

3. Захаров И.П. Теория неопределенности в измерениях : [учеб. пособие] / И.П. Захаров, В.Д. Кукуш. – Харьков, Консум, 2002. –256 с.
4. Мержиєвська В.В. Оцінювання невизначеності вимірювання параметрів автомобільних двигунів під час стендового випробовування / В.В. Мержиєвська // Системи обробки інформації. – Харків. –2008.
5. Новиков В.В. Автоматизация процесса вычисления оценок неопределенности вычислений / В.В. Новиков, А.Н. Коцюба // Системи обробки інформації. – Харків, 2006. – Вип. 7 (56). – С. 59–61.

Одержано 11.05.16

УДК 517.521

Л.М. Кривоблоцька, доц., канд. ф.-м. наук

Кіровоградський національний технічний університет

Деякі обчислення з розбіжними рядами

Зміст понять збіжності та розбіжності рядів була відома і до Ньютона і Лейбніца. Всі видатні математики сімнадцятого та вісімнадцятого віків достатньо добре знали, чи збіжні ряди, які вони використовують. Розбіжні ряди не застосовувалися до обчислень. Тільки з розширенням аналізу виявилось, що розбіжні ряди корисні і дії, які над ними виконують часто приводять до важливих результатів. В даній статті наводяться приклади використання розбіжних рядів до деяких обчислень.

розбіжні ряди, сума ряда, числа Бернуллі, числа Ейлера

Відомо, що

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}, \text{ при } |x| < 1. \quad (1)$$

Зрозуміло, що:

1) було б зручно, щоб формула не змінювалася і для інших випадків;

2) сума S повинна задовольняти рівнянню

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = 1 + x(1 + x + x^2 + \dots) = 1 + xS.$$

Приймемо, що формула(1) вірна для будь яких x (за виключенням, можливо, $x = 1$).

Покладемо $x = e^{i\theta}$, де $0 < \theta < \pi$ (так що $x \neq 1$). Враховуючи формулу Ейлера $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ одержуємо

$$\frac{1}{1 - (\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2} - i2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} =$$

$$\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2} \times 1} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

Маємо $1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots = \frac{1}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$ (2)

Звідки $\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \dots = 0$, $\sin\theta + \sin 2\theta + \dots = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$ для $0 < \theta < 2\pi$. (3)

Замінімо θ на $\theta + \pi$, одержимо

$$\frac{1}{2} - \cos\theta + \cos 2\theta - \dots = 0, \quad (4)$$

$$\sin\theta - \sin 2\theta + \dots = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \quad \text{для} \quad -\pi < \theta < \pi. \quad (5)$$

Формула (4) при $\theta = 0$ приймає вигляд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$ (6)

Продиференціюємо декілька раз (4) і (5) по змінній θ . Одержимо

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} n^{2k} \cos n\theta = 0 \quad (k = 1, 2, \dots; -\pi < \theta < \pi), \quad (7)$$

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} n^{2k+1} \sin n\theta = 0, \quad (8)$$

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} n^{2k} \sin n\theta = (-1) \left(\frac{d}{d\theta} \right)^{2k} \frac{1}{2} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, \quad (9)$$

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} n^{2k+1} \cos n\theta = (-1)^k \left(\frac{d}{d\theta} \right)^{2k+1} \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \quad (k = 0, 1, \dots; -\pi < \theta < \pi). \quad (10)$$

Покладемо в (7) і (10) $\theta = 0$ та $\theta = \frac{\pi}{2}$ в (8). Відомо, що $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sum_0^{\infty} \frac{2^{2k+2} - 1}{(2k+2)!} B_{k+1} \theta^{2k+1}$ – розклад даної функції в ряд Тейлора, де B_k - числа Бернуллі: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2k} (2^{2k-1} - 1)}{(2k)!} B_k$.

k	1	2	3	4	5	6	
B_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{691}{2630}$	

Одержуємо

$$1^{2k} - 2^{2k} + 3^{2k} - \dots = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (11)$$

$$1^{2k+1} - 2^{2k+1} + \dots = (-1)^k \frac{2^{2k+2} - 1}{2k+2} B_{k+1} \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (12)$$

$$1^{2k+1} - 3^{2k+1} + 5^{2k+1} - \dots = 0 \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (13)$$

Аналогічно викладеному вище, виходячи з формули

$$e^{i\theta} - e^{3i\theta} + e^{5i\theta} - \dots = \frac{e^{i\theta}}{1 + e^{2i\theta}} = \frac{1}{2} \sec \theta. \quad (14)$$

і приймаючи до уваги, що $\sec \theta = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_k \theta^{2k}}{(2k)!}$, де E_k - числа

Ейлера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^{2k+1}} = \frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2} (2k)!} E_k.$$

Для деяких значень k числа Ейлера наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Значення k числа Ейлера

k	1	2	3	4
E_k	1	5	61	1385

Одержимо наступну формулу

$$1^{2k} - 3^{2k} + 5^{2k} - \dots = \frac{1}{2}(-1)^k E_k \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (15)$$

Замітимо, що формула (12) при $k = 0$ дає $1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \frac{1}{4}$. (16)

проінтегруємо (4) по φ від $\varphi = 0$ до $\varphi = \theta$ одержимо

$$\sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta - \dots = \frac{\theta}{2}, \quad (-\pi < \theta < \pi). \quad (17)$$

Цей ряд збіжний. Про інтегрувавши ще один раз, маємо

$$1 - \cos \theta - \frac{1 - \cos 2\theta}{2^2} + \frac{1 - \cos 3\theta}{3^2} - \dots = \frac{\theta^2}{4}. \quad (18)$$

Формула справедлива і для граничних значень $\theta = -\pi, \theta = \pi$ так як ряд рівномірно збіжний для всіх θ . Покладемо $\theta = \pi$, одержимо

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}. \quad (19)$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \\ &+ \dots - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Тоді $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots = \frac{\pi^2}{6}, \quad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots = \frac{\pi^2}{12}, \quad (20)$

Одержуємо $\cos \theta - \frac{\cos 2\theta}{2^2} + \frac{\cos 3\theta}{3^2} - \dots = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\theta^2}{4}, \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi) \quad (21)$

Подальше інтегрування приведе до представлення сумм рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos n\theta}{n^{2k}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin n\theta}{n^{2k+1}}, \quad \text{через многочлени Бернуллі.}$$

З формул (3), (5) випливає

$$\sin \theta + \sin 3\theta + \dots = \frac{1}{2} \sec \theta, \quad \sin 2\theta + \sin 4\theta + \dots = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta.$$

Помножимо ці вирази на θ і про інтегруємо для $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Одержимо } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta}{\sin \theta} d\theta = 2 \left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots \right), \quad (22)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \operatorname{ctg} \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \log 2. \quad (23)$$

Таким чином бачимо, що використання розбіжних рядів цілком можливе і доцільне. При розв'язанні складних практичних задач іноді просте неможливо одержати інші ряди. Тоді треба використовувати ті результати, які одержані при дослідженнях. І теорія підсумовування розбіжних рядів значно спрощує труднощі, які виникають пр

Список літератури

1. Харди Г. Расходящиеся ряды. М. Издательство иностранной литературы, 1951. С.14–18.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М. :Наука, 1986. С.91 - 100.
3. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. – К. :Вища шк. Головне видавництво, 1986. – 512 с.

Одержано 24.05.16

УДК 336.145.1

С.П. Попова, асистент, Л.О. Ішук, студ. гр. ФК-12

Кіровоградський національний технічний університет

Проблеми функціонування місцевих бюджетів

У статті досліджено сучасний стан та проблеми функціонування місцевих бюджетів. Обґрунтовано заходи з удосконалення формування та виконання місцевих бюджетів. Зазначається, що місцеві бюджети повинні забезпечувати соціально-економічний розвиток регіонів. Назріла потреба запровадження нових засад щодо організації їх діяльності.

місцеві бюджети, доходи, видатки, міжбюджетні трансферти, місцеві податки і збори, бюджетна децентралізація, інвестиційний розвиток територій

© С.П. Попова, Л.О. Ішук, 2016