

road machines, as: sticking and freezing of minerals to the working metal surfaces, increased wear, destruction of metal structures of working bodies as a result of high dynamic shock loads. Exploitation of elastomeric materials, taking into account their shelf life (7-10 years), which is comparable to the resource of construction machines, is appropriate for use for all types and classes of working bodies. The use of elastomers in the working equipment of construction and road machines is the most effective for bucket-type working equipment.

**mineral environment, elastomer, rubber element, working body**

*Одержано (Received) 17.09.2024*

*Прорецензовано (Reviewed) 30.09.2024*

*Прийнято до друку (Approved) 28.10.2024*

УДК628.247.652.784

DOI: [https://doi.org/10.32515/2664-262X.2024.10\(41\).1.179-185](https://doi.org/10.32515/2664-262X.2024.10(41).1.179-185)

**С.Л. Хачатурян**, доц., канд. техн. наук

*Центральноукраїнський національний технічний університет, м. Кропивницький, Україна  
e-mail: serg130354@gmail.com*

**С.Г. Ковалевський**, доц., канд. техн. наук

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків, Україна  
e-mail: 2407180@ukr.net*

**О.С. Хачатурян**, канд. екон. наук

*Льотна академія Національного авіаційного університету, м. Кропивницький, Україна  
e-mail: elenarice1210@gmail.com*

## Математичне моделювання поведінки ґрунту в процесі проколу

У роботі описується підхід до математичного моделювання поведінки ґрунту в процесі проколу як течії жорстко-пластичного середовища. Рух середовища розглядається в ейлеревих координатах. Робочий орган моделюється абсолютно твердим конусом. Наводяться та обґрунтовуються основні припущення. В підсумку аналітично виводяться всі залежності, що характеризують жорстко-пластичну течію – поля швидкостей, швидкостей деформацій і напружень.

**прокол, жорстко-пластичне середовище, робочий орган, ґрунт, опір ґрунту**

**Постановка проблеми.** При прокладанні інженерних комунікацій часто необхідно перетинати дороги, трамвайні та залізничні колії. У будівництві переходів, наразі, широке застосування знайшли технології безтраншейного прокладання комунікацій, при яких не розривається траншея з руйнуванням дорожнього покриття й порушенням руху транспорту. Одним з найбільш ефективних і широко розповсюджених методів утворення свердловини є метод статичного проколу. Однак, при його використанні виникають великі напруження в ґрунті та його деформація у зоні руху робочого органу, що може викликати як руйнування поверхневого шару, так і близько розташованих підземних інженерних комунікацій. Величина зони деформування залежить від виду ґрунту та його фізико-механічних властивостей. Вочевидь необхідне дослідження процесу ущільнення ґрунту навколо бокових стінок свердловини як жорстко-пластичного середовища.

**Аналіз основних досліджень і публікацій.** Аналіз сучасних методів безтраншейного прокладання інженерних комунікацій показує, що з точки зору мінімуму енергетичних витрат і собівартості виконання робіт найбільш ефективним з них є метод статичного проколу ґрунту [1]. Проте, він дещо обмежений при використанні, так як удавлювання конічно-циліндричного робочого органу пов'язано зі створенням суттєвих зусиль, що викликає значні напруження у масиві ґрунту навколо свердловини, яка формується шляхом його радіального ущільнення [2]. Також встановлено, що опір утворенню свердловини статичним проколом залежить від параметрів робочого органу, наконечник якого, звичайно, має форму конуса [3]. Дослідженнями [4] встановлено, що поширення зони великих напружень у ґрунті навколо свердловини визначається її діаметром й фізико-механічними властивостями ґрунту. Розмір зони пружно-пластичних деформацій навколо свердловини встановлювався експериментальним способом у ході польових досліджень у природних умовах. Дослідження процесу проколу статичним способом і напружень у ґрунті навколо робочого органу у ході утворення свердловини відображені у роботі [5]. У дослідженні [6] встановлено закон зміни щільності ґрунту за товщиною наконечника, визначено тиск ґрунту на підземні комунікації, котрі знаходяться в зоні дії пружно-пластичних деформацій. У той же час недостатньо дослідженими залишаються питання математичного моделювання поведінки ґрунту в процесі проколу та аналітичного визначення залежностей, які характеризують жорстко-пластичний перебіг процесу.

**Постановка завдання.** Метою даної роботи є дослідження та математичне моделювання поведінки ґрунту в процесі проколу як течії жорстко-пластичного середовища.

**Виклад основного матеріалу.** Будемо вважати ґрунт, у який вкорінюється робочий інструмент прохідницького ставу, жорстко-пластичним середовищем. Рух середовища будемо розглядати в ейлеревих координатах. Робочий інструмент змодельємо абсолютно твердим конусом.

Прийmemo надалі  $v_k$  – векторне поле швидкостей,  $\varepsilon_{kt}$  – тензорне поле швидкостей деформацій,  $\sigma_{kt}$  – тензорне поле напружень,  $\varepsilon_{kt}$  і  $\sigma_{kt}$  – симетричні тензори другого рангу.

Введемо до розгляду середню швидкість деформацій (1), дівіатор швидкостей деформацій (2), середнє напруження (3) та дівіатор напружень (4):

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{kt} \cdot \delta_{kt} = \frac{1}{3} \varepsilon_{kt} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23}); \quad (1)$$

$$e_{kt} = \varepsilon_{kt} - \delta_{kt} \cdot \varepsilon; \quad (2)$$

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kt} \cdot \delta_{kt} = \frac{1}{3} \sigma_{kt} = \frac{1}{3} (\sigma_{21} + \sigma_{22} + \sigma_{23}); \quad (3)$$

$$s_{kt} = \sigma_{kt} - \delta_{kt} \cdot \sigma. \quad (4)$$

$\varepsilon$  і  $\sigma$  є інваріантами відповідних тензорів, тобто не залежать від вибору системи координат.

Замість середнього напруження зручно розглядати тиск  $p$  – величину, котра має цілком визначений фізичний зміст:

$$p = -\sigma. \quad (5)$$

Тиск є скалярним полем. Разом з тиском будемо розглядати друге скалярне поле – щільність  $\rho$ . Щільність середовища, котре деформується,  $\rho_0$  передбачається постійною. При деформації щільність можна представити в вигляді

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho, \quad (6)$$

де  $\Delta\rho$  – приріст щільності.

Подальше теоретичне дослідження буде ґрунтуватися на припущенні, що

$$\frac{|\Delta\rho|}{\rho_0} \ll 1. \quad (7)$$

Для ґрунтів нерівність (7) можна вважати тільки дуже грубим першим наближенням. Однак, його доводиться приймати, щоб побудувати математичну модель. В іншому випадку завдання виявляється надзвичайно складним.

Між компонентами тензорів  $e_{km}$  і  $s_{km}$  існує зв'язок – співвідношення Леві-Мізеса [7]:

$$e_{km} = \lambda_{km} \cdot s_{km}, \quad (8)$$

де  $\lambda > 0$  – невизначений множник, враховуючий умову текучості Мізеса [8], котра має вигляд:

$$\frac{1}{2} s_{km} \cdot s_{km} = \tau_y^2, \quad (9)$$

де  $\tau_y$  – межа текучості при зсуві. Для ґрунтів ця величина є функцією відносного ущільнення:

$$\tau_y = \tau_y(\gamma); \quad \gamma = \frac{\Delta\rho}{\rho_0}; \quad |\gamma| \ll 1. \quad (10)$$

Остання нерівність витікає з нерівності (7).

Від величини  $\gamma$  залежить не тільки  $\tau_y$ , але й тиск. Будемо надалі під тиском  $p$  розуміти надлишковий тиск, тобто тиск, зумовлений дією зусилля робочого органу при проколі.

Якісна залежність  $p(\gamma)$  зображена на рис. 1.

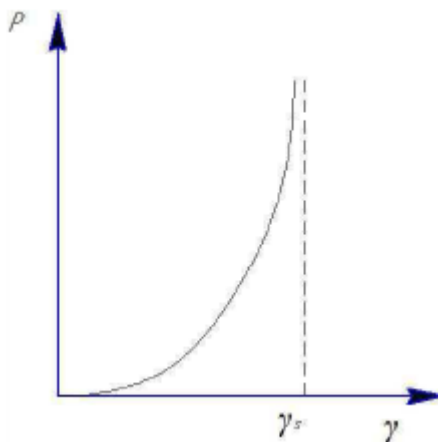


Рисунок 1 – Якісна залежність  $p(\gamma)$

Джерело: розроблено авторами

Фізичний зміст величини  $\gamma_s$  полягає в тому, що при її досягненні вся волога з ґрунту витісняється й при цьому виконується така рівність:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_s} \frac{dp}{d\gamma} = k, \quad (11)$$

де  $k$  – об'ємний модуль абсолютно сухого ґрунту.

Величина  $\gamma_s$  для реальних ґрунтів лежить у інтервалі  $(0,1 \div 0,2)$  [9] і підтверджується в першому наближенні припущенням (7).

Будемо вважати, що опір ґрунту визначається, в основному, опором порівняно вузького шару, котрий прилягає до робочого органу:

$$\gamma = \gamma_s. \quad (12)$$

Отже, величину  $\tau_y$  можна вважати постійною та такою, що дорівнює величині  $\tau_y(\gamma_s)$ . Тому нижче скрізь передбачається, що

$$\tau_y = \text{const}. \quad (13)$$

Відмітимо, що згадані залежності  $p = p(\gamma)$  і  $\tau_y = \tau_y(\gamma)$ , а також величина  $\gamma$  суттєво залежать від швидкості навантаження.

Замість Декартових координат  $x, y, z$  у даному випадку зручно користуватися сферичними координатами  $r, \theta, \varphi$  (рис. 2).

У сферичній системі координат

$$\begin{aligned} v_1 &= v_r; v_2 = v_\theta; v_3 = v_\varphi; \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{rr}; \varepsilon_{22} = \varepsilon_{\theta\theta}; \varepsilon_{33} = \varepsilon_{\varphi\varphi}; \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{r\theta}; \varepsilon_{13} = \varepsilon_{r\varphi}; \varepsilon_{23} = \varepsilon_{\theta\varphi}; \\ \sigma_{11} &= \sigma_{rr}; \sigma_{22} = \sigma_{\theta\theta}; \sigma_{33} = \sigma_{\varphi\varphi}; \\ \sigma_{12} &= \sigma_{r\theta}; \sigma_{13} = \sigma_{r\varphi}; \sigma_{23} = \sigma_{\theta\varphi}. \end{aligned} \quad (14)$$

Зв'язок між векторами швидкості та тензором швидкостей деформацій визначається формулами [10]

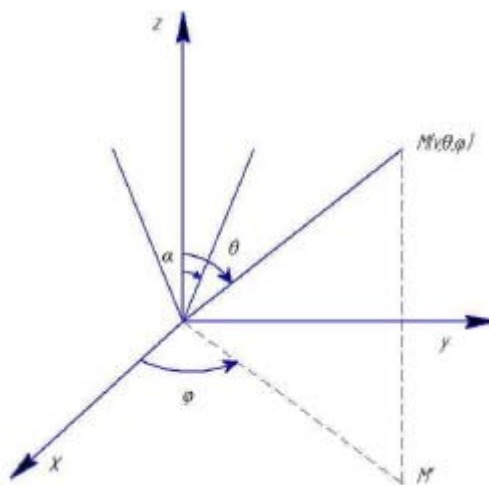


Рисунок 2 – Конус з кутом розвору  $2\alpha$  обтікається жорстко-пластичним середовищем:  
 $r, \theta, \varphi$  – сферичні координати деякої точки  $M$  середовища

Джерело: розроблено авторами

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}; \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \cdot \sin\theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r} \text{ctg}\theta + \frac{v_r}{r}; \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right); \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r \cdot \sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \varphi} - v_{\varphi} \cdot \operatorname{ctg}\theta \right).$$

Поля, котрими характеризується механічна поведінка суцільного середовища, повинні задовольняти записаним нижче диференціальним рівнянням. Перше з них – рівняння нерозривності:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot \rho \cdot v_r) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot v_{\theta} \cdot \sin\theta) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho \cdot v_{\varphi}) = 0. (16)$$

Рівняння руху при нехтуванні силами інерції переходять у рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cdot \sin\theta} \frac{\partial v_{r\varphi}}{\varphi \cdot r} + \frac{1}{r} (2 \cdot \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cdot \operatorname{ctg}\theta) = 0; (17)$$

$$\frac{\partial \sigma_{v\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cdot \sin\theta} \frac{\partial v_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg}\theta + 3 \cdot \sigma_{r\theta}] = 0; (18)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cdot \sin\theta} \frac{\partial v_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3 \cdot \sigma_{r\varphi} + \sigma_{\theta\varphi} \cdot \operatorname{ctg}\theta) = 0. (19)$$

**Висновки.** Рівняння (17)-(19) разом із співвідношеннями (1)-(4), (8) і (9) дозволяють знайти всі характеристики жорстко-пластичної течії – поля швидкостей, швидкостей деформацій і напружень.

## Список літератури

1. Najafi M. Trenchless technology piping. Installation and inspection / ASCE Press, WEF Press Water Environment Federation Alexandria, Virginia, 2010. 482 p.
2. Hastak M., Gokhale S., Decision Tool for Selecting the Most Appropriate Technology for Underground Conduit Construction. Geological Engineering: Proceedings of the 1st International Conference. New York, 2009. DOI: 10.1115/1.802922.paper30.
3. Хачатурян С.Л. Утворення свердловин пристроєм статичної дії з конічним робочим органом. *Наука та інновації: Матеріали XXXIV Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасна проблематика наукових досліджень»*, Чернівці, 15-16 лютого 2016 р. Київ: Науково-видавничий центр «Лабораторія думки», 2016. С. 4-6.
4. Супонев В.М., Рагулін В.М., Кравець С.В. Визначення максимально допустимого діаметра свердловини за умови заданої глибини проходки методом статичного проколювання ґрунту. *Вісник Харківського національного автомобільно-дорожнього університету*. 2023. Вип. 101, т. 2. С. 59-66.
5. Супонев В.Н., Олексин В.И., Хачатурян С.Л. Исследование процесса изменения состояния грунта вокруг горизонтальной скважины при ее разработке методом статического прокола *Вісник Харківського національного автомобільно-дорожнього університету*. 2016. Вип. 73. С. 202-205. Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/vhad\\_2016\\_73\\_40](http://nbuv.gov.ua/UJRN/vhad_2016_73_40).
6. Posmituha, A., Kravets, S., Suponyev, V., & Kulazhenko, Y. Determination of the size of the seal zone and the pressure of the soil on underground communications in the process of deformation of the soil by the wedge tip. *Industrial and Technology Systems*. Published online: (2018, №1(43)). P 11-16. URL: <http://journals.uran.ua/tarp/article/view/146626/146478>.
7. Калюжний О.В. Аналіз інженерним методом процесу обтиску з диференційованим протитиском в конічній матриці / О.В. Калюжний // *Обробка матеріалів тиском*. 2012. №2(31). С. 15-21.
8. Mises R. Mechanik der plastischen Formänderungen von Kristallen. *Zeitschrift für angew.// Mat. and Mech.* 1928. В.8. Н.3. Р. 161 – 185.
9. Черный Г.И. Изменения физико-механических свойств грунтов при динамических нагрузках. Киев: Наук. думка, 1979. 132 с.
10. Вайсфельд Н.Д., Фесенко Г.О. Мішані задачі теорії пружності для півнескінченного шару : монографія / Н.Д. Вайсфельд, Г.О. Фесенко. Одеса : Астропринт, 2019. 120 с.

## References

1. Mohammad Najafi (2010) Trenchless technology piping. Installation and inspection / ASCE-press, WEF Press Water Environment Federation Alexandria, Virginia, 482 p. [in English].
2. Hastak, M., Gokhale, S. (2009) Decision Tool for Selecting the Most Appropriate Technology for Underground Conduit Construction. Geological Engineering: *Proceedings of the 1st International Conference*. New York. DOI: 10.1115/1.802922.paper30 [in English].
3. Khachaturian, S.L. (2016). Utvorennya sverdlovyn prystroyem statychnoyi diyi z konichnym robochym orhanom [The formation of wells by a device of static action with a conical working body]. Nauka ta innovatsiyi. *Materialy XXXIV Mizhnarodnoyi naukovo-praktychnoyi konferentsiyi «Suchasna problematyka naukovykh doslidzhen'» – Materials of the XXXIV International Scientific and Practical Conference "Modern Problems of Scientific Research"*. Chernivtsi, 15-16 lyutoho 2016 r. Kyiv: Naukovo-vydavnychyy tsentr «Laboratoriya dumky». P. 4-6 [in Ukrainian].
4. Suponyev V.M., Rahulin V.M., Kravets' S.V. (2023). Vyznachennya maksimal'no dopustymoho diametra sverdlovyny za umovy zadanoyi hlybyny prokhodky metodom statychnoho prokolyuvannya gruntu [Determination of the maximum permissible diameter of the well under the condition of the specified penetration depth by the method of static piercing of the soil]. *Visnyk Kharkivs'koho natsional'noho avtomobil'no-dorozhn'oho universytetu – Bulletin of the Kharkiv National Automobile and Road University. №101*, Volume 2. P. 59-66 [in Ukrainian].
5. Suponev V.N., Oleksin V.I., Khachaturyan S.L. (2016). Issledovaniye protsessa izmeneniya sostoyaniya grunta vokrug gorizontal'noy skvazhiny pri yeye razrabotke metodom staticheskogo prokola [Study of the process of changing the state of the soil around a horizontal well during its development using the static puncture method]. *Visnyk Kharkivs'koho natsional'noho avtomobil'no-dorozhn'oho universytetu – Bulletin of the Kharkiv National Automobile and Road University. №73*. P. 202-205 [in Ukrainian].
6. Posmituha, A., Kravets, S., Suponyev, V., & Kulazhenko, Y. (2018). Determination of the size of the seal zone and the pressure of the soil on underground communications in the process of deformation of the soil by the wedge tip. *Industrial and Technology Systems*. Published online: (№1(43)). P. 11-16. URL: <http://journals.uran.ua/tarp/article/view/146626/146478> [in English].
7. Kalyuzhnyy O.V. (2012). Analiz inzhenernym metodom protsesu obtysku z dyferentsiyovanyim protytytskom v konichniy matrytsi [Analysis by the engineering method of the crimping process with differentiated back pressure in a conical matrix]. *Obrobka materyaliv tyskom – Processing of materials by pressure. №2(31)*. P. 15-21 [in Ukrainian].
8. Mises R. (1928). Mechanik der plastischen Formänderungen von Kristallen. *Zeitschrift für angew.// Mat. and Mech.* B.8. H.3. P. 161 – 185 [in English].
9. Chernyy G.I. (1979). Izmeneniya fiziko-mekhanicheskikh svoystv gruntov pri dinamicheskikh nagruzkakh [Changes in the physical and mechanical properties of soils under dynamic loads]. Kyiv: Nauk. Dumka. 132 p. [in Ukrainian].
10. Vaysfel'd N.D., Fesenko H.O. (2019). Mishani zadachi teoriiy pruzhnosti dlya pivneskinchennoho sharu [Mixed problems of the theory of elasticity for a semi-infinite layer]: monohrafiya. Odesa : Astroprynt. 120 p. [in Ukrainian].

**Serhiy Khachaturyan**, Assoc. Prof., PhDtech. sci.

*CentralUkrainianNationalTechnicalUniversity, Kropyvnytskyi, Ukraine*

**Serhiy Kovalevskiy**, Assoc. Prof., PhD tech. sci.,

*National Automobile and Highway University, Kharkiv, Ukraine*

**Olena Khachaturyan**, PhDecon. sci.,

*Flight Academy of the National AviationUniversity, Kropyvnytskyi, Ukraine*

### **Mathematical Modeling of Soil Behavior in the Process of Puncture**

Modern construction involves the laying of a large number of various engineering communications. It is often necessary to arrange crossings under highways, railway tracks and other ground structures, the destruction of which during open trench development is a very expensive procedure. Recently, the technology of trenchless laying of engineering communications has become widespread. The simplest and quite effective is currently the most common method of static puncture. This method of well formation is characterized by the occurrence of significant stresses in the soil around the working body, which can have a destructive effect on engineering objects located nearby, both in the soil and on the surface. There is an urgent need to study soil behavior during puncture, in particular, using mathematical modeling of the process.

The paper describes an approach to mathematical modeling of soil behavior in the process of puncture as a flow of a rigid-plastic medium. The movement of the medium is considered in Euler coordinates. The working body is modeled by a completely solid cone. The main assumptions are stated and substantiated.

Pressure was considered instead of average stress. The density of the deforming medium was assumed to be constant. Under pressure was understood excess pressure, i.e. pressure caused by the action of the effort of the working body during a puncture. It was believed that soil resistance is determined mainly by the resistance of a relatively narrow layer adjacent to the working body. Instead of Cartesian coordinates, spherical coordinates were used in this case. As a result, all the dependencies characterizing the rigid-plastic flow are analytically deduced – the fields of velocities, deformation velocities and stresses.

**loader, articulated frame, hydraulic drive, steering, dredging, research, mathematical modeling**

*Одержано (Received) 30.09.2024*

*Прорецензовано (Reviewed) 12.10.2024*

*Прийнято до друку (Approved) 28.10.2024*