

Центральноукраїнський національний технічний університет
Механіко-технологічний факультет
Кафедра матеріалознавства та ливарного виробництва

«Допущено до захисту»
Зав. кафедри МЛВ
канд. техн. наук, доцент
_____ Олександр Кузик
«_____» _____ 20__ р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

за другим (магістерським) рівнем вищої освіти на тему:
Математичне моделювання процесів нагрівання виливків у печі
при граничних умовах третього роду

Виконав здобувач вищої освіти
II курсу, групи ПМ-22М1,4
спеціальності 131
«Прикладна механіка»
_____ Михайло Рахуба
«_____» _____ 20__ р.

Керівник роботи
канд. техн. наук, доцент
_____ Олександр Кузик
«_____» _____ 20__ р.

Рецензент
канд. техн. наук, доцент
_____ Олег Сіса
«_____» _____ 20__ р.

м. Кропивницький – 20__

Центральноукраїнський національний технічний університет

Факультет: Механіко-технологічний

Кафедра: «Матеріалознавства та ливарного виробництва»

Рівень вищої освіти: другий (магістерський)

Галузь знань: 13 «Механічна інженерія»

Спеціальність: 131 «Прикладна механіка»

Освітньо-професійна програма: «Прикладна механіка»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав. кафедри МЛВ

канд. техн. наук, доцент

_____ Олександр Кузик

«_____» _____ 20____ р.

**ЗАВДАННЯ НА ВИПУСКНУ КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ
ЗА ДРУГИМ (МАГІСТЕРСЬКИМ) РІВНЕМ ВИЩОЇ ОСВІТИ**

Рахубі Михайлу Васильовичу

1. Тема роботи: Математичне моделювання процесів нагрівання виливків у печі при граничних умовах третього роду .

2. Керівник роботи: Кузик Олександр Володимирович, к. т. н., доцент.

3. Строк подання роботи до захисту: «_____» _____ 20____ р.

4. Мета та завдання випускної кваліфікаційної роботи.

Мета: розроблення простого для практичного використання методу розрахунку нагрівання виливків нестационарної теплопровідності при граничних умовах третього роду для тіл складної форми

Завдання: обґрунтувати напрямок досліджень та актуальність теми; розробити методику досліджень; виконати дослідження та провести аналіз отриманих результатів; виконати розрахунки з економічної частини.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів випускної кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1	Опрацювання навчальної та наукової літератури		
2	Проведення наукових досліджень, обробка фактичного матеріалу		
3	Написання першого варіанта тексту,		

	подання його на ознайомлення керівникові		
4	Усунення недоліків, написання останнього варіанта тексту		
5	Перевірка роботи на плагіат		
6	Зовнішнє рецензування роботи		
7	Захист кваліфікаційної роботи на засіданні екзаменаційної комісії		

Дата видачі завдання

«____»_____20____ р.

Підпис керівника

_____ Кузик О.В.

Завдання прийнято до виконання

«____»_____20____ р.

Підпис здобувача

_____ Рахуба М.В.

ВСТУП.....	8
РОЗДІЛ 1. ОБГРУНТУВАННЯ ВИБРАНОГО НАПРЯМКУ	
ДОСЛІДЖЕННЯ.....	11
1.1. Диференціальне рівняння теплопровідності Фур'є.....	11
1.2. Розв'язання рівняння Фур'є.....	12
1.2.1. Умови однозначності.....	12
1.2.2. Критеріальна форма розв'язку.....	14
1.2.3. Метод відокремлення змінних (метод Фур'є).....	15
1.2.4. Аналіз розв'язків рівняння Фур'є.....	15
1.2.5. Графічне представлення розв'язків (графіки Будріна).....	18
1.2.6. Нагрівання прямокутного паралелепіпеда і циліндра кінцевої довжини.....	18
1.2.7. Метод кінцевих різниць.....	30
1.2.8. Нагрівання «тонких» тіл.....	36
1.2.9. Наближений метод визначення реального часу нагрівання виливка в залежності від ідеального часу.....	38
1.3. Висновки.....	38
РОЗДІЛ 2. МЕТОД РОЗРАХУНКУ НАГРІВАННЯ ВИЛИВКІВ.....	39
2.1. Виведення співвідношення $m = 1 + kBi$	39
2.2. Методика обробки літературних даних.....	40
2.3. Результати обробки літературних даних.....	41
2.4. Визначення коефіцієнта пропорційності k	41
2.5. Висновки.....	47
РОЗДІЛ 3. ПРИКЛАДИ ПРАКТИЧНОГО ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ.....	48
3.1. Розрахунок нагрівання «тонких» тіл.....	48
3.2. Розрахунок нагрівання «масивних» тіл.....	50
3.3. Висновки.....	51
РОЗДІЛ 4. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА.....	52
4.1. Розрахунок часу нагрівання виливка.....	53
4.2. Висновки.....	54
РОЗДІЛ 5. ЕКОНОМІЧНА ЧАСТИНА.....	55
5.1. Розрахунок економічного ефекту.....	55
5.2. Висновки.....	58
ВИСНОВКИ.....	59
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	60

ДОДАТКИ.....	61
--------------	----

АНОТАЦІЯ

Рахуба М. В. Математичне моделювання процесів нагрівання виливків у печі при граничних умовах третього роду, спеціальність 131 «Прикладна механіка», ОПП – «Прикладна механіка», Центральноукраїнський національний технічний університет, Кропивницький, 2023. – 71с. Матеріали ілюстрації 10 іл.

Метою дослідження є розроблення простого для практичного використання методу розрахунку нагрівання виливків нестационарної теплопровідності при граничних умовах третього роду для тіл складної форми.

Методи дослідження: метод Фур'є, критеріальні методи розв'язку, метод кінцевих різниць, метод нагрівання тонких тіл, наближений метод нагрівання і наближені формули розрахунку нагрівання металу в середовищі MathCAD.

Запропоновано простий метод розрахунку нагрівання виливків при нестационарній теплопровідності для тіл складної форми. Виведено співвідношення $m = 1 + kV_i$ і визначено коефіцієнт пропорційності k .

Виконані приклади практичного використання методу: розрахунки нагрівання «тонких» тіл; розрахунки нагрівання «масивних» тіл; розрахунок часу нагрівання виливків.

Показано, що практичні розрахунки адекватно співставляються з експериментальними даними як для «тонких», так і для «масивних» тіл складної форми.

Розроблено простий для практичного використання метод розрахунку нагрівання виливків нестационарної теплопровідності при граничних умовах третього роду для тіл складної форми.

виливки, сплав DIN226, метод Фур'є, критеріальні методи розв'язку, метод кінцевих різниць, метод нагрівання тонких тіл, метод розрахунку нагрівання виливків нестационарної теплопровідності

ABSTRACT

Rakhuba M. V. Mathematical modeling of processes of heating castings in a furnace under boundary conditions of the third kind, specialty 131 "Applied Mechanics", OPP - "Applied Mechanics", Central Ukrainian National Technical University, Kropyvnytskyi, 2023. - 71p. Illustration materials 10 images.

The purpose of the study is to develop a simple for practical use method of calculating the heating of castings of non-stationary thermal conductivity under boundary conditions of the third kind for bodies of complex shape

Research methods: the Fourier method, criterion methods of tying, the finite difference method, the method of heating thin bodies, the approximate method of heating, the approximate Weinik method and approximate formulas for the calculation of metal heating in MathCAD.

A simple method for calculating the heating of castings with non-stationary thermal conductivity for bodies of complex shape is proposed. The relationship $m=1+kBi$ and the definition of the proportionality factor k are derived

Completed examples of practical use of the method: calculations of heating of "thin" bodies; heating calculations of "massive" bodies; calculation of the heating time of castings.

It is shown that practical calculations are adequately compared with experimental data for both "thin" and "massive" bodies of complex shape.

A simple for practical use method of calculating the heating of castings of unsteady thermal conductivity under boundary conditions of the third kind for bodies of complex shape has been developed.

castings of DIN226 alloy, the Fourier method, criterion methods of connection, the finite difference method, the method of heating thin bodies, the method of calculating the heating of castings of non-stationary thermal conductivity

ВСТУП

Актуальність теми

Основою машинобудування є лиття. Литі заготовки використовуються у всіх галузях машинобудування та приладобудування. Виливки складають 25% маси автомобілів, 58% маси тракторів, 60% маси асинхронних електричних двигунів та 80% маси металорізальних верстатів. Цьому є просте пояснення – лиття значно переважає перед іншими способами виготовлення деталей (заготовок) машин, а саме – технологією лиття можна виготовляти деталі різної складності та конфігурації, вартість їх виготовлення набагато менша, а довговічність більша, ніж у деталей, виготовлених іншими способами. У процесі лиття використовують дешеві матеріали і, навіть, відходи власного виробництва. Коефіцієнт використання металу (відношення маси металу до маси заготовки) наближається до одиниці. А ще виливки мають високі технологічні та службові властивості [1].

Мета та задачі дослідження

Виливки як простої, так і складної форми виготовляються із сплавів, яким необхідна термообробка для зміни структури металу і сплаву, а саме – зміни механічних та фізичних властивостей, а тому, на практиці дуже часто зустрічаються процеси нагрівання виливків у печах. Знання законів, які керують процесами нагрівання або охолодження є необхідним для правильного вибору режимів нагрівання або охолодження тіл, і, відповідно, для зменшення браку при литті і збільшення продуктивності праці. *Об'єктом дослідження* є виливки, що підлягають нагріванню, *предметом дослідження* є процеси нагрівання у печі виливків з різних сплавів, а *задачами дослідження* є:

- аналітичні методи розв'язання процесу нагрівання та охолодження виливків;
- розробка простого і практичного методу розрахунку нестационарної теплопровідності при граничних умовах третього роду для тіл складної форми;

– виведення формули для розрахунку тривалості нагрівання «тонких» і «масивних» тіл простої і складної форм.

Методи дослідження: метод Фур'є, критеріальні методи розв'язку, метод кінцевих різниць, метод нагрівання тонких тіл, наближений метод нагрівання і наближені формули розрахунку нагрівання металу.

Нагрівання тіл супроводжується безперервною зміною температури всередині їх, а на поверхні тіла здійснюється нестационарний процес.

Наприклад стаціонарний процес – це режим теплопровідності, коли температура є сталою в часі в будь-якій точці виливка.

А нестационарний процес – це режим теплопровідності, коли температура змінюється в часі в кожній точці перерізу виливка.

Натепер аналітичні методи розв'язку задач процесу нагрівання виливків в першу чергу відносяться до тіл простої форми. Наприклад, метод Фур'є характерний тільки для тіл простої форми – необмежені пластина, циліндр і куля, а дійсні виливки мають складну форму. Кінцево-різницеві методи також громіздкі і застосовуються переважно для простої форми виливків. Розроблено також графіки визначення залежності температурного симплексу від критеріїв Fo і Bi для простих виливків. Але не для всіх значень числа Bi відомі графіки. Тому, відомі методи розв'язку задач теплопровідності є на даний час не вигідні для їх практичного використання, особливо це стосується дійсних виливків, які за своєю формою дуже відрізняються від тіл простої форми.

Тому, *метою роботи* є розроблення спрощеного для практичного застосування методу розрахунку нагрівання виливків нестационарної теплопровідності для масивних тіл складної форми.

Наукова новизна одержаних результатів

Запропоновано простий метод розрахунку нагрівання виливків при нестационарній теплопровідності для тіл складної форми при використанні приведеної товщини виливків. Із співвідношення $m=1+kBi$ визначено коефіцієнт пропорційності k для тіл складної форми.

Практичне значення отриманих результатів

Виконані приклади практичного використання запропонованого методу: розрахунки нагрівання «тонких» та «масивних» тіл з визначенням часу нагрівання виливків. А також розроблено метод для практичного використання і розрахунку нагрівання виливків нестационарної теплопровідності при граничних умовах третього роду для тіл складної форми.

Апробація результатів роботи

Основні результати роботи доповідались на ***VIII Міжнародній науково-практичній дистанційній конференції*** «Modern problems of science, education and society» 9-11 жовтня 2023 року у м. Київ, Україна.

Публікації

Результати роботи опубліковані в 2023 році у збірнику тез ***VIII Міжнародної науково-практичної дистанційної конференції*** «Modern problems of science, education and society» 9-11 жовтня 2023 року у м. Київ, Україна. Тема: Математичне моделювання процесів нагрівання виливків у печі при граничних умовах третього роду. Отримано сертифікат (див. Додаток Д).

The 8th International scientific and practical conference “Modern problems of science, education and society” (October 9-11, 2023) SPC “Sciconf.com.ua”, Kyiv, Ukraine. 2023. P.250-254.

РОЗДІЛ 1. ОБГРУНТУВАННЯ ВИБРАНОГО НАПРЯМКУ ДОСЛІДЖЕННЯ

В загальному вигляді задача про розподіл температури у тілах довільної форми строгими методами не може бути розв'язана, тому що будь-яка інша форма тіла характеризується своїми особливими умовами однозначності, а тому не може бути загального розв'язку для багатьох тіл [2-4]. Вперше ця проблема була сформульована і вирішена Фур'є у книзі «Аналітична теорія теплоти». Ним був розроблений метод розділення змінних, який є громіздким і придатним лише для тіл простої форми [2-4].

1.1. Диференціальне рівняння теплопровідності

Рівняння Фур'є в диференціальній формі представляє функцію температурного поля і має такий вигляд [5, 6]:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

де $a = \lambda / \rho c$ – коефіцієнт температуропровідності, $\text{м}^2/\text{с}$;

ρ – густина тіла, $\text{кг}/\text{м}^3$;

c – теплоємність тіла, $\text{Дж}/\text{кг}\cdot\text{К}$;

λ – коефіцієнт теплопровідності, $\text{Вт}/\text{м}\cdot\text{К}$;

t – температура, $^\circ\text{C}$;

τ – час, с .

Наявність значного числа факторів, які впливають на процеси нагрівання чи охолодження тіл, ускладнює розрахунок температурного поля тіла. Використовуючи методи теорії подібності, рівняння температурного поля можна навести у критеріальному вигляді, що і скоротить число незалежних змінних і значно спрощує розрахунки [2].

Як найпростіший приклад розглянемо двостороннє нагрівання пластини товщиною $2S$, що має однакову температуру по перерізу $t_{\text{поч}}$ (рис. 1.1). Температура печі, в якій вона розміщена, дорівнює $t_{\text{ср}} = \text{const}$. Нагрівається дана пластина однаково з обох сторін, а коефіцієнт тепловіддачі при цьому $\alpha = \text{const}$.

Сталими також є коефіцієнти теплопровідності λ та температуропровідності a .

Отже [5]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (1.2)$$

де $\theta = (t_{\text{п}} - t)/(t_{\text{п}} - t_0)$ – безрозмірна температура (температурний симплекс);

$t_{\text{п}}$ – температура печі (середовища, яке нагріває);

t_0 – початкова температура тіла;

t – поточна температура (середньомасова, поверхні або середини) пластини.

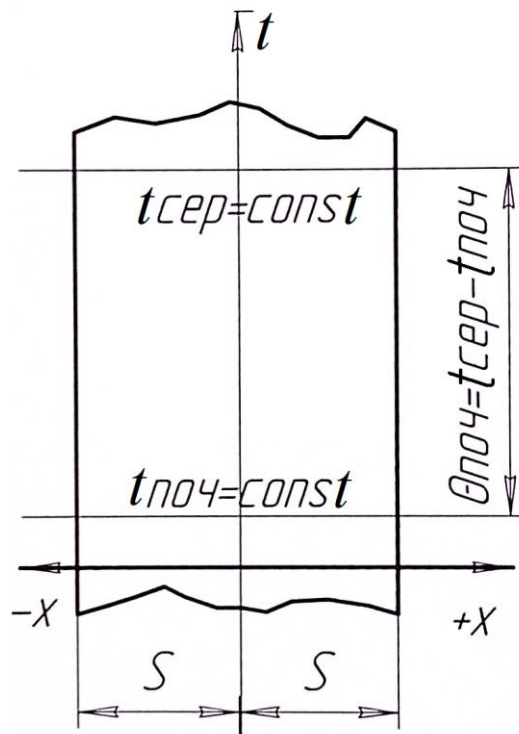


Рисунок 1.1 – До виведення критеріального рівняння нестационарної теплопровідності

1.2. Розв'язання рівняння Фур'є

1.2.1. Умови однозначності. При інтегруванні рівняння Фур'є маємо дві константи і кожна з них може набути будь-якого значення. Отже розв'язком рівняння Фур'є є нескінченно велика кількість різних рівнянь. Для одержання

одного загального розв'язку, який відноситься до конкретної задачі, необхідно вказати значення певних параметрів. Ці параметри називаються умовами однозначності. Вони поділяються на дві частини – це крайові умови та параметри тіла (геометричні і фізичні). До параметрів тіла відносяться: розміри, форма, густина, теплопровідність та теплоємність [5].

Крайові умови поділяються на граничні та часові (початкові). Часові умови відносяться до початку процесу, коли $\tau = 0$, а граничні умови характеризують тепловий режим на поверхні тіла і можуть бути чотирьох типів [5,6]:

- граничні умови першого роду характеризують зміну температури на поверхні тіла за часом:

$$t_{\pi} = f(x, y, z, \tau); \quad (1.3)$$

- граничні умови другого роду характеризують густину теплового потоку на поверхні тіла як функцію часу:

$$q_{\pi} = f(x, y, z, \tau); \quad (1.4)$$

- граничні умови третього роду – за цих умов задається температурний режим середовища $t_{\text{печи}}$ і умови теплообміну цього середовища з поверхнею тіла, тобто вказується закон теплопередачі від джерела теплоти до поверхні тіла. Найпростіше – це використання закону Ньютона-Ріхмана:

$$Q = \alpha(t_{\pi} - t_{\text{печи}})f, \quad (1.5)$$

де α – ефективний коефіцієнт тепловіддачі від джерела теплоти (печі) до поверхні тіла, яке нагрівається, Вт/м²·К;

t_{π} – температура поверхні тіла, °С;

$t_{\text{печи}}$ – температура джерела (печі), °С;

f – величина поверхні теплообміну, м².

Складнішим випадком є використання закону Стефана-Больцмана:

$$Q = C_{\text{пр}} \left[\left(\frac{t_{\text{печ}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{t_{\text{п}}}{100} \right)^4 \right] f, \quad (1.6)$$

де $C_{\text{пр}}$ – приведений коефіцієнт випромінювання в системі «кладка-метал»;

– граничні умови четвертого роду полягають в одночасному задаванні рівності теплових потоків на межі розподілу двох середовищ, які знаходяться у стані теплової взаємодії [4,5,6].

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial n}, \quad (1.7)$$

1.2.2. Критеріальна форма розв'язку. Рівняння, яке є розв'язком задачі рівняння Фур'є має критеріальний вигляд:

$$\theta = a \left(\frac{x}{S}, \text{Fo}, \text{Bi} \right). \quad (1.8)$$

До рівняння (1.8) входять: відносна довжина x/S , критерій Біо:

$$\text{Bi} = \alpha S / \lambda, \quad (1.9)$$

критерій Фур'є:

$$\text{Fo} = \alpha \tau / S^2. \quad (1.10)$$

Масивність тіл характеризує критерій Біо, який дорівнює відношенню внутрішнього опору тіла S/λ до зовнішнього опору тепловіддачі $1/\alpha$. Критерій Фур'є розглядається як безрозмірний час.

Рівняння (1.8) дійсне для випадку нагрівання чи охолодження не лише пластини, але і для циліндра та кулі при граничних умовах третього роду. При нагріванні тіл сталим тепловим потоком q – це граничні умови другого роду, критеріальне рівняння буде мати вигляд [4-7]:

$$\theta = \varphi \left[\frac{x}{S}, \text{Fo}, \frac{qS}{(t_{\text{сп}} - t_{\text{поч}})\lambda} \right], \quad (1.11)$$

а при граничних умовах першого роду:

$$\theta = F\left(\frac{x}{S}, Fo\right). \quad (1.12)$$

1.2.3. Метод відокремлення змінних (Метод Фур'є). Даний метод, який розробив Фур'є, описаний в працях [4-7] та інших.

Як приклад розглянемо найпростіший випадок нагрівання плоскої необмеженої стінки з товщиною $2S$, яка значно менше двох її інших розмірів. Стінка, яка має по перерізу температуру $t_{\text{поч}} = \text{const}$, нагрівається середовищем сталої температури $t_{\text{ср}} = \text{const}$ (див. рис. 1.1). Загальний вид розв'язку наступний [2-7]:

$$\theta = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2 \sin \delta_i}{\delta_i + \sin \delta_i \cos \delta_i} \cos\left(\delta_i \frac{x}{S}\right) e^{-\delta_i^2 Fo}, \quad (1.13)$$

де $\delta_i = S \cdot k$ – корені рівняння; $-k^2 = f''(x)/f(x)$.

Для середньої площини пластини рівняння (1.13) матиме вигляд:

$$\theta_{\text{ср.пл.}} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2 \sin \delta_i}{\delta_i + \sin \delta_i \cos \delta_i} e^{-\delta_i^2 Fo}. \quad (1.14)$$

Для поверхні пластини при $x = \pm S$

$$\theta_{\text{пов}} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2 \sin \delta_i \cos \delta_i}{\delta_i + \sin \delta_i \cos \delta_i} e^{-\delta_i^2 Fo}. \quad (1.15)$$

Вираз для середньої за масою температури пластини $t_{\text{мас}} (t_{\text{ср.пл.}} < t_{\text{мас}} < t_{\text{пов}})$ дозволить визначити кількість теплоти, яку сприймає пластина у процесі нагрівання і він буде мати вигляд [2-7]:

$$\theta_{\text{пов}} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2 \sin \delta_i}{\delta_i + \sin \delta_i \cos \delta_i} \frac{\sin \delta_i}{\delta_i} e^{-\delta_i^2 Fo}. \quad (1.16)$$

За допомогою методу відокремлення змінних можна одержати аналогічні рівняння для необмеженого циліндра та кулі.

1.2.4. Аналіз розв'язків рівняння Фур'є. Диференціальне рівняння $\partial t / \partial \tau = a \Delta^2 T$ відповідає процесу розподілу теплоти між елементами всередині твердого тіла – процесу теплопровідності. Чи буде дане тіло нагріватись або

оохолоджуватись і як саме в даному випадку буде сформоване його температурне поле – це все буде залежати від початкового стану даного тіла та від умов теплової взаємодії цього тіла з навколишнім середовищем [8].

Пропонуються до розгляду загальні рівняння розподілу температур в пластині, циліндрі та кулі для двох крайніх випадків: $Bi \rightarrow 0$ та $Bi \rightarrow \infty$.

При невеликих значеннях Bi маємо [4]:

$$\theta_{\text{пов.пласт.}} \approx \theta_{\text{ср.пл.паст.}} \approx \theta_{\text{мас.пласт.}} = e^{-\delta^2 Fo}; \quad (1.17)$$

$$\theta_{\text{пов.цил.}} \approx \theta_{\text{осі цил.}} \approx \theta_{\text{мас.цил.}} = e^{-\mu^2 Fo}; \quad (1.18)$$

$$\theta_{\text{пов.кулі}} \approx \theta_{\text{центр кулі}} \approx \theta_{\text{мас.кулі}} = e^{-\varepsilon^2 Fo}. \quad (1.19)$$

Отже при невеликих значеннях Bi температура на поверхні тіл та в їх середині має практично однакові значення. В таких випадках швидкість нагрівання не значно відрізняється від швидкості нагрівання тіл, які мають нескінченно велику теплопровідність. І такі тіла називають «тонкими» [2-8].

Для виведення рівняння щодо визначення часу нагрівання «тонких» тіл виконаємо перетворення у рівняннях (1.17...1.19) при $Bi \rightarrow 0$; $\delta^2 \approx Bi$; $\mu^2 \approx 2Bi$ та аналогічно для кулі $\varepsilon^2 = 3Bi$. Одержуємо [9,10] :

$$\begin{aligned} - \text{ для пластини} \quad \theta &= e^{-Mi}; \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} - \text{ для циліндра} \quad \theta &= e^{-2Mi}; \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} - \text{ для кулі} \quad \theta &= e^{-3Mi}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

де Mi – критерій Міхєєва, що представляє собою добуток $Bi \cdot Fo$.

Перетворюючи дані рівняння у відношенні часу нагрівання, одержуємо більш прості рівняння:

$$\begin{aligned} - \text{ для пластини} \quad \tau &= (S_{\text{ср}}/\alpha) \ln(1/\theta); \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} - \text{ для циліндра} \quad \tau &= (S_{\text{ср}}/2\alpha) \ln(1/\theta); \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} - \text{ для кулі} \quad \tau &= (S_{\text{ср}}/3\alpha) \ln(1/\theta), \end{aligned} \quad (1.25)$$

Виведення останніх рівнянь можна легко показати на прикладі перетворення рівняння (1.17):

$$\delta^2 Fo = -\ln \theta_n \quad \delta^2 \frac{a\tau}{S^2} = -\ln \theta.$$

$$\tau = \frac{S^2}{a\delta^2} \ln\left(\frac{1}{\theta}\right) = \frac{S^2}{aBi} \ln\left(\frac{1}{\theta}\right) = \frac{S^2\lambda}{a\alpha\delta^2} \ln\left(\frac{1}{\theta}\right) = \frac{Sc\gamma}{\alpha} \ln\left(\frac{1}{\theta}\right). \quad (1.26)$$

Виходячи з цих рівнянь, можна зробити висновок, що час нагрівання тонких тіл пропорційний лінійному розміру у першому степені, а також те, що при $S = R$ циліндр нагрівається чи охолоджується у два рази, а куля у три рази швидше за пластину.

Взявши до уваги рівняння (1.17) і (1.18) та значення критерію Фур'є, одержимо [4-8]:

- для пластини

$$\tau = \frac{S^2}{a\delta^2} \ln\left(\frac{P}{\theta_{\text{пов}}}\right) = \frac{S^2}{a\delta^2} \ln\left(\frac{N}{\theta_{\text{ср.пл}}}\right) = \frac{S^2}{a\delta^2} \ln\left(\frac{M}{\theta_{\text{мас}}}\right); \quad (1.27)$$

- для циліндра

$$\tau = \frac{R^2}{a\mu^2} \ln\left(\frac{P_0}{\theta_{\text{пов}}}\right) = \frac{R^2}{a\mu^2} \ln\left(\frac{N_0}{\theta_{\text{ср.пл}}}\right) = \frac{R^2}{a\mu^2} \ln\left(\frac{M_0}{\theta_{\text{мас}}}\right). \quad (1.28)$$

Отже видно, що час нагрівання масивних виробів є пропорційним квадрату лінійного розміру.

Розглянувши формули (1.17) та (1.18), можна побачити, що при $Bi \rightarrow \infty$ P і P_0 наближаються до нуля, тому $\theta_{\text{пов.пласт.}} \rightarrow 0$ та $\theta_{\text{пов.цил.}} \rightarrow 0$. Отже, при великих значеннях Bi поверхня тіл дуже швидко набуває температури, яка дорівнює температурі середовища. Це можливо, коли тіло має дуже великі розміри і великий коефіцієнт тепловіддачі при нагріванні.

Межа масивних та тонких тіл визначається наступними нерівностями: при $Bi > 0,10$ – область масивних тіл; при $Bi < 0,10$ – область тонких тіл. Слід відмітити, що всі залежності і для тонких і для масивних тіл були одержані для випадків нагрівання циліндра та пластини. Якщо заготовки розташовують по-іншому, то визначений час нагрівання окремого циліндра або пластини

необхідно помножити на поправочний коефіцієнт k . Значення цього коефіцієнта в залежності від схеми розташування заготовок у печі можна вибирати з таблиць на підставі дослідів з нагрівання металу. Без сумнівів є той факт, що розсування заготовок дозволить зменшити час нагрівання. Це особливо видно при розташуванні заготовок на відстані до половини їх товщини або діаметра і при цьому не тільки скорочується час нагрівання, а й збільшується продуктивність печі [2-10].

1.2.5. Графічне представлення розв'язків (графіки Будріна). Будріним [4, 17] були побудовані графіки для розрахунку нагрівання або охолодження середньої площини, маси та поверхні пластини, також маси і поверхні циліндра (рис. 1.2-1.10). Розрахунок за графіками нагрівання пластини і циліндра швидший і простіший, проте менш точний у порівнянні з розрахунком за формулами (1.13-1.16). Необхідно пам'ятати, що при односторонньому нагріванні пластини у критерії Біо і Фур'є треба вводити не половину, а повну товщину пластини і приймати її рівною S [4, 17].

При $Fo > 0,3$ температуру маси пластини визначаємо за формулою:

$$t_{\text{мас}} = t_{\text{пов}} - \frac{2}{3}(t_{\text{пов}} - t_{\text{ср.пл.}}), \quad (1.29)$$

а для циліндра:

$$t_{\text{мас}} = t_{\text{пов}} - \frac{1}{2}(t_{\text{пов}} - t_{\text{осі.}}). \quad (1.30)$$

1.2.6. Нагрівання прямокутного паралелепіпеда і циліндра скінченної довжини. Під час розгляду методів розрахунку нагрівання нескінченної пластини або циліндра бралось до уваги, що тепловий потік одновимірний [11-13]. На практиці часто розраховують призми, прямокутні паралелепіпеди і короткі циліндри. Аналітичний розв'язок з урахуванням двовимірних та тривимірних теплових потоків є дуже складним та він значно спрощується, якщо використовувати одну з властивостей інтегралів диференціального

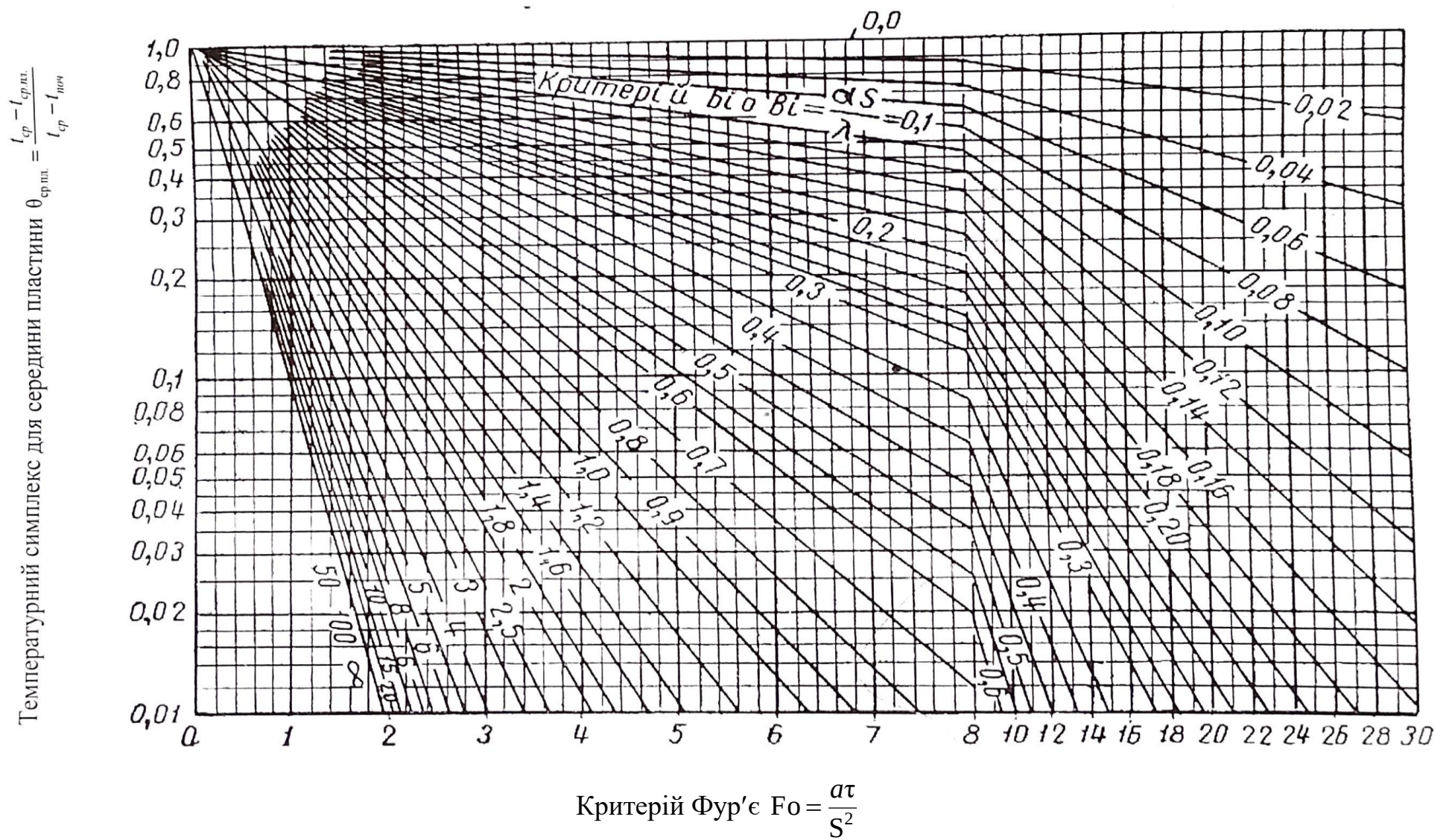


Рисунок 1.2 – Графік для розрахунку нагрівання або охолодження середньої площини пластини

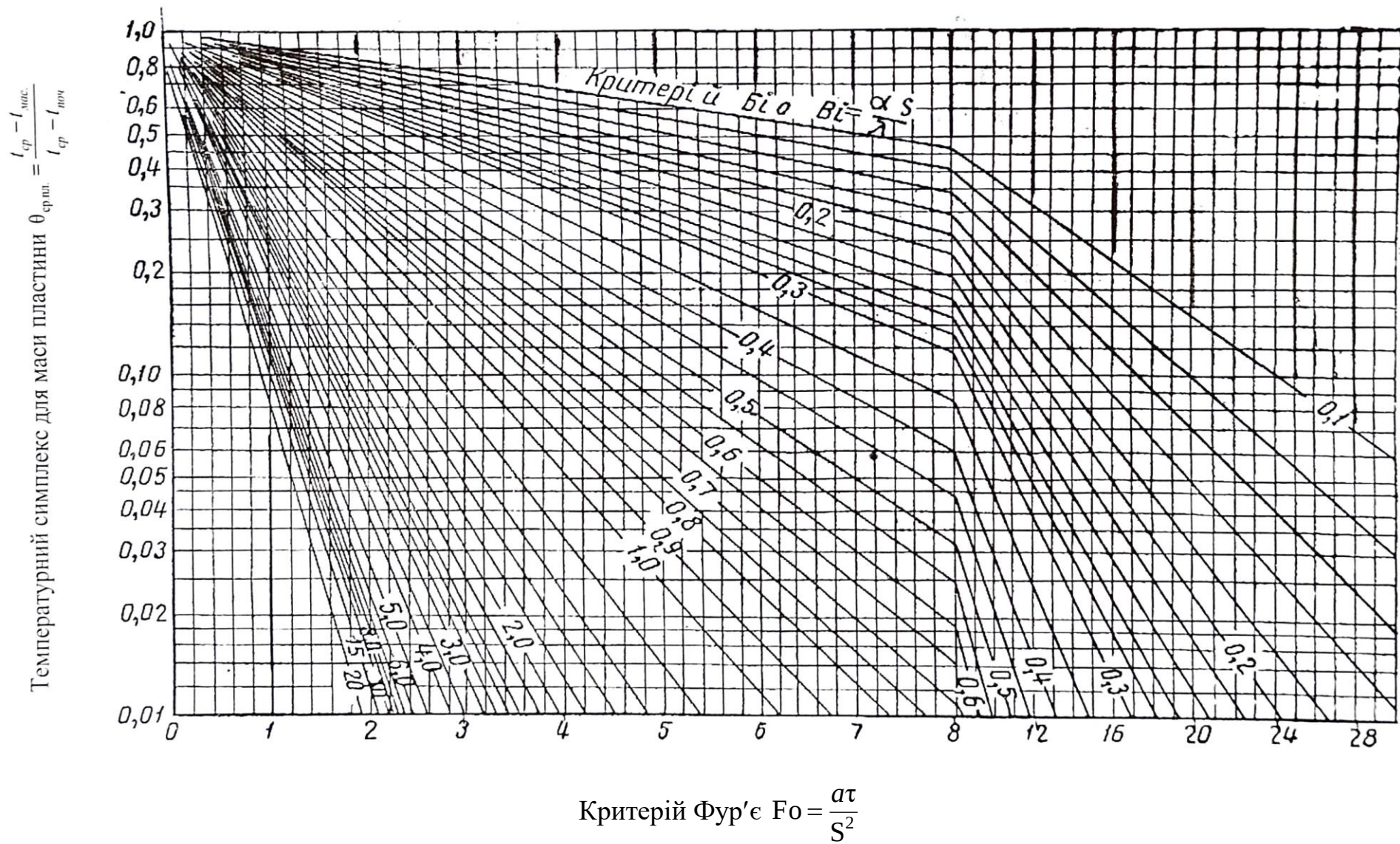


Рисунок 1.3 – Графік для розрахунку нагрівання або охолодження маси пластини

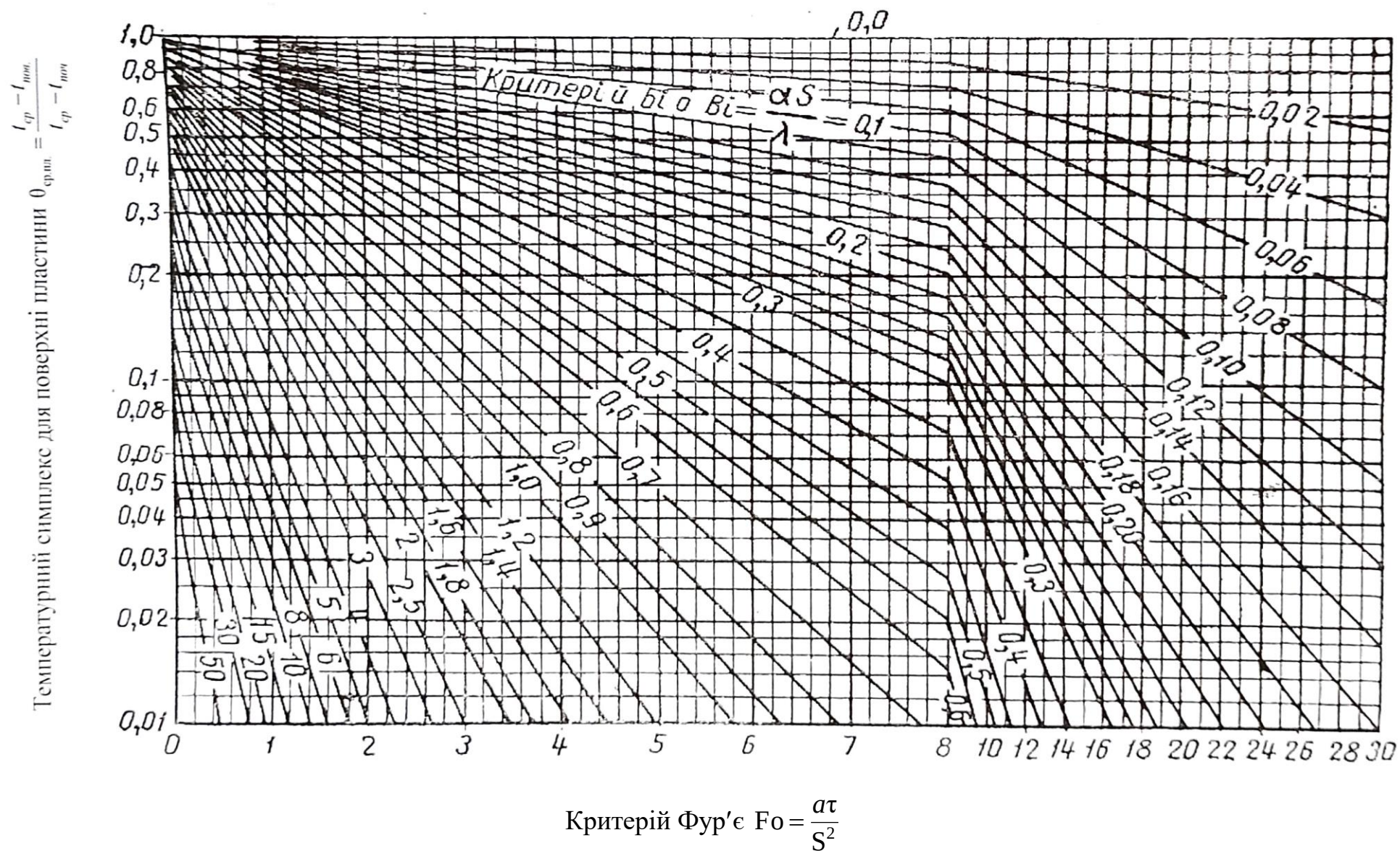


Рисунок 1.4 – Графік для розрахунку нагрівання або охолодження поверхні пластини

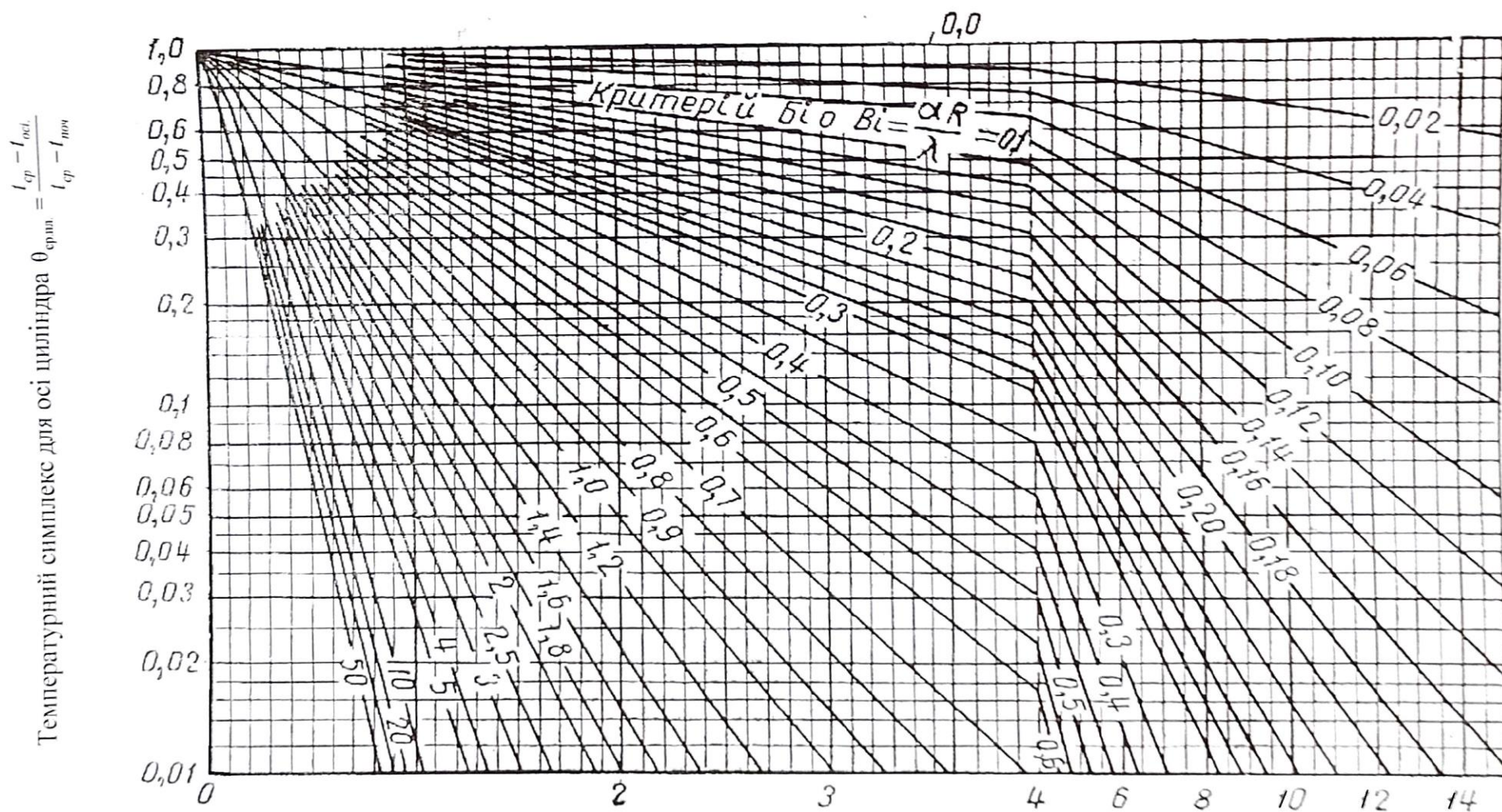


Рисунок 1.5 – Графік для розрахунку нагрівання або охолодження осі циліндра

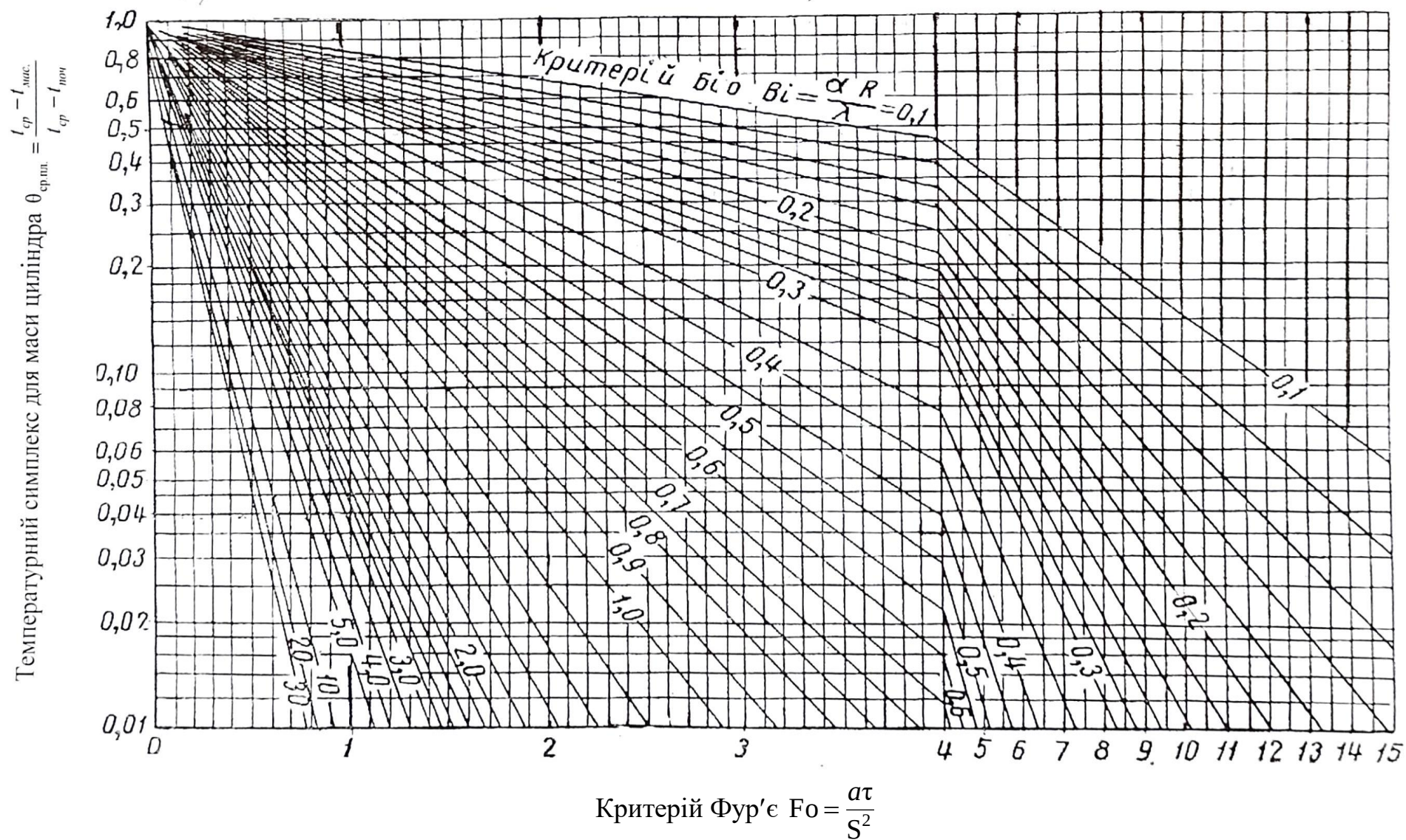


Рисунок 1.6 – Графік для розрахунку нагрівання або охолодження маси циліндра

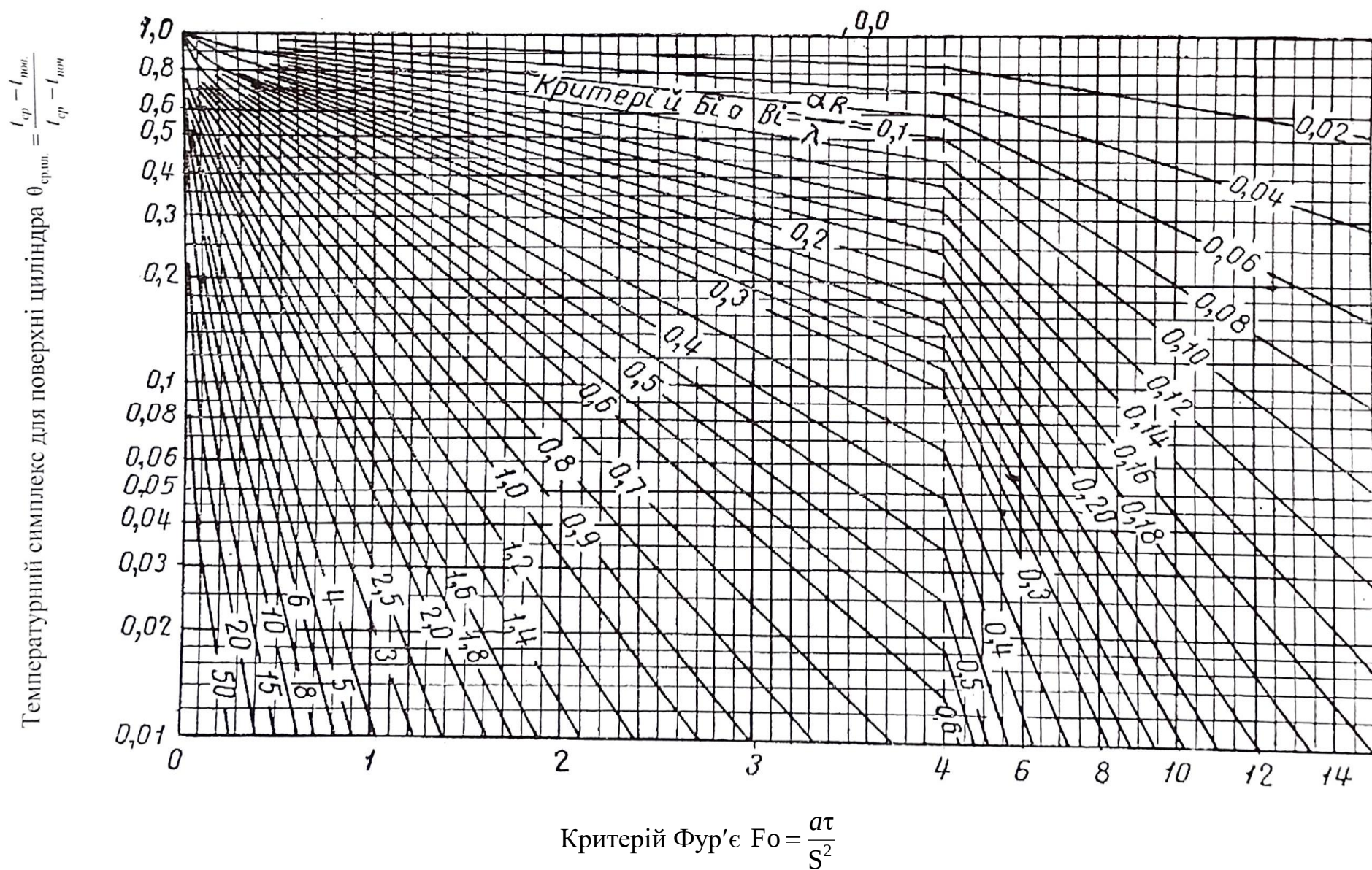


Рисунок 1.7 – Графік для розрахунку нагрівання або охолодження поверхні циліндра

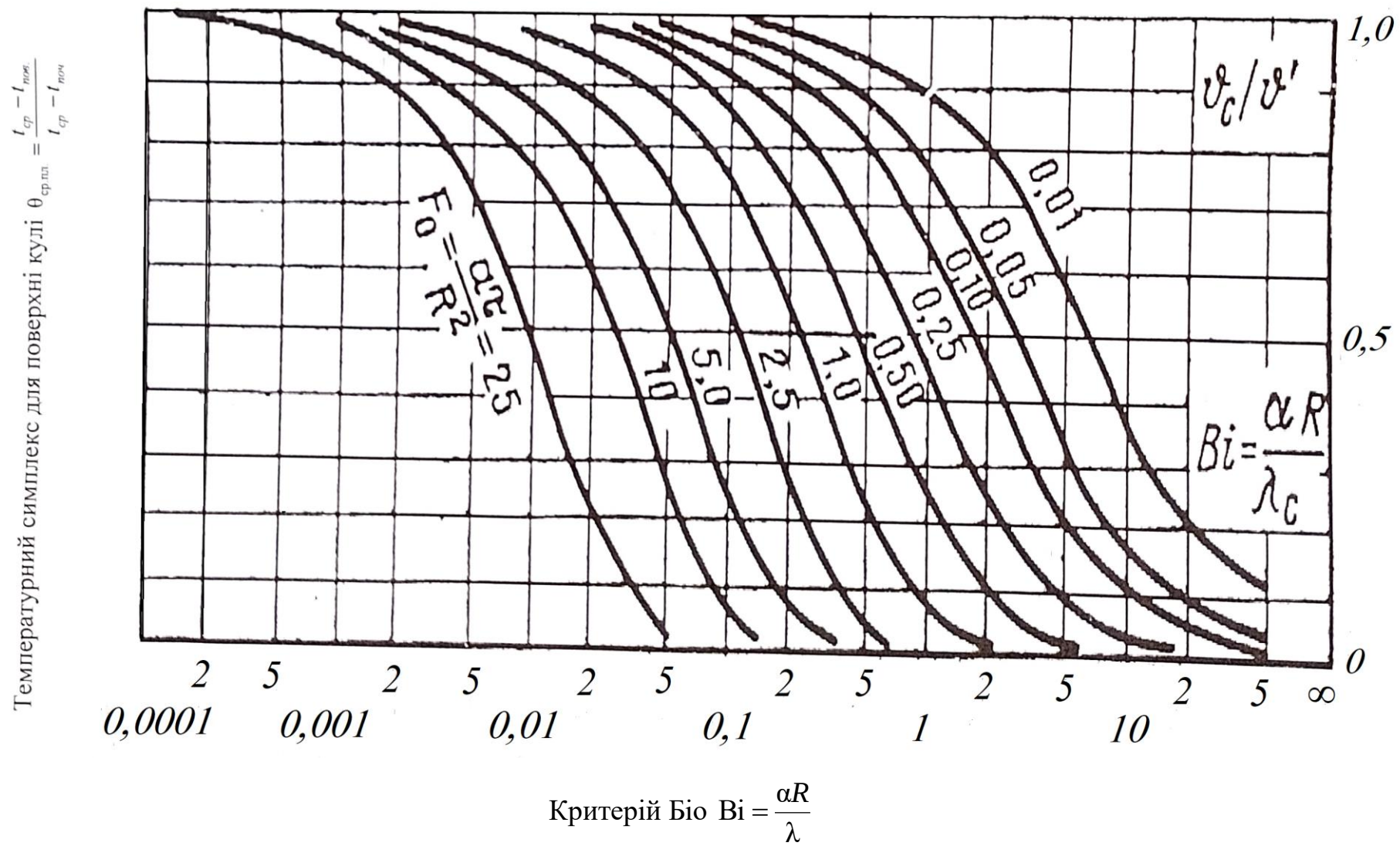


Рисунок 1.8 – Графік для розрахунку нагрівання або охолодження поверхні кулі

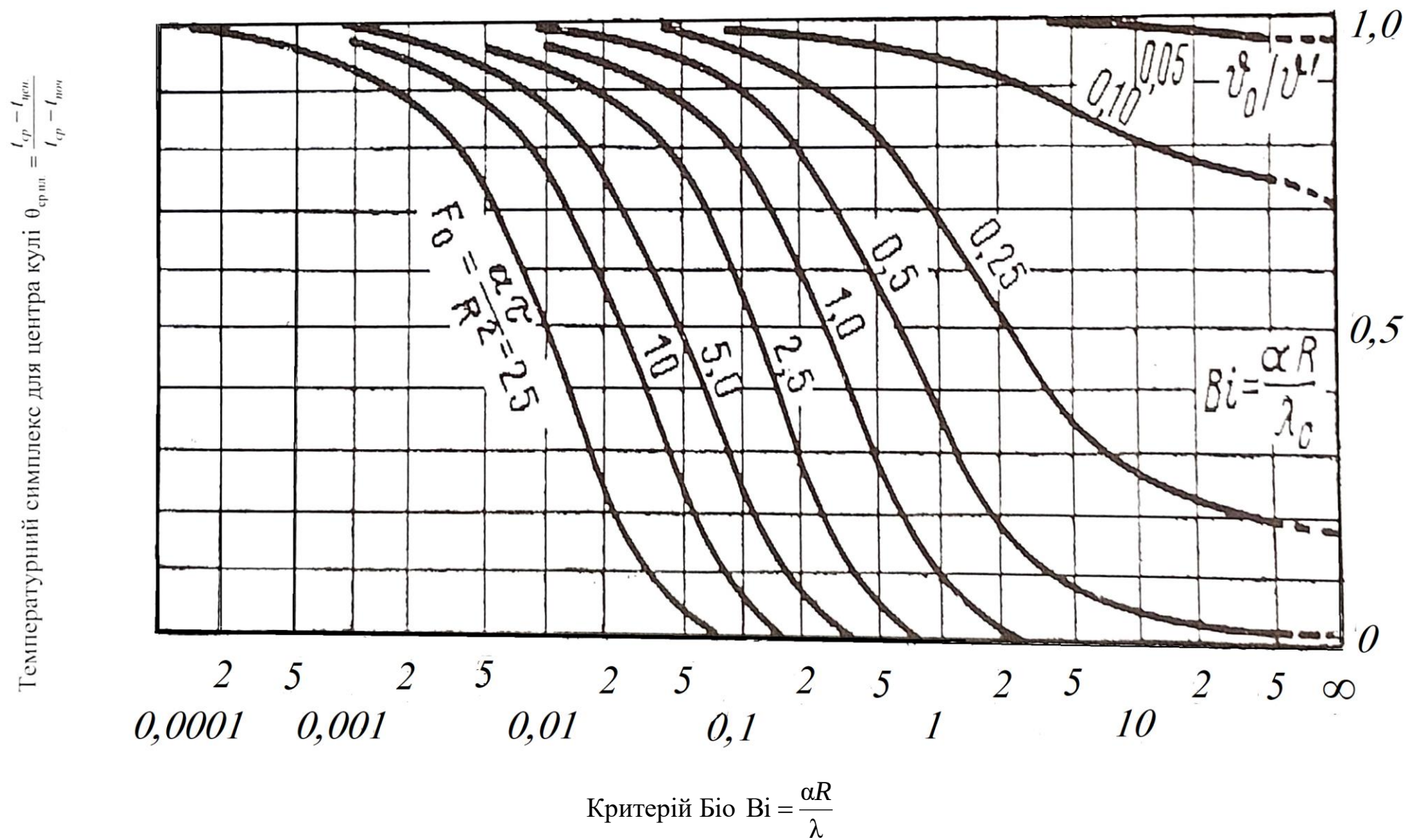


Рисунок 1.9 – Графік для розрахунку нагрівання або охолодження в центрі кулі

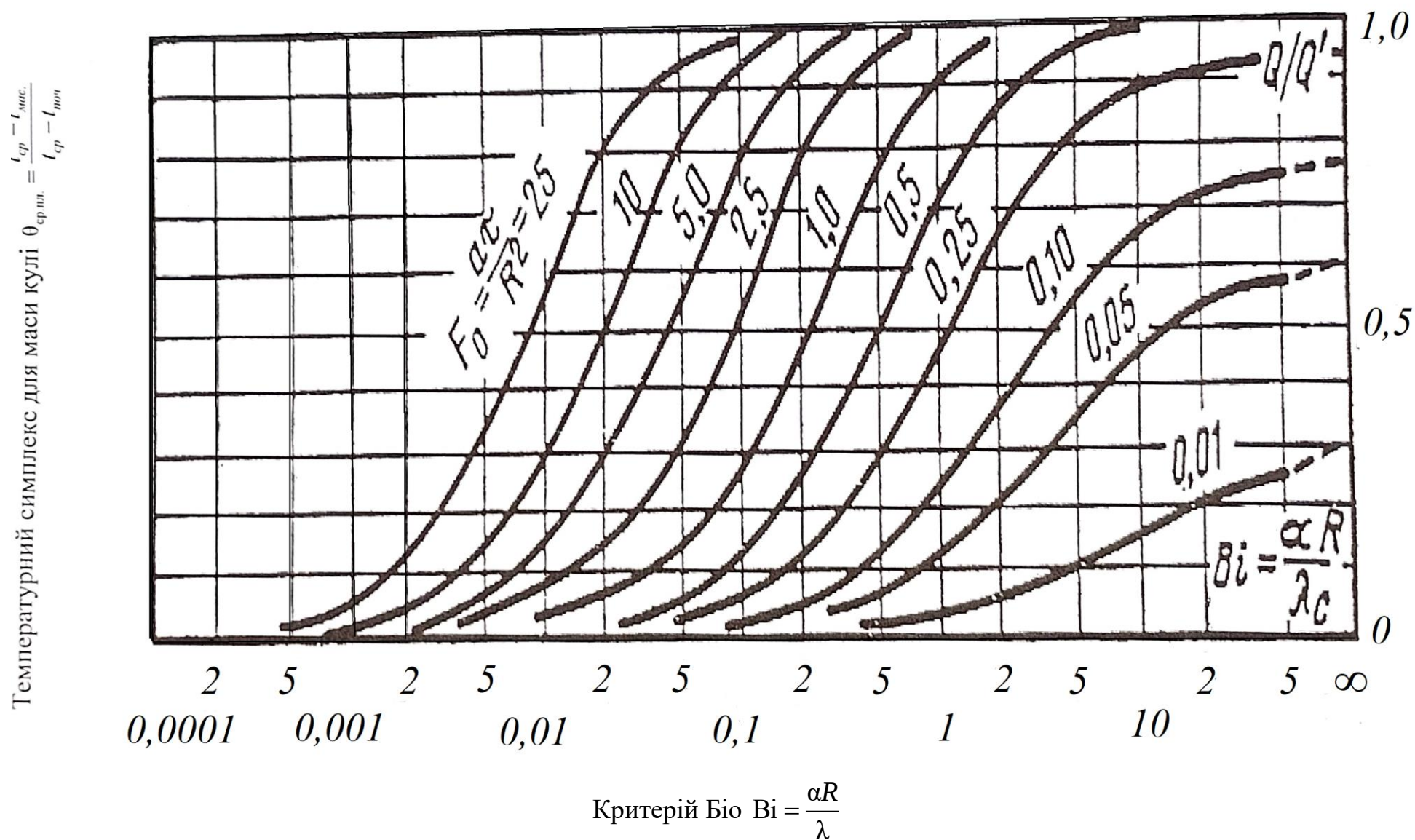


Рисунок 1.10 – Графік для розрахунку нагрівання або охолодження за масою кулі

рівняння Фур'є, яка формулюється так: якщо є декілька функцій $\theta_1 = f_1(x, \tau)$; $\theta_2 = f_2(y, \tau)$ та $\theta_3 = f_3(r, \tau)$, які задовольняють рівняння Фур'є і крайові умови, то добуток цих функцій також їх задовольняє. Дана властивість дійсна тільки при граничних умовах третього роду [11-13].

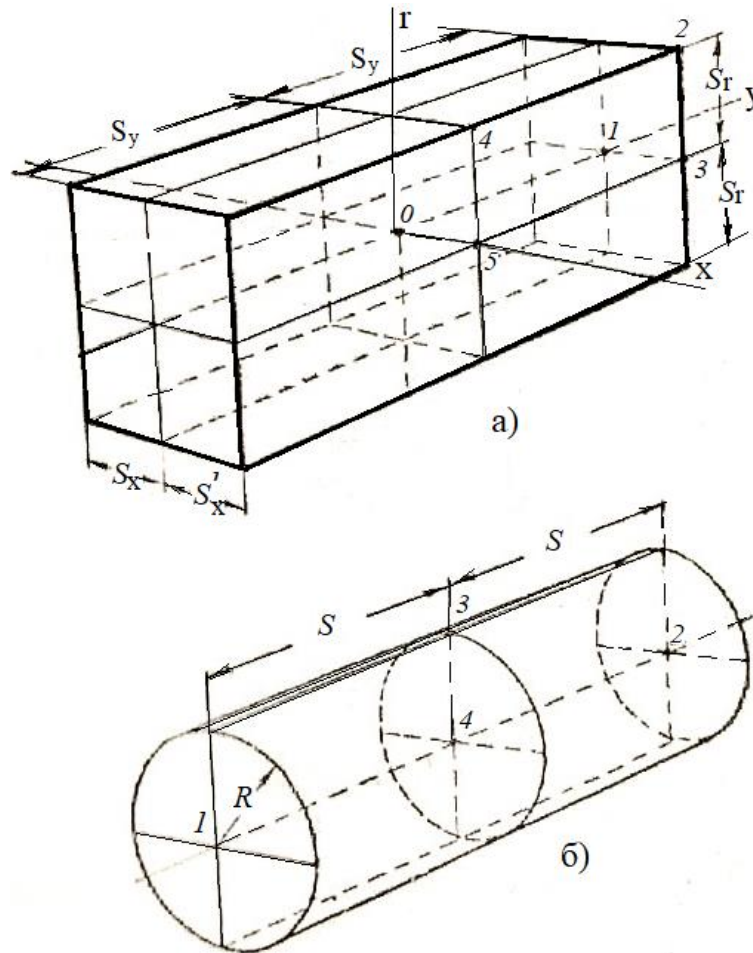


Рисунок 1.11– Паралелепіпед (а) та короткий циліндр (б)

За допомогою даного методу прямокутні паралелепіпеди розглядаються як тіла, які утворені перетином двох взаємноперпендикулярних пластин необмежених розмірів, але скінченної товщини, а короткий циліндр – перетином взаємноперпендикулярних довгого циліндра та пластин скінченної товщини (рис. 1.11).

Температурні симплекси окремих точок для паралелепіпедів та коротких циліндрів дорівнюють добутку температурних симплексів пластин або пластин і циліндрів.

Для паралелепіпеда (рис. 1.11, а) розв'язок має вигляд:

$$\theta_{(x,y,r,\tau)} = \theta_{(x,\tau)} \theta_{(y,\tau)} \theta_{(r,\tau)}; \quad (1.31)$$

а для коротких циліндрів (рис. 1.11,б) розв'язок буде мати наступний вигляд:

$$\theta_{(R,S,\tau)} = \theta_{(R,\tau)} \theta_{(S,\tau)}. \quad (1.32)$$

Для окремих, найбільш характерних точок паралелепіпеда, отримують такі розрахункові формули, які мають наступний вигляд [11-13]:

$$\theta_1 = \theta_{\text{пов.}y} \theta_{\text{ср.пл.}x} \theta_{\text{ср.пл.}z} \quad (1.33)$$

$$\theta_2 = \theta_{\text{пов.}y} \theta_{\text{пов.}x} \theta_{\text{пов.}z} \quad (1.34)$$

$$\theta_3 = \theta_{\text{пов.}y} \theta_{\text{пов.}x} \theta_{\text{ср.пл.}z} \quad (1.35)$$

$$\theta_4 = \theta_{\text{ср.пл.}y} \theta_{\text{пов.}x} \theta_{\text{пов.}z} \quad (1.36)$$

$$\theta_5 = \theta_{\text{ср.пл.}y} \theta_{\text{пов.}x} \theta_{\text{ср.пл.}z} \quad (1.37)$$

$$\theta_6 = \theta_{\text{ср.пл.}y} \theta_{\text{ср.пл.}x} \theta_{\text{ср.пл.}z} \quad (1.38)$$

$$\theta_{\text{мас}} = \theta_{\text{мас.}y} \theta_{\text{мас.}x} \theta_{\text{мас.}z} \quad (1.39)$$

де $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$ – температурні симплекси 1,2,...,6, тобто $\theta_1 = \frac{t_{\text{ср}} - t_1}{t_{\text{ср}} - t_{\text{поч}}}$;

$$\theta_{21} = \frac{t_{\text{ср}} - t_2}{t_{\text{ср}} - t_{\text{поч}}} \text{ і т.д.};$$

$\theta_{\text{ср.пл.}}, \theta_{\text{пов.}}, \theta_{\text{мас}}$ – температурні симплекси пластин, які мають товщину $2S_x, 2S_y, 2S_z$.

Для коротких циліндрів (рис. 1.11б) загальний розв'язок записується так:

$$\theta_{[R,S,\tau]} = \theta_{(R,\tau)} \theta_{(S,\tau)}. \quad (1.40)$$

Для окремих точок розрахункові рівняння будуть мати наступний вигляд:

$$\theta_1 = \theta_{\text{пов.пл.}} \theta_{\text{пов.цил.}}; \quad (1.41)$$

$$\theta_2 = \theta_{\text{пов.цил.}} \theta_{\text{осі.цил.}}; \quad (1.42)$$

$$\theta_3 = \theta_{\text{пов.цил.}} \theta_{\text{ср.пл.}}; \quad (1.43)$$

$$\theta_4 = \theta_{\text{ср.пл.}} \theta_{\text{осі.цил.}}; \quad (1.44)$$

$$\theta_{\text{мас}} = \theta_{\text{мас.пл.}} \theta_{\text{мас.цил.}}, \quad (1.45)$$

де θ_1, θ_2 і т.д. – температурні симплекси окремих точок циліндра;

$\theta_{\text{пов.пл.}}, \theta_{\text{ср.пл.}}, \theta_{\text{мас.пл.}}$ – температурні симплекси пластини;

$\theta_{\text{пов.цил.}}, \theta_{\text{осі.цил.}}, \theta_{\text{мас.цил.}}$ – температурні симплекси циліндра.

Для розрахунку нагрівання довгої квадратної призми були побудовані графіки, які зображені на рис. 1.12-1.15. Дані графіки побудовані для призми, що має сторону квадрата, а оскільки нагрівання всебічне, то у критерії Біо та Фур'є слід вводити половину товщини призми, а саме S [4, 11-13, 17].

1.2.7. Метод кінцевих різниць. Всі наведені методи розрахунку температурних полів різних тіл були одержані в тому припущенні, що λ, c, ρ і a не змінюються при зміні температури [4, 14, 22]. В процесі нагрівання металів λ і c змінюються в 1,5-2 рази, а a – навіть і більше. Розв'язок диференціального рівняння теплопровідності з урахуванням зміни вказаних величин поки що не виведений. У випадках, коли температура печі змінюється за часом, або за її довжиною, розрахунок ведеться по дільницях. В межах кожної дільниці приймається температура печі сталою, але це все дуже ускладнює і, навіть, часто унеможлиблює розрахунки. При початковому розподілі температур, який відрізняється від прийнятого раніше, треба вводити у розрахунок середню початкову температуру, що також зменшує точність обчислень. У метода кінцевих різниць немає більшості таких недоліків, тому, що в ньому нескінченно малі прирости температури замінені скінченними [4, 14, 22].

Для розгляду пропонується плоска необмежена стінка. Для одновимірного теплового потоку диференціальне рівняння має вигляд, наведений у формулі 1.1. Уявімо дане рівняння в кінцевих різницях. Для цього поділимо плиту на шари однакової товщини Δx (рис. 1.16). Замінімо безперервну криву розподілу температури у плиті $f(x)$ ламаною лінією.

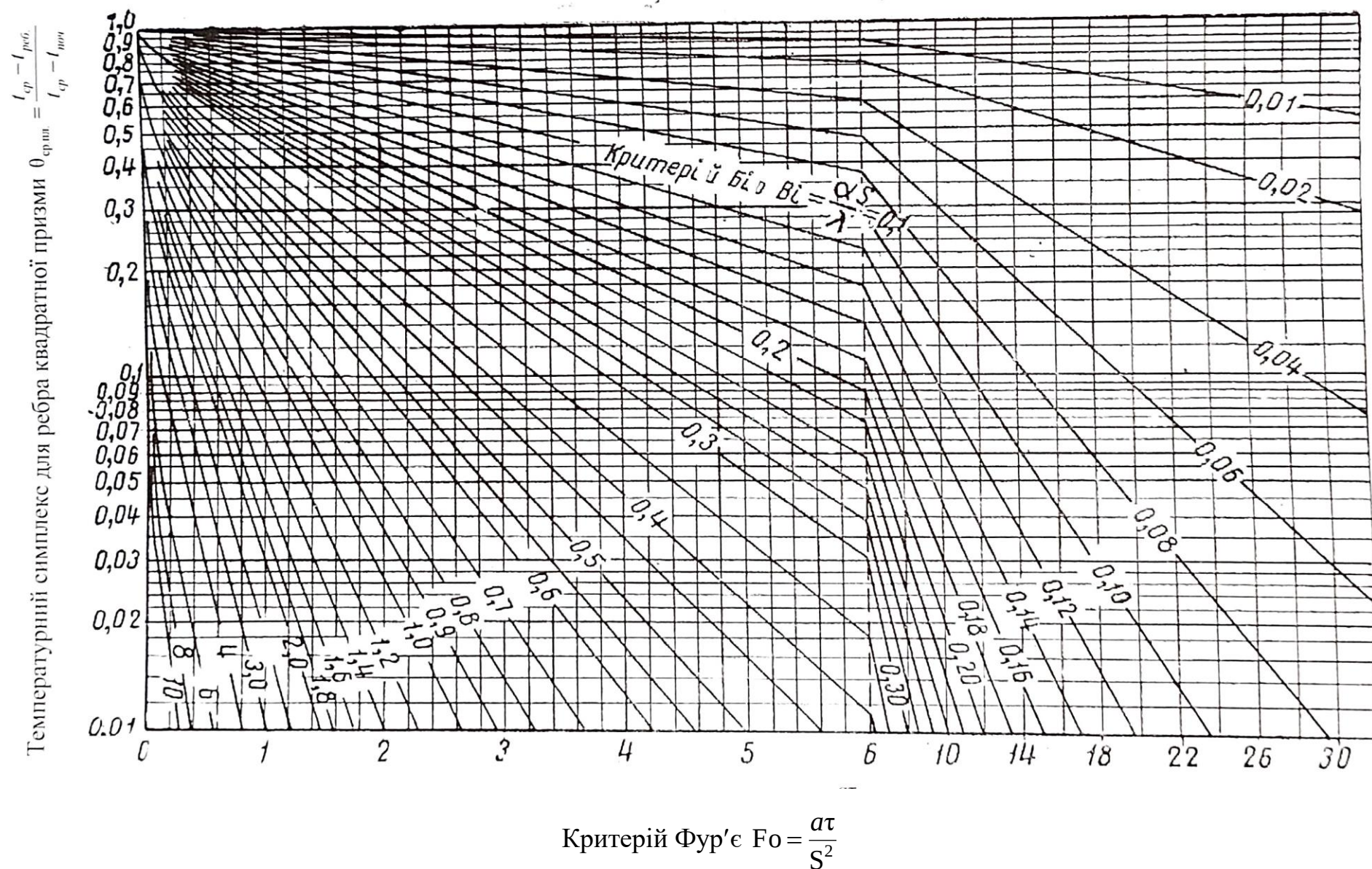


Рисунок 1.12 – Графік для розрахунку нагрівання або охолодження ребра довгої квадратної призми

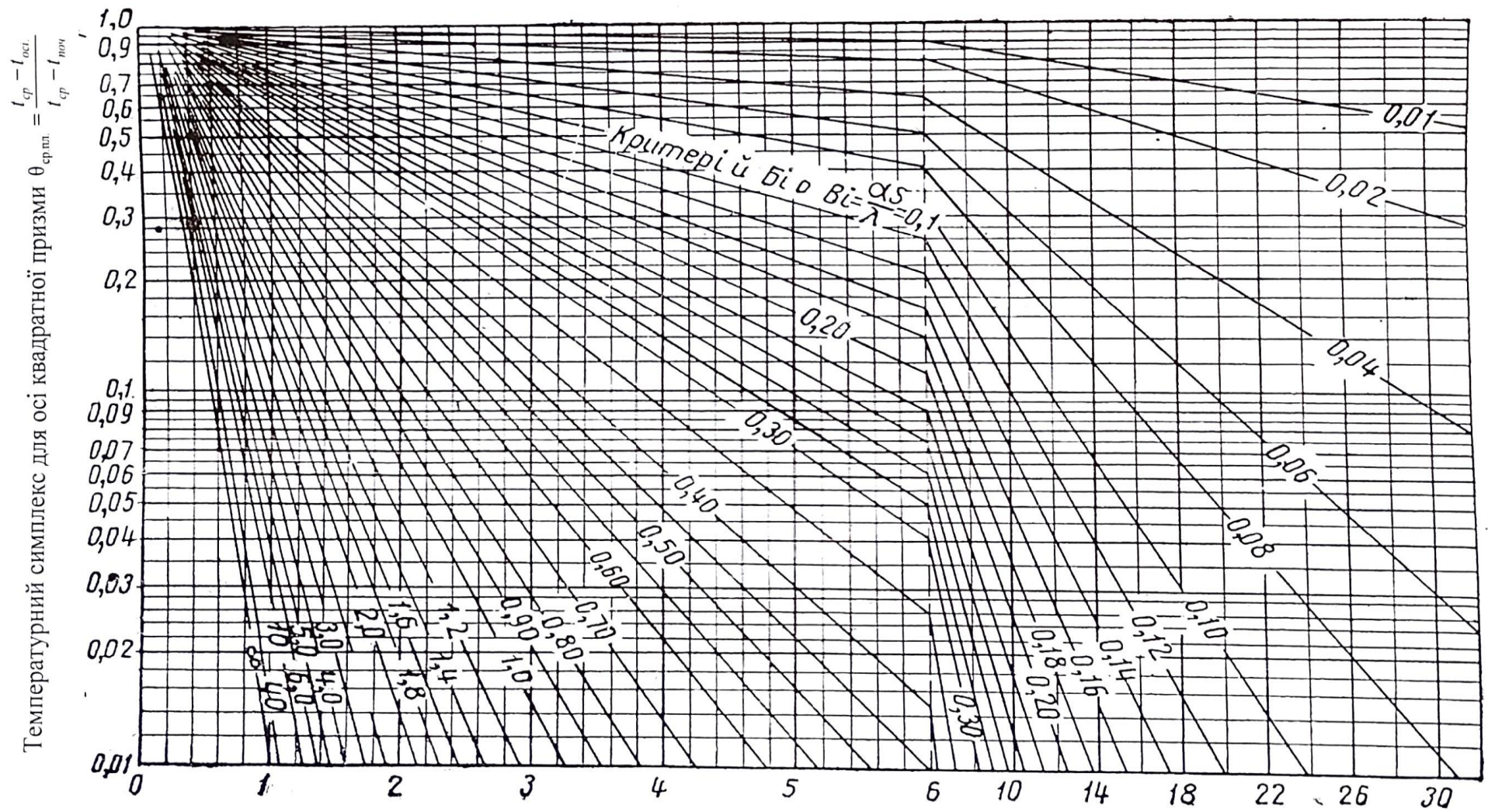


Рисунок 1.13 – Графік для розрахунку нагрівання або охолодження осі довгої квадратної призми

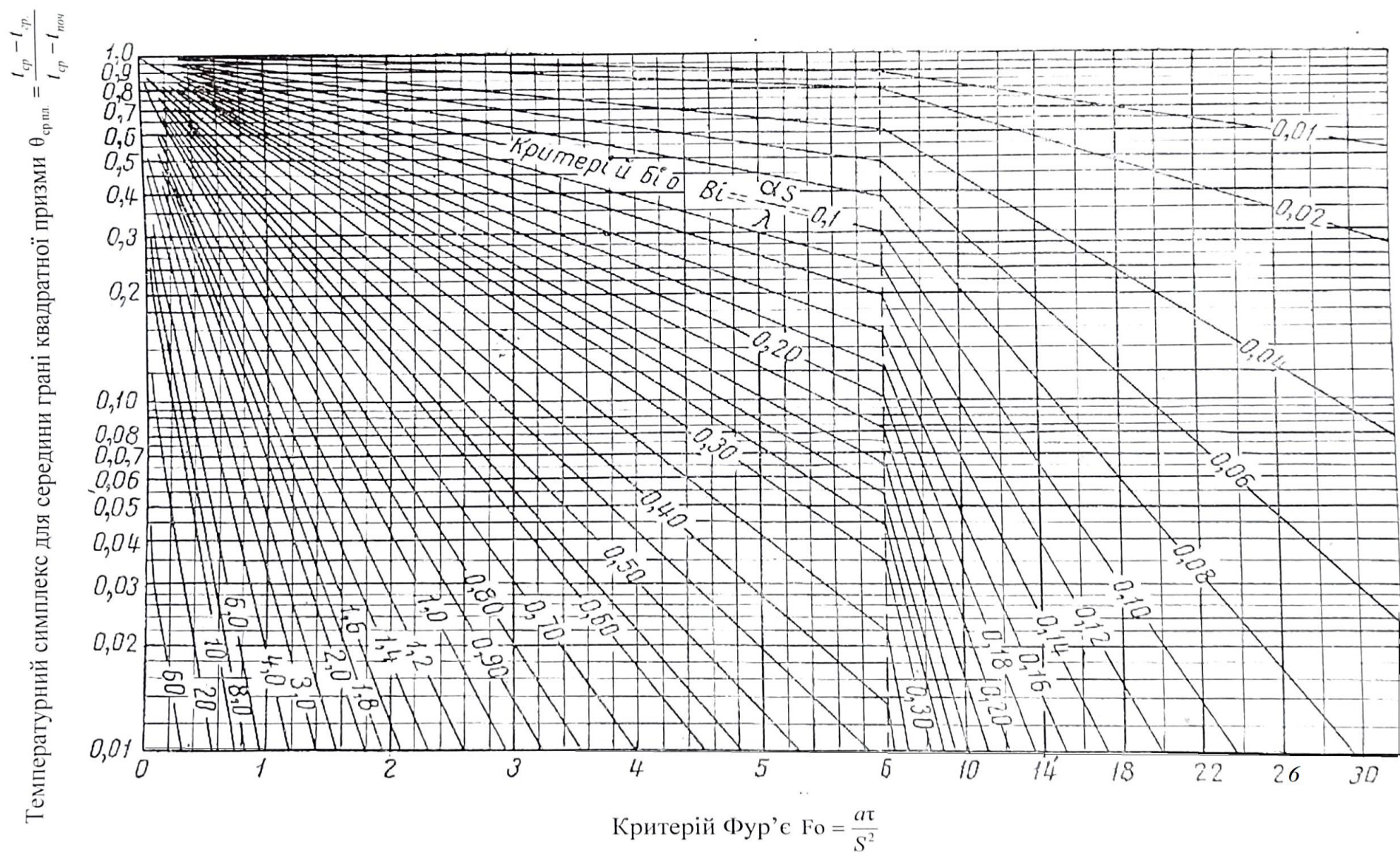


Рисунок 1.14 – Графік для розрахунку нагрівання або охолодження середини грані довгої квадратної призми

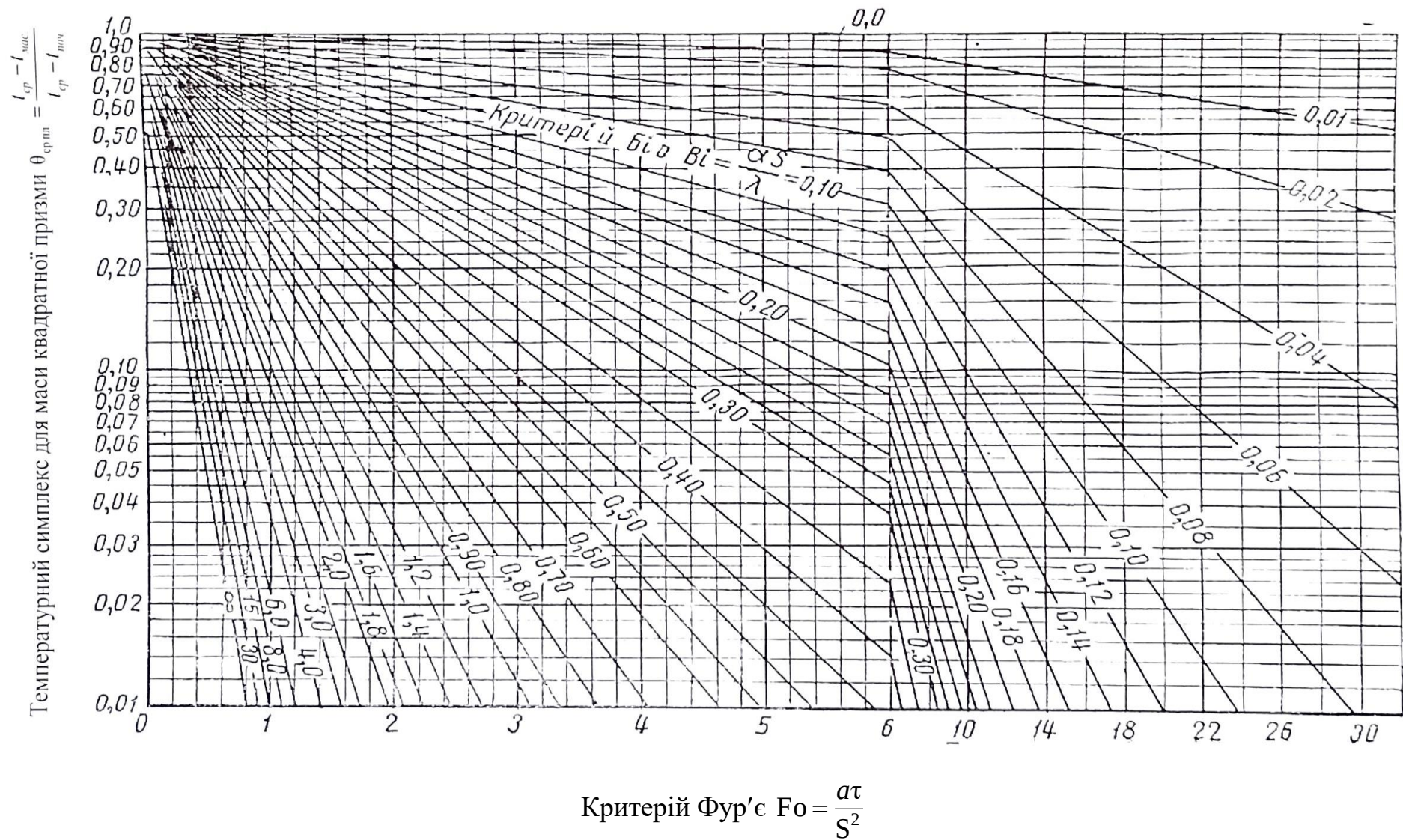


Рисунок 1.15 – Графік для розрахунку нагрівання або охолодження маси довгої квадратної призми

Уявімо, що час τ змінюється дискретно на величину $\Delta\tau$. В загальному випадку в деякий момент часу τ_m температура у шарі n має значення $t_{n,m}$ (причому $\Delta\tau = \tau_{m+1} - \tau_m$).

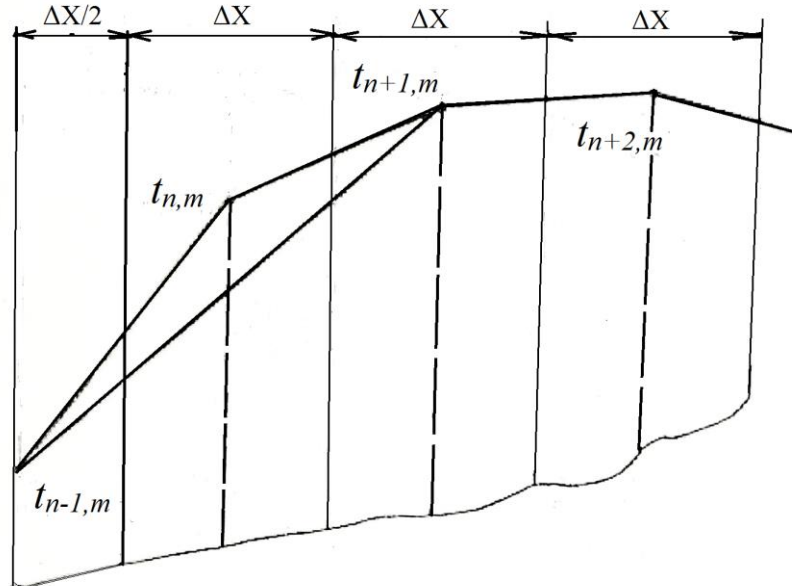


Рисунок 1.16 – Графічне визначення температурного поля пластини

Як видно з рис. 1.16, температурна крива в шарі в момент часу τ_m має два нахили, відповідно до двох похідних в кінцевих різницях:

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)_+ = \frac{t_{n+1,m} - t_{n,m}}{\Delta x}; \quad (1.46)$$

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)_- = \frac{t_{n,m} - t_{n-1,m}}{\Delta x}. \quad (1.47)$$

Друга похідна від t до x в кінцевих різницях має наступний вигляд:

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)_+ - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)_- \right] = \frac{t_{n+1,m} + t_{n-1,m} - 2t_{n,m}}{\Delta x^2}. \quad (1.48)$$

Знак «+» позначає напрямок підходу до шару справа, а «-» – зліва.

Похідна за часом в кінцевих різницях для шару дорівнює:

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{t_{n,m+1} - t_{n,m}}{\Delta \tau}, \quad (1.49)$$

Отже диференціальне рівняння в кінцевих різницях матиме наступний вигляд [4, 14, 22]:

$$\frac{\Delta t_{n,m+1} - t_{n,m}}{\Delta \tau} = a \frac{t_{n+1,m} + t_{n-1,m} - 2t_{n,m}}{\Delta x^2}, \quad (1.50)$$

або

$$t_{n,m+1} - t_{n,m} = \frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2} \left(\frac{t_{n+1,m} + t_{n-1,m}}{2} - t_{n,m} \right). \quad (1.51)$$

Якщо вибирати Δx і τ такими, щоб величина $2a\Delta\tau/\Delta x^2$ дорівнювала одиниці, тоді

$$t_{n,m+1} = \frac{1}{2}(t_{n+1,m} + t_{n-1,m}). \quad (1.52)$$

Отже температура шару в наступний момент часу дорівнює півсумі температур сусідніх шарів за попередній момент часу. При графічній побудові температура шару в момент часу $m + 1$ знаходиться шляхом перетину лінії шару (рис. 1.16), пунктирна лінія з прямою, яка поєднує точки $t_{n,m+1}$ та $t_{n-1,m}$ [4, 14, 22].

1.2.8. Нагрівання «тонких» тіл.

Наприклад, приймаємо для теплообміну закон Ньютона-Ріхмана, тоді розв'язок його буде мати наступний вигляд [4,15,16]:

$$\tau_{\text{ід}} = \frac{Mc}{\alpha F} \ln \frac{t_{\text{п}} - t_{\text{в.п}}}{t_{\text{п}} - t_{\text{в.к}}}, \quad (1.53)$$

де M і c – маса в кг і теплоємність у Дж/кг·К, відповідно;

F – поверхня теплообміну тіла, м²;

$t_{\text{п}}$, $t_{\text{в.п}}$ і $t_{\text{в.к}}$ – температура печі, початкова і кінцева температури виливка, °С.

Наприклад, температури $t_{\text{п}}$ і $t_{\text{в.п}}$ приймаються, що вони є сталими. Після припущення, що можна представити масу тіла як добуток його ρ на V , то приведенне рівняння (1.53) вже матиме такий наступний вигляд [4,15,16]:

$$\tau_{\text{ід}} = \frac{\rho S_{\text{пр}} c}{\alpha} \ln \frac{t_{\text{п}} - t_{\text{в.п}}}{t_{\text{п}} - t_{\text{в.к}}}, \quad (1.54)$$

де $s_{\text{пр}} = V/F$ – приведена товщина тіла, м.

Наприклад, для необмеженої пластини при нагріванні $s_{\text{пр}}$ буде дорівнювати її товщині, для необмеженого циліндра $s_{\text{пр}} = R_{\text{ц}}/2$; де $R_{\text{ц}}$ – радіус циліндра, а для кулі вона дорівнює $s_{\text{пр}} = R_{\text{к}}/3$ [17].

Наприклад, у випадку, коли вважається, що теплообмін здійснюється згідно із законом Стефана-Больцмана, то одержуємо рівняння Старка-Семікіна (див. додаток А) [4.15,16]:

$$\tau_{\text{ід}} = \frac{\rho s_{\text{пр}} c}{C_{\text{пр}} T_{\text{п}}^3} \left\{ 0,25 \ln \frac{(1 + T_{\text{в.к}}/T_{\text{п}})(1 - T_{\text{в.п}}/T_{\text{п}})}{(1 - T_{\text{в.к}}/T_{\text{п}})(1 + T_{\text{в.п}}/T_{\text{п}})} + 0,5 [\arctg(T/T_{\text{п}}) - \arctg(T_{\text{в.п}}/T_{\text{п}})] \right\}, \quad (1.55)$$

де $C_{\text{пр}}$ – константа випромінювання в системі «кладка-метал», Вт/м²·К⁴;

$T_{\text{п}}$, $T_{\text{в.п}}$ і $T_{\text{в.к}}$ – ті ж самі температури, що і в рівняннях (1.53) та (1.54), тільки в кельвінах.

До компактної форми вони приводяться завдяки множенню і діленню на $s_{\text{пр}} \lambda$ правих частин рівнянь (1.54) та (1.55):

$$\ln \theta = \text{Bi} \cdot \text{Fo}; \quad (1.56)$$

$$\psi = \text{Fo} \cdot \text{Sc}. \quad (1.57)$$

До рівнянь (1.56) і (1.57) входять числа Біо і Фур'є, а також безрозмірні величини [4, 14, 22]:

- число Старка

$$\text{Sc} = C T_{\text{п}}^3 s_{\text{пр}} / \lambda; \quad (1.58)$$

- безрозмірна функція (див. додаток В)

$$\psi = 0,25 \ln \frac{(1 + T_{\text{в.к}}/T_{\text{п}})(1 - T_{\text{в.п}}/T_{\text{п}})}{(1 - T_{\text{в.к}}/T_{\text{п}})(1 + T_{\text{в.п}}/T_{\text{п}})} + 0,5 [\arctg(T/T_{\text{п}}) - \arctg(T_{\text{в.п}}/T_{\text{п}})]. \quad (1.59)$$

1.2.9. Наближений метод визначення дійсного часу нагрівання вилівка в залежності від ідеального часу

Наприклад, час визначається за таким виразом:

$$\tau = m\tau_{\text{ід}}, \quad (1.60)$$

де m – безрозмірний коефіцієнт, його визначають з наступного виразу:

$$m = 1 + kBi, \quad (1.61)$$

де k – параметр, залежить від форми тіла.

До недоліку цього способу відноситься те, що параметр m знайдено лише для вищезазначених тіл простої форми (див. табл. 2.1).

1.3. Висновки

1. Існуючі аналітичні розв'язки задачі теплопровідності мало придатні для практичного використання, тому що вони відносяться лише до тіл простої форми, таких як необмежена пластина, циліндр, куля.

2. Графічні зображення аналітичних розв'язків також відносяться до тих самих найпростіших тіл і сприяють суб'єктивним похибкам.

3. Емпіричні формули для розрахунку нестационарної теплопровідності також відносяться до тіл простої форми і не можуть бути придатними для практичного використання для випадку тіл складної форми типу виливків.

4. Важливою проблемою є розробка простого і практично прийнятного методу розрахунку нестационарної теплопровідності для тіл будь-якої складної форми типу виливків.

РОЗДІЛ 2. МЕТОД РОЗРАХУНКУ НАГРІВАННЯ ВИЛИВКІВ

Метою даної роботи є розроблення спрощеного для практичного застосування методу розрахунку нагрівання виливків нестационарної теплопровідності для масивних тіл складної форми. При цьому виконано наступне: розраховується ідеальний час нагрівання тіла $\tau_{\text{ід}}$ за умови, що $Bi \rightarrow 0$. Відповідно до рівняння (1.9) дана умова виконується при $\lambda \rightarrow \infty$, та при $\alpha \rightarrow \infty$ і $S \rightarrow \infty$. Це означає, що відсутній тепловий опір тіла, тому теплота може миттєво і рівномірно засвоюватися усім тілом при вирівнюванні температури. Тому ці умови значно спрощують аналітичний розв'язок задачі за виразами (1.53) та (1.54).

2.1. Виведення співвідношення $m = 1 + kBi$

За виразом (1.60) визначається дійсний час нагрівання тіла, а безрозмірний коефіцієнт m знаходять за формулою (1.61). Тому виведемо співвідношення для визначення коефіцієнта m та перевіримо його на достовірність.

Параметр m залежить від λ : при $\lambda \rightarrow \infty$ ($Bi \rightarrow 0$) величина $\tau = \tau_{\text{ід}}$, $m = 1$. При зменшенні λ , а збільшенні Bi в тілі під час нагрівання утворюється перепад температур, причому температура на поверхні буде більшою за температуру в середині тіла, а тому, густина теплового потоку буде зменшуватись від гарячого теплоносія до поверхні тіла, яке нагрівається, а це призведе до збільшення часу нагрівання і, відповідно, до збільшення m .

Отже коефіцієнт m повинен бути зростаючою функцією Bi , і при $Bi \rightarrow 0$ $m \rightarrow 1$, а при збільшенні Bi параметр m має зростати. Характер залежності $m(Bi)$ не відомий, тому дану залежність можна представити у вигляді полінома деякого ступеня:

$$m = 1 + kBi + lBi^2 + \dots \quad (2.1)$$

Найпростішим є поліном першого ступеня – рівняння (1.60). В такому вигляді залежність $m(Bi)$ зустрічається в літературі. В даній роботі параметр m розраховується за наступним виразом:

$$m = Bi \cdot Fo / \ln \theta, \quad (2.2)$$

дана формула є слідством співвідношень (1.56) та (1.60).

2.2. Методика обробки літературних даних

Цей метод полягає в наступному. Наприклад, за таблицями Русселя побудовані графіки залежності параметра m від критерію Біо і Фур'є (рис. 2.1 і 2.3) і при цьому визначено параметр k . Ці таблиці призначені лише для тіл простої форми, такі як пластина і циліндр, але все ж таки вони відрізняються великою точністю і більшою повнотою у порівнянні з раніше опублікованими таблицями. В першу чергу розраховуємо середнє значення θ для всіх табличних значень Фур'є і Біо, а далі для кожного θ визначаємо параметр m за наступною формулою:

$$m = \frac{FoBi}{\ln \theta}, \quad (2.3)$$

параметр k визначаємо за таким виразом:

$$k = \frac{m-1}{Bi}, \quad (2.4)$$

потім будуємо графіки залежності параметра m від числа Біо (рис. 2.2 і 2.4). Вона починається в точці з координатами (0; 1). Середнє значення параметра k залежить від кута нахилу прямої до горизонталі і знаходиться за формулою:

$$k = \operatorname{tg} \alpha \frac{a}{b}. \quad (2.5)$$

Дана особливість цього методу полягає в тому, що замість товщини плити і радіусів циліндра та кулі в якості характеристичного розміру використовується приведений радіус, що дало можливість враховувати всі

виливки, тому, можна визначати час нагрівання виливків будь-якої форми і складності.

2.3. Результати обробки літературних даних

За результатами розрахунків (див. додаток С) будуємо графіки залежності Bi і $Фур'$ від параметра m (рис. 2.1-2.4).

Для пластини середнє значення параметра k :

$$k = \frac{3,65}{10} = 0,365. \quad (2.6)$$

Для циліндра середнє значення параметра k :

$$k = \frac{4,1-1}{10} = 0,31. \quad (2.7)$$

2.4. Визначення коефіцієнта пропорційності k

Для циліндра і кулі числа Bi і Fo , які визначаються при використанні їх радіусів (вони нижче позначаються штрихами) а числа, що одержуються при використанні приведених товщин тіл (позначені без штрихів) пов'язані між собою такими співвідношеннями:

- для циліндра

$$Bi = Bi'/2, \quad Fo = 4Fo'; \quad (2.8)$$

- для кулі

$$Bi = Bi'/3, \quad Fo = 9Fo'; \quad (2.9)$$

- для пластини $S_{пр}$ дорівнює товщині пластини, тому

$$Bi = Bi', \quad Fo = Fo'; \quad (2.10)$$

Визначимо коефіцієнт k з наступних співвідношень:

- для циліндра

$$k = 2(2Bi' \cdot Fo'/\ln\theta - 1)/Bi'; \quad (2.11)$$

- для кулі

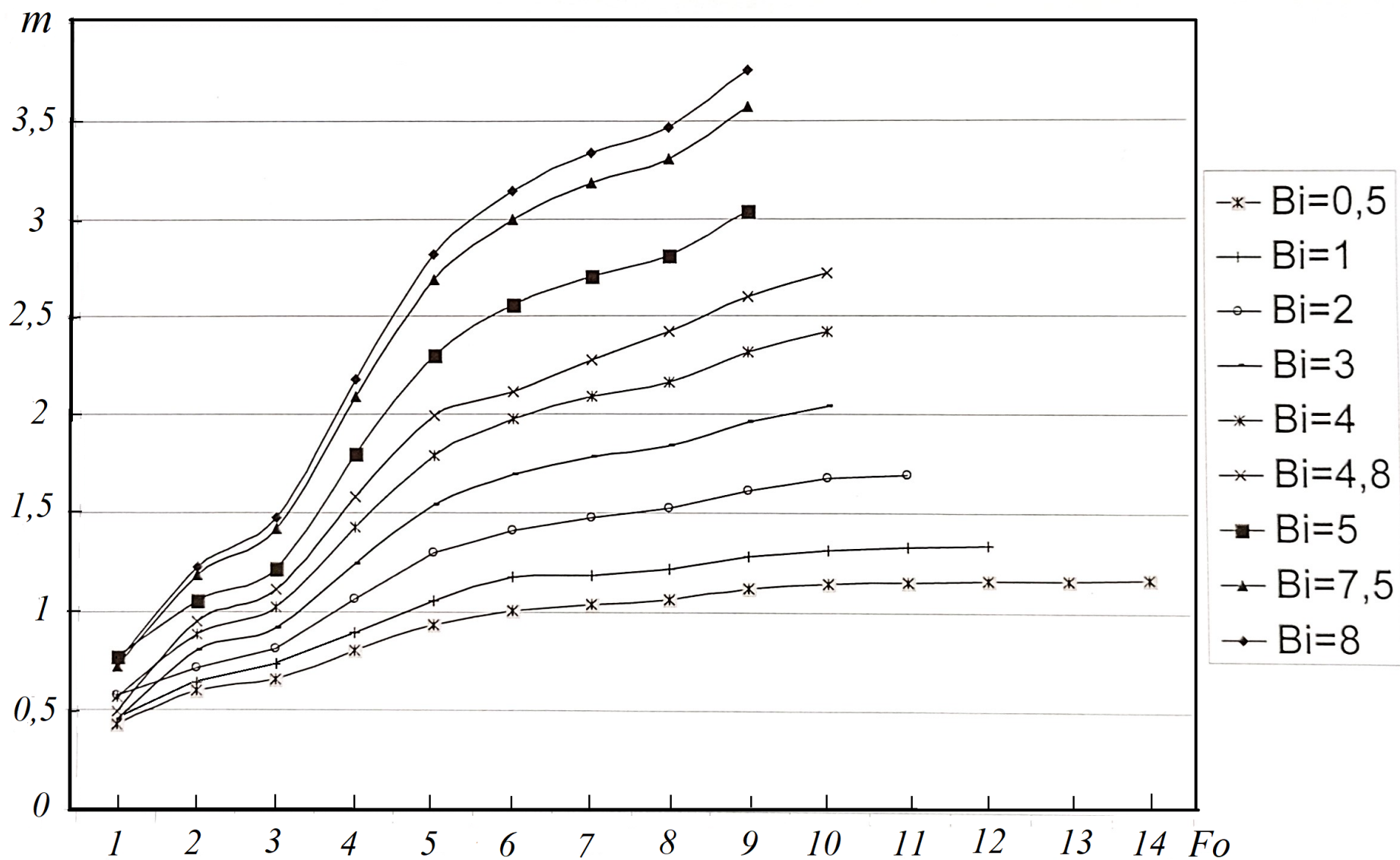


Рисунок 2.1 – Залежність параметра m від критеріїв Біо і Фур'є для пластини, одностороннє нагрівання

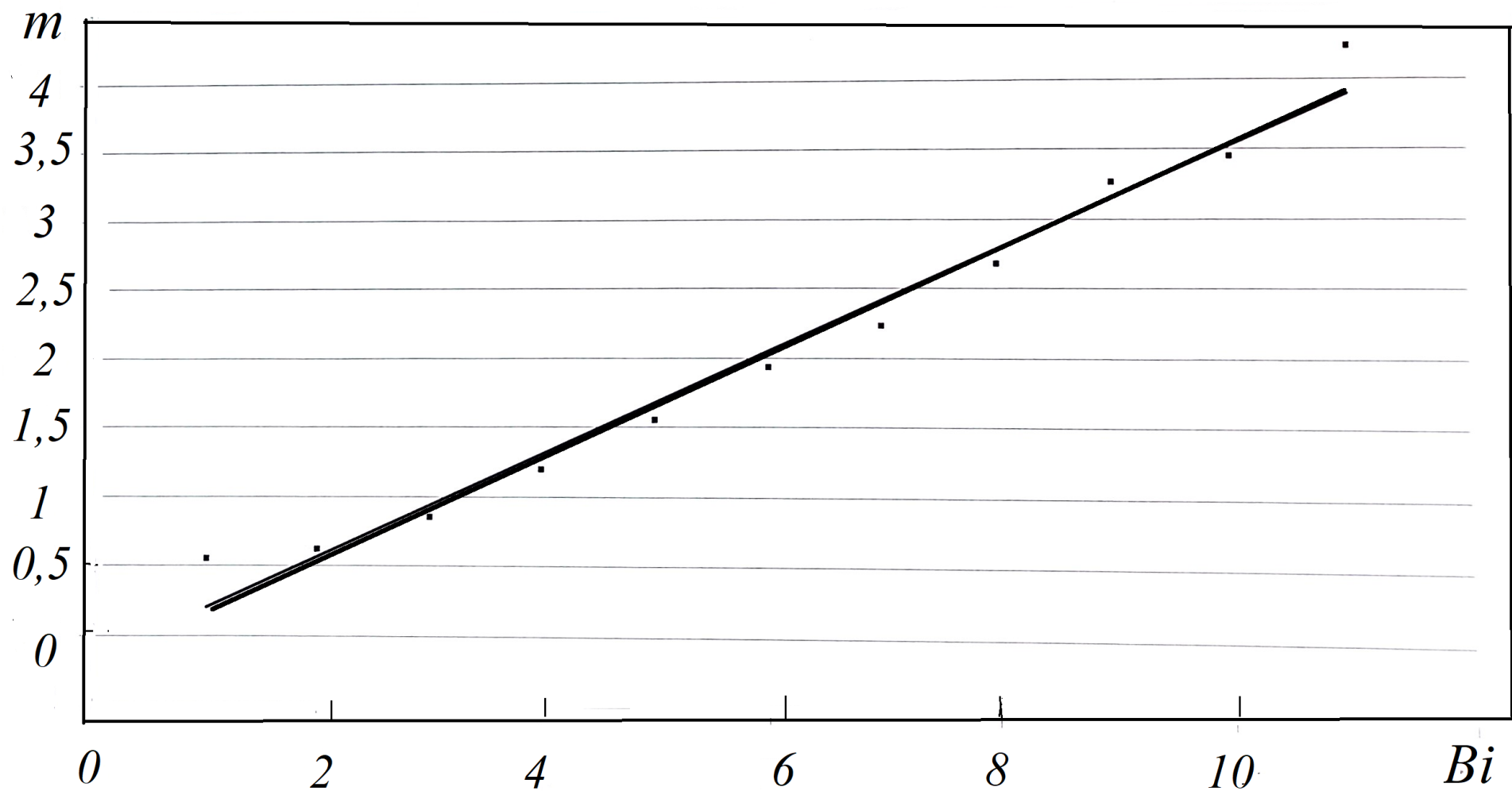


Рисунок 2.2 – Залежності параметра m від числа Біо для визначення параметра k для пластини

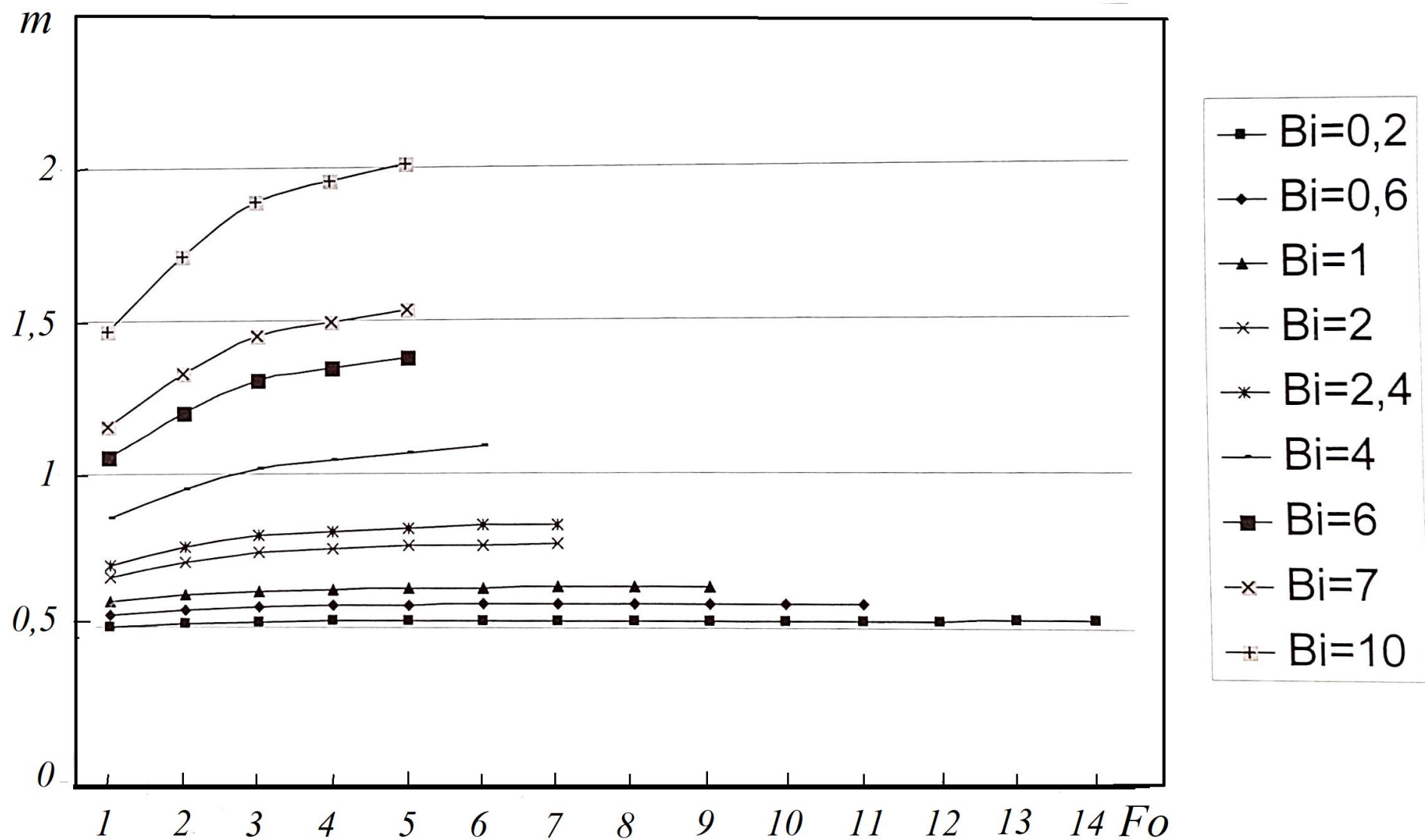


Рисунок 2.3 – Залежність параметра m від критеріїв Біо і Фур'є для циліндра

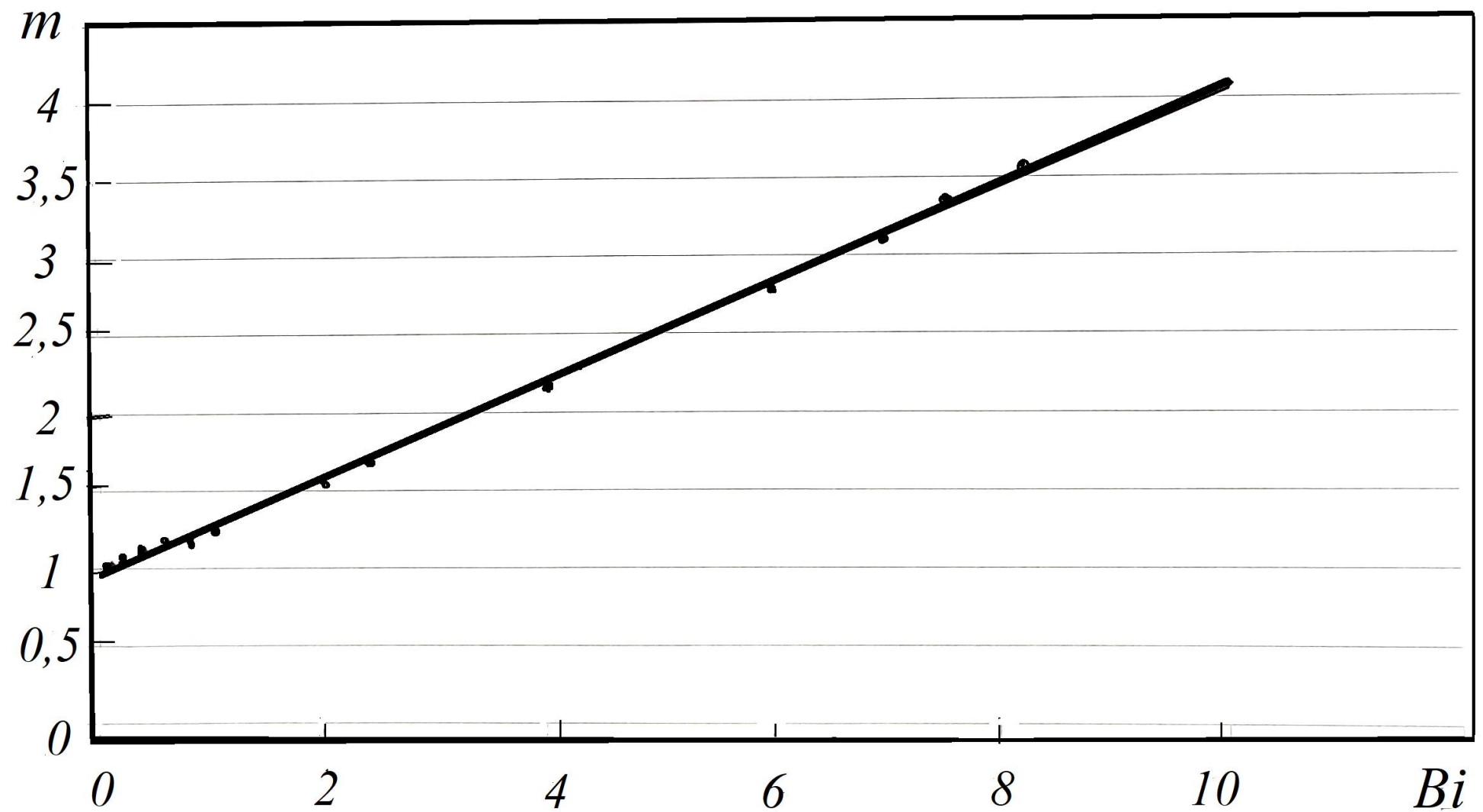


Рисунок 2.4 – Залежності параметра m від числа Біо для визначення параметра k для циліндра

$$k = 3(3Bi' \cdot Fo' / \ln \theta - 1) / Bi'; \quad (2.12)$$

У випадку пластини немає різниці між числами Біо і Фур'є із штрихами і без штрихів. Величину k можна розрахувати за наступною формулою:

$$k = (Bi' \cdot Fo' / \ln \theta - 1) / Bi'; \quad (2.13)$$

Результати розрахунків коефіцієнта k за формулами (2.11-2.13) наведені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Результати розрахунку параметра k за формулами (2.11-2.13)

Форма тіла	Значення величини k				
	за літературними даними		одержано в даній роботі при обробці даних		середнє значення
	[4]	[18]	[18]	[4]	
Пластина	0,37	0,32	0,38	0,37	0,36
Циліндр	0,59	0,51	0,45	0,53	0,52
Куля	0,74	0,58	0,56	-	0,62

Виконуючи аналіз табл. 2.1 видно, що для кожної наведеної в ній форми тіла значення величини k не дуже великі по відношенню до середнього. В напрямку від пластини до кулі значення k дещо збільшуються. Значення k для тіл різної форми не суттєво відрізняються одне від одного і в середньому дорівнюють 0,5.

Вирази (1.54) і (1.55) у відповідності з їх виведенням справедливі для тіл будь-якої форми, можемо очікувати, що і вираз (1.9) буде справедливим, принаймні приблизно, не тільки для розглянутих тіл простої форми, але й для всіх інших тіл більш складної форми, причому для приблизних практичних розрахунків можна прийняти $k = 0,5$.

Згідно з аналізом впливу різних факторів на параметр m було встановлено, що залежність (1.59) є справедливою лише при $Fo > 3$. При зменшенні Fo від 3 до 0 параметр m , незалежно від значення числа Бі, наближається до нуля.

2.5. Висновки

Запропонований метод для розрахунку часу нагрівання виливків складної форми, дуже спрощений у застосуванні. В запропонованому методі використовується приведена товщина виливків для тіл складної форми. Результати розрахунків, одержані за даним методом, добре узгоджуються з експериментальними даними (див. розділ 3.)

РОЗДІЛ 3. ПРИКЛАДИ ПРАКТИЧНОГО ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ

3.1. Розрахунки нагрівання «тонких» тіл

Приклад 1. Розрахувати нагрівання прутка діаметром 30 мм для умов: матеріал – сталь, $t_{\text{п}} = 1220^{\circ}\text{C}$, $t_{\text{к}} = 1160^{\circ}\text{C}$, $t_{\text{o}} = 18^{\circ}\text{C}$, $\rho_{\text{м}} = 7800 \text{ кг/м}^3$, $C_{\text{м}} = 700 \text{ кДж/кг}\cdot\text{К}$, $\alpha_{\text{м}} = 285 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{К}$, $\lambda_{\text{м}} = 20 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$.

Розв'язок. З виразу (1.53) знаходимо ідеальний час нагрівання

$$\tau_{\text{ид}} = \frac{7800 \cdot 0,0075 \cdot 700}{285} \cdot \ln \frac{1220 - 18}{1220 - 1160} = 430 \text{ с} = 7,2 \text{ хв.}$$

Число Біо та параметр m знаходимо з наступних виразів

$$\text{Bi} = \frac{\alpha S_{\text{пр}}}{\lambda} = \frac{285 \cdot 0,0075}{20} = 0,1$$

$$m = 1 + k \cdot \text{Bi} = 1 + 0,5 \cdot 0,1 = 1,05$$

З виразу (1.60) знаходимо час нагрівання

$$\tau = m \cdot \tau_{\text{ид}} = 1,05 \cdot 7,2 = 7,56 \text{ хв.}$$

Експериментальне значення становить $\tau = 7,5 \text{ хв.}$, що є цілком прийнятним для практичних цілей [4].

Приклад 2. Визначити час нагрівання прутка діаметром 30 мм з вуглецевої сталі ($[C] = 0,3\%$; $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$) від температури 18°C до 980°C в печі з температурою 1080°C при $C_{\text{пр}} = 4,07 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2\cdot\text{К}^4$.

Розв'язок. Розрахунок проводимо за формулою (1.55). Для даних умов теплоємність сталі $c = 535 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$ [4, 20], $\psi = 0,957$, $\alpha = 185 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{К}$ [4, 20], $\lambda = 46 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ [4, 21].

Ідеальний час нагрівання

$$\tau_{\text{ид}} = \frac{7800 \cdot 0,0075 \cdot 535}{4,07 \cdot 10^{-8} \cdot 1273^3} \cdot 0,957 = 345 \text{ с} = 5,75 \text{ хв.}$$

Число Біо і параметр m :

$$Bi = \frac{\alpha S_{\text{пр}}}{\lambda} = \frac{185 \cdot 0,0075}{46} = 0,03$$

$$m = 1 + 0,5 \cdot 0,03 = 1,015.$$

Тіло дуже «тонке», тому $\tau = m \cdot \tau_{\text{ід}} = 1,015 \cdot 5,75 = 5,8 \text{ хв.}$

Приклад 3. Розрахувати час нагрівання виливка діаметром 25 мм і необмеженою довжиною із сталі густиною 7800 кг/м^3 , якщо температура в середині печі становить 1220°C , а виливок нагрівається від температури 0°C до 1200°C . Коефіцієнт випромінювання металу $C_{\text{м}} = 3,5 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{K}^4$, газової фази в печі $C_{\text{п}} = 4,56 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{K}^4$, абсолютно чорного тіла $C_0 = 5,7 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{K}^4$, теплоємність тіла $c = 700 \text{ Дж/кг} \cdot \text{K}$. Коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 30 \text{ Вт/мK}$, кутовий коефіцієнт випромінювання з поверхні кладки на поверхню металу $\varphi_{2,1} = 0,4$; $k = 0,5$.

Розв'язок. Приведений коефіцієнт випромінювання в системі «метал-кладка»:

$$C_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{C_{\text{м}}} + \left(\frac{1}{C_{\text{п}}} - \frac{1}{C_0} \right) \varphi_{2,1}} = \frac{1}{\frac{1}{3,5} + \left(\frac{1}{4,56} - \frac{1}{5,7} \right) 0,4} = 3,74 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{K}^4.$$

Середня безрозмірна температура [4]:

$$\theta_{\text{ср}} = \frac{39,18 + 42,6 + 46,58 + 51,2 + 56,3 + 62,2 + 68,8 + 76,3 + 84,6 + 93,9 + 104,1 + 115,4 + 127,8}{13} = 74,55$$

Коефіцієнт тепловіддачі конвекцією:

$$\alpha = C_{\text{пр}} \cdot \theta_{\text{ср}} = 3,74 \cdot 74,55 = 279 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{K}.$$

Ідеальний час нагрівання твердого тіла:

$$\tau_{\text{ід}} = \frac{d \rho c}{4 \alpha} \ln \frac{t_{\text{п}} - t_0}{t_{\text{п}} - t_{\text{к}}} = \frac{0,025 \cdot 7800 \cdot 700}{4 \cdot 279} \ln \frac{1220 - 0}{1220 - 1200} = 502,7 \text{ с} = 8,38 \text{ хв.}$$

Для циліндра число Біо:

$$Bi = \frac{\alpha d}{4 \lambda} = \frac{279 \cdot 0,025}{4 \cdot 30} = 0,058.$$

Дійсний час нагрівання твердого тіла:

$$\tau_p = (1 + kBi) \cdot \tau_{ид} = (1 + 0,5 \cdot 0,058) \cdot 502,7 = 517,28 \text{ с} = 8,38 \text{ хв.}$$

Приклад 4. Розрахуємо попередню задачу за допомогою наступної формули (1.55)

Розв'язок. Ідеальний час нагрівання твердого тіла:

$$\tau_{ид} = \frac{d\rho c \cdot 10^8}{16C_{пр} T_{п}^3} \left[\ln \frac{(T_{п} - T_0)(T_{п} + T_{к})}{(T_{п} - T_{к})(T_{п} + T_0)} + 2\operatorname{arctg} \frac{T_{к}}{T_{п}} - 2\operatorname{arctg} \frac{T_0}{T_{п}} \right] = \frac{0,025 \cdot 7800 \cdot 700 \cdot 10^8}{16 \cdot 3,74 \cdot 1493^3} \times$$
$$\times \left[\ln \frac{(1493 - 273)(1493 + 1473)}{(1493 - 1473)(1493 + 273)} + 2\operatorname{arctg} \frac{1473}{1493} - 2\operatorname{arctg} \frac{273}{1493} \right] = 399,19 \text{ с} = 6,65 \text{ хв.}$$

Дійсний час нагрівання твердого тіла:

$$\tau_p = (1 + kBi) \cdot \tau_{ид} = (1 + 0,5 \cdot 0,058) \cdot 399,19 = 410,77 \text{ с} = 6,84 \text{ хв.}$$

Отримані результати добре узгоджуються з експериментальними даними [4].

3.2. Розрахунки нагрівання «масивних» тіл

Приклад 5. Виливок діаметром 600 мм із сталі з вмістом С – 0,3% нагрівають у печі: $t_{поч.} - 25 \text{ }^{\circ}\text{C}$, $t_{сер.кін.} -$ температура $-1225 \text{ }^{\circ}\text{C}$, $t_{піч.} - 1315 \text{ }^{\circ}\text{C}$, $\rho_{ст} = 7800 \text{ кг/м}^3$. $C_{пр} = 4,07 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4$, $C_{ст} = 700 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$, $\lambda_{ст} = 30 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$, $\psi = 1,057$, $\alpha = 390 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$ [23]:

Розв'язок.

Ідельний час нагрівання

$$\tau_{ид} = \frac{7800 \cdot 0,15 \cdot 700}{4,07 \cdot 10^{-8} \cdot 1573^3} \cdot 1,057 = 5435 \text{ с} = 1,50 \text{ год.}$$

Число Bi і параметр m

$$Bi = \frac{\alpha S_{пр}}{\lambda} = \frac{390 \cdot 0,15}{30} = 1,95$$

$$m = 1 + 0,5 \cdot 1,95 = 1,97$$

Тоді визначаємо дійсний час нагрівання виливка

$$\tau = m \cdot \tau_{\text{ід}} = 1,97 \cdot 1,50 = 2,95 \text{ год.}$$

Отже результати розрахунку майже не відрізняються від дійсних значень часу нагрівання виливків при відповідних умовах.

3.3. Висновки

З вищенаведених прикладів розрахунку часу нагрівання виливків можна побачити, що результати розрахунків за пропонованим методом задовільно узгоджуються з експериментальними даними, в першу чергу для «тонких», а також і для «масивних» тіл складної форми.

РОЗДІЛ 4. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

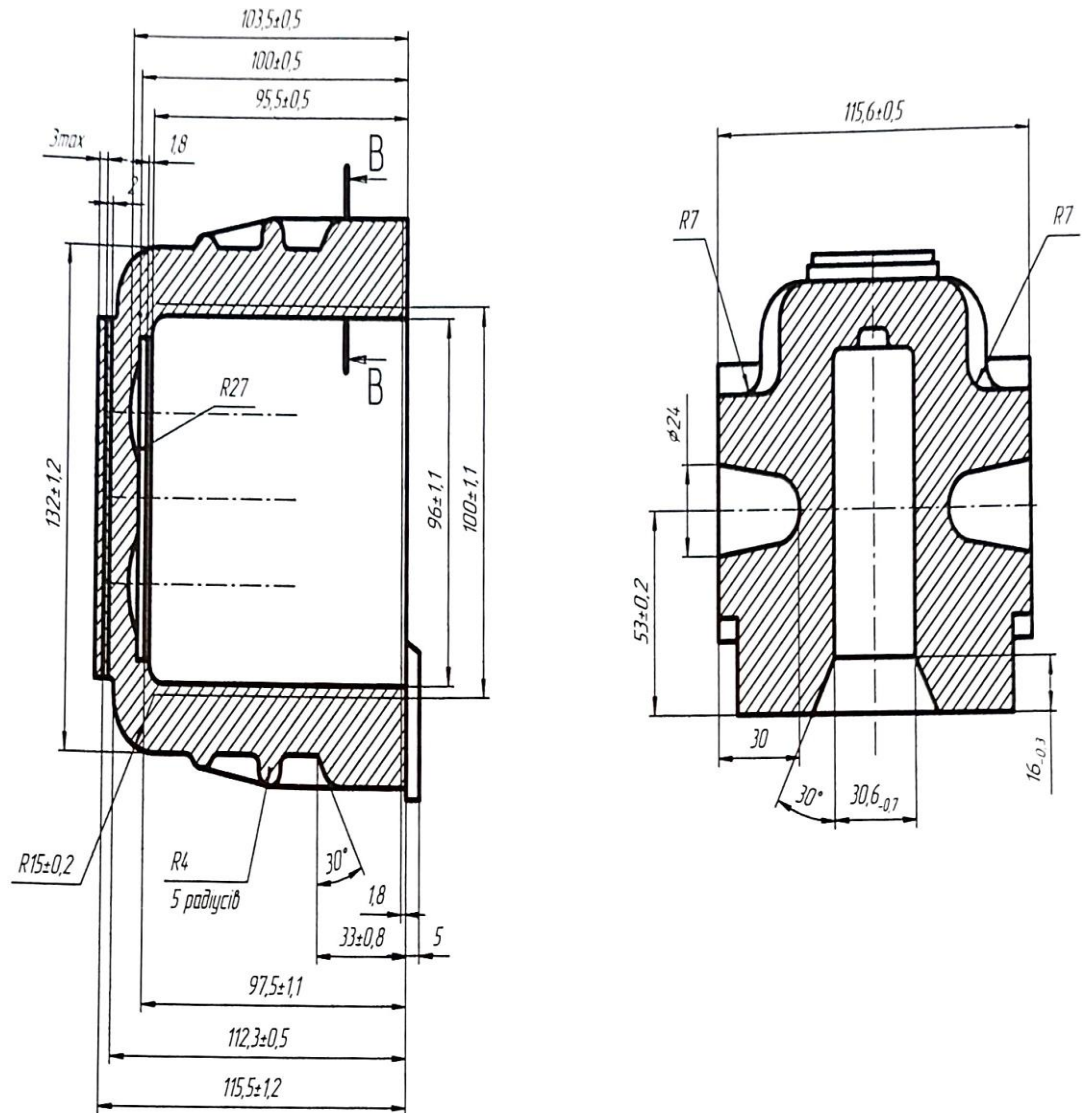


Рисунок 4.1 – Ескіз виливка корпусу насоса НШ 50 УК

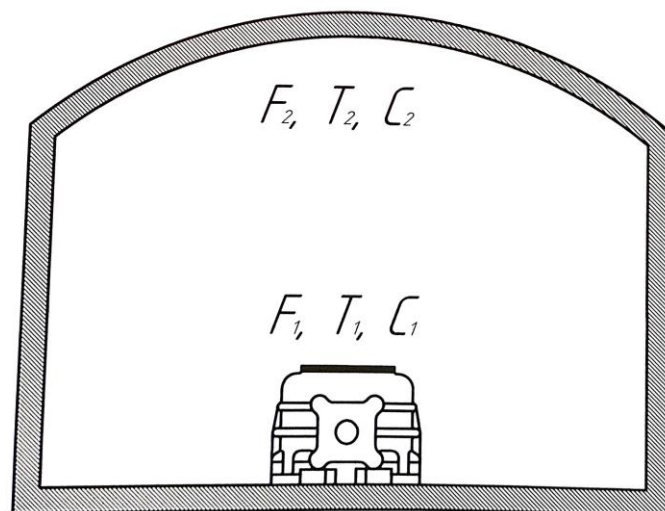


Рисунок 4.2 – Схема нагрівання виливка корпусу насоса НШ 50 УК в печі

Хімічний склад сплаву DIN226

Cu	Zn	Mg	Si	Mn	Fe	Ti	Al
2-3,5	<1,2	0,1-0,5	8-11	0,1-0,4	<1,0	<0,15	87,4-82,2

4.1. Розрахунок часу нагрівання

Розрахувати час нагрівання виливка (рис.4.1, рис. 4.2) із алюмінієвого сплаву DIN226. Початкова температура зливка 0°C , середня кінцева температура – 505°C , температура печі 750°C , густина алюмінієвого сплаву $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$; $c = 1080 \text{ Дж/кг}\cdot\text{K}$; $\lambda = 104 \text{ Вт/м}\cdot\text{K}$; $\psi = 1,057$; $\alpha = 139,2 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{K}$; $k = 0,5$; маса виливка корпуса НШ 50 УК $m = 3,553 \text{ кг}$; $C_{\text{пр}} = 4,68 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2\cdot\text{K}$.

Розв'язок. Площа поверхні виливка:

$$F = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,055 \cdot 0,119 + 2 \cdot 0,029 \cdot 0,119 + 2 \cdot 3,14 \cdot 0,055^2 + 4 \cdot 0,055 \cdot 0,029 + 2 \cdot 3,14 \cdot 0,0153 \cdot 0,0955 + 2 \cdot 0,0348 \cdot 0,0955 = 0,09 \text{ м}^2$$

Об'єм виливка:

$$V_{\text{вдл}} = \frac{m}{\rho} = \frac{3,553}{2500} = 0,00142 \text{ м}^3.$$

Приведена товщина виливка:

$$S_{\text{пр}} = \frac{V_{\text{вдл}}}{F_{\text{вдл}}} = \frac{0,00142}{0,09} = 0,016 \text{ м}.$$

Ідеальний час нагрівання за рівнянням Ньютона-Ріхмана:

$$\tau_{\text{ид}} = \frac{2500 \cdot 0,016 \cdot 1080}{139,2} \cdot \ln \frac{1023 - 273}{1023 - 778} = 347,28 \text{ с} = 5,78 \text{ хв}.$$

Число Біо і параметр m :

$$\text{Bi} = \frac{\alpha S_{\text{пр}}}{\lambda} = \frac{139,2 \cdot 0,016}{104} = 0,021;$$

$$m = 1 + 0,5 \cdot 0,021 = 1,011.$$

Дійсний час нагрівання:

$$\tau = 1,011 \cdot 5,78 = 5,84 \text{ хв}.$$

Ідеальний час нагрівання за рівнянням Стефана-Больцмана:

$$\tau_{\text{ід}} = \frac{2500 \cdot 0,016 \cdot 1080}{4,68 \cdot 10^{-8} \cdot 1023^3} \cdot 0,5631 = 485,51 \text{ с} = 8,09 \text{ хв.}$$

Дійсний час нагрівання:

$$\tau = 1,011 \cdot 8,09 = 8,18 \text{ хв.}$$

4.2. Висновки

Одержані результати є близькими до фактичних значень тривалості нагрівання виливків при заданих умовах.

РОЗДІЛ 5. ЕКОНОМІЧНА ЧАСТИНА

5.1. Розрахунок економічного ефекту

В даній роботі визначається спрощена формула для розрахунку оптимального часу нагрівання виливків. Більшість виливків – різностінні і тому для нагрівання різних ділянок вилівка необхідна різна кількість часу, що є причиною браку.

Використовуючи даний метод, можна зменшити кількість браку, а значить і одержати певний економічний ефект.

На основі матеріального і вартісного балансів виробництва виливків одержано рівняння, яке характеризує вплив зміни вмісту відходів власного виробництва на потребу у покупній шихті і на зміну собівартості виробництва виливків [24].

Рівняння балансу металу річного виробництва виливків має вигляд:

$$(П + В)(1 - 0,01У) = П_r + Л + Б + З, \quad (5.1)$$

де $П$ – закуплена частина металозавалки;

$В$ – відходи власного виробництва;

$У$ – угар металозавалки у відсотках від маси останньої;

$П_r$, $Л$, $Б$ і $З$ – кількість придатних виливків, ливників, браку та зливів відповідно.

Враховуючи очевидну рівність $В = Л + Б + З$ з рівняння (5.1) одержимо залежність:

$$П = (П_r + 0,01УВ) / (1 - 0,01У). \quad (5.2)$$

Продиференціювавши вираз (5.2) по $В$ при сталих $П$ і $У$ та після інтегрування, одержимо:

$$\Delta П = 0,01У\Delta В / (1 - 0,01У), \quad (5.3)$$

де $\Delta П$ – зміна потреби у покупній частині шихти при зміні вмісту відходів власного виробництва на величину $\Delta В$.

Рівняння вартісного балансу річного виробництва виливків, яке виражає рівність між затратами на шихту Z_1 , на її переробку (плавка, формовка, заливка, вибивка) Z_2 і на обробку виливків в ливарному цеху Z_3 з однієї сторони, собівартістю виливків C_{π} річного виробництва та відходів власного виробництва $C_{\text{в}}$ з другої сторони буде мати такий вигляд [24]:

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = C_{\pi} + C_{\text{в}}. \quad (5.4)$$

Після проведення відповідних перетворень одержимо вираз, за яким визначається вартість придатних виливків:

$$C_{\text{пр}} = c_{\pi} + c_2\Pi + c_2V + c_3\text{Пр}. \quad (5.5)$$

Підставивши вираз (5.2) у формулу (5.5), продиференціювавши результат по V при сталих Y , Пр , c_{π} , c_2 і c_3 та провівши інтегрування, одержимо формулу для розрахунку економічного ефекту від зниження вмісту відходів власного виробництва:

$$\Delta C_{\text{пр}} = [0,01Y(c_{\pi} + c_2)/(1 - 0,01Y) + c_2]\Delta V. \quad (5.6)$$

Рівняння (5.3) і (5.6) дозволяють розрахувати вплив зміни кількості вмісту відходів власного виробництва на необхідність у покупній частині шихти і на зміну собівартості виробництва виливків.

Відходи власного виробництва

$$V_1 = \Pi + Z + B_1 = 132,14 + 3,3 + 11,56 = 147 \text{ т} \quad (5.7)$$

$$V_2 = \Pi + Z + B_2 = 132,14 + 3,3 + 9,91 = 145,35 \text{ т}. \quad (5.8)$$

При зменшенні браку зміна відходів власного виробництва:

$$\Delta V = V_1 - V_2 = 147 - 145,35 = 1,65 \text{ т/рік}. \quad (5.9)$$

Отже при зменшенні браку на 0,5% зменшується об'єм відходів власного виробництва на 1,65 т/рік.

Економічний ефект від зниження об'єму відходів власного виробництва:

$$\Delta C_{\text{еф}} = \left[\frac{0,01Y(c_{\pi} + c_2)}{(1 - 0,01Y)} + c_2 \right] \Delta V, \quad (5.11)$$

де $c_{\Pi} = 36540$ грн/т – собівартість покупної частини шихти;

$c_2 = 160$ грн./т – вартість переробки 1 т металозавалки на річну кількість останньої; $Y = 5\%$ – угар металозавалки у відсотках від останньої.

$$\Delta C_{\text{еф}} = \left[\frac{0,01 \cdot 5(36540 + 160)}{(1 - 0,95 \cdot 5)} + 160 \right] \cdot 1,65 = 3451,107 \text{ грн./рік.} \quad (5.12)$$

5.2. Висновки

При зниженні браку на 0,5% очікуваний економічний ефект становить 3451,107 грн/рік.

ВИСНОВКИ

Існуючі аналітичні розв'язки задачі теплопровідності є громіздкими і відносяться лише до тіл простої форми (необмежена пластина, циліндр, куля), тому вони мало придатні для практичного використання.

Графічні зображення аналітичних розв'язків теж стосуються тих самих найпростіших тіл і сприяють суб'єктивним похибкам.

Наявні емпіричні формули для розрахунку нестационарної теплопровідності також відносяться до тіл простої форми і непридатні для практичного використання у випадку тіл складної форми – типу виливків.

Важливою проблемою є розробка і практичне використання прийнятного методу розрахунку нестационарної теплопровідності для тіл будь-якої складної форми типу виливків.

Розроблено метод для розрахунку часу нагрівання виливків складної форми. Цей метод дуже простий у використанні. Результати, розраховані за цим методом, добре узгоджуються з експериментальними даними.

Особливістю методу є використання приведеної товщини виливка, замість товщини або радіуса, які характерні для тіл простої форми.

Одержані результати є близькими до фактичних значень тривалості нагрівання виливків при заданих умовах.

При зниженні браку на 0,5% очікуваний економічний ефект (зниження витрат (об'єму) відходів власного виробництва) становить 3451,107 грн/рік.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Літовченко П.І., Іванова Л.П. Технологія конструкційних матеріалів. Навчальний посібник. Х: НА НГУ. 2016. 306 с.
2. Константинов С.М. Теоретичні основи теплотехніки. Київ: Золоті ворота. 2012, 592с.
3. Погорелов А.І. Тепломасообмін. Навчальний посібник. Львів: «Новий світ». 2006, 144с.
4. Юшков С.В., Борщ О.Є., Токар Г.І. Нестационарна теплопровідність. Навчальний посібник. Х: НТУ «ХП». 2012, 112с.
5. Гільчук А.В., Халатов А.А., Доник Т.В. Теорія теплопровідності. Навчальний посібник. Київ: НТУ «КП» ім. Сікорського. 2020, 153с.
6. Буляндра О.Ф. Технічна термодинаміка. Київ: Техніка. 2006, 400с.
7. Гільчук А.В., Халатов А.А. Теорія теплопровідності. Частина 1. Навчальний посібник. Київ: НТУ «КП» ім. Сікорського. 2017, 86с.
8. Соколовська І.Є. Тепломасообмін. Кам'янське. ДДТУ. 2021.144с.
9. Герасимов Г.Г. Теоретичні основи теплотехніки. Навчальний посібник, Рівне: НУВГП. 2011, 382с.
10. Приходько М.А., Герасимов Г.Г. Термодинаміка та теплопередача. Навчальний посібник. Рівне: НУВГП. 2008, 250с.
11. Буляндра О.Ф., Драганов Б.Х., Федорів В.Г. Підручник Теплотехніка. К: Вища школа. 1998, 334 с.
12. Обертюх Р.Р. Теоретичні основи теплотехніки. Навчальний посібник. Вінниця: Поділля. 2004, 352с.
13. Пеньков В.І. Технічна термодинаміка. Навчальний посібник. Рівне: НУВГП. 2010, 209с.
14. Співак, О. Ю., Резидент Н. В. Тепломасообмін. Частина І: навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ. 2021, 113 с.
15. М. Босий, О. Боса Спрощена фізико-математична модель теплообміну при нагріванні виливка в печі. International Science Journal of Engineering and Agriculture. Vol. 2, № 2. 2023. p.p. 75-81.

16. Victor Aulin, Mykola Bosyi, Volodymyr Kropivnyi, Olexandr Kuzyk, Alena Kropivna. Mathematical modeling of heat exchange processes when heating metal in a furnace. Вісник Тернопільського національного технічного університету. 2021. № 4(104). С. 123-130.

17. Чубіна О.А. Теоретичні основи процесів твердіння та кристалізації виливків. Кам'янське. ДДТУ. 2023, 121с.

18. Будник А.Ф. Тепломасоперенос у процесах і матеріалах дизайну матеріалів: Навчальний посібник. Суми: Вид-во СумДУ. 2008, 158 с.

19. Дубровська В.В., Шкляр В.І. Термодинаміка та теплообмін: навч. посіб. К: НТУУ «КПІ», Вид-во «Політехніка». 2016, 152 с.

20. Драганов Б.Х., Бессараб О.С., Долінський В.О. Теплотехніка. Підручник. Київ: фірма «ІНКОС». 2005, 400с.

21. Миронов О.С., Брижа М.Р., Бойко В.Б., Золотовська О.В. Теплотехніка. Навчальний посібник. Дніпропетровськ: ТОВ «ЕНЕМ» 2016. 424с.

22. Лейбензон В.О., Пілюшенко В.Л., Кондратенко В.М, Хричиков В.Є., Недопьокін Ф.В., Білоусов В.В., Дмитрієв Ю.В. Тверднення металів і металевих композицій. Підручник для вищих навчальних закладів. Київ: Наукова думка. 2009, 447с.

23. Босий М.В., Рахуба М.В., Згривець В.С., Мануйлович В.В., Лисенко А.Я., Косінов А.Л. Математичне моделювання процесів нагрівання виливків у печі при граничних умовах третього роду. // The 8th International scientific and practical conference “Modern problems of science, education and society” (October 9-11, 2023) SPC “Sciconf.com.ua”, Kyiv, Ukraine. 2023. P. 250-253.

24. Жук А.Я., Желябін Н.К., Таратута К.В., Коваль М.В. Обґрунтування економічної доцільності технічних рішень. Навчальний посібник. Запоріжжя. ВЗДІА. 2011, 363с.

ДОДАТКИ