

Міністерство освіти і науки України
Кіровоградський національний технічний університет
Кафедра матеріалознавства та ливарного виробництва

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для виконання лабораторних робіт з дисципліни
МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ
ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЛИТТЯ
для студентів денної та заочної форм навчання
напряму підготовки 6.050502 «Інженерна механіка»

Затверджено на засіданні кафедри
«Матеріалознавство та ливарне
виробництво»
Протокол № 4 від 22.02.2016 р.

Кіровоград, КНТУ
2016

Міністерство освіти і науки України
Кіровоградський національний технічний університет
Кафедра матеріалознавства та ливарного виробництва

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для виконання лабораторних робіт з дисципліни
МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ
ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЛИТТЯ
для студентів денної та заочної форм навчання
напряму підготовки 6.050502 «Інженерна механіка»

Кіровоград, КНТУ
2016

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни “Математичні моделі технологічних процесів лиття” для студентів денної та заочної форм навчання напряму підготовки 6.050502 – «Інженерна механіка». Укл.: М.В. Босий. – Кіровоград: КНТУ, 2016. – 82 с.

Укладач: М.В. Босий, викладач

Рецензент: канд.ф.-м. наук, доц. Якименко Микола Сергійович

З М І С Т

	Стор.
Вступ.....	5
1. Лабораторна робота № 1. Теоретичні математичні моделі.....	6
1.1. Загальні відомості.....	6
1.2. Контрольні запитання.....	9
1.3. Завдання.....	9
2. Лабораторна робота № 2. Теоретико-статистичні математичні моделі...10	10
2.1. Загальні відомості.....	10
2.2. Контрольні запитання.....	19
2.3. Завдання.....	19
3. Лабораторна робота № 3. Побудова статистичних математичних моделей за даними пасивних експериментів.....	20
3.1. Загальні відомості.....	20
3.2. Контрольні запитання.....	40
3.3. Завдання.....	40
4. Лабораторна робота № 4. Побудова статистичних математичних моделей за даними активних експериментів.....	41
4.1. Загальні відомості	41
4.2. Контрольні запитання.....	68
4.3. Завдання.....	69
5. Лабораторна робота № 5. Пошук екстремуму.....	70
5.1. Загальні відомості.....	70
5.2. Контрольні запитання.....	78
5.3. Завдання.....	78
Додатки.....	79
Додаток 1. Фрагмент таблиці випадкових чисел.....	79
Додаток 2. Значення t -критерію Стьюдента при 5%-му рівні значущості.....	79
Додаток 3. Значення F -критерію Фішера при 5%-му рівні значущості.....	80
Література.....	81

ВСТУП

Моделювання є найбільш ефективним способом дослідження складних систем технологічних процесів лиття – як на етапі їх проектування, так і в процесі експлуатації. Можливості моделювання систем далеко не вичерпані, тому постійно з'являються найновіші методи та технології моделювання.

Створення моделі – кропіткий і творчий процес, що вимагає від дослідника не тільки глибоких теоретичних знань з різних математичних та технічних дисциплін, але й творчого підходу до розв'язання задач.

Моделі і методи моделювання використовуються при створенні систем автоматизованого проектування, систем прийняття рішень, систем автоматизованого керування. Потреба у розв'язанні задач моделювання систем виникає не тільки у науковця, але й у проектувальника, виробника, ділової людини під час повсякденної праці.

Після вивчення теоретичного матеріалу і виконання лабораторних робіт з даної дисципліни, студент повинен знати методи побудови математичних моделей різних типів і методи оптимізації об'єктів дослідження. Студент повинен також вміти будувати, аналізувати і використовувати на практиці математичні моделі різноманітних об'єктів дослідження, здійснювати їх оптимізацію.

При побудові математичних моделей технологічних процесів лиття широко використовується фізика з її фундаментальними законами збереження, статистична фізика, термодинаміка, теорія теплопередачі тощо. Широко використовується також фізична хімія, наприклад, при побудові математичних моделей термодинаміки процесів лиття.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

ТЕОРЕТИЧНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ

Мета роботи – Побудувати теоретичну математичну модель нагрівання відливка в печі.

1.1. Загальні відомості

Теоретичні математичні моделі будуються здебільшого для однофакторних систем (тобто для систем з однією незалежною змінною) і дуже рідко – для систем з більшою кількістю незалежних змінних.

При побудові однофакторної теоретичної математичної моделі типу $y = f(x)$ спочатку складають диференціальне рівняння даної залежності. З цією метою, використовуючи відповідні фундаментальні закони фізики, хімії, фізичної хімії, інших природничих наук, розглядають ситуацію в деякій довільній точці вказаної залежності. Придавши аргументу нескінченно малий приріст dx , записують відповідний нескінченно малий приріст функції dy і отримують відшукуване диференціальне рівняння, інтегрування якого з урахуванням конкретних умов задачі дає відшукувану теоретичну модель.

Задача побудови теоретичної математичної моделі для багатфакторних систем є значно складнішою, ніж для систем однофакторних. Прикладом такої задачі є побудова теоретичної математичної моделі нестационарної теплопровідності в тілах простої форми (пластина, циліндр, куля). Ця задача була вперше сформульована і розв'язана великим французьким фізиком і математиком Ж.Б. Фур'є у 1822 р.

Побудова теоретичних математичних моделей

Нагрівання відливка в печі. Теоретичні математичні моделі з цього питання широко використовуються в теплотехніці ливарних процесів [7].

Спочатку побудуємо математичну модель нагрівання металу в печі для умов, що тіло, яке нагрівається, є «тонким», тобто в нього, наприклад, коефіцієнт теплопровідності λ є дуже великим, і що теплота від печі до металу передається згідно із законом Ньютона-Ріхмана при сталій температурі печі ($T_{\text{п}} = \text{const}$).

В момент часу τ від початку нагрівання за проміжок часу $d\tau$ від печі до металу буде передано теплоти (рис. 1.1):

$$dQ = \alpha(T_{\text{п}} - T_{\text{м}})F d\tau, \quad (1.1)$$

де α – ефективний коефіцієнт тепловіддачі конвекцією від пічних газів до металу, Вт/м²·К.

$T_{\text{п}}$ і $T_{\text{м}}$ – температури печі і металу, К.

F – теплосприймаюча поверхня металу, м².

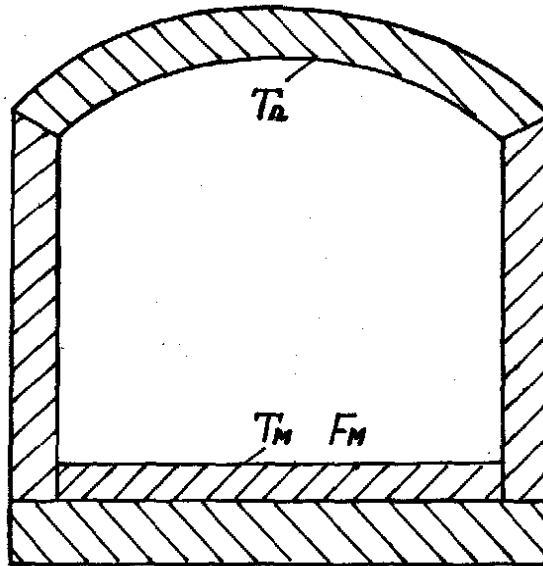


Рисунок 1.1 – Схема нагрівання металу в печі

Теплота dQ піде на нагрівання металу на dT_m , К:

$$dQ = mcdT_m, \quad (1.2)$$

де m і c – маса і теплоємність металу.

Прирівнявши праві частини рівнянь (1.1) і (1.2), одержуємо диференціальне рівняння процесу:

$$\alpha(T_{\Pi} - T_m)Fd\tau = mcdT_m, \quad (1.3)$$

яке пов'язує між собою дві змінні величини – час нагрівання τ і температуру металу T_m .

Рівняння (1.3) розв'язуємо методом відокремлення змінних:

$$\int_0^{\tau} d\tau = (mc/\alpha F) \int_{T_{m, \text{поч}}}^{T_{m, \text{кін}}} dT_m / (T_{\Pi} - T_m). \quad (1.4)$$

Проінтегрувавши рівняння (1.4), одержуємо:

$$\tau = (mc/\alpha F) \ln [(T_{\Pi} - T_{m, \text{поч}}) / (T_{\Pi} - T_{m, \text{кін}})]. \quad (1.5)$$

Вираз (1.5) і представляє собою відшукувану теоретичну модель нагрівання.

Якщо масу металу представити як добуток його густини на об'єм ($m = \rho V$), а відношення об'єму до поверхні F – як приведену товщину тіла $S_{\text{пр}} = V/F$, то рівняння (1.5) набуває вигляду

$$\tau = (\rho S_{\text{пр}} c / \alpha) \ln [(T_{\Pi} - T_{m, \text{поч}}) / (T_{\Pi} - T_{m, \text{кін}})]. \quad (1.6)$$

Вважається, що величина α відома і визначається або за літературними даними, або, наприклад, за формулою [7]

$$\alpha = C_{\text{пр}} 10^{-8} (T_{\text{п}} + T_{\text{м}}) (T_{\text{п}}^2 + T_{\text{м}}^2) \text{ Вт/м}^2\text{К}, \quad (1.7)$$

де $C_{\text{пр}}$ – приведений коефіцієнт випромінювання в системі «кладка-метал», який розраховується за формулою [7]

$$C_{\text{пр}} = 1 / \left[(1/C_{\text{п}} - 1/C_{\text{о}}) \varphi_{\text{пм}} + 1/C_{\text{о}} + (1/C_{\text{м}} - 1/C_{\text{о}}) \varphi_{\text{мп}} \right], \quad (1.8)$$

де $C_{\text{п}}$, $C_{\text{м}}$ і $C_{\text{о}}$ – коефіцієнти випромінювання внутрішньої поверхні кладки робочого простору печі, поверхні металу і абсолютно чорного тіла;

$\varphi_{\text{пм}}$ і $\varphi_{\text{мп}}$ – відповідні кутові коефіцієнти.

Згідно з рівнянням (1.7) α – зростаюча функція $T_{\text{м}}$.

Якщо нагрівання металу в печі здійснюється згідно із законом Стефана-Больцмана, то елементарна теплота процесу дорівнює:

$$dQ = C_{\text{пр}} \left[(T_{\text{п}}/100)^4 - (T_{\text{м}}/100)^4 \right] F_{\text{м}} d\tau. \quad (1.9)$$

Прирівнявши праві частини рівнянь (1.9) і (1.2), після відокремлення змінних одержуємо:

$$\int_0^{\tau} d\tau = \left(mc / C_{\text{пр}} F_{\text{м}} \right) \int_{T_{\text{м,поч}}}^{T_{\text{м,кін}}} dT_{\text{м}} / \left[(T_{\text{п}}/100)^4 - (T_{\text{м}}/100)^4 \right]. \quad (1.10)$$

Інтегрування диференціального рівняння (1.10) дає [13]:

$$\tau = \left(\rho S_{\text{пр}} c 10^8 / C_{\text{пр}} T_{\text{п}}^3 \right) \left\{ 0,5 \left[\arctg(T_{\text{м,кін}}/T_{\text{п}}) - \arctg(T_{\text{м,поч}}/T_{\text{п}}) \right] + 0,25 \ln \left[(1 + T_{\text{м,кін}}/T_{\text{п}})(1 - T_{\text{м,поч}}/T_{\text{п}}) / (1 - T_{\text{м,кін}}/T_{\text{п}})(1 + T_{\text{м,поч}}/T_{\text{п}}) \right] \right\}. \quad (1.11)$$

Згідно з припущенням, моделі (1.5) і (1.11) відносяться до «тонких» тіл.

Якщо тіло «масивне», то математична модель, крім рівнянь (1.5) чи (1.10), включає також наступні співвідношення [7]:

$$\tau_{\text{ф}} = m\tau; \quad (1.12)$$

$$m = 1 + 0,5\text{Bi}, \quad (1.13)$$

де $\tau_{\text{ф}}$ – дійсний час нагрівання «масивного» тіла;

τ – час, що визначається за формулами (1.5) чи (1.11);

$\text{Bi} = \alpha S_{\text{пр}} / \lambda$ – число Біо.

Інші приклади побудови теоретичних математичних моделей стосовно ливарного виробництва можна знайти в літературі [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13].

1.2. Контрольні запитання

1. Характеристика загальної методики побудови теоретичних математичних моделей.
2. Приклади побудови теоретичних математичних моделей стосовно ливарного виробництва.

1.3. Завдання

1. Складіть і розв'яжіть диференціальне рівняння нагрівання плити з коефіцієнтом теплопровідності $\lambda = \infty$ в печі зі сталою температурою $t_{\text{п}} = \text{const}$ при використанні закону теплообміну у формі $Q = \alpha(t_{\text{п}} - t_{\text{м}})F\tau$.
2. Складіть і розв'яжіть диференціальне рівняння нагрівання плити з $\lambda = \infty$ в печі при використанні закону теплообміну у формі $Q = C_{\text{пр}} \left[(T_{\text{п}}/100)^4 - (T_{\text{м}}/100)^4 \right] F\tau$.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

ТЕОРЕТИКО-СТАТИСТИЧНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ

Мета роботи – Побудувати теоретико-статистичну математичну модель охолодження рідини в металевій посудині і математичну модель охолодження металу в ливарній формі.

2.1. Загальні відомості

Ці моделі будуються аналогічно теоретичним. Відмінність полягає в наявності в змішаних моделях невідомих параметрів, які знаходять шляхом статистичної обробки відповідних експериментальних даних. Ця процедура називається ідентифікацією. У формулюванні задачі ідентифікації відомими являються множина вхідних змінних X , множина вихідних змінних Y та множина моделей F . Потрібно визначити єдину модель f з множини запропонованих моделей F , і визначити її параметри P , що забезпечують при вхідних значеннях вихідні значення Y .

Слід зауважити, що чіткої межі між теоретичними і теоретико-статистичними моделями немає. Дійсно, в цих моделях для «параметра незнання», згідно, наприклад, з літературними даними, може бути прийняте певне значення, і тоді модель буде теоретичною. Аналогічним чином теоретична модель, якщо дослідник приймач рішення уточнити експериментально той чи інший її параметр, перетворюється у теоретико-статистичну модель.

Побудова змішаних моделей

Математична модель охолодження тіла. Побудуємо математичну модель охолодження рідини, що знаходиться в тонкостінній посудині із високотеплопровідного матеріалу. Теплота від зовнішньої поверхні посудини передається до оточуючого повітря зі сталою температурою $t_{\text{пов}}$. Маса рідини m , її теплоємність c , початкова температура рідини $t_{\text{поч}}$ і поверхня теплообміну F відомі.

Складаємо диференціальне рівняння процесу охолодження рідини.

В момент часу τ від початку охолодження від зовнішньої поверхні посудини до оточуючого повітря за час $d\tau$ буде передано теплоти, згідно із формулою Ньютона-Ріхмана:

$$dQ = \alpha(t - t_{\text{пов}})Fd\tau, \text{ Дж}, \quad (2.1)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі конвекцією, Вт/м²·К;

t – температура рідини, °С, в момент часу τ , с.

Завдяки цій теплоті температура рідини зменшується на величину dt згідно з виразом

$$dQ = -mcdt, \quad (2.2)$$

де знак «мінус» обумовлений зменшенням температури рідини.

Прирівнявши праві частини виразів (2.1) і (2.2), одержуємо диференціальне рівняння процесу:

$$\alpha(t - t_{\text{пов}})F d\tau = -mc dt. \quad (2.3)$$

Відокремлюємо змінні в рівнянні (2.3):

$$d\tau = -(mc/\alpha F) [1/(t - t_{\text{пов}})] dt. \quad (2.4)$$

Проводимо інтегрування рівняння (2.4) на інтервалі, в межах якого час змінюється від 0 до τ , а температура рідини t – від початкового значення $t_{\text{поч}}$ до кінцевого $t_{\text{кін}}$:

$$\tau = (mc/\alpha F) \ln[(t_{\text{поч}} - t_{\text{пов}})/(t_{\text{кін}} - t_{\text{пов}})]. \quad (2.5)$$

Рівняння (2.5) і є відшукуваною математичною моделлю, якою можна було б користуватись, якби всі константи в ній були визначені. Однак величина α в рівнянні (2.5) невідома, і для її визначення, тобто для ідентифікації моделі (2.5), треба провести спеціальний експеримент, в якому через певні інтервали часу проводиться вимірювання температури рідини.

Оскільки рівняння (2.5) можна представити у вигляді

$$\ln[(t_{\text{поч}} - t_{\text{пов}})/(t_{\text{кін}} - t_{\text{пов}})] = \alpha \tau F / mc, \quad (2.5')$$

то для знаходження α за експериментальними даними останні слід представити у вигляді залежності

$$Y = \alpha X, \quad (2.6)$$

де

$$Y = \ln[(t_{\text{поч}} - t_{\text{пов}})/(t_{\text{кін}} - t_{\text{пов}})], \quad X = \tau F / mc. \quad (2.7)$$

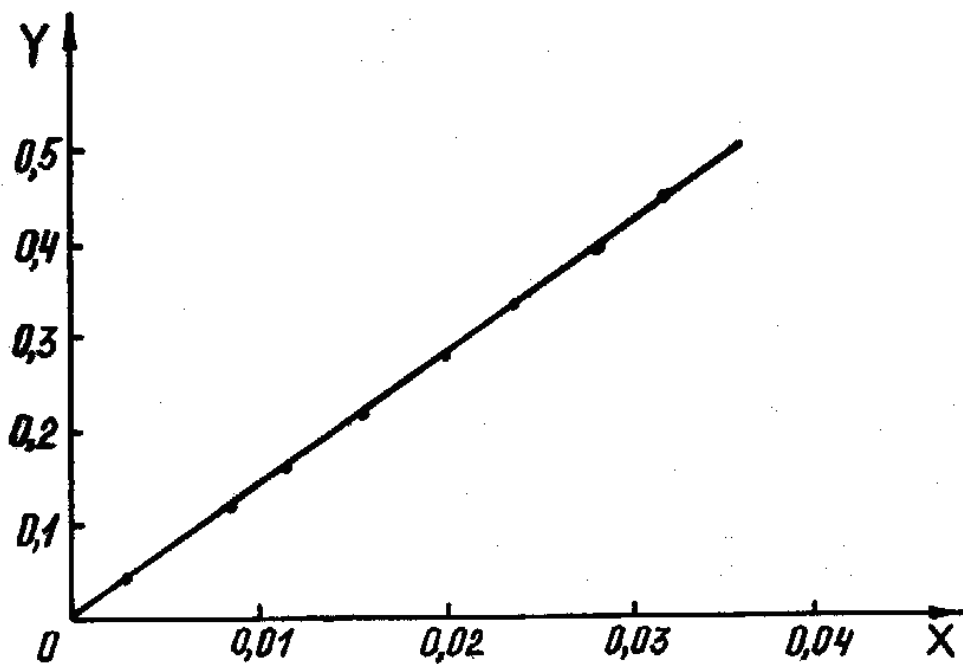
Тоді кутовий коефіцієнт рівняння (2.6) і представлятиме собою α .

В табл. 2.1 і на рис. 2.1 наведені експериментальні дані і результати їх обробки у відповідності з виразами (2.6) і (2.7) для наступних умов: маса рідини (води) $m = 2,011$ кг, поверхня теплообміну $F = 0,112$ м², $t_{\text{пов}} = 15$ °С, $t_{\text{поч}} = 98$ °С, теплоємність рідини $c = 4200$ Дж/кг·К.

Таблиця 2.1 – Експериментальні дані та їх обробка

№ п/п	τ , с	$t_{\text{кін}}$, °С	X	Y	XY	X^2
1	2	3	4	5	6	7
1	0	98,0	0	0	0	0
2	300	93,5	$3,9781 \cdot 10^{-3}$	$5,5742 \cdot 10^{-2}$	$2,2175 \cdot 10^{-5}$	$1,5825 \cdot 10^{-5}$
3	600	88,5	$7,9562 \cdot 10^{-3}$	0,12156	$9,6716 \cdot 10^{-4}$	$6,3301 \cdot 10^{-5}$
4	900	84,5	$1,1934 \cdot 10^{-2}$	0,17751	$2,1184 \cdot 10^{-3}$	$1,4242 \cdot 10^{-4}$
5	1200	81,0	$1,5912 \cdot 10^{-2}$	0,22919	$3,6469 \cdot 10^{-3}$	$2,5319 \cdot 10^{-4}$

1	2	3	4	5	6	7
6	1500	77,5	$1,9891 \cdot 10^{-2}$	0,28367	$5,6425 \cdot 10^{-3}$	$3,9565 \cdot 10^{-4}$
7	1800	74,5	$2,3869 \cdot 10^{-2}$	0,33286	$7,9450 \cdot 10^{-3}$	$5,6973 \cdot 10^{-4}$
8	2100	72,0	$2,7847 \cdot 10^{-2}$	0,37579	$1,0465 \cdot 10^{-2}$	$7,7546 \cdot 10^{-4}$
9	2400	69,0	$3,1825 \cdot 10^{-2}$	0,42986	$1,3680 \cdot 10^{-2}$	$1,0128 \cdot 10^{-3}$
10	2700	66,5	$3,5803 \cdot 10^{-2}$	0,47726	$1,7087 \cdot 10^{-2}$	$1,2819 \cdot 10^{-3}$
Σ			0,1790	2,4834	$6,1774 \cdot 10^{-2}$	$4,5103 \cdot 10^{-3}$
Серед.			0,0199	0,2759	0,006864	0,0005011

Рисунок 2.1 – Залежність між X і Y

Як видно з рис. 2.1, залежність між X і Y дійсно є прямолінійною, що свідчить про адекватність одержаної моделі, сталість параметра α і достатньо високу якість експерименту.

На підставі отриманих даних величину α можна визначити *методом середніх* або *методом найменших квадратів (МНК)*.

Метод середніх базується на припущенні, згідно з яким додатні відхилення експериментальних значень функції Y повністю компенсуються від'ємними відхиленнями:

$$(Y_1 - \alpha X_1) + (Y_2 - \alpha X_2) + \dots + (Y_n - \alpha X_n) = 0, \quad (2.8)$$

де Y_1, Y_2, \dots, Y_n – експериментальні значення Y ;

$\alpha X_1, \alpha X_2, \dots, \alpha X_n$ – теоретичні значення Y у відповідності з відшукованим рівнянням (2.6).

Згідно з виразом (2.8)

$$\sum_{i=1}^n Y_i = \alpha \sum_{i=1}^n X_i, \quad \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i}. \quad (2.9)$$

Поділивши рівняння (2.9) на число спостережень n , одержуємо:

$$\bar{Y} = \alpha \bar{X}; \quad (2.10)$$

$$\alpha = \bar{Y} / \bar{X}, \quad (2.11)$$

де \bar{X} і \bar{Y} – середні значення відповідних параметрів.

Таким чином, в умовах, що розглядаються, згідно з виразом (2.11), для визначення ідентифікаційного параметра α за методом середніх треба середнє значення функції Y поділити на середнє значення аргумента X .

За цим методом для умов експерименту $\alpha = 2,4834/0,179 = 13,9$ Вт/м²·К (див. табл. 2.1).

В основі МНК лежить вимога, згідно з якою сума квадратів відхилень експериментальних значень Y від теоретичних значень цього параметра має бути мінімальною. Для цього треба, щоб перша похідна від зазначеної суми по параметру α дорівнювала нулю:

$$\begin{aligned} (d/d\alpha) \left[(Y_1 - \alpha X_1)^2 + (Y_2 - \alpha X_2)^2 + \dots + (Y_n - \alpha X_n)^2 \right] = \\ = -2(Y_1 - \alpha X_1)X_1 - 2(Y_2 - \alpha X_2)X_2 - \dots - 2(Y_n - \alpha X_n)X_n = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Із рівняння (2.12) виходить, що

$$\sum X_i Y_i = \alpha \sum X_i^2, \quad (2.13)$$

звідки

$$\alpha = \sum X_i Y_i / \sum X_i^2 \quad (2.14)$$

Поділивши рівняння (2.14) на число спостережень n , одержуємо:

$$\alpha = \overline{XY} / \bar{X}^2 \quad (2.15)$$

Тобто для умов задачі, що розглядається, коефіцієнт тепловіддачі α дорівнює середньому добутку \overline{XY} , поділеному на середнє значення параметра \bar{X}^2 .

Згідно з даними табл. 3.1, $\alpha = 6,1774 \cdot 10^{-2} / 4,5103 \cdot 10^{-3} = 13,7$ Вт/м²·К.

Як видно, значення α , одержані різними методами, практично співпадають. Перевагу, однак, слід віддати останньому значенню α , оскільки МНК вважається найбільш точним методом.

Математична модель охолодження рідкого металу в ливарній формі.

Одержана в попереднім пункті математична модель може характеризувати охолодження рідкого металу в ливарній формі. Але для цього, по-перше, форма

має бути «тонкою» у вигляді, наприклад, тонкостінного кокіля і, по-друге, ефективне значення величини α необхідно знайти, провівши відповідний експеримент і обробивши його дані.

Одержані на даний час результати досліджень теплової взаємодії металу з ливарною формою мають величезне наукове і практичне значення, однак вони не вирішують проблему в повному обсязі, бо теоретичні дослідження через складність задач, виявились громіздкими і стосувались, в основному, тіл простої геометричної форми, а практичні рекомендації часто обмежувались так званим законом квадратного кореня, згідно з яким товщина шару металу, що закристалізувалася, прямо пропорційна кореню квадратному від часу твердіння. Такі співвідношення були недостатньо зручними для практичного використання через невизначеність в багатьох випадках коефіцієнта пропорційності (коефіцієнта тверднення), який представляє собою по суті звичайний «коефіцієнт незнання» в теоретико-статистичних чи статистичних математичних моделях.

Побудуємо теоретичну математичну модель динаміки охолодження металу в піщаноглинистій формі, яка із задовільною точністю дозволяла б розрахувати теплообмін між будь-яким ливарним сплавом і формою від кінця заливки до моменту вибивки відливка із форм.

Скористаємося представленим, наприклад, в роботі [7] розв'язком задачі щодо нестационарної теплопровідності крізь напівобмежену плоску стінку при граничних умовах першого роду, характерних для кристалізації чистих металів або евтектичних сплавів в піщаноглинистих формах:

$$\frac{t_n - t}{t_n - t_\phi} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{U_0}^U e^{-U^2} dU, \quad (2.16)$$

де t_n – стала температура на границі «метал-форма», $^{\circ}\text{C}$;

t_ϕ – температура форми перед заливкою, $^{\circ}\text{C}$;

t – змінна температура форми на відстані x від границі «метал-форма», $^{\circ}\text{C}$;

U – безрозмірна комплексна змінна, яка визначається за формулою $U = x/2\sqrt{\tau}$ і в якій τ – час від початку охолодження, с;

$U_0 = 0$ – значення комплексної змінної U на границі «метал-форма», де $x = 0$.

Процес теплової взаємодії металу і форми можна умовно розбити на три періоди: 1)зняття теплоти перегріву металу; 2)твердіння металу; 3)охолодження відливка до моменту його вибивання.

Твердіння чистих металів і евтектичних сплавів відбувається, як відомо, при сталій температурі. Якщо ж до того врахувати ще й ту обставину, що теплопровідність неметалевої форми набагато менша за теплопровідність металу, то становиться зрозумілим, що умови на границі “метал-форма” під час твердіння металу, при наявності ідеального контакту між металом і формою, дуже близькі до умов задачі нестационарної теплопровідності крізь напівобмежену плоску стінку при граничних умовах першого роду. Отже, можна вважати, що рівняння (2.16) з достатньою точністю характеризує

температурне поле ливарної форми під час твердіння металу, якщо його початкова температура (температура заливки) дорівнювала температурі кристалізації металу, тобто якщо перший період вважати відсутнім.

В реальних умовах мають місце всі три вказані періоди теплової взаємодії металу з формою, причому в перший і третій періоди температура металу і, як наслідок, температура на границі “метал-форма” безперервно зменшуються, отже, строго кажучи, рівняння (2.16) для цих періодів непридатне. Але можна умовно прийняти, що характер взаємозв’язку між t , x і τ , який встановлюється рівнянням (2.16), зберігається також для першого і третього періодів. Тоді з’являється можливість одержати формули для розрахунку тривалості всіх трьох вказаних періодів процесу:

- 1) зняття теплоти перегріву металу; 2) твердіння металу;
- 3) охолодження відливка у формі до моменту його вибивки.

Розв’язання поставленої задачі базується на визначенні густини теплового потоку q через граничну поверхню “метал-форма”. Знаючи q , можна визначити час, необхідний для відведення від металу тієї чи іншої кількості теплоти.

Густина теплового потоку характеризується законом Фур’є, який для умов нашої задачі має такий вигляд:

$$q = -\lambda(\partial t / \partial x) \quad (2.17)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу форми, Вт/м·К,

У відповідності до (2.17) диференціюємо (2.16) по x :

$$\frac{\partial \left(\frac{t_{\text{п}} - t}{t_{\text{п}} - t_{\text{ф}}} \right)}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-U^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.18)$$

З урахуванням співвідношення $U = x/2\sqrt{a\tau}$ маємо:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{t_{\text{п}} - t_{\text{ф}}} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a\tau}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a\tau}}; \\ \frac{\partial t}{\partial x} &= -(t_{\text{п}} - t_{\text{ф}}) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a\tau}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a\tau}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Підставляємо (2.19) у (2.17):

$$q = \frac{\lambda(t_{\text{п}} - t_{\text{ф}})}{\sqrt{\pi a \tau}} \exp\{-x^2/4a\tau\} \quad (2.20)$$

Рівняння (2.20) характеризує густину теплового потоку на будь-якій відстані від внутрішньої поверхні форми. З цього рівняння видно, що при $\tau = \text{const}$ густина теплового потоку тим менша, чим більше x . Найбільша вона на внутрішній поверхні форми, де $x = 0$:

$$q_{\text{п}} = \lambda(t_{\text{п}} - t_{\text{ф}}) / \sqrt{\pi a \tau} \quad (2.21)$$

Оскільки коефіцієнт температуропровідності форми $a = \lambda / \rho c$, де λ , ρ і c – відповідно, коефіцієнт теплопровідності, густина і теплоємність матеріалу форми, рівняння (2.21) можна представити у вигляді:

$$q_{\text{п}} = (t_{\text{п}} - t_{\text{ф}}) b / \sqrt{\pi \tau}, \quad (2.22)$$

де $b = \sqrt{\lambda \rho c}$ - коефіцієнт термоінерції форми, який характеризує здатність форми проводити теплоту: чим більше b , тим, у відповідності з (2.22), більше і $q_{\text{п}}$.

Тривалість періоду зняття теплоти перегріву

Диференціальне рівняння процесу охолодження металу при знятті теплоти перегріву має такий вигляд:

$$-m_{\text{р}} c_{\text{р}} dt = q_{\text{п}} F d\tau, \quad (2.23)$$

де $m_{\text{р}}$ і $c_{\text{р}}$ – маса і теплоємність рідкого металу; F – площа внутрішньої теплосприймаючої поверхні форми.

Знак “мінус” у лівій частині рівняння (2.23) пояснюється тим, що при охолодженні dt – від’ємна величина.

Підставляємо (2.22) у (2.23):

$$-m_{\text{р}} c_{\text{р}} dt = \frac{b F (t_{\text{п}} - t_{\text{ф}})}{\sqrt{\pi \tau}} d\tau \quad (2.24)$$

Згідно з попереднім приймаємо $t_{\text{п}} = t$.

Записавши dt як $d(t - t_{\text{ф}})$ і відокремивши в рівнянні (2.24) змінні, одержуємо:

$$-\int_{t_3}^{t_{\text{к}}} \frac{d(t - t_{\text{ф}})}{t - t_{\text{ф}}} = \frac{b F}{m_{\text{р}} c_{\text{р}} \sqrt{\pi}} \int_0^{\tau_1} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \quad (2.25)$$

Проінтегрувавши рівняння (2.25) від $\tau_{\text{поч}} = 0$, коли $t = t_3$ (t_3 – температура заливки металу), до $\tau_{\text{кін.}} = \tau_1$ (τ_1 – тривалість періоду зняття теплоти перегріву), коли $t = t_{\text{к}}$ ($t_{\text{к}}$ – температура кристалізації металу), одержуємо:

$$\ln \frac{t_3 - t_{\text{ф}}}{t_{\text{к}} - t_{\text{ф}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{b F}{m_{\text{р}} c_{\text{р}}} \sqrt{\tau_1}, \quad (2.26)$$

звідки

$$\tau_1 = \left(\frac{m_{\text{р}} c_{\text{р}} \ln \frac{t_3 - t_{\text{ф}}}{t_{\text{к}} - t_{\text{ф}}}}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} b F} \right)^2 \quad (2.27)$$

Формула (2.27) і є відшукуваним виразом для розрахунку тривалості періоду зняття теплоти перегріву. Її можна представити в дещо іншому вигляді, якщо зробити підстановки: $2/\sqrt{\pi}=1,1284$ і $m_p = V\rho_p$ де V і ρ_p – об’єм і густина рідкого металу:

$$\tau_1 = \left(\frac{1}{1,1284 b} \rho_p c_p \ln \frac{t_3 - t_\phi}{t_k - t_\phi} \cdot \frac{V}{F} \right)^2 \quad (2.28)$$

Згідно з М. М. Хворіновим, величина V/F називається приведеною товщиною відливка.

Загальна тривалість періодів зняття теплоти перегріву
і твердіння металу

Диференціальне рівняння процесу теплопередачі від металу до форми в період твердіння має такий вигляд:

$$l dm = \frac{bF(t_k - t_\phi)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}, \quad (2.29)$$

де l – теплота кристалізації металу; dm – кількість рідкого металу, який затвердів за час $d\tau$.

Інтегрування рівняння (2.29) проводимо від $\tau_{поч.} = \tau_1$, коли $m_{п} = 0$, до $\tau_{кін.} = \tau_2$ (τ_2 – момент закінчення твердіння), коли $m_k = m$.

Після інтегрування (2.29) одержуємо:

$$m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{bF(t_k - t_\phi)}{l} (\sqrt{\tau_2} - \sqrt{\tau_1}), \quad (2.30)$$

звідки

$$\sqrt{\tau_2} = \sqrt{\tau_1} + \frac{ml}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} bF(t_k - t_\phi)} \quad (2.31)$$

З урахуванням (2.28) і вищевказаних співвідношень $2/\sqrt{\pi}=1,1284$ і $m = V\rho_t$, де V і ρ_t – об’єм і густина твердого металу, одержуємо:

$$\tau_2 = \left[\frac{1}{1,1284 b} \left(\rho_p c_p \ln \frac{t_3 - t_\phi}{t_k - t_\phi} + \frac{\rho_t l}{t_k - t_\phi} \right) \cdot \frac{V}{F} \right]^2 \quad (2.32)$$

Скориставшись рівнянням (2.32), можна визначити час від початку першого до закінчення другого періоду, а віднявши від τ_2 тривалість першого періоду τ_1 , визначити час твердіння.

Тривалість перебування металу в ливарній формі

Диференціальне рівняння процесу тепловіддачі від металу до форми в період охолодження металу після закінчення твердіння до вибивання має такий вигляд:

$$-m_T c_T dt = \frac{bF}{\sqrt{\pi\tau}} (t_{\text{п}} - t_{\text{ф}}) d\tau, \quad (2.33)$$

де m_T і c_T – маса і теплоємність твердого металу.

У відповідності з попереднім будемо розглядати $t_{\text{п}}$ як змінну величину, яка дорівнює температурі металу, що охолоджується. З урахуванням цього, відокремивши змінні, рівняння (2.33) представляємо у вигляді:

$$-\int_{t_k}^{t_e} \frac{d(t - t_{\text{ф}})}{t - t_{\text{ф}}} = \frac{bF}{m_T c_T \sqrt{\pi}} \int_{\tau_2}^{\tau_3} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \quad (2.33)$$

Інтегрування рівняння (2.33) проводимо від $\tau_{\text{поч.}} = \tau_2$, коли $t = t_k$, до $\tau_{\text{кін.}} = \tau_3$ (τ_3 – сумарна тривалість трьох періодів), коли $t = t_e$ (t_e – температура вибивання відливки із форми). Після інтегрування і перетворень одержуємо розрахункову формулу:

$$\tau_3 = \left[\frac{1}{1,1284 b} \left(\rho_p c_p \ln \frac{t_3 - t_{\text{ф}}}{t_k - t_{\text{ф}}} + \frac{\rho_T l}{t_k - t_{\text{ф}}} + \rho_T c_T \ln \frac{t_k - t_{\text{ф}}}{t_b - t_{\text{ф}}} \right) \cdot \frac{V}{F} \right]^2 \quad (2.34)$$

Склавши і розв'язавши диференціальні рівняння теплообміну між металом і формою для кожного із вищезазначених трьох періодів, одержуємо наступні формули для розрахунку тривалості першого періоду τ_1 , першого і другого періодів τ_2 і всіх трьох періодів τ_3 [7]:

$$\tau_1 = \left(\frac{1}{1,1284 b} \rho_p c_p \ln \frac{t_3 - t_{\text{ф}}}{t_k - t_{\text{ф}}} \cdot \frac{V}{F} \right)^2; \quad (2.35)$$

$$\tau_2 = \left[\frac{1}{1,1284 b} \left(\rho_p c_p \ln \frac{t_3 - t_{\text{ф}}}{t_k - t_{\text{ф}}} + \frac{\rho_T l}{t_k - t_{\text{ф}}} \right) \frac{V}{F} \right]^2; \quad (2.36)$$

$$\tau_3 = \left[\frac{1}{1,1284 b} \left(\rho_p c_p \ln \frac{t_3 - t_{\text{ф}}}{t_k - t_{\text{ф}}} + \frac{\rho_T l}{t_k - t_{\text{ф}}} + \rho_T c_T \ln \frac{t_k - t_{\text{ф}}}{t_b - t_{\text{ф}}} \right) \frac{V}{F} \right]^2; \quad (2.37)$$

де t_3 , t_k , $t_{\text{ф}}$ і t_b – температури заливки і кристалізації, а також початкова температура форми і температура вибивки, $^{\circ}\text{C}$;

ρ_p, ρ_t – густина, кг/м³; а c_p і c_t – теплоємність рідкого і твердого металу, Дж/кг·К;

l – питома теплота кристалізації металу, Дж/кг;

V – об'єм металу в формі, м³;

F – поверхня теплообміну між металом і формою, м²;

V/F – приведена товщина відливка (за Хворіновим), м.

Зауважимо, що згідно з формулою (2.36) між приведеною товщиною відливка і коренем квадратним від часу кристалізації існує прямо пропорційна залежність, тобто підтверджується закон квадратного кореня, але із суттєвою різницею: у виразі звичайного закону квадратного кореня коефіцієнт пропорційності, як зазначалось вище, є «коефіцієнтом незнання», тоді як за формулою (2.36) він має чіткий фізичний зміст.

Приклад. Розрахувати τ_3 для таких умов: форма піщаноглиниста, метал – чавун, $t_3 = 1330$ °С, $\rho_p = 6950$ кг/м³, $c_p = 838$ Дж/кг·К, $b = 1377$ Дж/м²·К·с^{1/2}, $c_t = 672$ Дж/кг·К, $t_k = 1200$ °С, $t_b = 500$ °С, $t_{\phi} = 20$ °С, $l = 215000$ Дж/кг, $\rho_t = 7200$ кг/м³, відливок – циліндр діаметром 0,05 м і довжиною $l_{ц} = 0,3$ м, отже $V/F = \pi r^2 l_{ц} / 2\pi r l_{ц} = r/2 = 0,0125$ м.

Розв'язання. Підставляємо приведені дані у формулу (2.34):

$$\tau_3 = \left[\frac{1}{1,1284 \cdot 1377} \left(6950 \cdot 838 \ln \frac{1330 - 20}{1200 - 20} + \frac{7200 \cdot 215000}{1200 - 20} + 7200 \cdot 672 \ln \frac{1200 - 20}{500 - 20} \right) \cdot 0,0125 \right]^2 = 50,5^2 = 2546 \text{ с} = 42 \text{ хв} = 0,71 \text{ год},$$

що задовільно узгоджується з експериментальним значенням $\tau_3 = 45$ хв [10].

2.2. Контрольні запитання

1. Порядок побудови змішаної математичної моделі?
2. Характеристика методів ідентифікації теоретико-статистичних моделей.
3. Приклади побудови комбінованих математичних моделей.

2.3. Завдання

Побудувати теоретико-статистичну математичну модель охолодження води, що знаходиться в металевій посудині. З метою ідентифікації моделі провести відповідний лабораторний експеримент. Визначити, в якому випадку форма одержаної в даній роботі математичної моделі може бути прийнятною для процесу зняття теплоти перегріву металу в ливарній формі?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

ПОБУДОВА СТАТИСТИЧНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗА ДАНИМИ ПАСИВНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Мета роботи – Побудувати статистичні математичні моделі за даними пасивних експериментів

3.1. Загальні відомості

Обробка даних пасивного експерименту з метою побудови відповідної моделі здебільшого проводиться при використанні класичного методу регресійного аналізу [1-6], в основі якого лежить згаданий метод найменших квадратів (МНК). Цей метод надає можливість знаходити коефіцієнти моделі, які забезпечують найкраще узгодження експериментальних і модельних значень відповідного параметра. Крім МНК, можуть використовуватись й інші методи.

Побудова лінійних однофакторних моделей

Використання методу найменших квадратів при побудові залежності типу $y = a_0 + ax$. У випадку, коли модель відшукується у формі $y = a_0 + ax$ за методом найменших квадратів, як і раніше, діє вимога, згідно з якою сума квадратів відхилень експериментальних значень вихідної величини від її модельного значення має бути мінімальною. Щоб знайти вирази для розрахунку коефіцієнтів a_0 і a , спочатку запишемо вираз для зазначеної суми:

$$\sum (\Delta y_i)^2 = [y_1 - (a_0 + ax_1)]^2 + [y_2 - (a_0 + ax_2)]^2 + \dots + [y_n - (a_0 + ax_n)]^2, \quad (3.1)$$

де x_1, x_2, \dots, x_n – експериментальні значення незалежної величини x ;

y_1, y_2, \dots, y_n – відповідні експериментальні значення залежної величини y ;

n – кількість спостережень.

Сума (3.1) буде мінімальною тоді, коли перші частинні похідні від функції (3.1) по a_0 і a будуть дорівнювати нулю:

$$\begin{aligned} \partial \sum (\Delta y_i)^2 / \partial a_0 = & -2[y_1 - (a_0 + ax_1)] - 2[y_2 - (a_0 + ax_2)] - \dots - \\ & - 2[y_n - (a_0 + ax_n)] = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \partial \sum (\Delta y_i)^2 / \partial a = & -2[y_1 - (a_0 + ax_1)]x_1 - 2[y_2 - (a_0 + ax_2)]x_2 - \dots - \\ & - 2[y_n - (a_0 + ax_n)]x_n = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Рівняння (3.2) і (3.3) після перетворень можна представити у вигляді:

$$\sum y_i = na_0 + a\sum x_i ; \quad (3.4)$$

$$\sum x_i y_i = a_0 \sum x_i + a \sum x_i^2 . \quad (3.5)$$

Для того, щоб розв'язати систему рівнянь (3.4) і (3.5), перше з них множимо на $\sum x_i$, а друге – на n :

$$\sum x_i \sum y_i = na_0 \sum x_i + a(\sum x_i)^2 ; \quad (3.6)$$

$$n\sum x_i y_i = na_0 \sum x_i + na \sum x_i^2 . \quad (3.7)$$

Віднімаємо від рівняння (3.7) рівняння (3.6):

$$n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i = a[n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] . \quad (3.8)$$

Із рівняння (3.8) знаходимо вираз для визначення кутового коефіцієнта:

$$a = (n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i) / (n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2) \quad (3.9)$$

Розділивши праву частину рівняння (3.9) на квадрат числа спостережень n^2 , одержимо більш компактну форму виразу для кутового коефіцієнта:

$$a = \left(\overline{x_i y_i} - \bar{x}_i \bar{y}_i \right) / \left(\bar{x}_i^2 - (\bar{x}_i)^2 \right), \quad (3.10)$$

де величини під рискою є відповідними середніми величинами.

Припустивши, що апроксимаційна пряма проходить через центральну точку з координатами \bar{x}_i і \bar{y}_i , можемо записати

$$\bar{y}_i = a_0 + a\bar{x}_i , \quad (3.11)$$

звідки одержуємо вираз для знаходження коефіцієнта a_0 :

$$a_0 = \bar{y}_i - a\bar{x}_i . \quad (3.12)$$

Формулу (3.11) можна одержати з рівняння (3.4), поділивши його на кількість спостережень n . Це, до речі, означає, що рівняння (3.4) є умовою проходження відшукуваної прямої через вищезазначену центральну точку.

Приклад. Знайти залежність міцності сірого чавуну на згин від вмісту вуглецю у чавуні згідно з даними, представленими на рис. 3.1 і в табл. 3.1.

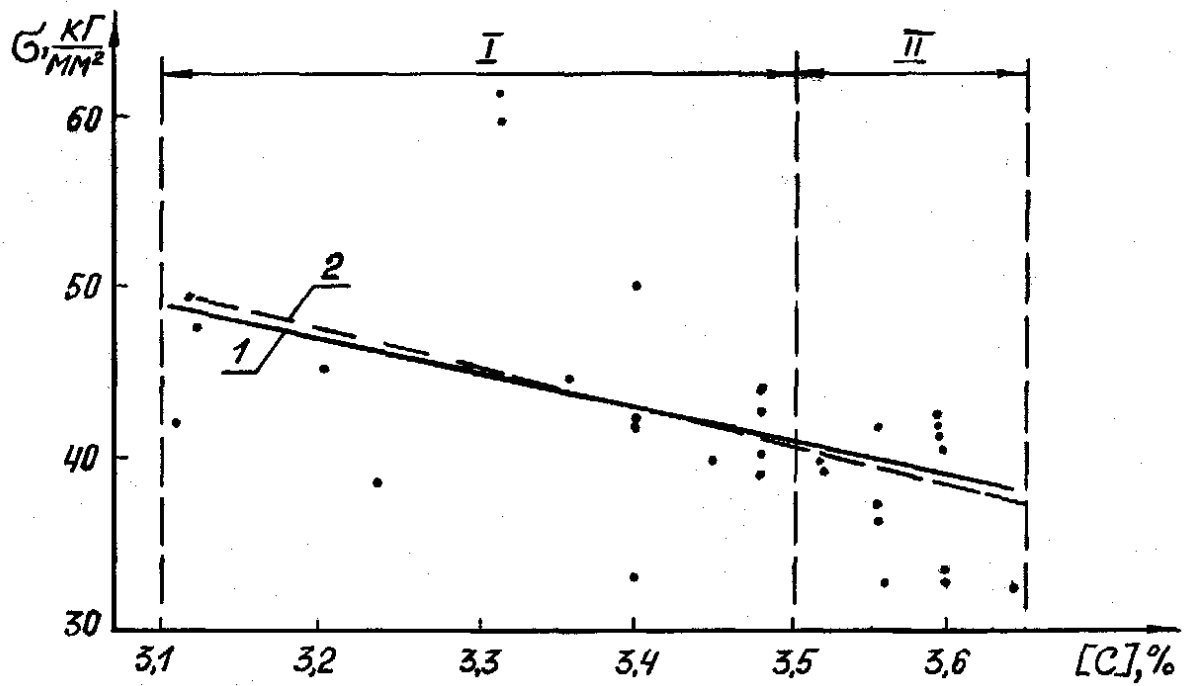


Рисунок 3.1 – Залежність σ від $[C]$

Таблиця 3.1 – Обробка експериментальних даних у відповідності з МНК

№ п/п	x ($[C]$, % за масою)	y (σ , кг/мм ²)	y^2	xy	x^2	№ п/п	x ($[C]$, % за масою)	y (σ , кг/мм ²)	y^2	xy	x^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3,40	41,6	1730,56	141,44	11,56	16	3,12	47,5	2256,25	148,20	9,73
2	3,40	41,0	1681,00	139,40	11,56	17	3,44	39,4	1552,36	135,54	11,83
3	3,48	44,1	1944,81	153,47	12,11	18	3,24	36,7	1346,89	118,91	10,50
4	3,56	37,0	1369,00	131,72	12,67	19	3,52	38,6	1489,96	135,87	12,39
5	3,60	41,5	1722,25	149,40	12,96	20	3,56	37,6	1413,76	133,86	12,67
6	3,56	41,3	1705,69	147,03	12,67	21	3,48	39,4	1552,36	137,11	12,11
7	3,40	48,0	2304,00	163,20	1,56	22	3,60	39,2	1536,64	141,12	12,96
8	3,32	61,0	3721,00	202,52	11,02	23	3,12	49,5	2450,25	154,44	9,73
9	3,56	32,6	1062,76	116,06	12,67	24	3,48	38,7	1497,69	134,68	12,11

Продовження табл. 3.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	3,60	33,3	1108,89	119,88	12,96	25	3,20	45,8	2097,64	146,56	10,24
11	3,60	33,0	1089,00	118,80	12,96	26	3,08	42,5	1806,25	130,90	9,49
12	3,52	38,0	1444,00	133,76	12,39	27	3,60	40,2	1616,04	144,72	12,96
13	3,64	33,0	1089,00	120,12	13,25	28	3,60	40,5	1640,25	145,8	12,96
14	3,40	32,3	1043,29	109,82	11,56	29	3,48	42,8	1831,84	148,94	12,11
15	3,36	45,0	2025,00	151,20	11,29	30	3,32	58,3	3398,89	193,56	11,02
						Σ	103,24	1239,4	52527,3	4248,01	356,03
						Серед.	3,4413	41,3133	1750,91	141,60	11,867

Розв’язання. Використовуючи дані табл. 3.1, за формулами (3.9) і (3.12) знаходимо параметри a і a_0 :

$$a = [(30 \cdot 4248,012) - (103,24 \cdot 1239,4)] / (30 \cdot 356,03 - 103,24^2) = -23,09;$$

$$a_0 = 41,3133 + 23,09 \cdot 3,4413 = 120,77.$$

Отже, за методом найменших квадратів одержуємо наступну залежність:

$$\sigma = 120,77 - 23,09 [C] \text{ кГ/мм}^2 \quad (3.13)$$

Рівняння (3.13) співпадає з виразом, який одержуємо при розрахунку на ПК за стандартною програмою.

Згідно з рівнянням (3.13) при збільшенні вмісту вуглецю в сірому чавуні міцність його на згин зменшується.

Використання методу середніх при побудові залежності типу $y = a_0 + ax$. Одержання залежності типу $y = ax$ цим методом показано в лабораторній роботі №2. Якщо ж математична модель відшукується у вигляді $y = a_0 + ax$, то масив даних розбиваємо на дві приблизно однакові частини (див. рис. 3.1), для кожної

з яких визначаємо координати середніх точок \bar{x}' , \bar{y}' і \bar{x}'' , \bar{y}'' . Далі за формулою (3.11) одержуємо систему двох рівнянь з двома невідомими величинами – a_0 і a :

$$\begin{cases} \bar{y}' = a_0 + a\bar{x}'; \\ \bar{y}'' = a_0 + a\bar{x}''. \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\bar{y}'' = a_0 + a\bar{x}''. \quad (3.15)$$

Віднімаємо рівняння (3.14) від (3.15):

$$\bar{y}'' - \bar{y}' = a(\bar{x}'' - \bar{x}'), \quad (3.16)$$

звідки одержуємо вираз для визначення кутового коефіцієнта:

$$a = (\bar{y}'' - \bar{y}') / (\bar{x}'' - \bar{x}'). \quad (3.17)$$

Коефіцієнт a_0 знаходимо з рівняння (3.14) або (3.15):

$$a_0 = \bar{y}' - \bar{x}'[(\bar{y}'' - \bar{y}') / (\bar{x}'' - \bar{x}')]; \quad (3.18)$$

$$a_0 = \bar{y}'' - \bar{x}''[(\bar{y}'' - \bar{y}') / (\bar{x}'' - \bar{x}')]. \quad (3.19)$$

Приклад. Знайти методом середніх залежність $\sigma = a_0 + a[C]$ за даними табл. 3.1.

Розв'язання. Результати 30 вимірювань ділимо на дві частини (див. рис. 3.1): в першу включаємо вимірювання, де $[C] < 3,5 \%$, решту даних включаємо в другу групу.

Знаходимо координати середніх точок:

$$\bar{x}' = (3,4 + 3,4 + 3,48 + 3,4 + 3,32 + 3,4 + 3,36 + 3,12 + 3,44 + 3,24 + 3,48 + 3,12 + \\ + 3,48 + 3,20 + 3,08 + 3,48 + 3,32) / 17 = 56,72 / 17 = 3,3365;$$

$$\bar{y}' = (41,6 + 41,0 + 44,1 + 48,0 + 61,0 + 32,3 + 45,0 + 47,5 + 39,4 + 36,7 + 39,4 + 49,5 + \\ + 38,7 + 45,8 + 42,5 + 42,8 + 58,3) / 17 = 753,6 / 17 = 44,3294;$$

$$\bar{x}'' = (3,56 + 3,60 + 3,56 + 3,56 + 3,60 + 3,60 + 3,52 + 3,64 + 3,52 + 3,56 + 3,60 + 3,60 + \\ + 3,60) / 13 = 46,52 / 13 = 3,5785;$$

$$\bar{y}'' = (37,0 + 41,5 + 41,3 + 32,6 + 33,3 + 33,0 + 38,0 + 33,0 + 38,6 + 37,6 + 39,2 + \\ + 40,2 + 40,5) / 13 = 485,8 / 13 = 37,3692.$$

Визначаємо параметри a і a_0 за формулами (3.17), (3.18) і (3.19):

$$a = (37,3692 - 44,3294) / (3,5785 - 3,3365) = -28,76;$$

$$a'_0 = 44,3294 - 3,3365(-28,76) = 140,29;$$

$$\bar{a}_0'' = 37,3692 - 3,5785(-28,76) = 140,29.$$

Рівняння регресії, таким чином, має вигляд:

$$\sigma = 140,29 - 28,76 [C] \text{ кГ/мм}^2. \quad (3.20)$$

Рівняння (3.13) і (3.20) близькі одне до одного (див. рис. 3.1).

З метою встановлення тісноти зв'язку між параметрами x і y розраховуємо коефіцієнт кореляції за однією із формул, що наводяться в літературі [4], наприклад, за формулою:

$$r = (n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i) / \sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2][n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]} \quad (3.21)$$

Підставляємо у формулу (3.21) дані з табл. 3.1:

$$r = (30 \cdot 4248,012 - 103,24 \cdot 1239,4) / \sqrt{(30 \cdot 356,03 - 103,24^2)(30 \cdot 52527,32 - 1239,4^2)} = -0,55$$

Слід зауважити, що модуль величини r може змінюватись в межах $0 \leq r \leq 1$. Якщо зв'язок між x і y відсутній, то $r = 0$. Якщо ж зв'язок між цими величинами функціональний, тобто гранично тісний, то $r = 1$. Одержаний нами результат ($|r| = 0,55$) вказує на те, що зв'язок між міцністю сірого чавуну на згин і вмістом в чавуні вуглецю порівняно слабкий. Причина такого становища полягає в тому, що на величину σ , крім $[C]$, чинять вплив також інші фактори, такі як вміст в металі кремнію, марганцю, інших домішок, а також багато інших неврахованих чинників.

Побудова лінійних багатофакторних моделей

Переважає більшість об'єктів дослідження в ливарному виробництві є багатофакторними системами, тому методи побудови статистичних математичних моделей таких об'єктів на основі даних пасивних експериментів викликають найбільшу зацікавленість у фахівців-ливарників. При побудові як лінійних, так і нелінійних багатофакторних моделей найбільше застосування набув метод найменших квадратів.

Використання МНК. Якщо математична модель відшукується у формі рівняння

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k, \quad (3.22)$$

де x_1, x_2, \dots, x_k – незалежні змінні, а сталі величини $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ – відшукувані коефіцієнти лінійної поліноміальної моделі, то, згідно з МНК, для знаходження коефіцієнтів моделі (3.22) треба мінімізувати суму квадратів різниць розрахункових (модельних) і експериментальних значень y . З цією метою, продиференціювавши зазначену суму послідовно по коефіцієнтах a_0, a_1, \dots, a_k і прирівнявши одержані результати до нуля, після перетворень матимемо таку систему $k + 1$ рівнянь з $k + 1$ невідомими коефіцієнтами $a_i, i = 0, 1, 2, \dots, k$:

$$\left\{ \begin{aligned} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^k x_{1i} + a_2 \sum_{i=1}^k x_{2i} + \dots + a_k \sum_{i=1}^k x_{ki} &= \sum_{i=1}^k y_i; \\ a_0 \sum_{i=1}^k x_{1i} + a_1 \sum_{i=1}^k x_{1i}^2 + a_2 \sum_{i=1}^k x_{1i}x_{2i} + \dots + a_k \sum_{i=1}^k x_{1i}x_{ki} &= \sum_{i=1}^k y_i x_{1i}; \\ a_0 \sum_{i=1}^k x_{2i} + a_1 \sum_{i=1}^k x_{1i}x_{2i} + a_2 \sum_{i=1}^k x_{2i}^2 + \dots + a_k \sum_{i=1}^k x_{2i}x_{ki} &= \sum_{i=1}^k y_i x_{2i}; \\ \dots\dots\dots \\ a_0 \sum_{i=1}^k x_{ki} + a_1 \sum_{i=1}^k x_{1i}x_{ki} + a_2 \sum_{i=1}^k x_{2i}x_{ki} + \dots + a_k \sum_{i=1}^k x_{ki}^2 &= \sum_{i=1}^k y_i x_{ki} \end{aligned} \right. \quad (3.23)$$

Компактна форма розв'язку системи рівнянь (3.23), знайденого при використанні матричної алгебри, має такий вигляд:

$$A = (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad (3.24)$$

де A – вектор відшукуваних коефіцієнтів a_i ;

Y – вектор правих частин системи рівнянь (3.23);

X – матриця, складена із множників, що стоять при коефіцієнтах полінома
(3.22) a_0, a_1, \dots, a_k ;

X^T – транспонована матриця X .

Вектор коефіцієнтів A , згідно із виразом (3.24), знаходиться за стандартними комп'ютерними програмами.

Приклад побудови математичної моделі міцності сірого чавуну σ на згин у вигляді залежності $\sigma = a_0 + a_1[C] + a_2[Si] + a_3[Mn]$, де $[C]$, $[Si]$ і $[Mn]$ – вміст у чавуні, у відсотках за масою, вуглецю, кремнію і марганцю, наведено в роботі [5].

Викладений в даному пункті спосіб визначення коефіцієнтів рівняння (3.22) є методично бездоганним, однак при значній кількості незалежних змінних виникають труднощі розв'язання системи рівнянь (3.23) навіть при використанні матричної алгебри і відповідних комп'ютерних програм.

Використання методу ізофакторних розрізів [12]. Даний метод є гранично простим і максимально наближеним до умов практичного використання. Він забезпечує одержання за простою процедурою багатofакторних статистичних математичних моделей того чи іншого об'єкта дослідження на основі даних пасивного експерименту.

Ідея методу полягає в наступному.

Уявімо собі, що в нашому розпорядженні є масив даних пасивного експерименту у вигляді таблиці, в якій певним сполученням незалежних змінних x_1, x_2, \dots, x_k відповідають значення залежної змінної y .

Задача полягає в тому, щоб на підставі цих даних підібрати таку залежність

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (3.25)$$

яка найкращим чином відповідала б експериментальним даним.

Залежність (3.25) відшукуємо у вигляді відрізка ряду Тейлора за умови, що похідні, які фігурують в ньому, беруться в середній точці з координатами $\bar{x}_1 = \sum x_{1i}/n$, $\bar{x}_2 = \sum x_{2i}/n, \dots, \bar{x}_k = \sum x_{ki}/n$, де $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}$ – значення вхідних величин в i -му досліді, n – кількість дослідів у масиві експериментальних даних.

Дуже часто залежність (3.25) лінійна. В цьому випадку вона зображається поліномом (3.22), коефіцієнти якого представляють собою тангенси кутів нахилу гіперплощини (3.22) в напрямку відповідних координатних осей, отже їх можна визначити за нахилом прямих на відповідних ізофакторних розрізах. При цьому лінеаризацію можна здійснювати за допомогою відомих методів, наприклад, вже розглянутих методу середніх або МНК.

Значення коефіцієнта a_0 можна знайти на підставі природного припущення про те, що гіперплощина (3.22) проходить через вказану середню точку масиву експериментальних даних. Це означає, що для знаходження a_0 треба у рівняння (3.22) підставити знайдені раніше значення коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_k , а також значення всіх параметрів середньої точки і розв'язати одержане у такий спосіб рівняння відносно a_0 .

Якщо функція (3.25) нелінійна, то початок координат слід перенести у середню точку і провести через неї дотичну гіперплощину до гіперповерхні, що відповідає функції (3.25). Далі, побудувавши ізофакторні розрізи, вищезазначеним способом треба знайти коефіцієнти a_1, a_2, \dots, a_k . Що стосується коефіцієнта a_0 , то в новій системі координат він дорівнюватиме нулю. Перенісши в ліву частину скоригованого нелінійного полінома, що відображає функцію (3.25), доданки першого степеня, аналогічним чином слід провести лінеаризацію відносно змінних більш високих порядків.

Інакше кажучи, у випадку нелінійності залежності (3.25) уточнення моделі здійснюється за рахунок збільшення відрізка ряду Тейлора при збереженні фактичної кількості незалежних змінних і раніше знайдених коефіцієнтів при них, а не за рахунок збільшення кількості незалежних змінних шляхом включення до їх числа комплексів типу $x_{ii}^2, x_i x_j$ і т. ін., що призводило б до автоматичної зміни раніше знайдених коефіцієнтів $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$, спотворюючи їх фізичний зміст.

В якості прикладу розглянемо побудову представленим методом математичної моделі міцності сірого чавуну на згин згідно з первинними даними [5], наведеними в перших п'яти колонках табл. 3.2, в якій [C], [Si] і [Mn] – вміст в чавуні вуглецю, кремнію і марганцю у відсотках за масою, а σ – міцність на згин у кГ/мм^2 .

Ізофакторні розрізи (рис. 3.2) вказують на те, що залежність σ ($[C]$, $[Si]$, $[Mn]$) слід шукати у вигляді лінійного полінома:

$$\sigma = a_0 + a_1[C] + a_2[Si] + a_3[Mn]. \quad (3.26)$$

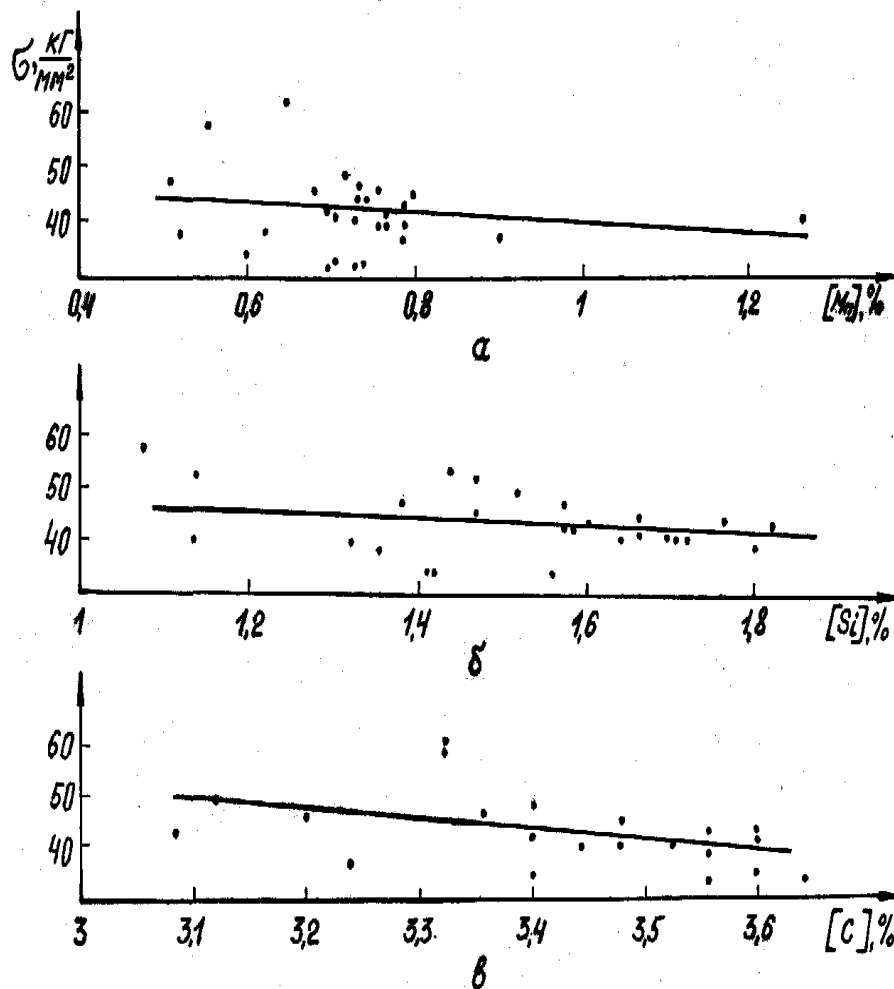


Рисунок 3.2 – Залежність міцності сірого чавуну на згин від вмісту в ньому вуглецю (в), кремнію (б) і марганцю (а)

Знайдемо коефіцієнт a_1 рівняння (3.26) методом середніх і МНК на підставі даних другої і п'ятої колонок таблиці 3.2.

Як вже зазначалось, метод середніх полягає в тому, що весь масив експериментальних даних розбивається на дві приблизно однакові частини. Для кожної з них знаходять координати середніх точок $[\bar{C}]'$, $\bar{\sigma}'$ і $[\bar{C}]''$, $\bar{\sigma}''$, відповідно (див. табл. 3.2):

$$[\bar{C}]' = (3,40 + 3,40 + 3,48 + 3,40 + 3,32 + 3,36 + 3,36 + 3,12 + 3,44 + 3,24 + 3,48 + 3,12 + 3,48 + 3,20 + 3,08 + 3,48 + 3,32) / 17 = 3,34$$

Таблиця 3.2 – Дані пасивного експерименту та їх обробка

№ п/п	Вміст, % за масою			σ , кГ/мм ²	[C] σ	[C] ²	Дані [12]		Дані [5]	
	[C]	[Si]	[Mn]				σ_p	($\Delta \sigma$) ²	σ_p	($\Delta \sigma$) ²
1	3,40	1,60	0,78	41,6	141,4	11,56	41,5	0,00	42,24	0,41
2	3,40	1,57	0,79	41,0	139,4	11,56	41,6	0,38	42,20	1,43
3	3,48	1,57	0,80	44,1	153,5	12,11	39,7	19,62	40,37	13,91
4	3,56	1,35	0,89	37,0	131,7	12,67	38,2	1,51	38,20	1,44
5	3,56	1,66	0,77	41,3	147,0	12,67	37,6	13,77	38,72	6,66
6	3,56	1,66	0,77	41,3	147,0	12,67	37,6	13,77	38,72	6,66
7	3,40	1,46	0,73	48,0	163,2	11,56	42,9	26,15	42,46	30,74
8	3,32	1,66	0,64	61,0	202,5	11,02	44,4	273,9	44,63	268,0
9	3,56	1,41	0,72	32,6	116,1	12,67	39,6	48,90	38,94	40,15
10	3,60	1,41	0,70	33,3	119,9	12,96	38,9	31,05	38,13	23,35
11	3,6	1,42	0,73	33,3	118,8	12,96	38,5	30,34	38,00	25,02
12	3,52	1,32	0,52	38,0	133,8	12,39	43,1	25,85	40,69	7,26
13	3,64	1,56	0,60	33,0	120,1	13,25	38,1	25,06	37,68	21,86
14	3,4	1,42	0,69	32,3	109,8	11,56	43,5	126,1	42,63	106,6
15	3,36	1,38	0,69	45,0	151,2	11,29	44,9	0,01	43,61	1,94
16	3,12	1,20	0,50	47,5	148,2	9,73	53,2	32,95	49,69	4,78
17	3,44	1,70	0,79	39,4	135,5	11,83	39,9	0,27	41,30	3,63
18	3,24	1,80	0,79	36,7	118,9	10,50	43,9	52,38	45,76	82,04
19	3,52	1,73	0,77	38,6	135,9	12,39	38,1	0,26	39,61	1,02
20	3,56	1,20	0,62	37,6	133,9	12,67	41,9	18,18	39,37	3,13
21	3,48	1,66	0,72	39,4	137,1	12,11	39,9	0,30	40,72	1,74
22	3,60	1,64	0,72	39,2	141,1	12,96	37,3	3,04	38,05	1,33
23	3,12	1,43	0,71	49,5	154,4	9,73	49,7	0,05	48,78	0,52
24	3,48	1,71	0,76	38,7	134,7	12,11	39,7	0,29	40,54	3,40
25	3,20	1,51	0,76	45,8	146,6	10,24	46,9	1,21	46,78	0,96
26	3,08	1,46	0,73	42,5	130,9	9,49	50,3	60,44	49,58	50,13
27	3,60	1,58	1,27	40,2	144,7	12,96	32,1	06,07	35,66	20,60
28	3,60	1,82	0,70	40,5	145,8	12,96	36,4	16,65	38,13	5,61
29	3,48	1,60	0,74	42,8	148,9	12,11	40,1	7,29	40,63	4,71
30	3,32	1,08	0,55	58,3	193,6	11,02	48,8	89,62	45,02	176,44
Σ	103,2	45,6	21,85	1239,4	4248,0	356,03	1247,3	994,22	1246,2	920,02
Σ/n	3,44	1,52	0,73	41,3	141,6	11,87	41,6	33,14	41,5	30,67
$(\Sigma/n)^{1/2}$	-	-	-	-	-	-	-	5,76	-	5,54

$$\bar{\sigma}' = (41,6 + 41,0 + 44,1 + 48,0 + 61,0 + 32,3 + 45,0 + 47,5 + 39,4 + 36,7 + 39,4 + 49,5 + 38,7 + 45,8 + 42,5 + 42,8 + 58,3)/17 = 44,3;$$

$$[\bar{C}]'' = (3,56 + 3,60 + 3,56 + 3,56 + 3,60 + 3,60 + 3,52 + 3,64 + 3,52 + 3,56 + 3,60 + 3,60 + 3,60)/13 = 3,58$$

$$\bar{\sigma}'' = (37,0 + 41,5 + 41,3 + 32,6 + 33,3 + 33,0 + 38,0 + 33,0 + 38,6 + 37,6 + 39,2 + 40,2 + 40,5)/13 = 37,4$$

Маючи координати двох середніх точок, знаходимо параметри рівняння прямої

$$\sigma = k[C] + b, \quad (3.27)$$

що проходить через ці середні точки:

$$k = (\bar{\sigma}' - \bar{\sigma}'') / ([\bar{C}]' - [\bar{C}]'') = (44,3 - 37,4) / (3,34 - 3,58) = -28,75;$$

$$b = \bar{\sigma}' - k[\bar{C}]' = 44,3 + 28,75 \cdot 3,34 = 140,32.$$

Отже, знайдена за методом середніх залежність σ ($[C]$) має вигляд:

$$\sigma = 140,32 - 28,75[C] \quad (3.28)$$

Скориставшись відомими формулами, що відповідають МНК, а також даними табл. 3.2, знаходимо наступні параметри рівняння (3.27):

$$\begin{aligned} k &= (\sum[C] \cdot \sum\sigma - n\sum[C] \cdot \bar{\sigma}) / [(\sum[C])^2 - n\sum[C]^2] = \\ &= (103,24 \cdot 1239,4 - 30 \cdot 4248) / (103,24^2 - 30 \cdot 356,03) = -23,02; \\ b &= \bar{\sigma} - k[\bar{C}] = 41,3 + 23,02 \cdot 3,44 = 120,48. \end{aligned}$$

Отже, за методом найменших квадратів знаходимо:

$$\sigma = 120,48 - 23,02[C] \quad (3.29)$$

Порівнявши вирази (3.28) і (3.29), можна констатувати, що вони є доволі близькими.

Аналогічно рівнянню (3.29) були знайдені рівняння, які характеризують вплив вмісту кремнію і марганцю на міцність сірого чавуну на згин:

$$\sigma = 50,42 - 5,98[Si]; \quad (3.30)$$

$$\sigma = 48,70 - 10,15[Mn]. \quad (3.31)$$

Згідно з рівняннями (3.30) і (3.31) кремній і марганець, як і вуглець, негативно впливають на величину σ , тільки в дещо меншій мірі, ніж останній.

Тепер, згідно з вищенаведеним описом запропонованого методу побудови математичних моделей, знаходимо коефіцієнт a_0 (див. табл. 3.2):

$$\begin{aligned} a_0 &= \bar{\sigma} - \left(a_1[\bar{C}] + a_2[\bar{Si}] + a_3[\bar{Mn}] \right) = 41,3 - \\ &- (-23,02 \cdot 3,44 - 5,98 \cdot 1,52 - 10,15 \cdot 0,73) = 136,99 \end{aligned}$$

Отже, згідно із запропонованим методом, відшукувана залежність має такий вигляд:

$$\sigma = 136,99 - 23,02[\text{C}] - 5,98[\text{Si}] - 10,15[\text{Mn}] \quad (3.32)$$

Для порівняння були розраховані коефіцієнти відшукуваної математичної моделі в середовищі MathCAD з використанням матричної алгебри, що надало змогу одержати вираз

$$\sigma = 121,31 - 22,26[\text{C}] - 0,30[\text{Si}] - 4,03[\text{Mn}], \quad (3.33)$$

який практично співпав з аналогічним виразом, одержаним у роботі [5] тим же способом:

$$\sigma = 121,32 - 22,27[\text{C}] - 0,29[\text{Si}] - 4,05[\text{Mn}] \quad (3.34)$$

Слід зауважити, що рівняння (3.32) і (3.33), незважаючи на відмінність їх коефіцієнтів, характеризуються практично однією і тією ж похибкою прогнозування вихідної величини, про що свідчать дані колонок 9 і 11 табл. 3.2.

Використання методу Брандона для побудови статистичних моделей технологічних об'єктів на основі пасивних експериментальних даних

Постановка задачі

Статистичні моделі створюють на основі пасивних експериментальних даних. Задачу формулюють наступним чином: за даною вибіркою обсягу n (тобто по заданому числу дослідів) побудувати статистичну математичну модель технологічного об'єкта. В загальному випадку технологічний процес представляється у вигляді багатомірного об'єкта. На об'єкт діють вектор вхідних параметрів X , складові якого $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$. Вихідні параметри $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ складають вектор вихідних параметрів Y . Загальний вид статистичної моделі багатомірного технологічного об'єкта можна записати у вигляді системи алгебраїчних рівнянь (3.35) або у векторній формі (3.36) [19, 20]:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = F_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ y_1 = F_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ \\ y_{p1} = F_p(x_1, x_2, \dots, x_m); \end{array} \right. \quad (3.35)$$

$$\bar{Y} = F(\bar{X}), \quad (3.36)$$

де X, Y – вектори вхідних і вихідних параметрів об'єкта.

Побудова статистичної моделі одномірного технологічного об'єкта

На практиці часто виникає необхідність створення моделей для одномірного технологічного об'єкта. Модель описується наступним рівнянням:

$$y = f(x), \quad (3.37)$$

Процес побудови статистичних моделей складається з декількох етапів.

Визначення тісноти зв'язку між змінними

Про наявність або відсутність зв'язку між двома змінними якісно можна судити за видом поля кореляції [14], а кількісно – за величиною вибіркового коефіцієнта, який визначається за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)S_x S_y}, \quad (3.38)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad (3.39)$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \quad (3.40)$$

де \bar{x} і \bar{y} – середні значення;

n – число дослідів;

S_x^2 і S_y^2 – дисперсії;

S_x і S_y – стандарти.

Для розрахунку r_{xy} зручно використовувати:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)S_x S_y}. \quad (3.41)$$

Коефіцієнт кореляції за абсолютною величиною не перевищує одиниці $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.

Чим ближче абсолютне значення коефіцієнта до одиниці, тим сильніше лінійний зв'язок між величинами. Слід відмітити, що коефіцієнт кореляції однаково відмічає частку випадковості і криволінійність зв'язку між x і y .

Залежність x і y може бути близькою до функціональної, але суттєво нелінійної; коефіцієнт кореляції при цьому буде значно менше одиниці.

Об'єктивне визначення тісноти зв'язку може бути проведено в результаті спільного аналізу якісної і кількісної оцінок.

Вибір виду залежності

Для визначення виду залежності (3.37) слід побудувати емпіричну лінію регресії (рис. 3.4). Для цього весь діапазон змінних на полі кореляції розбивається на k рівних інтервалів Δx . Всі точки, які потрапили в j -й інтервал Δx_j , відносять до його середини x_j . Для цього визначаємо часні середні для кожного інтервала:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} y_{j,i}}{n_j}, \quad (3.42)$$

де n_j – число точок в інтервалі Δx_j , причому $\sum_{i=1}^{n_j} n_j = n$ (n – обсяг вибірки).

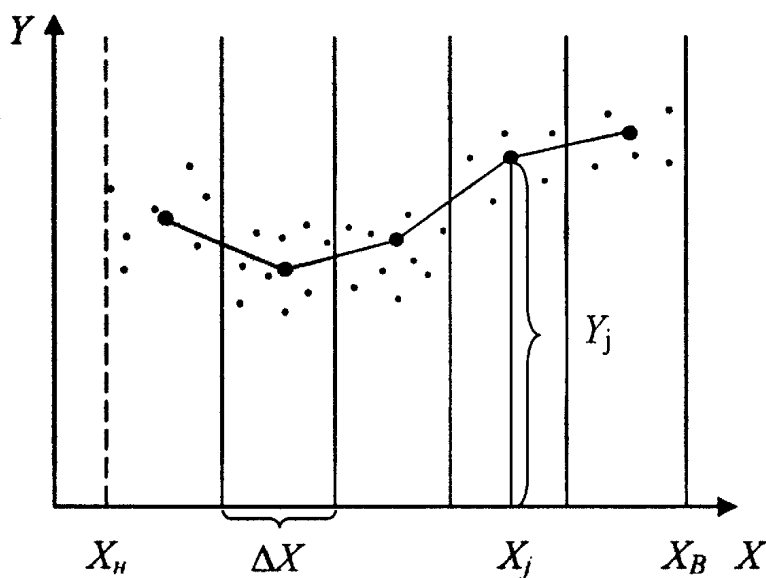


Рисунок 3.4 – Побудова емпіричної лінії регресії

Потім послідовно з'єднують точки (x_j, y_j) відрізками прямої. Одержана ламана називається емпіричною лінією регресії y по x . По виду емпіричної лінії регресії можна підібрати рівняння регресії $y = f(x)$. На практиці найчастіше застосовують рівняння регресії у вигляді:

прямої – $\hat{y}_p = a_0 + a_1 x$;

експоненти – $\hat{y}_p = a_0 + a_2 e^{a_1 x}$;

полінома n -го степеня – $\hat{y}_p = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ та інші.

Рівняння регресії в загальному випадку може бути представлено, як

Розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (3.47) дозволить визначити значення коефіцієнтів для конкретного виду залежності $f(x_1, a_0, a_1, \dots, a_m)$. Одержану залежність називають рівнянням регресії.

Вирази для визначення коефіцієнтів рівнянь регресії, для залежностей $y_p = f(x_i, a_0, a_1)$, що часто зустрічаються на практиці при створенні статистичних моделей, можуть бути одержані по методу найменших квадратів шляхом розв'язання системи (3.47). У випадку програмної реалізації, коли вид рівняння регресії ще не відомий, замість методу найменших квадратів можуть бути застосовані методи умовної оптимізації, зокрема, метод штрафних функцій [17].

Перевірка адекватності рівняння регресії

Адекватність рівняння перевіряють за критерієм Фішера:

$$F = S_{\text{зал.}}^2 / S_{\text{в.}}^2, \quad (3.48)$$

де $S_{\text{зал.}}^2$ – залишкова дисперсія, що визначає розкид експериментальних даних відносно рівняння регресії;

$S_{\text{в.}}^2$ – дисперсія відтворюваності, що визначає величину випадкової похибки.

Значення $S_{\text{зал.}}^2$ розраховують за формулою [18]:

$$S_{\text{зал.}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, a_0, \dots, a_m))^2}{n - (m + 1)}, \quad (3.49)$$

де $n - (m + 1) = f_1$ – число степенів свободи, яке визначається, як різниця кількості дослідних точок n і числа параметрів a_0, \dots, a_m , оцінених за цими ж точками.

Значення дисперсії відтворюваності знаходять на стадії попереднього аналізу даних [16]. Для цього використовують залежність

$$S_{\text{в.}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}, \quad (3.50)$$

де $n - 1 = f_2$ – число степенів свободи знаменника.

Визначивши розрахункове значення критерія Фішера за формулою (3.48), порівнюють його з табличним $F_{\text{т.}}$. Якщо $F_{\text{т.}}$ більше F для вибраних рівня значущості α і чисел степенів свободи f_1 і f_2 , то рівняння регресії адекватне. Математична модель у вигляді рівняння регресії може бути використана для практичних цілей (для розрахунку, розв'язання задач оптимізації і т. п.).

Якщо $F_{\text{т.}}$ менше F , то рівняння неадекватне. В цьому випадку необхідно вибрати інший вид залежності між величинами x і y і побудувати нову модель.

У випадку відсутності даних для визначення відтворюваності процесу при визначенні адекватності моделі на практиці використовують оцінки адекватності – кореляційне відношення η і середню відносну похибку ε :

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_{ei} - \hat{y}_p)^2}{\sum_{i=1}^n (y_{ei} - \bar{y})^2}} \quad ; \quad \varepsilon = \frac{100}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_{ei} - \hat{y}_p}{y_{ei}} \right| \quad (3.51)$$

де y_e , y_p , \bar{y} – експериментальне, розрахункове і середнє значення вихідного параметра відповідно.

Побудова статистичної моделі багатомірного технологічного об'єкта

Для побудови моделі багатомірного технологічного об'єкта в наш час існують декілька методів. Можна використовувати метод множинної кореляції, метод групового обліку аргументів [14], метод головних компонентів [15], метод Брандона [19, 20] та ін. Однозначно віддати перевагу одному з методів неможливо, тому що кожний з них пов'язаний з особливостями конкретного технологічного об'єкта. Для побудови статистичної моделі використано метод Брандона.

Метод призначений для отримання моделей виду:

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_0 \prod_{i=1}^n f_i(x_i), \quad (3.52)$$

або

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_0 \sum_{i=1}^n f_i(x_i), \quad (3.53)$$

де $f_i(x_i)$ – довільна одновимірна функція x_i ;

n – кількість входів, $i = \overline{1, n}$.

На точність моделей (3.52), (3.53) впливає порядок розрашування вхідних змінних x_i та відповідних $f_i(x_i)$. Для визначення номера індексу кожну $f_i(x_i)$ викреслюють, як функцію однієї змінної і отримують емпіричні лінії регресії. Отримавши набір графіків (рис. 3.5), апроксимацію починають з тієї змінної, для якої розбіжності між експериментальними даними і \bar{y} мінімальні. Крім того, за формою емпіричної лінії регресії обирають структуру $f_i(x_i)$.

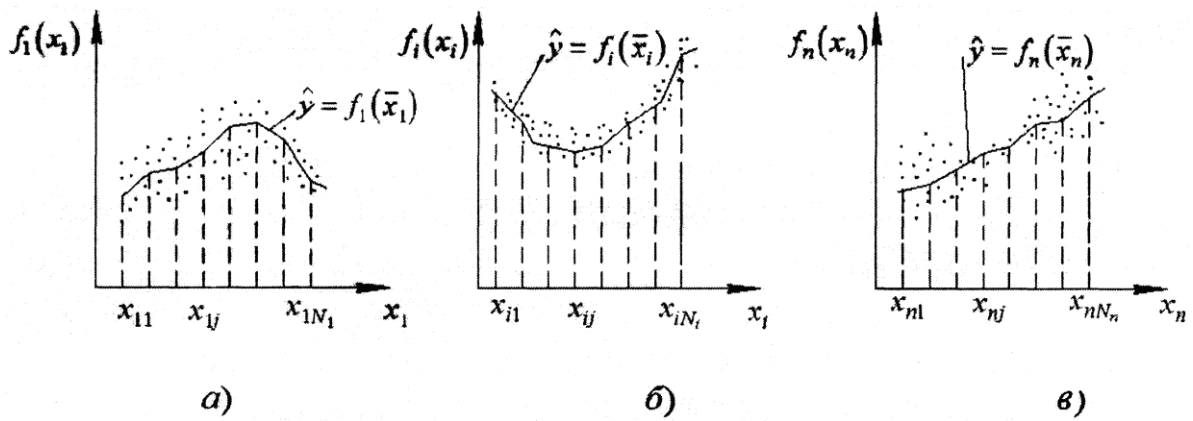


Рисунок 3.5 – Можливі види емпіричних ліній регресії

Розглянемо алгоритм методу.

1. За експериментальними даними (обсягом N) викреслюють емпіричну лінію регресії $\hat{y}_{x_1} = f_1(x_1)$. По її виду визначають структуру $f_1(x_1)$ і далі по МНК розраховують коефіцієнти цього рівняння.

2. Складають вибірку нової фіктивної вихідної змінної

$$y_1 = \frac{y}{f_1(x_1)}.$$

Фіктивна змінна y_1 не залежить від x_1 , тобто

$$\hat{y}_{p1} = b_0 f_2(x_2) f_3(x_3) \dots f_n(x_n).$$

3. По новій вибірці будують емпіричну лінію регресії

$$\hat{y}_{x_2} = f_2(x_2).$$

4. Розраховують її коефіцієнти і знову визначають вибірку наступної фіктивної вихідної змінної

$$y_2 = \frac{y_1}{f_2(x_2)} = \frac{y}{f_1(x_1) f_2(x_2)}.$$

Змінна y_2 не залежить від двох вхідних змінних x_1 та x_2 і визначається наступним рівнянням регресії

$$\hat{y}_{p2} = b_0 f_3(x_3) \dots f_n(x_n).$$

5. Подальшу процедуру визначення функції продовжують до отримання вибірки

$$y_n = \frac{y_{n-1}}{f_n(x_n)} = \frac{y}{f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n)}.$$

Остання вибірка не залежить від усіх вхідних змінних, а визначає коефіцієнт b_0 моделі (3.53)

$$\hat{y}_{p_n} = b_0 = \frac{1}{N} \sum_i^N y_{n_i},$$

де N – обсяг вибірки.

Приклад розрахунку за методом Брандона

Таблиця 3.3 – Обробка експериментальних даних за методом Брандона

Вхідні дані				Вихідні дані	Розрахункові дані				
№	x_1	x_2	x_3	y	\hat{y}_{p1}	\hat{y}_{p2}	\hat{y}_{p3}	y моделі	y_1
1	1	5	20	73,37	59,21627	42,52521	41,05837	73,58279	0,04528
2	4	4	50	62,5	27,71069	13,94299	-0,6209939	63,12099	0,385633
3	7	7	100	111,6	42,41806	19,8803	0,90602612	110,694	0,820883
4	8	9	10	53,9	46,6248	18,24033	-0,2736247	54,17362	0,07487
5	3	12	20	62	47,84627	10,69175	-0,4717265	62,47173	0,222526
6	6	10	40	77,3	49,38922	18,0814	-0,38798	77,68798	0,150528
7	10	5	60	72,1	30,43217	13,74111	-0,9566046	73,0566	0,915092
8	2	6	10	34	26,7248	7,110389	0,31262687	33,68737	0,097736
9	4	5	100	101,8	32,61806	15,927	1,3630203	100,437	1,857824
10	5	12	50	87,3	52,51069	15,35617	-1,6431151	88,94312	2,699827
11	8	8	60	87,3	45,63217	20,17105	1,65709438	85,64291	2,745962
12	9	4	40	59,4	31,48922	17,72151	0,6330767	58,76692	0,400786
13	3	11	70	95,3	46,75364	12,52247	1,35899257	93,94101	1,846861
14	2	10	90	100,2	37,89659	6,588766	-0,2089962	100,409	0,043679
15	8	7	100	109,8	40,61806	18,0803	-0,4336599	110,2337	0,188061
16	5	9	10	53,2	45,9248	17,54033	0,5410489	52,65895	0,292734
17	1	5	90	79,55	17,24659	0,555528	-0,9113167	80,46132	0,830498
18	2	8	40	60,9	32,98922	7,528104	0,730342	60,16966	0,533399
19	6	6	80	92,4	36,97511	17,3607	-1,1086769	93,50868	1,229164
20	9	4	70	79,7	31,15364	17,38593	0,29749669	79,4025	0,088504
21	10	12	30	73,1	52,06775	14,91322	0,21550835	72,88449	0,046444
22	7	11	20	68,4	54,24627	20,0151	1,04082972	67,35917	1,083327
23	4	10	30	67,6	46,56775	15,25993	0,69594479	66,90406	0,484339
24	3	5	80	83,2	27,77511	11,08405	-0,0794195	83,27942	0,006307
25	2	10	70	86,75	38,20364	6,895819	0,09805712	86,65194	0,009615
26	7	12	50	91	56,21069	19,05617	0,08189728	90,9181	0,006707
27	8	4	20	47,1	32,94627	19,17857	0,66461079	46,43539	0,441707
28	9	7	40	66,4	38,48922	15,95146	-1,1369806	67,53698	1,292725
29	2	8	80	86,8	31,37511	5,913997	-0,8837647	87,68376	0,78104
30	9	4	40	57,5	29,58922	15,82151	-1,2669233	58,76692	1,605095
								сума	21,22716

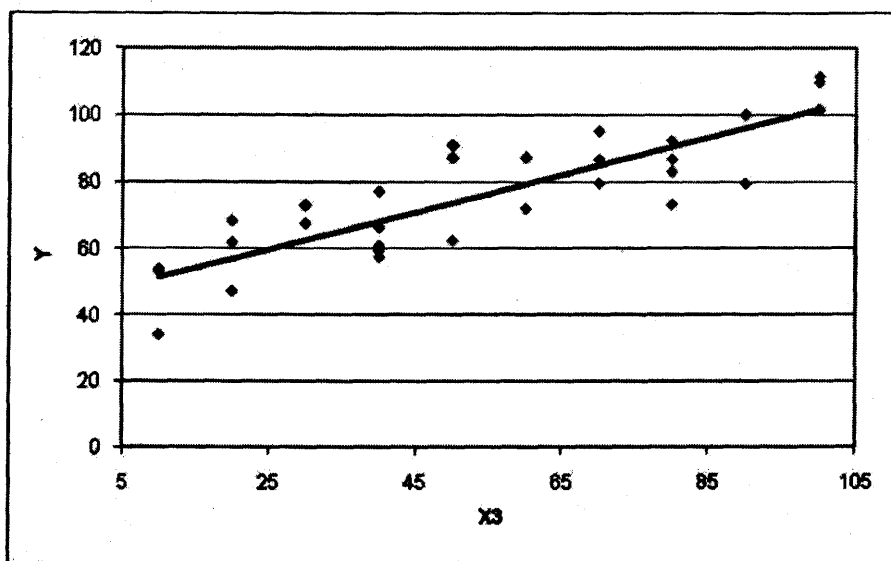
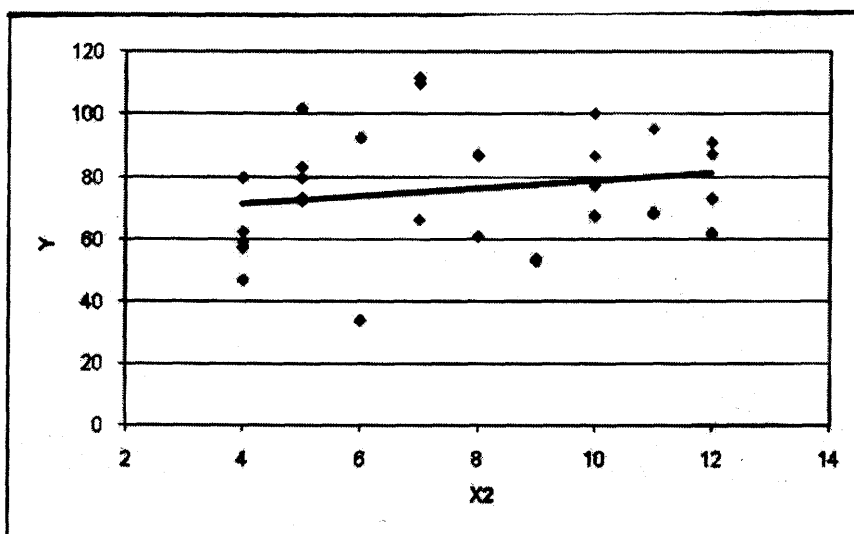
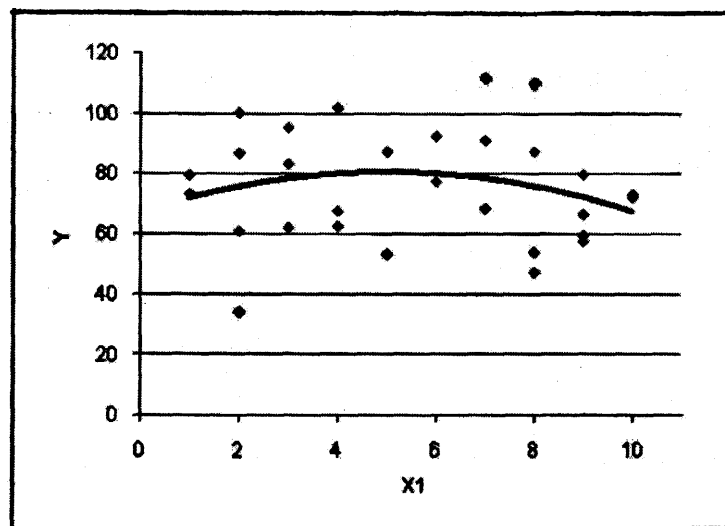


Рисунок 3.5 – Емпіричні лінії регресії

Отримані коефіцієнти рівняння регресії

$$a_0 = -4,82928$$

$$a_1 = 6,778725$$

$$a_{11} = -0,4826$$

$$a_2 = 2,074298$$

$$a_{12} = 2,923352$$

$$a_3 = 0,396672$$

$$a_{13} = 0,687853$$

Отримано статистичну математичну модель багатомірного технологічного об'єкта за методом Брандона.

$$y = -4,829 + 6,778x_1 + 2,074x_2 + 0,396x_3 + 2,923x_1x_2 + 0,687x_1x_3 - 0,483x_1^2$$

3.2. Контрольні запитання

1. В чому полягає суть пасивного експерименту?
2. Що таке метод найменших квадратів, на чому він ґрунтується?
3. Виведіть формули для розрахунку за допомогою МНК параметрів рівняння $y = a_0 + ax$.
4. В чому суть методу середніх? Виведіть формули для визначення параметрів рівняння $y = a_0 + ax$ методом середніх.
5. Які методи використовуються для побудови лінійних багатофакторних моделей (ЛБМ)?
6. Як будуються ЛБМ на основі МНК?
7. Як будуються ЛБМ за методом ізофакторних розрізів?
8. Як будуються нелінійні багатофакторні моделі за методом ізофакторних розрізів?
9. В чому суть методу Брандона?

3.3. Завдання

За даними табл. 3.2 методами середніх і найменших квадратів знайти залежності $\sigma([Si])$ і $\sigma([Mn])$, порівняти їх з відповідними залежностями, наведеними в даній лабораторній роботі, і зробити висновки.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

ПОБУДОВА СТАТИСТИЧНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗА ДАНИМИ АКТИВНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Мета роботи – Побудувати статистичні математичні моделі за даними активних експериментів

4.1. Загальні відомості

Реалізація плану експерименту

До проведення дослідів треба ретельно підготуватись: зібрати експериментальну установку, перевірити і прокалібрувати прилади, підготувати необхідну сировину, завести спеціальний журнал. Першу його сторінку можна присвятити меті дослідження і вихідним параметрам з указанням одиниць їх вимірювання. Бажано перерахувати всі параметри, які можуть бути характеристиками процесу і звернути увагу на кореляцію, що існує між ними. Якщо ж відомості про кореляцію відсутні, то тоді доцільно підрахувати коефіцієнти парної кореляції, перевірити їх значущість і виявити групу некорельованих параметрів. Потім з них слід виділити «головний» параметр, по якому буде здійснюватись рух за градієнтом, а всі інші вихідні параметри будуть відігравати роль обмежень.

Другу сторінку журналу можна виділити для факторів, обов'язково вказавши для кожного з них одиницю вимірювання, область визначення, нульовий рівень та інтервал варіювання.

Для матриці планування зручно виділити окрему сторінку журналу чи може навіть цілий його розворот, щоб забезпечити можливість помістити не тільки кодовані, а й дійсні значення факторів, записати повторні досліди і зауваження.

Маючи план дослідів, необхідно розрахувати кількість сировини і заздалегідь її підготувати. Бажано, щоб сировина була однорідною. Якщо вимогу щодо однорідності сировини задовольнити не можна, то тоді треба заздалегідь визначити кількість різних партій сировини і відповідним чином розбити матрицю планування на блоки.

Окремі сторінки журналу треба відвести для розрахунків, а також для аналізу результатів експерименту. Всі розрахунки й інші записи повинні зберігатись до закінчення всієї роботи і складання звіту.

Статистичний аналіз результатів визначення параметра оптимізації

Значущість різниці середніх результатів двох дослідів. Уявімо собі, що проведено експеримент згідно з матрицею, представленою у вигляді табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Матриця планування 2^{5-2}

№ досліджу	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
1	+	–	–	–	–	–	50,0
2	+	+	+	–	–	–	57,2
3	+	–	–	+	+	–	48,1
4	+	+	–	+	–	+	46,0
5	+	–	+	+	–	+	64,8
6	+	+	–	–	+	+	45,3
7	+	–	+	–	+	+	54,8
8	+	+	+	+	+	–	53,0
a_j	52,4	–2,025	5,05	0,575	–2,1	0,325	

Треба відповісти на запитання, чи є умови дослідів № 3 більш вигідними за умови дослідів № 4, або, інакше кажучи, чи є значущою різниця між значеннями параметра оптимізації в цих дослідів. Кількість спостережень в кожному досліді дорівнювала п'яти, а похибка вимірювання параметра оптимізації (див. наступний пункт) в обох дослідів приблизно однакова і дорівнює 1,0.

Із математичної статистики відомо, що значущість різниці двох середніх можна перевірити за допомогою t -критерію Стюдента, розрахункове значення якого знаходять за формулою:

$$t_{\text{розр.}} = (y_1 - y_2) / s \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}, \quad (4.1)$$

де y_1 і y_2 – середні значення параметра оптимізації в одному і другому дослідів;

s – похибка дослідів (розглядається випадок, коли похибки для обох дослідів близькі одна до одної);

n_1 і n_2 – кількість спостережень в обох дослідів.

Для нашого випадку маємо:

$$t_{\text{розр.}} = (48,1 - 46,0) / 1 \sqrt{1/5 + 1/5} = 3,3.$$

Тепер знаходимо табличне значення t -критерію Стюдента, для чого треба знати число ступенів свободи f для входу в таблицю значень цього критерію (додаток 2). Величина f – це кількість випробувань мінус кількість рівнянь, використаних при знаходженні середніх. В прикладі, що розглядається, в кожному досліді було по п'ять паралельних вимірювань, на підставі яких було знайдено дві середні величини, отже $f = n_1 + n_2 - 2 = 5 + 5 - 2 = 8$. Згідно з додатком 2, $t_{\text{табл.}} = 2,3$. Оскільки табличне значення t -критерію менше за розрахункове, можна вважати, що з ймовірністю $p = 1 - 0,05 = 0,95$ різниця між

результатами двох дослідів є значущою, і, таким чином, величину 48,1 можна вважати кращою за 46,0.

Похибка досліду. При проведенні повторних паралельних вимірювань в тому чи іншому досліді ми кожного разу одержуємо різні результати. Причиною цього є наявність похибки досліду (або похибки відтворюваності досліду), обумовленої похибкою вимірювання, неточністю фіксації факторів на заданих рівнях, впливом систематичних та випадкових чинників, що викривляють значення параметра оптимізації.

Для знаходження похибки досліду, що складається з n паралельних вимірювань, спочатку знаходять середнє арифметичне результатів всіх вимірювань в досліді:

$$\bar{y} = (y_1 + y_2 + \dots + y_n)/n = (1/n) \sum_{i=1}^n y_i. \quad (4.2)$$

Згідно з теорією ймовірностей середнє арифметичне найближче розташоване до істинного значення вимірюваної величини. При $n \rightarrow \infty$ середнє арифметичне дорівнює істинному її значенню.

Далі знаходять відхилення кожного окремого вимірювання від середньої величини, всі ці відхилення підносять до квадрата і складують.

Середнє арифметичне квадратів відхилень називається **дисперсією** параметра оптимізації в досліді:

$$s^2 = [1/(n-1)] \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2. \quad (4.3)$$

В цьому виразі $n - 1$ — число ступенів свободи при визначенні середньої. Воно дорівнює кількості спостережень мінус одиниця. Один ступінь свободи використано для обчислення середньої.

Корінь квадратний із дисперсії, взятий з додатнім знаком, називається **середнім квадратичним відхилом**, або **стандартом**, або **квадратичною похибкою**, або просто **похибкою** (в нашому випадку – **похибкою досліду**):

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{[1/(n-1)] \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}. \quad (4.4)$$

Величина s є кількісною характеристикою (мірою) похибки досліду.

Тут слід відмітити, що середнє арифметичне окремих величин можна знаходити лише в тих випадках, коли характер розподілу цих величин є нормальним.

Перевірка підозрілих значень параметра оптимізації на брак. При наявності результатів вимірювання, що різко відрізняються від інших, підозрілі значення слід перевірити на брак. Робиться це за допомогою того ж t -критерію Стюдента, чисельне значення якого є мірою значущості відмінності двох величин.

Перевірка на брак підозрілого значення параметра оптимізації $y_{\text{підозр.}}$ проводиться у п'ять етапів:

- 1) відкинувши підозріле значення, знаходять середнє арифметичне решти значень параметра оптимізації \bar{y} ;
- 2) розраховують дисперсію s^2 і стандарт s ;
- 3) розраховують модуль значення t -критерію Стюдента за формулою:

$$t_{\text{розр.}} = |(y_{\text{підозр.}} - \bar{y})/s|; \quad (4.5)$$

4) знаходять табличне значення t -критерію Стюдента відповідно до числа ступенів свободи при визначенні \bar{y} ;

5) порівнюють $t_{\text{розр.}}$ з $t_{\text{табл.}}$: якщо $t_{\text{розр.}} > t_{\text{табл.}}$, то підозріле значення є браком і його відкидають; в протилежному випадку підозрілий результат не є браком і його слід включити до числа значень, за якими знаходять середнє арифметичне, дисперсію і стандарт.

Приклад. При дослідженні процесу корозії чотири повторних вимірювання параметра оптимізації дали наступні результати: 3,580; 2,370; 2,710 і 2,761. Результат першого вимірювання поставлено під сумнів. Вияснити, чи є цей результат браком.

Перевірку на брак проводимо згідно із вищезазначеною процедурою.

1. Середнє арифметичне решти трьох значень функції відгук

$$\bar{y} = (2,370 + 2,710 + 2,761)/3 = 2,613.$$

2. Стандарт

$$s = \sqrt{[1/(3-1)][(2,370 - 2,613)^2 + (2,710 - 2,613)^2 + (2,761 - 2,613)^2]} = 0,17.$$

3. Розрахункове значення t -критерію Стюдента

$$t_{\text{розр.}} = (3,580 - 2,613)/0,17 = 5,69.$$

4. Табличне значення t -критерію Стюдента при $f = 3 - 1 = 2$ (див. додаток 2)

$$t_{\text{табл.}} = 4,303$$

Оскільки $t_{\text{розр.}} > t_{\text{табл.}}$, підозрілий результат з ймовірністю 0,95 є браком.

Перевірка однорідності дисперсій дослідів. При визначенні дисперсії відтворюваності експерименту може трапитись так, що дисперсія якогось дослідів сильно відрізняється від дисперсії решти дослідів. В таких випадках слід встановити, чи значущо ця дисперсія відрізняється від середньоарифметичного значення решти дисперсій і якщо так, то при усередненні дисперсій дану

дисперсію треба відкинути або вжити заходів щодо забезпечення однорідності дисперсій.

Перевірка значущості відхилення даної дисперсії від середнього значення решти дисперсій, або, іншими словами, перевірка дисперсій на однорідність проводиться за допомогою F -критерію Р. Фішера (додаток 3). Спочатку знаходять розрахункове значення цього критерію як відношення найбільшої дисперсії до найменшої:

$$F_{\text{розр.}} = s_{\text{max}}^2 / s_{\text{min}}^2 . \quad (4.6)$$

Потім, скориставшись додатком 3 і значеннями величин f_1 і f_2 , які дорівнюють числам ступенів свободи при визначенні, відповідно, дисперсій s_{max}^2 і s_{min}^2 , знаходять табличне значення F -критерію Фішера $F_{\text{табл.}}$.

Далі порівнюють між собою величини $F_{\text{розр.}}$ і $F_{\text{табл.}}$. Якщо $F_{\text{розр.}} > F_{\text{табл.}}$, дисперсії неоднорідні і, навпаки, при $F_{\text{розр.}} < F_{\text{табл.}}$ вони є однорідними.

Приклад. Визначити, чи є обґрунтованою гіпотеза про однорідність дисперсій, якщо $s_{\text{max}}^2 = 5,14$; $n_1 = 7$; $f_1 = 6$; $s_{\text{min}}^2 = 0,324$; $n_2 = 6$; $f_2 = 5$.

Знаходимо розрахункове значення F -критерію за формулою (4.6):

$$F_{\text{розр.}} = 5,14 / 0,324 = 15,9$$

Визначаємо табличне значення F -критерію (див. додаток 3) при $f_1 = 7 - 1 = 6$ і $f_2 = 6 - 1 = 5$:

$$F_{\text{табл.}} = 5,0.$$

Оскільки $F_{\text{розр.}} > F_{\text{табл.}}$, дисперсії неоднорідні.

Критерій Р. Фішера рекомендується використовувати в тих випадках, коли кількість порівнюваних дисперсій дорівнює двом.

Якщо ця кількість більше двох і у кожному досліді було однакове число повторних спостережень, то можна скористатись критерієм Кохрена [2].

У випадку, коли кількість порівнюваних дисперсій більше двох, а число вимірювань в досліді різне, можна використовувати критерій Бартлера [2].

Останні два критерії не розглядаються через складність користування ними, а також тому, що критерій Фішера може бути в нагоді і тоді, коли кількість порівнюваних дисперсій більше двох. Як зазначено вище, в цьому випадку розрахункове значення F -критерію знаходять як відношення максимальної дисперсії до мінімальної і порівнюють його з табличним значенням даного критерію при відповідних числах ступенів свободи. При $F_{\text{розр.}} > F_{\text{табл.}}$ дисперсії неоднорідні. Якщо ж $F_{\text{розр.}} < F_{\text{табл.}}$, то всі дисперсії однорідні, тому що різниця між рештою дисперсій буде ще менш значущою, ніж різниця між максимальною і мінімальною дисперсіями.

Якщо аналіз показав, що дисперсії параметра оптимізації в дослідях неоднорідні, то для виправлення становища слід змінити масштаб параметра оптимізації. Це означає, що в якості нового параметра оптимізації треба увести, наприклад, корінь квадратний або логарифм від попереднього параметра.

Дисперсія параметра оптимізації експерименту. Вище розглянуто питання про визначення дисперсії параметра оптимізації в тому чи іншому досліді, тобто в окремому горизонтальному вектор-рядку матриці планування експерименту. Однак, часто необхідно знати дисперсію параметра оптимізації всього експерименту, який включає всі досліді. Ця загальна дисперсія називається ще **дисперсією відтворюваності експерименту**. Позначається вона через $s_{\{y\}}^2$.

При визначенні $s_{\{y\}}^2$ можливі три випадки:

- 1) в кожному досліді було по одному спостереженню, а величина $s_{\{y\}}^2$ визначалась за даними n паралельних вимірювань в центрі плану;
- 2) в кожному досліді проведено по однаковій кількості спостережень;
- 3) кількість повторних вимірювань в кожному досліді n_i різна.

В першому випадку дисперсія параметра оптимізації визначається за формулою:

$$s_{\{y\}}^2 = [1/(n-1)] \sum_{i=1}^n (y_{0i} - \bar{y}_0)^2, \quad (4.7)$$

де y_{0i} – значення параметра оптимізації в i -му вимірюванні;

\bar{y}_0 – середнє значення величини y в n вимірюваннях.

В другому випадку величину $s_{\{y\}}^2$ знаходять із виразу:

$$s_{\{y\}}^2 = [1/N(n-1)] \sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^n (y_{iq} - \bar{y}_i)^2, \quad (4.8)$$

де y_{iq} – значення параметра оптимізації у q -му вимірюванні i -го досліді;

\bar{y}_i – середнє значення величини y в i -му досліді;

N – кількість дослідів;

n – кількість вимірювань в досліді.

В третьому випадку дисперсію відтворюваності експерименту знаходять як середнє зважене значення дисперсій за формулою:

$$s_{\{y\}}^2 = \frac{s_1^2 f_1 + s_2^2 f_2 + \dots + s_N^2 f_N}{f_1 + f_2 + \dots + f_N} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^N f_i}, \quad (4.9)$$

де s_1^2 – дисперсія 1-ого досліді;

s_2^2 – дисперсія 2-ого дослідів і т.ін.;

$f_1 = n_1 - 1$ – число ступенів свободи в 1-ому досліді;

$f_2 = n_2 - 1$ – в 2-ому досліді і т.ін.

Приклади розрахунку величини $\sigma_{\{y\}}^2$ наведені нижче.

Перевірка адекватності моделі

Розрахувавши коефіцієнти полінома і одержавши тим самим математичну модель об'єкта дослідження, необхідно переконатись в тому, що при користуванні одержаною моделлю розрахункові значення параметра оптимізації відрізняються від його експериментальних значень на величину, яка не перевищує похибку експерименту. Така модель називається **адекватною**.

Перевірка адекватності моделі проводиться за допомогою вже знайомого нам F -критерію Фішера для обраного рівня значущості (здебільшого 5%-го).

Спочатку знаходять розрахункове значення F -критерію за формулою:

$$F_{\text{розр.}} = s_{\text{ад}}^2 / s_{\{y\}}^2, \quad (4.10)$$

де $s_{\text{ад}}^2$ – дисперсія адекватності;

$s_{\{y\}}^2$ – дисперсія відтворюваності експерименту (дисперсія параметра оптимізації в експерименті).

Дисперсія адекватності визначається як відношення суми квадратів відхилень модельних (розрахункових) значень параметра оптимізації від його експериментальних значень до числа ступенів свободи при визначенні дисперсії адекватності. Це число ступенів свободи дорівнює різниці між кількістю дослідів в експерименті і кількістю коефіцієнтів полінома математичної моделі.

При визначенні $s_{\text{ад}}^2$, як і при знаходженні $s_{\{y\}}^2$, можливі три випадки:

1) в кожному досліді було проведено лише по одному спостереженню, а величину $s_{\{y\}}^2$ знаходили по декількох спостереженнях в центрі плану експерименту;

2) в кожному досліді число спостережень було різним ($n_i = \text{var}, n_i > 1$);

3) в кожному досліді була одна і та ж кількість спостережень n , причому $n > 1$.

В першому випадку дисперсію адекватності знаходять за формулою:

$$s_{\text{ад}}^2 = (1/f) \sum_{i=1}^N (y_{i,\text{експ}} - y_{i,\text{р}})^2, \quad (4.11)$$

де $f = N - \sum a_j$ – число ступенів свободи при визначенні дисперсії адекватності;

$y_{i,\text{експ}}$ і $y_{i,\text{р}}$ – відповідно, експериментальне і розрахункове значення параметра оптимізації в i -му досліді;

N – кількість дослідів;

$\sum a_j$ – сума коефіцієнтів моделі.

Так, наприклад, якщо було проведено 8 дослідів плану 2^{4-1} , по одному спостереженню в кожному досліді, і, крім того, в нульовій точці поставлено 4 паралельних вимірювання для визначення $s_{\{y\}}^2$, то при лінійній моделі

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 \quad (\sum a_j = 5) \quad f = N - \sum a_j = 8 - 5 = 3.$$

Паралельні спостереження в центрі плану при цьому не враховуються, тому що вони не використовуються при розрахунку коефіцієнтів математичної моделі.

В другому випадку величину $s_{ад}^2$ знаходять за формулою:

$$s_{ад}^2 = (1/f) \sum_{i=1}^N n_i (y_{i,експ} - y_{i,p})^2. \quad (4.12)$$

Третій випадок є окремим різновидом попереднього, коли константу n (число спостережень в кожному досліді) можна винести за знак суми (див. попередню формулу (4.12)):

$$s_{ад}^2 = (1/f) n \sum_{i=1}^N (y_{i,експ} - y_{i,p})^2. \quad (4.13)$$

Після визначення величини $F_{розр.}$ знаходять табличне значення F -критерію Фішера (див. додаток 3) при числах ступенів свободи f_1 і f_2 , якими є числа ступенів свободи при визначенні, відповідно, дисперсії адекватності $s_{ад}^2$ і дисперсії відтворюваності експерименту $s_{\{y\}}^2$.

Нарешті, порівнюють між собою величини $F_{розр.}$ і $F_{табл.}$. Якщо виявиться, що $F_{розр.} > F_{табл.}$, то математична модель неадекватна. В протилежному випадку ($F_{розр.} < F_{табл.}$) модель є адекватною.

З приводу формул (4.7)...(4.13) слід зробити наступне зауваження. Чим більше число паралельних спостережень в досліді, тим менше дисперсія відтворюваності експерименту і більше дисперсія адекватності, отже більше величина $F_{розр.}$. А це означає, що до різниці між експериментальними і розрахунковими значеннями параметра оптимізації вимоги при цьому стають більш жорсткими, що і проявляється шляхом зростання величини $F_{розр.}$.

Слід зауважити, що при $n_i = var$ розглянутий метод розрахунку коефіцієнтів математичної моделі, строго кажучи, стає непридатним, тому що матриця планування експерименту втрачає властивість ортогональності. В цьому випадку коефіцієнти полінома повинні розраховуватись за правилами

регресійного аналізу. Приклади таких розрахунків можна знайти в роботах [2, 4] та інших.

Перевірка значущості коефіцієнтів

Перевірка значущості коефіцієнтів поліноміальної математичної моделі проводиться з метою з'ясування, які з коефіцієнтів рівняння $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна відкинути як незначущі без втрати точності розрахунків за моделлю.

Перевірка значущості коефіцієнтів може бути здійснена двома рівноцінними способами:

1) за допомогою довірчих інтервалів;

2) за t -критерієм Стюдента.

За першим способом спочатку розраховують величину довірчого інтервалу за формулою:

$$\Delta a = \pm t s_{\{y\}} / \sqrt{N}, \quad (4.14)$$

де $s_{\{y\}} / \sqrt{N} = \sqrt{s_{\{y\}}^2 / N} = \sqrt{s_a^2} = s_a$ – стандарт чи квадратична похибка коефіцієнта регресії, з якою порівнюється довірчий інтервал;

t – табличне значення t -критерію Стюдента, що визначається за допомогою числа ступенів свободи, при якому знаходилась дисперсія відтворюваності параметра оптимізації $s_{\{y\}}^2$.

Як видно із виразу (4.14), для даного конкретного експерименту довірчий інтервал Δa – величина одна і та ж для кожного коефіцієнта моделі, оскільки t , $s_{\{y\}}$ і N – для заданих умов є константами.

Визначивши довірчий інтервал, порівнюють із ним кожний коефіцієнт моделі. Коефіцієнт вважається незначущим, якщо його модуль менше за величину довірчого інтервалу. В протилежному випадку коефіцієнт є значущим.

Приклад. За даними ПФЕ 2² одержана математична модель $y = 88,0 - 2,0x_1 - 4,5x_2 + 0,5x_1x_2$. Дисперсія відтворюваності параметра оптимізації, згідно з п'ятьма вимірюваннями в нульовій точці, $s_{\{y\}}^2 = 0,625$. Перевірити значущість коефіцієнтів моделі.

Розв'язання.

1. Стандарт

$$s_{\{y\}} = \sqrt{s_{\{y\}}^2} = \sqrt{0,625} = 0,79.$$

2. Табличне значення t -критерію Стюдента при $f = 5 - 1 = 4$ (див. додаток 2)

$$t_{\text{табл.}} = 2,776.$$

Довірчий інтервал за формулою (4.14)

$$\Delta a = 2,776 \cdot 0,79 / \sqrt{4} = 1,1.$$

Порівнявши Δa з коефіцієнтами моделі, робимо висновок, що коефіцієнт $a_{12} = 0,5$ незначущий, бо він менший за довірчий інтервал. Решта коефіцієнтів є значущими.

При використанні другого способу для кожного коефіцієнта моделі слід розрахувати величину t -критерію Стьюдента і порівняти її з табличним значенням цього критерію для числа ступенів свободи, при якому визначалась дисперсія $s_{\{y\}}^2$.

Розрахункове значення t -критерію знаходять за формулою:

$$t_{\text{розр.}} = |a_j| / \sqrt{s_{\{y\}}^2 / N}, \quad (4.15)$$

де $|a_j|$ – модуль j -го коефіцієнта, що перевіряється на значущість.

В знаменнику правої частини виразу (4.15), згідно з попереднім, знаходиться квадратична похибка коефіцієнта регресії s_a .

Коефіцієнт регресії буде незначущим, якщо $t_{\text{розр.}} < t_{\text{табл.}}$ і значущим – в протилежному випадку.

Приклад. Для умов попереднього прикладу розраховане значення t -критерію для коефіцієнта $a_{12} = 0,5$ за формулою (4.15)

$$t_{\text{розр.}} = 0,5 / \sqrt{0,625 / 4} = 1,27.$$

Табличне значення t -критерію при $f = 5 - 1 = 4$

$$t_{\text{табл.}} = 2,776.$$

Оскільки $t_{\text{розр.}} < t_{\text{табл.}}$, коефіцієнт $a_{12} = 0,5$ є незначущим, і останнім доданком полінома без втрати точності моделі можна знехтувати.

Для коефіцієнта $|a_1| = 2,0$

$$t_{\text{розр.}} = 2 / \sqrt{0,625 / 4} = 5,1,$$

а табличне значення – те саме ($t_{\text{табл.}} = 2,776$).

Оскільки $t_{\text{розр.}} > t_{\text{табл.}}$, коефіцієнт $|a_1| = 2,0$ є значущим. Коефіцієнти $a_0 = 88,0$ і $|a_2| = 4,5$ є значущими тим більше.

Як бачимо, обидва способи перевірки значущості коефіцієнтів дають один і той же результат.

Приклад 1. Обробка даних активного експерименту

Завдання. Провести обробку даних повного двофакторного експерименту, здійсненого згідно з матрицею планування, представленою у вигляді табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Матриця планування експерименту 2^2

№ досліджу	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	$\bar{y}_{\text{експ.}}$	$y_p.$
1	+	+	+	+	18,3	18,4	18,2	<u>21,0</u>	18,3	18,3
2	+	–	+	–	16,8	16,6	16,4	<u>18,0</u>	16,6	16,5
3	+	+	–	–	14,1	14,0	14,2	14,5	14,2	14,1
4	+	–	–	+	12,0	12,3	12,2	12,4	12,25	12,3

Дисперсії дослідів. В досліді № 1 результат четвертого вимірювання є підозрілим, тому перевіряємо його на брак.

Середнє значення результатів решти спостережень за формулою (4.2)

$$\bar{y}_1 = (18,3 + 18,4 + 18,2)/3 = 18,3.$$

Дисперсія параметра оптимізації за формулою (4.3)

$$s_1^2 = [(18,3 - 18,3)^2 + (18,4 - 18,3)^2 + (18,2 - 18,3)^2] / (3 - 1) = 0,01.$$

Похибка за формулою (4.4)

$$s_1 = \sqrt{0,01} = 0,1.$$

Розрахункове значення t -критерію Стюдента (формула (4.5))

$$t'_{\text{розр.}} = \left| \frac{y_{\text{підозр.}} - \bar{y}_1}{s_1} \right| = \left| \frac{21,0 - 18,3}{0,1} \right| = 27.$$

Табличне значення t -критерію Стюдента при $f = 3 - 1 = 2$

$$t'_{\text{табл.}} = 4,303.$$

Оскільки $t'_{\text{розр.}} > t'_{\text{табл.}}$, підозрілий результат вимірювання параметра оптимізації є браком.

В досліді № 2 підозрілою величиною є $y_4 = 18,0$. Для перевірки цього значення параметра оптимізації на брак проводимо розрахунки у тій же послідовності, що і у досліді № 1:

$$\bar{y}_2 = (16,8 + 16,6 + 16,4)/3 = 16,6;$$

$$s_2^2 = \left[(16,8 - 16,6)^2 + (16,6 - 16,6)^2 + (16,4 - 16,6)^2 \right] / (3 - 1) = 0,04;$$

$$I_2 = \sqrt{0,04} = 0,2;$$

$$t_{\text{розр.}}'' = (y_{\text{підозр.}} - \bar{y}_2) / s_2 = (18,0 - 16,6) / 0,2 = 7;$$

$$t_{\text{табл.}}'' = 4,303.$$

Оскільки $t_{\text{розр.}}'' > t_{\text{табл.}}''$, підозрілий результат теж є браком.

В дослідях № 3 і № 4 підозрілих значень параметра оптимізації немає, тому процедура визначення дисперсій і похибок спрощується:

$$\bar{y}_3 = (14,1 + 14,0 + 14,2 + 14,5) / 4 = 14,2;$$

$$s_3^2 = \left[(14,1 - 14,2)^2 + (14,0 - 14,2)^2 + (14,2 - 14,2)^2 + (14,5 - 14,2)^2 \right] / (4 - 1) = 0,047;$$

$$s_3 = \sqrt{0,047} = 0,216;$$

$$\bar{y}_4 = (12,0 + 12,3 + 12,2 + 12,4) / 4 = 12,25;$$

$$s_4^2 = \left[(12,0 - 12,25)^2 + (12,3 - 12,25)^2 + (12,2 - 12,25)^2 + (12,4 - 12,25)^2 \right] / (4 - 1) = 0,03;$$

$$s_4 = \sqrt{0,03} = 0,173.$$

Визначення коефіцієнтів полінома. Коефіцієнти поліноміальної моделі визначаємо за формулою (4.12):

$$a_0 = (18,3 + 16,6 + 14,2 + 12,25) / 4 = 15,34;$$

$$a_1 = (18,3 - 16,6 + 14,2 - 12,25) / 4 = 0,91;$$

$$a_2 = (18,3 + 16,6 - 14,2 - 12,25) / 4 = 2,11;$$

$$a_{12} = (18,3 - 16,6 - 14,2 + 12,25) / 4 = -0,06.$$

Таким чином, неповний поліном другого степеня має вигляд:

$$y = 15,34 + 0,91x_1 + 2,11x_2 - 0,06x_1x_2.$$

Лінійна модель виглядає так:

$$y = 15,34 + 0,91x_1 + 2,11x_2.$$

Дисперсія відтворюваності експерименту. Цю величину знаходимо за формулою (4.9):

$$s_{\{y\}}^2 = (2 \cdot 0,01 + 2 \cdot 0,04 + 3 \cdot 0,047 + 3 \cdot 0,03) / (2 + 2 + 3 + 3) = 0,0331.$$

Квадратична похибка експерименту:

$$s_{\{y\}} = \sqrt{s_{\{y\}}^2} = \sqrt{0,0331} = 0,1819.$$

Перевірка однорідності дисперсії дослідів. Максимальна дисперсія виявилась в третьому досліді ($s_3^2 = 0,047$), а мінімальна – в першому ($s_1^2 = 0,01$), тому за формулою (4.6) розрахункове значення F -критерію Фішера

$$F_{\text{розр.}} = 0,047/0,01 = 4,7.$$

Табличне значення цього критерію згідно з додатком 3 при $f_1 = 4 - 1 = 3$ і $f_2 = 3 - 1 = 2$

$$F_{\text{табл.}} = 19,2.$$

Оскільки $F_{\text{розр.}} < F_{\text{табл.}}$, дисперсії однорідні.

Перевірка лінійної моделі на адекватність. Враховуючи те, що в нашому експерименті $n_i = \text{var}$, дисперсію адекватності знаходимо за формулою (4.12). Розраховуємо необхідні для цього модельні значення параметра оптимізації згідно з лінійним поліномом $y = 15,34 + 0,91x_1 + 2,11x_2$:

$$y_{1,p} = 15,34 + 0,91 + 2,11 = 18,36;$$

$$y_{2,p} = 15,34 - 0,91 + 2,11 = 16,54;$$

$$y_{3,p} = 15,34 + 0,91 - 2,11 = 14,11;$$

$$y_{4,p} = 15,34 - 0,91 - 2,11 = 12,32.$$

Дисперсія адекватності

$$s_{\text{ад}}^2 = [1/(4-3)] [3(18,3-18,36)^2 + 3(16,5-16,54)^2 + 4(14,1-14,14)^2 + 4(12,3-12,32)^2] = 0,08.$$

Розрахункове значення F -критерію за формулою (4.10)

$$F_{\text{розр.}} = 0,08/0,0331 = 2,42.$$

Табличне значення F -критерію (див. додаток 3) при $f_1 = 1$, $f_2 = 10$

$$F_{\text{табл.}} = 5,0.$$

Згідно з одержаними даними щодо значень F -критерію Фішера, $F_{\text{розр.}} < F_{\text{табл.}}$, отже лінійна модель адекватна.

Перевірка значущості коефіцієнтів моделі. Скористаємось спочатку першим способом. Довірчий інтервал для коефіцієнтів полінома за формулою (4.14)

$$\Delta a_j = \pm t_{s\{y\}} / \sqrt{N} = \pm 2,228 \cdot 0,1819 / \sqrt{4} = 0,203.$$

Порівнявши знайдену величину Δa_j з кожним із коефіцієнтів неповного полінома другого степеня $y = 15,34 + 0,91x_1 + 2,11x_2 - 0,06x_1x_2$, робимо висновок,

що незначущим є лише останній коефіцієнт $a_{12} = -0,06$. Решта коефіцієнтів значущі.

Тепер скористаємось другим способом перевірки значущості коефіцієнтів. Перевіримо значущість коефіцієнта $a_{12} = -0,06$.

Розрахункове значення t -критерію для коефіцієнта a_{12} за формулою (4.15)

$$t'_{\text{розр.}} = 0,06 / \sqrt{0,0331/4} = 0,66.$$

Табличне значення t -критерію (див. додаток 2) при $f = 10$

$$t'_{\text{табл.}} = 2,228.$$

Оскільки $t_{\text{розр.}} < t_{\text{табл.}}$, коефіцієнт $a_{12} = -0,06$ є незначущим, тобто одержали той же самий результат, що і за першим способом.

Перевіримо аналогічно значущість коефіцієнта $a_1 = 0,9$:

$$t''_{\text{розр.}} = 0,9 / \sqrt{0,0331/4} = 9,89.$$

Табличне значення t -критерію залишається тим же:

$$t''_{\text{табл.}} = 2,228.$$

У зв'язку з тим, що в даному випадку $t_{\text{розр.}} > t_{\text{табл.}}$, коефіцієнт $a_1 = 0,9$ є значущим.

Решта коефіцієнтів ($a_0 = 15,3$; $a_2 = 2,1$) більші за коефіцієнт $a_1 = 0,9$, тому вони тим більше є значущими.

Як бачимо, обидва способи перевірки значущості коефіцієнтів математичної моделі дають один і той же результат.

Приклад 2. Розробка оптимального складу суміші методом планування активного експерименту

Завдання: «Визначення оптимальних параметрів сумішеприготування стержневої суміші».

Компоненти суміші: пісок кварцовий; сульфітно-дріжжєва бражка (СДБ); закріплювач кубові залишки (КО); волога; стан суміші – сухий.

Аналіз завдання

Одержавши завдання, студент повинен чітко визначити вміст компонентів у суміші, щоб міцність її у сухому стані була найбільшою. Відповідно, сильнодіючими факторами на параметр оптимізації (міцність у сухому стані) будуть наступні:

- а) вміст компонентів у суміші;
- б) температура сушіння зразків;

в) час перемішування компонентів суміші в лабораторних бігунах.

Із завдання слідує, що суміш складається з чотирьох компонентів. Відповідно, в суміші їх вміст дорівнює 100 %. Незалежними компонентами з чотирьох будуть три, оскільки один з них визначається за різницею $100 \% - (x_1 + x_2 + x_3)\% = \alpha \%$, де x_1, x_2, x_3 і α – вміст у суміші піску, СДБ, КО і води.

В зв'язку з цим, необхідно встановити, який із компонентів суміші буде визначатися за різницею. Доцільно в якості такого компонента прийняти кварцовий пісок. Позначимо вміст СДБ у суміші через x_1 , КО – через x_2 , води – через x_3 . Тоді вміст у суміші кварцового піску $\alpha = 100 \% - (x_1 + x_2 + x_3)\%$.

Область визначення факторів

Для встановлення області визначення факторів залучається апріорна (до дослідна) інформація. Якщо така інформація відсутня, область визначення факторів встановлюється довільно.

В даному випадку є інформація про стержневі суміші на основі кварцового піску, КО, води. Використовуючи її можна встановити області визначення факторів, наведених в табл. 4.3.

Таблиця 4.3 – Області визначення факторів

Фактор, умовне позначення	Масова частка СДБ, %	Масова частка КО, %	Волога W, %	Час перемішування, τ , хв	Температура сушіння, t_c , $^{\circ}\text{C}$
Код	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Область визначення	2 ± 1	2 ± 1	4 ± 1	10 ± 3	200 ± 30

На підставі табл. 4.3 складаємо табл. 4.4 умов експерименту.

Таблиця 4.4 – Умови експерименту

Фактор, умовне позначення	СДБ, %	КО, %	Волога W, %	Час перемішування, τ , хв	Температура сушіння, t_c , $^{\circ}\text{C}$
Код	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Основний рівень X_{i0}	2	2	4	10	200
Інтервал варіювання	1	1	1	3	30
Верхній рівень (+1)	3	3	5	13	230
Нижній рівень (-1)	1	1	3	7	170

Матриця планування

З табл. 4.4 видно, що число незалежних факторів дорівнює п'яти. Число дослідів N при реалізації повного факторного експерименту розраховують за формулою

$$N = 2^k,$$

де 2 – число рівнів;

k – число незалежних факторів; в даному випадку $k = 5$; $N = 2^5 = 32$.

Для виконання 32 дослідів необхідно витратити багато часу і матеріалів. Тому реалізуємо дробний факторний експеримент. При цьому враховуємо, що мінімальне число дослідів повинно бути не менше, ніж число коефіцієнтів полінома плюс одиниця.

В даному випадку мінімальне число дослідів дорівнює 7. З врахуванням цього приймаємо $1/4$ -репліку з числом дослідів

$$N = 2^{5-2} = 8.$$

Для складання матриці планування необхідно знати систему змішування ефектів, що задається визначним контрастом.

Наприклад, визначний контраст задали співвідношенням $I = x_1x_2x_3x_4 = x_2x_3x_5$. З нього слідують наступні рішення:

$$x_4 = x_1x_2x_3; \quad x_5 = x_2x_3.$$

Після встановлення співвідношення, складемо матрицю планування в кодовому масштабі, яка наведена в табл. 4.5.

Таблиця 4.5 – План експерименту в кодовому масштабі

Номер дослідів	x_0	x_1^a	x_2^b	x_3^c	$x_4 = x_1x_2x_3^d$	$x_5 = x_2x_3^e$	Умовний запис
1	+	+	+	+	+	+	<i>abcde</i>
2	+	-	+	+	-	+	<i>bce</i>
3	+	+	-	+	-	-	<i>ac</i>
4	+	-	-	+	+	-	<i>cd</i>
5	+	+	+	-	-	-	<i>ab</i>
6	+	-	+	-	+	-	<i>bd</i>
7	+	+	-	-	-	+	<i>ade</i>
8	+	-	-	-	-	+	

Зв'язок між кодovими і натуральними значеннями факторів описується наступними рівняннями:

$$x_1 = \frac{[\text{СДБ, \%}] - 2\%}{1\%}; \quad x_2 = \frac{[\text{КО, \%}] - 2\%}{1\%};$$

$$x_3 = \frac{[W, \%] - 4\%}{1\%}; \quad x_4 = \frac{[\tau_{XB}] - 10_{XB}}{3_{XB}};$$

$$x_5 = \frac{[t, ^\circ\text{C}] - 200^0}{30^0\text{C}}.$$

Зробимо перевірку правильності кодування рівнів факторів:

а) для вмісту СДБ:

$$\text{верхній рівень } x_1 = \frac{3-2}{1} = +1;$$

$$\text{нижній рівень } x_1 = \frac{1-2}{1} = -1;$$

б) для вмісту КО:

$$\text{верхній рівень } x_2 = \frac{3-2}{1} = +1;$$

$$\text{нижній рівень } x_2 = \frac{1-2}{1} = -1;$$

в) для вмісту вологи W :

$$x_3 = \frac{5-4}{1} = +1; \quad x_3 = \frac{3-4}{1} = -1$$

г) для часу перемішування τ :

$$x_4 = \frac{13-10}{3} = +1; \quad x_4 = \frac{7-10}{3} = -1;$$

д) для температури сушіння t_c :

$$x_5 = \frac{230-200}{30} = +1; \quad x_5 = \frac{170-200}{300} = -1.$$

Розрахунки показують, що кодування значень рівнів факторів зроблено правильно.

План експерименту, наведений в табл. 4.5, наданий в кодовому позначенні. Для проведення дослідів необхідно знати натуральні значення факторів. В зв'язку з цим складаємо план експерименту в натуральному масштабі, який наведений в табл. 4.6.

Розрахунок кількості кожного компонента проводимо на 1000 г суміші.

Таблиця 4.6 – План експерименту в натуральному масштабі

Номер досліджу	Порядок реалізації дослідів	Пісок кварцовий	x_1 , Г	x_2 , Г	x_3 , Г	x_4 , хв	x_5 , °С
1	4	890	30	30	50	13	230
2	3	910	10	30	50	7	230
3	8	910	30	10	50	7	170
4	2	930	10	50	50	13	170
5	7	910	30	30	30	7	170
6	1	930	10	30	30	13	170
7	5	930	30	10	30	13	230
8	6	950	10	10	30	7	230

Розглянемо порядок складання табл. 4.6. Для прикладу визначимо умови проведення п'ятого досліджу.

З табл. 4.5 видно, що вміст у суміші СДБ і КО знаходиться на верхньому рівні, вміст вологи, час перемішування, температура сушіння – на нижньому рівні. Значення фактора на верхньому рівні одержимо, додавши до значення основного рівня величину інтервала варіювання, а значення фактора на нижньому рівні – віднявши від значення основного інтервала варіювання.

Таким чином, для п'ятого досліджу маємо:

$$\text{СДБ, \%} \quad x_1 = 2 + 1 = 3\% ;$$

$$\text{КО, \%} \quad x_2 = 2 + 1 = 3\% ;$$

$$\text{W, \%} \quad x_3 = 4 - 1 = 3\% .$$

$$\text{Вміст кварцового піску} \quad \alpha = 100 - (3 + 3 + 3) = 91\% .$$

При розрахунку на 1000 г суміші будемо мати: СДБ = 30 г, КО = 30 г, W = 30 г, $\alpha = 910$ г.

Час перемішування і температура сушіння зразків будуть відповідно дорівнювати:

$$\tau = 10 - 3 = 7 \text{ хв.}; \quad t = 200 - 30 = 170^\circ\text{C}$$

Одержані значення факторів записуємо у п'яту строку табл. 4.6. Аналогічно розраховуємо дані всіх останніх строк цієї таблиці.

Реалізація дослідів

Відповідно до табл. 4.6 починають виконувати досліді. Перший за порядком реалізують шостий дослід. Цю роботу виконують в такій послідовності.

1. Зважують в необхідній кількості компоненти шихти.

2. В лабораторних бігунах зі зважених компонентів приготровляють стержневу суміш. Час перемішування відповідно до умов досліджу складає 13 хв.

3. Виготовляють з одержаного замісу декілька стандартних зразків-вісімок (8-10 шт).

4. Виготовлені зразки розміщують в сушильний печі. Температура сушіння відповідно до умов дослідів складає 170 °С. Час сушіння при заданій температурі у всіх дослідів приймаємо 2 год.

5. Після закінчення сушіння піч вимикають і зразки охолоджують до нормальної температури.

6. Охолоджені зразки досліджують на розрив. Зразки досліджують партіями по три зразки.

Аналогічну роботу виконують при реалізації останніх семи дослідів.

Результати дослідів записують у табл. 4.7.

Обробка дослідних даних

Оцінюємо похибку проведення дослідів. Аналіз даних табл. 4.7 дозволяє встановити оптимальні результати. Вони зустрічаються у сьомому і восьмому дослідів.

Таблиця 4.7 – Результати дослідів зразків

Номер дослідів	Міцність зразків на розрив σ , МПа		
	Перший зразок	Другий зразок	Третій зразок
1	0,67	0,69	0,71
2	0,57	0,54	0,60
3	0,35	0,33	0,31
4	0,29	0,32	0,29
5	0,76	0,72	0,77
6	0,61	0,65	0,63
7	0,31	0,36	0,29
8	0,31	0,34	0,28

Перевіримо на брак дані сьомого дослідів.

Дані дослідів: 0,31; 0,36; 0,29. Сумнівний результат – 0,29. Попередньо виключаємо його. Тоді середнє арифметичне значення міцності за двома спостереженнями, які залишилися

$$\bar{y}_1 = \frac{y'_1 + y''_1}{n-1} = \frac{0,31 + 0,36}{2} = 0,335.$$

Дисперсія дослідів

$$S_1^2 = \frac{(y'_1 - \bar{y}_1)^2 + (y''_1 - \bar{y}_1)^2}{(n-1)-1} = \frac{(0,31-0,335)^2 + (0,36-0,335)^2}{2-1} = 0,00125$$

Стандарт дослідів

$$S_1 = \sqrt{S_1^2} = \sqrt{0,00125} = 0,0354$$

Розрахункове значення критерію Стюдента

$$t_{\text{розр}} = \frac{0,29 - 0,335}{0,0354} = -1,27$$

Число степенів свободи

$$f = (n-1) - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Приймаємо рівень значущості, який дорівнює 0,05. За додатком 2 визначаємо табличне значення критерію Стюдента.

При $f = 1$ і $\alpha = 0,05$ $t_{\text{табл}} = 12,7$; так як $t_{\text{розр}} = -1,27 \leq t_{\text{табл}} = 12,7$, результат 0,29 не є браком. Аналогічно перевіряють сумнівні результати в останніх дослідях.

Проведені розрахунки показують, що помилкових результатів у дослідях немає.

Визначаємо середнє арифметичне значення параметра оптимізації в кожному досліді:

$$\bar{y}_1 = \frac{y'_1 + y''_1 + y'''_1}{3} = \frac{0,67 + 0,69 + 0,71}{3} = \frac{2,07}{3} = 0,69;$$

$$y_2 = \frac{y'_2 + y''_2 + y'''_2}{3} = \frac{0,57 + 0,54 + 0,60}{3} = \frac{1,71}{3} = 0,57;$$

$$y_3 = \frac{y'_3 + y''_3 + y'''_3}{3} = \frac{0,35 + 0,33 + 0,31}{3} = \frac{0,99}{3} = 0,38;$$

$$y_4 = \frac{y'_4 + y''_4 + y'''_4}{3} = \frac{0,29 + 0,32 + 0,29}{3} = \frac{0,90}{3} = 0,30;$$

$$y_5 = \frac{y'_5 + y''_5 + y'''_5}{3} = \frac{0,76 + 0,72 + 0,77}{3} = \frac{2,25}{3} = 0,75 ;$$

$$y_6 = \frac{y'_6 + y''_6 + y'''_6}{3} = \frac{0,61 + 0,65 + 0,63}{3} = \frac{1,89}{3} = 0,63;$$

$$y_7 = \frac{y'_7 + y''_7 + y'''_7}{3} = \frac{0,31 + 0,36 + 0,29}{3} = \frac{0,96}{3} = 0,32;$$

$$\bar{y}_8 = \frac{y'_8 + y''_8 + y'''_8}{3} = \frac{0,31 + 0,34 + 0,28}{3} = \frac{0,93}{3} = 0,31.$$

Розраховуємо дисперсії і стандарт кожного досліді:

$$S_1^2 = \frac{(y'_1 - \bar{y}_1)^2 + (y''_1 - \bar{y}_1)^2 + (y'''_1 - \bar{y}_1)^2}{(n-1)} = \frac{(0,67 - 0,69)^2 + (0,69 - 0,69)^2 + (0,71 - 0,69)^2}{3-1} = 0,0004$$

$$S_1 = \sqrt{S_1^2} = \sqrt{0,0004} = 0,02$$

$$S_2^2 = \frac{(y'_2 - \bar{y}_2)^2 + (y''_2 - \bar{y}_2)^2 + (y'''_2 - \bar{y}_2)^2}{(n-1)} = \frac{(0,57 - 0,57)^2 + (0,54 - 0,57)^2 + (0,60 - 0,57)^2}{3-1} = 0,0009$$

$$S_2 = \sqrt{S_2^2} = \sqrt{0,0009} = 0,03$$

$$S_3^2 = \frac{(y'_3 - \bar{y}_3)^2 + (y''_3 - \bar{y}_3)^2 + (y'''_3 - \bar{y}_3)^2}{(n-1)} = \frac{(0,35 - 0,33)^2 + (0,33 - 0,33)^2 + (0,31 - 0,33)^2}{3-1} = 0,0004$$

$$S_3 = \sqrt{S_3^2} = \sqrt{0,0004} = 0,02$$

$$S_4^2 = \frac{(y'_4 - \bar{y}_4)^2 + (y''_4 - \bar{y}_4)^2 + (y'''_4 - \bar{y}_4)^2}{(n-1)} = \frac{(0,29 - 0,30)^2 + (0,32 - 0,30)^2 + (0,29 - 0,30)^2}{3-1} = 0,0003$$

$$S_4 = \sqrt{S_4^2} = \sqrt{0,0003} = 0,017$$

$$S_5^2 = \frac{(y'_5 - \bar{y}_5)^2 + (y''_5 - \bar{y}_5)^2 + (y'''_5 - \bar{y}_5)^2}{(n-1)} = \frac{(0,76 - 0,75)^2 + (0,72 - 0,75)^2 + (0,77 - 0,75)^2}{3-1} = 0,0007$$

$$S_5 = \sqrt{S_5^2} = \sqrt{0,0007} = 0,026$$

$$S_6^2 = \frac{(y'_6 - \bar{y}_6)^2 + (y''_6 - \bar{y}_6)^2 + (y'''_6 - \bar{y}_6)^2}{(n-1)} = \frac{(0,61 - 0,63)^2 + (0,65 - 0,63)^2 + (0,63 - 0,63)^2}{3-1} = 0,0004$$

$$S_6 = \sqrt{S_6^2} = \sqrt{0,0004} = 0,02$$

$$S_7^2 = \frac{(y'_7 - \bar{y}_7)^2 + (y''_7 - \bar{y}_7)^2 + (y'''_7 - \bar{y}_7)^2}{(n-1)} = \frac{(0,31 - 0,32)^2 + (0,36 - 0,32)^2 + (0,29 - 0,32)^2}{3-1} = 0,0013$$

$$S_7 = \sqrt{S_7^2} = \sqrt{0,0013} = 0,036$$

$$S_8^2 = \frac{(y'_8 - \bar{y}_8)^2 + (y''_8 - \bar{y}_8)^2 + (y'''_8 - \bar{y}_8)^2}{(n-1)} = \frac{(0,31 - 0,31)^2 + (0,34 - 0,31)^2 + (0,28 - 0,31)^2}{3-1} = 0,0009$$

$$S_8 = \sqrt{S_8^2} = \sqrt{0,0009} = 0,03$$

Визначаємо дисперсію експеримента:

$$S_{(y)}^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + S_5^2 + S_6^2 + S_7^2 + S_8^2}{N} =$$

$$= \frac{0,0004 + 0,0009 + 0,0004 + 0,0003 + 0,0007 + 0,0004 + 0,0013 + 0,0009}{8} = 0,00066$$

Максимальна дисперсія в цьому досліді, мінімальна – в четвертому.
Визначаємо розрахункове значення критерію Фішера:

$$F_{\text{розр}} = \frac{S_{\text{max}}^2}{S_{\text{min}}^2} = \frac{S_7^2}{S_4^2} = \frac{0,0013}{0,0003} = 4,33.$$

За додатком 3 знаходимо табличне значення критерію Фішера.

В даному випадку $f_1 = 2$, $f_2 = 2$. При $\alpha = 0,05$ $F_{\text{табл}} = F_{0,05}^{2;2} = 19,2$. Так як $F_{\text{розр}} = 4,33 < F_{\text{табл}} = F_{0,05}^{2;2} = 19,2$, гіпотеза про однорідність дисперсій не відкидається.

Визначаємо коефіцієнти математичної моделі:

$$b_0 = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4 + \bar{y}_5 + \bar{y}_6 + \bar{y}_7 + \bar{y}_8}{8} = \frac{0,69 + 0,57 + 0,33 + 0,3 + 0,75 + 0,63 + 0,32 + 0,31}{8} =$$

$$= 0,4875;$$

$$b_1 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_3 - \bar{y}_4 + \bar{y}_5 - \bar{y}_6 + \bar{y}_7 - \bar{y}_8}{8} = \frac{0,69 - 0,57 + 0,33 - 0,3 + 0,75 - 0,63 + 0,32 - 0,31}{8} =$$

$$= 0,0350;$$

$$b_2 = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2 - \bar{y}_3 - \bar{y}_4 + \bar{y}_5 + \bar{y}_6 - \bar{y}_7 - \bar{y}_8}{8} = \frac{0,69 + 0,57 - 0,33 - 0,3 + 0,75 + 0,63 - 0,32 - 0,31}{8} =$$

$$= 0,1725;$$

$$b_3 = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4 - \bar{y}_5 - \bar{y}_6 - \bar{y}_7 - \bar{y}_8}{8} = \frac{0,69 + 0,57 + 0,33 + 0,3 - 0,75 - 0,63 - 0,32 - 0,31}{8} =$$

$$= -0,015;$$

$$b_4 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \bar{y}_3 + \bar{y}_4 - \bar{y}_5 + \bar{y}_6 + \bar{y}_7 - \bar{y}_8}{8} = \frac{0,69 - 0,57 - 0,33 + 0,3 - 0,75 + 0,63 + 0,32 - 0,31}{8} =$$

$$= -0,0025;$$

$$b_5 = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2 - \bar{y}_3 - \bar{y}_4 - \bar{y}_5 - \bar{y}_6 + \bar{y}_7 + \bar{y}_8}{8} = \frac{0,69 + 0,57 - 0,33 - 0,3 - 0,75 - 0,63 + 0,32 + 0,31}{8} =$$

$$= -0,015.$$

Математична модель має вигляд

$$y = 0,4875 + 0,035x_1 + 0,1725x_2 - 0,015x_3 - 0,0025x_4 - 0,015x_5.$$

Визначаємо дисперсію і стандарт коефіцієнтів регресії математичної моделі

$$S_{(bk)}^2 = \frac{S_{(y)}^2}{N} = \frac{0,00066}{8} = 0,0000825;$$

$$S_{(bk)} = \sqrt{S_{(bk)}^2} = \sqrt{0,0000825} = 0,0091.$$

Розраховуємо довірчий інтервал:

$$\Delta b_k = \tau_{\alpha;N} S_{(bk)} = \tau_{0,05;16} S_{(bk)}$$

Тут $t_{0,05;16}$ – табличне значення критерію Стюдента при рівні значущості 0,05 і числі ступенів свободи $f = N(n-1) = 8(3-1) = 16$. З додатка 2 знаходимо, що $t_{0,05;16} = 2,12$. Тоді $\Delta b_k = 2,12 \cdot 0,0091 = 0,019$.

Отже, значущими коефіцієнтами математичної моделі є коефіцієнти b_0, b_1, b_2 . Останні коефіцієнти регресії незначущі і можуть бути відкинуті. Математична модель в цьому випадку буде мати вигляд:

$$y = 0,4875 + 0,035x_1 + 0,1725x_2$$

Визначаємо розрахункові значення параметра оптимізації для кожного досліді:

$$y_{1 \text{ розр}} = 0,4875 + 0,035(+1) + 0,1725(+1) - 0,015(+1) - 0,0025(+1) - 0,015(+1) = 0,6625;$$

$$y_{2 \text{ розр}} = 0,4875 + 0,035(-1) + 0,1725(+1) - 0,015(+1) - 0,0025(-1) - 0,015(+1) = 0,5975;$$

$$y_{3 \text{ розр}} = 0,4875 + 0,035(+1) + 0,1725(-1) - 0,015(+1) - 0,0025(-1) - 0,015(-1) = 0,3525;$$

$$y_{4 \text{ розр}} = 0,4875 + 0,035(-1) + 0,1725(-1) - 0,015(+1) - 0,0025(+1) - 0,015(-1) = 0,2775;$$

$$y_{5 \text{ розр}} = 0,4875 + 0,035(+1) + 0,1725(+1) - 0,015(-1) - 0,0025(-1) - 0,015(-1) = 0,7275;$$

$$y_{6 \text{ розр}} = 0,4875 + 0,035(-1) + 0,1725(+1) - 0,015(-1) - 0,0025(+1) - 0,015(-1) = 0,6525;$$

$$y_{7 \text{ розр}} = 0,4875 + 0,035(+1) + 0,1725(-1) - 0,015(-1) - 0,0025(+1) - 0,015(+1) = 0,3475;$$

$$y_{8 \text{ розр}} = 0,4875 + 0,035(-1) + 0,1725(-1) - 0,015(-1) - 0,0025(-1) - 0,015(+1) = 0,2825.$$

Розраховуємо різницю між розрахунковими і середніми арифметичними експериментальними значеннями параметра оптимізації для кожного досліді:

$$\begin{aligned}
\Delta y_1 &= 0,69 - 0,6625 = 0,0275; & \Delta y_1^2 &= 0,00075625; \\
\Delta y_2 &= 0,57 - 0,5975 = -0,0275; & \Delta y_2^2 &= 0,00075625; \\
\Delta y_3 &= 0,33 - 0,3525 = -0,0225; & \Delta y_3^2 &= 0,00050625; \\
\Delta y_4 &= 0,30 - 0,2775 = 0,0225; & \Delta y_4^2 &= 0,00050625; \\
\Delta y_5 &= 0,75 - 0,7275 = 0,0225; & \Delta y_5^2 &= 0,00050625; \\
\Delta y_6 &= 0,63 - 0,6525 = -0,0225; & \Delta y_6^2 &= 0,00050625; \\
\Delta y_7 &= 0,32 - 0,3475 = 0,0275; & \Delta y_7^2 &= 0,00075625; \\
\Delta y_8 &= 0,31 - 0,2825 = 0,0275; & \Delta y_8^2 &= 0,00075625.
\end{aligned}$$

Визначаємо дисперсію адекватності. В даному випадку в кожному досліді проводились по три паралельних спостереження. Тому дисперсію адекватності розраховуємо за формулою

$$\begin{aligned}
S_{(ад)}^2 &= \frac{n \sum \Delta y_n^2}{N - b} = \frac{n(\Delta y_1^2 + \Delta y_2^2 + \Delta y_3^2 + \Delta y_4^2 + \Delta y_5^2 + \Delta y_6^2 + \Delta y_7^2 + \Delta y_8^2)}{N - b} = \\
&= \frac{3 \cdot (0,00075625 \cdot 4 + 0,00050625 \cdot 4)}{8 - 6} = 0,007575.
\end{aligned}$$

Визначаємо розрахункове значення критерію Фішера:

$$F_{розр} = \frac{S_{(ад)}^2}{S_{(y)}^2} = \frac{0,007575}{0,00066} = 11,4773.$$

Визначаємо табличне значення критерію Фішера:

$$F_{табл} = F_{\alpha}^{f_1; f_2}; \text{ тут } f_1 = 8 - 6 = 2; f_2 = 8 \cdot (3 - 1) = 16.$$

При $\alpha = 0,05$ $F_{табл.} = F_{0,05}^{2;16}$ відповідно до додатка 3 дорівнює 3,60. Так як $F_{розр} = 11,4772 > F_{табл.} = F_{0,05}^{2;16} = 3,60$, математична модель неадекватна.

Інтерпретація одержаних результатів та прийняття рішення

В результаті обробки дослідних даних одержали неадекватну математичну модель. Це означає, що поверхню відгуку не вдається апроксимувати площиною.

Для неадекватної моделі не будемо робити різниці між випадками значущих і незначущих лінійних коефіцієнтів регресії, тому що рішення для них зазвичай співпадають.

В даному випадку можуть бути прийняті наступні рішення.

1. Зміна інтервалів варіювання з перенесенням центру тяжіння плану. Це повні прийнятне рішення. Інтервали варіювання треба змінити по x_1 і x_2 . Зміну

інтервалів варіювання можна доповнити перенесенням центру експерименту в умови дослідів 1 або 5, які дають найкращі результати.

Однак слід враховувати, що досліди трудомісткі, вимагають багато часу.

2. Рух за градієнтом. Це рішення в даній ситуації вповні можливе, тому що декілька дослідів крутого сходу відповідає меті досягнення максимальної міцності з мінімальними витратами. Однак при цьому існує ризик не одержати покращення результатів.

Крутий схід

Для руху за градієнтом виконуємо розрахунок кроку. Рух починається обов'язково від основного рівня. Після розрахунку складають умови 5-10 уявних дослідів. Реалізація двох-трьох уявних дослідів і аналіз одержаних даних дозволяє визначити оптимум параметра оптимізації.

Етап крутого сходу для даного випадку наведений в табл. 4.8.

Таблиця 4.8 – Крутий схід при оптимізації складу стержневої суміші

№ п/п	Фактори, що вивчаються	СДБ, %	КО, %	W, %	Час, τ, хв	Температура, t, °C	Міцність суміші σ, МПа	
							У _{експ}	У _{розр}
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	Основний рівень x_{i0}	2	2	4	10	200		
2.	Інтервал варіювання Δx_i	1	1	1	3	30		
3.	Верхній рівень (+1)	3	3	5	13	230		
4.	Нижній рівень (-1)	1	1	3	7	170		
5.	Код	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
6.	Дослід 1	+	+	+	+	+	0,69	0,6625
7.	Дослід 2	-	+	+	-	-	0,57	0,5975
8.	Дослід 3	+	-	+	-	-	0,33	0,3525
9.	Дослід 4	-	-	+	+	-	0,30	0,2775
10.	Дослід 5	+	+	-	-	-	0,75	0,7275
11.	Дослід 6	-	+	-	+	-	0,63	0,6525
12.	Дослід 7	+	-	-	+	+	0,32	0,3475
13.	Дослід 8	-	-	-	-	+	0,31	0,2825
14.	b_i	0,035	0,1725	-0,015	-0,0025	-0,015		
15.	$b_i \Delta x_i$	0,035	0,1725	-0,015	-0,0075	-4,05		
16.	Крок до округлення	0,101	0,50	-0,043	-0,021	-1,30		

Продовження табл. 4.8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
17.	Крок після округлення	0,10	0,50	-0,04	-0,02	-1,30		
18.	Реалізований дослід 1	2,1	2,5	4,0	10	200	0,65	0,5772
19.	Реалізований дослід 2	2,2	3,0	4,0	10	200	0,79	0,6670
20.	Реалізований дослід 3	2,3	3,5	4,0	10	200	0,52	0,7567
21.	Уявний крок 4	2,4	4,0	4,0	10	200		0,8465
22.	Реалізований дослід 5	2,5	4,5	4,0	10	200	0,48	0,9362
23.	Уявний дослід 6	2,6	5,0	4,0	10	200		1,0260
24.	Уявний дослід 7	2,7	5,5	4,0	10	200		1,1157
25.	Уявний дослід 8	2,8	6,0	4,0	10	200		1,2055
26.	Уявний дослід 9	2,9	6,5	4,0	10	200		1,2952
27.	Реалізований дослід 10	3,0	7,0	4,0	10	200	0,32	1,385

Розглянемо детальніше етап крутого сходу в даному випадку. Строки 1-5 табл. 4.8 являють собою умови експерименту, раніше записані в табл. 4.4.

Строки 6-13 являють собою матрицю планування $\frac{1}{4}$ -репліки, записану раніше в табл. 4.4. Тут же у стовпчиках 8-9 записані відповідно середні арифметичні експериментальні і розрахункові значення параметра оптимізації кожного досліді.

В строках 14-17 наведений розрахунок кроку для кожного фактора при русі за градієнтом. Визначається крок наступним чином.

1. В строку 14 навпроти кожного фактора записуємо відповідний коефіцієнт регресії (для $x_1 - 0,035$; для $x_2 - 0,1725$ і т.д.).

2. Множимо відповідний коефіцієнт регресії на відповідний інтервал варіювання. Маємо:

$$\text{для } x_1 b_1 \cdot \Delta x_1 = 0,035 \cdot 1 = 0,035;$$

$$\text{для } x_2 b_2 \cdot \Delta x_2 = 0,1725 \cdot 1 = 0,1725;$$

$$\text{для } x_3 b_3 \cdot \Delta x_3 = -0,015 \cdot 1 = -0,015;$$

$$\text{для } x_4 b_4 \cdot \Delta x_4 = -0,0025 \cdot 3 = -0,0075;$$

$$\text{для } x_5 b_5 \cdot \Delta x_5 = -0,015 \cdot 30 = -0,45.$$

3. Приймаємо крок для вмісту КО (x_2) при русі за градієнтом $\Delta_2 = 0,5\%$. Тоді кроки для останніх факторів при русі за градієнтом повинні бути пропорційні кроку при x_2 . Підраховують їх наступним чином:

для x_1 : $\frac{b_2 \Delta x_2}{b_1 \Delta x_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$, звідки $\Delta_1 = \frac{\Delta_2 \cdot b_1 \Delta x_1}{b_2 \Delta x_2} = \frac{0,5 \cdot 0,035}{0,1725} = 0,101$, округляємо його до $\Delta_1 = 0,10$;

для x_3 : $\Delta_3 = \frac{\Delta_2 b_3 \Delta x_3}{b_2 \Delta x_2} = \frac{0,5 \cdot -0,015}{0,1725} = -0,043$, округляємо його до $\Delta_3 = -0,04$;

для x_4 : $\Delta_4 = \frac{\Delta_2 b_4 \Delta x_4}{b_2 \Delta x_2} = \frac{0,5 \cdot -0,0075}{0,1725} = -0,021$, округляємо його до $\Delta_4 = -0,02$;

для x_5 : $\Delta_5 = \frac{\Delta_2 b_5 \Delta x_5}{b_2 \Delta x_2} = \frac{0,5 \cdot -0,45}{0,1725} = -1,30$.

Рух за градієнтом починаємо від основного рівня. В зв'язку з малим впливом на міцність суміші факторів x_3, x_4, x_5 стабілізуємо їх на основному рівні. Отже, варіюватися будуть тільки фактори x_1 і x_2 . Значення фактора в кожному досліді одержують шляхом алгебраїчного (з врахуванням знака коефіцієнта регресії) додавання до основного рівня величини кроку. Одержані таким чином умови уявних дослідів записуються в строки 15-27. Наприклад, умови третього уявного досліді будуть записані наступним чином:

$$x_{1,3} = 2 + 3 \cdot 0,1 = 2,3.$$

де $x_{1,3}$ – значення першого фактора (вміст СДБ) в третьому уявному досліді;

3 – послідовність уявного досліді;

0,1 – крок для першого фактора при русі за градієнтом.

Відповідно

$$x_{2,3} = 2 + 3 \cdot 0,5 = 3,5; x_{3,3} = 4,0; x_{3,4} = 10; x_{5,3} = 200.$$

Аналогічно розраховують значення факторів у всіх уявних дослідіах. Слід звернути увагу на те, що значення факторів в уявних дослідіах записані в натуральному масштабі.

5. В графі 9 записані розрахункові (очікувані) значення параметра оптимізації уявних дослідіах. Ці величини одержують наступним чином (наприклад, для восьмого уявного дослідіа, строка 25):

а) визначаємо кодове значення факторів:

$$x_1 = \frac{x_1 - x_{1,0}}{x_1} = \frac{2,8 - 2}{1} = 0,8;$$

$$x_2 = \frac{x_2 - x_{2,0}}{x_2} = \frac{6,0 - 2,0}{1} = 4,0.$$

Для факторів x_3, x_4, x_5 кодові значення не розраховуємо, тому що вони стабілізовані на основному рівні.

6. Визначаємо $y_{\text{розр}}$ для восьмого уявного досліду. Для цього використовуємо рівняння $y_{\text{розр}} = 0,4875 + 0,035x_1 + 0,1725x_2$; $y_{2\text{розр}} = 0,4875 + 0,035 \times 0,8 + 0,1725 \cdot 4 = 1,2055$.

Аналогічно визначають $y_{i\text{розр}}$ для всіх останніх уявних дослідів. При даній математичній моделі зі збільшенням вмісту компонентів x_1 і x_2 розрахункове значення міцності суміші буде весь час збільшуватися, що є нереальним.

7. Для визначення оптимального складу суміші реалізуємо декілька уявних дослідів. Для цього використовуємо метод «ножиць». Реалізуємо два крайніх уявних досліди – перший і десятий (строки 18 і 27), а потім намітимо інтервал між ними. Для цього реалізуємо п'ятий уявний дослід (строка 22). Одержані експериментальні дані (0,65; 0,48; 0,32) нашоухують на думку, що оптимум параметра оптимізації знаходиться між значеннями 0,65; 0,48. Для точного визначення оптимуму реалізуємо ще два уявних досліди – другий і третій. Можна вважати, що значення міцності, яке дорівнює 0,79 МПа (другий реалізований уявний дослід), є оптимальним.

В результаті виконаного дослідження встановлено, що найбільшою міцністю в сухому стані володіє формувальна суміш наступного складу: СДБ – 2,2%; КО – 3,0%; волога – 4,0%; пісок кварцовий – 90,8%.

Суміш оптимізувалась тільки по міцності в сухому стані, однак вона повинна володіти іншими властивостями – газопроникністю, міцністю в сирому стані, піддатливістю та іншими властивостями, які виступають в дослідженні як обмеження.

4.2. Контрольні запитання

1. В чому полягає підготовка до проведення експерименту?
2. Як вирішується питання про значущість різниці середніх результатів вимірювання параметра оптимізації?
3. В якому порядку визначається похибка досліду?
4. Що називається дисперсією, середнім квадратичним відхилом (стандартом, квадратичною похибкою чи просто похибкою)?
5. В якому порядку проводиться перевірка підозрілих значень параметра оптимізації на брак?
6. Як перевіряється однорідність дисперсій дослідів?
7. Як визначається дисперсія параметра оптимізації експерименту (дисперсія відтворюваності експерименту)?
8. Для чого і як проводиться перевірка адекватності математичної моделі об'єкта дослідження?
9. З якою метою і як проводиться перевірка значущості коефіцієнтів моделі?

4.3. Завдання

За методикою, викладеною в цій лабораторній роботі, виконати обробку даних (табл. 4.9) експерименту $N = 2^2$, проведеного згідно з матрицею планування у вигляді табл. 4.2. Підозрілі результати вимірювань підкреслені.

Таблиця 4.9 – Значення параметра оптимізації у повному двофакторному експерименті для різних варіантів

№ досл.	Номер варіанту															
	1				2				3				4			
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4
1	2,5	2,7	2,4	<u>3,1</u>	7,8	7,7	7,5	<u>8,3</u>	16,8	16,6	17,0	<u>19,0</u>	21,2	22,0	22,1	<u>25,4</u>
2	3,5	3,6	3,4	<u>4,2</u>	5,0	4,9	4,8	<u>6,0</u>	14,1	13,9	14,2	<u>16,8</u>	18,6	18,5	19,0	<u>21,0</u>
3	1,8	1,9	2,0	2,1	9,0	9,1	8,8	<u>8,9</u>	10,3	10,1	10,2	9,9	16,3	15,9	16,2	16,0
4	4,0	3,9	4,1	4,2	11,8	11,6	11,7	12,0	12,0	11,9	11,8	12,1	10,1	10,0	9,9	10,2
№ досл.	5				6				7				8			
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4
1	18,3	18,4	18,2	<u>21,0</u>	5,0	5,1	5,3	<u>6,4</u>	0,8	0,9	0,8	<u>1,5</u>	13,4	13,2	13,1	<u>15,8</u>
2	16,8	16,6	16,4	<u>18,0</u>	3,1	3,3	3,0	<u>4,1</u>	0,6	0,7	0,8	<u>1,7</u>	10,1	10,2	9,9	<u>13,0</u>
3	14,1	14,0	14,2	14,5	2,1	2,2	2,0	2,3	0,3	0,4	0,3	0,5	9,8	9,5	9,6	9,7
4	12,0	12,3	12,2	12,4	1,9	1,8	1,7	1,6	1,0	1,1	1,2	1,0	7,0	7,1	7,3	7,2
№ досл.	9				10				11				12			
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4
1	16,1	16,0	15,9	<u>18,0</u>	7,8	7,9	7,6	<u>8,4</u>	1,9	1,8	1,7	1,6	4,5	4,6	4,4	<u>6,0</u>
2	18,0	18,1	17,9	<u>20,0</u>	5,0	4,9	4,8	<u>6,1</u>	2,1	2,2	2,0	2,3	3,0	3,1	2,9	<u>4,2</u>
3	22,0	22,1	22,3	22,4	9,0	9,1	8,8	<u>8,9</u>	3,1	3,3	3,0	4,2	2,0	2,1	2,2	2,3
4	20,0	20,3	20,4	20,2	11,8	11,6	11,7	12,0	5,1	5,0	5,3	6,5	5,0	5,1	5,2	5,0
№ досл.	13				14				15				16			
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4
1	7,0	7,1	7,2	<u>9,3</u>	16,1	16,0	15,9	<u>18,6</u>	6,3	6,4	6,6	<u>8,7</u>	2,5	2,7	2,4	<u>3,1</u>
2	9,8	9,5	9,6	9,7	18,0	18,1	17,9	<u>20,1</u>	7,5	7,6	7,7	<u>9,0</u>	3,5	3,6	3,4	<u>4,2</u>
3	10,1	10,2	9,9	<u>13,1</u>	20,1	20,0	21,0	20,4	9,0	9,2	9,1	9,3	1,8	1,9	2,0	2,1
4	13,1	13,0	13,2	13,4	22,1	22,0	22,2	23,0	4,0	4,1	4,2	4,0	4,0	3,9	4,1	4,2

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

ПОШУК ЕКСТРЕМУМУ

Мета роботи – Пошук оптимуму

5.1. Загальні відомості

Залежність між параметрами оптимізації і факторами часто має екстремальний характер. Екстремальній точці відповідає найкраще значення параметра оптимізації (максимум або мінімум), тому дуже важливо знати методи визначення координат екстремальної точки або хоча б оптимальної області, яка є близькою до останньої.

Для пошуку оптимуму найчастіше застосовуються наступні методи:

- аналітичний метод;
- метод Гауса-Зейделя;
- градієнтні методи (метод руху за градієнтом і метод найшвидшого сходу (спуску), або метод крутого сходу (спуску));
- симплекс-метод;
- метод сходу (спуску) за діаметром еліпсоїда.

Аналітичний метод

Якщо залежність $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ задана в явному вигляді з усіма коефіцієнтами, показниками степеня і т. ін. і якщо екстремум існує, то для його знаходження (тобто для визначення координат екстремуму) слід знайти вирази для перших частинних похідних від вказаної функції по всіх незалежних змінних x_j і прирівняти їх до нуля. В результаті буде отримана система j рівнянь з j невідомими, розв'язавши яку, можна знайти координати екстремальної точки.

У випадку, коли функція відгуку не має екстремуму, відшукується локальний оптимум за допомогою ПК при використанні методу статистичних випробувань або методу випадкового пошуку.

Функцію відгуку для визначення екстремальної точки аналітичним шляхом можна знайти експериментально у вигляді, наприклад, квадратики.

Метод Гауса-Зейделя

Суть даного методу полягає у послідовному експериментальному знаходженні локальних оптимумів в умовах, коли поперемінно змінюється лише один фактор при фіксованих значеннях решти факторів.

Припустимо, що вивчається двофакторний об'єкт дослідження, для якого поверхня відгуку має форму горба з точкою максимуму (рис. 5.1). Задача оптимізації полягає в експериментальному знаходженні координат цієї точки.

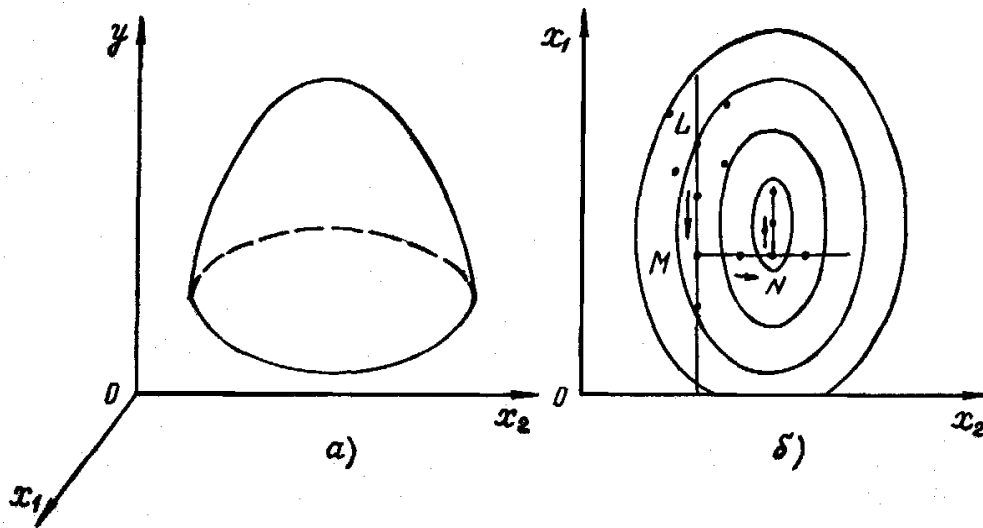


Рисунок 5.1 – Зображення поверхні відгуку $y = f(x_1, x_2)$ у формі горба (а) і ліній рівня (б)

При визначенні оптимуму за методом Гауса-Зейделя (див. рис. 5.1 б) фіксується один із факторів, наприклад, x_2 і, починаючи з довільної точки L , ставиться декілька дослідів при $x_1 = var$ до тих пір, поки не буде знайдено локальний оптимум (точка M). Далі фіксується фактор x_1 на рівні, що відповідає точці M , і аналогічно знаходиться другий локальний оптимум (точка N). В точці N знову фіксується фактор x_2 і починається рух в напрямку осі x_1 . Такі процедури повторюються до тих пір, поки не буде знайдена відшукувана оптимальна точка або точка, близька до неї.

Недоліком даного методу є порівняно велика кількість необхідних дослідів, особливо при великій кількості факторів. Крім того, збіжність методу невисока. Слід мати на увазі також і те, що в міру наближення до екстремуму виникає потреба у зменшенні величини кроку, що через неминучі похибки вимірювань призводить до «втрати чутливості» дослідів і спонукає багаторазово повторювати вимірювання в одній і тій же точці.

Градiєнтні методи

Дані методи пошуку екстремуму ґрунтуються на понятті і властивостях градієнта функції декількох змінних.

Градiєнтом функції $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ в деякій точці простору на деякій поверхні рівня називається вектор, який починається в цій точці і направлений по нормалі до зазначеної поверхні в сторону зростання функції і який чисельно дорівнює зміні даної функції на одиниці довжини нормалі:

$$\text{grad } f = (\partial f / \partial x_1) \vec{i} + (\partial f / \partial x_2) \vec{j} + \dots + (\partial f / \partial x_k) \vec{k}, \quad (5.1)$$

де $\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \dots$ – частинні похідні функції f за відповідними незалежними змінними x_1, x_2, \dots, x_k ;

$\vec{i}, \vec{j}, \dots, \vec{k}$ – одиничні вектори в напрямках відповідних координатних осей (орти).

Важливою властивістю градієнта є те, що він вказує напрямок максимальної зміни функції в даній точці. На використанні саме цієї властивості градієнта і побудовані градієнтні методи пошуку екстремуму.

Добутки частинних похідних на орти в правій частині рівняння (5.1) називаються **складовими градієнта**. Якщо фактори є кодованими, то орти дорівнюють одиниці, і складові градієнта співпадають з частинними похідними, які, у свою чергу, дорівнюють коефіцієнтам полінома першого степеня. Якщо ж використовуються натуральні значення факторів, то згідно із формулою (5.1), складові градієнта дорівнюватимуть добуткам коефіцієнтів регресії на інтервали варіювання факторів $a_j I_j$.

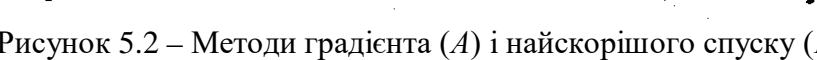
При використанні градієнтних методів рух по поверхні відгуку при пошуку екстремуму здійснюється за кроковим принципом, згідно з яким до координат нульової точки факторного простору x_{j0} додаються кроки, які, вочевидь, мають бути пропорційними відповідним складовим градієнта. При цьому коефіцієнт пропорційності, однаковий для всіх складових градієнта, має бути таким, щоб кроки були і не дуже великими (бо можна “проскочити” через оптимум), і не дуже малими (бо тоді значно збільшиться кількість дослідів і, крім того, можна “не відчувати” зміну параметра оптимізації). В кожному конкретному випадку вибір коефіцієнта пропорційності здійснюється окремо з урахуванням різноманітних чинників, таких як крутість поверхні відгуку, точність фіксації факторів і визначення параметра оптимізації і т. ін. Знак кроку співпадає із знаком складової градієнта, яка, в залежності від знаку відповідного коефіцієнта регресії, може бути додатною або від’ємною величиною. Якщо відшукується максимум функції відгуку, то кроки алгебраїчно додаються до попередніх натуральних значень факторів у дослідях. Якщо ж екстремумом є точка мінімуму, то, навпаки, кроки алгебраїчно віднімаються.

Метод руху за градієнтом полягає в тому, що в околі початкової точки (рис. 5.2, А) проводяться попередні дослідів і знаходяться коефіцієнти лінійного полінома і складові градієнта. Далі здійснюється один крок в напрямку градієнта (див. рис. 5.2, А). Для знайденої дослідної точки знову визначаються коефіцієнти регресії моделі і складові градієнта, після чого здійснюється ще один крок. Така процедура повторюється до тих пір, поки не буде знайдена точка екстремуму, в якій складові градієнта дорівнюють нулю. При значній відстані від початкової точки до екстремуму і великій кількості факторів даний метод потребує великої кількості дослідів.

Метод найшвидшого сходу (спуску), який називають також **методом крутого сходу (спуску)**, за інших однакових умов потребує меншої кількості дослідів. Він полягає в наступному.

Як і в попередньому методі, в околі початкової точки (див. рис. 5.2, В) проводиться дворівневий факторний експеримент, по результатах якого

1. *Journal of Management Studies*, 1990, 27, 1, 1-14.



інше, певні різні фактори досліджено, поділяється збо

Кроки слід додавати до значень факторів основного (нульового) рівня

В зазначеній серії дослідів спочатку, доки хоча б один із факторів не вийшов

Якщо модель неадекватна, то до експериментальної реалізації мислених

Приклад розрахунку найшвидшого сходу наведено в табл. 5.1.

Таблиця 5.1 – Пошук оптимуму методом крутого сходу

Рівні факторів і номери дослідів		Значення факторів		у
		\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	
Основний рівень		1,5	7,0	
Інтервал варіювання фактора		0,5	1,0	
Верхній рівень		2,0	8,0	
Нижній рівень		1,0	6,0	
Кодовані значення факторів		x_1	x_2	
Досліди	1	–	–	95,0
	2	+	–	90,0
	3	–	+	85,0
	4	+	+	82,0
Коефіцієнти моделі a_j		–2,0	–4,5	
Складові градієнта $a_j I_j$		–1,0	–4,5	
Крок при зміні \tilde{x}_2 на 0,5		–0,11	–0,5	
Округлення		–0,1	–0,5	
Мислені дослід	5	1,4	6,5	93,3
	6	1,3	6,0	
Реальні дослід	7	1,2	5,5	98,6
	8	1,1	5,0	
	9	1,0	4,5	97,0

За даними дослідів 1–4 (див. табл. 5.1) знайдена лінійна модель $y = 88,0 - 2,0x_1 - 4,5x_2$.

Досліди 5 і 6 є мисленими, для них значення параметра оптимізації знаходимо розрахунком за знайденою моделлю при використанні кодованих значень факторів. Так, для дослідів 5 і 6 маємо:

$$x_1 = (1,3 - 1,5)/0,5 = -0,4;$$

$$x_2 = (6,0 - 7,0)/1,0 = -1,0.$$

Підставивши ці значення факторів до вказаного рівняння регресії, одержуємо

$$y = 88,0 - 2,0(-0,4) - 4,5(-1,0) = 93,3$$

Починаючи з дослідів 7, параметр оптимізації знаходимо експериментально, бо значення фактора x_2 виявилось меншим за його нижній рівень.

До восьмого дослідів функція відгуку зростає, а далі починає зменшуватись. Це означає, що умови дослідів 8 приблизно відповідають локальному оптимуму, який якщо не співпадає з дійсним оптимумом, то є близьким до нього. На цьому експеримент, спрямований на пошук екстремуму, було припинено.

В табл. 5.2 представлено пошук методом крутого сходу хімічного складу багатокомпонентної легованої сталі з найбільшою міцністю на розрив.

Таблиця 5.2 – Використання методу крутого сходу при визначенні хімічного складу легованої сталі з максимальною міцністю на розрив

Рівні факторів і дослідів	Вміст домішки, % за масою							$y \times 10^{-3}$ фТ/дм ² (800°C)
	Cr	Ni	Mo	V	Nb	Mn	C	
Основний рівень	4	2	0,1	0,02	0,1	0,4	0,4	
Інтервал варіювання	1	1	0,1	0,02	0,1	0,1	0,1	
Верхній рівень	5	3	0,2	0,04	0,2	0,5	0,5	
Нижній рівень	3	1	0	0	0	0,3	0,3	
Кодоване значення фактора	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Досліди	1	–	–	–	–	–	–	1,5
	2	+	+	–	–	+	+	3,5
	3	+	–	+	–	+	–	6,2
	4	–	+	+	–	+	+	3,2
	5	+	–	–	+	–	+	5,3
	6	–	+	–	+	–	+	5,1
	7	–	–	+	+	+	–	5,3
	8	+	+	+	–	–	–	5,8
Коефіцієнти моделі a_j	0,71	–0,09	0,64	0,89	0,54	–0,16	0,46	
Складові градієнта $a_j I_j$	0,71	–0,09	0,064	0,018	0,054	–0,016	0,046	
Кроки	0,8	–0,1	0,07	0,02	0,06	–0,02	0,05	
Мислений дослід	9	4,8	1,9	0,17	0,04	0,16	0,38	0,45
Реальні дослідів	10	5,6	1,8	0,24	0,06	0,22	0,36	0,50
	11	6,4	1,7	0,31	0,08	0,28	0,34	0,55
	12	7,2	1,6	0,38	0,10	0,34	0,32	0,60
	13	8,0	1,5	0,45	0,12	0,40	0,30	0,65
	14	8,8	1,4	0,52	0,14	0,46	0,28	0,70
	15	9,6	1,3	0,59	0,16	0,52	0,26	0,75
	16	10,4	1,2	0,66	0,18	0,58	0,24	0,80
	17	11,2	1,1	0,73	0,20	0,64	0,22	0,85
	18	12,0	1,0	0,80	0,22	0,70	0,20	0,90

Слід звернути увагу на те, що в представленому у табл. 5.2 дослідженні внаслідок пошуку екстремуму методом крутого сходу міцність сталі була збільшена майже вдвічі, що свідчить про високу ефективність даного методу.

Симплекс-метод

Даний метод ґрунтується на «перекочуванні» у факторному просторі симплекса – правильного багатогранника, утвореного шляхом з'єднання $n+1$ його точок (вершин) у n -мірному просторі.

Експеримент, спрямований на пошук оптимуму, проводиться за планом, представленим на рис. 5.3 для випадку $n = 2$. Уявімо, що відшукується мінімум функції $y = f(x_1, x_2)$. Перша серія дослідів ставиться в точках 0, 1 і 2 (див. рис. 5.3). Для визначення нової дослідної точки симплекс 0-1-2 обертається навколо ребра 1-2, протилежного тій вершині (точка 0), в якій значення функції відгуку було найбільшим. Отже, нова дослідна точка відповідає точці 3 на рис. 5.3. Якщо $y_1 > y_2$ і $y_1 > y_3$, то обертанням симплекса навколо ребра 2-3 знаходять наступну точку 4. Аналогічні процедури повторюються до тих пір, поки симплекс не «накриє» область мінімуму, де результати вимірювання функції відгуку по всіх вершинах приблизно однакові. За оптимальну точку можна прийняти будь-яку із вершин симплекса 11-12-13 або його центр.

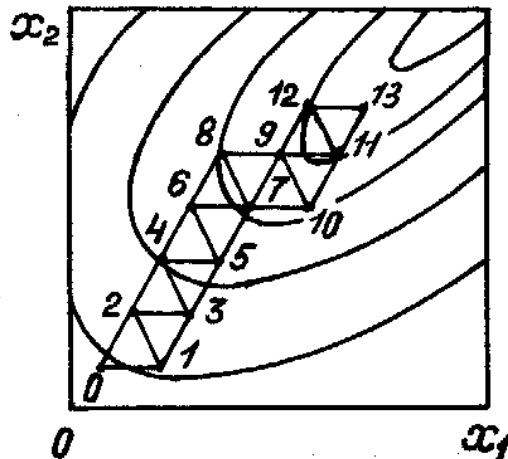


Рисунок 5.3 – Пошук екстремуму симплекс-методом

Траєкторія руху симплексним методом виглядає приблизно так же, як і при градієнтному пошуку, але необхідна кількість дослідних точок при використанні симплекс-методу дещо менша.

Іноді послідовні симплекси починають описувати замкнену криву навколо одного і того ж ребра – відбувається так зване зациклювання. В таких випадках треба спробувати обернути симплекс навколо ребра, що протистоїть другій (в порядку зменшення чи збільшення y) вершині, або, відхилившись у довільному напрямку, почати нову систему симплексів з меншим кроком.

В ливарному виробництві симплекс-метод набув широкого застосування при визначенні оптимального за вартістю складу шихти при плавці ливарних сплавів.

Метод сходу (спуску) за діаметром еліпсоїда (СДЕ)

Лінії рівня (див. рис. 5.1, б) можна розглядати як правильні еліпси (при кількості факторів $k = 2$) або еліпсоїди (при $k > 2$).

Діаметром еліпса (еліпсоїда) називається відрізок, який належить будь-якій прямій, що проходить через центр еліпса (еліпсоїда), і який обмежений точками перетину прямої з еліпсом (еліпсоїдом).

Метод СДЕ ґрунтується на тому, що діаметр еліпсоїда визначає напрямок найкоротшого шляху до його центра, який співпадає з точкою оптимуму.

Пошук екстремуму за методом СДЕ здійснюється знаходженням одного із діаметрів еліпсоїда і подальшим переміщенням уздовж нього аж до екстремуму.

Розглянемо пошук оптимуму за методом СДЕ на прикладі визначення точки мінімуму функції $y = f(x_1, x_2)$, лінії рівня якої показані на рис. 5.4. Нехай точка 1, прийнята як початкова. Початок пошуку здійснюється за методом Гауса-Зейделя (досліди 1, 2, 3, 4 і 5 в напрямку I при $x_2 = \text{const}$).

Припустимо, що $y_4 < y_5$, $y_4 < y_3$, причому через істинний мінімум в точці перетину напрямку I з діаметром oa ми, як це видно з рис 5.4, переступили. Для уточнення положення зазначеної точки локального мінімуму результати дослідів, приведених в напрямку I, узагальнюємо рівнянням

$$y = y_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2,$$

продиференціювавши яке по x_1 і прирівнявши першу похідну до нуля, знаходимо положення точки локального мінімуму:

$$x_{1,\min} = (-c_1)/2c_2$$

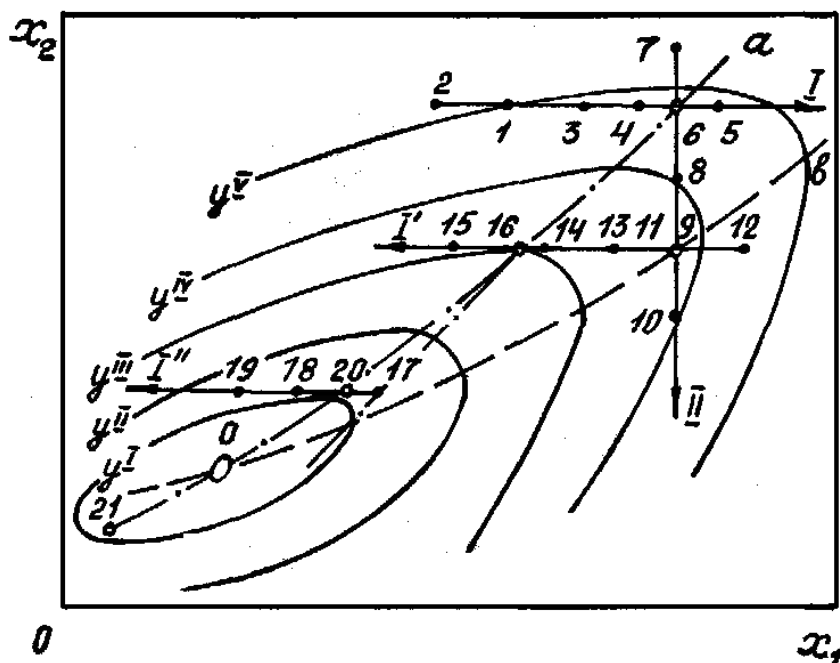


Рисунок 5.4 – Метод спуску за діаметром еліпсоїда (СДЕ)

Далі в цій точці фіксуємо x_1 і проводимо серію дослідів в напрямку II (див. рис. 5.4), за даними яких, аналогічно попередньому, знаходимо точку другого локального оптимуму – 9.

Третя серія дослідів в напрямку I' (див. рис. 5.4) дозволяє знайти другу точку діаметра *oa* (точка 16).

Далі шляхом лінійного прогнозування знаходять координати точки 17 (див. рис. 5.4), а потім, рухаючись по напрямку I'', одержують координати третьої точки еліпсоїда (точка 20).

Як видно з рис. 5.4, діаметр еліпсоїда є криволінійним через те, що еліпсоїд не є ідеальним, тому координати точок 17 і 20 не співпадають.

Повторюючи зазначені процедури, знаходять врешті-решт екстремальну точку.

Приклади використання методу СДЕ можна знайти в монографії [6].

5.2. Контрольні запитання

1. В чому полягає суть класичного аналітичного методу пошуку екстремуму багатofакторного об'єкта дослідження?
2. Дайте характеристику методу Гауса-Зейделя.
3. Які існують градієнтні методи пошуку екстремуму? Схарактеризуйте їх особливості, переваги та недоліки.
4. Що називається градієнтом функції відгуку?
5. Що називається складовою градієнта, кроком, від якої точки факторного простору і чому починається крокування?
6. Схарактеризуйте симплекс-метод пошуку екстремуму.
7. На чому ґрунтується і як здійснюється метод сходу (спуску) за діаметром еліпсоїда?

5.3. Завдання

Для умов завдання 4.3 згідно табл. 4.9 провести розрахунок крутого сходу. В усіх варіантах завдання прийняти наступні дані щодо факторів:

	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2
основний рівень фактора	1,5	7,0
інтервал варіювання фактора	0,5	1,0

ДОДАТКИ

Додаток 1

Фрагмент таблиці випадкових чисел

56	66	25	32	38	64	70	26	27	67	77	40	04	34	63	98	99	89	31	16	12	90	50	28	96
88	40	52	02	29	82	69	34	50	21	74	00	91	27	52	98	72	03	45	65	30	89	71	45	91
87	63	88	23	62	51	07	69	59	02	89	49	14	98	53	41	92	36	07	76	85	37	84	37	47
32	25	21	15	08	82	34	57	57	35	22	03	33	48	84	37	37	29	38	37	89	76	25	09	69
44	61	88	23	13	01	59	47	64	04	99	59	96	20	30	87	31	33	69	45	58	48	00	83	48
94	44	08	67	79	41	61	41	15	60	11	88	83	24	82	24	07	78	61	89	42	58	88	22	16
13	24	40	09	00	65	46	38	61	12	90	62	41	11	59	85	18	42	61	29	88	76	04	21	80
78	27	84	05	99	85	75	67	80	05	57	05	71	70	21	31	99	99	06	96	53	99	25	13	63
42	39	30	02	34	99	46	68	45	15	19	74	15	50	17	44	80	13	86	38	40	45	82	13	44
04	52	43	96	38	13	83	80	72	34	20	84	56	19	49	59	14	85	42	99	71	16	34	33	79
82	85	77	30	16	69	32	46	46	30	84	20	68	72	98	94	62	63	59	44	00	89	06	15	87
38	48	84	88	24	55	46	48	60	06	90	08	83	83	98	40	90	88	25	26	85	74	55	80	85
91	19	05	68	22	58	04	63	21	16	23	38	25	43	32	98	94	65	35	35	16	91	07	12	43
54	81	87	21	31	40	46	17	62	63	99	71	14	12	64	51	68	50	60	78	22	69	51	98	37
65	43	75	12	91	20	36	25	57	92	33	65	95	48	75	00	06	65	25	90	16	29	34	14	43
49	98	71	31	80	59	57	32	43	07	85	06	64	75	27	29	17	06	11	30	68	70	97	87	21
03	98	68	89	39	71	87	32	14	99	42	10	25	37	30	08	27	75	43	97	54	20	69	93	50
56	04	21	34	92	89	81	52	15	12	84	11	12	66	87	47	21	06	86	08	35	39	52	28	09
48	09	36	95	36	20	82	53	32	89	92	68	50	88	17	37	92	02	23	43	63	24	69	80	91
23	97	10	96	57	74	07	95	26	44	93	08	43	30	41	86	45	74	33	78	84	33	38	76	73
43	97	55	45	98	35	69	45	96	80	46	26	39	96	33	60	20	73	30	79	17	19	03	47	28
40	05	08	50	79	89	58	19	86	48	27	98	99	24	08	94	19	15	81	29	82	14	35	88	03
66	97	10	69	02	25	36	43	71	76	00	67	56	12	69	07	89	55	63	31	50	72	20	33	36
15	62	38	72	92	03	76	09	30	75	77	80	04	24	54	67	60	10	79	26	21	60	03	48	14
77	81	15	14	67	55	24	22	20	55	36	93	67	69	37	72	22	43	46	32	56	15	75	25	12
18	87	05	09	96	45	14	72	41	46	12	67	46	72	02	59	06	17	49	12	73	28	23	52	48
08	58	53	63	66	13	07	04	48	71	39	07	46	96	40	20	86	79	11	81	74	11	15	23	17
16	07	79	57	61	42	19	68	15	12	60	21	59	12	07	04	99	88	22	39	75	16	69	13	84

Додаток 2

Значення t -критерію Стюдента при 5%- му рівні значущості

Число степенів свободи f	Значення t -критерію	Число степенів свободи f	Значення t -критерію	Число степенів свободи f	Значення t -критерію
1	12,71	11	2,201	21	2,080
2	4,303	12	2,179	22	2,074
3	3,182	13	2,160	23	2,069
4	2,776	14	2,145	24	2,064
5	2,571	15	2,131	25	2,060
6	2,447	16	2,120	26	2,056
7	2,365	17	2,110	27	2,052

8	2,306	18	2,101	28	2,048
9	2,262	19	2,093	29	2,045
10	2,228	20	2,086	30	2,042
				∞	1,960

Додаток 3

Значення F -критерію Фішера при 5%-му рівні значущості

$f_1 \backslash f_2$	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,5	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,9
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
28	4,2	3,3	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Література

1. Сабірзянов Т.Г. Математичне моделювання технологічних процесів лиття – Кіровоград: КНТУ, 2007. – 74с.
2. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1971. – 284 с.
3. Карасёв А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Статистика, 1977. – 279 с.
4. Налимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. – М.: Наука, 1965. – 340 с.
5. Пелых С.Г., Семесенко М.П. Оптимизация литейных процессов. – К.: Вища школа, 1977. – 188 с.
6. Рафалес-Ламарка Э.Э., Николаев В.Г. Некоторые методы планирования и математического анализа биологических экспериментов. – К.: Наукова думка, 1971. – 119 с.
7. Сабірзянов Т.Г., Кропівний В.М. Теплотехніка ливарних процесів. – Кіровоград: КНТУ, 2005. – 402 с.
8. Сабірзянов Т.Г. Некоторые задачи литейной гидравлики // Збір. наук. праць КДТУ. – 2000. – В. 7. – С. 211-215.
9. Сабірзянов Т.Г. Анализ теплообмена в зоне подогрева вагранки // Констр. и техн. пр-ва с/х машин. – 1975. – В. 5. – С. 77-80.
10. Сабірзянов Т.Г., Телін В.М., Телін М.В. Дослідження теплової взаємодії металу з ливарною формою // Зб. наук. праць «Розробка і технологія виробництва с/г машин». – Київ: Інст. сист. досліджень, 1994. – С. 171-175.
11. Сабірзянов Т.Г. Исследование заливочных процессов литейного производства // Констр. и техн. пр-ва с/х машин. – 1983. – В. 13. – С. 74-77.
12. Сабірзянов Т.Г., Абрамов К.В., Щербаков А.В. Метод побудови математичних моделей технічних об'єктів дослідження // Конструювання, виробництво та експлуатація с/г машин. – Кіровоград: КНТУ, 2006. – В. 36. – С. 60-64.
13. Сабірзянов Т.Г. Метод розрахунку горіння коксу у вагранці // Наукові записки. – В. 4. – Кіровоград: КДТУ, 2003. – С. 158-168.
14. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии. М.: Высш. шк., 1985. – 326 с.
15. Дубров А.М. Обработка статистических данных методом главных компонент. М.: Статистика, 1978. – 164 с.
16. Львовский Г.Н. Статистические методы построения эмпирических формул. М.: Высш. шк., 1982. – 224 с.

17. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах (учебное пособие). М.: Высшая школа, 2002. – 544 с.
18. Стьюпер Э., Брюггер У., Джурс П. Машинный анализ связи химической структуры и биологической активности. М.: Мир, 1982. – 232 с.
19. Поляков Б.Н. Некоторые особенности аппроксимации функций двух переменных в алгоритме «Метод Брандона» / Б.Н. Поляков // Прикладная информатика. – 2008. - № 6 (18). – С. 103-105.
20. В.О. Голубев, Т.Е. Литвинова. Реализация алгоритма построения статистической модели объекта по методу Брандона. – 2012 mathdesigner.ru.