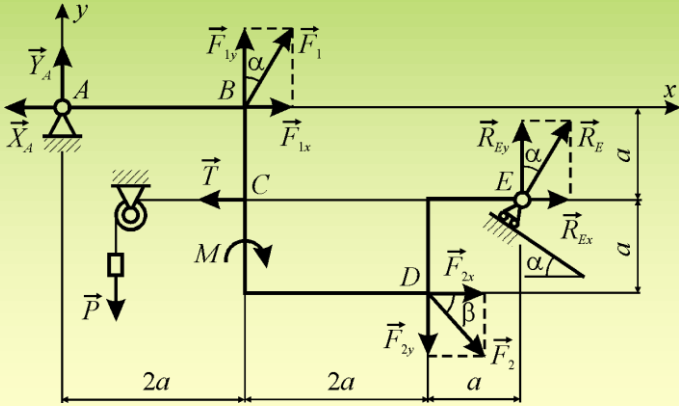


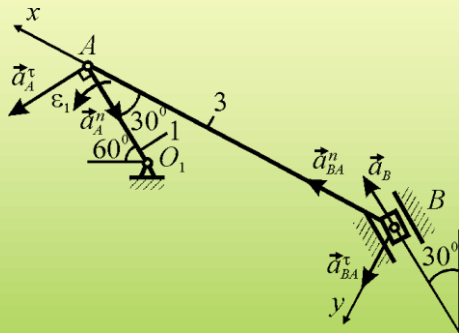
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ



Г. Б. Філімоніхін, В. В. Пирогов,
Л. С. Олійніченко

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА, ДИНАМІКА



Кропивницький – 2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра деталей машин та прикладної механіки

Г. Б. Філімоніхін, В. В. Пирогов,
Л. С. Олійніченко

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА, ДИНАМІКА

Рекомендовано кафедрою деталей машин та прикладної механіки Центральноукраїнського національного технічного університету для студентів технічних та електротехнічних спеціальностей.

Протокол № 10 від 14.05.2024 р.

Філімоніхін Г. Б., Пирогов В. В., Олійніченко Л. С. Технічна механіка. Статика, динаміка [електроний ресурс]. – Кропивницький: ЦНТУ, 2024. – 41 с.: іл.

Табл. 7. Іл. 65. Бібліогр.: 7 назв.

Укладач	д.т.н., проф. Філімоніхін Геннадій Борисович ; к.ф.-м.н., доц. Пирогов Володимир Васильович ; к.т.н., ст. викл. Олійніченко Любов Сергіївна .
Рецензент	д.т.н., проф. Мацуй Анатолій Миколайович , професор кафедри автоматизації виробничих процесів Центральноукраїнського національного технічного університету.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	4
Задача С1 – рівновага збіжної просторової системи сил.....	5
1.1. Умова задачі, розрахункові дані	5
1.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі.....	5
1.3. Приклад розв’язання задачі С1	7
1.4. Документ MathCad для розв’язання задачі С1	10
Задача С2 – рівновага довільної плоскої системи сил прикладених до декількох зв’язаних між собою тіл	11
2.1. Умова задачі, розрахункові дані	11
2.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі.....	13
2.3. Приклад розв’язання задачі С2	14
2.4. Документ MathCad для розв’язання задачі С2	17
Задача Д1 – коливання матеріальної точки при відносному русі.....	18
3.1. Умова задачі, розрахункові дані	18
3.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі.....	20
3.3. Приклад розв’язання задачі Д2	22
3.4. Документ MathCad для розв’язання задачі Д1	26
Задача Д2 – теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи	28
4.1. Умова задачі, розрахункові дані	28
4.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі.....	30
4.3. Приклад розв’язання задачі Д2.....	30
Задача Д3 – принцип можливих переміщень	35
5.1. Умова задачі, розрахункові дані	35
5.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі.....	35
5.3. Приклад розв’язання задачі Д3	38
ЛІТЕРАТУРА.....	41

Передмова

Технічна (теоретична) механіка – загальнонаукова дисципліна, яка займає важливе місце в вузівській програмі фундаментальної підготовки спеціалістів. Її розділи “Статика”, ”Кінематика” і ”Динаміка” – відносно самостійні частини курсу, які використовуються для вивчення багатьох предметів.

Необхідною умовою успішного оволодіння курсом є виконання індивідуальних домашніх завдань. Задачі треба розв’язувати на протязі семестру відразу після розгляду відповідної теми на лекціях, чи практичних заняттях.

Поточний контроль відбувається шляхом розв’язання типових задач курсу на контрольних і самостійних роботах, які проводяться після закінчення відповідних розділів. У посібнику сформульовані типові багатоваріантні задачі та приведені приклади їх розв’язання.

Посібник відповідає діючій робочій програмі з теоретичної механіки, призначений для студентів електротехнічних спеціальностей і може бути використаний як в навчальному процесі, так і в інженерній практиці.

Дані для розрахунків брати до кожної задачі згідно номеру варіанту, який видає викладач. Наприклад:

37

Останній цифрі 7 відповідає номер рисунка, а передостанній 5 – номер рядку в таблиці вихідних розрахункових даних.

Зауваження:

- роботи, виконані не за варіантом, або несамотійно не зараховуються;
- допускається видача інших варіантів лектором, або викладачем, що проводить практичні заняття – на першій лекції, або на першому практичному занятті.

Задачі С1, С2, Д1 повинні підтверджуватись розрахунками в середовищі Mathcad.

Задача С1 – рівновага збіжної просторової системи сил

1.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Шість невагомих стрижнів з'єднані своїми кінцями шарнірно один з одним в двох вузлах і прикріплені іншими кінцями (теж шарнірно) до нерухомих опор A, B, C, D (рис. С1.0 – С1.9, табл. С1). Стрижні і вузли (вузли розташовані в вершинах H, K, L або M прямокутного паралелепіпеда) на рисунках не показані і повинні бути зображені по вихідним даним таблиці. У вузлі, який в кожній колонці таблиці вказаний першим, прикладена сила $P=200$ Н; у другому вузлі прикладена сила $Q=100$ Н. Сила \vec{P} утворює з додатніми напрямками координатних осей x, y, z кути, які рівні відповідно $\alpha_1=45^\circ, \beta_1=60^\circ, \gamma_1=60^\circ$, а сила \vec{Q} – кути $\alpha_2=60^\circ, \beta_2=45^\circ, \gamma_2=60^\circ$; напрямки осей x, y, z для всіх рисунків показані на рис. С1.0.

Грані паралелепіпеда, паралельні площині xu – квадрати. Діагоналі інших бічних граней утворюють з площиною xu кут $\varphi=60^\circ$, а діагональ паралелепіпеда утворює з цією площиною кут $\theta=51^\circ$.

На рис. С1.10 в якості приклада показано, як повинно виглядати креслення С1.1, якщо по умові задачі вузли знаходяться в точках L і M , а стрижнями є LM, LA, LB, MA, MC, MD . Також на рис. С1.10 показані кути φ і θ .

Знайти: зусилля в стрижнях.

Таблиця С1

Номер умови	0	1	2	3	4
Вузли	H, M	L, M	K, M	L, H	K, H
Стрижні	HM, HA, HB, MA, MC, MD	LM, LA, LD, MA, MB, MC	KM, KA, KB, MA, MC, MD	LH, LC, LD, HA, HB, HC	KH, KB, KC, HA, HC, HD
Номер умови	5	6	7	8	9
Вузли	M, H	L, H	K, H	L, M	K, M
Стрижні	MH, MB, MC, HA, HC, HD	LH, LB, LD, HA, HB, HC	KH, KC, KD, HA, HB, HC	LM, LB, LD, MA, MB, MC	KM, KA, KD, MA, MB, MC

1.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача С1 – на рівновагу просторової системи збіжних сил. При її розв'язанні слід розглянути окремо рівновагу кожного вузла, де сходяться стрижні та прикладені задані сили, і врахувати закон про

рівність дії і протидії. Для знаходження невідомих зусиль в стрижнях необхідно застосувати метод вирізання вузлів. Розпочинати необхідно з того вузла, де з'єднується не більше ніж три стрижня з невідомим зусиллями.

Зображати креслення можна без дотримання масштабу так, щоб добре було видно всі шість стрижнів. Стрижні необхідно пронумерувати в тому порядку, в якому вони вказані в таблиці; реакції стрижнів позначати буквою з індексом, відповідно до номера стрижня (наприклад, S_1 , S_2 і т.д.).

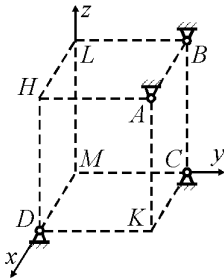


Рис. С1.0

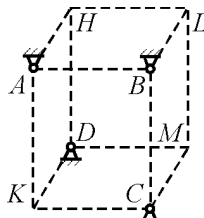


Рис. С1.1

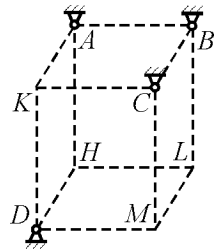


Рис. С1.2

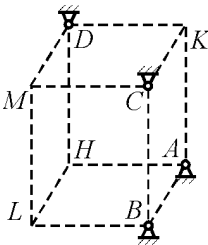


Рис. С1.3

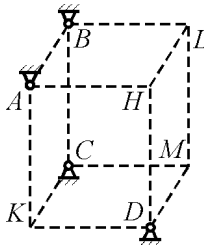


Рис. С1.4

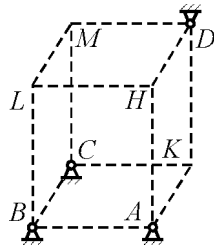


Рис. С1.5

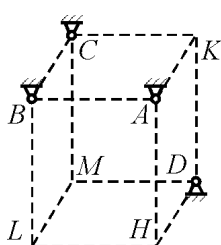


Рис. С1.6

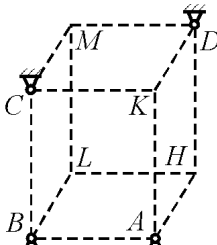


Рис. С1.7

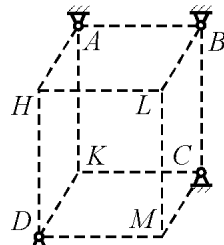


Рис. С1.8

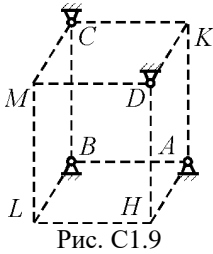


Рис. С1.9

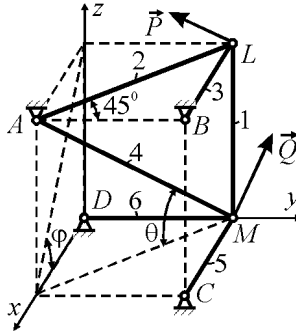


Рис. С1.10

1.3. Приклад розв'язання задачі С1

Умова задачі. Конструкція складається з невагомих стрижнів 1, 2, ..., 6 з'єднаних своїми кінцями шарнірно один з одним в двох вузлах (вузол L і M) і прикріплені іншими кінцями (теж шарнірно) до нерухомих опор A, C, D, K, H . Стрижні і вузли (вузли розташовані в вершинах прямокутного паралелепіпеда) на рисунку С1а не показані і повинні бути зображені по вихідним даним. У вузлах L і M прикладені сили \vec{P} і \vec{Q} , які утворюють з додатними напрямками координатних осей x, y, z кути $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ та $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ відповідно (рис. С1б та С1в).

Грані паралелепіпеда, паралельні площині xy – квадрати. Діагоналі інших бічних граней утворюють з площиною xy кут φ , а діагональ паралелепіпеда утворює з цією площиною кут θ .

Дано: $P=35$ кН, $Q=15$ кН, $\varphi=60^\circ$, $\theta=51^\circ$, $\mu=45^\circ$, $\alpha_1=45^\circ$, $\beta_1=60^\circ$, $\gamma_1=60^\circ$, $\alpha_2=60^\circ$, $\beta_2=45^\circ$, $\gamma_2=60^\circ$; вузли – L, M ; стрижні – LH, LM, LC, MA, MK, MD .

Знайти: зусилля в стрижнях.

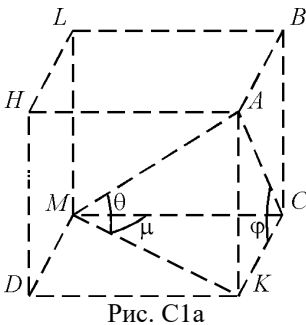


Рис. С1а

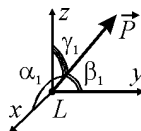


Рис. С1б

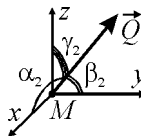


Рис. С1в

Розв'язок

1. Будемо розрахункову схему. Згідно з вихідними даними з'єднуємо відповідні вершини паралелепіпеда і отримуємо просторову конструкцію представлену на рис. С1г. У вузлах A, C, D, K, H розташовуємо нерухомі опори, а у вузлах L і M сили \vec{P} і \vec{Q} відповідно.

1.1. Визначимо проекції сил \vec{P} і \vec{Q} на координатні осі:

$$P_x = P \cos \alpha_1, \quad P_y = P \cos \beta_1, \quad P_z = P \cos \gamma_1;$$

$$Q_x = Q \cos \alpha_2, \quad Q_y = Q \cos \beta_2, \quad Q_z = Q \cos \gamma_2.$$

1.2. Визначаємо порядок розгляду вузлів L і M .

Розглядаючи рівновагу вузлів застосуємо метод вирізання вузлів. Вважаємо, що стрижні розтягнуті, тобто зусилля в розрізаних стрижнях ферми будуть направлені від відповідного вузла (рис. С1г).

Першим по порядку будемо розглядати той вузол у якому з'єднано не більше трьох стрижнів з невідомими зусиллями, тобто спочатку розглядатимемо рівновагу вузла L , а потім – вузла M .

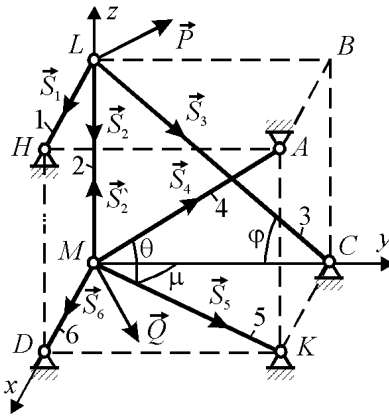


Рис. С1г

2. Розглянемо рівновагу вузла L (рис. С1г).

2.1. Складаємо векторне рівняння рівноваги вузла L :

$$\vec{P} + \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 = 0.$$

2.2. Складаємо рівняння рівноваги у координатній формі. Введемо координатні осі x, y та z і спроектуємо на них векторне рівняння рівноваги вузла L , отримаємо:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad P_x + S_1 = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad P_y + S_3 \cos \varphi = 0;$$

$$\sum F_{iz} = 0: \quad P_z - S_2 - S_3 \sin \varphi = 0.$$

3. Розглянемо рівновагу вузла M (рис. С1Г).

3.1. Складаємо векторне рівняння рівноваги вузла M :

$$\vec{Q} + \vec{S}'_2 + \vec{S}_4 + \vec{S}_5 + \vec{S}_6 = 0, \text{ тут } \vec{S}'_2 = \vec{S}_2.$$

3.2. Складаємо рівняння рівноваги у координатній формі. Спроектуємо на введені координатні осі векторне рівняння рівноваги вузла M , отримаємо:

$$\sum F_{ix} = 0: Q_x + S_4 \cos \theta \cos \mu + S_5 \cos \mu + S_6 = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0: Q_y + S_4 \cos \theta \cos \mu + S_5 \cos \mu = 0;$$

$$\sum F_{iz} = 0: Q_z + S'_2 + S_4 \sin \theta = 0.$$

4. Розв'язуємо отриману систему рівнянь в загальному вигляді.

Визначатимемо невідомі сили в тому порядку в якому вони приведені нижче:

$$S_1 = -P_x; \quad S_3 = -P_y / \cos \varphi; \quad S_2 = P_z - S_3 \sin \varphi; \quad S_4 = -(Q_z + S'_2) / \sin \theta;$$

$$S_5 = -(Q_y + S_4 \cos \theta \cos \mu) / \cos \mu; \quad S_6 = -Q_x - S_4 \cos \theta \cos \mu - S_5 \cos \mu.$$

5. Проводимо обчислення.

5.1. Визначаємо модулі проекцій сил:

$$P_x = 35 \cdot 0,707 = 24,745 \text{ кН}; \quad P_y = 35 \cdot 0,5 = 17,5 \text{ кН};$$

$$P_z = 35 \cdot 0,5 = 17,5 \text{ кН}; \quad Q_x = 15 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ кН};$$

$$Q_y = 15 \cdot 0,707 = 10,6 \text{ кН}; \quad Q_z = 15 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ кН}.$$

5.2. Визначаємо невідомі зусилля в стрижнях просторової ферми:

$$S_1 = -24,745 \text{ кН (стиск)}; \quad S_3 = -17,5 / 0,5 = -35 \text{ кН (стиск)};$$

$$S_2 = 17,5 - (-35) \cdot 0,866 = 47,81 \text{ кН (розтяг)};$$

$$S_4 = -(7,5 + 47,81) / 0,777 = -71,18 \text{ кН (стиск)};$$

$$S_5 = -(10,6 - 71,18 \cdot 0,63 \cdot 0,707) / 0,707 = 29,85 \text{ кН (розтяг)};$$

$$S_6 = -7,5 - (-71,18) \cdot 0,63 \cdot 0,707 - 29,85 \cdot 0,707 = 3,1 \text{ кН (розтяг)}.$$

Відповідь: $S_1 = -24,745 \text{ кН}; S_2 = 47,81 \text{ кН}; S_3 = -35 \text{ кН};$

$S_4 = -71,18 \text{ кН}; S_5 = 29,85 \text{ кН}; S_6 = 3,1 \text{ кН}.$

Знак “-” вказує на те, що сили в дійсності спрямовані у протилежну сторону на відміну від напрямків показаних на рис. С1Г.

1.4. Документ MathCad для розв'язання задачі С1

Документ Mathcad для розв'язання задачі С1

Переозначення і введення одиниць вимірювання фізичних величин:

$$k\text{г} \equiv kg \quad m \equiv t \quad c \equiv s \quad H \equiv k\text{г} \cdot \frac{M}{c^2} \quad kH \equiv 1000 \cdot H$$

Введення розрахункових даних із збереженням розмірностей:

$$\mu := 45 \cdot \text{deg} \quad \varphi := 60 \cdot \text{deg} \quad \theta := 51 \cdot \text{deg}$$

$$P := 35 \cdot kH \quad \alpha_1 := 45 \cdot \text{deg} \quad \beta_1 := 60 \cdot \text{deg} \quad \gamma_1 := 60 \cdot \text{deg}$$

$$Q := 15 \cdot kH \quad \alpha_2 := 60 \cdot \text{deg} \quad \beta_2 := 45 \cdot \text{deg} \quad \gamma_2 := 60 \cdot \text{deg}$$

1. Визначення проєкцій сил Q, P на координатні осі x, y, z:

$$P_x := P \cdot \cos(\alpha_1) \quad P_y := P \cdot \cos(\beta_1) \quad P_z := P \cdot \cos(\gamma_1)$$

$$P_x = 24.75 \times 10^3 \text{ М} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \quad P_y = 17.5 \times 10^3 \text{ М} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \quad P_z = 17.5 \times 10^3 \text{ М} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$$

$$Q_x := Q \cdot \cos(\alpha_2) \quad Q_y := Q \cdot \cos(\beta_2) \quad Q_z := Q \cdot \cos(\gamma_2)$$

$$Q_x = 7.5 \times 10^3 \text{ М} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \quad Q_y = 10.61 \times 10^3 \text{ М} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \quad Q_z = 7.5 \times 10^3 \text{ М} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$$

2. Розрахунок зусиль в стержнях

Вузол I: $S_1 := 0 \cdot H \quad S_2 := 0 \cdot H \quad S_3 := 0 \cdot H$ - присвоєння початкових значень невідомим

Визначення невідомих за допомогою конструкції Given - Find:

$$\text{Given} \quad S_1 + P_x = 0 \quad S_3 \cdot \cos(\varphi) + P_y = 0$$

$$-S_3 \cdot \sin(\varphi) - S_2 + P_z = 0$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} := \text{Find}(S_1, S_2, S_3) \quad S_1 = -24.75 \times 10^3 \text{ М} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \quad S_2 = 47.81 \times 10^3 \text{ М} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \\ S_3 = -35 \times 10^3 \text{ М} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$$

Вузол II: $S_4 := 0 \cdot H \quad S_5 := 0 \cdot H \quad S_6 := 0 \cdot H$

$$\text{Given} \quad S_4 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\mu) + S_5 \cdot \cos(\mu) + S_6 + Q_x = 0$$

$$S_4 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\mu) + S_5 \cdot \cos(\mu) + Q_y = 0$$

$$S_2 + S_4 \cdot \sin(\theta) + Q_z = 0$$

$$\begin{pmatrix} S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} := \text{Find}(S_4, S_5, S_6) \quad S_4 = -71.17 \times 10^3 \text{ М} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \\ S_5 = 29.79 \times 10^3 \text{ М} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \quad S_6 = 3.11 \times 10^3 \text{ М} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$$

Задача С2 – рівновага довільної плоскої системи сил прикладених до декількох зв'язаних між собою тіл

2.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Конструкція складається з жорсткого кутика і стрижня, які в точці C або з'єднані одне з одним шарніром (рис. С2.0 – С2.5), або вільно торкаються одне одного (рис. С2.6 – С2.9). Зовнішніми в'язями, накладеними на конструкцію, є в точці A або шарнір, або жорстке кріплення; в точці B або гладенька площина (рис. С2.0 та С2.1), або невагомий стрижень BB' (рис. С2.2 та С2.3), або шарнір (рис. С2.4 – С2.9); в точці D або невагомий стрижень DD' (рис. С2.0, С2.3 та С2.8), або шарнірна опора на катках (рис. С2.7).

На кожену конструкцію діють: пара сил с моментом $M=60$ кН·м, рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $q=20$ кН/м і дві сили. Ці сили, їх напрямки і точки прикладання вказані в табл. С2; в колонці «Навантажена ділянка» вказано, на якій ділянці діє розподілене навантаження. При розрахунках прийняти $a=0,2$ м. Напрямок розподіленого навантаження на різних ділянках вказано в табл. С2а.

Знайти: реакції в'язей в точках A , B , C (а для рис. С2.0, С2.3, С2.7, С2.8 ще й в точці D), викликані заданими навантаженнями.

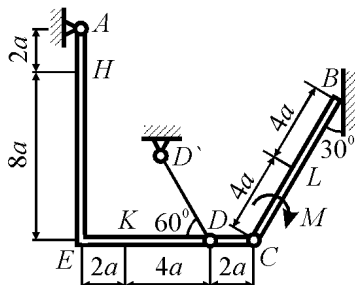


Рис. С2.0

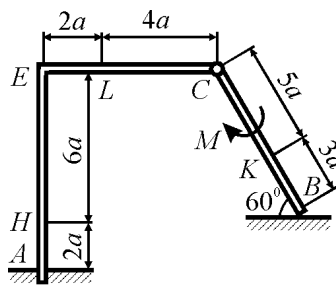


Рис. С2.1

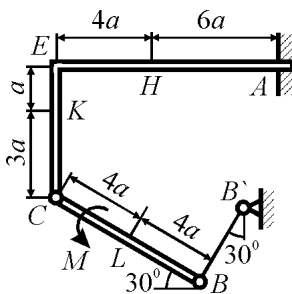


Рис. С2.2

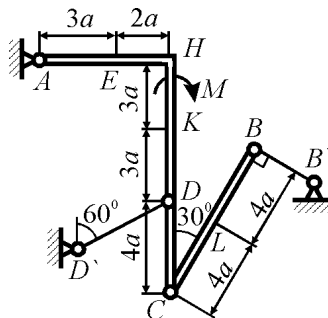


Рис. С2.3

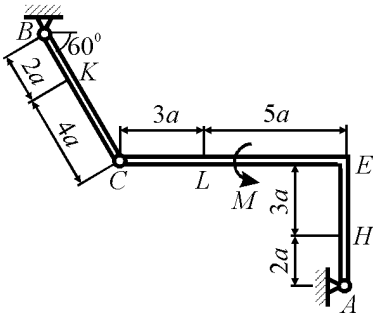


Рис. С2.4

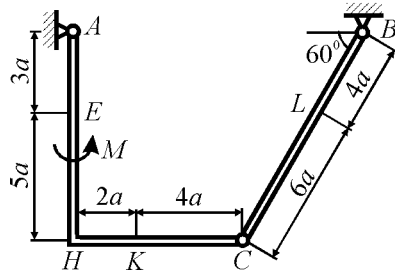


Рис. С2.5

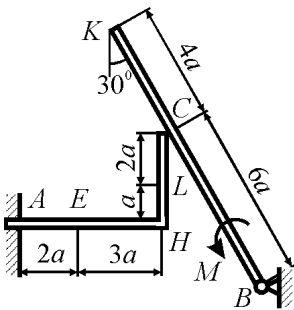


Рис. С2.6

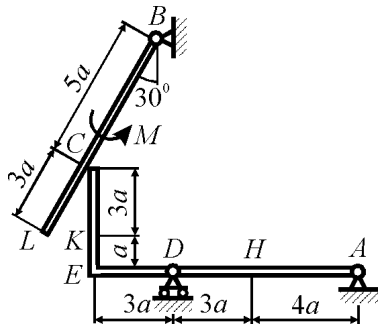


Рис. С2.7

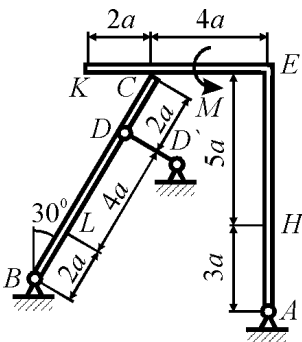


Рис. С2.8

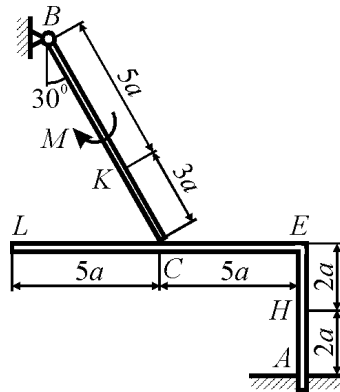

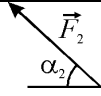
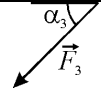
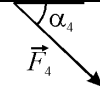

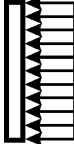
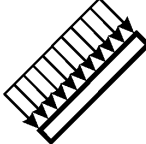
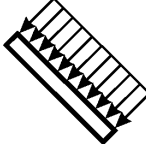


Рис. С2.9

Таблиця С2

Сила									Навантажена ділянка
	$F_1=10$ кН		$F_2=20$ кН		$F_3=30$ кН		$F_4=40$ кН		
Номер умови	Точка прикладання	α_1 , град	Точка прикладання	α_2 , град	Точка прикладання	α_3 , град	Точка прикладання	α_4 , град	
0	<i>K</i>	60	--	--	<i>H</i>	30	--	--	<i>CL</i>
1	--	--	<i>L</i>	60	--	--	<i>E</i>	30	<i>CK</i>
2	<i>L</i>	15	--	--	<i>K</i>	60	--	--	<i>AE</i>
3	--	--	<i>K</i>	30	--	--	<i>H</i>	60	<i>CL</i>
4	<i>L</i>	30	--	--	<i>E</i>	60	--	--	<i>CK</i>
5	--	--	<i>L</i>	75	--	--	<i>K</i>	30	<i>AE</i>
6	<i>E</i>	60	--	--	<i>K</i>	75	--	--	<i>CL</i>
7	--	--	<i>H</i>	60	<i>L</i>	30	--	--	<i>CK</i>
8	--	--	<i>K</i>	30	--	--	<i>E</i>	15	<i>CL</i>
9	<i>H</i>	30	--	--	--	--	<i>L</i>	60	<i>CK</i>

Таблиця С2а

Ділянка на кутику		Ділянка на стрижні	
горизонтальна	вертикальна	рис. С2.0, С2.3, С2.5, С2.7, С2.8	рис. С2.1, С2.2, С2.4, С2.6, С2.9
			

2.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача С2 – на рівновагу системи тіл, які знаходяться під дією плоскої системи сил. При її розв'язанні можна або розглянути спочатку рівновагу всієї системи в цілому, а потім рівновагу одного з тіл системи, зобразивши його окремо, або ж відразу розкласти систему і розглянути рівновагу кожного з тіл окремо, врахувавши закон про рівність дії і протидії. В задачах, де є жорстке кріплення, врахувати, що в ньому виникає реакція, яка складається із сили, модуль і напрямок якої невідомий, та пари сил, момент якої теж невідомий.

2.3. Приклад розв'язання задачі С2

Умова задачі. На кутик ACD ($\angle ACD=90^\circ$), кінець A якого жорстко закріплений, в точці E опирається стрижень DE (рис. С2а). Стрижень має в точці B нерухому шарнірну опору і до нього прикладене рівномірне розподілене навантаження інтенсивністю q . На кутик діють сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 , а також пара сил з моментом M .

Дано: $F_1=50$ кН, $F_2=35$ кН, $M=100$ кН·м, $q=20$ кН/м, $\alpha_1=30^\circ$, $\alpha_2=45^\circ$, $\beta=60^\circ$, $a=0,5$ м, $l=1,5$ м.

Знайти: реакції в'язей в точках A , B , E .

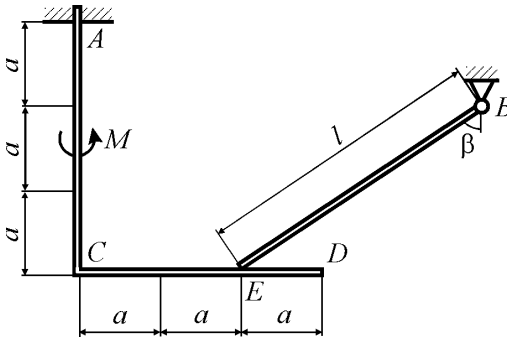


Рис. С2а

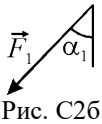


Рис. С2б

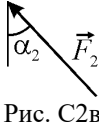


Рис. С2в

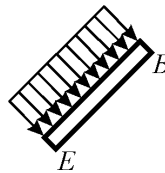


Рис. С2г

Розв'язок

1. Будуємо розрахункову схему (рис. С2д). Для визначення невідомих реакцій розкладемо систему і розглянемо окремо рівновагу кутика та стрижня.

1.1. Зображаємо координатні осі x , y .

1.2. Показуємо діючі на кутик та стрижень сили. На кутик діють сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 , момент M , реакції \vec{N}_E , \vec{X}_A , \vec{Y}_A та M_A . На стрижень діє розподілене навантаження інтенсивністю q , реакції \vec{N}'_E , \vec{X}_B , \vec{Y}_E . Зазначимо, що $N_E = N'_E$.

1.3. Визначаємо зосереджену силу від розподіленого навантаження: $Q=ql=20 \cdot 1,5=30$ кН.

1.4. Розкладаємо сили на складові спрямовані по координатним осям та визначаємо їх модуль:

$$F_{1x}=F_1\sin\alpha_1=50\cdot0,5=25 \text{ кН}; \quad F_{1y}=F_1\cos\alpha_1=50\cdot0,866=43,3 \text{ кН};$$

$$F_{2x}=F_2\sin\alpha_2=35\cdot0,707=24,75 \text{ кН}; \quad F_{2y}=F_2\cos\alpha_2=35\cdot0,707=24,75 \text{ кН};$$

$$Q_x=Q\cos\beta=30\cdot0,5=15 \text{ кН}; \quad Q_y=Q\sin\beta=30\cdot0,866=26 \text{ кН}.$$

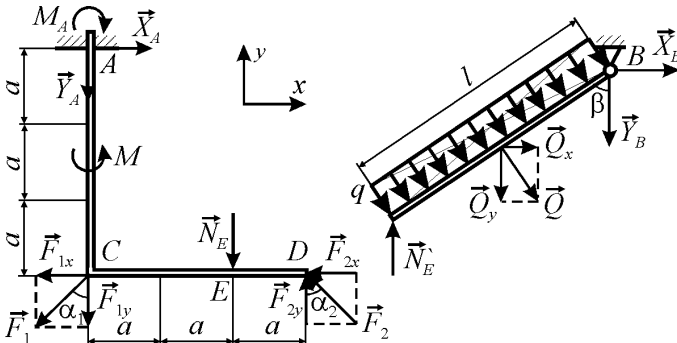


Рис. С2Д

2. Складаємо рівняння рівноваги. Так як системи сил, які діють на куттик і стрижень, плоскі довільні, то можна скористатися відповідною формою рівнянь рівноваги (першою, другою або третьою).

2.1. Рівняння рівноваги куттика:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad X_A - F_{1x} - F_{2x} = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad -Y_A - N'_E - F_{1y} + F_{2y} = 0,$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0: \quad M - M_A - F_{1x} \cdot 3a - N'_E \cdot 2a - F_{2x} \cdot 3a + F_{2y} \cdot 3a = 0.$$

2.2. Рівняння рівноваги стрижня:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad X_B + Q_x = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad -Y_B - Q_y + N'_E = 0,$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0: \quad 0,5Ql - N'_E l \sin\beta = 0.$$

3. Розв'язуємо отриману систему рівнянь в загальному вигляді:

$$X_A = F_{1x} + F_{2x}; \quad X_B = -Q_x; \quad N'_E = 0,5Q / \sin\beta; \quad Y_B = N'_E - Q_y;$$

$$Y_A = F_{2y} - N'_E - F_{1y}; \quad M_A = M - F_{1x} \cdot 3a - N'_E \cdot 2a - F_{2x} \cdot 3a + F_{2y} \cdot 3a.$$

4. Виконуємо розрахунки:

$$X_A = F_{1x} + F_{2x} = 25 + 24,75 = 49,75 \text{ кН}; \quad X_B = -Q_x = -15 \text{ кН};$$

$$N'_E = 0,5 \cdot 30 / 0,866 \approx 17,32 \text{ кН}; \quad Y_B = 17,32 - 26 = -8,68 \text{ кН};$$

$$Y_A = 24,75 - 17,32 - 43,3 = -35,87 \text{ кН}; \quad M_A = 100 - 25 \cdot 3 \cdot 0,5 -$$

$$-17,32 \cdot 2 \cdot 0,5 - 24,75 \cdot 3 \cdot 0,5 + 24,75 \cdot 3 \cdot 0,5 = 45,18 \text{ кН}.$$

5. Перевірка. Складемо рівняння моментів (проекцій сил) так, щоб до них входили всі невідомі, які діють тільки на кутик або стрижень.

5.1. Для кутика складемо рівняння моментів відносно точки D , отримаємо:

$$\sum M_D(\vec{F}_k) = 0: M - M_A - X_A 3a + Y_A 3a + F_{1y} 3a + N_E a = 0.$$

При обчисленні групуємо окремо всі складові, що із знаком "+" та "-", отримаємо:

$$100 - 45,18 - 49,75 \cdot 3 \cdot 0,5 + (-35,87) \cdot 3 \cdot 0,5 + 43,3 \cdot 3 \cdot 0,5 + 17,32 \cdot 0,5 = 0;$$

$$173,61 - 173,61 = 0.$$

Перевірка виконується, тому реакції опор знайдені вірно.

5.2. Для стрижня складемо рівняння проекцій сил на напрямок стрижня, отримаємо:

$$\sum F_{il} = 0: X_B \sin \beta - Y_B \cos \beta + N'_E \cos \beta = 0.$$

При обчисленні групуємо окремо всі складові, що із знаком "+" та "-", отримаємо:

$$-15 \cdot 0,866 - (-8,68) \cdot 0,5 + 17,32 \cdot 0,5 = 0;$$

$$-12,99 + 13 = 0,01 \approx 0.$$

Перевірка виконується, тому реакції опор знайдені вірно. Відносна похибка становить:

$$\eta = \frac{13 - 12,99}{13} \cdot 100 \% \approx -0,077 \% < [\eta] = 5 \%.$$

Відповідь: $X_A = 49,75 \text{ кН}; X_B = -15 \text{ кН}; Y_B = -8,68 \text{ кН};$

$N_E = N'_E = 17,32 \text{ кН}; Y_A = -35,87 \text{ кН}; M_A = 45,18 \text{ кН}.$

Знак "-" вказує на те, що сили в дійсності спрямовані у протилежну сторону на відміну від напрямків показаних на рис. С2д.

2.4. Документ MathCad для розв'язання задачі С2

Документ Mathcad для розв'язання задачі С2

Введення розрахункових даних із збереженням розмірностей:

$$a := 0.5 \cdot m \quad l := 1.5 \cdot m \quad q := 20 \cdot \frac{kN}{m} \quad \alpha_1 := 30 \cdot deg \quad \alpha_2 := 45 \cdot deg$$

$$M := 100 \cdot kN \cdot m \quad F_1 := 50 \cdot kN \quad F_2 := 35 \cdot kN \quad \beta := 60 \cdot deg$$

Для розмірностей: *kg* - кілограм; *m* - метр; *s* - секунда; *N* - Ньютон;
kN - кілоньютон; *deg* - градус.

Розкладемо всі сили на складові і визначаємо їх модулі:

$$F_{1x} := F_1 \cdot \sin(\alpha_1) \quad F_{1y} := F_1 \cdot \cos(\alpha_1) \quad Q := q \cdot l$$

$$F_{2x} := F_2 \cdot \sin(\alpha_2) \quad F_{2y} := F_2 \cdot \sin(\alpha_2) \quad Q_x := Q \cdot \cos(\beta) \quad Q_y := Q \cdot \sin(\beta)$$

$$F_{1x} = 25 \cdot kN \quad F_{1y} = 43.3 \cdot kN \quad F_{2x} = 24.75 \cdot kN \quad F_{2y} = 24.75 \cdot kN$$

$$Q = 30 \cdot kN \quad Q_x = 15 \cdot kN \quad Q_y = 25.981 \cdot kN$$

Визначаємо опорні реакції:

$$X_A := 0 \cdot N \quad Y_A := 0 \cdot N \quad M_A := 0 \cdot N \cdot m \quad N_E := 0 \cdot N \quad X_B := 0 \cdot N \quad Y_B := 0 \cdot N$$

Given Рівняння рівноваги кутика:

$$X_A - F_{1x} - F_{2x} = 0 \quad -Y_A - N_E - F_{1y} + F_{2y} = 0$$

$$M - M_A - F_{1x} \cdot 3 \cdot a - N_E \cdot 2 \cdot a - F_{2x} \cdot 3 \cdot a + F_{2y} \cdot 3 \cdot a = 0$$

Рівняння рівноваги стрижня:

$$X_B + Q_x = 0 \quad -Y_B - Q_y + N_E = 0 \quad 0.5 \cdot Q \cdot l - N_E \cdot l \cdot \sin(\beta) = 0$$

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_A \\ N_E \\ X_B \\ Y_B \end{pmatrix} := \text{Find}(X_A, Y_A, M_A, N_E, X_B, Y_B) \quad X_A = 49.75 \cdot kN \quad Y_A = -35.87 \cdot kN$$

$$M_A = 45.18 \cdot kN \cdot m$$

$$N_E = 17.321 \cdot kN \quad X_B = -15 \cdot kN$$

$$Y_B = -8.66 \cdot kN$$

Перевірка. Рівняння перевірки для кутика:

$$M - M_A - X_A \cdot 3 \cdot a + Y_A \cdot 3 \cdot a + F_{1y} \cdot 3 \cdot a + N_E \cdot a = 7.276 \times 10^{-12} \cdot N \cdot m$$

Рівняння перевірки для стрижня:

$$X_B \cdot \sin(\beta) - Y_B \cdot \cos(\beta) + N_E \cdot \cos(\beta) = -1.819 \times 10^{-12} \cdot N$$

Задача Д1 – коливання матеріальної точки при відносному русі

3.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Вантаж (в подальшому несе́ме тіло) масою m прикріплений за допомогою трьох пружин, жорсткістю c_1, c_2, c_3 , до підйомника (в подальшому тіло-носі́й), і здійснює вертикальні коливання (рис. Д1.0 – Д1.9, табл. Д1). Тіло-носі́й рухається вертикально за законом

$$z=0,5\alpha_1 t^2 + \alpha_2 \sin(pt) + \alpha_3 \cos(pt),$$

де z – в метрах, t – в секундах.

Таблиця Д1

Номер умови	$m,$ кг	$c_1,$ $\frac{H}{m}$	$c_2,$ $\frac{H}{m}$	$c_3,$ $\frac{H}{m}$	$\alpha_1,$ $\frac{m}{c^2}$	$\alpha_2,$ м	$\alpha_3,$ м	$p,$ 1/с	$\mu,$ $\frac{H \cdot c}{m}$	$\lambda_0,$ м	$v_0,$ $\frac{m}{c}$
0	1	300	150	--	0	0,1	0	15	0	0	0
1	0,8	--	240	120	1,5g	0	0	--	8	0,1	0
2	0,5	--	100	150	0	0,8	0	5	0	0	4
3	1	240	--	160	0	0	0,5	6	0	0	0
4	0,5	80	120	--	-g	0	0	--	6	0,2	0
5	2	--	400	400	0	0	0,1	16	0	0	0
6	0,4	60	--	120	-g	0	0	--	4	0	2
7	0,5	120	--	180	0	0,1	0	20	0	0	0
8	0,4	50	200	--	0	0	0,2	20	0	0,2	0
9	1	200	--	300	1.5g	0	0	--	5	0	3

На несе́ме тіло крім сили ваги і пружної сили, діє сила в'язкого опору середовища $R_{on} = \mu v$, де μ – коефіцієнт опору середовища, v – модуль швидкості несе́мого тіла відносно тіла-носі́я. Умова $\mu=0$ означає, що сила опору R_{on} відсутня. Несе́ме тіло здійснює рух відносно тіла-носі́я за законом $x=f(t)$.

Для запобігання помилок в знаках направити вісь x в сторону видовження пружини, а несе́ме тіло показати в положенні, при якому $x>0$, тобто пружина розтягнута.

При розрахунках масою пружин і з'єднувальної планки нехтуємо.

В таблиці позначено: λ_0 – деформація (видовження) еквівалентної пружини в початковий момент часу $t_0=0$; v_0 – початкова швидкість несомого тіла відносно тіла-носія. Прочерк в стовпчиках c_1, c_2, c_3 означає, що відповідна пружина відсутня і на схемі не зображується. Якщо при цьому кінець однієї з пружин, яка залишилась, виявиться вільним, його слід прикріпити у відповідному місці або до тіла-носія, або до несомого тіла; те ж саме слід зробити, якщо вільними виявляться з'єднані планкою кінці пружин, які залишились.

Знайти: закон вертикальних коливань несомого тіла $x=f(t)$ та побудувати графік коливань в середовищі Mathcad.

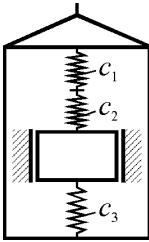


Рис. Д1.0

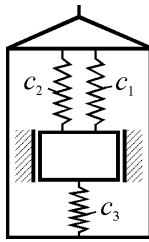


Рис. Д1.1

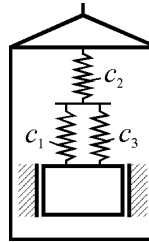


Рис. Д1.2

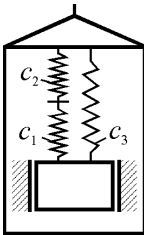


Рис. Д1.3

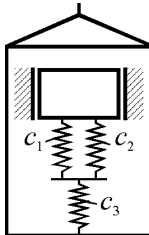


Рис. Д1.4

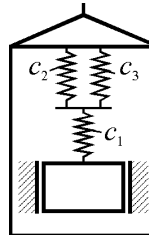


Рис. Д1.5

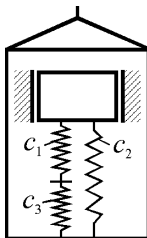


Рис. Д1.6

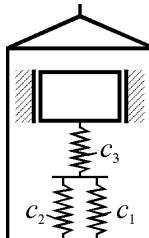


Рис. Д1.7

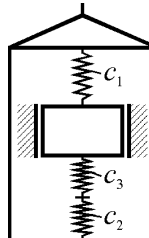


Рис. Д1.8

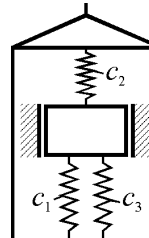


Рис. Д1.9

3.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача Д1 охоплює одночасно відносний рух і коливання матеріальної точки (МТ).

1. Спочатку прикріплені до несомого тіла пружини (по умові задачі їх буде дві) замінити еквівалентною пружиною з коефіцієнтом жорсткості c виконавши відповідний розрахунок.

а) Якщо пружини з'єднані одна з одною послідовно (як пружини жорсткості c_1, c_2 на рис. Д1.0), то при рівновазі під дією деякої сили \bar{Q} , прикладеної до вільного кінця пружини, зусилля в будь-якому поперечному перерізі пружини однакові і рівні \bar{Q} . Видовження пружин $\lambda_1=Q/c_1, \lambda_2=Q/c_2$, видовження еквівалентної пружини $\lambda=Q/c$ і $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$. Звідки $Q/c = (Q/c_1) + (Q/c_2) \Rightarrow 1/c = (c_1 + c_2)/c_1c_2$, або після перетворень остаточно отримаємо

$$c = c_1c_2 / (c_1 + c_2).$$

б) Якщо несоме тіло прикріплене до двох паралельних пружин (як до пружин жорсткістю c_1, c_2 на рис. Д1.1) або знаходиться між двома пружинами, то при рівновазі під дією деякої сили \bar{Q} кожна з пружин і еквівалентна пружина мали б одне і те ж видовження λ . Тоді для двох пружин $Q=c_1\lambda+c_2\lambda$, а для еквівалентної пружини $Q=c\lambda$, звідки

$$c=c_1+c_2.$$

Після визначення жорсткості еквівалентної пружини далі необхідно скласти диференціальне рівняння відносного руху (по відношенню до тіла-носія) розглядуваного в задачі несомого тіла, для чого приєднати до діючих сил переносну силу інерції. Після того як рівняння буде складене (це буде лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку), його необхідно проінтегрувати, врахувавши початкові умови руху.

2. Еквівалентну пружину розташовуємо угорі над вантажем, внаслідок чого отримуємо основну задачу з теорії прямолінійних коливань.

3. При побудові схеми сил та складанні диференціальних рівнянь руху замість несомого тіла розглядатимемо рух МТ.

4. При знаходженні загального інтегралу диференціального рівняння руху та сталих інтегрування, що входять до нього, використовуватимемо такі закони коливань:

- у випадку вільних затухаючих коливань

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0,$$

закон коливального руху має вигляд

$$x = e^{-ht} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \sin \omega t \right);$$

- у випадку вимушених коливань, коли збурна сила змінюється за лінійним законом

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0,$$

закон коливального руху має вигляд

$$x = x_1 + x_2,$$

де

$$x_1 = e^{-ht} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \sin \omega t \right), \quad x_2 = \frac{H}{\omega_0^2};$$

- у випадку вимушених коливань, коли збурна сила змінюється за синусоїдальним законом

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H \sin pt, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0,$$

закон коливального руху має вигляд

$$x = x_1 + x_2 + x_3,$$

де

$$x_1 = e^{-ht} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \sin \omega t \right),$$

$$x_2 = \frac{pHe^{-ht}}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} \left[2h \cos \omega t + \frac{2h^2 - (\omega_0^2 - p^2)}{\omega} \sin \omega t \right],$$

$$x_3 = \frac{H}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} [(\omega_0^2 - p^2) \sin pt - 2hp \cos pt];$$

- у випадку вимушених коливань, коли збурна сила змінюється за косинусоїдальним законом

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H \cos pt, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0,$$

закон коливального руху має вигляд

$$x = x_1 + x_2 + x_3,$$

де

$$x_1 = e^{-ht} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \sin \omega t \right),$$

$$x_2 = \frac{He^{-ht}}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} [(\omega_0^2 - p^2) \cos \omega t + \frac{h(\omega_0^2 + p^2)}{\omega} \sin \omega t],$$

$$x_3 = \frac{H}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} [(\omega_0^2 - p^2) \cos pt + 2hp \sin pt].$$

В приведених розв'язках приймаємо, що:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}.$$

3.3. Приклад розв'язання задачі Д2

Умова задачі. Несоме тіло масою m прикріплене за допомогою трьох пружин, жорсткістю c_1, c_2, c_3 , до тіла-носія, і здійснює вертикальні коливання (рис. Д1а). Тіло-носії рухається вертикально за законом $z=0,5\alpha_1 t^2 + \alpha_2 \sin(pt) + \alpha_3 \cos(pt)$, де z – в метрах, t – в секундах.

На несоме тіло крім сили ваги і пружної сили, діє сила в'язкого опору середовища $R_{on} = \mu v$, де μ – коефіцієнт опору середовища, v – модуль швидкості несомого тіла відносно тіла-носія. Несоме тіло здійснює рух відносно тіла-носія за законом $x=f(t)$. При розрахунках масою пружин і з'єднувальної планки нехтуємо. Деформація еквівалентної пружини в початковий момент часу рівна λ_0 , а початкова швидкість несомого тіла відносно тіла-носія – v_0 .

Дано: $m=0,5$ кг; $g=9,81$ м/с²; $R_{on}=\mu v$ Н; $\mu=0,2$ кг/с; $v_0=1,5$ м/с; $\lambda_0=0,05$ м; $c_1=c_2=100$ Н/м; $c_3=200$ Н/м; $\alpha_1=0$; $\alpha_2=10$ м; $\alpha_3=0$; $p=5$ рад/с.

Знайти: закон вертикальних коливань несомого тіла $x=f(t)$ та побудувати графік коливань в середовищі Mathcad.

Розв'язок

1. Побудова розрахункової схеми.

1.1. Замінюємо три пружини однією еквівалентною (рис. Д1б). Визначимо жорсткість еквівалентної пружини. Для цього спочатку замінюємо першу і другу пружину на еквівалентну пружину жорсткістю

$$c_{12} = c_1 + c_2 = 100 + 100 = 200 \text{ Н/м};$$

пружину жорсткістю c_{12} і третю пружину замінюємо на еквівалентну пружину жорсткістю

$$c_{екв} = c = \frac{c_{12} \cdot c_3}{c_{12} + c_3} = \frac{200 \cdot 200}{200 + 200} = 100 \text{ Н/м}.$$

В зв'язку з тим, що несоме тіло здійснює поступальний рух, то замість нього розглянемо рух матеріальної точки (МТ).

1.2. Будуємо схему деформацій пружини та схему сил, які діють на несоме тіло (рис. Д1в, г). На схемі l_0 – початкова довжина пружини, Δl_{cm} – статична деформація пружини, x – поточна деформація пружини, Δl – повна деформація пружини, l – повна довжина пружини з урахуванням деформацій. В подальшому замість руху несомого тіла розглядатимемо рух МТ.

2. Складання диференціального рівняння коливального руху МТ. Так як МТ здійснює складний рух, то за теоремою Кориоліса

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \quad (1)$$

де \vec{a}_r , \vec{a}_e , \vec{a}_c – відповідно відносне, переносне і коріолісове пришвидшення.

2.1. Векторна форма диференціального рівняння руху має вигляд:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{np} + \vec{R}_{on},$$

або з урахуванням (1)

$$m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c) = m\vec{g} + \vec{F}_{np} + \vec{R}_{on}. \quad (2)$$

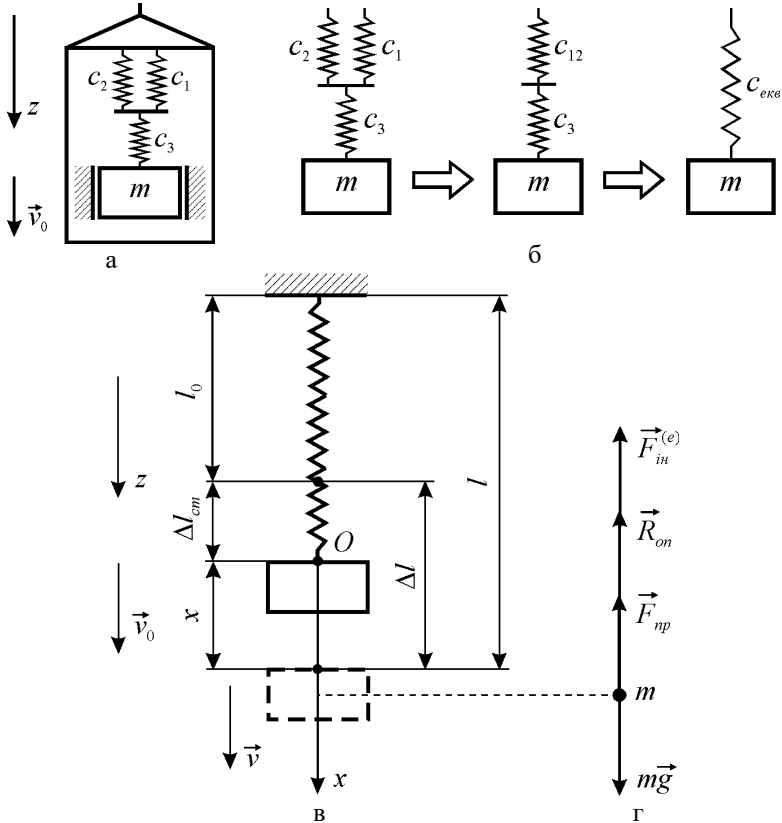


Рис. Д1 Етапи побудови розрахункової схеми коливального руху МТ:
 а – вихідна схема; б – схема перетворення пружинного блоку;
 в – схема деформації пружини; г – схема сил діючих на МТ

Перепишемо рівняння (2) у наступному вигляді:

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_{np} + \vec{R}_{on} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c,$$

або

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_{np} + \vec{R}_{on} + \vec{F}_{in}^{(e)} + \vec{F}_{in}^{(c)}, \quad (3)$$

де в (3) $\vec{F}_{in}^{(e)}$ – сила інерції переносного руху, $\vec{F}_{in}^{(c)}$ – сила інерції пришвидшення Коріоліса. Тут

$$\vec{F}_{in}^{(e)} = -m\vec{a}_e, \quad \vec{F}_{in}^{(c)} = -m\vec{a}_c = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r). \quad (4)$$

Враховуючи, що $\vec{\omega} = 0$, з (4) отримуємо що $\vec{F}_{in}^{(c)} = 0$. Остаточо, диференціальне рівняння (3) матиме вигляд:

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_{np} + \vec{R}_{on} + \vec{F}_{in}^{(e)}. \quad (5)$$

2.2. Координатна форма диференціального рівняння руху.

Проведемо вертикальну вісь x направлену вниз і з початком у положенні статичної рівноваги – в точці O . Спроектуємо на вісь x векторне рівняння руху (5), отримаємо:

$$x: m\ddot{x} = mg + F_{np\,x} + R_{on\,x} + F_{in\,x}^{(e)}, \quad (6)$$

де

$$F_{np\,x} = -c\Delta l = -c(\Delta l_{cm} + x) = -c\Delta l_{cm} - cx; \quad R_{on\,x} = -\mu v = -\mu\dot{x};$$

$$F_{in\,x}^{(e)} = -m\ddot{z} = -m[\alpha_2 \sin(pt)]'' = m\alpha_2 p^2 \sin(pt). \quad (7)$$

Диференціальне рівняння руху (6) з урахуванням (7) матиме наступний вигляд:

$$m\ddot{x} = mg - cx - c\Delta l_{cm} - \mu\dot{x} + m\alpha_2 p^2 \sin(pt). \quad (8)$$

Враховуючи, що у положенні статичної рівноваги $mg = c\Delta l_{cm}$, рівняння (8) матиме вигляд:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + F_0 \sin(pt), \quad (9)$$

де в (9) $F_0 = m\alpha_2 p^2$. Перенісши в ліву частину рівняння змінну x та \dot{x} , і поділивши праву і ліву частину диференціального рівняння руху на m , матимемо:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H \sin(pt), \quad (10)$$

де

$$h = \frac{\mu}{2m}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad H = \frac{F_0}{m} = \frac{m\alpha_2 p^2}{m} = \alpha_2 p^2.$$

Рівняння (10) – це диференціальне рівняння вимушених коливань МТ за наявності сил опору.

3. Визначення початкових умов руху. Визначимо x_0 . Враховуючи, що $\Delta l_{cm} = mg/c$, отримаємо:

$$x_0 + \Delta l_{cm} = \lambda_0, \text{ звідки } x_0 = \lambda_0 - \Delta l_{cm} = \lambda_0 - mg/c.$$

Остаточо, початкові умови руху МТ мають вигляд:

$$x_0 = 0,05 - 0,5 \cdot 9,81 / 100 \approx 0,001 \text{ м}; \quad v_0 = \dot{x}_0 = 1,5 \text{ м/с}. \quad (11)$$

4. Знаходження загального інтегралу рівняння (10). Розв'язок рівняння (10), при початкових умовах руху (11), має вигляд:

$$x = x_1 + x_2 + x_3, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-ht} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \sin \omega t \right), \\ x_2 &= \frac{pHe^{-ht}}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} \left[2h \cos \omega t + \frac{2h^2 - (\omega_0^2 - p^2)}{\omega} \sin \omega t \right], \\ x_3 &= \frac{H}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} [(\omega_0^2 - p^2) \sin pt - 2hp \cos pt], \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}. \end{aligned}$$

5. Проведення розрахунків. Знайдемо значення параметрів h , H , ω_0 , ω , отримаємо:

$$h = \frac{0,2}{2 \cdot 0,5} = 0,2 \text{ рад/с}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{100}{0,5}} = 14,1 \text{ рад/с};$$

$$H = 10 \cdot 5^2 = 250 \text{ м/с}; \quad \omega = \sqrt{14,1^2 - 0,2^2} \approx 14,098 \text{ рад/с}.$$

Після підстановки вихідних даних та відповідних параметрів отримаємо:

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-0,2t} (0,001 \cos 14,098t + 0,106 \sin 14,098t), \\ x_2 &= e^{-0,2t} (0,0164 \cos 14,098t - 0,501 \sin 14,098t), \\ x_3 &= 1,44 \sin 5t - 0,0166 \cos 5t. \end{aligned} \quad (13)$$

Остаточо, закон коливального руху МТ (12) з урахуванням (13) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} x &= e^{-0,2t} (0,0174 \cos 14,098t - 0,395 \sin 14,098t) + \\ &\quad + 1,44 \sin 5t - 0,0166 \cos 5t \text{ [м]}. \end{aligned}$$

Відповідь: $x = e^{-0,2t} (0,0174 \cos 14,098t - 0,395 \sin 14,098t) + 1,44 \sin 5t - 0,0166 \cos 5t \text{ [м]}.$

3.4. Документ MathCad для розв'язання задачі Д1

Документ Mathcad для розв'язання задачі Д1

1. Введемо розрахункові дані:

$$\underline{m} := 0.5 \quad \underline{g} := 9.81 \quad \underline{\mu} := 0.2 \quad \underline{c} := 100 \quad p := 5 \quad \alpha_2 := 10$$

Початкові умови руху точки:

$$x_0 := 0.001 \quad v_0 := 1.5$$

Нові позначення:

$$h := \frac{\mu}{2 \cdot m} \quad h = 0.2 \quad \omega_0 := \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \omega_0 = 14.142$$

$$\underline{H} := \alpha_2 \cdot p^2 \quad H = 250$$

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - h^2} \quad \omega = 14.141$$

2. Введення закону коливального руху матеріальної точки:

Частинні розв'язки мають вигляд:

$$x_1(t) := e^{-ht} \cdot \left(x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{v_0 + h \cdot x_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) \right)$$

$$x_2(t) := \frac{p \cdot H \cdot e^{-ht}}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4 \cdot h^2 \cdot p^2} \cdot \left[\begin{array}{l} 2 \cdot h \cdot \cos(\omega \cdot t) \dots \\ 2 \cdot h^2 - (\omega_0^2 - p^2) \\ + \frac{2 \cdot h^2 - (\omega_0^2 - p^2)}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{array} \right]$$

$$x_3(t) := \frac{H}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4 \cdot h^2 \cdot p^2} \cdot \left[\begin{array}{l} (\omega_0^2 - p^2) \cdot \sin(p \cdot t) \dots \\ + 2 \cdot h \cdot p \cdot \cos(p \cdot t) \end{array} \right]$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$x(t) := x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

Після підстановки вихідних даних та відповідних параметрів отримаємо:

$$x_1(t) \rightarrow e^{-0.2t} \cdot (1 \times 10^{-3} \cdot \cos(14.1407 \cdot t) + 0.1061 \cdot \sin(14.1407 \cdot t))$$

$$x_2(t) \rightarrow -0.0408 \cdot e^{-0.2t} \cdot (-0.4 \cdot \cos(14.1407 \cdot t) + 12.3699 \cdot \sin(14.1407 \cdot t))$$

$$x_3(t) \rightarrow -0.0163 \cdot \cos(5 \cdot t) + 1.4284 \cdot \sin(5 \cdot t)$$

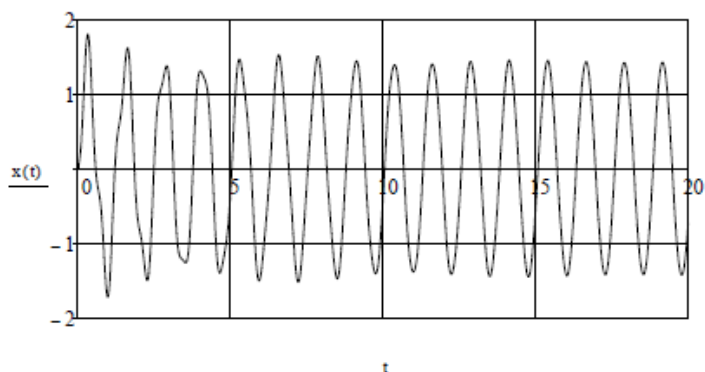
Остаточно, закон коливального руху матеріальної точки матиме вигляд:

$$x(t) \text{ simplify} \rightarrow 1.428 \cdot \sin(5 \cdot t) - 0.016 \cdot \cos(5 \cdot t) + 0.017 \cdot \cos(14.141 \cdot t) \cdot e^{-0.2t} - 0.$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) := & 1.428 \cdot \sin(5 \cdot t) - 0.016 \cdot \cos(5 \cdot t) \dots \\ & + 0.017 \cdot \cos(14.141 \cdot t) \cdot e^{-0.2t} - 0.399 \cdot \sin(14.141 \cdot t) \cdot e^{-0.2t} \end{aligned}$$

Нижче приведено графік вимушеного коливального руху матеріальної точки за наявності сил опору. На графіку t - час (с), $x(t)$ - переміщення матеріальної точки (м).

$$t := 0, 0.0001 \dots 20$$



Задача Д2 – теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи

4.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Механічна система складається з вантажів 1, 2, ступінчастого шків 3 з радіусами ступеней $R_3=0,3$ м, $r_3=0,1$ м і радіусом інерції відносно осі обертання $\rho_3=0,2$ м, блока 4 радіуса $R_4=0,2$ м і катка (або рухомого блоку) 5 (рис. Д2.0 – Д2.9, табл. Д2); тіло 5 вважати суцільним однорідним циліндром, а масу блока 4 – рівномірно розподіленою по ободу. Коефіцієнт тертя вантажів об площину $f_{mp}=0,1$. Всі катки, враховуючи і катки обмотані нитками, котяться по площинам без ковзання. Тіла системи з'єднані одне з одним нитками, перекинутими через блоки і намотаними на шків 3 (або на шків і каток); ділянки ниток паралельні відповідним площинам. До одного з тіл прикріплена пружина з коефіцієнтом жорсткості c .

Під дією сили $F=f(s)$, що залежить від переміщення s , система розпочинає рух із стану спокою; деформація пружини в початковий момент часу дорівнює нулю. При русі на шків 3 діє постійний момент M сил опору (від тертя в підшипниках).

На всіх рисунках не зображати вантаж 2, якщо $m_2=0$; інші тіла повинні бути зображені і тоді, коли їх маса рівна нулю.

Знайти: значення шуканої величини в момент часу, коли переміщення s стане рівним $s_1=0,2$ м.

Шукана величина вказана в стовпчику “Знайти” таблиці, де позначено: v_1, v_2, v_{C5} – відповідно швидкості вантажів 1, 2 і центра мас тіла 5; ω_3, ω_4 – відповідно кутові швидкості тіл 3 і 4.

Таблиця Д2

Номер умови	$m_1,$ кг	$m_2,$ кг	$m_3,$ кг	$m_4,$ кг	$m_5,$ кг	$c,$ Н/м	$M,$ Н·м	$F=f(s),$ Н	Знайти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	$80(4+5s)$	ω_3
1	8	0	0	4	6	320	0,8	$50(8+3s)$	v_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	$60(6+5s)$	v_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	$80(5+6s)$	ω_4
4	5	0	4	0	6	240	1,2	$40(9+4s)$	v_1
5	0	5	0	6	4	200	1,6	$50(7+8s)$	v_{C5}
6	8	0	5	0	6	280	0,8	$40(8+9s)$	ω_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	$60(8+5s)$	v_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	$50(9+2s)$	ω_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	$80(6+7s)$	v_{C5}

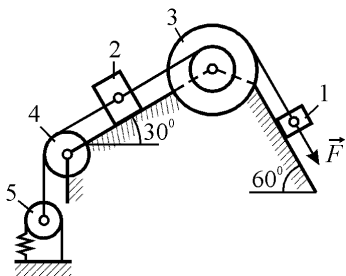


Рис. Д2.0

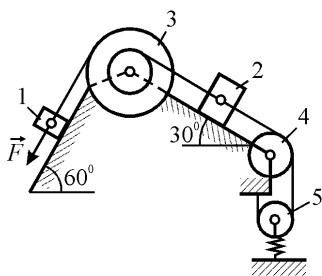


Рис. Д2.1

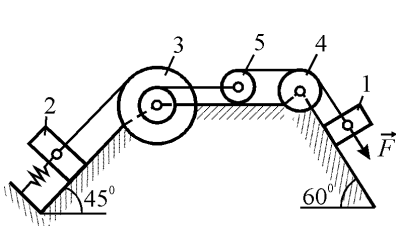


Рис. Д2.2

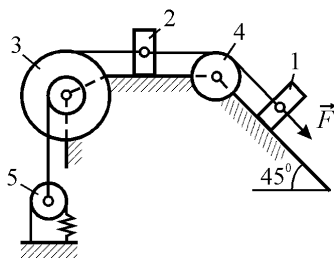


Рис. Д2.3

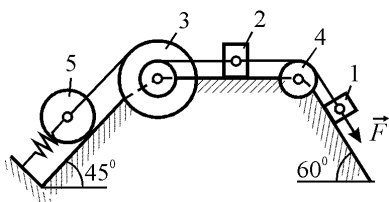


Рис. Д2.4

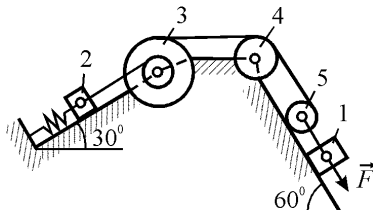


Рис. Д2.5

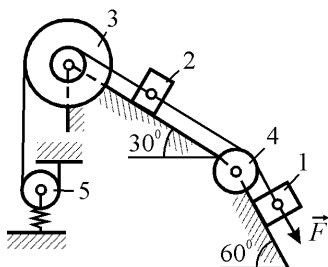


Рис. Д2.6

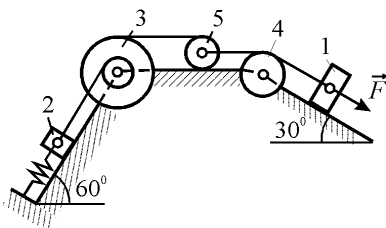


Рис. Д2.7

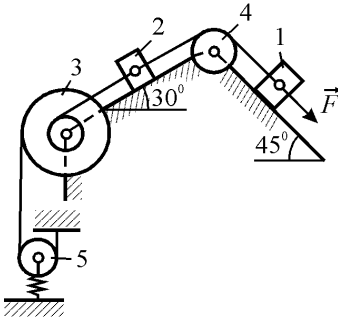


Рис. Д2.8

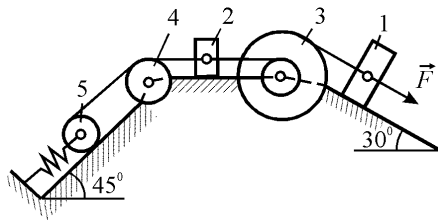


Рис. Д2.9

4.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача Д2 – на застосування теореми про зміну кінетичної енергії системи. При розв'язанні задачі необхідно врахувати, що кінетична енергія системи T дорівнює сумі кінетичних енергій усіх тіл, які входять до системи; цю енергію необхідно виразити через ту швидкість (лінійну чи кутову), яку у задачі необхідно визначити. Для встановлення залежності між швидкостями точок тіла, що рухається плоскопаралельно, або між його кутовою швидкістю і швидкістю центра інерції необхідно скористатися поняттям миттєвого центру швидкостей (кінематика). При обчисленні роботи треба всі переміщення виразити через задане переміщення s_1 , врахувавши, що залежність між переміщеннями буде такою ж, як і між відповідними швидкостями.

4.3. Приклад розв'язання задачі Д2

Умова задачі. Механічна система складається з вантажів 1, 2, ступінчастого шківа 3 з радіусами ступеней R_3 , r_3 і радіусом інерції відносно осі обертання r_3 , блока 4 радіуса R_4 і катка 5 (рис. Д2а); тіло 5 вважати суцільним однорідним циліндром, а масу блока 4 – рівномірно розподіленою по ободу. Коефіцієнт тертя вантажів об площину f_{mp} . Всі катки, враховуючи і катки обмотані нитками, котяться по площинам без ковзання. Тіла системи з'єднані одне з одним нитками, перекинутими через блоки і намотаними на шків 3 (або на шків і каток); ділянки ниток паралельні відповідним площинам. До катка 5 прикріплена пружина з коефіцієнтом жорсткості c .

Під дією сили $F=f(s)$, що залежить від переміщення s , система розпочинає рух із стану спокою; деформація пружини в початковий момент часу дорівнює нулю. При русі на шків 3 діє постійний момент M сил опору (від тертя в підшипниках).

Дано: $f_{mp}=0,1$; $m_1=4$ кг; $m_2=8$ кг; $m_3=5$ кг; $m_4=6$ кг; $m_5=3$ кг; $R_3=0,3$ м; $r_3=0,1$ м; $\rho_3=0,2$ м; $R_4=0,2$ м; $c=350$ Н/м; $s_1=0,2$ м; $M=2$ Н·м; $F=50(5+10s_1)$ Н.

Знайти: ω_3 в момент часу, коли переміщення $s=s_1$.

Розв'язок

1. Побудова розрахункової схеми (рис. Д2б). Розглянемо рух незмінної механічної системи.

1.1. Запишемо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної системи у скінченній формі

$$T - T_0 = \sum A_i^{(e)},$$

де T , T_0 – відповідно кінетична енергія системи в поточний та початковий момент часу; $A_i^{(e)}$ – робота зовнішніх сил.

Приймаємо, що у початковий момент часу $T_0 = 0$, тоді

$$T = \sum A_i^{(e)}. \quad (1)$$

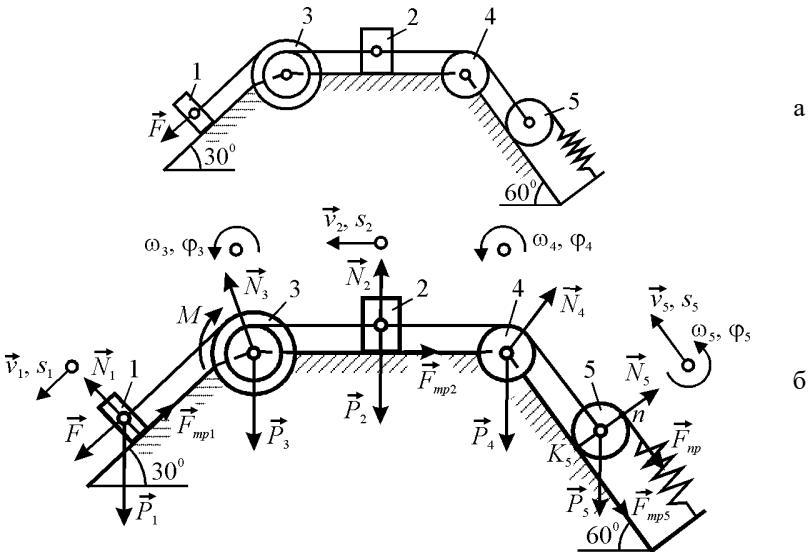


Рис. Д2 Схема механічної системи:

а – вихідна схема; б – розрахункова схема

1.2. Показуємо напрямки переміщень та швидкостей.

1.3. Прикладаємо зовнішні сили і моменти, що діють на тіла системи: активні \vec{F} , \vec{F}_{np} , $\vec{P}_i = m_i \vec{g}$, $/i = \overline{1,5}/$; реакції \vec{N}_i , $/i = \overline{1,5}/$; сили тертя ковзання \vec{F}_{mp1} , \vec{F}_{mp2} , силу тертя зчеплення \vec{F}_{mp5} і момент M .

2. Визначення зв'язків між переміщеннями та швидкостями.

2.1. Визначимо зв'язки між переміщеннями. Виразимо всі переміщення через незалежне лінійне переміщення s_1 :

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= \frac{s_1}{R_3}, \quad s_2 = s_5 = \varphi_3 r_3 = \frac{r_3 s_1}{R_3}, \quad \varphi_4 = \frac{s_2}{R_4} = \frac{r_3 s_1}{R_3 R_4}, \\ \varphi_5 &= \frac{s_5}{R_5} = \frac{r_3 s_1}{R_3 R_5}, \quad s_n = \varphi_5 2R_5 = \frac{2r_3 s_1}{R_3}.\end{aligned}\quad (2)$$

2.2. Визначимо зв'язки між швидкостями. Виразимо всі швидкості через незалежну кутову швидкість ω_3 :

$$v_1 = \omega_3 R_3, \quad v_2 = v_5 = \omega_3 r_3, \quad \omega_4 = \frac{v_2}{R_4} = \frac{\omega_3 r_3}{R_4}, \quad \omega_5 = \frac{v_5}{R_5} = \frac{r_3 \omega_3}{R_5}.\quad (3)$$

3. Визначення кінетичної енергії системи. Кінетична енергія системи має вигляд:

$$T = \sum_{i=1}^5 T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5.\quad (4)$$

Тіло 1 рухається поступально, тому

$$T_1 = m_1 v_1^2 / 2.\quad (5)$$

Тіло 2 рухається поступально, тому

$$T_2 = m_2 v_2^2 / 2.\quad (6)$$

Тіло 3 – ступінчастий шків з радіусом інерції відносно осі обертання ρ_3 – обертається навколо нерухомої осі, тому

$$T_3 = J_3 \omega_3^2 / 2.\quad (7)$$

Тіло 4 – барабан, маса якого розподілена по ободу – обертається навколо нерухомої осі, тому

$$T_4 = J_4 \omega_4^2 / 2.\quad (8)$$

Тіло 5 – рухомий блок, який є суцільним однорідним циліндром – рухається плоскопаралельно, тому

$$T_5 = (m_5 v_5^2 + J_5 \omega_5^2) / 2.\quad (9)$$

В (7), (8) та (9) осьові моменти інерції відповідних тіл мають вигляд:

$$J_3 = m_3 \rho_3^2, \quad J_4 = m_4 R_4^2, \quad J_5 = m_5 R_5^2 / 2.\quad (10)$$

Підставляючи (5) – (9) в (4) та враховуючи вирази для осьових моментів інерції (10), кінетична енергія системи матиме вигляд:

$$T = \frac{1}{2} \left[m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 \rho_3^2 \omega_3^2 + m_4 R_4^2 \omega_4^2 + m_5 \left(v_5^2 + \frac{R_5^2 \omega_5^2}{2} \right) \right],$$

або з врахуванням зв'язків для швидкостей (3), отримаємо

$$T = \frac{1}{2} \left\{ m_1 (\omega_3 R_3)^2 + m_2 (\omega_3 r_3)^2 + m_3 \rho_3^2 \omega_3^2 + m_4 R_4^2 \left(\frac{\omega_3 r_3}{R_4} \right)^2 + m_5 [(\omega_3 r_3)^2 + \frac{R_5^2}{2} \left(\frac{r_3 \omega_3}{R_5} \right)^2] \right\} = \frac{\omega_3^2}{2} \left(m_1 R_3^2 + m_2 r_3^2 + m_3 \rho_3^2 + m_4 r_3^2 + \frac{3}{2} m_5 r_3^2 \right) = \frac{1}{2} J_{3e} \omega_3^2, \quad (11)$$

де

$$J_{3e} = m_1 R_3^2 + m_3 \rho_3^2 + r_3^2 \left(m_2 + m_4 + \frac{3}{2} m_5 \right)$$

– зведений до третього тіла осьовий момент інерції системи.

4. Визначення роботи зовнішніх сил. Робота зовнішніх сил, які прикладені до тіл системи має вигляд:

$$\sum A_i^{(e)} = A_1^{(e)} + A_2^{(e)} + A_3^{(e)} + A_4^{(e)} + A_5^{(e)}. \quad (12)$$

Робота зовнішніх сил прикладених до 1-го тіла

$$A_1^{(e)} = A(\vec{F}) + A(\vec{P}_1) + A(\vec{N}_1) + A(\vec{F}_{mp1}) = \int_0^{x_1} 50(5 + 10s_1) ds_1 + m_1 g \sin 30^\circ s_1 - F_{mp1} s_1 = s_1 [250(1 + s_1) + m_1 g \sin 30^\circ - F_{mp1}]. \quad (13)$$

Робота зовнішніх сил прикладених до 2-го тіла

$$A_2^{(e)} = A(\vec{F}_{mp2}) + A(\vec{P}_2) + A(\vec{N}_2) = -F_{mp2} s_2. \quad (14)$$

Робота зовнішніх сил прикладених до 3-го тіла

$$A_3^{(e)} = A(M) + A(\vec{P}_3) + A(\vec{N}_3) = -M \varphi_3. \quad (15)$$

Робота зовнішніх сил прикладених до 4-го тіла

$$A_4^{(e)} = A(\vec{P}_4) + A(\vec{N}_4) = 0. \quad (16)$$

Робота зовнішніх сил прикладених до 5-го тіла

$$A_5^{(e)} = A(\vec{P}_5) + A(\vec{N}_5) + A(\vec{F}_{mp5}) + A(\vec{F}_{np}) = -m_5 g \sin 60^\circ s_5 - \frac{c}{2} s_{np}^2, \quad (17)$$

де в (17) було враховано, що

$$A(\vec{F}_{np}) = -\frac{c}{2} (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) = \{\Delta l = s_n, \Delta l_0 = 0\} = -c s_n^2 / 2.$$

Зазначимо, що в (13) – (17) приймалось, що

$$A(\vec{N}_1) = 0, \quad A(\vec{P}_2) = 0, \quad A(\vec{N}_2) = 0, \quad A(\vec{P}_3) = 0, \quad A(\vec{N}_3) = 0, \\ A(\vec{P}_4) = 0, \quad A(\vec{N}_4) = 0, \quad A(\vec{N}_5) = 0, \quad A(\vec{F}_{mp5}) = 0,$$

так як реакції \vec{N}_1 , \vec{N}_2 та сила \vec{P}_2 перпендикулярні переміщенням відповідних тіл, реакції \vec{N}_3 , \vec{N}_4 та сили \vec{P}_3 , \vec{P}_4 прикладені в нерухомих

точках, а сили \vec{N}_5 і \vec{F}_{mp5} прикладені в миттєвому центрі швидкостей.

Підставляючи (13) – (17) в (12) та враховуючи, що

$$F_{mp1} = f_{mp} N_1 = f_{mp} m_1 g \cos 30^0, \quad F_{mp2} = f_{mp} N_2 = f_{mp} m_2 g,$$

робота зовнішніх сил матиме вигляд

$$\sum A_i^{(e)} = s_1 [250(1 + s_1) + m_1 g (\sin 30^0 - f_{mp} \cos 30^0)] - f_{mp} m_2 g s_2 - \\ - M \varphi_3 - m_5 g \sin 60^0 s_5 - \frac{c}{2} s_{np}^2,$$

або з врахуванням зв'язків для переміщень (2), отримаємо

$$\sum A_i^{(e)} = s_1 [250(1 + s_1) + m_1 g (\sin 30^0 - f_{mp} \cos 30^0) - \\ - f_{mp} m_2 g \frac{r_3}{R_3} - \frac{M}{R_3} - m_5 g \sin 60^0 \frac{r_3}{R_3} - 2c \frac{r_3^2}{R_3^2} s_1] = s_1 F_{3e}, \quad (18)$$

де

$$F_{3e} = 250(1 + s_1) + m_1 g (\sin 30^0 - f_{mp} \cos 30^0) - \\ - f_{mp} m_2 g \frac{r_3}{R_3} - \frac{M}{R_3} - m_5 g \sin 60^0 \frac{r_3}{R_3} - 2c \frac{r_3^2}{R_3^2} s_1$$

– зведена до першого тіла сила.

5. Проведення розрахунків. Підставимо знайдені вирази для кінетичної енергії системи (11) та для роботи зовнішніх сил (18) в теорему про зміну кінетичної енергії системи (1), отримаємо:

$$J_{3e} \omega_3^2 = 2s_1 F_{3e},$$

звідки

$$\omega_3 = \sqrt{2s_1 F_{3e} / J_{3e}}.$$

Підставивши вихідні дані в вираз для зведеної сили і зведеного осьового моменту інерції отримаємо:

$$J_{3e} = 4 \cdot 0,3^2 + 5 \cdot 0,2^2 + 0,1^2 \cdot \left(8 + 6 + \frac{3}{2} \cdot 3\right) = 0,745 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\ F_{3e} = 250(1 + 0,2) + 4 \cdot 9,8 \cdot (0,5 - 0,1 \cdot 0,866) - \\ - 0,1 \cdot 8 \cdot 9,8 \frac{0,1}{0,3} - \frac{2}{0,3} - 3 \cdot 9,8 \cdot 0,866 \frac{0,1}{0,3} - 2 \cdot 350 \frac{0,1^2}{0,3^2} \cdot 0,2 \approx 283 \text{ Н}.$$

Остаточно отримуємо

$$\omega_3 = \sqrt{2 \cdot 0,2 \cdot 283 / 0,745} \approx 12,33 \text{ рад/с}.$$

Відповідь: $\omega_3 = 12,33$ [рад/с].

Задача ДЗ – принцип можливих переміщень

5.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Механізм, розташований у горизонтальній площині, знаходиться під дією прикладених сил у рівновазі; положення рівноваги визначається кутами α , β , γ , φ , θ (рис. ДЗ.0 – ДЗ.9, табл. ДЗа та табл. ДЗб). Довжини стрижнів механізму $l_1=0,4$ м, $l_4=0,6$ м, а l_2 , l_3 – довільні; точка E знаходиться посередині відповідного стрижня.

На повзун B механізма діє сила пружності пружини \vec{F}_{np} ; чисельно $F_{np}=c\lambda$, де c – коефіцієнт жорсткості пружини, λ – її деформація. Крім того, на рисунках ДЗ.0 і ДЗ.1 на повзун D діє сила \vec{Q} , а на кривошип O_1A – пара сил з моментом M ; на рисунках ДЗ.2 – ДЗ.9 на кривошипи O_1A і O_2D діють пари сил з моментами M_1 і M_2 .

Значення всіх заданих величин приведені в табл. Д9а для рисунків ДЗ.0 – ДЗ.4 і в табл. ДЗб для рисунків ДЗ.5 – ДЗ.9, де Q – виражено в ньютонках, а M , M_1 , M_2 – в ньютонметрах.

Побудову креслення необхідно розпочинати з стрижня, напрямком якого визначається кутом α . Якщо на кресленні прикріплений до повзуна стрижень буде суміщений з пружиною (рис. ДЗ.10а), то пружину слід вважати прикріпленою до повзуна з іншої сторони (рис. ДЗ.10б).

Знайти: чому рівна при рівновазі деформація λ пружини, і вказати, розтягнута вона чи стиснута.

5.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача ДЗ – на визначення умов рівноваги механічної системи за допомогою принципу можливих переміщень. Механізм у розглянутій задачі має один ступінь вільності, тобто одне незалежне можливе переміщення. Для розв'язання задачі необхідно надати механізму можливе переміщення, обчислити суму елементарних робіт всіх діючих активних сил і пар на цьому переміщенні і прирівняти її до нуля. Всі можливі переміщення, які ввійшли в отримане рівняння, необхідно виразити через незалежне (в якості незалежного можна обрати будь-яке можливе переміщення).

Щоб знайти λ , треба з отриманої умови рівноваги визначити силу пружності F . На кресленні цю силу можна направити в будь-яку сторону (тобто вважати пружину розтягнутою, чи стиснутою); чи вірно обраний напрямок сили, вкаже знак.

Таблиця Д3а (до рис. Д3.0 – Д3.4)

Номер умови	Кути, град					c , Н/см	рис. 0-1		рис. 2-4	
	α	β	γ	φ	θ		M	Q	M_1	M_2
0	90	120	90	60	60	180	100	400	120	460
1	60	150	30	0	120	160	120	380	140	440
2	30	120	120	30	60	150	140	360	160	420
3	0	60	90	30	120	140	160	340	180	400
4	30	120	30	0	60	130	180	320	200	380
5	0	150	30	0	60	120	200	300	220	360
6	0	150	60	90	120	110	220	280	240	340
7	90	120	120	60	150	100	240	260	260	320
8	60	60	60	90	30	90	260	240	280	300
9	120	30	30	90	150	80	280	220	300	280

Таблиця Д3б (до рис. Д3.5 – Д3.9)

Номер умови	Кути, град					c , Н/см	M_1	M_2
	α	β	γ	φ	θ			
0	30	30	60	0	150	80	200	340
1	0	60	60	0	120	90	220	320
2	60	150	120	90	30	100	240	300
3	30	60	30	90	120	110	260	280
4	90	120	150	90	30	120	280	260
5	30	120	150	0	60	130	300	240
6	60	150	150	90	30	140	320	220
7	0	60	30	0	120	150	340	200
8	90	120	120	90	60	160	360	180
9	90	150	120	90	30	180	380	160

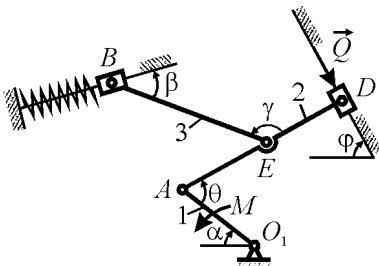


Рис. Д3.0

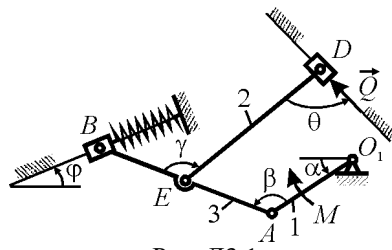


Рис. Д3.1

5.3. Приклад розв'язання задачі ДЗ

Умова задачі. Механізм, розташований у горизонтальній площині, складається з стрижнів 1, 2, 3, 4 і повзуна D , з'єднаних між собою і з нерухожими опорами O_1 та O_2 шарнірами. До повзуна D прикріплена пружина з коефіцієнтом жорсткості c і прикладена сила \vec{Q} , а до стрижнів 1 та 4 відповідно прикладені моменти M_1 та M_2 . Точка C знаходиться посередині стрижня 2.

Дано: $\alpha=60^\circ$; $\beta=120^\circ$; $\gamma=120^\circ$; $\varphi=45^\circ$; $\theta=45^\circ$; $l_1=0,4$ м; $l_4=0,6$ м; $M_1=150$ Н·м; $M_2=200$ Н·м; $Q=450$ Н; $c=150$ Н·см.

Знайти: чому рівна при рівновазі деформація λ пружини, і вкати, розтягнута вона чи стиснута.

Розв'язок

1. Побудова розрахункової схеми (рис. Д3б).

1.1. Запишемо принцип можливих переміщень

$$\sum \delta A_i = 0, \quad (1)$$

де δA_i – елементарна робота активних сил на відповідних можливих переміщеннях

1.2. Показуємо положення механізму у відповідності з заданими кутами та будуємо схему можливих переміщень (рис. Д3б).

1.3. Зображаємо діючі на механізм активні сили: силу \vec{Q} , силу пружності \vec{F}_{np} пружини (припускаючи, що пружина розтягнута) і моменти M_1 та M_2 , що прикладені до відповідних стрижнів.

2. Визначення зв'язків між можливими переміщеннями.

Знаходимо зв'язки між можливими переміщеннями, обравши за незалежне, наприклад, можливе переміщення 1-го тіла – $\delta\varphi_1$. Тоді матимемо

$$\delta x_A = \delta\varphi_1 l_1. \quad (2)$$

При подальших розрахунках будемо враховувати, що залежність між можливими переміщеннями буде така, як і між швидкостями. Тому для знаходження можливих переміщень точок стрижнів, що здійснюють плоскопаралельний рух можна скористатись положенням про рівність проєкцій можливих переміщень двох точок тіла на пряму, що з'єднує ці точки.

Тоді використовуючи рис. Д9б отримаємо:

$$\delta x_C = \delta x_A \cos 30^\circ = \delta\varphi_1 l_1 \cos 30^\circ;$$

$$\delta x_A \cos 30^0 = \delta x_B \cos 30^0 \Rightarrow \delta x_A = \delta x_B = \delta \varphi_1 l_1;$$

$$\delta x_C \cos 45^0 = \delta x_D \cos 45^0 \Rightarrow \delta x_D = \delta x_C = \delta \varphi_1 l_1 \cos 30^0. \quad (3)$$

Для можливого переміщення стрижня 4 отримаємо:

$$\delta \varphi_4 = \delta x_B / l_4 = \delta \varphi_1 l_1 / l_4. \quad (4)$$

Той самий результат можна отримати для можливих переміщень, якщо їх шукати за допомогою миттєвих центрів обертань K_2, K_4, O_3 .

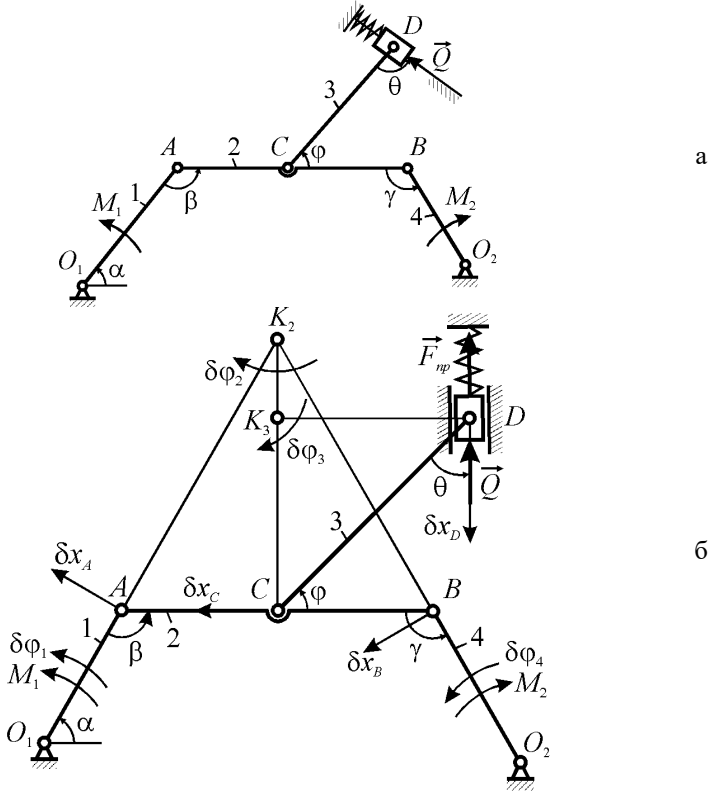


Рис. ДЗ Схема плоского механізму:

а – вихідна схема; б – розрахункова схема

3. Складання рівняння елементарних робіт. Рівняння (1) матиме вигляд (будемо враховувати, що знак “+” для роботи буде в тому випадку, коли напрямок сили або моменту співпадає з напрямком можливого переміщення, і знак “-” – якщо не співпадає):

$$M_1 \delta \varphi_1 - M_2 \delta \varphi_4 - (F_{np} + Q) \delta x_D = 0. \quad (5)$$

4. Визначення деформації пружини. Підставляючи зв'язки для можливих переміщень (2) – (4) у рівняння (5), та враховуючи, що $F_{np}=c\lambda$, отримаємо:

$$M_1 \delta\varphi_1 - M_2 \frac{\delta\varphi_1 l_1}{l_4} - (c\lambda + Q)\delta\varphi_1 l_1 \cos 30^0 = 0 \text{ або}$$

$$\delta\varphi_1 \left[M_1 - M_2 \frac{l_1}{l_4} - (c\lambda + Q)l_1 \cos 30^0 \right] = 0. \quad (6)$$

Так як $\delta\varphi_1 \neq 0$, то з рівняння (6) випливає, що

$$M_1 - M_2 \frac{l_1}{l_4} - (c\lambda + Q)l_1 \cos 30^0 = 0,$$

звідки отримуємо

$$\lambda = \frac{M_1 - M_2 \frac{l_1}{l_4} - Ql_1 \cos 30^0}{cl_1 \cos 30^0}. \quad (7)$$

5. Проведення розрахунків. Підставимо вихідні дані в вираз (7), отримаємо:

$$\lambda = \frac{150 - 200 \frac{0,4}{0,6} - 450 \cdot 0,4 \cdot 0,866}{150 \cdot 0,4 \cdot 0,866} = \frac{-139,28}{51,96} \approx -2,68 \text{ см (стиск)}.$$

Відповідь: $\lambda = -2,68$ [см].

Знак “–” вказує на те, що в дійсності пружина буде стиснута.

Література

1. *Кільчевський М. О.* Курс теоретичної механіки. – Т. 1–2. – К., 1955 – 1957.
2. *Павловський М.А.* Теоретична механіка: Підручник / М.А. Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
3. *Філімоніхін Г.Б.* Теоретична механіка. Статика. Навчальний посібник. – Кіровоград.: КНТУ, 2010. – 115 с.
4. *Філімоніхін Г.Б.* Теоретична механіка. Кінематика. Навчальний посібник. – Кіровоград.: КНТУ, 2011. – 68 с.
5. *Філімоніхін Г.Б.* Теоретична механіка. Динаміка. Навчальний посібник. – Кіровоград.: ПП "КОД", 2000. – 111 с.
6. *Путята Т.В., Фрадлін Б.Н.* Методика розв'язування задач з теоретичної механіки. – К.: "Радянська школа", 1955. – 391 с.
7. *Г.Б.Філімоніхін* Методичні вказівки і завдання до курсової роботи з теоретичної механіки (розділ "Динаміка"). – К: "ВПОЛ", 1993. – 31 с., іл.

**Геннадій Борисович Філімоніхін
Володимир Васильович Пирогов
Любов Сергіївна Олійніченко**

**Технічна механіка.
Статика, динаміка**

Комп'ютерний набір
кафедра ДМ та ПМ
т. (0522) 390-547

Підп. до друку 2024 Формат 60x84 1/16 (A5). Папір друк №3. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. Ум.фарбо-відб. Облік.-вид.арк. . Тираж 100 прим.
Зам.№

Центральноукраїнський національний технічний університет
25030, м. Кропивницький. пр. Університетський, 8