

І.І. Філімоніхіна, асистент

Кіровоградський національний технічний університет

Застосування функції Гамільтона до визначення умов настання автобалансування ротора з нерухомою точкою

З використанням функції Гамільтона досліджені критичні швидкості системи, складеної з ротора з нерухомою точкою, мас, що створюють дисбаланс і автобалансира для зрівноваження ротора, при переході через які настає або втрачається автобалансування. Отримані узагальнені критичні швидкості, придатні для будь-якого типу автобалансира. Встановлено, що автобалансування можливе тільки у разі довгого щодо нерухомої точки ротора.

автобалансир, ротор, дисбаланс, функція Гамільтона, стійкість

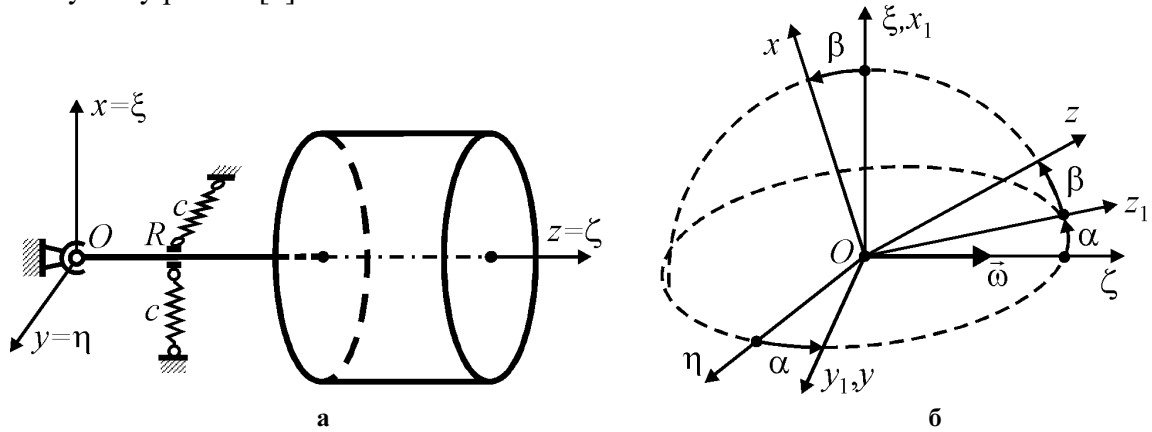
Для зрівноваження на ходу швидкісних роторів застосовуються пасивні автобалансири (АБ), такі як кульові, кільцеві, маятникові тощо [1-4]. В них корегувальні вантажі (КВ) за певних умов з часом самі приходять в положення, в якому зрівноважують ротор і далі обертаються разом з ним як одне ціле, поки не почне змінюватися дисбаланс, кутова швидкість обертання ротора, або не з'являться інші збурення.

Процес визначення умов настання автобалансування ускладнює велика кількість усталених рухів, які теоретично може здійснювати система. На практиці здійснюватимуться тільки ті рухи, які стійкі. В зв'язку з цим необхідним етапом визначення умов настання автобалансування є пошук усталених рухів системи ротор-АБ і оцінка їх стійкості. У роботі [5] був обґрунтований новий підхід до розв'язання цієї задачі, заснований на використанні функції Гамільтона. Цей підхід був застосований до ротора на ізотропних опорах, що здійснює плоский рух і зрівноважується пасивним АБ. У даній роботі цей підхід застосовується до дослідження критичних швидкостей системи, складеної з ротора з нерухомою точкою, мас, які створюють дисбаланс і автобалансира для зрівноваження ротора.

На рис. 1, а показана схема ротора з нерухомою точкою на симетричних опорах, а на рис. 1, б – його кінематика руху. Ротор – зрівноважений, обертається із сталою кутовою швидкістю ω навколо осі ζ , яка проходить через подовжню вісь валу ротора при недеформованих пружинах. З ним жорстко зв'язані маси, що створюють дисбаланс. Усередині ротора встановлений АБ для зрівноваження дисбаланса. На рис. 1 дисбаланс і АБ не показані, бо як буде показано нижче детальна інформація про них не потрібна для досліджень. Ротор утримують симетричні опори жорсткості c . Дія сил тяжіння не враховується.

Рух ротора задаватимемо за допомогою двох трійок рухомих осей, які обертаються із кутовою швидкістю ω навколо осі ζ . Осі x, y, z - головні осі ротора, виходять з нерухомої точки O . Вісь z - подовжня вісь ротора, і є його центральною віссю. Осі ξ, η, ζ – виходять з нерухомої точки O . Вісь ζ направлена по осі обертання ротора. В процесі руху положення осей x, y, z щодо осей ξ, η, ζ задається кутами Резаля α, β , як це показано на рис. 1, б. Положення КВ щодо ротора визначатимемо за допомогою відносних координат, які відраховуються від ротора. Тоді завдяки способу введення узагальнених координат, на будь-якому усталеному русі системи ці

координати є сталими величинами. Для подальших досліджень застосовуємо підхід, розвинутий у роботі [5].



а – схема ротора, б – кінематика руху ротора

Рисунок 1 – Модель ротора з нерухомою точкою

Побудуємо функцію Гамільтона для усталених рухів.

Знайдемо кінетичну енергію системи на усталеному русі. Тензор інерції системи відносно осей $Oxyz$:

$$J = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Його компоненти є сумою складових, утворених ротором, дисбалансом, АБ. Оскільки ротор симетричний, то компоненти J_{xz} , J_{yz} утворені дисбалансом і АБ. Як буде показано нижче на основному русі ці компоненти рівні нулю.

У проекціях на осі $Oxyz$ кутова швидкість обертання системи визначається так (рис. 1, б):

$$\begin{aligned} \omega_x &= -\omega \cos \alpha \sin \beta = -\omega \beta + O(\beta^3), & \omega_y &= \omega \sin \alpha = \omega \alpha + O(\alpha^3), \\ \omega_z &= \omega \cos \alpha \cos \beta = \omega [1 - (\alpha^2 + \beta^2)/2] + O(\alpha^4, \beta^4, \alpha^2 \beta^4). \end{aligned} \quad (2)$$

Кінетична енергія системи на усталеному русі

$$T_0 = \frac{1}{2} \bar{\omega} J \bar{\omega} = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2) - J_{xy} \omega_x \omega_y - J_{xz} \omega_x \omega_z - J_{yz} \omega_y \omega_z. \quad (3)$$

З точністю до величин другого порядку малості включно

$$T_0 = \frac{\omega^2}{2} [(J_y - J_z) \alpha^2 + (J_x - J_z) \beta^2 + 2(J_{xy} \alpha \beta + J_{xz} \beta - J_{yz} \alpha) + J_z]. \quad (4)$$

Потенційна енергія системи:

$$\Pi = \frac{1}{2} c \Delta l^2, \quad (5)$$

де Δl - модуль деформації пружини. У проекціях на осі ξ, η, ζ

$$\begin{aligned} \Delta l_\xi &= -r \cos \beta \sin \alpha = -r \alpha + O(\alpha^3, \alpha \beta^2), & \Delta l_\eta &= r \sin \beta = r \beta + O(\beta^3), \\ \Delta l_\zeta &= l(1 - \cos \alpha \cos \beta) = 0 + O(\alpha^2, \beta^2). \end{aligned} \quad (6)$$

З точністю до величин другого порядку малості включно

$$\Pi = \frac{1}{2} c r^2 (\alpha^2 + \beta^2). \quad (7)$$

Функція Гамільтона на усталеному русі

$$H_0 = \Pi - T_0. \quad (8)$$

З точністю до величин другого порядку малості включно

$$H_0 = \frac{1}{2} cr^2 (\alpha^2 + \beta^2) - \frac{\omega^2}{2} [(J_y - J_z) \alpha^2 + (J_x - J_z) \beta^2 + 2(J_{xy} \alpha \beta + J_{xz} \beta - J_{yz} \alpha) + J_z]. \quad (9)$$

Встановимо властивості усталених рухів системи.

З рівнянь (9) можна знайти рівняння усталених рухів за координатами ротора:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0}{\partial \alpha} &= [cr^2 - (J_y - J_z) \omega^2] \alpha - J_{xy} \omega^2 \beta + J_{yz} \omega^2 = 0, \\ \frac{\partial H_0}{\partial \beta} &= [cr^2 - (J_x - J_z) \omega^2] \beta - J_{xy} \omega^2 \alpha - J_{xz} \omega^2 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Розв'язок цих рівнянь відносно кутів α , β має вигляд:

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega^2 \{ [(J_x - J_z) \omega^2 - cr^2] J_{yz} + J_{xy} J_{xz} \omega^2 \} / \Delta(\omega), \\ \beta &= -\omega^2 \{ [(J_y - J_z) \omega^2 - cr^2] J_{xz} + J_{xy} J_{yz} \omega^2 \} / \Delta(\omega), \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$\Delta(\omega) = [(J_y - J_z)(J_x - J_z) - J_{xy}^2] \omega^4 - (J_x + J_y - 2J_z) cr^2 \omega^2 + c^2 r^4. \quad (12)$$

На основному русі $\alpha = \beta = 0$. З врахуванням (11) на цьому русі

$$[(J_x - J_z) \omega^2 - cr^2] J_{yz} + J_{xy} J_{xz} \omega^2 = 0 \quad [(J_y - J_z) \omega^2 - cr^2] J_{xz} + J_{xy} J_{yz} \omega^2 = 0. \quad (13)$$

Розглядатимемо рівність (13) як систему алгебраїчних рівнянь для пошуку J_{xz} , J_{yz} .

Можна перевірити, що визначник цієї системи – $\Delta(\omega)$ з (12). Він дорівнює нулю тільки на ізольованих значеннях ω , які відповідають критичним швидкостям обертання системи. Тому на основних рухах, на некритичних швидкостях

$$J_{xz} = 0, \quad J_{yz} = 0. \quad (14)$$

Тому кути α , β є величинами одного порядку малості з відцентровими моментами інерції J_{xz} , J_{yz} . На основному русі ці величини рівні нулю, а в околі цього руху є малими величинами одного порядку малості з кутами α , β .

На побічних рухах $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Тому на цих рухах і $J_{xz} \neq 0$, $J_{yz} \neq 0$. Для пошуку всіх усталених рухів системи в явному вигляді необхідна інформація про дисбаланс і АБ.

Розв'язок системи рівнянь (10) відносно відцентрових моментів інерції J_{xz} , J_{yz} має вигляд:

$$J_{xz} = [cr^2 / \omega^2 - (J_x - J_z)] \beta - J_{xy} \alpha \quad J_{yz} = -[cr^2 / \omega^2 - (J_y - J_z)] \alpha + J_{xy} \beta. \quad (15)$$

Дослідимо стійкість основних рухів. Досліджуватимемо функцію Гамільтона (9) на умовний екстремум в припущенні, що виконуються рівняння (10). Дослідження проводитимемо по змінним α , β . Підставляючи (15) в (9), після перетворень, отримаємо

$$H_0(\alpha, \beta) = \{ [(J_y - J_z) \omega^2 - cr^2] \alpha^2 + [(J_x - J_z) \omega^2 - cr^2] \beta^2 + 2J_{xy} \omega^2 \alpha \beta - J_z \omega^2 \} / 2. \quad (16)$$

Позначимо через

$$a_{11} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial \alpha^2} = (J_y - J_z) \omega^2 - cr^2, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial \beta^2} = (J_x - J_z) \omega^2 - cr^2 \quad a_{12} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial \alpha \partial \beta} = J_{xy} \omega^2. \quad (17)$$

Згідно критерію Сильвестра необхідні і достатні умови мінімуму функції H_0 на основному русі

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad \Delta(\omega) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0. \quad (18)$$

Відмітимо, що $\Delta(\omega)$ в (18) співпадає з цією функцією з (12).

Перші дві умови в (17) можуть виконуватися за умови, що

$$J_x > J_z, \quad J_y > J_z. \quad (19)$$

на швидкостях, що перевищують

$$\omega > \omega^*, \quad \omega^* = \max \left(\sqrt{\frac{cr^2}{J_x - J_z}}, \sqrt{\frac{cr^2}{J_y - J_z}} \right). \quad (20)$$

Відповідно до умови (19) можливе зрівноваження складеного ротора (якій складається із ротора, дисбаланса і АБ), довгого відносно нерухомої точки.

Досліджуємо функцію $\Delta(\omega)$. Повернемо осі x, y на кут ψ навколо осі z (рис. 2).

Отримаємо нові осі x_1, y_1 . Між координатами наступний зв'язок:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \psi + y \sin \psi, & y_1 &= -x \sin \psi + y \cos \psi, & z_1 &= z; \\ x &= x_1 \cos \psi - y_1 \sin \psi, & y &= x_1 \sin \psi + y_1 \cos \psi, & z &= z_1. \end{aligned} \quad (21)$$

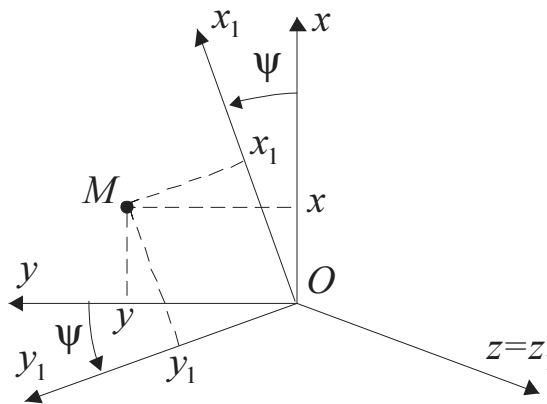


Рисунок 2 – Поворот осей x, y на кут ψ навколо осі z

Тоді

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\psi - J_{xy} \sin 2\psi, & J_{y_1} &= \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\psi + J_{xy} \sin 2\psi, \\ J_{x_1 y_1} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\psi + J_{xy} \cos 2\psi. \end{aligned} \quad (22)$$

Визначимо кут повороту ψ з умови $J_{x_1 y_1} = 0$. З урахуванням останнього рівняння з (22), отримуємо

$$\sin 2\psi = -\lambda J_{xy}, \quad \cos 2\psi = \lambda \frac{J_x - J_y}{2}, \quad \lambda^2 \left[J_{xy}^2 + \left(\frac{J_x - J_y}{2} \right)^2 \right] = 1. \quad (23)$$

Тоді

$$\lambda = \pm \frac{2}{\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}}. \quad (24)$$

Після повороту осей x, y на кут ψ відцентровий момент інерції $J_{x_1 y_1}$ звернеться в нуль, а осьові моменти інерції J_{x_1}, J_{y_1} приймуть екстремальні значення. Нехай для визначеності

$$J_{x_1} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}, \quad J_{y_1} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}. \quad (25)$$

Відмітимо, що $J_{x_1} > J_{y_1}$, якщо тільки $J_{xy} \neq 0$. З (25) знаходимо

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y, \quad J_{x_1} J_{y_1} = \left(\frac{J_x + J_y}{2} \right)^2 - \left(\frac{J_x - J_y}{2} \right)^2 - J_{xy}^2 = J_x J_y - J_{xy}^2.$$

Тоді

$$J_x + J_y = J_{x_1} + J_{y_1}, \quad J_x J_y - J_{xy}^2 = J_{x_1} J_{y_1} \quad (26)$$

і $\Delta(\omega)$ перетвориться до вигляду

$$\Delta(\omega) = [\omega^2 (J_{x_1} - J_z) - cr^2][\omega^2 (J_{y_1} - J_z) - cr^2]. \quad (27)$$

Умова $\Delta(\omega) > 0$ виконуватиметься, якщо

$$0 \leq \omega < \omega_1, \quad \omega > \omega_2, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{cr^2}{J_{x_1} - J_z}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{cr^2}{J_{y_1} - J_z}}. \quad (28)$$

У свою чергу, умови (28) матимуть місце при виконанні умови

$$J_{y_1} > J_z. \quad (29)$$

Відмітимо, що $J_{y_1} \leq J_y \leq J_x \leq J_{x_1}$. Тому з умов (19) і (29), з врахуванням (25), можна отримати наступне обмеження, яке накладається на масо-інерційні характеристики складеного ротора, при яких можливе автобалансування

$$J_{y_1} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} > J_z. \quad (30)$$

З цієї умови випливає, що складений ротор повинен бути довгим щодо нерухомої точки.

З умов (20) і (28) отримуємо, що автобалансування можливе на швидкостях, що перевищують другу критичну швидкість складеного ротора:

$$\omega > \omega_2. \quad (31)$$

Відмітимо, що на цих швидкостях не можуть бути стійкими побічні рухи, оскільки на них $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ і при ненульових значеннях α , β функція Гамільтона (9) не приймає мінімального значення.

Оцінимо стійкість побічних рухів. Підставимо у функцію Гамільтона (9) кути α , β з (11). Після перетворень отримаємо

$$H_0(u, v) = \frac{1}{2} \omega^2 \left[\frac{f(u, v) \omega^2}{\Delta(\omega)} - J_z \right], \quad (32)$$

де

$$f(u, v) = [(J_y - J_z) \omega^2 - cr^2] u^2 + [(J_x - J_z) \omega^2 - cr^2] v^2 + 2J_{xy} \omega^2 uv, \quad u = J_{xz}, \quad v = J_{yz}. \quad (33)$$

Тут функція Гамільтона подана як функція J_{xz}, J_{yz} . Ці відцентрові моменти інерції можна розглядати як узагальнені координати, бо вони залежать від положення КВ відносно ротора (і дисбаланса). Тому дослідження стійкості ustalених рухів будемо проводити по цим узагальненим координатам.

Повернемо осі x, y на такий кут ψ навколо осі z (рис. 2), щоб $J_{x_1 y_1} = 0$. Тоді

$$f(u_1, v_1) = [(J_{y_1} - J_z) \omega^2 - cr^2] u_1^2 + [(J_{x_1} - J_z) \omega^2 - cr^2] v_1^2, \quad u_1 = J_{x_1 z_1}, \quad v_1 = J_{y_1 z_1},$$

$$\Delta(\omega) = [(J_{y_1} - J_z) \omega^2 - cr^2][\omega^2 (J_{x_1} - J_z) - cr^2]. \quad (34)$$

З урахуванням цього функція Гамільтона (32) перетвориться до вигляду

$$H_0(u_1, v_1) = \frac{1}{2} \omega^2 \left[\frac{u_1^2 \omega^2}{(J_{x_1} - J_z) \omega^2 - cr^2} + \frac{v_1^2 \omega^2}{(J_{y_1} - J_z) \omega^2 - cr^2} - J_z \right]. \quad (35)$$

На основному русі $u_1 = v_1 = 0$. Оскільки $J_{x_1} > J_{y_1} > J_z$, то функція $H_0(u_1, v_1)$ матиме мінімум на основному русі, якщо виконуватиметься умова (31), що співпадає із результатом, отриманим вище.

На побічних рухах $u_1 \neq 0$, $v_1 \neq 0$. З (35) видно, що в діапазоні швидкостей

$$\omega_1 < \omega < \omega_2 \quad (36)$$

жодний усталений рух не може бути стійким, оскільки функція $H_0(u_1, v_1)$ не знаковизначена. На швидкостях, менших за першу критичну швидкість

$$\omega < \omega_1 \quad (37)$$

функція $H_0(u_1, v_1)$ має абсолютний мінімум на тому русі, на якому функція від дисбалансу

$$\frac{u_1^2}{(J_{x_1} - J_{z_1})\omega^2 - cr^2} + \frac{v_1^2}{(J_{y_1} - J_{z_1})\omega^2 - cr^2} \quad (38)$$

приймає абсолютне мінімальне значення. Тому цей рух може бути стійким на цьому діапазоні швидкостей. Для дослідження стійкості усталених рухів в явному вигляді потрібна інформація про масо-інерційні характеристики ротора, дисбаланса і автобалансира.

Проведені дослідження дозволяють зробити такі висновки для ротора з нерухомою точкою на симетричних пружних опорах, який зрівноважується АБ:

1) для визначення критичних швидкостей системи ротор-АБ, при переході через які настає чи втрачається автобалансування, ефективним є метод використання функції Гамільтона, як функції узагальнених координат і швидкостей;

2) за допомогою методу одержуються узагальнені критичні швидкості, які не залежать в явному вигляді від дисбалансу і типу АБ і тому придатні для будь-якого типу АБ;

3) автобалансування можливе тільки у разі довгого відносно нерухомої точки ротора на швидкостях, які перевищують другу критичну швидкість системи.

Список літератури

1. Thearle E. L. Automatic dynamic balancers Part 1 – Leblanc balancers // Machine Design, 1950a, Vol. 22 No 9, pp. 119-124.
2. Thearle E. L. Automatic dynamic balancers Part 2 – Ring, pendulum and ball balancers // Machine Design, 1950b, Vol. 22 No 10, pp. 103-106.
3. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. -М.: Наука, 2002. -119 с.
4. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами: Монографія (за спеціальністю 05.02.09 - динаміка та міцність машин). - Кіровоград: КНТУ, 2004. - 352 с.
5. Філімоніхін Г.Б., Філімоніхіна І.І. Застосування функції Гамільтона до визначення умов настання автобалансування // Збірник наукових праць КНТУ, 2006. Вип. №17, С. 212-218.

С использованием функции Гамильтона исследованы критические скорости системы, состоящей из ротора с неподвижной точкой, масс, создающих дисбаланс и автобалансира для его уравновешивания, при переходе через которые наступает или утрачивается автобалансировка. Получены обобщенные критические скорости, пригодные для любого типа автобалансира. Установлено, что автобалансировка возможна только в случае длинного относительно неподвижной точки ротора.

With the use of the Hamilton's function critical speeds of the system, consisting of rotor with an immobile point, the masses, creating a disbalance and autobalancers for its balancing are explored, in transition of which comes or lost autobalancing. The generalized critical speeds, suitable for any type of autobalancers, are found. It is set that autobalancing is possible only in the case of long in relation to an immobile point rotor.

Одержано 02.11.06