)$$

де  $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi f_0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  – номери гармонік.

Коефіцієнти розкладу обчислюються за відомими формулами [1]:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} H_s(t) \cos(\omega_0 n t) dt, \quad (5)$$

де  $n=0, 1, 2, \dots$  – номери коефіцієнтів.

Після підстановки у (5) залежності (3) і нескладних математичних перетворень отримуємо вираз для визначення коефіцієнтів розкладу Фур'є:

$$a_n = \frac{R_s}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi) \sqrt{1 - m^2 \sin^2(n\varphi)} d\varphi - \frac{e}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(n\varphi) d\varphi - \frac{R_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi) d\varphi, \quad (6)$$

де  $m^2 = e^2/R_0^2$ .

При визначенні коефіцієнта з нульовим індексом перша складова виразу (6) перетворюється на еліптичний інтеграл Лежандра другого роду [1], оскільки  $\cos(0\varphi)=1$ . Тому для розрахунку коефіцієнтів доцільно використовувати чисельні методи інтегрування на ЕОМ.

Для подальших розрахунків треба використовувати АФЧХ ТОС, яку можна отримати в результаті досить складних експериментів при точінні спрофільованої за гармонічним законом заготовки [2]. На етапі технологічної підготовки виробництва доцільно провести моделювання цього експерименту за допомогою розробленої в Лабораторії віртуальних засобів навчання Міністерства освіти і науки України прикладною програмою (рис.3).

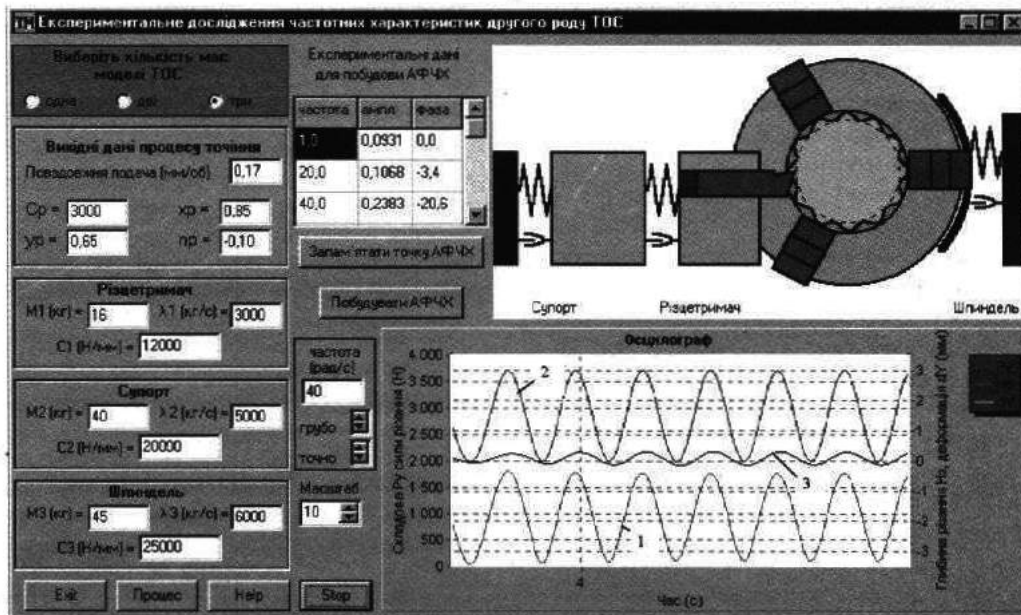
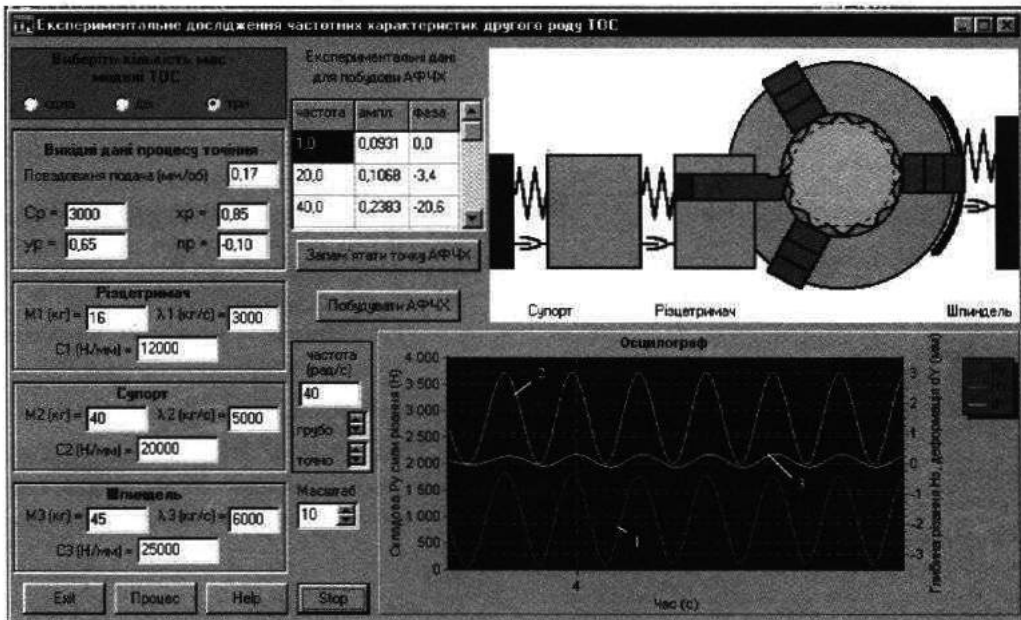
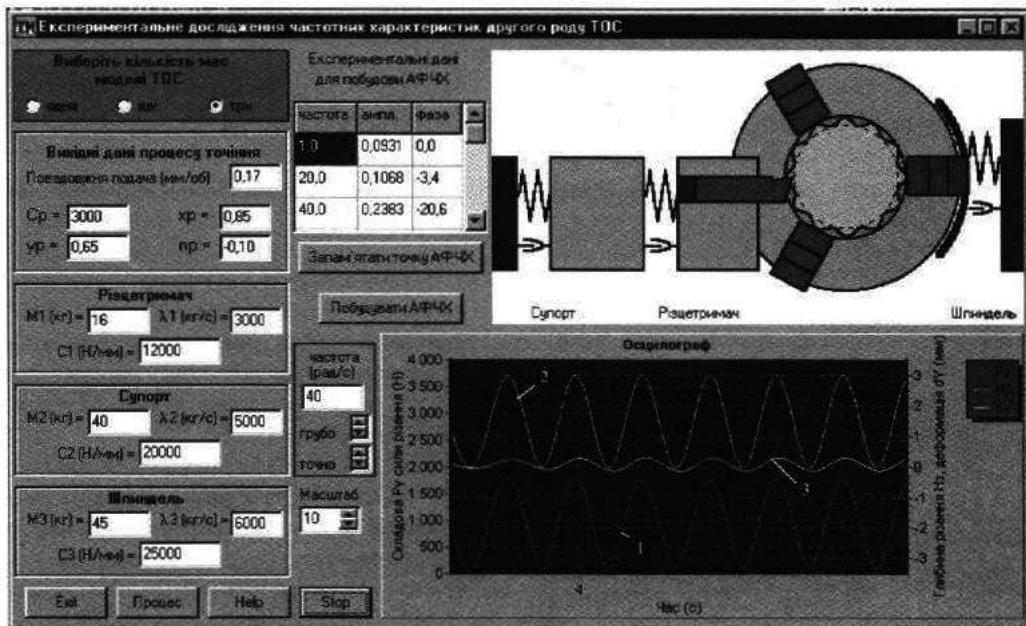


Рис.3. Головний інтерфейс прикладної програми

Програма призначена для моделювання експериментального дослідження частотних властивостей ТОС при точінні. Динамічна модель ТОС, в залежності від ступеня ідеалізації, може бути представлена одно масовою, двома масовою або трьома масовою системою. У разі вибору одно масової системи до моделі входить пружна система, яка зведена до різдтримача та процес точіння, що відбувається в замкненій ТОС. У разі вибору двох масової системи динамічна модель складається з різдтримача і супорта, а при трьох масовій системі до них додається динамічна модель шпинделя. При будь-якому виборі до математичної моделі входить процес різання, що відбувається в замкненій системі (рис.4).

```

procedure Model3;
begin
  Hf:=H33-(U[2]+U[6])*1000;
  if Hf<0.0001 then Py:=0
    else Py:=A1*Power(Hf,xp)*Power(V,np);
  Su[1]:=Py/M2-A2*(U[1]-U[3])-A3*(U[2]-U[4]);
  Su[2]:=U[1];
  Su[3]:=A4*(U[1]-U[3])+A5*(U[2]-U[4])-A6*U[3]-
  A7*U[4];
  Su[4]:=U[3];
  Su[5]:=Py/M3-A8*U[5]-A9*U[6];
  Su[6]:=U[5];
end;

```

Рис.4. Математична модель ТОС

Коефіцієнти математичної моделі шостого порядку визначаються за вихідними даними ТОС:  $A1=C_p S^{xp}$ ;  $A2=L_1/M_1$ ;  $A3=C_1/M_1$ ;  $A4=L_1/M_2$ ;  $A5=C_1/M_2$ ;  $A6=L_2/M_2$ ;  $A7=C_2/M_2$ ;  $A8=L_3/M_3$ ;  $A9=C_3/M_3$ ; де  $C_p$ ,  $ur$  – коефіцієнт і показник ступеня у залежності складової  $P_y$  сили різання,  $M$ ,  $C$ ,  $L$  – маса, жорсткість та коефіцієнт в'язкого тертя динамічної моделі у відповідності до індексу: різдтримача, супорта і шпинделя.

При моделюванні досліджується процес обробки спеціально підготовленої деталі, контур якої у поперечному перерізі сформований за гармонічним законом. Таким чином, на пружну ТОС діє збурення у вигляді припуску, що змінюється також за гармонічним законом. Амплітуда закону постійна, а частота змінюється дослідником під час експерименту.

Реакція пружної ТОС спостерігається на осцилографі як зміна складової  $P_y$  сили різання і пружної деформації у напрямку осі  $Y$ , яка визначає технологічну спадковість. Залежність амплітуди, що вимірюється як відношення максимальної величини пружної деформації до максимальної величини складової  $P_y$  сили різання і фази, яка дорівнює куту між піком пружної деформації і складової  $P_y$  сили різання, від частоти визначає амплітудно-фазову частотну характеристику другого роду даної ТОС.

На головному інтерфейсі програми розташовані поля для вибору відповідної динамічної моделі пружної ТОС. Ці поля відмічаються мишкою і на інтерфейсі з'являються відповідні вихідні дані, а схема динамічної моделі (розташована справа на інтерфейсі) змінюється.

Процес моделювання розпочинається з натискання на кнопку "Процес". Над кнопкою "Stop" розташовані кнопки управління масштабом зображення складової  $P_y$  сили різання (ліва вісь осцилографа) та частотою (грубо - через 1 рад/с, точно - через 0.1 рад/с). Ще вище розташовані кнопки "Побудувати АФЧХ" і "Запам'ятати точку АФЧХ", призначення яких випливає з назви. Таблиця експериментальних даних

для побудови АФЧХ призначена для візуалізації частоти, амплітуди і фази у кожній строчці, що визначають координати однієї точки графіку АФЧХ.

При моделюванні на екрані осцилографа з'являються осцилограми:

- складової  $P_y$  сили різання - червона лінія (лінія 1 на рис.3);
- припуску  $H_y$  - зелена лінія (лінія 2 на рис.3);
- пружної деформації  $dy$  - жовта лінія (лінія 3 на рис.3).

При натисканні на кнопку "Запам'ятати точку АФЧХ" у таблиці з'являються відповідні дані. Після зміни частоти при натисканні на кнопку "Запам'ятати точку АФЧХ" дані будуть автоматично занотовані у наступну строчку таблиці.

При наявності даних, що визначають не менш ніж три точки, натискання на кнопку "Побудувати АФЧХ" приводить до появи додаткового інтерфейсу з відповідним графіком. Підписи біля експериментальних точок відповідають значенню частоти, а крива графіку побудована як Ермітів кубічний сплайн.

Гармоніки ряду похибки (див.рис.2) складають похибку форми деталі, що визначається за залежністю:

$$\Delta_y(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta(\omega_0 n) \text{Cos}[\pi \alpha + \varphi(\omega_0 n)] \quad (7)$$

де  $\alpha$  - полярний кут деталі;  $\delta(\omega_0 n)$  – амплітудно-частотна характеристика;  $\varphi(\omega_0 n)$  – фазово-частотна характеристика ТОС. Практично кількість гармонік ряду завжди обмежується з міркувань нормальної точності токарної обробки.

Розглянемо приклад. Нехай на токарному верстаті обробляється заготовка  $R_s = 50$  мм до розміру деталі  $R_d = 45$  мм, причому ексцентриситет  $e = 0.5$  мм. Параметри ТОС верстата відповідають зазначеним на головному інтерфейсі прикладної програми (рис.3).

Розрахунками за формулами (6) чисельним методом визначаємо величини коефіцієнтів ряду Фур'є:

$$a_0 = 10, a_1 = -0.5, a_2 = 0.015, a_3 = -0.00125, a_4 = 0.000103.$$

Коефіцієнт  $a_0$ , у відповідності до залежності (4), визначає постійну складову збурення, яким є припуск і вплив цієї складової може бути компенсований підналадкою верстату. Коефіцієнти  $a_3$  і  $a_4$  визначають змінні складові, але для умов токарної обробки з нормальною точністю, їхнім впливом можна знехтувати. Таким чином, змінна складова припуску, що визначає похибку форми деталі, яку не можна компенсувати будь-якою постійною корекцією розмірного ланцюга ТОС, з достатнім ступенем точності може бути представлена двома гармоніками:

$$H_{z3}(t) = -0.5 \text{Cos}(\omega_0 t) + 0.015 \text{Cos}(2\omega_0 t).$$

Згідно з алгоритмом рис.2 та залежністю (7), для прогнозування і оцінки похибки форми необхідно використовувати частотні характеристики ТОС: амплітудно-частотну та фазово-частотну. Амплітудно-частотна характеристика обумовлює викривлення амплітуди вхідної гармоніки змінної складової припуску, а фазово-частотна характеристика – фазовий кут зсуву цієї гармоніки до відповідної вихідної гармоніки.

Необхідні характеристики у вигляді амплітудно-фазової частотної характеристики (рис.5) отримані при імітаційному моделюванні ТОС за допомогою прикладної програми. Параметри динамічної моделі та процесу різання ТОС відповідають зазначеним на інтерфейсі програми (див.рис.3).

Похибку форми деталі розраховуємо наступним чином. При частоті обертання деталі під час обробки 40 рад/с (приблизно 400 об/хв) за АФЧХ ТОС (див.рис.5) визначаємо амплітуду і фазу для частоти  $\omega_0 = 40$  рад/с (0.1502 та  $18^\circ$  відповідно) та для частоти  $2\omega_0 = 80$  рад/с (0.0685 та  $146^\circ$ ). У відповідності до залежності (7) маємо визначення похибки форми у функції полярного кута  $\alpha$  деталі:

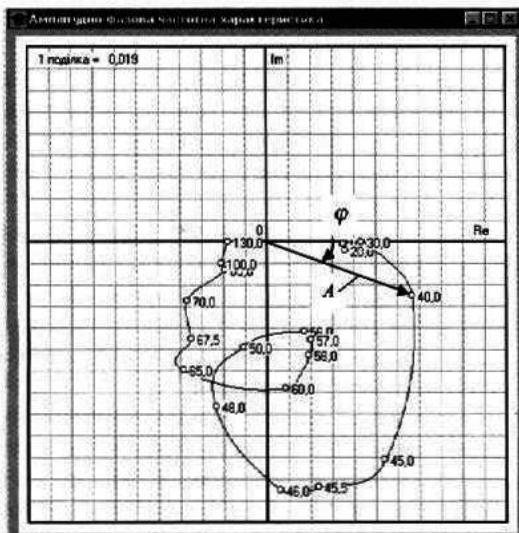


Рис.5. Результаты моделирования

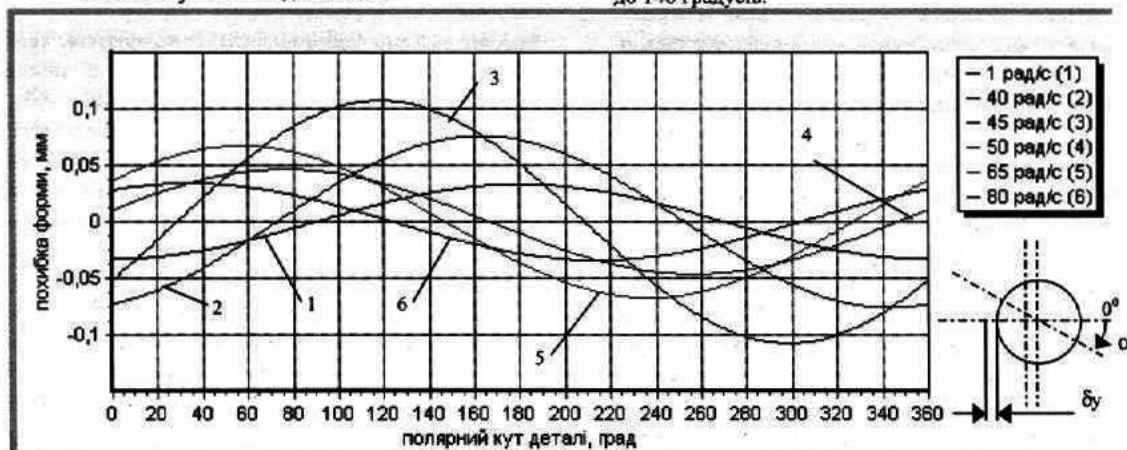


Рис.6. Залежність похибки форми від частоти обертання

#### Висновки.

В результаті проведених досліджень можна констатувати, що технологічна спадковість залежить не тільки від збурення, яким є припуск, а й від динамічних властивостей ТОС і частоти обертання шпинделя під час токарної обробки.

Для оцінки величин технологічної спадковості та правильного вибору режиму різання треба вести розрахунки за приведеною методикою.

$$\delta_y(\alpha) = -0.5 \cdot 0.1502 \cdot \cos(\alpha + 18^\circ) + 0.015 \cdot 0.0685 \cdot \cos(2\alpha + 146^\circ).$$

Аналогічно визначається похибка форми при інших частотах обертання деталі під час обробки.

Аналіз результатів розрахунків для умов прикладу (рис.6) показує, що при налагодженні верстату з компенсацією постійної складової похибки розмір деталі відповідає кресленню, але відносно осі є похибка, яка визначається технологічною спадковістю і обумовлює похибку форми. Вона може бути оцінена за амплітудою та фазою, що визначає розташування за полярним кутом максимального значення похибки. Величини амплітуди та фази в діапазоні середніх частот обертання деталі під час точіння сильно залежать від значення частоти. Максимальна похибка (0.11мм) спостерігається при частоті обертання 45 рад/с (430 об/хв), тоді як при обробці з низькими частотами, або великими частотами максимальна похибка суттєво зменшується (до 0.03мм), а полярний кут її розташування змінюється від нуля градусів до 146 градусів.

Розроблена прикладна програма дозволяє вирішити це завдання при умові адекватності вихідних даних реальним даним верстату і процесу різання.

#### Список використаної літератури

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - Москва, Наука, 1977. - 832 с.
2. Петраков Ю.В. Теория автоматического управления в металлообработке. - Київ, ІЗМН, 1999.-212 с.

УДК 621.9

В.Д.Ковалев, доктор техн.наук, доц.

Донбасская государственная машиностроительная академия, г.Краматорск, Украина

### ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ КОНСТРУКЦИЙ ТЯЖЕЛЫХ СТАНКОВ

*Рассмотрены особенности и перспективы развития конструкций тяжелого металлорежущего оборудования. Приведены способы адаптивного управления тяжелыми станками, позволяющие повысить точность обработки.*

Специфика изделий, обрабатываемых на тяжелых станках – большие массы и габариты обрабатываемых деталей, их уникальность, высокая стоимость и большая трудоемкость механической обработки – предъявляют особые требования к конструкции станков, к их эксплуатации, которые существенно отличаются от традиционных решений для малых и средних станков.

При прецизионной обработке во многих случаях необходимо не столько достичь высокой точности механизмов и узлов оборудования, сколько обеспечить вполне определенное отклонение, как по величине, так и по его пространственной ориентации, то есть процесс достижения точности должен быть управляемым. Кроме того, особенность обеспечения точности тяжелых станков связана с большими масса-