ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра вищої математики та фізики

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Частина II

Навчальний посібник

КРОПИВНИЦЬКИЙ
2022

УДК 51

Рецензенти:
доктор технічних наук., професор., завідувач каф. кібербезпеки та програмного забезпечення ЦНТУ О.А. Смірнов;
кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри математики, статистики та інформаційних технологій Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка
С.Д. Паращук

Вища математика для студентів технічних спеціальностей. Частина ІІ. Навчальний посібник для самостійної роботи студентів / Укл.: В.І. Гуцул, І.І. Філімоніхіна., С.М. Якименко, Л.М. Кривоблоцька – Кропивницький: ЦНТУ, 2022 р. – 181 с.

Навчальний посібник містить наступні розділи курсу «Вища математика»: «Невизначений інтеграл», «Визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла», «Диференціальне числення функції декількох змінних», «Диференціальні рівняння», «Подвійні та потрійні інтеграли», «Криволінійні та поверхневі інтеграли», «Елементи теорії поля», «Числові ряди», «Степеневі ряди», «Застосування степеневих рядів», «Ряди Фур'є». Призначений для студентів технічних та комп'ютерних спеціальностей денної та заочної форм навчання.

Рекомендовано до друку Вченою радою ЦНТУ Міністерства освіти та науки України.
Протокол № 9 від
30.05. 2022 р

Зміст

Розділ 1. Невизначений інтеграл

1.1. Поняття невизначеного інтеграла. Найпростіші прийоми інтегрування

У диференціальному численні розглядалася наступна основна задача: по заданій функції $F(x)$ потрібно знайти її похідну $F'(x) = f(x)$. У інтегральному численні розглядається обернена задача: по заданій функції $f(x)$ потрібно знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнювала б функції $F(x)$, тобто $F^{'}(x) = f(x)$. Іншими словами по заданій похідній від невідомої функції необхідно знайти саму функцію.

Якщо для кожного x з деякого проміжку X виконується рівність $F^{'}(x) = f(x)$, то функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку X. Наприклад функція $F(x) = 0{,}25x^4 + 3$ є первісною для функції $f(x) = x^3$ на R, так як

$$F^{'}(x) = (0{,}25x^4 + 3)^{'} = x^3 = f(x).$$

Нехай $F(x)$ є первісною для функції $F(x)$ на проміжку X. Тоді на цьому проміжку функція $f(x)$ має нескінченну множину первісних, які можуть бути представлені у вигляді суми $F(x) + C$, де C – довільна стала. Вказана множина всіх можливих первісних називається *невизначеним інтегралом* і позначається символом $\int f(x)dx$. Таким чином можемо записати

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (1.1)$$

Функція $f(x)$ називається *підінтегральною функцією*, $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*, x – *змінною інтегрування*. Операцію знаходження невизначеного інтеграла (первісної) будемо називати *інтегруванням функції*.

Основні властивості невизначеного інтеграла:

1. $(\int f(x)dx)^{'} = f(x)$, 2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$,

3. $\int dF(x) = F(x) + C$, 4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k – стала),

5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

Таблиця інтегралів:

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$, 2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$,

3. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C$, 4. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$,

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\, x + C$, 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + C$,

7. $\int e^x\, dx = e^x + C$, 8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C$,

9. $\int sin\, x\, dx = -\, cos\, x + C$, 10. $\int cos\, x\, dx = sin\, x + C$,

11. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\, x + C$, 12. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -\, ctg\, x + C$,

13. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} ln \left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$ 14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$,

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C$.

У найпростіших випадках невизначені інтеграли можуть бути знайдені тільки за допомогою таблиці інтегралів, основних властивостей та елементарних перетворень підінтегральної функції. Вказаний підхід називається *безпосереднім інтегруванням*.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int \left(\frac{5}{cos^2 x} - \frac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x^5}\right) dx$; б) $\int tg^2\, x\, dx$.

Розв'язання. Використовуючи основні властивості, таблицю інтегралів і очевидні елементарні перетворення дістаємо:

а) $\int \left(\frac{5}{cos^2 x} - \frac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x^5}\right) dx = 5\int \frac{dx}{cos^2 x} - 2\int x^{-3}dx + \int x^{\frac{5}{3}}dx =$

$$= 5\, tg\, x + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + C;$$

б) $\int tg^2\, x\, dx = \int \frac{sin^2 x}{cos^2 x} dx = \int \frac{1-cos^2 x}{cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{cos^2 x} - \int dx =$

$$= tg\, x - x + C.$$

Для невизначеного інтеграла справедлива також наступна властивість: якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \phi(x)$ – будь-яка неперервно диференційовна функція, то $\int f(u)du = F(u) + C$. На основі цієї властивості в деяких випадках інтеграл може бути зведений до табличного за допомогою прийому *внесення функції під знак диференціала*.

Приклад 2. Знайти інтеграли: а) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^5 x}$; б) $\int xe^{x^2+3}dx$.

Розв'язання. а) Застосовуємо прийом внесення функції під знак диференціала. Так як $d\sin x = (\sin x)'dx = \cos x\,dx$ і $\int u^{-5}du = \frac{u^{-4}}{-4} + C$, то можемо записати

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^5 x} = \int \frac{d\sin x}{\sin^5 x} = \int \sin^{-5} x\, d\sin x = \frac{\sin^{-4} x}{-4} + C.$$

б) Аналогічно попередньому, враховуючи, що $xdx = \frac{1}{2}d(x^2+3)$, маємо

$$\int xe^{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2+3}d(x^2+3) = \frac{1}{2}e^{x^2+3} + C.$$

Нехай функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$. Застосовуючи прийом внесення функції під знак диференціала дістаємо

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Отже, справедлива формула

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \qquad (1.2)$$

де $F(x)$ – первісна для $f(x)$.

Приклад 3. Обчислити інтеграли: а) $\int \frac{dx}{5x+1}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

Розв'язання. а) Застосовуючи прийом внесення функції під знак диференціала, отримуємо:

$$\int \frac{dx}{5x+1} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5x+1)}{5x+1} = \frac{1}{5}\ln|5x+1| + C.$$

б) Використовуючи формулу (1.2), дістаємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{1}{3} arcsin\, 3\,x + C.$$

1.2. Методи інтегрування

Досить часто заміна змінної суттєво спрощує обчислення невизначеного інтеграла. Нехай перехід до нової змінної задається підстановкою $x = \phi(t)$ і нехай $\phi(t)$ – монотонна, неперервно диференційована функція (на відповідному проміжку) нової змінної *t*. *Метод заміни змінної* (або *метод підстановки*) визначається наступною формулою

$$\int f(x)dx = \left|x = \phi(t),\ dx = \phi'(t)dt\right| = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt. \qquad (2.1)$$

Інколи нову змінну зручно вводити за допомогою підстановки $u = \psi(x)$. У цьому випадку використовується формула

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \left|u = \psi(x),\ du = \psi'(x)dx\right| = \int f(u)du. \quad (2.2)$$

При застосуванні формул (2.1) і (2.2) після інтегрування потрібно повернутися до змінної *x*.

Приклад 1. Знайти інтеграли: а) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$; б) $\int sin^6 x \cdot cos\, x\, dx$.

Розв'язання. а) Застосовуючи формулу (2.1), маємо

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x} = |x = t^2,\ dx = 2tdt| = \int \frac{t \cdot 2tdt}{1+t^2} = 2\int \frac{t^2dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\int \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}dt = 2\int \frac{t^2+1}{1+t^2}dt - 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2t - 2\,arctg\, t + C =$$

$$= \left|t = \sqrt{x}\right| = 2\sqrt{x} - 2\,arctg\,\sqrt{x} + C.$$

б) Використовуючи формулу (2.2), дістаємо

$$\int sin^6 x \cdot cos\, x\, dx = |u = sin\, x\,,\ du = cos\, x\, dx| =$$

$$= \int u^6 du = \frac{u^7}{7} + C = \frac{sin^7 x}{7} + C.$$

Якщо u і v – диференційовні функції від x, то має місце формула:

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{2.3}$$

Формула (2.3) лежить в основі *методу інтегрування частинами*. При її застосуванні мається на увазі, що інтеграл у правій частині простіший, ніж інтеграл у лівій. При використанні вказаного методу підінтегральний вираз розбивається на два множника $u = \phi(x)$ і $dv = \psi(x)dx$. Здиференціювавши першу рівність, та зінтегрувавши другу, знаходимо $du = \phi'(x)dx$ і $v = \int \psi(x)dx$ (довільну сталу беремо рівною нулю). Далі застосовуємо формулу (2.3).

Приклад 2. Знайти інтеграли: а) $\int x \cdot \sin x\, dx$; б) $\int \sqrt{1+x^2}dx$.

Розв'язання. а) Використавши метод інтегрування частинами, отримаємо

$$\int x \cdot \sin x\, dx = \begin{vmatrix} u = x, dv = \sin x\, dx, \\ du = dx, v = -\cos x \end{vmatrix} = -x \cdot \cos x + \int \cos x\, dx =$$

$$= -x \cdot \cos x + \sin x + C.$$

б) Аналогічно попередньому маємо

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \begin{vmatrix} u = \sqrt{1+x^2}, dv = dx, \\ du = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, v = x \end{vmatrix} = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}dx +$$

$$+ \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}dx + ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|.$$

Можемо записати

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = x\sqrt{1+x^2}dx - \int \sqrt{1+x^2}dx + ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|.$$

Помітивши, що в лівій і правій частинах однакові інтеграли, зводимо подібні і розв'язуємо рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$2\int \sqrt{1+x^2}dx = x\sqrt{1+x^2} + ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|,$$

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|\right) + C.$$

Наведемо деякі типи інтегралів, для обчислення яких завжди застосовується метод інтегрування частинами ($P(x)$ – многочлен):

$\int P(x)\cdot sin(ax+b)dx$,$(P(x)=u,\ sin(ax+b)dx=dv)$;

$\int P(x)\cdot cos(ax+b)dx$, $(P(x)=u,\ cos(ax+b)dx=dv)$;

$\int P(x)\cdot a^{bx+c}dx$, $(P(x)=u,\ a^{bx+c}dx=dv)$;

$\int P(x)\cdot log_a x\,dx$, $(log_a x=u,\ P(x)dx=dv)$.

Приклад 3. Знайти інтеграли:

а) $\int(x^4+x^2+1)\cdot ln\,x\,dx$; б) $\int x^2\cdot e^{3x}dx$.

Розв'язання. а) Маємо один з наведених вище стандартних випадків. Інтегруємо:

$$\int(x^4+x^2+1)\cdot ln\,x\,dx=\begin{vmatrix}u=ln\,x\,,dv=(x^4+x^2+1)dx,\\ du=\frac{dx}{x},v=\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\right)ln\,x-\int\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\right)\frac{dx}{x}=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\right)ln\,x-$$

$$=\int\left(\frac{x^4}{5}+\frac{x^2}{3}+1\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\right)ln\,x-\frac{x^5}{25}-\frac{x^3}{9}-x+C.$$

б) Застосовуємо метод інтегрування частинами два рази:

$$\int x^2\cdot e^{3x}dx=\begin{vmatrix}u=x^2,dv=e^{3x}dx,\\ du=2xdx,v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}x^2\cdot e^{3x}-\frac{2}{3}\int x\cdot e^{3x}dx=$$

$$=\begin{vmatrix}u=x,dv=e^{3x}dx,\\ du=dx,v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}x^2\cdot e^{3x}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\cdot e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+C.$$

1.3. Інтегрування деяких виразів, що містять квадратний тричлен.

Розглянемо інтеграли виду

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},\ \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\qquad(3.1)$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx, \qquad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \tag{3.2}$$

де *A, B, a, b, c* – сталі. Інтеграли (3.1) зводяться до табличних за допомогою виділення повного квадрата у квадратному тричлені знаменника, а саме:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a((x+h)^2-l),$$

де $h = \frac{b}{2a}$, $l = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$. У залежності від значень параметрів a і l будимо отримувати різні табличні інтеграли. Наприклад, якщо $l < 0$, $-\infty < a < +\infty$, то для першого інтеграла отримуємо

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x+h)^2-l} = \frac{1}{a\sqrt{-l}} arctg\frac{x+h}{\sqrt{-l}} + C;$$

якщо $a < 0$, $l > 0$, то для другого інтеграла дістаємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a((x+h)^2-l)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-a(l-(x+h)^2)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dx}{\sqrt{l-(x+h)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} arcsin\frac{x+h}{\sqrt{l}} + C.$$

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{2x^2-16x+46}$; б)$\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+12x-15}}$.

Розв'язання. а) Виділяємо в знаменнику повний квадрат і інтегруємо:

$$\int \frac{dx}{2x^2-16x+18} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-8x+9} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2-2\cdot 4\cdot x+16)-16+9} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-4)^2-7} = \frac{1}{4\sqrt{7}} ln\left|\frac{x-4-\sqrt{7}}{x-4+\sqrt{7}}\right| + C.$$

б) Аналогічно попередньому отримуємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+12x-15}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-2(x^2-6x+7{,}5)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-2((x-3)^2-1{,}5)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1{,}5-(x-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} arcsin \frac{x-3}{\sqrt{1{,}5}} + C.$$

Розглянемо інтеграли (3.2). В чисельнику виділяємо похідну від квадратного тричлена знаменника ($(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$):

$$Ax + B = \frac{A}{2a}(2ax+b) + B - \frac{bA}{2a} = r(2ax+b) + s,$$

де $r = \frac{A}{2a},\ s = B - \frac{bA}{2a}$;

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{r(2ax+b)+s}{ax+bx+c} dx = r \int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} + s \int \frac{dx}{ax^2+bx+c};$$

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = r \int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + s \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Два з чотирьох отриманих інтегралів були розглянуті вище, а для двох інших маємо:

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} = ln|ax^2+bx+c| + C;$$

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int (ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}} d(ax^2+bx+c) =$$

$$= 2(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int \frac{(3x+5)}{2x^2+8x+9} dx$.

Розв'язання. Враховуючи, що похідна знаменника дорівнює $4x + 8$, дістаємо

$$\int \frac{(3x+5)}{2x^2+8x+7} dx = \int \frac{\frac{3}{4}(4x+8)+5-6}{2x^2+8x+7} dx = \frac{3}{4} \int \frac{(4x+8)dx}{2x^2+8x+7} -$$

$$- \int \frac{dx}{2x^2+8x+7} = \frac{3}{4} \int \frac{d(2x^2+8x+7)}{2x^2+8x+7} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+2)^2-0{,}5} =$$

$$= \frac{3}{4} ln|2x^2+8x+9| - \frac{1}{4\sqrt{0{,}5}} ln\left|\frac{x+2-\sqrt{0{,}5}}{x+2+\sqrt{0{,}5}}\right| + C.$$

1.4. Інтегрування найпростіших дробів

Найпростішими (або *елементарними*) називаються наступні чотири типи дробів (*A, B, a, p, q* – сталі):

I. $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$, де k – додатне ціле число більше одиниці;

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $p^2-4q<0$ (дискримінант від'ємний);

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $p^2-4q<0$, k – додатне ціле число більше одиниці.

Для найпростіших дробив першого і другого типів маємо:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\cdot ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

Інтегрування елементарного дробу третього типу було розглянуто в попередньому параграфі (перший з інтегралів (3.2) при $a=1,\ l<0$). Найскладнішим і найбільш громіздким є інтегрування елементарного дробу четвертого типу. У загальному випадку вказаний інтеграл береться за допомогою рекурентної формули. Для інтеграла $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ (n – додатне ціле число) справедлива наступна рекурентна формула

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}, \qquad (4.1)$$

де $I_{n-1} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}$. Формулу (4.1) дозволяє звести обчислення інтеграла I_n до обчислення табличного інтеграла $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2}$.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{4x-5}{(x^2-6x+13)^2}dx$.

Розв'язання. Виділяємо в чисельнику похідну від квадратного тричлена знаменника і розбиваємо інтеграл на два:

$$\int \frac{4x-5}{(x^2-6x+13)^2}dx = \int \frac{2(2x-6)+7}{(x^2-6x+13)^2}dx =$$

$$= 2\int \frac{(2x-6)dx}{(x^2-6x+13)^2} + 7\int \frac{dx}{((x-3)^2+4)^2}.$$

Для першого інтеграла можемо записати

$$\int \frac{(2x-6)dx}{(x^2-6x+13)^2} = \int (x^2-6x+13)^{-2} d(x^2-6x+13)^2 =$$

$$= \frac{(x^2-6x+13)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x^2-6x+13} + C.$$

У другому інтегралі робимо підстановку і застосовуємо формулу (4.1) (тут $a = 2,\ n = 2$):

$$\int \frac{dx}{((x-3)^2+4)^2} = \begin{vmatrix} x-3=t, \\ dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{(t^2+4)^2} dt = \frac{1}{2\cdot 4\cdot(2-1)} \cdot \frac{t}{(t^2+4)^{2-1}} +$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2} \cdot \int \frac{dt}{(t^2+4)} dt = \frac{t}{8(t^2+4)} + \frac{1}{16} arctg \frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{x-3}{8((x-3)^2+4)} + \frac{1}{16} arctg \frac{x-3}{2} + C.$$

Остаточно маємо:

$$\int \frac{4x-5}{(x^2-6x+13)^2} dx = -\frac{2}{x^2-6x+13} + 7\left(\frac{x-3}{8((x-3)^2+4)} + \frac{1}{16} arctg \frac{x-3}{2}\right) +$$

$$+C = \frac{7x-37}{8(x^2-6x+13)} + \frac{7}{16} arctg \frac{x-3}{2} + C.$$

1.5. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Розглянемо інтеграл від *дробово-раціональної функції* тобто інтеграл виду $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, де *P*(*x*), *Q*(x) – многочлени. В загальному випадку за допомогою перетворень підінтегральної функції обчислення такого інтеграла зводиться до інтегрування многочлена і найпростіших дробів.

Наведемо спочатку деякі поняття і властивості для раціонального дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь многочлена чисельника менший за степінь многочлена знаменника. Як що ж степінь многочлена чисельника не менший за степінь многочлена знаменника, то дріб називається *неправільним*. Поділивши у неправильному дробу чисельник на знаменник (виділивши цілу частину), дістанемо

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \tag{5.1}$$

де $F(x)$ – частка, $R(x)$ – остача, $\frac{R(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб.

Знаменник $Q(x)$ можна представити у вигляді добутку лінійних і квадратичних виразів (деякі з них можуть повторюватися), а саме

$$Q(x) = A(x-a)^m \dots (x-b)^n (x^2+ux+v)^k \dots (x^2+px+q)^r. \tag{5.2}$$

Тут мається на увазі, що квадратні тричлени у формулі (5.2) на лінійні множники не розкладаються (дискримінанти від'ємні). Лінійні множники відповідають дійсним кореням многочлена $Q(x)$ ($x = a$ є дійсним m-кратним коренем і т.д.); кожен квадратичний множник відповідає парі комплексно-спряжених коренів.

Правильний раціональний дріб $\frac{R(x)}{Q(x)}$, знаменник якого представлений у вигляді добутку (5.2), розкладається на найпростіші дроби за допомогою наступної формули

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \dots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} +$$
$$+ \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_rx+N_r}{(x^2+px+q)^r}, \tag{5.3}$$

де $A_1, A_2, \dots, M_r, N_r$ – невідомі числові коефіцієнти, які потрібно визначати (методи обчислення цих коефіцієнтів будуть розглянуті на конкретних прикладах).

Приклад 1. Розкласти дріб $\frac{2x^3-14x^2+26x+3}{(x-3)^2(x^2-x+3)}$ на найпростіші.

Розв'язання. Дріб правильний і знаменник представлений у формі (5.2). Застосовуємо формулу (5.3), приводимо праву частину до спільного знаменника і записуємо многочлен чисельника у стандартній формі:

$$\frac{2x^3-14x^2+26x+3}{(x-3)^2(x^2-x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{Mx+N}{x^2-x+3} =$$

$$= \frac{A(x-3)(x^2-x+3)+B(x^2-x+3)+(Mx+N)(x-3)^2}{(x-3)^2(x^2-x+3)} =$$

$$= \frac{(A+M)x^3+(-4A+B-6M+N)x^2+(6A-B+9M-6N)x-9A+3B+9N}{(x-3)^2(x^2-x+3)}.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x многочленів чисельників крайнього лівого і крайнього правого дробів, одержимо:

$$\begin{cases} A + M = 2, \\ -4A + B - 6M + N = -14, \\ 6A - B + 9M - 6N = 26, \\ -9A + 3B + 9N = 3. \end{cases}$$

Розв'язавши систему лінійних рівнянь (можна застосовувати метод Гаусса, формули Крамера і т.д.), знайдемо $A = -1,\ B = 1,\ M = 3,\ N = -1$.

Підставивши ці значення, остаточно маємо:

$$\frac{2x^3-14x^2+26x+3}{(x-3)^2(x^2-x+3)} = \frac{-1}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{3x-1}{x^2-x+3}.$$

Невідомі коефіцієнти у наведеному вище прикладі були знайдені *методом невизначених коефіцієнтів*.

Дробово-раціональну функцію можна інтегрувати за наступною *загальну схему*:

1. якщо дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ неправильний, то ділимо чисельник на знаменник і застосовуємо формулу (5.1) (виділяємо цілу частину);

2. знаменник $Q(x)$ розкладаємо на добуток лінійних і квадратичних множників, тобто представляємо його у формі (5.2);

3. правильний раціональний дріб $\frac{R(x)}{Q(x)}$ розкладаємо на найпростіші дроби за допомогою формули (5.3);

4. інтегруємо перетворену функцію.

Приклад 2. Обчислити $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$.

Розв'язання. Під знаком інтеграла неправильний дріб. Поділивши чисельник на знаменник, одержимо

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = x + 1 + \frac{2}{x^3-x^2+x-1}$$

Розкладемо знаменник в добуток:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1).$$

Застосуємо формулу (5.3) і приведемо до спільного знаменника:

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Прирівняємо чисельники крайніх дробив:

$$A(x^2+1) + (Mx+N)(x-1) = 2.$$

З метою визначення невідомих коефіцієнтів надамо x три числових значення (по кількості невідомих). У загальному випадку в якості вказаних значень потрібно брати дійсні корені знаменника (у нашому прикладі $x = 1$) і доповнювати їх деякими зручними для обчислень числами. Використовуючи останню рівність, дістаємо:

$$\begin{cases} x = 1:\ 2A = 2, \\ x = 0:\ A - N = 2, \\ x = 2:\ 5A + 2M + N = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1, \\ N = -1, \\ M = -1. \end{cases}$$

Можемо записати

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Інтегруємо:

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = \int \left(x + 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} + x + ln|x-1| -$$

$$-\frac{1}{2} ln|x^2+1| - arctg\, x + C.$$

У останніх прикладах наведені два різних метода для визначення невідомих коефіцієнтів формули (5.3). При розв'язуванні прикладів можна використовувати або один з них, або комбінувати обидва.

1.6. Інтегрування тригонометричних функцій.

Розглянемо інтеграл виду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx. \qquad (6.1)$$

Тут і надалі R – раціональна функція своїх аргументів. Інтеграл (6.1) зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки

$$tg\frac{x}{2} = t. \qquad (6.2)$$

Вказана заміна змінної називається *універсальною тригонометричною* підстановкою. Враховуючи що

$$\sin x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \quad x = 2\cdot arctg\, t,$$

дістаємо

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (6.3)$$

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+1}$.

Розв'язання. Застосовуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+1} = \left|tg\frac{x}{2} = t\right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1} =$$

$$= \int \frac{dt}{t+1} = ln|t+1| + C = ln\left|tg\frac{x}{2}+1\right| + C.$$

Недоліком підстановки (6.1) є те, що після її здійснення, як правило, під знаком інтеграла з'являються громіздкі вирази. Розглянемо деякі більш частинні випадки інтегралів від тригонометричних функцій.

1) Перший з інтегралів

$$\int R(\sin x)\cos x\,dx, \quad \int R(\cos x)\sin x\,dx \qquad (6.4)$$

береться за допомогою підстановки $\sin x = t$, а другий – $\cos x = t$.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x}$.

Розв'язання. Маємо перший з інтегралів (6.4). Можемо записати $\int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x} = \left| \begin{matrix} \sin x = t, \\ \cos x\, dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2} arctgt + C = \frac{1}{2} arctg\,\sin x + C.$

2) Для інтегралів

$$\int R(tgx)dx, \quad \int R(\sin^{2m} x\,, \cos^{2n} x)dx, \tag{6.5}$$

де m і n – цілі числа, потрібно застосувати підстановку $tg\,x = t$. Можемо записати

$$\sin^{2m} x = (\sin^2 x)^m = \left(\frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}\right)^m = \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^m,$$

$$\cos^{2n} x = (\cos^2 x)^n = \left(\frac{1}{1+tg^2 x}\right)^n = \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^n;$$

$$tg\,x = t, \;\; x = arctg\,t\,, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

Розв'язання. Маємо другий з інтегралів (6.5). Використовуючи заміну $tg\,x = t$, дістаємо

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{1}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{tg\,x}{\sqrt{2}} + C.$$

3) Інтеграли

$$\int R(\sin x) \cos^{2p+1} x\, dx, \quad \int R(\cos x) \sin^{2p+1} x\, dx, \tag{6.6}$$

де *p* –додатне ціле число, беруться за допомогою підстановок $\sin x = t$, $\cos x = t$ відповідно. Для цих інтегралів можемо записати

$$\cos^{2p+1} x\, dx = (\cos^2 x)^p \cos x\, dx =$$

$$= (1 - \sin^2 x)^p d\,\sin x = (1 - t^2)^p dt,$$

$$\sin^{2p+1} x\, dx = (\sin^2 x)^p \sin x\, dx =$$

$$= -(1 - \cos^2 x)^p d\,\cos x = -(1 - t^2)^p dt.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x\, dx$.

Розв'язання. Маємо другий з інтегралів (6.6). Робимо підстановку $\cos x = t$:

$$\int cos^2 x \cdot sin^3 x\, dx = \int cos^2 x \cdot sin^2 x \cdot sin\, x\, dx =$$

$$= -\int cos^2 x\,(1 - cos^2 x) d\, cos\, x = -\int t^2(1 - t^2)dt =$$

$$= -\int (t^2 - t^4)dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = -\frac{cos^3 x}{3} + \frac{cos^5 x}{5} + C.$$

4) Для інтегралів

$$\int sin^{2m} x\, cos^{2n} x\, dx, \qquad (6.7)$$

де m і n – цілі невід'ємні числа, застосовуються тригонометричні формули, які дозволяють знизити степінь тригонометричних функцій у два рази, а саме

$$cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos\, 2\, x),\ sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos\, 2\, x),\ sin\, x\, cos\, x = \frac{1}{2} sin\, 2\, x.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int sin^4 x\, dx$.

Розв'язання. Беремо інтеграл за допомогою формул зниження степеня:

$$\int sin^4 x\, dx = \int (sin^2 x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - cos\, 2\, x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\, cos\, 2\, x + cos^2\, 2\, x) dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int cos\, 2\, x dx +$$

$$+ \frac{1}{8}\int (1 + cos\, 4\, x) dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} sin\, 2\, x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} sin\, 4\, x + C.$$

5) Інтеграли

$$\int cos\, n\, x\, cos\, m\, x dx,\ \int sin\, m\, x\, cos\, n\, x dx,\ \int sin\, m\, x\, sin\, n\, x dx \qquad (6.8)$$

беруться за допомогою наступних тригонометричних формул (формул перетворення добутків у суми):

$$cos\, \alpha\, cos\, \beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta)),$$

$$sin\, \alpha\, cos\, \beta = \frac{1}{2}(sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta)),$$

$$sin\, \alpha\, sin\, \beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)).$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int cos\, 5\, x\, cos\, 3\, x\, dx$.

Розв'язання. Застосовуючи першу з наведених вище формул, дістаємо

$$\int cos\,5\,x\,cos\,3\,xdx = \frac{1}{2}\int(cos\,8\,x + cos\,2\,x)dx =$$

$$= \frac{1}{16}sin\,8\,x + \frac{1}{4}sin\,2\,x + C.$$

1.7. Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграл

$$\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}})dx \tag{7.1}$$

зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки

$$x = t^k; \quad dx = kt^{k-1}dt. \tag{7.2}$$

Тут R – раціональна функція своїх аргументів, k – найменше спільне кратне (НСК) знаменників n, … , s.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x}+1)\sqrt{x}}$.

Розв'язання. У даному випадку підінтегральна функція раціонально залежить від аргументів $x^{\frac{1}{4}}$ і $x^{\frac{1}{2}}$. Так як найменше спільне кратне чисел 4 і 2 дорівнює 4, то потрібно зробити підстановку $x = t^4$:

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x}+1)\sqrt{x}} = \begin{vmatrix} x = t^4, \\ dx = 4t^3dt \end{vmatrix} = \int \frac{4t^3dt}{(t+1)t^2} = 4\int \frac{(t+1)-1}{(t+1)}dt =$$

$$= 4\int dt - 4\int \frac{dt}{t+1} = 4t - 4\,ln|t+1| + C = \left|t = \sqrt[4]{x}\right| =$$

$$= 4\sqrt[4]{x} - 4\,ln\left|\sqrt[4]{x} + 1\right| + C.$$

Аналогічно попередньому, інтеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx \tag{7.3}$$

зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки

$$\frac{ax+b}{cx+g}=t^k;\quad x=\frac{gt^k-b}{a-ct^k};\quad dx=\frac{(ag-bc)kt^{k-1}}{(a-ct^k)^2}dt, \tag{7.4}$$

де k – НСК знаменників n, …, s.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1\right)^2\frac{dx}{x^2}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл типу (7.3). Робимо підстановку (7.4):

$$\frac{1-x}{1+x}=t^2,\quad 1-x=(1+x)t^2,\quad x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx=\frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt;$$

$$\int\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1\right)^2\frac{dx}{x^2}=\int(t+1)^2\cdot\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}\cdot\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt=$$

$$=-4\int\frac{t(1+t)^2}{(1-t)^2(1+t)^2}dt=-4\int\frac{t}{(t-1)^2}dt=-4\int\frac{(t-1)+1}{(t-1)^2}dt=$$

$$=-4\int\frac{dt}{t-1}-4\int\frac{dt}{(t-1)^2}=-4\,ln|t-1|+4(t-1)^{-1}+C=$$

$$=-4\,ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right|+4\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right)^{-1}+C.$$

Розглянемо інтеграл виду

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx\qquad(a\neq 0,\ b^2-4ac\neq 0). \tag{7.5}$$

Після виділення в квадратному тричлені повного квадрата і заміни змінної отримаємо один з трьох інтегралів, кожен з яких може бути знайдений при допомозі відповідної тригонометричної підстановки:

$$\int R(t,\sqrt{t^2+m^2})dt,\qquad t=m\,tg\,z \text{ або } t=mc\,tg\,z; \tag{7.6}$$

$$\int R(t,\sqrt{t^2-m^2})dt,\qquad t=m\,sin^{-1}z \text{ або } t=m\,cos^{-1}z; \tag{7.7}$$

$$\int R(t,\sqrt{m^2-t^2})dt,\qquad t=m\,sin\,z \text{ або } t=m\,cos\,z. \tag{7.8}$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x+5}}$.

Розв'язання. Виділяємо в знаменнику повний квадрат і робимо першу підстановку:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{(x-1)^2+4}} = \begin{vmatrix} x-1=t, \\ x=t+1, dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t^2+4}}.$$

Отримали інтеграл (7.6). Робимо вказану підстановку і, враховуючи, що $1+tg^2\, z = \frac{1}{cos^2\, z}$, дістаємо

$$= \int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t^2+4}} = \left| t = 2\, tg\, z\,,\ dt = \frac{2dz}{cos^2\, z} \right| = \int \frac{dz}{2\, sin\, z + cos\, z}.$$

Останній інтеграл береться за допомогою універсальної тригонометричної підстановки:

$$\int \frac{dz}{2\, sin\, z + cos\, z} = \left| tg\frac{z}{2} = v \right| = \int \frac{-2dv}{v^2-4v-1} = -2\int \frac{dv}{(v-2)^2-5} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} ln\left|\frac{v-2-\sqrt{5}}{v-2+\sqrt{5}}\right| + C = -\frac{1}{\sqrt{5}} ln\left|\frac{tg\frac{arctg\frac{x-1}{2}}{2}-2-\sqrt{5}}{tg\frac{arctg\frac{x-1}{2}}{2}-2+\sqrt{5}}\right| + C.$$

Розділ 2. Визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла.

2.1. Означення та основні властивості визначеного інтеграла.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$.

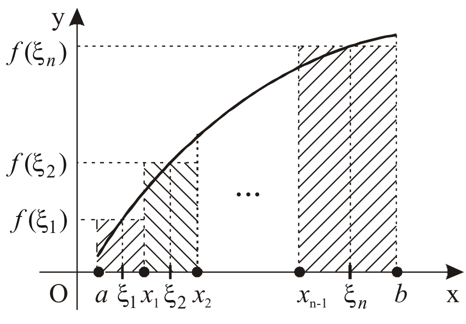


Рис.1

Розіб'ємо вказаний відрізок на n частин точками поділу $a = x_0$, x_1,

$x_2, \ldots, x_{n-1}$, $x_n = b$, причому $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ (рис.1). Введемо позначення $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. На кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ певним чином виберемо по одній точці $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Складемо суму

$$s_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (1.1)$$

Сума s_n називається *інтегральною сумою* функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Очевидно, що значення інтегральної суми залежить від самої функції $f(x)$, способу розбиття відрізка $[a,b]$ на *n* частин і від вибору точок ξ_i. Нехай λ – найбільша з величин Δx_i $(i = 1,2,\ldots,n)$. Відмітимо, що при $\lambda \to 0$ число відрізків *n* нескінченно збільшується.

Якщо існує границя інтегральної суми (1.1) при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a,b]$ на частини, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом* функції $y = f(x)$ на проміжку $[a,b]$.

Визначений інтеграл позначається через $\int_a^b f(x)dx$, де a, b – відповідно нижня і верхня межа інтегрування, $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз. Отже, можемо записати

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (1.2)$$

Якщо визначений інтеграл існує (існує границя інтегральної суми), то функція $f(x)$ називається *інтегровною* на проміжку $[a,b]$.

Дамо *геометричний зміст* визначеного інтеграла. Нехай $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$. Кожен доданок $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ інтегральної суми (1.1) дорівнює площі прямокутника зі сторонами $f(\xi_i)$ і Δx_i (рис. 18), а вся інтегральна сума дорівнює площі фігури, що обмежена віссю Ох, вертикальними прямими $x = a, x = b$ і ламаною лінією, ланки якої паралельні координатним осям. Очевидно, що при $\lambda \to 0$ вказана ламана прямує до кривої $y = f(x)$. Таким чином визначений інтеграл (1.2) при

$f(x) \geq 0$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції (див. нижче рис. 2, а), тобто площі фігури, яка зліва обмежена прямою $x = a,$ справа – прямою $x = b$, знизу – віссю Ох і зверху – кривою $y = f(x)$.

Основні властивості визначеного інтеграла:

1) $\int_a^a (x)dx = 0,$ 2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$

3) $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,$

4) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$

6) $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$

де k – стала; числа m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції *f(x)* на відрізку $[a, b]$.

2.2. Обчислення визначеного інтеграла.

В основі обчислення визначеного інтеграла лежить *формула Ньютона-Лейбніца*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a), \quad (2.1)$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$.

Приклад 1. Обчислити інтеграли:

а) $\int_0^{\pi/6} \sin 2xdx$; б) $\int_0^1 \left(\frac{3}{1+x^2} + 5e^{2x}\right)dx$.

Розв'язання. а) Використовуючи (2.1), отримуємо

$$\int_0^{\pi/6} \sin 2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/6} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}.$$

б) Застосовуючи третю та четверту властивості, дістаємо

$$\int_0^1 \left(\frac{3}{1+x^2} + 5e^{2x}\right)dx = 3\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}dx + 5\int_0^1 e^{2x}dx =$$

$$= \left(3\, arctg\, x + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} e^{2x}\right)\Big|_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} = \frac{3\pi}{4} + \frac{5}{2} e^2 - \frac{5}{2}.$$

Розглянуті в першому розділі метод інтегрування частинами і метод заміни змінної переносяться і на випадок визначеного інтеграла. *Інтегрування частинами* у визначеному інтегралі здійснюється за допомогою формули

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du. \qquad (2.2)$$

Даний метод застосовують до тих же функцій, що й у випадку невизначеного інтеграла.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_0^2 x \cdot e^{3x} dx$.

Розв'язання. На основі (2.2) маємо

$$\int_0^2 x \cdot e^{3x} dx = \left| u = x,\ dv = e^{3x}dx,\ du = dx,\ v = \frac{1}{3}e^{3x} \right| = \frac{1}{3} x e^{3x}\Big|_0^2 -$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^2 e^{3x}\, dx = \frac{2}{3}e^6 - \frac{1}{9}e^{3x}\Big|_0^2 = \frac{5}{9}e^6 + \frac{1}{9}.$$

Метод заміни змінної у визначеному інтегралі при застосуванні підстановки $x = \phi(t)$ базується на формулі

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt. \qquad (2.3)$$

Нові межі інтегрування у правій частині визначаються рівностями$\phi(\alpha) = a,\ \phi(\beta) = b$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$.

Розв'язання. Використовуючи (2.3), отримуємо

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \begin{vmatrix} x = t^2,\ dx = 2tdt, \\ \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta^2 = 4 \Rightarrow \beta = 2 \end{vmatrix} = \int_1^2 \frac{2tdt}{t(t+1)} =$$

$$=2\int_1^2 \frac{dt}{t+1} = 2\, ln|t+1||_1^2 = 2\, ln\, 3 - 2\, ln\, 2 = 2\, ln\frac{3}{2}.$$

2.3. Площа плоскої фігури.

Площа криволінійної трапеції (рис. 2, а), тобто площа фігури,

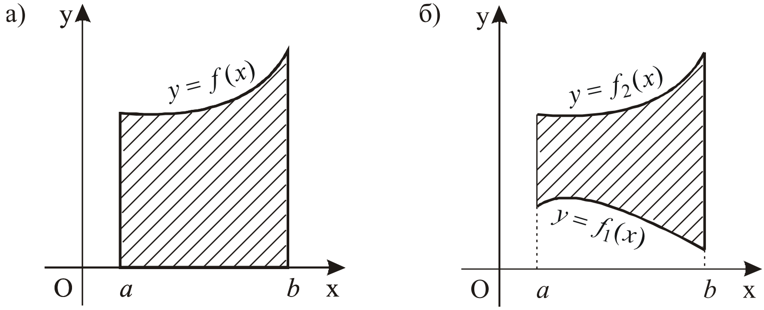


Рис.2

яка обмежена прямими $x = a,\ x = b\ (a < b)$, віссю Ох і кривою $y = f(x)\ (f(x) \geq 0)$, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{3.1}$$

Площа фігури (рис. 2, б), яка обмежена прямими $x = a,\ x = b\ (a < b)$ і кривими $y = f_1(x),\ y = f_2(x)\ (f_1(x) \leq f_2(x))$ обчислюються за формулою:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \tag{3.2}$$

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y = x^3,\ y = 0,\ x = 1$; б) $y = 2\sqrt{x},\ y = x$.

Розв'язання. а) Побудувавши графіки всіх заданих рівнянь, одержимо фігуру, площу якої потрібно знайти (рис. 3). Застосовуємо формулу (3.1), причому звертаємо увагу на те, що підінтегральна функція) $f(x)$ визначається рівнянням лінії, яка обмежує криволінійну трапецію зверху:

$$S = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

б) Спочатку будуємо фігуру (рис. 4). Розв'язавши систему двох

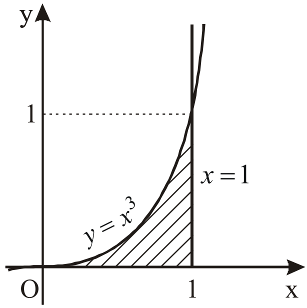


Рис.3

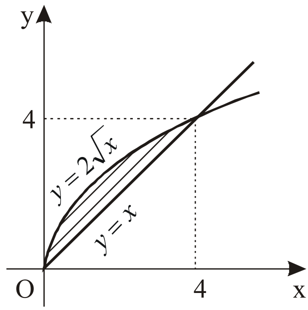


Рис.4

рівнянь $y = 2\sqrt{x}$ і $y = x$, одержимо координати точок перетину кривих, а саме (0;0) і (4;4). Застосовуємо формулу (3.2):

$$S = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x)dx = \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4 = \frac{8}{3}.$$

Якщо верхня межа криволінійної трапеції (рис.5) задана параметричними рівняннями $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, причому $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$, то її площа обчислюється за формулою:

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\phi'(t)dt. \tag{3.3}$$

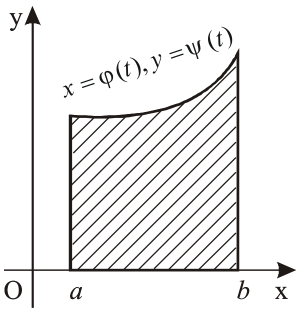


Рис.5

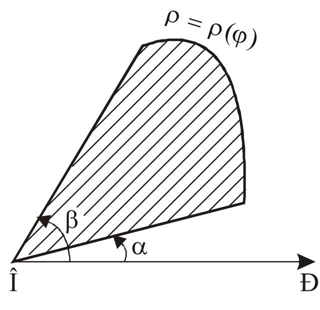


Рис.6

Площа криволінійного сектора (рис.6), заданого в полярних координатах співвідношенням $\rho = \rho(\phi)$, $\alpha \le \phi \le \beta$, визначається наступною рівністю

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi)d\phi. \tag{3.4}$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

а) $x = 4\cos t\,,\; y = 2\sin t\,;$ б) $\rho = a\cos 2\phi.$

Розв'язання. а) Визначаємо декілька опорних точок, які наведені в таблиці, та будуємо задану криву (рис. 7).

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
x	4	3.46	2.83	2.00	0	-4	0
y	0	1	1.41	1.73	2	0	-2

Враховуючи симетрію фігури, знаходимо площу четвертої частини (подвійна штриховка) і множимо її на 4. Так як крива задана параметричними рівняннями, то застосовуємо формулу (3.3). Знайдемо межі інтегрування:

$$4\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pi/2,\; 4\cos\beta = 4 \Rightarrow \beta = 0.$$

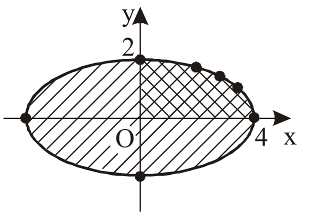


Рис.7

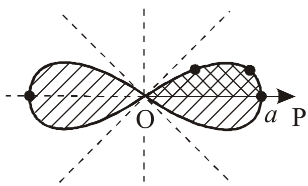


Рис.8

Обчислюємо площу:

$$S = 4\int_{\pi/2}^{0} 2\sin t\,(-4\sin t)dt = -32\int_{\pi/2}^{0} \sin^2 t\,dt =$$

$$= -16\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos 2t)dt = -16(t - \tfrac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{\pi/2}^{0} = 8\pi.$$

б) При побудові кривої необхідно мати на увазі, що вона визначена не для всіх значень аргументу φ. Так як $\rho \geq 0$, то дістаємо

$$a\cos 2\phi \geq 0 \Rightarrow \phi \in [-\pi/4;\pi/4] \cup [3\pi/4;5\pi/4].$$

З врахуванням сказаного визначаємо опорні точки, які наведені в таблиці, та будуємо криву (рис. 8).

φ	$-\pi/4$	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$3\pi/4$		$5\pi/4$
ρ	0	a	$0{,}87a$	$0.5a$	0	0	a	0

Застосовуючи формулу (3.4) і враховуючи симетрію, маємо

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2 \cos^2 2\phi d\phi = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}(1+\cos 4\phi)d\phi =$$

$$= a^2\left(\phi + \frac{1}{4}\sin 4\phi\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2\pi}{4}.$$

2.4. Довжина дуги кривої.

Довжина l дуги кривої $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ обчислюється за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx\ . \tag{4.1}$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$, то формула (3.1) перетворюється до вигляду

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \tag{4.2}$$

У випадку полярних координатах, коли лінія задана рівнянням $\rho = \rho(\phi)$, $\alpha \leq \phi \leq \beta$, довжина дуги визначається формулою

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\phi) + (\rho'(\phi))^2} d\phi. \tag{4.3}$$

Приклад 1. Обчислити довжину дуги параболи $y = 0{,}5x^2$ від $x = 0$ до $x = 1$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (4.1). Знайдемо спочатку підінтегральну функцію:

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + ((0{,}5x^2)')^2} = \sqrt{1 + x^2}.$$

Обчислюємо довжину (знаходження первісної див. 1.2, прикл. 2,б):

$$l=\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+ln(1+\sqrt{2})).$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$, то формула (4.1) перетворюється до вигляду

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{(\phi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt. \qquad (4.2)$$

Довжина дуги просторової кривої $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ обчислюється за формулою

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt. \qquad (4.3)$$

Приклад 2. Знайти довжину дуги астероїди $x=2\,cos^3\,t,\ y=2\,sin^3\,t$ від $t=0$ до $t=\pi/2$.

Розв'язання. Лінія задана параметричними рівняннями, тому скористаємося формулою (4.2). Маємо:

$$\sqrt{(\phi'(t))^2+(\psi'(t))^2}=\sqrt{(6\,cos^2\,t\cdot(-\,sin\,t))^2+(6\,sin^2\,t\cdot cos\,t)^2}=$$

$$=6\sqrt{cos^2\,t\cdot sin^2\,t\,(cos^2\,t+sin^2\,t)}=6\,cos\,t\cdot sin\,t=3\,sin\,2\,t;$$

$$l=\int_0^{\pi/2} 3\,sin\,2\,tdt=-\frac{3}{2}cos\,2\,t\Big|_0^{\pi/2}=-\frac{3}{2}(-1-1)=3.$$

У випадку полярних координатах, коли лінія задана рівнянням $\rho=\rho(\phi)$, $\alpha\le\phi\le\beta$, довжина дуги визначається формулою

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\phi)+(\rho'(\phi))^2}d\phi. \qquad (4.4)$$

Приклад 3. Обчислити довжину дуги кривої $\rho=a\,cos\,\phi,-\pi/2\le\phi\le\pi/2$.

Розв'язання. Крива задана у полярній системі координат. Застосуємо формулу (4.4):

$$l=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{a^2\,cos^2\,\phi+a^2\,sin^2\,\phi}\,d\phi=a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\phi=a\phi|_{-\pi/2}^{\pi/2}=a\pi.$$

2.5. Обчислення об'єму тіла обертання і площі поверхні обертання

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену лінією $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, віссю *Ox* і двома вертикальними прямими $x = a,\ x = b$ (рис.9). Обертаючи цю фігуру навколо осі *Ox*, одержимо тіло у просторі. Об'єм отриманого тіла обертання і площа поверхні обертання обчислюються відповідно за формулами:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx, \tag{5.1}$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f^{'}(x))^2}\, dx. \tag{5.2}$$

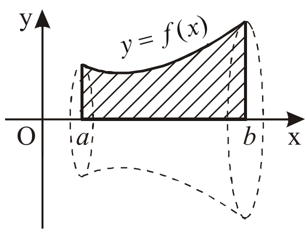


Рис.9

Якщо крива, яка обмежує криволінійну трапецію зверху, задана параметричними рівняннями $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq \phi \leq \beta$, то

$$V = \pi \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \psi^2(t)\phi^{'}(t)dt, \tag{5.3}$$

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\phi^{'}(t))^2 + (\psi^{'}(t))^2}\, dt. \tag{5.4}$$

Межі інтегрування у формулі (5.3) визначаються рівностями $\phi(\tilde{\alpha}) = a$ і $\phi(\tilde{\beta}) = b$ (можливі варіанти $\tilde{\alpha} = \alpha,\ \tilde{\beta} = \beta$ або $\tilde{\alpha} = \beta,\ \tilde{\beta} = \alpha$).

Приклад 1. Плоска фігура, яка обмежена лініями $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$ обертається навколо осі Ox. Обчислити: а) об'єм тіла обертання; б) площу поверхні обертання.

Розв'язання. а) Побудувавши фігуру (рис.20) і застосувавши формулу (5.1), отримуємо

$$V = \pi \int_0^1 x^6 dx = \pi \frac{x^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{7}.$$

б) Використовуючи формулу (5.2), дістаємо

$$S = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = 2\pi \cdot \frac{1}{36} \int_0^1 (1 + 9x^4)^{\frac{1}{2}} d(1 + 9x^4) =$$

$$= \frac{\pi}{27} (1 + 9x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{\pi(10\sqrt{10} - 1)}{27}.$$

2.6. Обчислення статичних моментів, моментів інерції та координат центра ваги

При розв'язанні багатьох задач механіки та фізики використовуються такі поняття як *статичні моменти, моменти інерції* та *центр ваги*. Наведемо далі методи обчислення вказаних величин для криволінійної трапеції та дуги плоскої кривої (розглядаються однорідні тіла з густиною $\rho = 1$).

Нехай задана дуга плоскої кривої $y = f(x)$, яка обмежена прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$. Статичні моменти дуги відносно координатних осей (позначаються через M_x, M_y), моменти інерції дуги (позначаються через I_x, I_y) та координати центра ваги (позначаються через $\bar{x},\ \bar{y}$) обчислюються за формулами:

$$M_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,\ M_y = \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad (6.1)$$

$$I_x = \int_a^b f^2(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,\ I_y = \int_a^b x^2\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad (6.2)$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{l},\ \bar{y} = \frac{M_x}{l};\ l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad (6.3)$$

де l – довжина дуги.

Приклад 1. Знайти статичний момент дуги кривої $y = 2\sqrt{x}$ $(0 \le x \le 3)$ відносно осі Ох.

Розв'язання. Застосовуємо першу з формул (6.1):

$$f'(x) = \left(2\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}},\ \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}};$$

$$M_x = \int_1^3 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}}dx = 2\int_1^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}dx = 2 \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3 = \frac{8(4-\sqrt{2})}{3}.$$

Якщо дуга задана параметричними рівняннями $x = \phi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta$, то відповідні формули приймають вигляд:

$$M_x = \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt, \tag{6.4}$$

$$M_y = \int_\alpha^\beta \phi(t)\sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt, \tag{6.5}$$

$$I_x = \int_\alpha^\beta \psi^2(t)\sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt, \tag{6.6}$$

$$I_y = \int_\alpha^\beta \phi^2(t)\sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt, \tag{6.7}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{l},\ \bar{y} = \frac{M_x}{l};\ l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt. \tag{6.8}$$

Приклад 2. Знайти момент інерції дуги кривої $x = \frac{1}{2}t^2, y = \frac{4}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}$ $(0 \le t \le 2)$ відносно осі Oy.

Розв'язання. Використовуємо формулу (6.7):

$$\phi'(t) = \left(\frac{1}{2}t^2\right)' = t,\ \psi'(t) = \left(\frac{4}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}\right)' = 2(t+1)^{\frac{1}{2}};$$

$$\sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} = \sqrt{t^2 + 4t + 4} = \sqrt{(t+2)^2} = t + 2;$$

$$I_y = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}t^2\right)^2 \cdot (t+2)dt = \frac{1}{4}\int_0^2 (t^5 + 2t^4)dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^6}{6} + 2 \cdot \frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{88}{15}.$$

Розглянемо тепер криволінійну трапецію, яка обмежена прямими $x = a,\ x = b\ (a < b)$, кривою $y = f(x)\ (f(x) \ge 0)$ і віссю Ox (рис. 2). Статичні моменти, моменти інерції та координати центра ваги вказаної фігури обчислюються за формулами:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx,\ M_y = \int_a^b xf(x)dx, \tag{6.9}$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b f^3(x)dx,\ I_y = \int_a^b x^2 f(x)dx, \tag{6.10}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{S},\ \bar{y} = \frac{M_x}{S};\ S = \int_a^b f(x)dx, \tag{6.11}$$

де S – площа фігури.

Приклад 3. Знайти координати центра ваги плоскої фігури, яка обмежена дугою параболи $y = 2x - x^2$ та віссю Ox.

Розв'язання. Так як фігура симетрична відносно прямої $x = 1$ (рис. 10), то $\bar{x} = 1$. Використовуючи формули (6.11), отримуємо:

$$S = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3};$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{15};\ \ \bar{y} = \frac{M_x}{S} = \frac{8}{15}\cdot\frac{3}{4} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

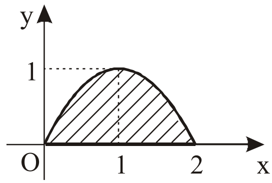


Рис.10

Якщо дуга, яка обмежує криволінійну трапецію зверху, задана параметричними рівняннями $x = \phi(t),\ y = \psi(t)$, то маємо:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\phi'(t)dt,\ M_y = \int_\alpha^\beta \phi(t)\psi(t)\phi'(t)dt, \quad (6.12)$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta \psi^3(t)\phi'(t)dt,\ I_y = \int_\alpha^\beta \phi^2(t)\psi(t)\phi'(t)dt, \quad (6.13)$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{S},\ \bar{y} = \frac{M_x}{S};\ S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\phi'(t)dt. \quad (6.14)$$

Межі інтегрування у формулах (6.12) – (6.14) визначаються рівностями $\phi(\alpha) = a,\ \phi(\beta) = b$, тобто $t = \alpha$ відповідає крайнім лівим точкам криволінійної трапеції, а $t = \beta$ – крайнім правим.

Приклад 4. Знайти момент інерції I_y плоскої фігури, яка обмежена дугою кола $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t\ (y \geq 0)$, прямими $x = -1,\ x = 1$ і віссю Ox.

Розв'язання. Оскільки крива, яка обмежує криволінійну трапецію зверху (рис.11) задана параметричними рівняннями, то використовуємо другу з формул (6.13). Знайдемо спочатку межі інтегрування:

$$2\cos\alpha = -1,\ \cos\alpha = -1/2,\ \alpha = 2\pi/3\,;$$

$$2\cos\beta = 1,\ \cos\beta = 1/2,\ \beta = \pi/3.$$

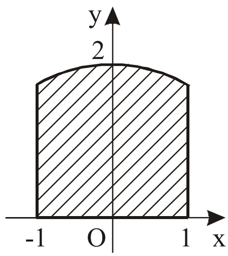


Рис.11

Визначаємо момент інерції:

$$I_y = \int_{2\pi/3}^{\pi/3} 4\cos^2 t \cdot 2\sin t \cdot (2\cos t)' dt = -4\int_{2\pi/3}^{\pi/3} (2\sin t\cos t)^2 dt =$$

$$= -4\int_{2\pi/3}^{\pi/3} \sin^2 2t dt = -2\int_{2\pi/3}^{\pi/3} (1-\cos 4t)dt =$$

$$= -2\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_{2\pi/3}^{\pi/3} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

2.7. Обчислення роботи та деякі задачі механіки рідин

Нехай точка М під дією змінної сили $F(x)$ перемістилася вздовж осі *Ox* з положення $x = a$ у положення $x = b$, причому напрям сили збігається з напрямом переміщення. Робота А, витрачена на вказане переміщення, обчислюється за формулою

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{7.1}$$

У частинному випадку, коли $F(x) = F$ є сталою величиною, будемо мати

$$A = \int_a^b F\,dx = F\int_a^b dx = Fx|_a^b = F(b-a),$$

тобто робота дорівнює добутку сили на пройдений шлях.

Приклад 1. Яку роботу потрібно витратити, щоб розтягнути пружину на 5 см, якщо сила 100 Н розтягує пружину на 1 см.

Розв'язання. Згідно з законом Гука $F = kx$, де x – розтягнення пружини в метрах, F – сила в ньютонах. Підставивши задані значення F і x, знайдемо коефіцієнт пропорційності k і запишемо закон Гука у явному вигляді:

$$100 = k \cdot 0.01,\ k = 10000,\ F = 10000x.$$

Застосувавши формулу (6.1), маємо

$$A = \int_0^{0,05} 10000x\,dx = 5000x^2|_0^{0,05} = 12{,}5 \text{ Дж.}$$

Наступний приклад ілюструє *метод інтегральних сум*, який часто застосовується в теорії визначеного інтеграла.

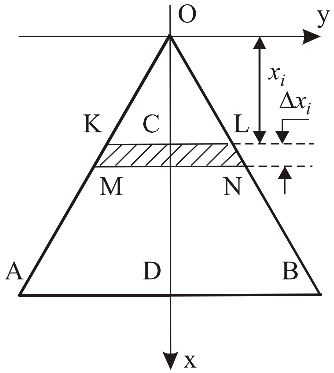


Рис.12

Приклад 2. Пластина у вигляді правильного трикутника зі стороною a занурена вертикально у рідину, причому одна з вершин трикутника розміщена на поверхні рідини, а основа паралельна їй. Визначити величину сили тиску рідини на цю пластину.

Розв'язання. Систему координат Oxy обираємо у відповідності з рисунком (рис.12). Задану пластину розіб’ємо на *n* вузьких горизонтальних смуг, товщини яких позначимо через Δx_i ($i = 1,2,\ldots,n$). Розглянемо i-ту смугу (чотирикутник MKLN). Оскільки Δx_i є малою величиною, то площу ΔS_i, цієї смуги можна приблизно обчислити як площу прямокутника:

$$\Delta S_i \approx KL \cdot \Delta x_i = \frac{2x_i}{\sqrt{3}} \cdot \Delta x_i;\ KL = 2CL = 2 \cdot OC \cdot tg30^0 = \frac{2x_i}{\sqrt{3}}.$$

Згідно з *законом Паскаля* тиск рідини *P* на площадку визначається формулою $P = \rho g h S$, де ρ – густина, *g* – прискорення вільного падіння, *h* – глибина занурення, *S* площа площадки. Знайдемо тиск на i-ту смугу (глибина занурення $h = x_i$):

$$P_i = \rho g x_i \Delta S_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \rho g x_i^2 \Delta x_i.$$

Просумувавши всі P_i, одержимо наближене значення сили тиску рідини на всю пластину:

$$P \approx \sum_{i=1}^{i=n} P_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{3}} \rho g x_i^2 \Delta x_i.$$

Нехай $\lambda = max(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$. Здійснивши граничний перехід в останній рівності при $\lambda \to 0$, одержимо точну формулу (отримаємо границю інтегральної суми). Враховуючи, що $OD = OB \cdot sin\, 6\, 0^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, можемо записати

$$P = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{3}} \rho g x_i^2 \Delta x_i = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \frac{2}{\sqrt{3}} \rho g x^2 dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \rho g \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{a^3 \rho g}{4}.$$

На наступних двох прикладах розглянемо метод, який по своїй суті подібний до методу інтегральних сум, але формально дещо відрізняється від нього.

Приклад 3. Поверхня ями, яка до країв наповнена водою, є поверхнею обертання дуги параболи $y = \sqrt{1 - x}$ $(0 \le x \le 1)$ навколо осі Ox (рис.13). Знайти роботу, витрачену на викачування води з цієї ями.

Розв'язання. Двома площинами, перпендикулярними осі Ох, на глибіні x виділяємо елементарний шар води малої товщини dx. Враховуючи, що dx є малою величиною, об'єм dV вказаного елементарного шару з точністю до нескінченно малих більш високого порядку малості можна обчислити як об'єм циліндра з радіусом основи $\sqrt{1-x}$ і висотою dx:

$$dV = \pi\left(\sqrt{1-x}\right)^2 dx = \pi(1-x)dx.$$

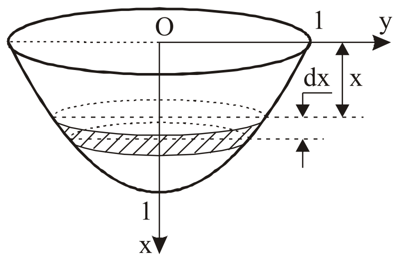


Рис.13

Знайдемо масу dm елементарного шару:

$$dm = \rho dV = \rho\pi(1-x)dx.$$

Елементарна робота dA, яка витрачається на підняття виділеного шару на висоту x, дорівнює добутку сили тяжіння $F = gdm$ на пройдений шлях x, тобто

$$dA = g\rho\pi(1-x)xdx.$$

Проінтегрувавши останню рівність знайдемо роботу, яка витрачається на викачування всієї води ($\rho = 1000$кг/м^3, $g \approx 9{,}8$м/с^2, $\pi \approx 3{,}14$):

$$A = \int_0^1 g\rho\pi x(1-x)dx = g\rho\pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 \approx 5128{,}7\text{Дж}.$$

Приклад 4. За який час вода, яка наповнює циліндричну посудину з площею основи $S = 100$см^2 і висотою $H = 20$см, витече через отвір на дні площею $S_0 = 1$см^2.

Розв'язання. При розв'язанні цієї задачі використовується *закон Торічеллі*: швидкість стікання води з малого отвору на відстані h від вільної поверхні визначається формулою $v = \mu\sqrt{2gh}$, де $\mu \approx 0{,}6$, g – прискорення вільного падіння.

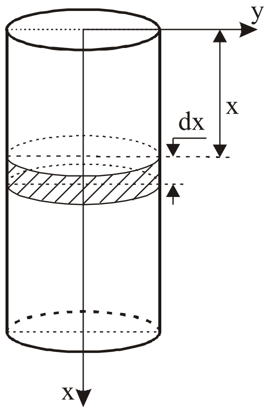


Рис.14

Нехай в деякий момент часу вільна поверхня води знаходиться на відстані x від верхнього краю посудини (рис.14). Виділяємо елементарний шар води товщиною dx і об'ємом $dV = Sdx$. Якщо цей шар витікає за проміжок часу dt зі швидкістю стікання v, то очевидно, що повинна виконуватися рівність $dV = vS_0dt$. Використовуючи формулу Торічеллі можемо записати (у нашому випадку відстань від вільної поверхні $h = H - x$)

$$dt = \frac{dV}{S_0 v} = \frac{Sdx}{S_0\mu\sqrt{2g(H-x)}}.$$

Обчислюємо час витікання всієї води (інтегруємо):

$$t = \int_0^H \frac{Sdx}{S_0\mu\sqrt{2g(H-x)}} = \frac{S}{S_0\mu\sqrt{2g}}\int_0^H (H-x)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= -\frac{S}{S_0\mu\sqrt{2g}} \cdot 2(H-x)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^H = \frac{S}{S_0\mu} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 33{,}7\text{с}.$$

2.8. Невласні інтеграли

Розглянемо спочатку *невласні інтеграли з нескінченими границями* (*невласні інтеграли першого роду*). Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; +\infty)$. Невласний інтеграл від цієї функції на півнескінченному інтервалі визначається наступним чином:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_a^{\beta} f(x)dx,. \tag{8.1}$$

Якщо границя у правій частині записаної формули існує, то кажуть, що невласний інтеграл *збігається*; якщо ж границя не існує, то інтеграл *розбігається*. Аналогічно для функції $f(x)$, яка неперервна на інтервалі $[-\infty; b)$, маємо

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{b} f(x)dx. \tag{8.2}$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на R, то невласний інтеграл з нескінченними границями від цієї функції визначається так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \tag{8.3}$$

де c – довільне число. Невласні інтеграли правої частини останньої рівності досліджуються за допомогою формул (8.2) і (8.1).

Приклад 1. Обчислити невласні інтеграли (або показати, що вони розбігаються): а) $\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2+1}$; б) $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

Розв'язання. а) Застосовуємо формулу (8.2):

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\alpha\to-\infty} arctg\, x\Big|_{\alpha}^{1} =$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty} (arctg\, 1 - arctg\, \alpha) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

б) Використовуючи (8.1), отримуємо

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\beta\to+\infty} \int_e^{\beta} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\beta\to+\infty} \int_e^{\beta} (\ln x)^{-\frac{1}{3}} d\ln x =$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} \frac{3}{2}(\ln x)^{\frac{2}{3}}\Big|_e^{\beta} = \frac{3}{2}\lim_{\beta\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\ln^2\beta} - \sqrt[3]{\ln^2 e}\right) = \frac{3}{2}(\infty - 1) = \infty.$$

Інтеграл розбігається.

Розглянемо тепер *невласні інтеграли від функцій, які мають точки розриву* (*невласні інтеграли другого роду*). Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b)$, а в точці $x = b$ вона терпить розрив або невизначена. Невласний інтеграл від цієї функції на проміжку $[a,b]$ визначається наступною рівністю

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta\to b-0} \int_a^{\beta} f(x)dx. \tag{8.4}$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $(a;b]$, а в точці $x = a$ терпить розрив або невизначена, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to a+0} \int_{\alpha}^{b} f(x)dx. \tag{8.5}$$

У випадку, коли функція $f(x)$ терпить розрив у внутрішній точці $x = c$ проміжку $[a,b]$, невласний інтеграл визначається наступним чином

$$\int_a^b \phi(x)dx = \int_a^c \phi(x)dx + \int_c^b \phi(x)dx. \tag{8.6}$$

Приклад 2. Обчислити невласний інтеграл (або показати, що він розбігається) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Розв'язання: Так як при $x = 1$ підінтегральна функція невизначена ($\ln 1 = 0$), то маємо невласний інтеграл. Застосовуємо формулу (8.5):

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\alpha\to1+0} \int_{\alpha}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\alpha\to1+0} \int_{\alpha}^{e} (\ln x)^{-\frac{1}{2}} d\ln x =$$

$$= \lim_{\alpha\to1+0} 2(\ln x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{\alpha}^{e} = 2\lim_{\alpha\to1+0}\left(\sqrt{\ln e} - \sqrt{\ln\alpha}\right) = 2(1-0) = 2.$$

2.9. *Наближені обчислення визначеного інтеграла*

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі $[a, b]$. У цьому випадку, як відомо, існує визначений інтеграл (існує границя інтегральної суми) $\int_a^b f(x)dx$. Якщо первісна для функції $f(x)$ в елементарних функціях не виражається, то вказаний інтеграл обчислюється за допомогою однієї з наближених формул. Розглянемо далі *формулу трапецій* і *формулу Сімпсона*.

Розіб'ємо інтервал $[a, b]$ на n рівних частин точками поділу $a = x_0 < x_1 <\ldots< x_n = b$ і введемо позначення:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n);\quad h = (b - a)/n.$$

Наближена *формула трапецій* має вигляд

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \qquad (9.1)$$

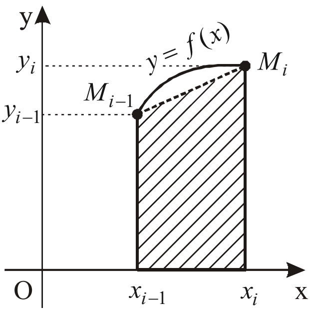


Рис.15

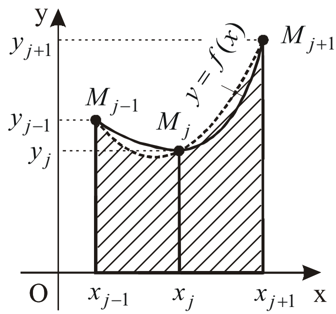


Рис.16

Якщо функція $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$ невід'ємна, то формула (9.1) має просту *геометричну інтерпретацію*: на кожному проміжку $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1,2, \ldots, n$ інтеграл лівої частини вказаної формули дорівнює площі криволінійної трапеції, яка обмежена зверху дугою $M_{i-1}M_i$ кривої $y = f(x)$ (рис. 15), а відповідна складова правої частини дорівнює площі звичайної трапеції, яка отримана з вищезгаданої шляхом заміни верхньої межі прямолінійним відрізком $M_{i-1}M_i$.

Абсолютна похибка Δ формули (9.1) визначається співвідношеннями

$$\Delta \leq \frac{k(b-a)^3}{12n^2}, \quad k = \max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|. \quad (9.2)$$

Розіб'ємо тепер проміжок $[a,b]$ на *парне* число *n* рівних частин. Використовуючи прийняті вище позначення, можемо записати

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + \\ + y_4 + \ldots + y_{n-2})). \quad (9.3)$$

Формула (9.3) називається *формулою парабол* або *формулою Сімпсона*. *Геометричний зміст* формули (9.3) подібний до геометричного змісту формули (9.1). Різниця полягає лише у тому, що на кожному проміжку $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ $(j = 1,3,\ldots,n-1)$ дуга $M_{j-1}M_{j+1}$ кривої $y = f(x)$ (Рис. 16) замінюється дугою квадратичної параболи, яка проходить через точки $M_{j-1},\ M_j,\ M_{j+1}$.

Формула Сімпсона є більш точною ніж формула трапецій. Абсолютна похибка Δ формули (9.3) визначається співвідношеннями

$$\Delta \leq \frac{k(b-a)^5}{180n^4}, \quad k = \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|. \quad (9.4)$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_1^5 \frac{dx}{x^2}$ за формулою: а) Ньютона-Лейбніца; б) трапецій; в) Сімпсона. Знайти абсолютну та відносну похибки наближених методів.

Розв'язання. а) Знайдемо точне значення інтеграла:

$$I = \int_1^5 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^5 = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

б) Розіб'ємо відрізок $[1;5]$ на вісім рівних частин. Отже, $n = 8$, $h = (5-1)/8 = 0{,}5$. Так як для нашого прикладу $f(x) = 1/x^2$, то $y_i = 1/x_i^2$ $(i = 0,1,2,\ldots,8)$. Відповідні значення x_i і y_i представлені в наведеній нижче таблиці.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y_i	1	$4/9$	$1/4$	$4/25$	$1/9$	$4/49$	$1/16$	$4/81$	$1/25$

Застосовуємо формулу (9.1):

$$I_{mp} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{25}\right)+\frac{4}{9}+\frac{1}{4}+\frac{4}{25}+\frac{1}{9}+\frac{4}{49}+\frac{1}{16}+\frac{4}{81}\right) = 0{,}8395.$$

Знайдемо абсолютну та відносну помилки:

$$\Delta = \left|I - I_{mp}\right| = |0{,}8 - 0{,}8395| = 0{,}0395;\ \ \delta = \left|\frac{\Delta}{I}\right| \cdot 100\% =$$

$$= \frac{0{,}0395}{0{,}8} \cdot 100\% = 4{,}9\%.$$

в) Обчислюємо інтеграл за формулою Сімпсона:

$$I_c \approx \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{25}+4\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{25}+\frac{4}{49}+\frac{4}{81}\right)+2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right)\right) = 0{,}8048.$$

Визначаємо абсолютну та відносну помилки:

$$\Delta = |I - I_c| = |0{,}8 - 0{,}8048| = 0{,}0048;\ \ \delta = \left|\frac{\Delta}{I}\right| \cdot 100\% = \frac{0{,}0048}{0{,}8} \cdot$$

$$100\% = 0{,}6\%.$$

Як бачимо, формула Сімпсона справді дає більш точний результат ніж формула трапецій.

Оцінки похибок (9.2) і (9.4) показують, що точність обох методів збільшується при збільшенні числа n.

Розділ 3. Диференціальне числення функції декількох змінних

3.1. Поняття функції декількох змінних

Теорія функції однієї змінної, яка вивчалася раніше, дозволяє дослідити взаємозв'язок між двома змінними величинами, але на практиці часто виникає ситуація, коли взаємозалежними є вже не дві, а три і більше величин. Наприклад, сила току в провіднику залежить від напруги й опору; об'єм прямокутного паралелепіпеда визначається трьома лінійними розмірами; кількість витраченого автомобілем палива залежить від пройденої відстані, швидкості, рельєфу дороги, ваги вантажу і т. д. У зв'язку зі сказаним виникла необхідність введення поняття функції декількох змінних.

Нехай задано множину Z, елементами якої є дійсні числа z й множину D, елементами якої є упорядковані пари дійсних чисел (x, y). Якщо кожній парі чисел (x, y) із множини D за певним законом ставиться у відповідність єдине число z із множини Z, то кажуть, що z є *функцією двох незалежних змінних* x і y. Для вказаної функціональної залежності прийнято позначення $z = f(x, y)$ (або $z = z(x, y)$). Множина D називається *областю визначення* або *областю існування* функції z, а множина Z – *областю її значень*.

Область визначення зручно зображати у вигляді сукупності точок на площині у декартовій прямокутній системі координат *Oxy* (x і y розглядаються як абсциса й ордината точки відповідно). Як правило, областю визначення функції двох змінних є деяка обмежена або необмежена область площини.

*Приклад 1***.** Знайти область визначення функції $z = ln(x - y)$.

Розв'язання. Так як логарифмічна функція визначена тільки для додатного аргументу, то необхідно, щоб *x* та *y* задовольняли нерівність $x - y > 0$ або $y < x$. Це означає , що областю визначення є напівплощина, що розміщена під прямою $y = x$, за виключенням цієї прямої (рис. 17).

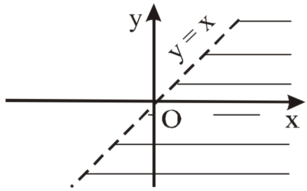


Рис.17

Геометричним зображенням функції двох змінних (її графіком), як правило, є деяка поверхня у просторі. Наприклад, графіками функцій $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ і $z = 1 + 5x - y$ є напівсфера й площина відповідно.

Аналогічно попередньому визначаються функції трьох і більше змінних. Якщо кожній трійки дійсних чисел (x, y, z) із заданої множини *Ω* (елементами множини є упорядковані трійки чисел) ставиться у відповідність єдине дійсне число u із заданої множини U, то кажуть, що u є *функцією трьох незалежних змінних* x, y і z. Для цієї залежності прийнято позначення $u = f(x, y, z)$. Область визначення *Ω* для функції трьох змінних можна задати сукупністю точок у просторі в декартовій прямокутній системі координат *Oxyz*.

3.2. Границя та неперервність функції декількох змінних

Число *A* називається *границею функції* $f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо для будь-якого наперед заданого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число

$r > 0$ таке, що для всіх точок $M(x, y)$, які задовольняють умові $|MM_0| < r$, виконується нерівність

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Для вказаної границі прийнято наступне позначення

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Приклад 1. Знайти границі: а) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{2 - \sqrt{xy + 4}}$, б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{y}$.

Розв'язання. а) Знаходимо границю за допомогою вказаних очевидних перетворень:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{2 - \sqrt{xy + 4}} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy(2 + \sqrt{xy + 4})}{(2 - \sqrt{xy + 4})(2 + \sqrt{xy + 4})} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy(2 + \sqrt{xy + 4})}{-xy} = -\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (2 + \sqrt{xy + 4}) = 4.$$

б) Враховуючи, що $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (перша чудова границя), маємо

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x \sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Функція $z = f(x, y)$ називається *неперервною* в точці $M_0(x_0, y_0)$, яка належить області визначення функції, якщо виконується рівність

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0). \quad (2.1)$$

Уведемо позначення:

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0, \quad \Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Рівність (2.1) можна подати у наступному вигляді:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0. \quad (2.2)$$

Функція називається неперервною в деякій області, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію $z = 3x^2 - y^2$.

Розв'язання. Дана функція визначена на всій площині *Oxy*. Нехай $M(x, y)$ – довільна точка цієї площини. Перевіримо виконання рівності

(2.2) в цій точці. Можемо записати

$$\Delta z = 3(x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 - (3x^2 - y^2)$$
$$= 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2y\Delta y - \Delta y^2,$$
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} (6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2y\Delta y - \Delta y^2) = 0.$$

Таким чином, дана функція неперервна на всій площині *Oxy*.

3.3. Частинні похідні функції декількох змінних

Нехай задана функція $z = f(x,y)$ і нехай точка $M(x,y)$ належить області визначення цієї функції разом із деяким своїм околом. *Частинним приростом функції* $z = f(x,y)$ *по змінній x* в точці $M(x,y)$ називається приріст функції *z* за умови, що незалежна змінна *x* одержує приріст Δx, а незалежна змінна *y* зберігає стале значення, тобто

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y). \qquad (3.1)$$

Аналогічно визначається *частинний приріст z по змінній y*:

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y). \qquad (3.2)$$

Частинною похідною по x від функції $z = f(x,y)$ називається границя відношення частинного приросту $\Delta_x z$ функції z до приросту Δx аргументу *x* за умови, що приріст аргументу прямує до нуля. Для вказаної частинної похідної прийняті такі позначення: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, z_x', $f_x'(x,y)$. Можемо записати

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}. \qquad (3.3)$$

Частинна похідна по y позначається через $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, z_y', $f_y'(x,y)$ і визначається аналогічно попередньому:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}. \qquad (3.4)$$

Як випливає з означення, при знаходженні частинної похідної по x потрібно вважати, що y є сталою величиною, а x – змінною. При знаходженні частинної похідної по y вважаємо, що x є сталою, а y – змінною.

Приклад 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ від функцій:

а) $z = 4x^3 + 3y^2\, tg\, x$; б) $z = 4\, ln\left(\frac{x^2}{y} + 1\right) + y^x$.

Розв'язання. а) Вважаючи, що x – змінна, а y – стала, маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4(x^3)'_x + 3y^2(tg\, x)'_x = 12x^2 + \frac{3y^2}{cos^2 x}.$$

Вважаємо, тепер, що y – змінна, а x – стала:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (4x^3)'_y + 3\, tg\, x\, (y^2)'_y = 6y\, tg\, x.$$

б) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(4\, ln\left(\frac{x^2}{y} + 1\right) + y^x\right)'_x = 4\frac{1}{\frac{x^2}{y}+1}\left(\frac{x^2}{y} + 1\right)'_x + y^x\, ln\, y =$$

$$= \frac{4y}{x^2+y} \cdot \frac{2x}{y} + y^x\, ln\, y = \frac{8x}{x^2+y} + y^x\, ln\, y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(4\, ln\left(\frac{x^2}{y} + 1\right) + y^x\right)'_y = 4\frac{1}{\frac{x^2}{y}+1} \cdot \left(\frac{x^2}{y} + 1\right)'_y + xy^{x-1} =$$

$$= \frac{4y}{x^2+y} \cdot \left(-\frac{x^2}{y^2}\right) + xy^{x-1} = -\frac{4x^2}{y(x^2+y)} + xy^{x-1}.$$

3.4. Диференціал функції декількох змінних

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$. Нехай точка $M(x, y)$ належить області визначення цієї функції разом із деяким своїм околом. Якщо незалежні змінні x і y отримали в точці $M(x, y)$ приріст Δx і Δy відповідно, то *повний приріст* Δz заданої функції визначається рівністю

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \qquad (4.1)$$

Припустимо, тепер, що в деякому околі точки $M(x, y)$ існують обидві частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, а у самій точці M вказані похідні неперервні. Можна показати, що при виконанні даних умов повний приріст Δz визначається через частинні похідні наступним чином

$$\Delta z=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y, \tag{4.2}$$

де α_1 і α_2 – нескінченно малі при $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$. У цьому випадку функція $z=f(x,y)$ називається диференційованою в точці $M(x,y)$. Сума перших двох доданків правої частини формули (4.2), яка є головною частиною приросту, називається *повним диференціалом* і позначається символом dz. Таким чином

$$dz=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y. \tag{4.3}$$

Для незалежних змінних $dx=\Delta x,\ dy=\Delta y$ (диференціал дорівнює приросту). Отже, формулу (4.3) можна переписати у вигляді

$$dz=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy. \tag{4.4}$$

Перший доданок правої частини формули (4.4) (або (4.3)) називається *частинним диференціалом* по змінній x, а другий – по змінній y. Як бачимо, повний диференціал дорівнює сумі частинних диференціалів.

Подібно до попереднього визначається диференціал функції трьох і більше змінних. Для функції $u=f(x,y,z)$ можемо записати

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz. \tag{4.5}$$

Приклад 1. Знайти повний диференціал функцій:

а) $z=x^2+y^x$, б) $z=u^2v+w^3e^{uv}$.

Розв'язання. а) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y^x\ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$;

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(2x+y^x\ln y)dx+xy^{x-1}dy;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}=2uv+vw^3e^{uv}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=u^2+uw^3e^{uv}$, $\frac{\partial z}{\partial w}=3w^2e^{uv}$;

$$dz = (2uv + vw^3e^{uv})du + (u^2 + uw^3e^{uv})dv + 3w^2e^{uv}dw.$$

Відповідно до формули (4.2) для малих значень Δx та Δy має місце наближена рівність $\Delta z \approx dz$. Підставивши в останнє співвідношення замість Δz і dz відповідні вирази, одержимо формулу для наближеного обчислення:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y \qquad (4.6)$$

Приклад 2. Обчислити наближено за допомогою диференціалу значення функції *z* за вказаних значень аргументів *x* та *y*, якщо

$$z = \sqrt[3]{x^3 + y^4 + 10}; \quad x = 1{,}09; \quad y = 1{,}973.$$

Розв'язання. Застосовуємо формулу (4.6):

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^4 + 10}; x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ \Delta x = 0{,}09,\ \Delta y = -0{,}027;$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^4+10)^2}}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{4y^3}{3\sqrt[3]{(x^3+y^4+10)^2}};$$

$$f(1{,}2) = \sqrt[3]{1 + 16 + 10} = 3, \quad \frac{\partial f(1{,}2)}{\partial x} = \frac{1}{9}, \quad \frac{\partial f(1{,}2)}{\partial y} = \frac{32}{27}.$$

Отже, $\sqrt[3]{1{,}09^3 + 1{,}973^4 + 10} \approx 3 + \frac{1}{9}\cdot 0{,}09 - \frac{32}{27}\cdot 0{,}027 = 2{,}978.$

3.5. Похідна складної функції. Похідна функції заданої неявно

Розглянемо функцію $z = f(u, v)$. Нехай *u* і *v* – функції незалежних змінних *x* та *y*, тобто $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Тоді функція *z* є складною функцією від аргументів *x* та *y* (u, v – проміжні змінні). Частинні похідні функції *z* можна знайти за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (5.1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (5.2)$$

Приклад 1. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = e^{v^2+u}$; $u = x^2 + y^3$,

$v = sin(xy)$.

Розв'язання. Використовуючи формули (5.1), (5.2), маємо

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^{v^2+u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 2ve^{v^2+u}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y\,sin(xy)\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x\,sin(xy);$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{v^2+u}(x + vy\,sin(xy)),\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{v^2+u}(3y^2 + 2vx\,sin(xy)).$$

Якщо функція однієї змінної задана у вигляді $z = f(x, u, v)$, де u і v також залежать від аргументу x ($u = u(x),\ v = v(x)$), то її звичайна похідна визначається за формулою

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \tag{5.3}$$

Приклад 2. Знайти $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = x^3 + \frac{u^2}{v},\ u = sin\,x\,,\ v = cos\,x.$

Розв'язання. Застосовуючи формулу (5.3), отримаємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u^2}{v^2}, \quad \frac{du}{dx} = cos\,x\,, \quad \frac{dv}{dx} = -\,sin\,x;$$

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 + \frac{2u}{v}cos\,x - \frac{u^2}{v^2}(-\,sin\,x) = 3x^2 + sin\,x \cdot (2 + tg^2\,x).$$

Розглянемо функцію однієї змінної y від x, яка задана неявно, тобто рівністю $F(x, y) = 0$. Якщо в деякій області функція двох змінних $F(x, y)$ диференційована і $F'_y(x, y) \neq 0$, то звичайна похідна від функції y по аргументу x в цій області визначається за формулою

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \tag{5.4}$$

Приклад 3. Функція y від x задана рівністю $y^3x + sin\frac{x}{y} = 0$. Знайте похідну $\frac{dy}{dx}$.

Розв'язання. Так як функція задана неявно, то застосовуємо формулу (5.4). Можемо записати:

$$F(x, y) = y^3x + sin\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = y^3 + \frac{1}{y}cos\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2x - \frac{x}{y^2}cos\frac{x}{y};$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3 + \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{3y^2x - \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}} = \frac{y^5 + y\cos\frac{x}{y}}{x\cos\frac{x}{y} - 3y^4x}.$$

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$, яка задана неявно, тобто рівнянням $F(x, y, z) = 0$. Якщо в деякій області функція трьох змінних $F(x, y, z)$ диференційована і $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ в цій області знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \tag{5.5}$$

Приклад 4. Функцію двох змінних $z = f(x, y)$ задано рівністю $x^2 + sin(y^2 + z^3) + e^{4z} = 0$. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (5.5), знайдемо:

$$F(x, y, z) = x^2 + sin(y^2 + z^3) + e^{4z}, \quad F'_x(x, y, z) = 2x;$$

$$F'_y(x, y, z) = 2y\,cos(y^2 + z^3), \quad F'_z(x, y, z) = 3z^2\,cos(y^2 + z^3) + 4e^{4z};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{3z^2\,cos(y^2+z^3)+4e^{4z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y\,cos(y^2+z^3)}{3z^2\,cos(y^2+z^3)+4e^{4z}}.$$

3.6. Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

Дотичною площиною до поверхні в точці M_0 називається площина, яка містить у собі всі дотичні до кривих, що проведені на поверхні через точку M_0. *Нормаллю* до поверхні називається пряма, яка проходить через точку дотику M_0 і перпендикулярна до дотичної площини.

Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ мають вигляд ((6.1) – дотична площина, (6.2) – нормаль):

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{6.1}$$

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \qquad (6.2)$$

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x,y,z)=0$, то вказані рівняння записуються в наступній формі ((6.3) – дотична площина, (6.4) – нормаль):

$$F'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0)(z-z_0)=0, \qquad (6.3)$$

$$\frac{(x-x_0)}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(y-y_0)}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(z-z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}. \qquad (6.4)$$

Приклад 1. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z=ln(\,x^2+y^2+1)$ в точці $M(1;2)$.

Розв'язання. Застосовуємо формули (6.1) і (6.2):

$$x_0=1,\quad y_0=2;\quad z_0=f(1;2)=ln(\,1^2+2^2+1)=ln\,6\,;$$

$$f'_x(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2+1},\ f'_x(1;2)=\frac{1}{3};\ f'_y(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2+1},\ f'_y(1;,2)=\frac{2}{3};$$

$$z-ln\,6=\frac{1}{3}(x-1)+\frac{2}{3}(y-2);\quad \frac{z-ln\,6}{-1}=\frac{3(x-1)}{1}=\frac{3(y-2)}{2}.$$

3.7. Похідна за напрямом. Градієнт

Розглянемо функцію трьох змінних $u=f(x,y,z)$. Нехай точки $M(x,y,z)$ і $M'(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$ належать області визначення цієї функції. Позначимо через Δl довжину вектора $\overline{MM'}=\bar{l}(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$. Відомо, що $\Delta l=|\bar{l}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$. Величина

$$\Delta u=f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)$$

є приростом функції, якого вона зазнає, переходячи від точки M до M', а відношення $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ є величиною приросту, що приходиться на одиницю довжини відстані між точками M і M' (середня швидкість зміни функції при такому переході).

Границя відношення $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ при $\Delta l\to 0$ (якщо вона існує) називається *похідною функції* $u = f(x, y, z)$ *в точці M за напрямом вектора* $\bar{l}$ і позначається символом $\frac{\partial u}{\partial l}$. Отже

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}. \qquad (7.1)$$

Дана похідна характеризує швидкість зміни функції *u* в напрямі вектора $\bar{l}$. Якщо функція $u = f(x, y, z)$ диференційована в точці *M*, то одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \qquad (7.2)$$

де $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – напрямні косинуси вектора $\bar{l}$.

Приклад 1. Знайти похідну функції $u = x^2 + 2y^2 - xyz$ за напрямом вектора $\bar{l} = 2\bar{\imath} - 2\bar{\jmath} + \bar{k}$ у точці $A(1; 1; 1)$.

Розв'язання. У відповідності з формулою (7.2) можемо записати

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_A = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A \cos \alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_A \cos \beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_A \cos \gamma.$$

Знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - yz, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A = 1; \ \frac{\partial u}{\partial y} = 4y - xz,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_A = 3; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -xy, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_A = -1.$$

Нагадаємо, що напрямні косинуси вектора $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ визначаються за формулами: $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}$, $\cos \beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}$, $\cos \gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}$. Знаходимо $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \beta = -\frac{2}{3}$, $\cos \gamma = \frac{1}{3}$. Можемо записати

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_A = 1 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + (-1) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}.$$

Одержане значення $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$, що означає спадання функції в напрямку вектора $\bar{l}$.

Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ в точці *A* називають вектор $grad\, u$, координатами якого є значення частинних похідних цієї функції в даній точці:

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \qquad (7.3)$$

Позначимо через $\bar{l}_0$ одиничний вектор, напрям якого співпадає з напрямом вектора $\bar{l}$. Як відомо, координатами цього вектора будуть напрямні косинуси вектора $\bar{l}$, тобто

$$\bar{l}_0 = cos\,\alpha \cdot \bar{\imath} + cos\,\beta \cdot \bar{\jmath} + cos\,\gamma \cdot \bar{k} \qquad (7.4)$$

На основі формул (7.2), (7.3), (7.4) отримуємо зв'язок між градієнтом і похідною за напрямом:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (grad\, u\,, \bar{l}_0) = |\,grad\, u\,|\,cos\,\phi, \qquad (7.5)$$

де ϕ – кут між векторами $\bar{l}$ і $grad\, u$.

Зі співвідношень (7.5) випливає, що:

1) похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ дорівнює проекції вектора $grad\, u$ на напрям вектора $\bar{l}$;

2) якщо напрям вектора $\bar{l}$ співпадає з напрямом вектора $grad\, u$ (у цьому випадку $\phi = 0$), то похідна за напрямом приймає найбільше значення:

$$max\,\frac{\partial u}{\partial l} = |grad\, u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2};$$

3) якщо вектор $\bar{l}$ перпендикулярний до вектора $grad\, u$, то похідна за напрямом дорівнює нулю.

Приклад 2. Знайти напрям і швидкість найшвидшого зростання функції $u = x^2 + 2y^2 - xyz$ в точці $A(1; 1; 1)$.

Розв'язання. Напрям найшвидшого зростання визначається напрямом вектора $grad\, u$, а швидкість зростання (у цьому напрямі) – його модулем. Тому знайдемо градієнт даної функції в точці *A* та його модуль:

$$grad\, u = (2x - yz)\vec{\imath} + (4y - xz)\vec{\jmath} + (-xy)\vec{k};$$

$$(grad\,u)_A = \bar{\imath} + 3\bar{\jmath} - \bar{k};\quad |(grad\,u)_A| = \sqrt{11}.$$

Функція максимально зростає в напрямі вектора $\bar{l} = \bar{\imath} + 3\bar{\jmath} - \bar{k}$; швидкість зростання при цьому дорівнює $\sqrt{11}$.

У випадку функції двох змінних $z = f(x, y)$, аналогічно попередньому:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta;\quad grad\,z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{\jmath}. \tag{7.7}$$

3.8. Частинні похідні та диференціали вищих порядків

Припустимо, що функція $z = f(x, y)$ в деякій області D має частинні похідні $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$. Вказані похідні в загальному випадку також є функціями двох змінних і можна ставити питання про існування їхніх частинних похідних. Частинні похідні від $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ (якщо вони існують) називаються *частинними похідними другого порядку* і визначаються наступним чином:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \equiv f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Дві останні похідні називаються *змішаними частинними похідними другого порядку*.

Приклад 1. Для функції $z = arctg\,\frac{x}{y}$ знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Аналогічно попередньому визначаються частинні похідні вищих порядків для функції трьох і більше змінних.

Приклад 2. Задана функція $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Довести, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Розв'язання. Знаходимо потрібні похідні і підставляємо в задану рівність:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'_x = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_x = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} +$$

$$+3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'_y = -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(-y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_y = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} +$$

$$+3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'_z = -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(-z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_y = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} +$$

$$+3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} -$$

$$-(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} +$$

$$+3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}} =$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} + \frac{3}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = 0.$$

Що й треба було довести.

Якщо змішані частинні похідні неперервні в деякій області, то в цій області вони рівні між собою, тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \tag{8.1}$$

Приклад 3. Знайти змішані частинні похідні функції $z = x^4y^2 + 4x^3 - y^2$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3y^2 + 12x^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8x^3y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^4y - 2y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 8x^3y$. Як бачимо, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Якщо в деякому околі точки $M(x, y)$ для функції $z = f(x, y)$ існують обидві частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, а у самій точці M вказані похідні неперервні, то, як відомо, у цій точці визначений повний диференціал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

В загальному випадку dz є функцією x та y (величини dx і dy вважаємо сталими). *Диференціалом другого порядку* (якщо функція dz диференційована) в точці $M(x, y)$ називається диференціал від диференціалу dz. Можемо записати

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy\right) dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Таким чином

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{8.2}$$

Для диференціала n-го порядку має місце наступна символічна формула

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z \tag{8.3}$$

яка формально розкривається за біноміальним законом Ньютона

Приклад 4. Задана функція $z = \frac{x^2}{y}$. Знайти d^2z.

Розв'язання. На основі формули (8.2) маємо

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3}$;

$$d^2z = \frac{2}{y}dx^2 - \frac{4x}{y^2}dxdy + \frac{2x^2}{y^3}dy^2.$$

3.9. Екстремум функції двох змінних. Найбільше та найменше значення в заданій області

Точка $M_0(x_0, y_0)$ називається точкою *локального максимуму* (*мінімуму*) функції $z = f(x, y)$, якщо знайдеться такий окіл цієї точки, що для всіх (x, y) із цього околу виконується нерівність $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) \geq f(x_0, y_0))$. Точки локального мінімуму або максимуму називають також точками *локального екстремуму*.

Наведемо *необхідні умови екстремуму*. Якщо в точці $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ диференційована і досягає локального екстремуму, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{9.1}$$

Точки, в яких виконуються умови (9.1), називаються *стаціонарними*. Отже, якщо функція може досягати в якійсь точці свого екстремального значення, то така точка – стаціонарна. Іншими словами, точки локального екстремуму функції слід шукати серед її стаціонарних точок.

Проте не всі стаціонарні точки є точками екстремуму. Для цього повинні бути виконані *достатні умови екстремуму*. Наведемо вказані умови. Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$. Припустимо, що в самій точці M_0 і деякому її околі вказана функція має неперервні частинні похідні другого порядку. Складемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}. \qquad (9.2)$$

Тоді, якщо $\Delta > 0$, то в точці M_0 функція має екстремум. А саме, максимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (або $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$) та мінімум при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (або $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$). Якщо ж $\Delta < 0$, то в точці M_0 екстремум відсутній.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 - y^3 - 3xy$.

Розв'язання. Знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0, \end{cases} \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ -3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \begin{cases} y = x^2, \\ x(x^3 + 1) = 0, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Маємо дві стаціонарні точки $M_1(0; 0)$ і $M_2(-1; 1)$. Обчислюємо другі похідні:

$$f''_{xx}(x, y) = 6x, \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -3, \quad f''_{yy}(x, y) = -6y.$$

Перевіряємо виконання достатніх умов у стаціонарних точках. В точці $M_1(0; 0)$ маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3 < 0.$$

Так як $\Delta < 0$, то дана точка не є точкою екстремуму. В точці $M_2(-1; 1)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 27 > 0.$$

Так як $\Delta > 0$ і $f''_{xx}(-1; 1) = -6 < 0$, то дана точка є точкою локального максимуму; $f(-1; 1) = 1$.

Нагадаємо, що функція однієї змінної $y = f_1(x)$, яка диференційована на відрізку $[a, b]$, приймає найбільше та найменше значення на цьому відрізку або в стаціонарних точках (стаціонарними точками є розв'язки рівняння $f_1'(x) = 0$), що належать відрізку $[a, b]$, або на його кінцях.

Розглянемо тепер задачу про обчислення найбільшого та найменшого значень функції $z = f(x, y)$ в заданій області D. Нехай вказана функція диференційована в області D, а сама область D замкнена і обмежена. Тоді найбільше та найменше значення досягаються функцією або в стаціонарних точках, що належать області D, або на межі даної області. Нехай область D обмежена лініями, рівняння яких представлені у формі $y = \varphi(x) \quad (a \le x \le b)$ або $x = \psi(y) \quad (c \le y \le d)$. Наведемо далі схему розв'язування поставленої задачі.

1. Знаходимо всі стаціонарні точки функції, що лежать в області D, і визначаємо її значення в цих точках.

2. Досліджуємо функцію на межі області. На лінії $y = \phi(x) \quad (a \le x \le b)$ функція z приймає вигляд $z = f(x, \varphi(x)) = f_1(x)$. Розв'язавши рівняння $f_1'(x) = 0$, знаходимо стаціонарні точки функції однієї змінної $f_1(x)$. Обчислюємо значення вказаної функції на кінцях відрізку $[a, b]$ і в стаціонарних точках, що йому належать. На лінії $x = \psi(y) \quad (c \le y \le d)$ отримаємо функцію однієї змінної $z = f(\psi(y), y) = f_2(y)$. Досліджуємо її на відрізку $[c, d]$ аналогічно попередньому. Виконуємо вказані дії по всій межі області D.

3. Вибираємо з одержаних значень функції найбільше та найменше.

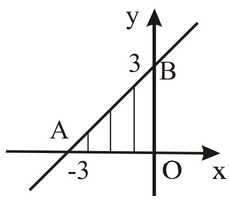


Рис.18

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції

$z = x^3 - y^3 - 3xy$ в області D, що обмежена лініями $y = x + 3$, $x = 0$, $y = 0$.

Розв'язання. Побудуємо область D у системі координат *Oxy* (рис.18). В попередньому прикладі були визначені стаціонарні точки даної функції, а саме $M_1(-1;1)$ і $M_2(0;0)$. Обчислюємо значення функції в цих точках (обидві точки належать області D): $z_1 = f(-1;1) = 1$, $z_2 = f(0{,}0) = 0$. Межа області D складається із трьох відрізків AO, OB і AB (див. рис.2). Досліджуємо дану функцію на кожному з них. На відрізку AO ($y = 0$, $-3 \le x \le 0$) функція *z* приймає вигляд $z = f_1(x) = x^3$. Досліджуємо, далі, одержану функцію однієї змінної на відрізку $[-3;0]$. Знаходимо стаціонарні точки:

$$f_1'(x) = 3x^2, \quad 3x^2 = 0, \quad x = 0.$$

Так як значення функції *z* в точці (0;0) вже знайдено, то обчислюємо її значення лише в точці $A(-3;0)$: $z_3 = f_1(-3) = f(-3;0) = -27$.

На відрізку OB:

$$x = 0, \quad 0 \le y \le 3; \quad z = f_2(y) = -y^3; \quad f_2'(y) = -3y^2,$$

$$-3y^2 = 0, \quad y = 0; \quad z_4 = f_2(3) = f(0;3) = -27.$$

На відрізку AB:

$$y = x + 3, \quad -3 \le x \le 0; \quad z = f_3(x) = x^3 - (x+3)^3 - 3x(x+3) =$$

$$= -12x^2 - 36x - 27, \quad f_3'(x) = -24x - 36, \quad -24x - 36 = 0,$$

$$x = -1{,}5; \quad z_5 = f_3(-1{,}5) = f(-1{,}5;1{,}5) = 0.$$

Отже, $z_{\text{найб}} = 1$ при $x = -1$, $y = 1$; $z_{\text{найм}} = -27$ при $x = -3$, $y = 0$ й при $x = 0$, $y = 3$.

3.10. Метод найменших квадратів

В багатьох експериментальних дослідженнях для кожного значення $x_1, x_2, \dots, x_n$ змінної величини x визначаються відповідні значення $y_1, y_2, \dots, y_n$ змінної величини y. Іншими словами, експериментально визначається функція y від аргументу x, причому задається вказана функція табличним способом. Проте, більш зручною для подальшого аналізу є аналітична форма функціональної залежності, тобто виникає потреба представлення знайденої функції у вигляді співвідношення $y = \phi(x)$, де $\phi(x)$ – аналітичний вираз. Така задача може бути розв'язана за допомогою *методу найменших квадратів*.

Конкретна форма виразу $\phi(x)$ визначається характером отриманої експериментальної залежності та, можливо, теоретичними міркуваннями. У відповідності з методом найменших квадратів функція y задається у вигляді $y = \phi(x, a, b, \dots, c)$, де $a, b, \dots, c$ – невідомі параметри. Складаємо суму

$$S(a, b, \dots, c) = \sum_{i=1}^{n} (\phi(x_i, a, b, \dots, c) - y_i)^2. \tag{10.1}$$

Сума (10.1) характеризує міру відхилення розрахункових значень величини y від експериментальних. Невідомі параметри $a, b, \dots, c$ необхідно визначити таким чином, щоб вказана сума приймала найменше значення, тобто задача зводиться до знаходження мінімуму функції декількох змінних $S(a, b, \dots, c)$. Записуємо необхідні умови екстремуму цієї функції (прирівнюємо до нуля частинні похідні по змінним $a, b, \dots, c$)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (\phi(x_i, a, b, \dots, c) - y_i) \frac{\partial \phi(x_i, a, b, \dots, c)}{\partial a} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} (\phi(x_i, a, b, \dots, c) - y_i) \frac{\partial \phi(x_i, a, b, \dots, c)}{\partial b} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} (\phi(x_i, a, b, \dots, c) - y_i) \frac{\partial \phi(x_i, a, b, \dots, c)}{\partial c} = 0. \end{cases} \tag{10.2}$$

Розв’язком системи (10.2) є значення параметрів $a, b, \dots, c$, при яких функція $S(a, b, \dots, c)$ може приймати мінімальне значення.

У випадку лінійної залежності $y = ax + b$ маємо:

$$\phi(x_i, a, b) = ax_i + b, \quad \frac{\partial\phi(x_i,a,b)}{\partial a} = x_i, \quad \frac{\partial\phi(x_i,a,b)}{\partial b} = 1.$$

Система (10.2) приймає вигляд

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i\,, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i\,. \end{cases} \tag{10.3}$$

У випадку квадратичної залежності $y = ax^2 + bx + c$ одержимо:

$$\phi(x_i, a, b, c) = a{x_i}^2 + bx_i + c, \quad \frac{\partial\phi(x_i,a,b,c)}{\partial a} = {x_i}^2;$$

$$\frac{\partial\phi(x_i,a,b,c)}{\partial b} = x_i, \quad \frac{\partial\phi(x_i,a,b,c)}{\partial c} = 1.$$

Для визначення параметрів a, b і c отримаємо наступну систему

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} {x_i}^4 + b\sum_{i=1}^{n} {x_i}^3 + c\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i {x_i}^2\,, \\ a\sum_{i=1}^{n} {x_i}^3 + b\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i\,, \\ a\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i\,. \end{cases} \tag{10.4}$$

Приклад 1. В таблиці

x	1	3	5	7	10
y	6	5	3	2	1

наведені результаті експериментальних досліджень з метою встановлення залежності між величинами *x і y.* За допомогою методу найменших квадратів визначити аналітичну залежність $y = ax + b$. Зобразити експериментальні точки та побудувати знайдену пряму в декартовій прямокутній системі координат *Oxy*.

Розв'язання. Визначаємо числові коефіцієнти системи (10.3):

$$\sum_{i=1}^{5} {x_i}^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 10^2 = 184,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1 + 3 + 5 + 7 + 10 = 26,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 60,$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 6 + 5 + 3 + 2 + 1 = 17.$$

Складаємо систему (10.3) і розв'язуємо її за формулами Крамера:

$$\begin{cases}184a + 26b = 60, \\ 26a + 5b = 17,\end{cases} \quad \begin{cases}92a + 13b = 30, \\ 26a + 5b = 17;\end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix}92 & 13 \\ 26 & 5\end{vmatrix} = 122, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix}30 & 13 \\ 17 & 5\end{vmatrix} = -71, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix}92 & 30 \\ 26 & 17\end{vmatrix} = 784;$$

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{71}{122} \approx -0{,}58; \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{784}{122} \approx 6{,}43.$$

Отже, $y = -0{,}58x + 6{,}43$. Будуємо пряму та зображаємо задані точки.

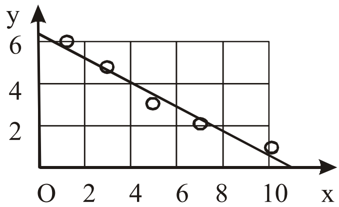


Рис.19

Розділ 4. Диференціальні рівняння

4.1. Поняття диференціального рівняння. Загальні означення

Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння, яке пов'язує між собою незалежну змінну *x*, шукану функцію *y* та її похідні різних порядків. Якщо шукана функція залежить від декількох змінних, то диференціальне рівняння містить вже не звичайні, а частинні похідні і називається *диференціальним рівнянням у частинних похідних*. Далі будемо розглядати лише звичайні диференціальні рівняння (слово „звичайні” у їхній назві будемо опускати).

Порядком диференціального рівняння називається порядок його старшої похідної. Таким чином, у загальному випадку диференціальне рівняння n-го порядку можна представити у вигляді:

$$F(x, y', y'^{(n)}. \qquad (1.1)$$

Відмітимо, що у частинних випадках деякі з величин $x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ можуть явно не входити у диференціальне рівняння n-го порядку.

Розв'язком диференціального рівняння називається будь-яка функція $y = \phi(x)$, яка після підстановки у дане рівняння перетворює його у тотожність. Очевидно, що *розв'язування* (або *інтегрування*) диференціального рівняння зводиться до знаходження його розв'язку.

Приклад 1. Показати, що функція $\mathrm{y} = x^3 - \sin 2x$ є розв'язком диференціального рівняння $y'' + y - x^3 - 6x - 3\sin 2x = 0$.

Розв'язання. Знаходимо другу похідну y'' і підставляємо відповідні вирази у задане рівняння:

$$y' = 3x^2 - 2\cos 2x, \; y'' = 6x + 4\sin 2x;$$

$$6x + 4\sin 2x + x^3 - \sin 2x - x^3 - 6x - 3\sin 2x = 0, \; 0 = 0.$$

Задати *початкові умови* для диференціального рівняння (1.1) означає задати значення функції та її похідних при певному значенні незалежної змінної, а саме:

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \; \dots, \; y^{(n-1)}(x_0) = {y_0}^{(n-1)}, \qquad (1.2)$$

де $x_0, \; y_0, \; \dots, {y_0}^{(n-1)}$ – числа.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1.1) називається функція $y = \phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, яка залежить від n довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ і яка задовольняє наступним двом умовам: а) вона є розв'язком при будь-яких значеннях указаних довільних сталих; б) при будь-яких початкових умовах (1.2) довільні сталі $C_1, C_2, \dots, C_n$ можуть бути визначені таким чином, що вказані початкові умови будуть задовольнятися.

Якщо у загальному розв'язку всім довільним сталим надати певні числові значення, то отримаємо так званий *частинний розв'язок* диференціального рівняння. *Розв'язати задачу Коші* означає, що необхідно знайти частинний розв'язок рівняння (1.1), який задовольняє початковим умовам (1.2). Якщо загальний розв'язок знайдено неявно, тобто у вигляді $F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, то кажуть, що знайдено *загальний інтеграл* диференціального рівняння (1.1). *Частинний інтеграл* отримується із загального за допомогою надання довільним сталим певних числових значень.

4.2. Диференціальні рівняння першого порядку

Зробимо спочатку одне зауваження. У теорії диференціальних рівнянь похідна y' часто позначається через $\frac{dy}{dx}$. Указане позначення розглядається як відношення двох диференціалів, які можуть відокремлюватися один від одного.

У загальному випадку диференціальне рівняння першого порядку та його початкова умова мають відповідно вигляд:

$$F(x, y, y') = 0, \quad y(x_0) = y_0. \tag{2.1}$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція $y = \phi(x, C)$, яка залежить від однієї довільної сталої С. Розглянемо далі деякі основні типи диференціальних рівнянь першого порядку.

Диференціальним *рівнянням із відокремленими змінними* називається наступне рівняння:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \tag{2.2}$$

Указане рівняння розв'язується за допомогою безпосереднього інтегрування.

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

а) $(x^2 + e^{3x})dx + (2y + cos\,5\,y)dy = 0$; б) $\sqrt{y}y' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

Розв'язання. а) $\int(x^2+e^{3x})dx+\int(2y+cos\,5\,y)dy=0$,

$$\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}e^{3x}+y^2+\frac{1}{5}sin\,5\,y+C=0.$$

б) Замінюємо y' на $\frac{dy}{dx}$, домножуємо отримане рівняння на dx й інтегруємо:

$$\sqrt{y}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0,\quad \sqrt{y}dy+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=0,$$

$$\int\sqrt{y}dy+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=0,\quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+arcsin\,x+C=0.$$

Диференціальне рівняння *з відокремлюваними змінними* має вигляд

$$M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0. \qquad (2.3)$$

Як бачимо, у лівій частині цього рівняння кожен із множників залежить тільки від однієї змінної. Розділивши його на добуток $M_2(y)N_1(x)$, одержимо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=0.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

а) $2x(1+y^2)dx+(3+x^2)dy=0$; б) $(y-yx^2)y'=5x+xy^2$.

Розв'язання. а) Ділимо рівняння на добуток $(1+y^2)(3+x^2)$ та інтегруємо:

$$\frac{2xdx}{3+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0,\quad \int\frac{d(3+x^2)}{(3+x^2)}+\int\frac{dy}{1+y^2}=0,$$

$$ln\,|\,3+x^2|+arctg\,y+C=0.$$

б) Робимо спочатку прості, очевидні перетворення:

$$y(1-x^2)\frac{dy}{dx}=x(5+y^2),\quad y(1-x^2)dy=x(5+y^2)dx.$$

Ділимо останнє рівняння на добуток $(1-x^2)(5+y^2)$ і інтегруємо:

$$\int\frac{ydy}{5+y^2}=\int\frac{xdx}{1-x^2},\quad \frac{1}{2}\int\frac{d(5+y^2)}{5+y^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{1-x^2},$$

$$\frac{1}{2}ln\,|\,5+y^2|+\frac{1}{2}ln\,|\,1-x^2|=\frac{1}{2}ln\,|\,C|,$$

$$ln\,|\,(5+y^2)(1-x^2)| = ln\,|\,C|, \qquad (5+y^2)(1-x^2) = C.$$

Звертаємо увагу на те, що з метою спрощення кінцевого результату довільна стала представлена за допомогою логарифма (таке допускається).

Рівняння $y' = f(x, y)$ будемо називати *однорідним* диференціальним рівнянням першого порядку, якщо для будь-якого відмінного від нуля λ виконується рівність $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Дане рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки $y = ux$, де u – нова шукана функція.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' = \frac{y}{x-y}$.

Розв'язання. Покажемо, що задане рівняння є однорідним:

$$f(x, y) = \frac{y}{x-y}; \quad f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x - \lambda y} = \frac{\lambda y}{\lambda(x-y)} = \frac{y}{x-y} = f(x, y).$$

Зробимо заміну $y = ux,\ y' = u'x + u$:

$$u'x + u = \frac{ux}{x-ux}, \quad u'x = \frac{u}{1-u} - u, \quad x\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{1-u}, \quad \int \frac{1-u}{u^2} du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int (u^{-2} - \frac{1}{u}) du = \int \frac{dx}{x}, \quad -\frac{1}{u} - ln\,|\,u| = ln\,|\,x| + C,$$

$$\frac{x}{y} + ln\,|\frac{y}{x}\,| + ln\,|\,x| + C = 0, \quad x + y\,ln\,|\,y| + Cy = 0.$$

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке лінійне відносно шуканої функції у та її похідної у$'$ (величини у і y' входять тільки у першому степені і між собою не перемножуються). Указане рівняння завжди можна представити у стандартній формі

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{2.4}$$

Розв'язок рівняння (2.4) будемо шукати у вигляді $y = uv$, де u, v – нові шукані функції. Знаходимо похідну: $y' = u'v + uv'$. Підставимо у і y' в рівняння (2.4):

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

$$v(u' + P(x)u) + uv' = Q(x). \qquad (2.5)$$

Прирівняємо до нуля вираз у дужках у формулі (2.5) і знайдемо функцію u:

$$u' + P(x)u = 0, \quad \frac{du}{dx} = -P(x)u, \quad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx,$$

$$ln\,|u| = -\int P(x)dx, \quad u = e^{-\int P(x)dx}.$$

Звертаємо увагу на те, що при інтегруванні довільна стала береться рівною нулю. Підставимо функцію u в рівняння (2.5) і знайдемо функцію v:

$$e^{-\int P(x)dx}v' = Q(x), \; dv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx, \; v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Враховуючи, що $y = uv$, отримаємо

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \qquad (2.6)$$

Формулу (2.6) можна використовувати для інтегрування лінійних диференціальних рівнянь.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y' - 2xy = e^{x^2} cos\,x$.

Розв'язання. Маємо лінійне рівняння. Розв’яжемо двома способами. 1) Здійснюємо підстановку $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ і розв'язуємо рівняння за наведеною вище схемою:

$$u'v + uv' - 2xuv = e^{x^2} cos\,x\,, \quad v(u' - 2xu) + uv' = e^{x^2} cos\,x;$$

$$u' - 2xu = 0, \quad \int \frac{du}{u} = 2\int xdx, \quad ln\,|u| = x^2, \quad u = e^{x^2};$$

$$e^{x^2}v' = e^{x^2} cos\,x\,, \quad v' = cos\,x\,, \quad \int dv = \int cos\,x\,dx, \quad v = sin\,x + C;$$

$$y = e^{x^2}(sin\,x + C).$$

2) Розв'яжемо рівняння за допомогою формули (2.6). У нашому випадку $P(x) = -2x$, $\quad Q(x) = e^{x^2} cos\,x$. Знайдемо потрібні інтеграли (довільна стала береться рівною нулю):

$$\int P(x)dx = \int(-2x)dx = -x^2;$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int e^{x^2} \cdot \cos x \cdot e^{-x^2} dx = \int \cos x \, dx = \sin x.$$

Підставимо знайдені інтеграли у формулу (2.6):

$$y = e^{x^2}(\sin x + C).$$

Рівнянням Бернуллі називається наступне рівняння

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m; \quad m \neq 0, \quad m \neq 1. \tag{2.7}$$

Аналогічно попередньому, воно розв'язується за допомогою підстановки $y = uv$.

Розглянемо рівняння виду

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \tag{2.8}$$

де $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – числові коефіцієнти. Очевидно, що якщо $c_1 = c_2 = 0$, то рівняння (2.8) є однорідним. У зв'язку зі сказаним будемо вважати, що хоча б один із коефіцієнтів c_1, c_2 відмінний від нуля. Розглянемо два можливі випадки вказаного рівняння.

1) Коефіцієнти при x і y пропорційні, тобто виконується умова $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$. У цьому випадку рівняння (2.8) зводиться до рівняння *з відокремлюваними змінними* за допомогою підстановки $z = a_1x + b_1y$ (або $z = a_2x + b_2y$), де z – нова функція. Продиференціювавши останню рівність, знайдемо y': $z' = a_1 + b_1y'$, $\quad y' = (z' - a_1)/b_1$.

2) Коефіцієнти при x і y не пропорційні, тобто виконується умова $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. У цьому випадку рівняння (2.8) зводиться до *однорідного* за допомогою підстановки $x = x_1 + h$, $\quad y = y_1 + k$, де x_1 – нова незалежна змінна, y_1 – нова функція; h, k – числа, які є розв'язком системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0, \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases}. \tag{2.9}$$

Відмітимо, що при вказаній підстановці $dx = dx_1$, $dy = dy_1$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

а) $y' = \frac{x-y+3}{3x-3y+5}$; б) $(y-1)dx = (x-y+3)dy$.

Розв'язання. а) Так як коефіцієнти при x і y пропорційні ($\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3}$), то розв'язок знайдемо за допомогою підстановки $z = x - y$. З останньої рівності отримуємо: $z' = 1 - y'$, $y' = 1 - z'$. Підставляємо:

$$1 - z' = \frac{z-3}{3z+5}, \quad \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{z-3}{3z+5}, \quad \frac{3z+5}{z+4}dz = 2dx,$$

$$\int(3 - \frac{7}{z+4})dz = \int 2dx, \quad 3z - 7\,ln\,|\,z+4| = 2x + C,$$

$$3(x-y) - 7\,ln\,|\,x-y+4| = 2x + C.$$

б) Перепишемо задане рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x-y+3}$.

Коефіцієнти при x і y не пропорційні ($\frac{0}{1} \neq \frac{1}{-1}$). Складемо систему (2.9) і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} k - 1 = 0, \\ h - k + 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} k = 1, \\ h = -2 \end{cases}.$$

Зробимо заміну $x = x_1 - 2,\ y = y_1 + 1,\ dx = dx_1,\ dy = dy_1$:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1+1-1}{x_1-2-(y_1+1)+3}, \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1}{x_1-y_1}.$$

Отримане однорідне рівняння інтегрується за допомогою підстановки $y_1 = ux_1$ (див. прикл. 3).

4.3. Деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку

Розглянемо рівняння виду

$$y^{(n)} = f(x). \tag{3.1}$$

Враховуючи, що похідна n-го порядку дорівнює похідній від похідної $n-1$-го порядку, можемо записати

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x), \quad \int dy^{(n-1)} = \int f(x)dx, \quad y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1.$$

Одержане диференціальне рівняння $n-1$-го порядку відноситься до типу рівняння (3.1) і до нього можна застосувати вказані вище дії. Поступово знижуючи порядок рівняння, визначаємо шукану функцію *y*.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y''' = 6x + \cos 2x$.

Розв'язання. Поступово знижуємо порядок заданого рівняння і визначаємо функцію *y*:

$$y'' = \int (6x + \cos 2x)dx = 3x^2 + \frac{1}{2}\sin 2x + C_1;$$

$$y' = \int (3x^2 + \frac{1}{2}\sin 2x + C_1)dx = x^3 - \frac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2;$$

$$y = \int \left(x^3 - \frac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно шукану функцію *y*, тобто рівняння виду

$$F(x, y', y'') = 0. \qquad (3.2)$$

Указане рівняння зводиться до рівняння першого порядку за допомогою підстановки $y' = p,\ y'' = p'$, де *p* – функція від *x*. Після здійснення вказаної заміни отримаємо рівняння $F(x, p, p') = 0$. Проінтегрувавши його, визначаємо функцію $p = \phi_1(x, C_1)$. Враховуючи, що $p = y'$, маємо $y' = \phi_1(x, C_1)$. Розв'язуємо останнє рівняння і знаходимо функцію $y = \phi(x, C_1, C_2)$.

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - \frac{1}{x}y' = x^2 + x; \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1.$$

Розв'язання. Так як задане рівняння не містить явно *y*, то робимо підстановку $y' = p,\ y'' = p'$, де *p* – функція від *x*. Одержуємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку $p' - \frac{1}{x}p = x^2 + x$. Його розв'язок шукаємо у вигляді $p = uv$, $(p' = u'v + uv')$:

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = x^2 + x, \quad v(u' - \frac{1}{x}u) + uv' = x^2 + x;$$

$$u' - \frac{1}{x}u = 0, \quad \frac{du}{dx} = \frac{u}{x}, \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}, \quad u = x;$$

$$xv' = x^2 + x, \quad v' = x + 1, \quad v = \frac{1}{2}x^2 + x + C_1;$$

$$p = x(\frac{1}{2}x^2 + x + C_1), \quad y' = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + C_1x.$$

Використовуючи початкові умови, визначаємо значення довільної сталої C_1 і інтегруємо одержане диференціальне рівняння:

$$1 = \frac{1}{2} + 1 + C_1, \quad C_1 = -\frac{1}{2}; \quad y' = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x;$$

$$y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + C_2.$$

Визначаємо значення довільної сталої і записуємо кінцеву відповідь:

$$0 = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + C_2, \quad C_2 = -\frac{5}{24}, \quad y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{24}.$$

Розглянемо далі диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно незалежну змінну x, тобто рівняння виду

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{3.3}$$

Зробимо підстановку $y' = p$, де p – функція від y. Друга похідна у даному випадку визначається рівністю $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ або $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Отже, рівняння (3.3) перетворюється до наступного рівняння першого порядку $F(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0$. Відмітимо, що у цьому рівнянні величина y виступає як незалежна змінна, а величина p – як шукана функція. Розв'язавши вказане рівняння, знайдемо функцію $p = \phi_1(y, C_1)$ або $y' = \phi_1(y, C_1)$. Інтегруємо отримане рівняння першого порядку і визначаємо функцію $y = \phi(x, C_1, C_2)$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y'' = (y')^2\, tg\, y$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння типу (3.3). Робимо заміну $y' = p$ (p – функція від y; $y'' = p\frac{dp}{dy}$) і інтегруємо:

$$p\frac{dp}{dy} = p^2\, tg\, y\,, \quad p\left(\frac{dp}{dy} - p\, tg\, y\right) = 0;$$

$$1)\ p = 0, \quad y' = 0, \quad y = C, \quad C \in R;$$

$$2)\ \frac{dp}{dy} - p\, tg\, y = 0,\ \int\frac{dp}{p} = \int tg\, y\, dy, \quad ln\,|\,p| = -\,ln\,|\,cos\, y\,| + ln\,|\,C_1|;$$

$$ln\,|\,p| = ln\left|\frac{C_1}{cos\, y}\right|, \quad p = \frac{C_1}{cos\, y}, \quad y' = \frac{C_1}{cos\, y};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{cos\, y}, \quad \int cos\, y\, dy = \int C_1 dx, \quad sin\, y = C_1 x + C_2.$$

4.4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Основні поняття. Метод варіації довільних сталих

Диференціальне рівняння другого порядку називається *лінійним*, якщо воно лінійне відносно шуканої функції y та її похідних y' і y'', тобто це рівняння виду

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{4.1}$$

де a_1, a_2 – функції від x або числові коефіцієнти, $f(x)$ – задана функція. Якщо права частина рівняння (4.1) тотожно дорівнює нулю, то отримаємо

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{4.2}$$

Рівняння (4.1) називається *неоднорідним лінійним рівнянням другого порядку*, а рівняння (4.2) –*однорідним*.

Нехай $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ – частинні розв'язки однорідного рівняння (4.2). Якщо існують числові коефіцієнти α і β, які не рівні одночасно нулю і для яких виконується тотожна рівність $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$, то розв'язки y_1 і y_2 називаються *лінійно залежними*. Очевидно, що відношення таких розв’язків дорівнює сталому числу. Якщо ж тотожна рівність $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$ виконується лише при $\alpha = 0$ і $\beta = 0$, то розв'язки y_1 і y_2 називаються *лінійно незалежними*. Сформульовані означення лінійної залежності і лінійної незалежності справедливі і для довільних функцій y_1 і y_2.

Припустимо, тепер, що $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ є частинними лінійно незалежними розв'язками однорідного рівняння (4.2). У цьому випадку *загальний розв'язок* вказаного рівняння представляється у вигляді

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{4.3}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Отже, знаходження загального розв'язку рівняння (4.2) можна звести до знаходження двох лінійно незалежних частинних розв'язків цього рівняння.

Приклад 1. Показати, що функції $y_1 = e^x$ і $y_2 = e^{2x}$ є частинними лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$. Записати загальний розв'язок указаного рівняння.

Розв'язання. Підставляємо функції та відповідні похідні в задане рівняння (похідні необхідно попередньо знайти):

$$y_1' = e^x,\ y_1'' = e^x;\ e^x - 3e^x + 2e^x = 0,\ 0 = 0;$$

$$y_2' = 2e^{2x},\ y_2'' = 4e^{2x};\ 4e^{2x} - 6e^x + 2e^x = 0,\ 0 = 0.$$

Для з'ясування питання про лінійну незалежність розглянемо відношення заданих розв'язків: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}$. Так як відношення не дорівнює сталому числу, то y_1 і y_2 лінійно незалежні. На основі формули (4.3) загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.1) можна представити в наступній формі

$$y = \tilde{y} + y^*, \tag{4.4}$$

де y^* – будь-який *частинний розв'язок* заданого неоднорідного рівняння, а $\tilde{y}$ – *загальний розв'язок* відповідного однорідного рівняння (рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$).

Нехай задане неоднорідне рівняння (4.1) і нехай функції $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ є частинними лінійно незалежними розв'язками відповідного однорідного рівняння. Маючи на увазі застосування формули (4.4), знаходимо спочатку складову $\tilde{y}$. Як уже відомо, загальний розв'язок однорідного рівняння визначається рівністю $\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Частинний розв'язок y^* може бути знайдений за допомогою *метода варіації довільних сталих*.

Суть вказаного методу полягає у тому, що функція y^* шукається у тій же формі, що і функція $\tilde{y}$, але у останньому випадку величини C_1 і C_2 вважаються вже не довільними сталими, а невідомими функціями. Таким чином, частинний розв'язок y^* шукаємо у вигляді

$$y^* = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x). \tag{4.5}$$

Функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ визначаються за допомогою наступних формул

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{4.6}$$

Відмітимо, що система (4.6) є лінійною відносно невідомих $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$, крім того, визначником її основної матриці є функція, яка не дорівнює тотожно нулю (система невироджена і має єдиний розв'язок). Розв'язавши вказану систему (наприклад, за формулами Крамера), одержимо

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x) f(x)}{\Delta}, \; C_2'(x) = \frac{y_1(x) f(x)}{\Delta}, \tag{4.7}$$

де $\Delta = y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x)$. Інтегруємо рівності (4.7) (довільні сталі при інтегруванні покладаються рівними нулю) і визначаємо функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$. Після цього можна записати частинний та загальний розв'язки заданого неоднорідного рівняння.

Приклад 2. Використовуючи результати попереднього прикладу, знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 3e^x$.

Розв'язання. Розв'язок шукаємо у вигляді $y = \tilde{y} + y^*$. Розглядаємо однорідне рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$. У попередньому прикладі було показано, що функції $y_1 = e^x$ і $y_2 = e^{2x}$ є частинними лінійно незалежними розв'язками даного однорідного рівняння і його загальний розв'язок має вигляд $\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у формі (формула (4.5)) $y^* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}$. Враховуючи, що $y_1' = e^x$, $y_2' = 2e^{2x}$, складаємо систему (4.6) і розв'язуємо її (можна застосовувати формули (4.7)):

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = 0, \\ C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} = 3e^x, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1'(x) = -3, \\ C_2'(x) = 3e^{-x}. \end{cases}$$

Інтегруємо рівності останньої системи і визначаємо шукані функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ (нагадаємо, що довільні сталі при інтегруванні беруться рівними нулю):

$$C_1(x) = -\int 3dx = -3x, \; C_2(x) = \int 3e^{-x}dx = -3e^{-x}.$$

Записуємо частинний та загальний розв'язки заданого рівняння:

$$y^* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x} = -3xe^x - 3e^{-x}e^{2x} = -3e^x(x+1),$$

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 3e^x(x+1).$$

4.5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо *лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами*, а саме

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{5.1}$$

де p, q – числові коефіцієнти. Особливістю даного рівняння є те, що його розв'язок може бути знайдений без застосування операції інтегрування.

Частинні розв'язки рівняння (5.1) шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$, де k – числовий коефіцієнт. Підставивши вказаний розв'язок у задане рівняння і враховуючи, що $y' = ke^{kx},\ y'' = k^2e^{kx},\ e^{kx} \neq 0$, одержимо

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0,$$

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (5.2)$$

Квадратне рівняння (5.2) відносно невідомої k називається *характеристичним рівнянням* диференціального рівняння (5.1). Відмітимо, що формально рівняння (5.2) отримується з рівняння (5.1) за допомогою заміни $y'',\ y',\ y$ на $k^2,\ k,\ 1$ відповідно. Якщо k є розв'язком рівняння (5.2), то функція $y = e^{kx}$ є розв'язком рівняння (5.1).

Нагадаємо, що корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ визначаються формулами

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},\ D = b^2 - 4ac. \qquad (5.3)$$

Для рівняння (5.2) маємо

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2},\ D = p^2 - 4q. \qquad (5.4)$$

Розглянемо усі можливі випадки для розв'язків характеристичного рівняння.

1. Характеристичне рівняння має дійсні й різні корені k_1 і k_2 (дискримінант додатній). Функції $y_1 = e^{k_1x}$ і $y_2 = e^{k_2x}$ є частинними розв'язками диференціального рівняння (5.1). Так як

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1x}}{e^{k_2x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const,\ (k_1 \neq k_2),$$

то y_1 і y_2 лінійно незалежні. Отже, на основі формули (4.3) попереднього параграфа загальний розв'язок рівняння (5.1) має вигляд

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}, \qquad (5.5)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'' + 3y' - 10y = 0$.

Розв'язання. Маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Складаємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його:

$$k^2 + 3k - 10 = 0;\ D = 49;\ k_1 = -5,\ k_2 = 2.$$

Так як корені дійсні й різні, то загальний розв'язок визначається за допомогою формули (5.5), а саме $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}$.

2. Характеристичне рівняння має дійсні і рівні корені $k_1 = k_2 = k$ (дискримінант дорівнює нулю). У цьому випадку частинними лінійно незалежними розв'язками рівняння (5.1) будуть функції $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$ і для знаходження загального розв'язку одержимо наступну формулу

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \tag{5.6}$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Розв'язання. Складаємо й розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 8k + 16 = 0;\ D = 0;\ k_1 = k_2 = 4.$$

Оскільки корені дійсні й рівні, то застосувавши формулу (5.6), одержимо $y = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$.

3. Коренями характеристичного рівняння є комплексні числа $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ (дискримінант від'ємний). Можна показати, що для такого диференціального рівняння частинними лінійно незалежними розв'язками будуть функції $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$. Отже, загальний розв'язок рівняння (5.1) має вигляд

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \tag{5.7}$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y'' + 6y' + 25y = 0$.

Розв'язання. Розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 6k + 25 = 0;\ D = -64,\ \sqrt{D} = 8i;\ k_{1,2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i.$$

Так як корені комплексні, то на основі формули (5.7) маємо

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

4.6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається наступне рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{6.1}$$

де p, q – числові коефіцієнти; $f(x)$ – функція від x ($f(x)$ не дорівнює тотожно нулю). Загальний розв'язок рівняння (6.1) будемо шукати у вигляді

$$y = \tilde{y} + y^*, \tag{6.2}$$

де y^* – частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння; $\tilde{y}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а саме

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{6.3}$$

Спочатку за допомогою характеристичного рівняння інтегруємо диференціальне рівняння (6.3) і визначаємо функцію $\tilde{y}$ (див. попередній параграф), а потім знаходимо функцію y^*. Загальна форма останньої залежить від виду функції $f(x)$ та від коренів характеристичного рівняння. Розглянемо, далі, декілька частинних випадків рівняння (6.1) (розглядаються більш конкретні випадки для функції $f(x)$, яка стоїть в правій частині) і вкажемо методи визначення відповідних частинних розв'язків y^*.

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = P_n(x), \tag{6.4}$$

де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня відносно x. Частинний розв'язок рівняння (6.4) має вигляд

$$y^* = x^r Q_n(x), \tag{6.5}$$

де $Q_n(x)$ – повний многочлен n-го степеня, тобто

$$Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x + A_n; \tag{6.6}$$

r – кратність кореня $k = 0$ в характеристичному рівнянні; $A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_n$ – числові коефіцієнти, які необхідно визначити. Відмітимо, $Q_n(x)$ і $P_n(x)$ є многочленами одного степеня. З метою визначення коефіцієнтів $A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_n$ підставляємо розв'язок (6.5) у рівняння (6.1). Для цього попередньо знаходимо похідні $(y^*)'$, $(y^*)''$ і підставляємо y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ замість $y,\ y',\ y''$ відповідно. Многочлен лівої частини отриманої рівності представляємо в стандартній формі (зводимо подібні відносно однакових степенів x). Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x лівої і правої частин отримуємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих $A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_n$. Розв'язуємо систему і записуємо частинний розв'язок y^*.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 2y' = 6x^2 + 2x$.

Розв'язання. Маємо рівняння типу (6.4) і розв'язок шукаємо у формі (6.2). Розглядаємо спочатку відповідне однорідне рівняння і визначаємо складову $\tilde{y}$:

$$y'' - 2y' = 0;\ k^2 - 2k = 0,\ k(k-2) = 0;\ k_1 = 0,\ k_2 = 2;$$

$$\tilde{y} = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Частинний розв'язок y^* шукаємо за формулою (6.5). У нашому випадку $Q_n(x)$ – многочлен другого степеня (права частина заданого рівняння є многочленом другого степеня) і $r = 1$ (число $k = 0$ є однократним коренем характеристичного рівняння), отже $y^* = xQ_2(x) = x(A_0x^2 + A_1x + A_2)$. Знаходимо похідні і підставляємо $(y^*)'$, $(y^*)''$ в задане рівняння:

$$(y^*)' = 3A_0x^2 + 2A_1x + A_2,\ (y^*)'' = 6A_0x + 2A_1;$$

$$6A_0x + 2A_1 - 2(3A_0x^2 + 2A_1x + A_2) = 6x^2 + 2x;$$

$$-6A_0x^2 + (6A_0 - 4A_1)x + 2A_1 - 2A_2 = 6x^2 + 2x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x і розв'язуємо отриману систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 \\ x \\ x^0 \end{cases}\!\!\begin{vmatrix} -6A_0 = 6, \\ 6A_0 + 4A_1 = 2, \\ 2A_1 - 2A_2 = 0, \end{vmatrix} \quad \begin{cases} A_0 = -1, \\ A_1 = 2, \\ A_2 = 2. \end{cases}$$

Записуємо частинний та загальний розв'язки заданого рівняння:

$$y^* = x(-x^2 + 2x + 2);\ y = \tilde{y} + y^* = C_1 + C_2e^{2x} + x(-x^2 + 2x + 2).$$

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\alpha x}, \tag{6.7}$$

де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня відносно x; α – числовий коефіцієнт. Частинний розв'язок y^* для рівняння (6.7) визначається за формулою

$$y^* = x^rQ_n(x)e^{\alpha x}, \tag{6.8}$$

де $Q_n(x)$ – многочлен (6.6), коефіцієнти якого необхідно визначити; r – кратність кореня $k = \alpha$ в характеристичному рівнянні.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + y' - 6y = 2e^{3x}$.

Розв'язання. Маємо рівняння типу (6.7), причому $\alpha = 3,\ P_n(x) = 2$ (многочлен нульового степеня). Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + y' - 6y = 0;\ k^2 + k - 6 = 0;\ k_1 = -3,\ k_2 = 2;$$

$$\tilde{y} = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}.$$

Частинний розв'язок y^* визначаємо за допомогою формули (6.8). Для даного рівняння $r = 0$ (число $\alpha = 3$ не є розв'язком характеристичного рівняння) і $Q_n(x) = Q_0(x)$ (многочлен нульового степеня). Отже, маємо

$$y^* = x^0Q_0(x)e^{3x} = Ae^{3x}.$$

Підставляємо функцію y^* в задане рівняння і визначаємо невідомий коефіцієнт A:

$$(y^*)' = 3Ae^{3x},\ (y^*)'' = 9Ae^{3x};\quad 9Ae^{3x} + 3Ae^{3x} - 6Ae^{3x} = 2e^{3x},$$

$$6Ae^{3x} = 2e^{3x},\ 6A = 2,\ A = \frac{1}{3}.$$

Записуємо частинний та загальний розв'язки заданого рівняння:

$$y^* = \frac{1}{3}e^{3x};\ y = \tilde{y} + y^* = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{3}e^{3x}.$$

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x), \tag{6.9}$$

де $P_n(x),\ Q_m(x)$ – многочлени; α, β – числові коефіцієнти. Частинний розв'язок y^* для рівняння (6.9) має вигляд

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(U_s(x)\cos\beta x + V_s(x)\sin\beta x), \tag{6.10}$$

де $U_s(x),\ V_s(x)$ – повні многочлени, степінь яких дорівнює більшому зі степенів многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)$; r – кратність комплексних коренів $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ у характеристичному рівнянні. Аналогічно попередньому, коефіцієнти многочленів $U_s(x)$ і $V_s(x)$ необхідно визначати.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 4y = 8x\sin 2x$.

Розв'язання. Знаходимо спочатку розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + 4y = 0;\ k^2 + 4 = 0;\ k_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i;$$

$$\tilde{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

Задане рівняння має форму рівняння (6.9), причому $P_n(x) = 0$ (многочлен нульового степеня), $Q_m(x) = 8x$ (многочлен першого степеня), $\alpha = 0,\ \beta = 2,\ \alpha \pm \beta i = \pm 2i$. Застосовуємо, далі, формулу (6.10). Для нашого прикладу $r = 1$ (числа $\alpha \pm \beta i = \pm 2i$ є однократними коренями характеристичного рівняння), $U_s(x)$ і $V_s(x)$ – многочлени першого степеня (права частина заданого рівняння містить многочлени нульового і першого степенів). Отже, маємо

$$y^* = x((A_0 x + A_1)\cos 2x + (B_0 x + B_1)\sin 2x).$$

Після диференціювання одержимо:

$$(y^*)'' = (-4A_0 x^2 + (8B_0 - 4A_1)x + 2A_0 + 4B_1)\cos 2x +$$
$$+(-4B_0 x^2 + (-8A_0 - 4B_1)x - 4A_1 + 2B_0)\sin 2x.$$

Підставивши y^* і $(y^*)''$ в задане рівняння, маємо

$$(8B_0 x + 2A_0 + 4B_1)\cos 2x + (-8A_0 x - 4A_1 + 2B_0)\sin 2x =$$
$$= 8x\sin 2x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при косинусах і синусах:

$$\begin{cases} \cos 2x & \left| \; 8B_0 x + 2A_0 + 4B_1 = 0, \right. \\ \sin 2x & \left| \; -8A_0 x - 4A_1 + 2B_0 = 8x. \right. \end{cases}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x і визначаємо невідомі величини:

$$\begin{cases} x & \left| \; 8B_0 = 0, \right. \\ x^0 & \left| \; 2A_0 + 4B_1 = 0, \right. \\ x & \left| \; -8A_0 = 8, \right. \\ x^0 & \left| \; -4A_1 + 2B_0 = 0, \right. \end{cases} \qquad \begin{cases} A_0 = -1, \\ A_1 = 0, \\ B_0 = 0, \\ B_1 = 0{,}5. \end{cases}$$

Записуємо частинний та загальний розв'язки заданого рівняння:

$$y^* = x(-x\cos 2x + 0{,}5\sin 2x) = -x^2\cos 2x + 0{,}5x\sin 2x,$$

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - x^2\cos 2x + 0{,}5x\sin 2x.$$

Інколи диференціальне рівняння (6.1) із більш складною правою частиною $f(x)$ можна звести до розглянутих вище за допомогою наступного твердження: якщо функції $y_1^* = y_1^*(x)$ і $y_2^* = y_2^*(x)$ є частинними розв'язками диференціальних рівнянь $y'' + py' + qy = f_1(x)$ і $y'' + py' + qy = f_2(x)$ відповідно, то функція $y^* = y_1^* + y_2^*$ є частинним розв'язком диференціального рівняння $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$. Наприклад, частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 4y = 8x\sin 2x + x^2 e^x \cos 5x$ може бути знайдений як сума частинних розв'язків диференціальних рівнянь $y'' + 4y =$

$8x \sin 2x$ і $y'' + 4y = x^2 e^x \cos 5x$.

4.7. Поняття про системи диференціальних рівнянь

Дамо деякі поняття про методи інтегрування систем диференціальних рівнянь на прикладі наступної системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + f_1(t), \\ \frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + f_2(t), \end{cases} \tag{7.1}$$

де t – аргумент; $x = x(t)$, $y = y(t)$ – шукані функції; a_1, b_1, a_2, b_2 – числові коефіцієнти; $f_1(t)$, $f_2(t)$ – функції. Для системи (7.1) можуть бути задані наступні початкові умови

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0, \tag{7.2}$$

де t_0, x_0, y_0 – певні числові значення аргументу та шуканих функцій відповідно. Один із методів інтегрування заданої системи полягає у тому, що вона зводиться до диференціального рівняння другого порядку, яке містить лише одну невідому функцію. Застосуємо вказаний метод до системи (7.1).

Диференціюємо перше рівняння системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1 \frac{dx}{dt} + b_1 \frac{dy}{dt} + \frac{df_1}{dt}. \tag{7.3}$$

Використовуючи друге рівняння системи (7.1), перепишемо рівняння (7.3) у вигляді

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1 \frac{dx}{dt} + b_1(a_2 x + b_2 y + f_2(t)) + \frac{df_1}{dt}. \tag{7.4}$$

Розв'язуємо перше рівняння заданої системи відносно функції *y*:

$$y = \frac{1}{b_1}\left(\frac{dx}{dt} - a_1 x - f_1(t)\right). \tag{7.5}$$

Підставляємо (7.5) у (7.4) і дістаємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + qx = f(t), \tag{7.6}$$

де

$$p = -(a_1 + b_2);\; q = a_1 b_2 - a_2 b_1;\; f(t) = b_1 f_2(t) - b_2 f_1(t) + \frac{df_1}{dt}.$$

Як бачимо, одержали лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами (якщо в заданій системі $f_1(t) = f_2(t) \equiv 0$, то рівняння буде однорідним). Проінтегрувавши його, знаходимо функцію $x = \phi(t, C_1, C_2)$. Функцію $y = \psi(t, C_1, C_2)$ визначаємо за допомогою формули (7.5).

Приклад 1. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 7y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 6y. \end{cases}$$

Розв'язання. Диференціюємо перше рівняння системи й у отриманому співвідношенні замінюємо похідну від функції *y* правою частиною другого рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 7\frac{dy}{dt};\; \frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 7(2x - 6y).$$

Знаходимо величину *y* з першого рівняння заданої системи і підставляємо в друге:

$$y = \frac{1}{7}(3x - \frac{dx}{dt});\; \frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 7(2x - \frac{6}{7}(3x - \frac{dx}{dt}));$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 4x = 0.$$

Відмітимо, що отримане лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами могло бути записане на самому початку за допомогою формули (7.6) (у нашому випадку $a_1 = 3,\; b_1 = -7,\; a_2 = 2,\; b_2 = -6,\; f_1(t) \equiv 0,\; f_2(t) \equiv 0;\quad p = 3,\; q = -4,\; f(t) = 0$). Інтегруємо вказане рівняння та визначаємо функцію *x*:

$$k^2 + 3k - 4 = 0;\; k_1 = -4,\; k_2 = 1;\; x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{t}.$$

Диференціюємо функцію *x* і знаходимо функцію *y*:

$$\frac{dx}{dt} = -4C_1 e^{-4t} + C_2 e^{t};\; y = \frac{1}{7}(3x - \frac{dx}{dt}) = C_1 e^{-4t} + \frac{2}{7}C_2 e^{t}.$$

4.8. Приклади задач на складання та розв'язування диференціальних рівнянь

Задача 1. Тіло масою m падає вертикально вниз. Знайти закон руху тіла, якщо сила опору повітря пропорційна квадрату його швидкості. Вважати, що на початку руху швидкість v і шлях s дорівнюють нулю.

Розв'язання. Диференціальне рівняння, яке описує рух даного тіла, складається за допомогою другого закону Ньютона $F = ma$, де F – сила; m – маса тіла; a – прискорення. Крім того, нагадаємо, що при прямолінійному русі швидкість дорівнює похідній від шляху, а прискорення – похідній від швидкості. При розв'язанні даної задачі будуть використані наступні гіперболічні функції: гіперболічний синус $sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, гіперболічний косинус $ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ і гіперболічний тангенс $th\,x = \frac{sh\,x}{ch\,x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Первісна від $th\,x$ дорівнює $lnch\,x$.

Тіло, яке падає вниз, рухається під дією сили тяжіння $F_1 = mg$ (g – прискорення вільного падіння) і сили опору повітря $F_2 = -kv^2$ (k – коефіцієнт пропорційності; напрям дії сили протилежний до напряму руху). На основі другого закону Ньютона одержимо

$$ma = mg - kv^2 \text{ або } m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2.$$

Маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Перепишемо його у зручному для інтегрування вигляді і проінтегруємо (уведено позначення $\beta^2 = \frac{mg}{k}$):

$$\int \frac{dv}{\beta^2 - v^2} = \frac{k}{m}\int dt, \quad \frac{1}{2\beta} ln\left|\frac{\beta + v}{\beta - v}\right| = \frac{k}{m}t + C_1.$$

Так як $v(0) = 0$, то $C_1 = 0$. Враховуючи, що $C_1 = 0$ і $v < \beta$ (із фізичних міркувань), можемо записати

$$\frac{1}{2\beta} ln\left|\frac{\beta+v}{\beta-v}\right| = \frac{k}{m}t, \quad \frac{\beta+v}{\beta-v} = e^{\frac{2\beta k}{m}t}.$$

Розв'язуємо останнє рівняння відносно v:

$$v = \beta\frac{e^{\frac{2\beta k}{m}t}-1}{e^{\frac{2\beta k}{m}t}+1} = \beta\frac{e^{\frac{\beta k}{m}t}-e^{-\frac{\beta k}{m}t}}{e^{\frac{\beta k}{m}t}+e^{-\frac{\beta k}{m}t}} = \beta\, th\left(\frac{\beta k}{m}t\right) \text{ або } \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{mg}{k}}\, th\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}\, t\right).$$

Інтегруємо отримане диференціальне рівняння:

$$s = \frac{m}{k} ln\frac{e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}t}+e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{2} + C_2 = \frac{m}{k} lnch\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}\, t\right) + C_2.$$

Так як $s(0) = 0$, то $C_2 = 0$. Записуємо шуканий закон руху

$$s = \frac{m}{k} lnch\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}\, t\right).$$

Задача 2. Тіло нагріте до температури $100°$C і внесене до приміщення з температурою повітря $20°C$. Протягом 10 хвилин температура тіла знизилася до $70°C$. Швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла й середовища (закон Ньютона). Знайти залежність температури тіла *T* від часу *t* (підвищенням температури в приміщенні знехтувати). Якою буде температура тіла через 20 хвилин?

Розв'язання. У відповідності із законом Ньютона можемо записати

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-20),$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Знак мінус після знака рівності обумовлений тем, що температура знижається. Відокремлюємо змінні у одержаному рівнянні та інтегруємо:

$$\int\frac{dT}{T-20} = -k\int dt, \quad ln\,|T-20| = -kt + ln\,C\,,\ T = 20 + Ce^{-kt}.$$

Використовуючи те, що $T = 100$ при $t = 0$ й $T = 70$ при $t = 10$, визначаємо невідомі коефіцієнти C і k:

$$\begin{cases} 20 + C = 100, \\ 20 + Ce^{-10k} = 70, \end{cases} \quad \begin{cases} C = 80, \\ e^{-k} = 0{,}625^{0{,}1}. \end{cases}$$

Шукана залежність має вигляд

$$T = 20 + 80 \cdot 0{,}625^{0{,}1t}.$$

Якщо $t = 20$, то $T = 20 + 80 \cdot 0{,}625^2 = 51{,}25$ (град.).

Задача 3. Резервуар циліндричної форми з радіусом основи 1 м і висотою 4 м повністю заповнений водою. У дні резервуара утворився круглий отвір радіуса 4 см. За який час уся вода витече з резервуара?

Розв'язання. Застосуємо тут стандартний прийом, який часто використовується при складанні диференціальних рівнянь. Його суть полягає у тому, що нескінченно малий приріст змінної величини замінюється її диференціалом. Іншими словами, ми відкидаємо нескінченно малі більш високого порядку малості. Відмітимо, що при такому підході часто отримуються не наближені, а точні функціональні залежності. Для розв'язання даної задачі нам знадобиться також формула Бернуллі $v = \sigma\sqrt{2gh}$, де v – швидкість витікання рідини через малий отвір; h – рівень води над отвором; $g \approx 9{,}8$ – прискорення сили тяжіння; σ – сталий коефіцієнт (для води $\sigma \approx 0{,}6$).

Нехай у деякий момент часу t рівень води дорівнює h. Через нескінченно малий проміжок часу Δt рівень води буде дорівнювати $h + \Delta h$ (зауважимо, що $\Delta h < 0$). З одного боку, за вказаний проміжок часу об'єм води в резервуарі змінився на величину $\Delta V = -\pi R^2 \Delta h$ (R – радіус основи), а з іншого – на величину $\Delta V = \pi r^2 v \Delta t = \pi r^2 \sigma\sqrt{2gh}\Delta t$ (r – радіус отвору). Отже, можемо записати таку рівність

$$-\pi R^2 \Delta h = \pi r^2 \sigma\sqrt{2gh}\Delta t.$$

Замінивши величини Δh і Δt відповідними диференціалами dh і dt, отримаємо наступне диференціальне рівняння

$$-\pi R^2 dh = \pi r^2 \sigma \sqrt{2gh} dt.$$

Відокремлюємо змінні й інтегруємо:

$$\int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sigma \sqrt{2g} \int dt\,; \quad h = \frac{1}{4}\left(-\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sigma \sqrt{2g} t + C\right)^2.$$

Так як $h = 4$ при $t = 0$, то $C = 4$. Підставивши в знайдений розв'язок відповідні числові значення ($C = 4$; $r = 0{,}04$; $R = 1$; $\sigma = 0{,}6$; $g = 9{,}8$), отримуємо залежність рівня h від часу t:

$$h = 0{,}25(4 - 0{,}00425t)^2.$$

Знаходимо час витікання усієї води (покладаємо $h = 0$):

$$0 = 0{,}25(4 - 0{,}00425t)^2; \quad t \approx 941 \text{ (с)}.$$

Задача 4. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(3; 1)$, якщо довжина відрізка, що відтинається будь-якою її дотичною на осі ординат, дорівнює піднормалі.

Розв'язання. Зробимо спочатку декілька загальних зауважень. В задачах подібного типу, як правило, використовуються рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці з абсцисою $x = x_0$. Нагадаємо, що вказані рівняння мають відповідно вигляд

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

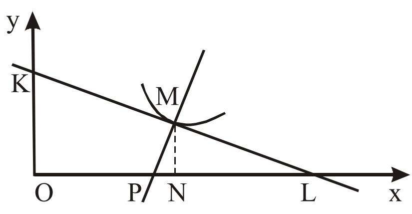


Рис.20

Крім того, в геометричних задачах часто використовуються поняття піднормалі й піддотичної. На наведеному рисунку відрізок NL – це піддотична, а відрізок PN – це піднормаль (ML – дотична; MP – нормаль; N – проекція точки *M* на вісь *Ox*).

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка шуканої кривої. Проведемо у цій точці дотичну ML і нормаль MP (рис. 20). У відповідності з умовою задачі виконується рівність $|OK| = |PN|$.

Визначимо далі довжину відрізків OK і PN в потрібній нам формі. Записуємо рівняння дотичної ML і нормалі MP (оскільки через x і y вже позначено координати точки M, то змінні величини позначаємо через X і Y):

$$Y = y + y'(X - x), \quad Y = y - \frac{1}{y'}(X - x).$$

В рівнянні дотичної покладаємо $X = 0$ й знаходимо $|OK| = |Y| = |y - y'x|$. В рівнянні нормалі покладаємо $Y = 0$ й здобуваємо $X = yy' + x$ (абсциса точки P). Враховуючи, що абсциса точки N дорівнює x, знаходимо $|PN| = |yy' + x - x| = |yy'|$. Підставляємо відповідні вирази в рівність $|OK| = |PN|$ і одержуємо

$$|y - y'x| = |yy'|, \quad y - y'x = \pm yy', \quad y' = \frac{y}{x \pm y}.$$

Отримали однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Проінтегрувавши його за відомою схемою (потрібна заміна $y = ux$), можемо записати $x = y(C \mp ln\,|\,y|)$. Використовуючи координати заданої точки $(3; 1)$, визначаємо довільну сталу C:

$$3 = 1 \cdot (C \mp ln\,|\,1|), \quad C = 3.$$

Записуємо рівняння шуканої кривої

$$x = y(3 \mp ln\,|\,y|).$$

Розділ 5. Подвійні та потрійні інтеграли

5.1. Означення та основні властивості подвійного інтеграла

Подвійний інтеграл можна розглядати як узагальнення поняття визначеного інтеграла на випадок функції двох змінних.

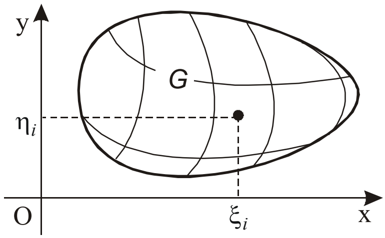


Рис.21

Нехай задана функція двох змінних $z = f(x, y)$ і нехай G – деяка замкнена обмежена область, яка належить області визначення функції $f(x, y)$. Розіб'ємо область G на n частин $G_1, G_2, \dots, G_n$ і позначимо їхні площі через $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ відповідно (рис. 21). У кожній частині G_i $(i = 1,2, \dots, n)$ деяким чином виберемо по одній точці (ξ_i, η_i) і складемо *інтегральну суму* функції $f(x, y)$ по області G, а саме

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i. \qquad (1.1)$$

Діаметром області будемо називати найбільшу відстань між точками границі цієї області. Нехай λ– найбільший з діаметрів частин G_i $(i = 1,2, \dots, n)$. Якщо інтегральна сума (1.1) має границю при $\lambda \to 0$, то вказана границя називається *подвійним інтегралом* від функції $f(x, y)$ по області G і позначається одним із символів

$$\iint_G f(x, y)dxdy\,, \quad \iint_G f(x, y)dS,$$

де $f(x, y)$ – підінтегральна функція, G – область інтегрування, $dxdy$ (або dS) – елемент площі. Таким чином, у відповідності з означенням можемо записати

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i. \qquad (1.2)$$

Якщо границя інтегральної суми (1.1) існує, то функція $f(x,y)$ називається *інтегрованою* в області G. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області G, то вона інтегрована у цій області.

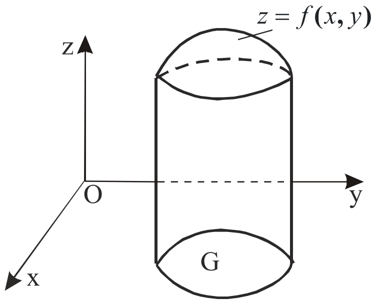


Рис.22

Розглянемо тепер *геометричний зміст* подвійного інтеграла. Припустимо, що функція $z = f(x,y)$ неперервна і невід'ємна в області G. У цьому випадку подвійний інтеграл від функції $f(x,y)$ по області G дорівнює об'єму тіла, яке обмежене наступним чином (рис.22): з боків – циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі Oz, а напрямною є границя області G; знизу – областю G, яка лежить в площині Oxy; зверху – поверхнею $z = f(x,y)$. Вказане тіло називається *криволінійним циліндром*.

Наведемо коротко *основні властивості* визначеного інтеграла (вважаємо, що $f(x,y)$ і $g(x,y)$ – інтегровані функції, а k – стала).

1. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\iint_G kf(x,y)dxdy = k\iint_G f(x,y)dxdy.$$

2. Інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів:

$$\iint_G (f(x,y)+g(x,y))dxdy = \iint_G f(x,y)dxdy + \iint_G g(x,y)dxdy.$$

3. Якщо область G розбита на частини G_1 і G_2, які не мають внутрішніх спільних точок, то

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \iint_{G_1} f(x,y)dxdy + \iint_{G_2} f(x,y)dxdy.$$

4. *Теорема про середнє*: якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій області *G*, то у цій області знайдеться така точка (ξ,η), що

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = f(\xi,\eta)S,$$

де *S* – площа області *G*.

5.2. Обчислення подвійного інтеграла у прямокутних координатах

Розглянемо спочатку *двократні інтеграли* від функції двох змінних:

$$\int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy\right) dx,$$

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right) dy.$$

При обчисленні внутрішнього інтеграла $\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$ величина *x* вважається сталою, а для інтеграла $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ сталою вважається величина *y*. Отже, обчислення двократного інтеграла зводиться до послідовного обчислення двох звичайних визначених інтегралів. Відмітимо, що межами інтегрування у внутрішньому інтегралі можуть бути функції або числа, а у зовнішньому – тільки числа.

Приклад 1. Обчислити двократний інтеграл

$$\int_0^1 dx \int_x^{x^2} (2x^2y + x)dy.$$

Розв'язання. Послідовно обчислюємо внутрішній (*y* – змінна, *x* – стала) та зовнішній інтеграли:

$$\int_x^{x^2} (2x^2y + x)dy = 2x^2 \int_x^{x^2} ydy + x\int_x^{x^2} dy = (x^2y^2 + xy)|_x^{x^2} =$$

$$= x^2x^4 + xx^2 - (x^2x^2 + xx) = x^6 + x^3 - x^4 - x^2;$$

$$\int_0^1 (x^6 + x^3 - x^4 - x^2)\,dx = \left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{59}{420}.$$

Подвійний інтеграл обчислюється за допомогою двократного.

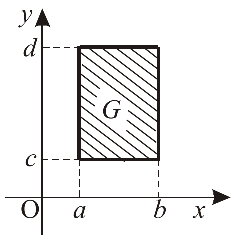


Рис.23

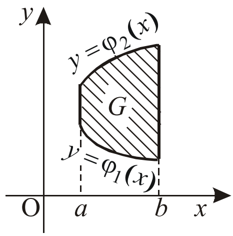


Рис.24

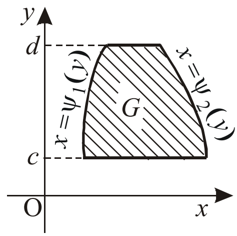


Рис.25

Якщо областю інтегрування є прямокутник, сторони якого паралельні осям координат (рис.23), то подвійний інтеграл обчислюється за однією із формул (за будь-якою):

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy, \qquad (2.1)$$

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx. \qquad (2.2)$$

Як бачимо, межами інтегрування у цьому випадку є тільки числа.

Для області G, яка визначається співвідношеннями $\phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$,$a \le x \le b$ (рис.24), застосовується формула

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (2.3)$$

Звертаємо увагу на те, що крива $y = \phi_1(x)$ обмежує область інтегрування знизу, а крива $y = \phi_2(x)$ – зверху.

Якщо область G задається нерівностями $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$, $c \le y \le d$ (рис.25), то подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (2.4)$$

Відмітимо, що крива $x = \psi_1(y)$ обмежує область зліва, а крива $x =$

$\psi_2(y)$ – справа.

Будь-який подвійний інтеграл можна обчислювати як за формулою (2.3), так і за формулою (2.4), але у багатьох випадках один з підходів є більш раціональним, ніж інший.

Приклад 2. Перейти від подвійного інтеграла $\iint_G f(x,y)\,dxdy$ до двократного (або суми двократних) при різних порядках інтегрування, якщо G – область, яка обмежена прямими $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x,\ y = 0$ та кривою $x = \sqrt{y}$.

Розв'язання. Розглянемо спочатку випадок, коли внутрішній інтеграл береться по змінній *x*, а зовнішній – по *y* (застосовується формула (2.4)). Будуємо область G (рис.26). Для подальшого нам

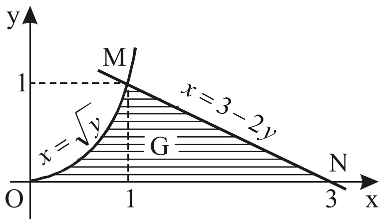


Рис.26

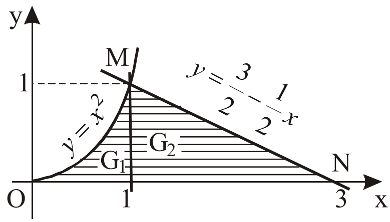


Рис.27

знадобляться координати точок перетину M і N. Складемо системи

$$\begin{cases} x = 3 - 2y, \\ x = \sqrt{y}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 - 2y, \\ y = 0. \end{cases}$$

З першої системи визначаємо точку M(1;1), а з другої – точку N(3;0). Можемо записати

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx.$$

Межі інтегрування визначаємо наступним чином: нижня межа у внутрішньому інтегралі задається кривою, яка обмежує область зліва, тобто напівпараболою $x = \sqrt{y}$; верхня межа у внутрішньому інтегралі –

прямою, яка обмежує область справа, тобто прямою $x = 3 - 2y$ (розв'язали задане рівняння прямої відносно x); нижня межа у зовнішньому інтегралі – прямою, яка обмежує область знизу, тобто прямою $y = 0$ (або мінімальним значенням величини y по області G); верхня межа у зовнішньому інтегралі – ординатою точки M (або максимальним значенням величини y по області G).

Розглянемо тепер випадок, коли внутрішній інтеграл береться по змінній y, а зовнішній – по x. Для заданої області G безпосередньо застосувати формулу (2.3) неможливо, так як ця область обмежена зверху не однією, а двома лініями. Через точку M проведемо пряму, що паралельна осі Oy (рис. 27). Вказана пряма розбиває область G на дві частині G_1 і G_2. Використовуючи властивості подвійного інтеграла, можемо записати

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x} f(x,y)dy.$$

Межі інтегрування у першому двократному інтегралі (по області G_1) визначаємо наступним чином: нижня межа у внутрішньому інтегралі задається прямою, яка обмежує область знизу, тобто прямою $y = 0$; верхня межа у внутрішньому інтегралі – кривою, яка обмежує область зверху, тобто параболою $y = x^2$ (розв'язали задане рівняння кривої відносно y); нижня межа у зовнішньому інтегралі – абсцисою точки O (або мінімальним значенням величини x по області G_1); верхня межа у зовнішньому інтегралі – прямою, яка обмежує область справа, тобто прямою $x = 1$ (або максимальним значенням величини x по області G_1). Аналогічно визначаються межі інтегрування у другому інтегралі.

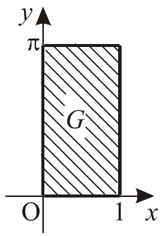
Очевидно, що для даної області G об'єм обчислень при застосуванні формули (2.4) буде меншим, ніж при застосуванні формули (2.3).

Приклад 3. Обчислити подвійні інтеграли:

а) $\iint_G 4x^3 \sin y\, dxdy,$ G: $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = \pi$;

б) $\iint_G (6x^2y + 4y^3)dxdy,$ G: $x = 0,\ y = 2 - x,\ y = \sqrt{x}$.

Розв'язання. а) Будуємо область інтегрування (рис.28) та обчислюємо інтеграл за формулою (2.1):



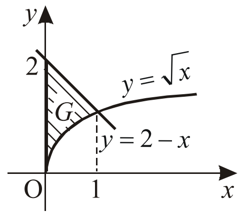


Рис.28 Рис.29

$$\iint_G 4x^3 \sin y\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\pi} 4x^3 \sin y\, dy;$$

$$\int_0^{\pi} 4x^3 \sin y\, dy = -4x^3 \cos y|_0^{\pi} = -4x^3(-1-1) = 8x^3;$$

$$\int_0^1 8x^3 dx = 8 \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = 2.$$

б) Будуємо область інтегрування (рис.29) та знаходимо координати точки перетину прямої і параболи:

$$\begin{cases} y = 2 - x, \\ y = \sqrt{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 - x, \\ 2 - x = \sqrt{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

За допомогою формули (2.3) перейдемо від подвійного до двократного інтеграла:

$$\iint_G (6x^2y + 4y^3)dxdy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x} (6x^2y + 4y^3)dy.$$

Обчислюємо, далі, внутрішній та зовнішній інтеграли:

$$\int_{\sqrt{x}}^{2-x} (6x^2y + 4y^3)dy = \left(6x^2 \cdot \frac{y^2}{2} + 4 \cdot \frac{y^4}{4}\right)\Big|_{\sqrt{x}}^{2-x} = 3x^2(2-x)^2 +$$

$$+(2-x)^4 - 3x^2(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x})^4 = 11x^2 - 15x^3 + 3x^4 + (2-x)^4;$$

$$\int_0^1 (11x^2 - 15x^3 + 3x^4 + (2-x)^4)dx =$$

$$= \left(11 \cdot \frac{x^3}{3} - 15 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{(2-x)^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{11}{3} - \frac{15}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5} + \frac{32}{5} = \frac{403}{60}.$$

5.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Перехід до полярних координат

Нехай у подвійному інтегралі $\iint_G f(x,y)\,dxdy$ необхідно перейти від змінних x і y до змінних u і v, що пов'язані між собою співвідношеннями

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v). \tag{3.1}$$

Припустимо, що на основі формул (3.1) однозначно визначаються функції

$$u = u(x,y),\ v = v(x,y). \tag{3.2}$$

Формули (3.1) називаються формулами *перетворення координат*, а формули (3.2) – формулами *оберненого перетворення*. Співвідношення (3.2) деякій точці М(x,y) з площини Oxy ставлять у відповідність точку $M^*(u,v)$ на площині Ouv (u, v – прямокутні координати). Нехай обмеженій замкненій області G з площини Oxy відповідає обмежена замкнена область G^* на площині Ouv.

Припустимо, що функції (3.1) мають в області G^* неперервні частинні похідні першого порядку по змінним u і v. Складемо *функціональний визначник* (або *якобіан перетворення*)

$$J = \begin{vmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{vmatrix}. \tag{3.3}$$

Якщо виконуються всі зроблені вище припущення і в області G^* якобіан (3.3) відмінний від нуля, то перехід до нових змінних у подвійному інтегралі здійснюється за формулою

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \iint_{G^*} f(x(u,v),y(u,v))|J|\,dudv. \qquad (3.4)$$

У якості прикладу розглянемо перехід від декартових до полярних координат. У цьому випадку, як відомо, співвідношення (3.1) мають вигляд

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi. \qquad (3.5)$$

Знайдемо якобіан

$$J = \begin{vmatrix} (\rho\cos\phi)'_\rho & (\rho\cos\phi)'_\phi \\ (\rho\sin\phi)'_\rho & (\rho\sin\phi)'_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi \\ \sin\phi & \rho\cos\phi \end{vmatrix} =$$

$$= \rho(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = \rho.$$

Враховуючи, що $\rho \geq 0$, маємо $|J| = |\rho| = \rho$. На основі формули (3.4) отримаємо

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \iint_{G^*} f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\rho\,d\rho d\phi. \qquad (3.6)$$

Укажемо, що переходити до полярних координат у подвійному інтегралі доцільно в тих випадках, коли підінтегральна функція та рівняння границі області інтегрування містять функціональні залежності від аргумента $x^2 + y^2$.

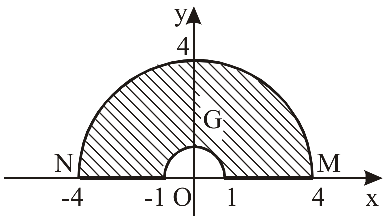


Рис.30

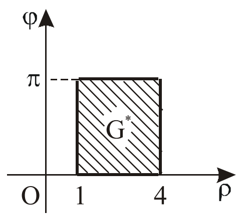


Рис.31

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iint_G \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, де G – половина кільця $1 \leq x^2 + y^2 \leq 16$, що розміщена вище осі Ox.

Розв'язання. У даному прикладі зручно перейти до полярних координат. Область G обмежують два кола $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 16$ та вісь абсцис $y = 0$ (рис.30). За допомогою формул (3.5) дістаємо рівняння границі області G у полярних координатах: $\rho = 1,\ \rho = 4,\ \phi = 0$ (відрізок OM), $\phi = \pi$ (відрізок ON). Отримані рівняння є рівняннями границі області G* у прямокутній системі координат Oρφ (рис.31). Застосувавши формулу (3.6), обчислюємо заданий інтеграл:

$$\iint_G \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint_{G^*} \sqrt{(\rho\, cos\, \phi)^2 + (\rho\, sin\, \phi)^2}\rho d\rho d\phi =$$

$$= \iint_{G^*} \rho^2 d\rho d\phi = \int_0^{\pi} d\phi \int_1^4 \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} (\rho^3|_1^4)\, d\phi = 21\phi|_0^{\pi} = 21\pi.$$

Відмітимо, що на практиці, як правило, область G* не будують, а розставляють межі інтегрування, використовуючи область G та рівняння її границі у полярних координатах. Так, у попередньому прикладі по області G (рис.30) легко бачити, що у внутрішньому інтегралі $1 \le \rho \le 4$, а у зовнішньому $0 \le \phi \le \pi$.

5.4. Потрійний інтеграл та його обчислення у прямокутних координатах

Аналогічно тому, як для функції двох змінних вводилося поняття подвійного інтеграла, для функції трьох змінних можна ввести поняття потрійного інтеграла.

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена в області V. Припустимо, що область V обмежена і замкнена, а функція $f(x, y, z)$ обмежена у цій області. Розділимо вказану область на n частин $V_1, V_2, \dots, V_n$ й позначимо їхні об'єми через $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$ відповідно. У кожній частині V_i $(i = 1,2, \dots, n)$ виберемо по одній точці $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Складемо суму

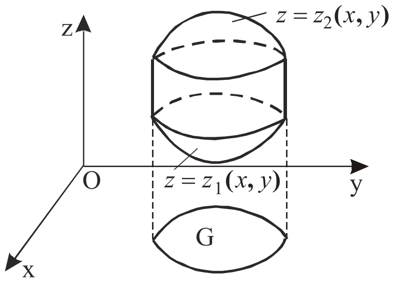
$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i \qquad (4.1)$$

Сума (4.1) називається *інтегральною сумою* функції $f(x, y, z)$ по області V. Нехай λ – найбільший із діаметрів частин V_i $(i = 1,2, \dots, n)$.

Якщо існує границя інтегральної суми (4.1) при $\lambda \to 0$, то вона називається *потрійним інтегралом* від функції $f(x,y,z)$ по області V і позначається одним із символів

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz, \quad \iiint_V f(x,y,z)dv.$$

Основні властивості потрійного інтеграла повторюють властивості подвійного (з урахуванням того, що переходимо з двовимірного простору в тривимірний).



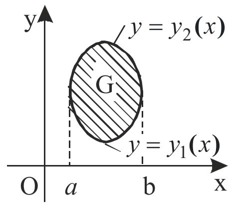


Рис.32 Рис.33

Нехай область V (рис. 32) обмежена наступним чином: знизу – поверхнею $z = z_1(x,y)$, зверху – поверхнею $z = z_2(x,y)$, з боків – циліндричними поверхнями, твірні яких паралельні осі Oz (або площинами, що паралельні осі Oz) і нехай G – проекція області V на площину Oxy (рис. 33). Потрійний інтеграл для вказаної області інтегрування обчислюється за формулою

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_G dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz, \qquad (4.2)$$

або у більш розгорнутому вигляді через *трикратний інтеграл*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \quad (4.3)$$

На практиці частіше використовується формула (4.3), у якій межі інтегрування у двох зовнішніх інтегралах (по змінним x і y) визначаються як межі інтегрування для подвійного інтеграла по області

G. Аналогічно попередньому, при обчисленні внутрішніх інтегралів змінною вважається тільки та величина, яка стоїть під знаком диференціала.

*Приклад 1.*Обчислити інтеграл $\iiint_V xyzdxdydz$, якщо V – область, яка обмежена поверхнями $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$ та площинами $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

Розв'язання. Спочатку будуємо область інтегрування V (рис.34) та її проекцію на площину Oxy (рис.35).

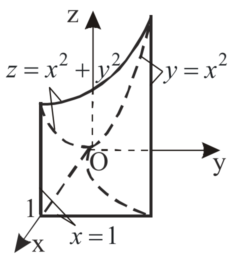


Рис.34

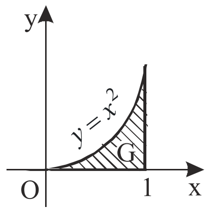


Рис.35

Застосовуємо формулу (4.3) та розставляємо межі інтегрування:

$$\iiint_V xyzdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \int_0^{x^2+y^2} xyzdz.$$

Обчислюємо перший внутрішній інтеграл (*z* – змінна; *x*, *y* – сталі):

$$\int_0^{x^2+y^2} xyzdz = xy \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_0^{x^2+y^2} = \frac{1}{2}(x^5y + 2x^3y^3 + xy^5).$$

Обчислюємо другий внутрішній інтеграл (*y* – змінна; *x* – стала):

$$\int_0^{x^2} \frac{1}{2}(x^5y + 2x^3y^3 + xy^5)dy = \frac{x}{2}\left(\frac{x^4y^2}{2} + \frac{x^2y^4}{2} + \frac{y^6}{6}\right)\Big|_0^{x^2} = \frac{x^9}{4} + \frac{x^{11}}{4} + \frac{x^{13}}{12}.$$

Дістаємо кінцевий результат:

$$\int_0^1 \frac{1}{4}\left(x^9 + x^{11} + \frac{x^{13}}{3}\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{14}}{14}\right)\Big|_0^1 = \frac{87}{1680}.$$

При обчисленнях у трикратному інтегралі можливі й інші порядки інтегрування. Наприклад, можемо записати

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} dz \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy. \quad (4.3)$$

Якщо область V визначається співвідношеннями $a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ l \le z \le h$ (областю інтегрування є паралелепіпед, грані якого паралельні координатним площинам), то межами інтегрування у трикратному інтегралі будуть тільки числа, а саме

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_l^h f(x,y,z)dz. \quad (4.4)$$

5.5. Заміна змінних у потрійному інтегралі. Перехід до циліндричних та сферичних координат

Припустимо, що функція $f(x,y,z)$ визначена і неперервна в замкненій обмеженій області V. Тоді існує потрійний інтеграл $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$. Крім того, нехай задані *формули перетворення* координат

$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w), \quad (5.1)$$

які однозначно визначають *формули оберненого перетворення*

$$u = u(x,y,z), \quad v = v(x,y,z), \quad w = w(x,y,z). \quad (5.2)$$

Функції (5.2) кожній точці $M(x,y,z)$ з області V ставлять у відповідність деяку точку $M^*(u,v,w)$, а всій області V – область V* у декартовій прямокутній системі координат Ouvw. Припустимо, що функції (5.1) неперервно диференційовані в області V* і складемо якобіан

$$J = \begin{vmatrix} x_u'(u,v,w) & x_v'(u,v,w) & x_w'(u,v,w) \\ y_u'(u,v,w) & y_v'(u,v,w) & y_w'(u,v,w) \\ z_u'(u,v,w) & z_v'(u,v,w) & z_w'(u,v,w) \end{vmatrix}. \quad (5.3)$$

Якщо в області V* функціональний визначник (5.3) відмінний від нуля, то перехід до нових змінних у потрійному інтегралі відбувається за формулою

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz =$$
$$= \iiint_{V^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|J|dudvdw. \qquad (5.4)$$

Конкретизуємо формулу (5.4) для випадків переходу до циліндричних та сферичних координат, які часто використовуються при розв'язуванні технічних задач. Циліндричні координати ρ, ϕ, z

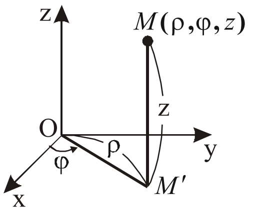


Рис.36

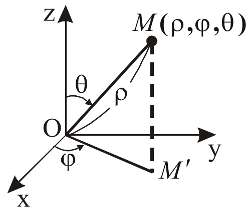


Рис.37

та прямокутні x, y, z (рис.36) пов'язані між собою наступними співвідношеннями

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z, \qquad (5.5)$$

причому $0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \phi < 2\pi,\ -\infty < z < \infty$. Якобіан (5.3) та формула (5.4) приймають вигляд

$$J = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V^*} f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)\rho d\rho d\phi dz. \qquad (5.6)$$

Зв'язок між сферичними координатами ρ, ϕ, θ та прямокутними x, y, z (рис.37) задається наступними формулами

$$x = \rho\sin\theta\cos\phi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\phi, \quad z = \rho\cos\theta, \qquad (5.7)$$

причому $0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \phi < 2\pi,\ 0 < \theta < \pi$. Враховуючи, що $J = \rho^2\sin\theta$, можемо записати

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint_{V^*} f(\rho \sin\theta \cos\phi, \rho \sin\theta \sin\phi, \rho \cos\theta)\rho^2 \sin\theta \, d\rho d\phi d\theta. \quad (5.8)$$

Відмітимо, що переходити до циліндричних (сферичних) координат зручно у тих випадках, коли співвідношення, що описують область інтегрування та підінтегральна функція представляються через аналітичні вирази від аргументів $x^2 + y^2$, z (аргументу $x^2 + y^2 + z^2$).

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iiint_V z(x^2 + y^2)dxdydz$, якщо V – область, яка обмежена циліндром $x^2 + y^2 = 4$, параболоїдом обертання $z = 1 + x^2 + y^2$ та площиною $z = 0$.

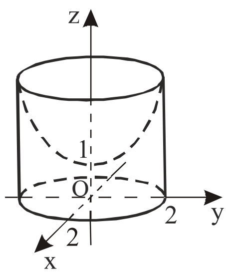


Рис.38

Розв'язання. Будуємо область V (рис.38). Перейдемо до циліндричних координат. За допомогою формул (5.5) запишемо рівняння границі області V в циліндричних координатах: $\rho = 2$, $z = 0$, $z = 1 + \rho^2$. На основі формули (5.6) дістанемо

$$\iiint_V z(x^2 + y^2)dxdydz = \iiint_{V^*} z\rho^2 \rho d\rho d\phi dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 d\rho \int_0^{1+\rho^2} z\rho^3 dz.$$

Послідовно обчислюємо внутрішні та зовнішній інтеграли:

$$\int_0^{1+\rho^2} z\rho^3 dz = \rho^3 \cdot \frac{z^2}{2}\bigg|_0^{1+\rho^2} = \frac{1}{2}(\rho^3 + 2\rho^5 + \rho^7);$$

$$\int_0^2 \frac{1}{2}(\rho^3 + 2\rho^5 + \rho^7)d\rho = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^6}{3} + \frac{\rho^8}{8}\right)\bigg|_0^2 = \frac{86}{3};$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{86}{3} d\phi = \frac{86}{3} \phi \Big|_0^{2\pi} = \frac{172\pi}{3}.$$

5.6 Деякі застосування подвійного та потрійного інтегралів

Нехай відомо, що неоднорідна пластина займає область G на площині Oxy і її густина у цій області розподілена по закону $\gamma = \gamma(x, y)$, причому функція $\gamma(x, y)$ неперервна в області G. З метою визначення маси пластини розіб'ємо її на n малих частин $G_1, G_2, \dots, G_n$, площі яких позначимо через $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ відповідно. У кожній частині G_i $(i = 1,2, \dots, n)$ фіксуємо по одній точці (ξ_i, η_i) і наближено обчислюємо масу m_i однієї частини як масу однорідної пластини з густиною $\gamma(\xi_i, \eta_i)$, тобто $m_i \approx \gamma(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i$. Маса всієї пластини обчислюється за наближеною формулою

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i. \quad (6.1)$$

Очевидно, що при зменшенні розмірів частин G_i $(i = 1,2, \dots, n)$ точність формули (6.1) збільшується. Нехай λ– найбільший з діаметрів частин G_i $(i = 1,2, \dots, n)$. Легко бачити, що права частина останнього співвідношення представляє собою інтегральну суму функції $\gamma(x, y)$ по області G. Здійснивши граничний перехід у рівності (6.1) при $\lambda \to 0$, отримаємо точну формулу для обчислення маси плоскої пластини

$$m = \iint_G \gamma(x, y) dx dy. \quad (6.2)$$

Окрім маси пластини, багато інших фізичних та геометричних характеристик виражаються через подвійні інтеграли. Основні формули представлені в наступній таблиці ($\gamma(x, y)$ – густина).

Таблиця 1. Застосування подвійного інтеграла для обчислення деяких фізичних та геометричних величин

Назва величини	Формула для обчислення
Площа плоскої області	$S = \iint_G dxdy$
Об'єм криволінійного циліндра	$V = \iint_G f(x,y)dxdy$
Площа поверхні	$S = \iint_G \sqrt{1 + (f_x'(x,y))^2 + \left(f_y'(x,y)\right)^2}dxdy$
Маса пластини	$m = \iint_G \gamma(x,y)dxdy$
Статичний момент пластини	$M_x = \iint_G y\gamma(x,y)dxdy$ $M_y = \iint_G x\gamma(x,y)dxdy$
Центр ваги пластини	$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_G x\gamma(x,y)dxdy,$ $\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_G y\gamma(x,y)dxdy$
Момент інерції пластини	$I_x = \iint_G y^2\gamma(x,y)dxdy$ $I_y = \iint_G x^2\gamma(x,y)dxdy$ $I_0 = \iint_G (x^2 + y^2)\gamma(x,y)dxdy$

В наступній таблиці наведені формули, які виражають фізичні та геометричні величини через потрійні інтеграли ($\gamma(x,y,z)$ – густина).

Таблиця 2. Застосування потрійного інтеграла для обчислення деяких фізичних та геометричних величин

Назва величини	Формула для обчислення
Об'єм тіла	$V = \iiint_T dxdydz$
Маса тіла	$m = \iiint_T \gamma(x,y,z)dxdydz$
Статичний момент тіла	$M_{xy} = \iiint_T z\gamma(x,y,z)dxdydz$ $M_{xz} = \iiint_T y\gamma(x,y,z)dxdydz$ $M_{yz} = \iiint_T x\gamma(x,y,z)dxdydz$

Центр ваги тіла	$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{1}{m}\iiint_T x\gamma(x,y,z)dxdydz,$ $\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{1}{m}\iiint_T y\gamma(x,y,z)dxdydz,$ $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{1}{m}\iiint_T z\gamma(x,y,z)dxdydz$
Момент інерції тіла	$I_x = \iiint\limits_T (y^2+z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz$ $I_y = \iiint\limits_T (x^2+z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz$ $I_z = \iiint\limits_T (x^2+y^2)\gamma(x,y,z)dxdydz$ $I_0 = \iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz$

Приклад 1. Пластина обмежена лініями $y = x^2$, $y = x + 2$. Обчислити масу цієї пластини, якщо її густина розподілена по закону $\gamma = 2x^2y$.

Розв'язання. Будуємо область G, яку займає пластина (рис. 39) та визначаємо точки перетину M(-1;1) і N(2;4). Обчислюємо масу за допомогою формули (6.2):

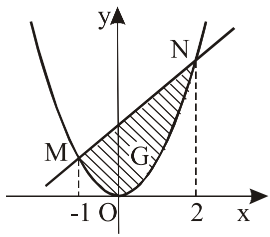


Рис.39

$$m = \iint_G 2x^2ydxdy = \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} 2x^2ydy;$$

$$\int_{x^2}^{x+2} 2x^2ydy = x^2y^2|_{x^2}^{x+2} = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^6;$$

$$m = \int_{-1}^{2}(x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^6)dx = \left(\frac{x^5}{5} + x^4 + \frac{4x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{531}{35}.$$

Приклад 2. Знайти центр ваги однорідного тіла, яке обмежене конічною поверхнею $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ та площиною $z = 1$.

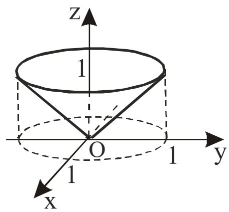


Рис.40

Розв'язання. Будуємо область T, яку займає тіло у просторі (рис.40). Позначимо сталу густину через γ_0. Обчислюємо координати центра ваги за наведеними вище формулами (табл. 2). Так як тіло однорідне і симетричне, то очевидно, що його центр знаходиться на осі Oz, тобто $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Обчислюємо спочатку масу m (переходимо до циліндричних координат):

$$m = \iiint_T \gamma_0 dxdydz = \gamma_0 \iiint_{T^*} \rho d\phi d\rho dz = \gamma_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 d\rho \int_\rho^1 \rho dz = \frac{\gamma_0\pi}{3}.$$

Обчислюємо статичний момент M_{xy} (переходимо до циліндричних координат):

$$M_{xy} = \iiint_T \gamma_0 zdxdydz = \gamma_0 \iiint_{T^*} z\rho d\phi d\rho dz =$$

$$= \gamma_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 d\rho \int_\rho^1 z\rho dz = \frac{\gamma_0\pi}{4}.$$

Визначаємо аплікату центра ваги: $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\gamma_0\pi}{4} \cdot \frac{3}{\gamma_0\pi} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. Таким чином, центр ваги заданого тіла знаходиться в точці (0;0;0,75).

Розділ 6. Криволінійні та поверхневі інтеграли

6.1. Криволінійні інтеграли першого роду

Нехай на площині Oxy задана дуга AB кривої K, рівняння якої мають вигляд $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Припустимо, що крива AB гладка, тобто на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції $x(t)$, $y(t)$ неперервні і мають неперервні похідні $x'(t)$, $y'(t)$, причому дві останні не дорівнюють нулю одночасно. Нехай функція $f(x, y)$ визначена і неперервна на кривій AB.

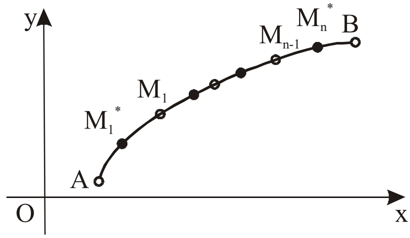


Рис.41

Розіб'ємо дугу AB довільно на n частин точками поділу $A = M_0,\ M_1, \ldots, M_n = B$ (рис.41). На кожній дузі $M_{i-1}M_i$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ виберемо довільно по одній точці $M_i^*(\xi_i, \eta_i)$. Довжини частин $M_{i-1}M_i$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ позначимо через Δl_i, а найбільшу з них – через λ. Складемо суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i. \qquad (1.1)$$

Сума (1.1) називається *інтегральною сумою* для функції $f(x, y)$ по кривій AB.

Якщо інтегральна сума (1.1) має границю при $\lambda \to 0$, то ця границя називається *криволінійним інтегралом першого роду* (або *криволінійним інтегралом по довжині дуги*) від функції $f(x, y)$ по кривій AB і позначається символом $\int_{AB} f(x, y) dl$ (або $\int_K f(x, y) dl$). Дуга

АВ називається *контуром інтегрування*, точки А і В – відповідно *початковою* і *кінцевою точками* інтегрування.

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду зводиться до обчислення звичайного визначеного інтеграла. При виконанні накладених вище умов справедлива формула

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt, \qquad (1.2)$$

де $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$ – *диференціал дуги* заданої кривої. Якщо контур інтегрування заданий рівнянням $y = y(x)$, $a \le x \le b$, то криволінійний інтеграл першого роду обчислюється за формулою

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{a}^{b} f(x,y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx. \qquad (1.3)$$

У випадку, коли дуга АВ задана рівнянням $\rho = \rho(\phi)$, $\alpha \le \phi \le \beta$ в *полярних координатах*, застосовується формула

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\sqrt{(\rho^2 + (\rho')^2}d\phi. \qquad (1.4)$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_{AB}\sqrt{x+1}ydl$, якщо АВ – дуга кривої: а) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$; б) $y = 2\sqrt{x}$, $1 \le x \le 2$, в) $\rho = \cos\phi$, $0 \le \phi \le \pi$.

Розв'язання. а) Так як контур інтегрування заданий параметричними рівняннями, то застосовуємо формулу (1.2). Знаходимо диференціал дуги dl та обчислюємо інтеграл:

$$dl = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}dt = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = dt;$$

$$\int_{AB}\sqrt{x+1}ydl = \int_0^{\pi}\sqrt{\cos t + 1}\sin t\,dt =$$

$$= -\int_0^{\pi}(\cos t + 1)^{0,5}d(\cos t + 1) = -\frac{2}{3}(\cos t + 1)^{1,5}\Big|_0^{\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

б) Обчислюємо інтеграл за допомогою формули (1.3):

$$dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx;$$

$$\int_{AB}\sqrt{x+1}y\,dl = \int_1^2 \sqrt{x+1}\cdot 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx =$$

$$= 2\int_1^2 (x+1)dx = (x+1)^2\Big|_1^2 = 5.$$

в) Застосовуємо формулу (1.4):

$$dl = \sqrt{(\rho^2 + (\rho')^2}d\phi = \sqrt{cos^2\phi + (-sin\,\phi)^2}d\phi = d\phi;$$

$$\int_{AB}\sqrt{x+1}y\,dl = \int_0^\pi \sqrt{cos\,\phi\cdot cos\,\phi + 1}\,cos\,\phi\cdot sin\,\phi\,d\phi =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\pi \sqrt{cos\,2\,\phi + 3}\,sin\,2\,\phi =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^\pi (3 + cos\,2\,\phi)^{0,5} d\,(3 + cos\,2\,\phi) = 0.$$

Так як обчислення криволінійного інтеграла першого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла, то основні властивості останнього переносяться на перший. Відмітимо лише, що вказаний криволінійний інтеграл не змінює свого значення при зміні напрямку інтегрування, тобто

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl. \tag{1.5}$$

Властивість (1.5) випливає безпосередньо з означення (інтегральна сума (1.1) не залежить від того, яку точку вважати початковою, а яку – кінцевою).

Аналогічно попередньому вводиться криволінійний інтеграл для функції $f(x,y,z)$ по просторовій кривій $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$:

$$\int_{AB} f(x,y)dl =$$

$$\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt. \tag{1.6}$$

6.2. Криволінійні інтеграли другого роду

Нехай на площині Oxy задана гладка крива AB, на якій, в свою чергу, задані дві неперервні обмежені функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$. Розіб'ємо дугу AB довільно на n частин точками поділу $A = M_0,\ M_1, \ldots, M_n = B$ (рис.41). На кожній дузі $M_{i-1}M_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ виберемо довільно по одній точці $M_i^*(\xi_i, \eta_i)$. Проекції вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ на координатні осі Ox, Oy позначимо відповідно через $\Delta x_i,\ \Delta y_i$ (рис.42), тобто $\Delta x_i = \pm|\overline{M'_{i-1}M'_i}|,\ \Delta y_i = \pm|\overline{M''_{i-1}M''_i}|$ (якщо напрями вектора $\overline{M'_{i-1}M'_i}$ (вектора $\overline{M''_{i-1}M''_i}$) і осі Ox (осі Oy) однакові, то береться знак плюс, а якщо протилежні, то – мінус). Найбільшу довжину частин $M_{i-1}M_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ позначимо через λ.

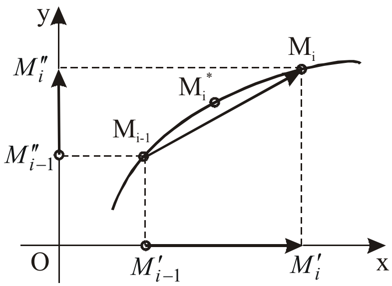


Рис.42

Складемо інтегральні суми

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i\,, \quad \sigma_2 = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i. \qquad (2.1)$$

Якщо існує границя інтегральної суми σ_1 при $\lambda \to 0$, то вона називається *криволінійним інтегралом другого роду* від функції $P(x,y)$ по кривій AB і позначається символом $\int_{AB} P(x,y)dx$ (або $\int_K P(x,y)dx$). Аналогічно попередньому визначається криволінійний інтеграл $\int_{AB} Q(x,y)dy$. Сума $\int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy$ називається *загальним криволінійним інтегралом другого роду* і позначається символом $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Якщо поміняти місцями початкову і кінцеву точки інтегрування, то множники Δx_i і Δy_i в інтегральних сумах (2.1) поміняють свій знак на протилежний, а тому при зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл другого роду змінює свій знак на протилежний, тобто

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \quad (2.2)$$

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла. Нехай крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ \ y = y(t), \alpha \le t \le \beta$ або $\beta \le t \le \alpha$, причому точці A відповідає $t = \alpha$, а точці B – $t = \beta$. У цьому випадку криволінійні інтеграли другого роду обчислюються за формулами

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P\big(x(t), y(t)\big)x'(t)\,dt, \quad (2.3)$$

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t))y'(t)\,dt, \quad (2.4)$$

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + \\ + Q(x(t), y(t))y'(t))dt. \quad (2.5)$$

Якщо контур інтегрування AB задається рівнянням $y = y(x)$, $a \le x \le b$ або $b \le x \le a$, причому абсциси точок A і B відповідно дорівнюють *a* і *b*, то справедливі формули

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{a}^{b} P\big(x, y(x)\big)\,dx, \quad (2.6)$$

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{a}^{b} Q(x, y(x))y'(x)\,dx, \quad (2.7)$$

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{a}^{b} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x))dx. \quad (2.8)$$

Інколи контур інтегрування AB визначається співвідношеннями $x = x(y),\ \ c \le y \le d$ або $d \le y \le c$. Якщо ординати точок A і B відповідно дорівнюють *c* і *d*, то криволінійний інтеграл обчислюється за формулами

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{c}^{d} P(x(y), y)x'(y)\,dy, \quad (2.9)$$

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{c}^{d} Q(x(y), y)\,dy, \quad (2.10)$$

$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_c^d (P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y))dy.$ (2.11)

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_{AB} xydx + x^2dy$, якщо AB – дуга кривої: а) $y = x^2$ від точки A(1;1) до точки B(2;4); б) $x = 2t,\ y = t^3$ від точки A(6;27) до точки B(2;1).

Розв'язання. а) Так як контур інтегрування заданий у формі $y = y(x)$, то застосовуємо формулу (2.8). Отримаємо

$$\int_{AB} xydx + x^2dy = \int_1^2 (x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)dx = 3\int_1^2 x^3dx = \frac{3}{4}x^4\Big|_1^2 = \frac{45}{4}.$$

б) Крива AB задана параметричними рівняннями. Очевидно, що точці A відповідає $t = 3$, а точці B – $t = 1$. За допомогою формули (2.5) отримаємо

$$\int_{AB} xydx + x^2dy = \int_3^1 (2t \cdot t^3 \cdot 2 + (2t)^2 \cdot 3t^2)dt =$$

$$= 16\int_3^1 t^4dt = \frac{16}{5}t^5\Big|_3^1 = -\frac{3872}{5}.$$

Між криволінійними інтегралами першого та другого роду існує простий зв'язок, а саме

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} (P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta)dl,$$

(2.9)

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – напрямні косинуси вектора, який напрямлений по дотичній до кривої AB і відповідає руху точки від A до B.

Аналогічно попередньому визначається криволінійний інтеграл для трійки функцій $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ по просторовій кривій $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \alpha \le t \le \beta$ або $\beta \le t \le \alpha$:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) +$$

$$+R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt.$$

6.3 Формула Гріна. Незалежність криволінійного інтегралу від шляху інтегрування. Інтегрування повних диференціалів

Формула Гріна пов'язує між собою криволінійні та подвійні інтеграли. Нехай на площині задана замкнена область G, яка обмежена контуром L. *Додатнім напрямом* обходу контуру L будемо вважати напрям, при якому область G залишається зліва. Для інтеграла по замкненому контуру L, який пробігається у додатному напрямку, прийняте позначення $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Якщо функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в області G, то справедлива *формула Гріна*

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \tag{3.1}$$

Приклад 1. Використовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл $\oint_L (4y + x^2)dx + (6x - y^3)dy$, якщо L – контур трикутника з вершинами в точках O(0;0), A(1;0), B(0;2).

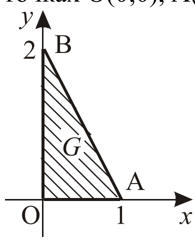


Рис.43

Розв'язання. Для заданого інтеграла маємо

$$P(x,y) = 4y + x^2,\ Q(x,y) = 6x - y^3;\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 6,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 4.$$

Застосувавши формулу (3.1), дістаємо

$$\oint_L (4y + x^2)dx + (6x - y^3)dy = \iint_G (6 - 4)dxdy =$$

$$= 2\iint_G dxdy = 2S_{\Delta OAB} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Тут враховано, що останній подвійний інтеграл дорівнює площі області G, тобто площі трикутника OAB (рис.43).

Нехай функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ визначені і неперервні в області G і нехай $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ – довільні точки вказаної області. Позначимо через $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ множину всіх можливих шляхів в області G від точки M_1 до точки M_2. Якщо виконуються рівності

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy = \ldots = \int_{L_n} Pdx + Qdy = \ldots,$$

то кажуть, що криволінійний інтеграл *не залежить від шляху інтегрування*. Очевидно, що для вказаного інтеграла суттєвим є лише положення точок M_1 і M_2, а тому для нього інколи використовується позначення $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx + Qdy$. Для того щоб криволінійний інтеграл $\int_L Pdx + Qdy$ не залежав від шляху інтегрування, необхідно і достатньо, щоб у всій області G виконувалася наступна рівність

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}. \qquad (3.2)$$

Якщо для даного інтеграла умова (3.2) виконується, то контур інтегрування можна вибирати самостійно. Найбільш раціональним є шлях, який складається з двох відрізків, що паралельні осям координат.

Приклад 2. Показати, що інтеграл $\int_L \frac{1}{3}xy^3dx + \frac{1}{2}x^2y^2dy$ не залежить від шляху інтегрування та обчислити його, якщо точки $(1; 1)$, $(2; 3)$ – відповідно початок і кінець контуру інтегрування L.

Розв'язання. Перевіряємо виконання умови (3.2):

$$P(x, y) = \frac{1}{3}xy^3,\ Q(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2; \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = xy^2,\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = xy^2.$$

Умова незалежності інтеграла від шляху інтегрування виконується. В якості контура інтегрування L візьмемо ламану ACB (рис.44). Потрібні нам відрізки визначаються наступними співвідношеннями:

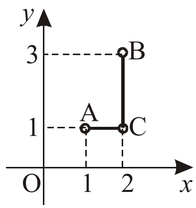


Рис.44

AC: $y = 1,\ dy = 0;\ 1 \le x \le 2$; CB: $x = 2,\ dx = 0;\ 1 \le y \le 3$.

Маємо

$$\int_L \frac{1}{3}xy^3dx + \frac{1}{2}x^2y^2dy = \int_{AC} \quad + \int_{CB} \quad =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{3}x \cdot 1^3dx + \int_1^3 \frac{1}{2} \cdot 2^2y^2dy = \frac{1}{6}x^2\Big|_1^2 + \frac{2}{3}y^3\Big|_1^3 = \frac{107}{6}.$$

Звертаємо увагу на те, що в інтегралі по AC пропадає другий доданок (т.я. $dy = 0$), а в інтегралі по CB – перший (т.я. $dx = 0$).

Нагадаємо, що якщо функція $U(x, y)$ диференційована в області G, то її повний диференціал у цій області визначається наступним чином

$$dU(x, y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy. \qquad (3.3)$$

Нехай вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом функції $U(x, y)$. Припустимо, що в області G функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $U(x, y)$ неперервні і для них існують неперервні частинні похідні $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$. В силу єдиності диференціалу в області G повинні виконуватися рівності

$$P(x, y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}.$$

Продиференціювавши першу з них по y, а другу – по x, маємо

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y\partial x}.$$

Враховуючи, що другі змішані похідні рівні між собою, отримаємо рівність (3.2). Легко показати, що умова (3.2) є не лише необхідною, але і достатньою для того, щоб вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ був повним диференціалом функції $U(x,y)$.

Якщо в області G задано диференціал функції

$$dU(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

то сама функція $U(x,y)$ визначається за допомогою наступної формули (криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування)

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+C, \tag{3.4}$$

де (x_0,y_0), (x,y) – відповідно фіксована та довільна точки області G; C – довільна стала. Взявши в якості контуру інтегрування відрізки, що паралельні осям координат, дістаємо

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+C. \tag{3.5}$$

При інтегруванні по змінній *y* (у другому інтегралі) вважаємо, що величина *x* є сталою.

Приклад. 3 Знайти функцію $U(x,y)$, якщо

$$dU(x,y)=(2x+y^3)dx+3xy^2dy.$$

Розв'язання. Застосуємо формулу (3.5). В якості фіксованої точки (x_0,y_0) візьмемо точку (0,0). Маємо

$$U(x,y)=\int_0^x (2x+0^3)dx+\int_0^y 3xy^2dy+C=x^2\big|_0^x+xy^3\big|_0^y+C=$$
$$x^2+xy^3+C.$$

Відмітимо, що якщо вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом функції $U(x,y)$ в області G, а замкнена крива L повністю належить вказаній області, то

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0. \tag{3.6}$$

Тотожна рівність (3.6) випливає з формули Гріна (3.1) та умови (3.2).

6.4. Деякі означення для поверхонь у просторі. Поверхневі інтеграли першого роду

Поверхня називається *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична площина і при переході від точки до точки положення цієї дотичної площини змінюється неперервно.

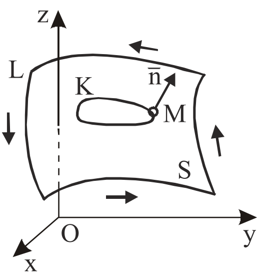


Рис.45

Розглянемо гладку поверхню S, яка містить точку M і обмежена гладким або кусково-гладким контуром L (рис. 45). В точці M проведемо нормаль $\bar{n}$ з визначеним напрямом (можливі два протилежні напрями). Крім того, побудуємо замкнений контур K, який проходить через точку M і не перетинає границі поверхні S. Заставимо точку M разом з нормаллю $\bar{n}$ обійти контур K і повернутися в початкове положення. Тут мається на увазі, що при переході від точки до точки напрям нормалі змінюється неперервно. Якщо після обходу точкою M будь-якого контуру K напрям нормалі не змінюється, то поверхня S називається *двосторонньою* (або *орієнтовною*). Якщо ж існує контур, після обходу якого напрям нормалі змінюється на протилежний, то поверхня S називається *односторонньою* (або *неорієнтовною*). Надалі будемо розглядати лише двосторонні поверхні.

Легко бачити, що вибір напряму нормалі у одній точці однозначно визначає напрям нормалі у всіх інших точках поверхні. Множина всіх точок поверхні у сукупності з вибраним напрямом нормалі в них називається *стороною поверхні*. Поверхня, для якої вибрана певна сторона, називається *орієнтованою*. *Верхньою* (*нижньою*) стороною поверхні $z = f(x, y)$ будемо називати ту її сторону, нормалі до якої утворюють гострий (тупий) кут з віссю Oz.

Нехай задана орієнтована поверхня S, яка обмежена контуром L (рис. 25). Напрям обходу контуру L називається *додатним*, якщо для спостерігача, який знаходиться зі сторони нормалі, обхід відбувається проти руху годинникової стрілки. Протилежний напрям обходу називається *від'ємним*. Очевидно, що при переході з однієї сторони поверхні на іншу додатний напрям обходу змінюється.

Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена і неперервна на гладкій обмеженій поверхні S. Розіб'ємо вказану поверхню на *n* частин $S_1, S_2, \ldots, S_n$, площі яких відповідно позначимо через $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. На кожній частині S_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ довільно виберемо по одні точці $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і складемо *інтегральну суму*

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i. \tag{4.1}$$

Найбільший з діаметрів частин S_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ позначимо через λ. Якщо існує границя інтегральної суми (4.1) при $\lambda \to 0$, то вона називається *поверхневим інтегралом першого роду* від функції $f(x, y, z)$ по поверхні S і позначається символом $\iint_S f(x, y, z) dS$. В цьому випадку функція $f(x, y, z)$ називається *інтегрованою по поверхні* S, S – областю інтегрування. Таким чином, у відповідності з означенням

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i. \tag{4.2}$$

Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в точках поверхні S, то вона інтегрована по цій поверхні.

Основні властивості поверхневого інтегралу першого роду по суті повторюють властивості подвійного інтегралу. Відмітимо лише, що вказаний інтеграл не залежить від орієнтації поверхні S.

Обчислення поверхневого інтегралу першого роду зводиться до обчислення подвійного інтегралу. Нехай поверхня S задана рівнянням $z = z(x,y)$ і нехай проекцією поверхні S на площину Oxy є замкнена область G. Припустимо, що функція $z(x,y)$ та її частинні похідні $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ неперервні в області G, а функція $f(x,y,z)$ неперервна на поверхні S. При виконанні вказаних умов справедлива формула

$$\iint_S f(x,y,z)dS =$$

$$= \iint_G f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x(x,y))^2+(z'_y(x,y))^2}dx\,dy. \qquad (4.3)$$

Інколи поверхню S зручно проектувати не на площину Oxy, а на іншу координатну площину. Наприклад, якщо поверхня S задана рівнянням $x = x(y,z)$, а її проекцією на площину Oyz є замкнена область D, то

$$\iint_S f(x,y,z)dS =$$

$$= \iint_D f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+(x'_y(y,z))^2+(x'_z(y,z))^2}dy\,dz. \qquad (4.4)$$

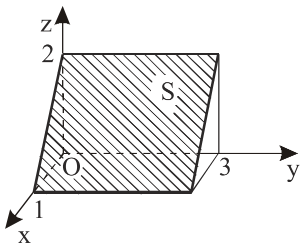


Рис.46

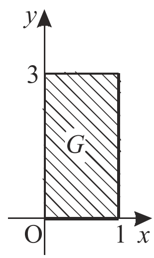


Рис.47

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iint_S xyzdS$, де S – частина площини

$z = 2 - 2x$, яка обмежена площинами $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ y = 3$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (4.3). Побудуємо спочатку поверхню S (рис.46) та її проекцію на площину Oxy (рис. 47).
Використовуючи рівняння поверхні S, знаходимо потрібні нам частинні похідні: $z(x,y) = 2 - 2x$; $\quad z'_x(x,y) = -2, \quad z'_y(x,y) = 0$.
Обчислюємо інтеграл:

$$\iint_S xyzdS = \iint_G xy(2-2x)\sqrt{1+(-2)^2+0^2}dxdy = 2\sqrt{5}\iint_G xy(1-x)dxdy = = 2\sqrt{5}\int_0^1 dx\int_0^3 xy(1-x)dy = 2\sqrt{5}\int_0^1\left(x(1-x)\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^3\right)dx = 9\sqrt{5}\int_0^1 (x-x^2)dx = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

6.5 Поверхневі інтеграли другого роду

Нехай гладка обмежена поверхня S задана рівнянням $z = z(x,y)$, а її проекцією на площину Oxy є замкнена область G. Крім того, нехай задана функція $R(x,y,z)$, яка визначена і неперервна в точках поверхні S. Виберемо верхню сторону вказаної поверхні, тобто ту її сторону, нормалі до якої утворюють гострий кут з віссю Oz. Розіб'ємо поверхню S на n частин $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Проекцію частини S_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ на площину Oxy позначимо через G_i, а площу останньої – через Δs_i. В кожній частині S_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ довільно виберемо по одній точці $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і складемо *інтегральну суму*

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i. \tag{5.1}$$

Найбільший з діаметрів частин $S_1, S_2, \ldots, S_n$ позначимо через λ.

Якщо існує границя інтегральної суми (5.1) при $\lambda \to 0$, то вона називається *поверхневим інтегралом другого роду* від функції $R(x,y,z)$ по вибраній стороні поверхні S і позначається символом

$\iint_S R(x,y,z)dxdy$. У цьому випадку функція $R(x,y,z)$ називається *інтегрованою по поверхні S по змінним x і y*.

Аналогічно попередньому визначаються наступні поверхневі інтеграли другого роду (для першого з них поверхня S проектується на площину Oyz, а для другого – на площину Oxz):

$$\iint_S P(x,y,z)dydz, \quad \iint_S Q(x,y,z)dzdx.$$

Суму

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + \iint_S Q(x,y,z)dzdx + \iint_S R(x,y,z)dxdy$$

називають *загальним поверхневим інтегралом другого роду* і позначають символом

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

Обчислення поверхневого інтегралу другого роду зводиться до обчислення подвійного інтегралу. Справедливі наступні формули:

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \iint_{G_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy, \tag{5.2}$$

$$\iint_S P(x,y,z)dydz = \iint_{G_{yz}} P(x(y,z),y,z))dydz, \tag{5.3}$$

$$\iint_S Q(x,y,z)dzdx = \iint_{G_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dzdx, \tag{5.4}$$

де $z = z(x,y)$, $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$ – рівняння поверхні S; G_{xy}, G_{yz}, G_{xz} – проекції поверхні S на площини Oxy, Oyz, Oxz відповідно.

Підкреслимо, що формули (5.2) – (5.4) записані для верхньої сторони поверхні S. Якщо вибирається нижня сторона, то у правій частині перед подвійним інтегралом з'являється знак мінус.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iint_S 12x^2zdxdy$, де S – верхня сторона частини поверхні $z = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$, яка обмежена площинами $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

Розв'язання. Побудувавши поверхню S (рис. 48) та її проекцію на площину Oxy (рис. 49), обчислюємо інтеграл за допомогою формули

(5.2):

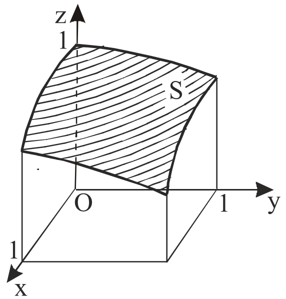


Рис.48

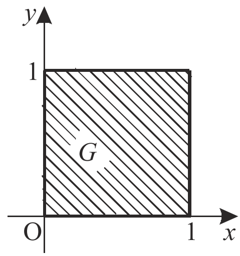


Рис.49

$$\iint_S 12x^2 z dxdy = \iint_G 12x^2\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)dxdy =$$

$$= 12\int_0^1 dx\int_0^1 x^2\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)dy =$$

$$= 12\int_0^1 x^2\left(y-\frac{x^2}{4}y-\frac{y^3}{12}\right)\Big|_0^1 dx = 12\int_0^1\left(\frac{11}{12}-\frac{x^2}{4}\right)dx = 10.$$

6.6 Зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду. Формули Стокса і Остроградського

Поверхневі інтеграли другого роду можна виразити через поверхневі інтеграли першого роду, а саме

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS. \qquad (6.1)$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси нормалі гладкої орієнтованої поверхні S.

Якщо поверхня S задана рівнянням $F(x,y,z)=0$, то її нормаллю в точці (x,y,z) є вектор $\bar{n}(\pm F'_x(x,y,z), \pm F'_y(x,y,z), \pm F'_z(x,y,z))$ (знак перед координатами визначається стороною поверхні). Отже, напрямні косинуси для формули (6.1) визначаються співвідношеннями

$$cos\,\alpha = \pm\frac{F_x'}{|\bar{n}|}, \quad cos\,\beta = \pm\frac{F_y'}{|\bar{n}|}, \quad cos\,\gamma = \pm\frac{F_z'}{|\bar{n}|}, \qquad (6.2)$$

де $|\bar{n}| = \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}$. Якщо ж рівняння поверхні S представляється у вигляді $z = z(x, y)$, то для її нормалі $\bar{n}(\mp z_x'(x,y), \mp z_y'(x,y), \pm 1)$ можемо записати

$$cos\,\alpha = \mp\frac{z_x'}{|\bar{n}|}, \quad cos\,\beta = \mp\frac{z_y'}{|\bar{n}|}, \quad cos\,\gamma = \pm\frac{1}{|\bar{n}|}, \qquad (6.3)$$

де $|\bar{n}| = \sqrt{z_x'^{\,2} + z_y'^{\,2} + 1}$.

Приклад 1. Перейти від поверхневого інтегралу другого роду $\iint_S R(x,y,z)dxdy$ до поверхневого інтегралу першого роду, якщо S – верхня сторона напівсфери $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Розв'язання. Використовуючи формули (6.3), визначимо $cos\,\gamma$:

$$z(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}; \quad z_x' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad z_y' = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}};$$

$$\sqrt{z_x'^{\,2} + z_y'^{\,2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}; \quad cos\,\gamma = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Відмітимо, що так як для верхньої сторони поверхні кут γ гострий, то $cos\,\gamma > 0$, тобто в використаній формулі необхідно взяти знак плюс. Враховуючи, що $P = Q = 0$, на основі формули (6.1) маємо

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \iint_S R(x,y,z)\sqrt{1 - x^2 - y^2}dS.$$

Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневими та криволінійними інтегралами. Нехай задана поверхня S, яка обмежена контуром L. Якщо функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку на поверхні S, то справедлива *формула Стокса*

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right) dS, \quad (6.4)$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси нормалі до поверхні S; напрям нормалі вибирається так, щоб напрям обходу контуру L був додатнім, тобто для спостерігача, який знаходиться зі сторони нормалі, обхід повинен відбуватися проти руху годинникової стрілки. Враховуючи формулу (6.1), формулу Стокса можна переписати в наступному вигляді:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \quad (6.5)$$

Приклад 2. Обчислити за допомогою формули Стокса інтеграл $\oint_L 8z^2dx + 9x^2dy + 3y^2dz$, де L – межа частини площини $6x + 3y + 4z - 12 = 0$, яка відтинається трьома координатними площинами. Для спостерігача, який знаходиться в початку координат, обхід контура L відбувається за рухом годинникової стрілки.

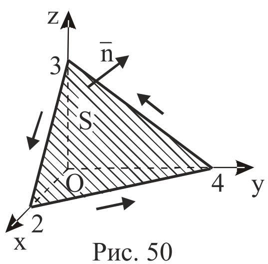


Рис. 50

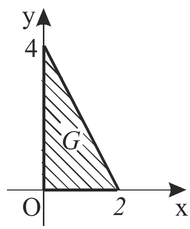


Рис. 51

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування S (рис.50) та її проекцію на площину Oxy (рис.51).

Знайдемо компоненти правої частини формули Стокса:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 6y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 16z, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 18x;$$

$$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{61}}, \quad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{61}}, \quad \cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{61}}.$$

Напрямні косинуси знайдені за допомогою формул (6.2). Очевидно, що в цих формулах для вказаного напрямку обходу (рис. 30) необхідно взяти знак плюс. Використовуючи формулу Стокса та формулу для обчислення поверхневого інтегралу першого роду, дістаємо

$$\oint_L 8z^2dx + 9x^2dy + 3y^2dz = \iint_S \left(6y \cdot \frac{6}{\sqrt{61}} + 16z \cdot \frac{3}{\sqrt{61}} + 18x \cdot \frac{4}{\sqrt{61}}\right) dS =$$

$$= \frac{12}{\sqrt{61}} \iint_G (3y + (12 - 6x - 3y) + 6x) \cdot \frac{\sqrt{61}}{4} dxdy = 36 \iint_G dxdy = 144.$$

Звертаємо увагу, що останній подвійний інтеграл дорівнює площі області G (рис. 31), тобто він дорівнює площі прямокутного трикутника з катетами 2 і 4.

Формула Остроградського пов'язує між собою поверхневі та потрійні інтеграли. Якщо функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в заданій області T, яка обмежена гладкою або кусково-гладкою поверхнею S, то справедлива *формула Остроградського*

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz, \quad (6.6)$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні S. Враховуючи зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду, формулу Остроградського можна переписати у вигляді

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz. \quad (6.7)$$

Приклад 3. Обчислити за допомогою формули Остроградського інтеграл $\iint_S xdydz + 2ydzdx + 3zdxdy$, де S – зовнішня сторона тіла, яке обмежене конічною поверхнею $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ та площиною $z = -1$.

Розв'язання. Побудувавши область інтегрування (рис. 52) та застосувавши формулу Остроградського (6.7), дістаємо

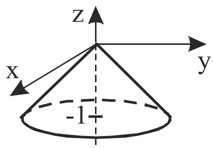


Рис.52

$$\iint_S xdydz + 2ydzdx + 3zdxdy =$$

$$= \iiint_T (1 + 2 + 3)dxdydz = 6 \iiint_T dxdydz = 2\pi.$$

Відмітимо, що останній потрійний інтеграл дорівнює об'єму області Т, тобто він дорівнює об'єму конуса з висотою $H = 1$ і радіусом основи $r = 1$.

6.7 Застосування криволінійних і поверхневих інтегралів до задач фізики та геометрії

Знайдемо масу *m* неоднорідної дуги AB, густина якої змінюється по закону $\gamma = \gamma(x, y)$. Розіб'ємо вказану дугу на *n* малих частин $l_1, l_2, \ldots, l_n$, довжини яких відповідно позначимо через $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$. Якщо кожну частину l_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ вважати однорідною дугою, то можемо записати наближену формулу для обчислення маси *m*:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i, \tag{7.1}$$

де (ξ_i, η_i) – довільна точка частини l_i. Перейшовши в останній рівності до границі при $\lambda \to 0$ (λ – найбільша з довжин $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$) і помітивши, що права частина цієї рівності є інтегральною сумою для функції $\gamma(x, y)$ по дузі AB, дістанемо точну формулу

$$m = \int_{AB} \gamma(x, y)dl. \tag{7.2}$$

Аналогічно попередньому можна отримати всі формули, які записані в наведених нижче таблицях 3, 4 (в формулах $\gamma(x, y)$ – густина кривої на площині; $\gamma(x, y, z)$ – густина поверхні).

Приклад 1. Знайти масу дуги кола $x = cos\, t$,$\rightleftarrows$ $y = sin\, t$ $(0 \leq t \leq \pi)$, густина якої змінюється по закону $\gamma = y$.

Розв'язання. Застосувавши формулу (7.2), маємо

$$m = \int_K ydl = \int_0^\pi sin\, t \sqrt{(-sin\, t)2 \quad + cos^2 t}\, dt = \int_0^\pi sin\, t\, dt =$$

$$-cos\, t|_0^\pi = 2.$$

Таблиця 3. Застосування криволінійних інтегралів для обчислення деяких фізичних та геометричних величин

Назва величини	Формула для обчислення
Довжина дуги	$l = \int_{AB} dl$
Маса дуги	$m = \int_{AB} \gamma(x, y) dl$
Статичний момент дуги відносно осі Ох	$M_x = \int_{AB} y\gamma(x, y) dl$
Статичний момент дуги відносно осі Оу	$M_y = \int_{AB} x\gamma(x, y) dl$
Центр ваги дуги	$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \int_{AB} x\gamma(x, y) dl,$ $\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \int_{AB} y\gamma(x, y) dl$
Момент інерції дуги відносно осі Ох	$I_x = \int_{AB} y^2 \gamma(x, y) dl$
Момент інерції дуги відносно осі Оу	$I_y = \int_{AB} x^2 \gamma(x, y) dl$
Момент інерції дуги відносно початку координат	$I_o = \int_{AB} (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl$
Площа плоскої фігури (L – межа фігури)	$S = \oint_L xdy = -\oint_L ydx =$ $= \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx$
Робота сили $\bar{F}(P(x, y), Q(x, y))$ на шляху ВС	$A = \int_{BC} Pdx + Qdy$

Таблиця 4. Застосування поверхневих інтегралів для обчислення деяких фізичних та геометричних величин

Назва величини	Формула для обчислення
Площа частини поверхні	$S = \iint_S dS$
Маса частини поверхні	$m = \iint_S \gamma(x,y,z)dS$
Статичний момент частини поверхні відносно площини Oyz	$M_{yz} = \iint_S x\gamma(x,y,z)dS$
Статичний момент частини поверхні відносно площини Ozx	$M_{zx} = \iint_S y\gamma(x,y,z)dS$
Статичний момент частини поверхні відносно площини Oxy	$M_{xy} = \iint_S z\gamma(x,y,z)dS$
Центр ваги частини поверхні	$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{1}{m}\iint_S x\gamma(x,y,z)dS$, $\bar{y} = \frac{M_{zx}}{m} = \frac{1}{m}\iint_S y\gamma(x,y,z)dS$, $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{1}{m}\iint_S z\gamma(x,y,z)dS$
Момент інерції частини поверхні відносно осі Ox	$I_x = \iint_S (y^2+z^2)\gamma(x,y,z)dS$
Момент інерції частини поверхні відносно осі Oy	$I_y = \iint_S (z^2+x^2)\gamma(x,y,z)dS$
Момент інерції частини поверхні відносно осі Oz	$I_z = \iint_S (x^2+y^2)\gamma(x,y,z)dS$
Момент інерції поверхні відносно початку координат	$I_o = \iint_S (x^2+y^2+z^2)\gamma(x,y,z)dS$

Приклад 2. Обчислити роботу сили $\bar{F} = xy\bar{\imath} + x^2\bar{\jmath}$ при переміщенні матеріальної точки по параболі $y = x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(2;4)$.

Розв'язання. Використавши формулу для обчислення роботи (табл. 3), отримаємо

$$A = \int_{OB} xydx + x^2dy = \int_0^2 (x\cdot x^2 + x^2\cdot 2x)dx =$$

$$= 3\int_0^2 x^3dx = \frac{3}{4}x^4\Big|_0^2 = 12.$$

Приклад 3. Знайти масу частини поверхні $z = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$, яка обмежена площинами $x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ y = 1$ і густина якої розподілена по закону $\gamma = 2\sqrt{4 + x^2 + y^2}$.

Розв'язання. Застосувавши формулу для обчислення маси поверхні (табл. 4), маємо (див. рис. 48, 49)

$$m = \iint_S 2\sqrt{4 + x^2 + y^2}dS = \iint_G 2\sqrt{4 + x^2 + y^2} \cdot$$

$$\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{2}\right)^2}\, dxdy =$$

$$= \iint_G (4 + x^2 + y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 (4 + x^2 + y^2)dy = \frac{14}{3}.$$

Розділ 7. Елементи теорії поля

7.1 Деякі поняття теорії поля. Спеціальні поля

Якщо в кожній точці M просторової області T задається вектор $\bar{F} = \bar{F}(M)$ (скалярна величина $U = U(M)$), то кажуть що в області T визначене *векторне* (*скалярне*) поле. Функції $\bar{F}(M)$ і $U(M)$ у цьому випадку називаються *векторною і скалярною функціями* відповідно. Як бачимо, скалярне поле визначається однією функцією трьох змінних $U(M) = U(x, y, z)$. Векторне поле

$$\bar{F}(M) = P(M)\bar{\imath} + Q(M)\bar{\jmath} + R(M)\bar{k}$$

задається вже трьома функціями $P(M) = P(x, y, z)$, $Q(M) = Q(x, y, z)$, $R(M) = R(x, y, z)$. Прикладом скалярного поля може бути поле температур нагрітого тіла, а прикладом векторного – поле швидкості будь-якого об'єкта, який рухається.

Градієнтом скалярного поля $U = U(M)$ називається вектор, який позначається символом $grad\ U$ і визначається рівністю

$$grad\, U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}. \qquad (1.1)$$

Градієнт скалярної величини $U(M)$ визначає напрям і числове значення найбільшої швидкості зростання цієї величини в точці М.

Дивергенцією векторного поля $\bar{F}(M) = P(M)\bar{\imath} + Q(M)\bar{\jmath} + R(M)\bar{k}$ називається скаляр, який позначається символом $di\bar{v}\, F$ і визначається рівністю

$$di\bar{v}\, F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (1.2)$$

Ротором векторного поля $\bar{F}(M) = P(M)\bar{\imath} + Q(M)\bar{\jmath} + R(M)\bar{k}$ називається вектор, який позначається символом $ro\bar{t}\, F$ і визначається рівністю

$$ro\bar{t}\, F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}. \qquad (1.3)$$

Формулу (1.3) можна представити у вигляді

$$ro\bar{t}\, F = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (1.4)$$

Тут добутки елементів другого рядка на елементи третього розглядаються як відповідні частинні похідні.

Приклад 1. Знайти дивергенцію і ротор векторного поля $\bar{F} = x^2y\bar{\imath} + x\sin z\,\bar{\jmath} + y^3z^4\bar{k}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $P = x^2y,\ Q = x\sin z,\ R = y^3z^4$ і застосувавши формули (1.2) - (1.4), маємо

$$di\bar{v}\, F = 2xy + 4y^3z^3; \quad ro\bar{t}\, F = (3y^2z^4 - x\cos z)\bar{\imath} + (\sin z - x^2)\bar{k}.$$

Векторне поле $\bar{F}$ називається *потенціальним*, якщо існує скалярна величина U, для якої $\bar{F} = grad\, U$. Функція $U = U(x, y, z)$ називається *потенціалом* (або *потенціальною функцією*) поля $\bar{F}$. Для того щоб векторне поле $\bar{F} = P\bar{\imath} + Q\bar{\jmath} + R\bar{k}$ було потенціальним в області Т, необхідно і достатньо, щоб в кожній точці цієї області виконувалися рівності

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{1.5}$$

Умови (1.5) рівносильні умові, що $rot\bar{t}\ F$ є нульовим вектором.

Якщо векторне поле $\bar{F}=P\bar{\imath}+Q\bar{\jmath}+R\bar{k}$ потенціальне в області Т, то його потенціал, з точністю до довільного сталого доданку, може бути знайдений за формулою (криволінійний інтеграл у цій формулі не залежить від шляху інтегрування)

$$U=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz, \tag{1.6}$$

де $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$ – відповідно фіксована та довільна точки області Т. Взявши в якості контура інтегрування ламану, ланки якої паралельні осям координат, дістаємо

$$U=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz. \tag{1.7}$$

В формулі (1.7) кожен інтеграл є визначеним інтегралом від функції однієї змінної (змінною вважається тільки та величина, яка стоїть під знаком диференціалу).

Приклад 2. Показати, що поле $\bar{F}=2xy\bar{\imath}+(x^2+4y^3z^3)\bar{\jmath}+3y^4z^2\bar{k}$ є потенціальним і знайти його потенціал.

Розв'язання. Перевіримо виконання умов (1.5):

$P=2xy,\quad Q=x^2+4y^3z^3,\quad R=3y^4z^2;$

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=12y^3z^2,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=2x.$$

В якості фіксованої точки M_0 візьмемо початок координат, тобто $x_0=y_0=z_0=0$. Визначаємо потенціал U за допомогою формули (1.7):

$$U=\int_0^x 2x\cdot 0dx+\int_0^y (x^2+4y^3\cdot 0)dy+\int_0^z 3y^4z^2dz=$$

$$=x^2y|_0^y+y^4z^3|_0^z=x^2y+y^4z^3.$$

Векторне поле $\bar{F}$ називається *соленоїдальним* (або *трубчатим*), якщо існує векторна величина $\bar{G}$, для якої $\bar{F} = r\bar{o}t\,G$. Вектор $\bar{G}$ називається *векторним потенціалом* поля $\bar{F}$. Для того щоб поле $\bar{F}$ було соленоїдальним в області Т, необхідно і достатньо, щоб в кожній точці цієї області виконувалася рівність

$$d\bar{\iota v}\,F = 0. \qquad (1.8)$$

Приклад 3. Перевірити, чи буде соленоїдальним векторне поле $\bar{F} = x^2 z\bar{\imath} + z\bar{\jmath} + xyz^3\bar{k}$.

Розв'язання. Так як $d\bar{\iota v}\,F = 2xz + 3xyz^2 \neq 0$, то поле $\bar{F}$ не соленоїдальне.

7.2 Потік. Циркуляція

Нехай задані векторне поле $\bar{F} = P\bar{\imath} + Q\bar{\jmath} + R\bar{k}$ і поверхня S. Вибравши певну сторону поверхні S, можемо в кожній її точці визначити одиничний вектор нормалі $\bar{n} = \cos\alpha \cdot \bar{\imath} + \cos\beta \cdot \bar{\jmath} + \cos\gamma \cdot \bar{k}$ (нагадаємо, що координатами одиничного вектора є його напрямні косинуси). *Потоком* П векторного поля $\bar{F}$ через поверхню S в сторону, яка визначається нормаллю $\bar{n}$, називається поверхневий інтеграл першого роду від функції $f(x, y, z) = \bar{F}\bar{n}$ по поверхні S, тобто

$$\Pi = \iint_S \bar{F}\bar{n}dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS. \qquad (2.1)$$

Враховуючи зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду, можемо записати

$$\Pi = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy. \qquad (2.2)$$

Нехай задані векторне поле $\bar{F} = P\bar{\imath} + Q\bar{\jmath} + R\bar{k}$ і просторова крива L. Введемо позначення $d\bar{l} = dx \cdot \bar{\imath} + dy \cdot \bar{\jmath} + dz \cdot \bar{k}$. *Лінійним інтегралом* від вектора $\bar{F}$ вздовж кривої L називається криволінійний інтеграл

$$\int_L \bar{F} d\bar{l} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Якщо контуром інтегрування є замкнена крива, то лінійний інтеграл називається *циркуляцією* векторного поля $\bar{F}(M)$ вздовж кривої L, тобто циркуляція Ц визначається рівністю

$$Ц = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz. \tag{2.3}$$

Використовуючи поняття теорії поля та введені вище позначення, формули Остроградського і Стокса відповідно можна представити у вигляді

$$\iint_S \bar{F}\bar{n}dS = \iiint_T d\iota\bar{v}\, F\, dxdydz, \tag{2.4}$$

$$\oint_L \bar{F} d\bar{l} = \iint_S \bar{n}\, ro\bar{t}\, F\, dS. \tag{2.5}$$

Приклад 1. Задані векторне поле $\bar{F} = (x+y)\bar{\imath} + (y+z)\bar{\jmath} + (x+z)\bar{k}$ і точки A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3), O(0;0;0), які є вершинами трикутної піраміди. Обчислити: а) потік поля $\bar{F}$ через сторону грані ABC у тому напрямку нормалі до площини, яка утворює з віссю Oz гострий кут; б) потік поля $\bar{F}$ через зовнішню сторону межі заданої піраміди (застосувати формулу Остроградського); в) циркуляцію поля $\bar{F}$ по контуру ABCA (застосувати формулу Стокса).

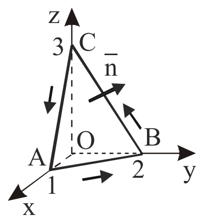


Рис.53

Розв'язання. а) Запишемо рівняння площини ABC (рис. 53):

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \text{ або } 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

Використовуючи формулу (2.2), обчислюємо потік:

$$\Pi = \iint_S (x+y)dydz + (y+z)dzdx + (x+z)dxdy =$$

$$= \iint_{G_{yz}} \left(1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z + y\right) dydz + \iint_{G_{zx}} \left(2 - 2x - \frac{2}{3}z + z\right) dzdx +$$

$$+ \iint_{G_{xy}} \left(x + 3 - 3x - \frac{3}{2}y\right) dxdy =$$

$$= \int_0^2 dy \int_0^{3-\frac{3}{2}y} (1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z)dz + \int_0^3 dz \int_0^{1-\frac{1}{3}z} (2 - 2x + \frac{1}{3}z)dx +$$

$$+ \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (3 - 2x - \frac{3}{2}y)dy = 3 + \frac{5}{2} + \frac{4}{3} = \frac{41}{6}.$$

Тут G_{yz}, G_{zx}, G_{xy} – проекції поверхні S на координатні площини Oyz, Ozx, Oxy відповідно (трикутники BOC, AOC, ABO). При переході від поверхневих до подвійних інтегралів в усіх трьох доданках взято знак плюс, так як нормаль $\bar{n}$ зі всіма координатними осями утворює гострий кут (див. рис. 53).

б) Використовуючи формулу Остроградського, дістаємо

$$\Pi = \iint\limits_S (x+y)dydz + (y+z)dzdx + (x+z)dxdy =$$

$$= \iiint\limits_T \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y) + \frac{\partial}{\partial y}(y+z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+z)\right) dxdydz =$$

$$= \iiint_T (1+1+1)dxdydz = 3\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} dz = 3.$$

в) Використовуючи формулу Стокса, можемо записати

$$Ц = \oint_L (x+y)dx + (y+z)dy + (x+z)dz =$$

$$= \iint_S Xdydz + Ydzdx + Zdxdy,$$

де X, Y, Z – координати вектора $rot\bar{F}$. Для того щоб напрям обходу контуру був додатнім, нормаль $\bar{n}$ до вибраної сторони поверхні S повинна утворювати з віссю Oz гострий кут (рис.53). Знайдемо спочатку ротор поля $\bar{F}$:

$$rot\bar{t}\, F = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y & y+z & x+z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(x+z) - \frac{\partial}{\partial z}(y+z)\right)\bar{\imath} -$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}(x+z) - \frac{\partial}{\partial z}(x+y)\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y+z) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y)\right)\bar{k} = -\bar{\imath} - \bar{\jmath} - \bar{k}.$$

Обчислюємо циркуляцію:

$$Ц = \iint_S (-1)dydz + (-1)dzdx + (-1)dxdy =$$

$$= -\iint_{G_{yz}} dydz - \iint_{G_{zx}} dzdx - \iint_{G_{xy}} dxdy =$$

$$= -\int_0^2 dy \int_0^{3-\frac{3}{2}y} dz - \int_0^3 dz \int_0^{1-\frac{1}{3}z} dx - \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy = -\frac{11}{2}.$$

Розділ 8. Числові ряди

8.1. Основні поняття. Необхідна ознака збіжності

Нехай дана нескінченна числова послідовність

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots.$$

Вираз

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1.1)$$

називається *числовим рядом*. Числа $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ називаються членами числового ряду, а u_n – загальним (або n-м) членом ряду.

Якщо ряд (1.1) містить як додатні, так і від'ємні члени, то він називається *знакозмінним*. Якщо ж всі члени ряду невід'ємні, то він називається *знакододатним*.

Ряд заданий, якщо відомо його загальний член $u_n = f(n)$, тобто відоме правило, за яким для кожного номера n $(n = 1,2,3,\cdots)$ визначається відповідний член ряду.

Приклад 1. Написати перші три члени ряду, загальний член якого заданий формулою $u_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1}$.

Розв'язання. Вважаючи, що $n = 1,2,3$, одержуємо

$$u_1 = (-1)^{1+1}\frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3};\ u_2 = (-1)^{2+1}\frac{2}{2\cdot 2+1} = -\frac{2}{5};\ u_3 = (-1)^{3+1}\frac{3}{2\cdot 3+1} = \frac{3}{7}.$$

Даний ряд можна записати так:

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{3}{7} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1} + \cdots \text{ або } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1}.$$

Приклад 2. Знайти формулу для загального члена ряду

$$1 + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 9} + \frac{1}{4\cdot 27} + \frac{1}{5\cdot 81} + \cdots.$$

Розв'язання. Можна замітити, що загальний член даного ряду визначається за формулою $u_n = \frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}$.

Сума кінцевого числа перших *n* членів ряду називається *n*-ю *частинною сумою* цього ряду і позначається через s_n:

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n. \quad (1.2)$$

Розглянемо послідовність частинних сум

$$s_1 = u_1,\ s_2 = u_1 + u_2,\ \cdots, s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \cdots.$$

Якщо існує границя

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s, \quad (1.3)$$

то її називають сумою ряду (1.1) і кажуть, що ряд *збігається*. Якщо ж вказана границя послідовності частинних сум дорівнює нескінченності або не існує, то ряд *розбігається*.

Приклад 3. Знайти суму ряду

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots.$$

Розв'язання. Перетворюємо загальний член ряду (розкладаємо його на суму двох дробів):

$$u_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{(1+n)-n}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Можемо записати

$$u_1 = 1 - \frac{1}{2},\ u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},\ u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \cdots, u_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},\ u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1};$$

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Обчислюємо границю:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n-1}\right) = 1.$$

Оскільки існує скінченна границя, то ряд збігається і його сума дорівнює 1.

Наведемо *основні властивості* збіжних рядів.

1. Якщо збігається ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots,$$

то збігається і ряд

$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots + u_{m+n} + \cdots,$

отриманий з даного ряду відкиданням перших m членів; навпаки, якщо збігається останній ряд, то збігається і ряд, з якого він отримується.

2. Якщо ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

збігається і його сума дорівнює s, то ряд

$$ku_1 + ku_2 + ku_3 + \cdots + ku_n + \cdots$$

також збігається, причому сума останнього дорівнює ks.

3. Якщо ряди

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots, \quad v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots$$

збігаються і їхні суми відповідно рівні $s,\ \sigma$, то ряд

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \cdots + (u_n + v_n) \cdots$$

також збігається, причому його сума дорівнює $s + \sigma$.

Необхідна умова збіжності ряду: якщо ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, тобто загальний член збіжного ряду прямує до нуля при $n \to \infty$.

Наслідок. Якщо загальний член ряду не прямує до нуля при $n \to \infty$, то ряд розбігається.

Приклад 4. З'ясувати, збігається чи розбігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+10}{10n+1}$.

Розв'язання. Перевіряємо виконання необхідної умови збіжності ряду:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{n+10}{10n+1} = \frac{1}{10} \neq 0.$$

Отже, ряд розбігається.

Якщо необхідна умова збіжності для даного ряду виконується, то він не обов'язково збігається. Розглянемо ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots. \qquad (1.4)$$

Цей ряд називається *гармонійним*. Так як $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{n} = 0$, то необхідна умова збіжності ряду виконується.

Покажемо тепер, що ряд (1.4) розбігається. Перепишемо вказаний ряд наступним чином:

$$1 + \frac{1}{2} + \overbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}^{2\ \text{чл.}} + \overbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}^{4\ \text{чл.}} + \overbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}^{8\ \text{чл.}} \cdots.$$

Розглянемо також ряд виду

$$1 + \frac{1}{2} + \overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}^{2\ \text{чл.}} + \overbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}^{4\ \text{чл.}} + \overbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}^{8\ \text{чл.}} \cdots.$$

Позначимо через s_n і σ_n частинні суми 1-го та 2-го рядів відповідно. Легко бачити, що для $n > 2$ виконується нерівність $s_n > \sigma_n$. Знайдемо частинні суми $\sigma_2,\ \sigma_4,\ \sigma_8,\ \cdots, \sigma_{2^k}$:

$$\sigma_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2}, \quad \sigma_4 = \sigma_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$\sigma_8 = \sigma_{2^3} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}, \cdots,$$

$$\sigma_{2^k} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}.$$

Так як

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{2^k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + k \cdot \frac{1}{2}\right) = \infty,$$

то

$$\lim_{k\to\infty} s_{2^k} > \lim_{k\to\infty} \sigma_{2^k} = \infty.$$

Очевидно, що умови $k \to \infty$ і $n \to \infty$ випливають одна з одної. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, тобто гармонійний ряд розбігається.

Надалі часто будимо використовувати *узагальнено-гармонійний* ряд (ряд Діріхле)

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots. \tag{1.5}$$

Можна показати, що при $p > 1$ ряд збігається, а при $p \leq 1$ ряд розбігається (при $p = 1$ маємо гармонійний ряд).

Розглянемо ряд виду (сума членів *нескінченої геометричної прогресії*)

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots, \tag{1.6}$$

де *a* – перший член геометричної прогресії; *q* – знаменник. Як відомо *n*-а *частинна сума* цього ряду обчислюється за формулою

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}. \tag{1.7}$$

Знайдемо границю частинної суми:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{aq^n}{1-q}.$$

Якщо $|q| < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}.$$

Якщо ж $|q| \geq 1$, то вказана границя дорівнює нескінченності або не існує. Отже, при $|q| < 1$ ряд (1.6) збігається і його сума $s = \frac{a}{1-q}$; при $|q| \geq 1$ ряд (1.6) розбігається.

8.2. Достатні умови збіжності рядів з додатними членами

Теорія рядів застосовується для розв'язання багатьох практичних і теоретичних задач. Як правило, використовуються збіжні ряди, а тому питання збіжності ряду є одним з основних. Наведемо далі декілька достатніх умов збіжності для рядів з додатними (можливо невід'ємними) членами. Розглянемо спочатку *ознаки порівняння*.

Нехай задані числові ряди з додатними членами:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{2.1}$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots. \tag{2.2}$$

Перша ознака порівняння. Якщо для всіх значень *n* виконується нерівність $u_n \leq v_n$,то із збіжності ряду (2.2) випливає збіжність ряду (2.1), а із розбіжності ряду (2.1) випливає розбіжність ряду (2.2). Іншими словами, якщо збігається ряд з більшими членами, то збігається і ряд з меншими членами, а якщо розбігається ряд з меншими членами, то розбігається і ряд з більшими членами.

Доведемо, що якщо збігається ряд (2.2), то збігається і ряд (2.1). Нехай $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, $\sigma_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. З умови (2.3) випливає, що $s_n \leq \sigma_n$. Так як ряд (2.2) збігається, то існує границя $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$. Можемо записати $s_n \leq \sigma_n < \sigma$, тобто послідовність частинних сум $\{s_n\}$ обмежена. Так як ряд (2.1) складається з додатних (можливо невід'ємних) членів, то для будь-якого *n* виконується нерівність $s_n \leq s_{n+1}$.Це означає, що послідовність $\{s_n\}$ неспадна. Так як обмежена і неспадна послідовність є збіжною, то існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Отже, ряд (2.1) збігається.

Зауваження. Умова $u_n \le v_n$ може виконуватися не для всіх n, а починаючи з деякого номера $n = N$.

При застосуванні ознак порівняння досліджуваний ряд порівнюється з рядом, який вже досліджений. В якості останнього, як правило, будимо використовувати ряд Діріхле або ряд, члени якого утворюють нескінченну геометричну прогресію (див. попередній параграф).

Приклад 1. Дослідити збіжність числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$.

Розв'язання. Маємо ряд з невід'ємними членами. Застосуємо першу ознаку порівняння. Для порівняння візьмемо ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, який збігається ($p = 2 > 1$). Так як $|\sin n| \le 1$, то для будь-якого n справедлива нерівність $\frac{|\sin n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$.

Згідно з першою ознакою порівняння, із збіжності взятого для порівняння ряду Діріхле випливає збіжність заданого ряду.

Друга (гранична) ознака порівняння. Якщо для рядів (2.1) і (2.2) існує скінчена і відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, то ці ряди одночасно збігаються або одночасно розбігаються.

Приклад 2. Дослідити збіжність числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+5}{n^4+1}$.

Розв'язання. Застосуємо другу ознаку порівняння. Для порівняння візьмемо гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який розбігається. Обчислюємо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^3+5}{n^4+1} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^3+5}{n^4+1} \cdot \frac{n}{1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^4+5n}{n^4+1}\right) = 2.$$

Згідно з другою ознакою порівняння, із розбіжності взятого для порівняння гармонійного ряду випливає розбіжність заданого ряду.

Нагадаємо правило, яке було застосовано при обчисленні останньої границі. Якщо $P_m(n)$ і $Q_r(n)$ многочлени m -го і r -го степеня відповідно, то границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_m(n)}{Q_r(n)}$ дорівнює: а) відношенню числових коефіцієнтів при старших степенях n многочленів $P_m(n)$ і $Q_r(n)$, якщо $m = r$; б) нулю, якщо $m < r$; в) нескінченності, якщо $m > r$.

Ознака Даламбера. Якщо для ряду з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \tag{2.3}$$

то ряд збігається за $l < 1$ і розбігається за $l > 1$. У випадку, коли $l = 1$, питання про збіжність ряду цією ознакою не вирішується (ряд може як збігатися, так і розбігатися).

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+3)!}$.

Розв'язання. Застосовуємо ознаку Даламбера. Враховуючи, що $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ і $(n+4)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n+3) \cdot (n+4) = (n+3)! \cdot (n+4)$, маємо:

$$u_n = \frac{2^n}{(n+3)!}, \quad u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{((n+1)+3)!} = \frac{2^{n+1}}{(n+4)!};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{(n+4)!} \cdot \frac{(n+3)!}{2^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot 2(n+3)!}{(n+3)! \cdot (n+4) \cdot 2^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+4} = 0 < 1.$$

Ряд збігається.

Радикальна ознака Коші. Якщо для ряду з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = h, \tag{2.4}$$

то ряд збігається за $h < 1$ і розбігається за $h > 1$. У випадку, коли $h =$

1, ознака відповіді не дає.

Цю ознаку зручно застосовувати у тому випадку, коли загальний член u_n представляє собою деякий вираз в степені n, тобто $u_n = (f(n))^n$.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^3+1}{n^3+10}\right)^n$.

Розв'язання. Застосовуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^3+1}{n^3+10}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+1}{n^3+10} = 2 > 1.$$

Так як границя більше одиниці, то ряд розбігається.

Інтегральна ознака Коші. Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ додатні і не зростають, тобто $u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_n \geq \cdots$, і нехай $f(x)$ – неперервна незростаюча функція, для якої виконуються рівності $f(1) = u_1, f(2) = u_2, \cdots, f(n) = u_n, \cdots$. Тоді, якщо невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ збігається, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$; якщо ж невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ розбігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ також розбігається.

Відмітимо, що формула для обчислення *n*-го члена $u_n = f(n)$ визначає підінтегральну функцію $f(x)$. Функція цілочисельного аргументу $f(n)$ замінюється на функцію дійсного аргументу $f(x)$. Інтегральна ознака, як правило, використовується у тих випадках, коли інші ознаки не дають відповіді на питання про збіжність числового ряду.

Приклад 5. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\,ln(n+1)}$.

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Так як $u_n = \frac{1}{(n+1)\,ln(n+1)}$, то $f(x) = \frac{1}{(x+1)\,ln(x+1)}$. Досліджуємо невласний інтеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{(x+1)\,ln(x+1)}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{(x+1)\,ln(x+1)}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{d(ln(x+1))}{ln(x+1)} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} ln \mid ln(x+1)|_1^b = \lim_{b\to\infty}(ln \mid ln(b+1)| - ln \mid ln\,2\,|) = \infty.$$

Так як невласний інтеграл розбігається, то розбігається і даний ряд.

8.3. Знакозмінні ряди

Знакопереміжним називається ряд виду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n + \cdots, \qquad (3.1)$$

де $u_i > 0\ (i = 1,2,3,\cdots)$.

Ознака Лейбніца збіжності знакопереміжного ряду. Якщо абсолютні величини членів знакопереміжного ряду (3.1) монотонно спадають, тобто

$$u_1 > u_2 > \cdots > u_n > \cdots \qquad (3.2)$$

і загальний член прямує до нуля при нескінченному зростанні *n*, тобто

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \qquad (3.3)$$

то цей ряд збігається, його сума *S* додатна і не перевищує першого члена ряду.

Зауваження. Ознака Лейбніца залишається вірною і у тому випадку, коли умова (3.2) виконується не для всіх *n*, а починаючи з деякого номера *N*.

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$.

Розв'язання. Запишемо заданий ряд в розгорнутому вигляді

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} + \cdots.$$

Маємо знакопереміжний ряд. Застосовуємо ознаку Лейбніца. Перевіряємо виконання умов (3.2) і (3.3):

$$1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \frac{1}{16} > \cdots; \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0.$$

Обидві умови виконуються. Ряд збігається.

Розглянемо *знакозмінні* ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{3.4}$$

тобто ряд, який містить як додатні, так і від'ємні члени, причому декілька послідовних членів ряду можуть мати один знак. Очевидно, що знакопереміжний ряд є частинним випадком знакозмінного.

Дамо поняття *умовної* та *абсолютної* збіжності для знакозмінного ряду. Разом з рядом (3.4) розглянемо ряд, який складений із абсолютних величин його членів, а саме

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots. \tag{3.5}$$

Знакозмінний ряд (3.4) називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд (3.5), який складений із абсолютних величин його членів. Ряд (3.4) називається *умовно збіжним*, якщо він сам збігається, а ряд (3.4), складений із абсолютних величин його членів, розбігається.

Можна показати, що із збіжності ряду(3.5) випливає збіжність ряду (3.4), а із розбіжності ряду (3.4) випливає розбіжність ряду (3.5).

Приклад 2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n+2}{n^2+4}$.

Розв'язання. а) Розглянемо спочатку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^n}$, який складений із абсолютних величин членів заданого ряду. Застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{5^{n+1}} : \frac{n+1}{5^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{5(n+1)} = \frac{1}{5} < 1.$$

Ряд збігається. Отже, заданий знакозмінний (точніше знакопереміжний) ряд збігається абсолютно.

б) Розглянемо спочатку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n^2+4}$, який складений із абсолютних величин членів заданого ряду. Застосуємо другу ознаку порівняння. Для порівняння візьмемо гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який розбігається. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{n^2+4}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2+4}=3.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n^2+4}$ розбігається. Отже, заданий знакозмінний ряд може збігатися тільки умовно. Застосуємо до нього ознаку Лейбніца (маємо знакопереміжний ряд):

$$\frac{5}{5}=\frac{8}{8}>\frac{11}{13}>\frac{14}{20}>\cdots;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n^2+4}=0.$$

Ряд збігається. Отже, заданий знакозмінний ряд збігається умовно.

Розділ 9. Степеневі ряди

9.1. Поняття функціонального ряду

Ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots, \tag{1.1}$$

членами якого є функції від x, називається *функціональним*.

При певному фіксованому значенні x функціональний ряд перетворюється в числовий, який може збігатися або розбігатися. Сукупність значень x, для яких функції $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$ визначені і ряд (1) збігається, називається *областю збіжності* функціонального ряду. Так як в області збіжності сума ряду є функцією від x, то будимо позначати її через $s(x)$.

Приклад 1. Знайти область збіжності та суму функціонального ряду

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots.$$

Розв'язання. Даний ряд представляє собою суму нескінченої геометричної прогресії зі знаменником $q=x$ і першим членом $b_1=1$. Його членами є степеневі функції x^n. Як відомо, цей ряд збігається при

$|x| < 1$, тобто областю його збіжності є проміжок $(-1; 1)$. Сума ряду визначається як сума нескінченої геометричної прогресії, а саме $s(x) = 1/(1-x)$.

9.2. Степеневі ряди. Інтервал збіжності степеневого ряду

Ряд виду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (2.1)$$

називається *степеневим рядом*, а дійсні числа $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ – коефіцієнтами степеневого ряду. Ряд більш загального виду

$$a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \qquad (2.2)$$

також називається степеневим.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (2.1) збігається при $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$), то він збігається, причому абсолютно, для всіх x, що задовольняють умову $|x| < |x_0|$; якщо ряд (2.1) розбігається при $x = x_1$, то він розбігається для всіх x, що задовольняють умову $|x| > |x_1|$.

Теорема Абеля має важливе значення в теорії степеневих рядів. З цієї теореми випливає, що для будь-якого степеневого ряду (2.1) існує *інтервал збіжності*, тобто інтервал $(-R; R)$, усередині якого ряд абсолютно збігається і за межами якого ряд розбігається. Додатне число R називається *радіусом збіжності* степеневого ряду. На кінцях інтервалу, в точках $x = R$ і $x = -R$, питання про збіжність або розбіжність даного ряду вирішується окремо для кожного конкретного ряду. Якщо $R = +\infty$, то інтервалом збіжності є уся числова пряма. У випадку, коли $R = 0$, степеневий ряд (2.1) збігається лише в точці $x = 0$.

Для ряду (2.2) інтервалом збіжності є інтервал $(a - R; a + R)$.

З метою визначення радіуса збіжності R розглянемо ряд, складений із абсолютних величин членів ряду (2.1):

$$|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \cdots + |a_nx^n| + \cdots. \qquad (2.3)$$

Застосуємо до знакододатнього ряду (2.3) ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x|\right) = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Ряд збігається, якщо

$$|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1, \quad |x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Отже, радіус збіжності степеневого ряду (2.1) може бути знайдений за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (2.4)$$

Застосувавши до ряду (2.3) радикальну ознаку Коші, отримуємо:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (2.5)$$

Приклад 1. Знайти область збіжності степеневих рядів а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n}{n+1}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+2}x\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}(x-3)^n$.

Розв'язання. а) Знайдемо радіус збіжності за формулою (2.4):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n}{n+1} : \frac{5^{n+1}}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot(n+2)}{(n+1)\cdot 5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{5(n+1)} = \frac{1}{5}.$$

Отже, ряд абсолютно збігається на проміжку $(-1/5\,;1/5)$.

Досліджуємо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності, тобто в точках $x = \pm 1/5$. При $x = -1/5$ отримуємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n}{n+1}\left(-\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{1}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}.$$

До ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ застосовуємо другу ознаку порівняння. Для порівняння візьмемо гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який розбігається. Так як $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} : \frac{1}{n}\right) = 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ розбігається. Отже, заданий степеневий ряд в точці $x = -1/5$ розбігається.

При $x = 1/5$ маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n}{n+1}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}.$$

Застосовуємо до отриманого знакопереміжного ряду ознаку Лейбниця:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$ збігається (умовно). Заданий степеневий ряд в точці $x = 1/5$ збігається і областю його збіжності є півінтервал $(-1/5; 1/5]$.

б) Визначаємо радіус збіжності за формулою (2.5):

$$R = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+2}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n+1} = +\infty.$$

Отже, інтервалом збіжності заданого степеневого ряду є уся числова пряма.

в) Маємо степеневий ряд виду (2.2), у якому $a = 3$. Інтервалом збіжності для такого ряду є проміжок $(a-R; a+R)$. Застосовуємо формулу (2.4):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2^n} : \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)^2} = 2.$$

Заданий степеневий ряд абсолютно збігається на проміжку $(1;\ 5)$. При $x = 5$ одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$, який розбігається (не виконується необхідна умова збіжності). Якщо $x = 1$, то отримуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$, для якого також не виконується необхідна умова збіжності, тобто він розбігається. Отже, областю збіжності заданого степеневого ряду є проміжок $(1;\ 5)$.

Інтервал збіжності степеневого ряду можна визначати, застосувавши безпосередньо ознаку Даламбера або ознаку Коші до ряду, складеному із абсолютних величин членів вихідного ряду.

Приклад 2. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n^2 3^n}$.

Розв'язання. Застосуємо ознаку Даламбера до ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2 3^n}$, який складений із абсолютних величин членів заданого ряду (враховано, що $x^{2n} \geq 0$ при будь-якому x):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)^2 3^{n+1}} : \frac{x^{2n}}{n^2 3^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}\cdot n^2 3^n}{(n+1)^2 3^{n+1}\cdot x^{2n}} = \frac{x^2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{x^2}{3}.$$

Ряд збігається, якщо $x^2/3 < 1$, звідки $|x| < \sqrt{3}$. Досліджуємо збіжність заданого ряду на кінцях інтервалу $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$. В обох точках $x = \pm\sqrt{3}$ одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається як ряд Діріхле за $p = 2 > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ збігається абсолютно. Отже, областю збіжності заданого степеневого ряду є відрізок $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$.

9.3. Диференціювання та інтегрування степеневих рядів

Нехай функція $f(x)$ є сумою степеневого ряду

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{3.1}$$

інтервалом збіжності якого є проміжок $(-R;\ R)$. Можна показати, що функція $f(x)$ диференційована на $(-R;\ R)$ і її похідна $f'(x)$ може бути знайдена почленним диференціюванням ряду (3.1), тобто

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots. \tag{3.2}$$

Інтервалом збіжності ряду (3.2) також є проміжок $(-R;\ R)$. Сказане залишається справедливим і для похідних вищих порядків.

Можна також показати, що функція $f(x)$ інтегрована на $(-R;\ R)$ і інтеграл від неї може бути знайдений почленним інтегруванням ряду (3.1), тобто якщо $x_1, x_2 \in (-R,\ R)$, то

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} a_0 dx + \int_{x_1}^{x_2} a_1 x dx +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} a_2 x^2 dx + \cdots + \int_{x_1}^{x_2} a_n x^n dx + \cdots. \qquad (3.3)$$

У випадку, коли інтеграл береться по відрізку $[0,\ x]$, $x \in (-R,\ R)$, маємо

$$\int_0^x f(x)dx = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \cdots. \qquad (3.4)$$

Ряд (3.4) має той же інтервал збіжності, що і ряд (3.1).

Приклад 3. Знайти суму ряду

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots.$$

Розв'язання. Розглянемо спочатку ряд, який представляє собою суму членів нескінченної геометричної прогресії (див. § 2.1, прикл. 1):

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots.$$

Інтервалом збіжності цього ряду є проміжок $(-1;\ 1)$. Зінтегруємо останній ряд по відрізку $[0,\ x]$, $x \in (-1,\ 1)$:

$$\int_0^x \frac{1}{1-x} dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots.$$

Враховуючи, що $\int_0^x \frac{dx}{1-x} = -ln\,|\,1-x|\big|_0^x = ln\,\frac{1}{1-x}$, отримуємо

$$ln\,\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots.$$

Відмітимо, що проміжок $(-1;\ 1)$ також є інтервалом збіжності цього ряду.

9.4. Розклад функцій в степеневі ряди

Нагадаємо спочатку формулу Тейлора. Нехай функція $f(x)$ диференційована $n+1$ раз в інтервалі $|x-a| < R$. Тоді в цьому інтервалі функція $f(x)$ може бути представлена у вигляді

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x), \qquad (4.1)$$

де $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ 0<\theta<1.$

Формула (4.1) називається *формулою Тейлора*, а функція $R_n(x)$ – *залишковим членом* формули Тейлора.

При $a=0$ отримаємо формулу Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x), \qquad (4.2)$$

де $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1.$

Припустимо тепер, що в інтервалі $|x-a|<R$ функція $f(x)$ нескінченно диференційована і виконується умова

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0. \qquad (4.3)$$

Перейшовши до границі в формулі (4.1) при $n\to\infty$, отримуємо розкладання функції $f(x)$ в ряд Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \qquad (4.4).$$

Можна показати, що при виконанні умови (4.3) ряд правої частини формули (4.4) збігається і його сумою є функція $f(x)$.

При $a=0$ отримаємо ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots. \qquad (4.5)$$

Приклад 1. Розкласти в степеневий ряд функцію $f(x)=\sin x$.

Розв’язання. Знайдемо похідні: $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{(4)}(x)=\sin x$, $f^{(5)}(x)=\cos x,\cdots$. При $x=0$ отримуємо: $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{(4)}(0)=0$, $f^{(5)}(x)=1,\cdots$. Записуємо ряд Маклорена:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots.$$

З метою визначення інтервалу збіжності застосуємо ознаку Даламбера до ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)!}$, який складений із абсолютних величин членів заданого ряду:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}\cdot(2n-1)!}{(2n+1)!\cdot|x|^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^2}{2n(2n+1)} = 0.$$

Так як остання границя рівна нулю при будь-якому x, то записаний степеневий ряд збігається абсолютно на всій числовій прямій.

Покажемо, що для залишкового члену $R_n(x)$ виконується умова (4.3). Враховуючи, що $|\sin\theta x| \le 1$ і $|\cos\theta x| \le 1$, отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)| = \lim_{n\to\infty}\frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \le \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Отже, $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0$ і $\lim_{n\to\infty}R_n(x) = 0$ при будь-якому x. Так як умова (4.3) виконується, то функція $\sin x$ є сумою побудованого степеневого ряду, тобто можемо записати

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,\ -\infty < x < +\infty. \quad (4.6)$$

Приклад 2. Розкласти в степеневий ряд функцію $f(x) = \cos x$.

Розв'язання. Диференціюємо (4.6) і отримуємо:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,\ -\infty < x < +\infty. \quad (4.7)$$

Аналогічно попередньому можна отримати розвинення в степеневі ряди деяких інших елементарних функцій:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,\ -\infty < x < +\infty, \quad (4.8)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots,\ -1 < x \le 1, \quad (4.9)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \cdots,\ -1 \le x \le 1, \quad (4.10)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots +$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\ -1<x<1. \qquad (4.11)$$

Наведені вище формули можуть використовуватися для розкладання в степеневі ряди інших функцій.

Приклад 3. Розкласти в степеневий ряд функції:

а) $f(x) = ln\frac{1+x}{1-x}$, б) $f(x) = cos^2 x$.

Розв'язання. а) Застосовуємо формулу (4.9). Замінивши x на $-x$, отримуємо

$$ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \cdots,\ -1 \le x < 1.$$

Віднімаємо від (4.9) останню рівність і дістаємо

$$ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots\right),\ -1 < x < 1. \qquad (4.12)$$

б) Використовуючи формулу (4.7), а також відому тригонометричну формулу $cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos\,2\,x)$, одержуємо

$$cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) =$$

$$= 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots,\ -\infty < x < +\infty.$$

Розділ 10. Застосування степеневих рядів

10.1. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

За допомогою розкладання функції в степеневий ряд можна наближено обчислити її значення із заданою точністю. Для цього будимо використовувати формули (4.6)-(4.12) попереднього параграфа. При застосуванні вказаних формул степеневий ряд замінюється n -ю частинною сумою. Число членів n цієї суми залежить від заданої похибки, яка, в свою чергу, визначається сумою відкинутого ряду. Найбільш зручною є ситуація, коли для даного значення x отримуємо знакопереміжний ряд, який задовольняє умовам теореми Лейбніца. У цьому випадку абсолютна величина суми відкинутого ряду не перебільшує абсолютної величини першого відкинутого члена.

Приклад 1. Обчислити з точністю до 0,001:

а) $sin\,2\,0°$;   б) $1/\sqrt{e}$,   в) $\sqrt[3]{68}$.

Розв'язання. а) Застосовуємо формулу (4.6). Поклавши $x = \pi/9$ (переводимо градуси в радіани), отримуємо

$$sin\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} - \frac{\pi^3}{9^3\cdot 3!} + \frac{\pi^5}{9^5\cdot 5!} - \cdots.$$

Маємо знакопереміжний ряд, для якого виконуються умови теореми Лейбніица. Так як $\frac{\pi^5}{9^5\cdot 5!} \approx 0{,}000043 < 0{,}001$, то достатньо залишити два члена ряду, тобто $sin\frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{\pi^3}{9^3\cdot 3!} \approx 0{,}342$.

б) Використовуємо формулу (4.8). Оскільки $1/\sqrt{e} = e^{-0{,}5}$, то беремо $x = -0{,}5$. Маємо:

$$e^{-0{,}5} = 1 - 0{,}5 + \frac{0{,}5^2}{2!} - \frac{0{,}5^3}{3!} + \frac{0{,}5^4}{4!} - \cdots.$$

Для отриманого ряду умови теореми Лейбніца виконуються. Так як $0{,}5^4/4! > 0{,}001$, а $0{,}5^5/5! \approx 0{,}00026 < 0{,}001$, то

$$e^{-0{,}5} \approx 1 - 0{,}5 + \frac{0{,}5^2}{2!} - \frac{0{,}5^3}{3!} + \frac{0{,}5^4}{4!} \approx 0{,}607.$$

в) Представимо шуканий корінь у вигляді:

$$\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{64+4} = \sqrt[3]{64(1+4/64)} = 4\sqrt[3]{(1+1/16)} = 4(1+1/16)^{1/3}.$$

Застосовуємо формулу (4.11) при $x = 1/16,\ m = 1/3$:

$$\sqrt[3]{68} = 4\left(1 + \frac{1/3}{1!\cdot 16} + \frac{(1/3)\cdot(-2/3)}{2!\cdot 16^2} + \frac{(1/3)\cdot(-2/3)\cdot(-5/3)}{3!\cdot 16^3} + \cdots\right) =$$

$$= 4\left(1 + \frac{1}{48} - \frac{1}{2304} + \frac{5}{331776} - \cdots\right).$$

Маємо знакопереміжний ряд, який задовольняє умовам теореми Лейбніца. Враховуючи, що $4 \cdot 5/331776 < 0{,}001$, залишаємо в дужках лише три доданки і одержуємо $\sqrt[3]{68} \approx 4{,}082$.

Формула (4.9) дозволяє обчислювати натуральні логарифми $ln\, a$ за умови, що $0 < a \leq 2$. Більш ефективною є формула (4.12). За її допомогою можна обчислювати логарифми будь-якого додатного числа a (якщо $-1 < x < 1$, то $0 < a < \infty$). Визначимо x через a:

$$\frac{1+x}{1-x} = a, \quad x = \frac{a-1}{a+1}. \tag{1.1}$$

Очевидно, що для всіх можливих x ряд (4.12) є знакосталим. Оцінимо абсолютну величину похибки, яка виникає при відкиданні всіх членів ряду після n-го. Використовуючи формулу для суми членів нескінченної геометричної прогресії, маємо:

$$\rho_n \leq 2\left(\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} + \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} + \frac{|x|^{2n+5}}{2n+5} + \cdots\right) < 2\left(\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} + \frac{|x|^{2n+3}}{2n+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{|x|^{2n+5}}{2n+1} + \cdots\right) = 2\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}(1 + x^2 + x^4 + \cdots) = \frac{2|x|^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{1-x^2}.$$

Таким чином отримали наступну оцінку

$$\rho_n < \frac{2|x|^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}, \quad -1 < x < 1. \tag{1.2}$$

Відмітимо, що підхід, за допомогою якого була отримана оцінка (1.2), застосовується і для інших рядів.

Приклад 2. Обчислити $ln\, 3$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. Використовуючи (1.1) і (1.2), отримуємо:

$$x = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}, \quad \rho_4 < \frac{2\cdot(1/2)^9}{9\cdot(1-1/4)} = \frac{1}{1728} < 0{,}001.$$

Застосовуючи формулу (4.12) (залишаємо чотири доданка):

$$ln\, 3 \approx 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1}{7\cdot 2^7}\right) \approx 1{,}098.$$

10.2. Наближені обчислення визначених інтегралів

Як відомо, первісні для деяких функцій не виражаються через елементарні функції. Обчислення відповідних визначених інтегралів за допомогою формули Ньютона-Лейбніця неможливе. Вказані інтеграли іноді зручно обчислювати за допомогою рядів. Розглянемо даний підхід на конкретних прикладах.

Приклад 1. Обчислити визначені інтеграли з точністю до 0,001: а) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$; б) $\int_0^{0,5} e^{-x^2}\, dx$.

Розв'язання. а) Відмітимо, що невизначені інтеграли $\int \frac{\sin x}{x} dx$ і $\int e^{-x^2}\, dx$ не виражаються через елементарні функції. Розклавши функцію $\sin x$ в степеневий ряд, можемо записати:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \cdots.$$

Інтегруючи останній ряд почленно, одержимо

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \cdots\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \cdots.$$

За теоремою Лейбніца для забезпечення потрібної точності достатньо залишити три доданки. Отже, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx 0{,}946$.

б) Враховуючи, що

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

можемо записати

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots.$$

Зінтегрувавши почленно і застосувавши теорему Лейбніца, отримуємо:

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2}\, dx = \int_0^{0,5} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots \right) \Bigg|_0^{0,5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} - \frac{1}{5376} + \cdots \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} \approx 0{,}461.$$

10.3. Застосування степеневих рядів до розв'язування диференціальних рівнянь

Один з наближених методів розв'язування диференціальних рівнянь базується на теорії степеневих рядів. Його суть полягає у тому, що частинний розв'язок диференціального рівняння представляється у вигляді ряду Тейлора. Сума кінцевого числа членів цього ряду буде наближено рівнятися шуканому частинному розв'язку.

Розглянемо, наприклад, диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' = F(x, y, y'), \qquad (3.1)$$

яке задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0'. \qquad (3.2)$$

Припустимо, що розв'язок $y = y(x)$ існує і представляється у вигляді ряду Тейлора:

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots. \qquad (3.3)$$

Коефіцієнти останнього степеневого ряду послідовно визначаються за допомогою рівняння (3.1) і умов (3.2). Дійсно, зразу же можемо записати

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \; y''(x_0) = y_0'' = F(x_0, y_0, y_0').$$

Здиференціювавши рівняння (3.1), отримуємо

$$y''' = F_x'(x, y, y') + F_y'(x, y, y')y' + F_{y'}'(x, y, y')y''.$$

Підставивши відповідні значення, дістаємо

$$y'''(x_0) = F'_x(x_0, y_0, y'_0) + F'_y(x_0, y_0, y'_0)y'_0 + F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0)y''_0.$$

Продовжуючи вказану процедуру, визначаємо інші коефіцієнти.

Для значень x, при яких отриманий ряд (3.3) збігається, він є розв'язком рівняння (3.1).

Приклад 1. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'' = xy' + y$, якщо $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

Розв'язання. Нехай шукану функцію $y = y(x)$ розкладено в ряд Маклорена:

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \cdots.$$

У відповідності з умовою $y(0) = 0,\ y'(0) = 1;\ y''(0) = 0 \cdot 1 + 0 = 0$. Диференціюючи задане рівняння, отримуємо:

$y''' = y' + xy'' + y' = 2y' + xy'', \quad y'''(0) = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 2;$

$y(4) \quad = 2y'' + y'' + xy''' = 3y'' + xy''', \quad y^{(4)}(0) = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 0;$

$y(5) \quad = 3y''' + y''' + xy^{(4)} = 4y''' + xy^{(4)}, \quad y^{(5)}(0) = 4 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 8.$

Шуканий розв'язок має вигляд

$$y = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{8}{5!}x^5 + \cdots = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \cdots.$$

Розділ 11. Ряди Фур'є

11.1. Ряди Фур'є. Розклад функції в ряд Фур'є

Нехай $f(x)$ – періодична функція з періодом $T = 2l$. Якщо на відрізку $[-l, l]$ функція $f(x)$ інтегрована, то *Рядом Фур'є* цієї функції називається тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (1.1)$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \qquad (1.2)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 1,2,3,\cdots), \qquad (1.3)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 1,2,3,\cdots). \qquad (1.4)$$

Коефіцієнти a_0, a_n, b_n $(n = 1,2,3,\cdots)$ називаються *коефіцієнтами Фур'є*.

Теорема про збіжність ряду Фур'є. Якщо періодична функція $f(x)$ з періодом $2l$ і її похідна $f'(x)$ неперервні на відрізку $[-l, l]$ або ж мають на ньому кінцеве число точок розриву 1-го роду, то ряд Фур'є, побудований для цієї функції, збігається в усіх точках. Сума одержаного ряду дорівнює значенню функції $f(x)$ у точках неперервності функції. Якщо ж x_0 – точка розриву, то у цій точці сума ряду дорівнює середньому арифметичному границь функції праворуч і ліворуч, тобто

$$f(x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}, \qquad (1.5)$$

де $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x),\ f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

При виконанні умов наведеної теореми можемо записати

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \qquad (1.6)$$

У частинному випадку, коли функція $f(x)$ має період $T = 2\pi$, ряд Фур'є та його коефіцієнти визначаються наступним чином:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\,x + b_n\sin n\,x), \qquad (1.7)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad (1.8)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n\,xdx \quad (n = 1,2,3,\cdots), \qquad (1.9)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin n\,xdx \quad (n = 1,2,3,\cdots). \qquad (1.10)$$

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)$, яка задана на одному періоді:

$$f(x) = \begin{cases} 1{,}5 \text{ при } -2 \le x \le 0, \\ -x \text{ при } 0 < x \le 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Можемо побудувати графік заданої функції (рис.54).

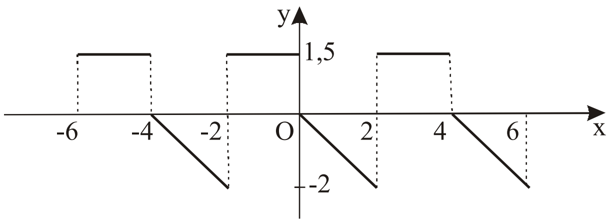


Рис.54

Відмітимо, що функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми про збіжність, тому її можна розкласти в ряд Фур'є.

У нашому випадку $2l = 4,\ l = 2$. Визначаємо коефіцієнти Фур'є за допомогою формул (1.2)-(1.4):

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 1{,}5dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(-x)dx = 0{,}5;$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 1{,}5\cos\frac{n\pi x}{2}dx - \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}dx;$$

$$\int_{-2}^{0} 1{,}5\cos\frac{n\pi x}{2}dx = 1{,}5\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} = 0;$$

$$\int_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \left|\begin{matrix} u = x,\ dv = \cos\frac{n\pi x}{2}dx \\ du = dx,\ v = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2} - \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2} =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1), \quad a_n = -\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1);$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 1{,}5\sin\frac{n\pi x}{2}dx - \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\sin\frac{n\pi x}{2}dx;$$

$$\int_{-2}^{0} 1{,}5\sin\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} = -\frac{3}{n\pi}(1 - (-1)^n);$$

$$\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \begin{vmatrix} u = x, \; dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx \\ du = dx, \; v = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{vmatrix} = -\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 +$$

$$+\frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = -\frac{4}{n\pi}(-1)^n;$$

$$b_n = -\frac{3}{2n\pi}(1-(-1)^n) + \frac{2}{n\pi}(-1)^n = \frac{(-1)^n\cdot 7-3}{2n\pi}.$$

При обчисленні інтегралів були використані очевидні співвідношення:

$$\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n \quad (n = 1,2,3,\cdots).$$

Записуємо ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{(-1)^n\cdot 7-3}{2n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right).$$

На рис.55 зображені графіки заданої функції $f(x)$ (пунктирна лінія) і частинної суми знайденого ряду Фур'є, останні члени якої відповідають $n = 10$.

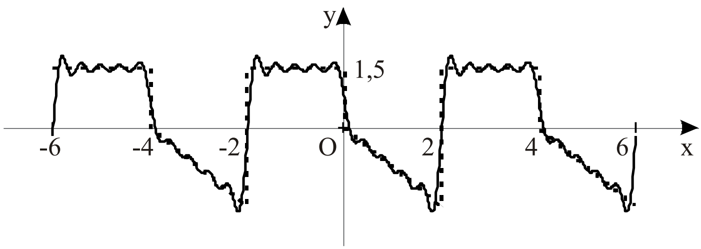


Рис.55

11.2. Ряди Фур'є для парних і непарних функцій

Нехай функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[-l, l]$. Можемо записати

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_0^l f(x)dx.$$

Перетворюємо перший інтеграл правої частини і отримуємо:

$$\int_{-l}^{0} f(x)dx = \begin{vmatrix} x = -t, \ dx = -dt \\ x = -l, \ t = l; \ x = 0, \ l = 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\int_{l}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{l} f(-t)dt = \int_{0}^{l} f(-x)dx$$

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{0}^{l} f(-x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx. \qquad (2.1)$$

Якщо $f(x)$ парна, тобто $f(-x) = f(x)$, то на основі (2.1) маємо

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{0}^{l} f(-x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{l} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx. \qquad (2.2)$$

У випадку, коли $f(x)$ непарна, тобто $f(-x) = -f(x)$, отримуємо

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{0}^{l} f(-x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx =$$

$$= -\int_{0}^{l} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx = 0. \qquad (2.3)$$

Розглянемо тепер періодичну функцію $f(x)$ з періодом $T = 2l$, яка інтегрована на відрізку $[-l, l]$. Нехай функція $f(x)$ парна. Тоді функція $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ є парною (добуток двох парних), а функція $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ є непарною (добуток парної на непарну). Використовуючи формули (1.2)-(1.4) попереднього параграфа і враховуючи (2.2), (2.3), дістаємо наступні значення для коефіцієнтів Фур'є:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx\,, \ a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,, \ b_n = 0 \ (n = 1,2,\cdots), \ (2.4)$$

Отже, ряд Фур'є для парних функцій має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}. \qquad (2.5)$$

Іншими словами, парна функція розкладається по косинусам.

Аналогічно попередньому, якщо $f(x)$ непарна, то отримуємо:

$$a_0 = 0, \ \ a_n = 0, \ \ b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 1,2,3,\cdots); (2.6)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (2.7)$$

Як бачимо, непарна функція розкладається по синусам.

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)$, яка має період $T = 2\pi$ і $f(x) = x$ на відрізку $[-\pi, \pi]$.

Розв'язання. Побудуємо графік заданої функції (рис.56).

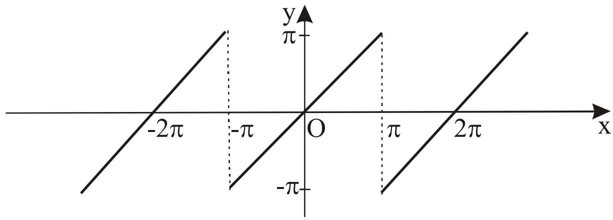


Рис.56

Функція непарна відрізку $[-\pi, \pi]$. Застосовуємо формули (2.6), (2.7):

$$a_0 = 0;\ \ a_n = 0;\ \ \ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin n\, x dx = -\frac{2}{n}\cos n\,\pi = (-1)^{n+1}\frac{2}{n};$$

$$f(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \cdots\right).$$

11.3. Розвинення в ряд Фур'є неперіодичних функцій

Якщо неперіодична функція визначена на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, то її неможливо розкласти в ряд Фур'є на всій числовій прямі. Якщо ж неперіодична функція $f(x)$ задана на кінцевому відрізку $[0, l]$, то вона може бути розвинена в ряд Фур'є. Для цього достатньо довільно довизначити її на півінтервалі $[-l, 0)$, а потім розкласти в ряд Фур'є, вважаючи її періодичною функцією з періодом $T = 2l$. Найкраще функцію $f(x)$ довизначати так, щоб вона була парною або непарною на відрізку $[-l, l]$. У першому випадку функція розкладається по косинусам, а у другому – по синусам. Очевидно, що побудований таким чином ряд Фур'є буде відображати задану функцію тільки на відрізку $[0, l]$.

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$, яка задана на відрізку $[0; \pi]$, причому на вказаному відрізку $f(x) = x$.

Розв'язання. Довизначимо $f(x)$ так, щоб вона була парною на відрізку $[-\pi, \pi]$ і періодичною з періодом $T = 2\pi$ (рис.57).

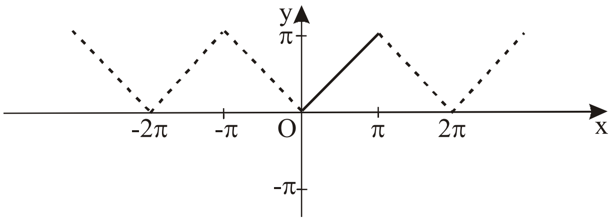


Рис.57

Застосовуємо формули (2.4), (2.5) попереднього параграфу:

$$b_n = 0; \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \pi;$$

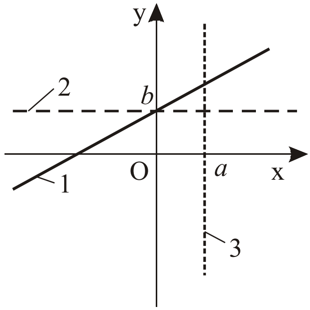
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos n x dx = \frac{2}{\pi n} x \sin n x\bigg|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n^2}\cos n x\bigg|_0^{\pi} =$$

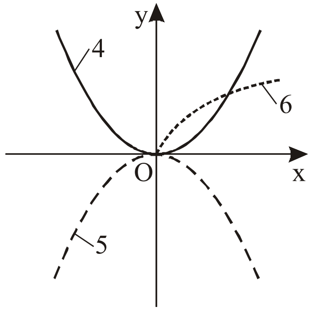
$$= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1);$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \cdots + \frac{\cos nx}{n^2} + \cdots\right).$$

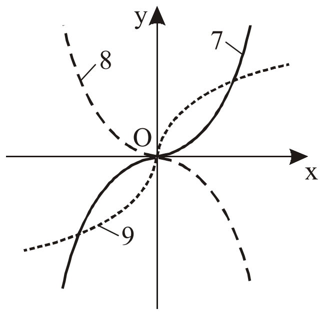
Додатки

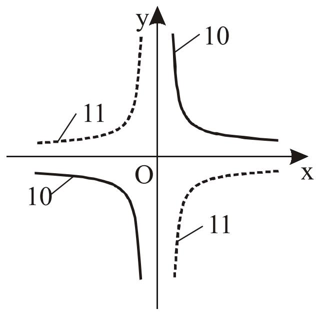
Додаток 1. Прямі та криві на площині



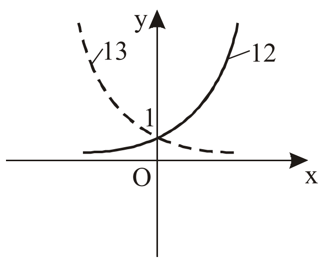


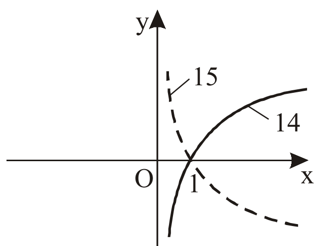
1. $y = kx + b$; 2. $y = b$; 3. $x = a$; 4. $y = x^2$; 5. $y = -x^2$; 6. $y = \sqrt{x}$.





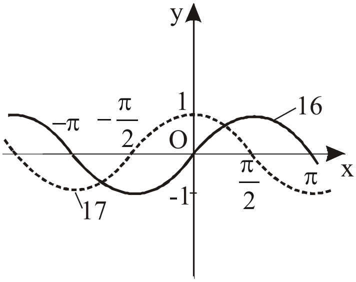
7. $y = x^3$; 8. $y = -x^3$; 9. $y = \sqrt[3]{x}$; 10. $y = \frac{1}{x}$; 11. $y = -\frac{1}{x}$.

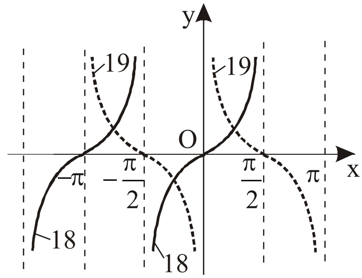




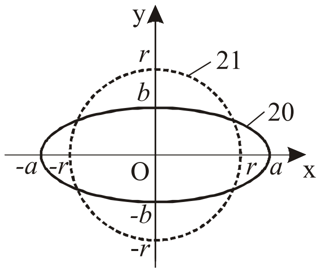
12. $y = a^x,\ a > 1$; 13. $y = a^x,\ 0 < a < 1$;

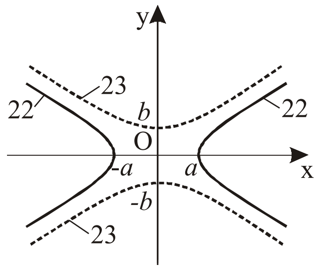
14. $y = log_a x,\ a > 1$; 15. $y = log_a x,\ 0 < a < 1$.



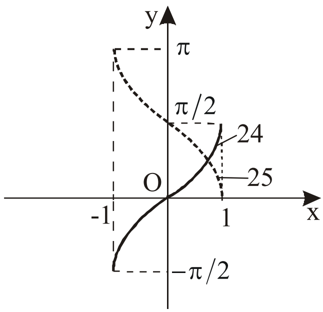


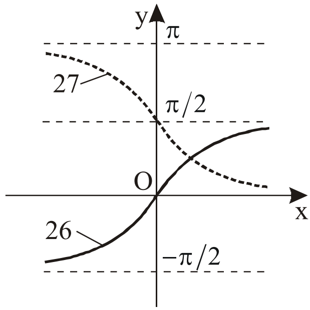
16. $y = sin\,x$; 17. $y = cos\,x$; 18. $y = tg\,x$ 19. $y = ctg\,x$.





20. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 21. $x^2 + y^2 = r^2$; 22. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; 23. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

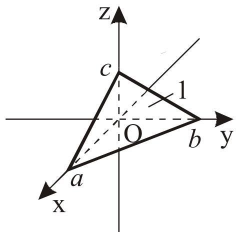


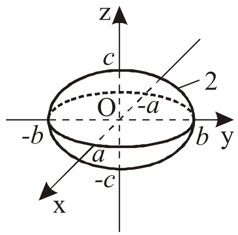


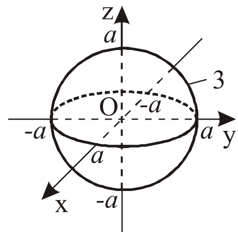
24. $y = arcsin\,x$; 25. $y = arccos\,x$; 26. $y = arctg\,x$;

27. $y = arcctg\,x$.

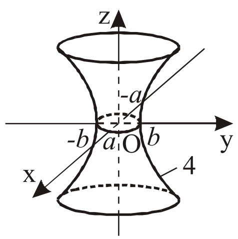
Додаток 2. Поверхні у просторі

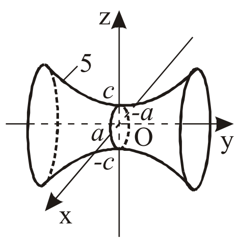


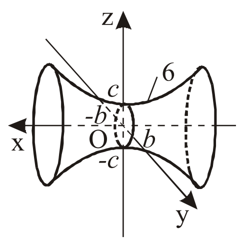




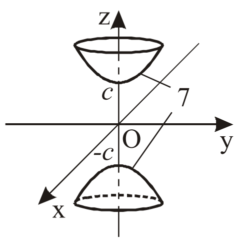
1. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$; 2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; 3. $x^2+y^2+z^2=a^2$.

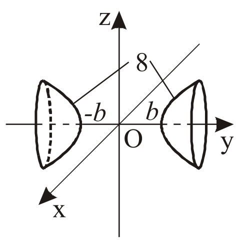


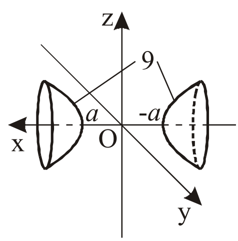




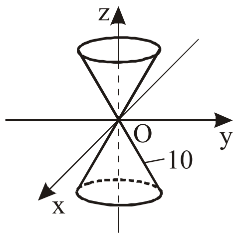
4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$; 5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; 6. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

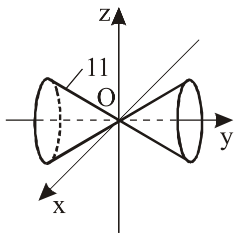


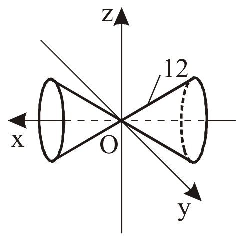




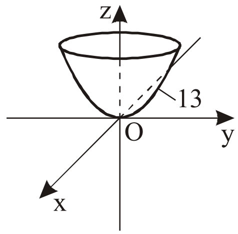
7. $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; 8. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; 9. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

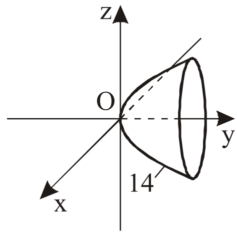


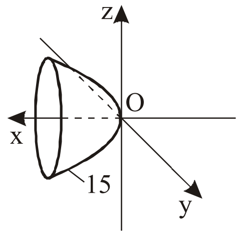




10. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$; 11. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$; 12. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$.

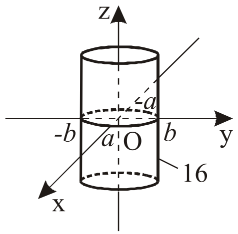


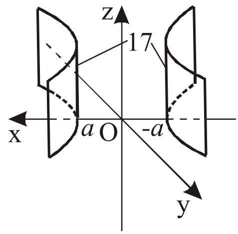


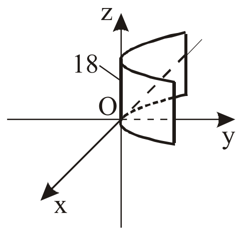


13. $z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}$ $(p>0,\ q>0)$; 14. $y=\frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{q}$ $(p>0,\ q>0)$;

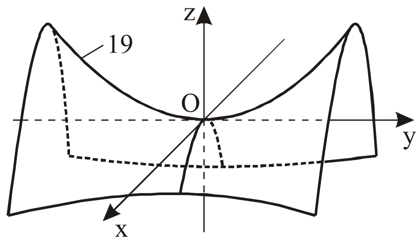
15. $x=\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}$ $(p>0,\ q>0)$.







16. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 17. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; 18. $x^2=2py$ $(p>0)$.



19. $z = -\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q}$ $(p > 0,\ q > 0)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. Ч. 1. – К.: Техніка, 2000.
2. Овчинников П.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. Ч. 2. – К.: Техніка, 2004.
3. Кулініч Г.Л. та ін. Вища математика: Основні розділи: Підручник. Кн.1 − К.: Либідь, 2003.
4. Кулініч Г.Л. та ін. Вища математика: Спеціальні розділи: Підручник. Кн.2 − К.: Либідь, 2003.
5. Рудницький В.Б., Делей В.І. Вища математика. Навч. посібник. Хмельницький: "Поділля". – 1999.
6. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука,1989.
7. Шипачёв В.С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1990.
8. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высш. шк., Ч. 1, 2; 1986.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, III. – М.: Наука,1970.