

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

Механіко-технологічний факультет
Кафедра кібербезпеки та програмного забезпечення

Петренюк В.І.

СТРУКТУРА ГРАФІВ НА ПОВЕРХНЯХ. II

монографія

КРОПИВНИЦЬКИЙ

2024

УДК 519.1

ББК

Рекомендовано Вченою радою Центральноукраїнського національного технічного університету протокол №11 від 09 квітня 2024 року

Рецензент: Волков Ю. І., доктор фізико-математичних наук, професор;

Петренюк В.І.

Структура графів на поверхнях.ІІ :монографія-Кропивницький; 2024.-110 с.

В другій частині монографії розглянуто нові результати автора.

Монографія призначена ддля студентів , які навчаються за спеціальностями 125-Кібербезпека, 123-Комп'ютерні науки, 122-Комп'ютерна інженерія, а також аспірантів, науковців в напрямку 12-Інформаційні технології

© Петренюк В.І., 2024

© Центральноукраїнський національний
технічний університет, 2024

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 4. СТРУКТУРА ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ НА ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА

4.1. ПРО АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ 2-ЗВ'ЯЗНИХ МІНОРІВ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА -----	1
4.2. СТРУКТУРА ПРОЕКТИВНО ПЛОЩИННИХ ПІДГРАФІВ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ЗАДАНОЇ ПОВЕРХНІ-----	4
4.3. ПРО СТРУКТУРУ 9-ТИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ПОВЕРХНІ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА. -----	21

РОЗДІЛ 5. СТРУКТУРИ НА ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА

5.1. ПРО АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ 2-ЗВ'ЯЗНИХ МІНОРІВ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА -----	47
5.2. МОДЕЛІ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА-----	54
5.3. ПЛОЩИННІ ПІДГРАФИ ІЗ ЗАДАНИМИ МЕТРИЧНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА -----	74

РОЗДІЛ 6. ДЕЯКІ ТЕНДЕНЦІЇ ЗАСТОСУВАННЯ.

6.1. ПРО АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ 2-ЗВ'ЯЗНИХ МІНОРІВ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА -----	1
6.2. СТРУКТУРА ПРОЕКТИВНО ПЛОЩИННИХ ПІДГРАФІВ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ЗАДАНОЇ ПОВЕРХНІ-----	4
6.3. ПРО СТРУКТУРУ 9-ТИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ПОВЕРХНІ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА. -----	21

РОЗДІЛ 4. СТРУКТУРА ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ НА ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА

4.1. Про алгоритм побудови 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна

Розглянемо задачу побудови всіх 2-зв'язних графів-обструкцій для N_2 -поверхні Клейна із множинами ребер, кожне з яких є суттєвим відносно неорієнтованого роду 3 при операціях видалення ребра чи стискання його в точку, тобто мінорів неорієнтованого роду 3. В [4] наведено числом 668, як потужність множини всіх неізоморфних 2-зв'язних мінорів неорієнтованого роду 3, але немає їхніх діаграм. Використаємо для побудови діаграм 2-зв'язних мінорів неорієнтованого роду 3 структурні властивості таких графів, виписані в [5,8]. Список всіх неізоморфних мінорів неорієнтованого роду 2 містить 35 графів. В [6] наведено 12 базисних графів проективної площини, утворених перетвореннями методу релятивних компонент, та наведено множину з 63-х базисних графів для поверхні Клейна. Подібна задача побудови графів-обструкцій неорієнтованого роду на основі множини відомих графів-обструкцій для неорієнтованого роду k , має розв'язок для не більш ніж на 10 вершинах [7], а саме, повної множини для проективної площини та неповної для інших поверхонь, зокрема, поверхні Клейна.. Використаємо метод ϕ -перетворень графів та теорему 2 [8].

Твердження 1. Нехай G_i - мінор неорієнтованого роду 2, а граф G поданий як ϕ -образ $\phi(G_i \setminus e + St_n(H), \sum_{j=1}^2 (a_{j1} + g_{j1})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_{i=1}^2)$, де $i=1(1)35$, $G_i \setminus e \in G_i$ - мінор із видаленим ребром e та заданими точками з множини M_i , $M_i = \{a_{j1}, a_{j2}\}$, досяжною на поверхні Клейна. Задано $St_n(H)$ - квазізірку з центром графом H та множиною висячих ребер як сумою підмножин $\{(a_i, g_{j1})\}_{i=1}^m$ та $\{(b_k, g_{j2})\}_{k=m+1}^n$, де $n > m \geq 1$, які висячими вершинами a_i , b_k приклеєно довільним чином до двох точок з множини X , $X = \{g_{j1}, g_{j2}\}$, причому множина точок Y , $Y = \{a_i, b_k\}_{i+k=1}^n$, на евклідовій площині має число досяжності $t_H(Y, S_0)$, де $t_H(Y, S_0) = 2$, а множина X на поверхні Клейна має число досяжності $t_{St_n(H)}(X, N_2)$, де $t_{St_n(H)}(X, N_2) = 1$.

Якщо граф H гомеоморфний одному з графів $\{K_4, K_{2,3}, K_5 \setminus e\}$ та має задану множину точок $X \cup Y$, де $X \cap Y = \emptyset$, досягну на проективній площині, та з числом досяжності $t_G(X \cup Y, S_0)$ відносно евклідової площини S_0 , де $t_G(X \cup Y, S_0) = 2$, то граф G - мінор чи граф-обструкція неорієнтованого роду 3.

Доведення. Граф $G, G = D_{17}$, можливо подати як призму, в основах якої лежать два підграфи ізоморфних K_4 , вершини яких попарно з'єднані ребрами. Множину G^1 ребер графа G розіб'ємо на класи еквівалентності відносно групи автоморфізмів цього графа, тобто підмножини ребер графів обох основ та множина з чотирьох ребер граней. Для кожного представника класу еквівалентності проведемо стискання в точку. Результат наведено на рис. 1. для ребер класу з представником (4,6), на другій карті для (7,8). Згідно цих карт кожна пара вершин цих стиснутих графів лежить або на границі 2-клітки чи псевдоклітки, тобто є досяжною на проєктивній площині. Тому можливо приклеїти до червоних пар квазізірки, з числа наведених на рис.2, ототожнивши з парою неінцидентних вершин графа G . Варіанти склеєних φ -образів графів наведені на рис.3.

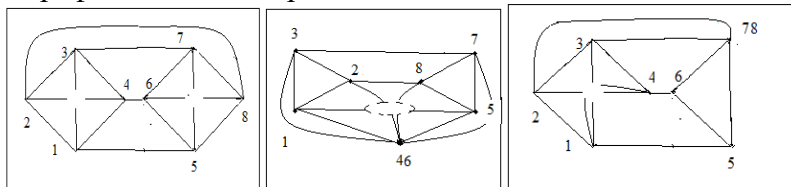


Рис.1. Вкладення D_{17} в N_2 на 1-й карті, на 2-й та на 3-й графі $G_{(4,6)}$, $G_{(7,8)}$ вкладені в N_1 .

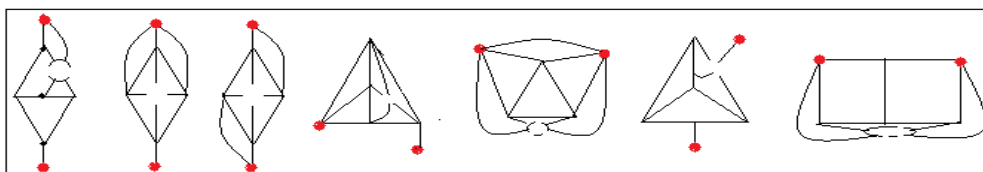
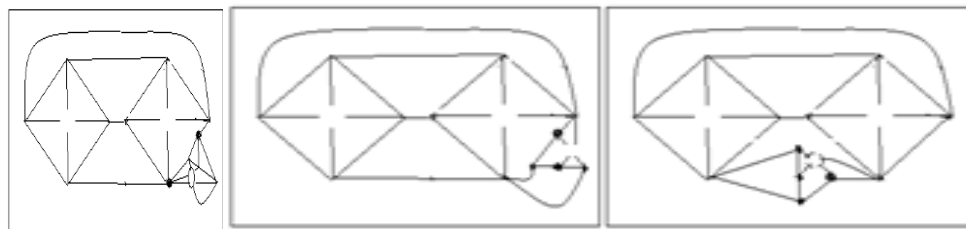


Рис.2. Квазізірки $St_n(H)$ зі склеєними в пару точок підмножинами висячих вершин.

Для побудови 2-зв'язних мінорів для N_2 використаємо множину всіх неізоморфних мінорів проєктивної площини. Нехай $G := D_{17}$. Перебираємо всі різні варіанти склейки по множині з двох точок графа G та пари точок квазізірки із центром H , можливим є ототожднення кількох висячих вершинами в одну чи другу точку пари склейки. Можливими будуть наступні варіанти φ -образу зображені на рис 2, де виділено пару склеєних висячих вершин, які приклеюватимемо до пари вершин графа D_{17} . Відмітимо, що деякі висячі ребра квазізірки $St_n(H)$ стягнуті в точку як несуттєві відносно неорієнтованої поверхні N_2 . Виберемо точки склейки робимо серед тих пар вершин, які є елементами досяжної множини на N_2 . Видалимо одне з ребер (a,b) та приклеїмо попарно до кінцевих вершин видаленого ребра ті вершини квазізірки із центром H та множиною висячих вершин, розбитою на дві підмножини, що утворились при ототожненні цих двох підмножин. Можливими є випадки склейок зображені на рис.2. Доведення твердження 1 закінчене.



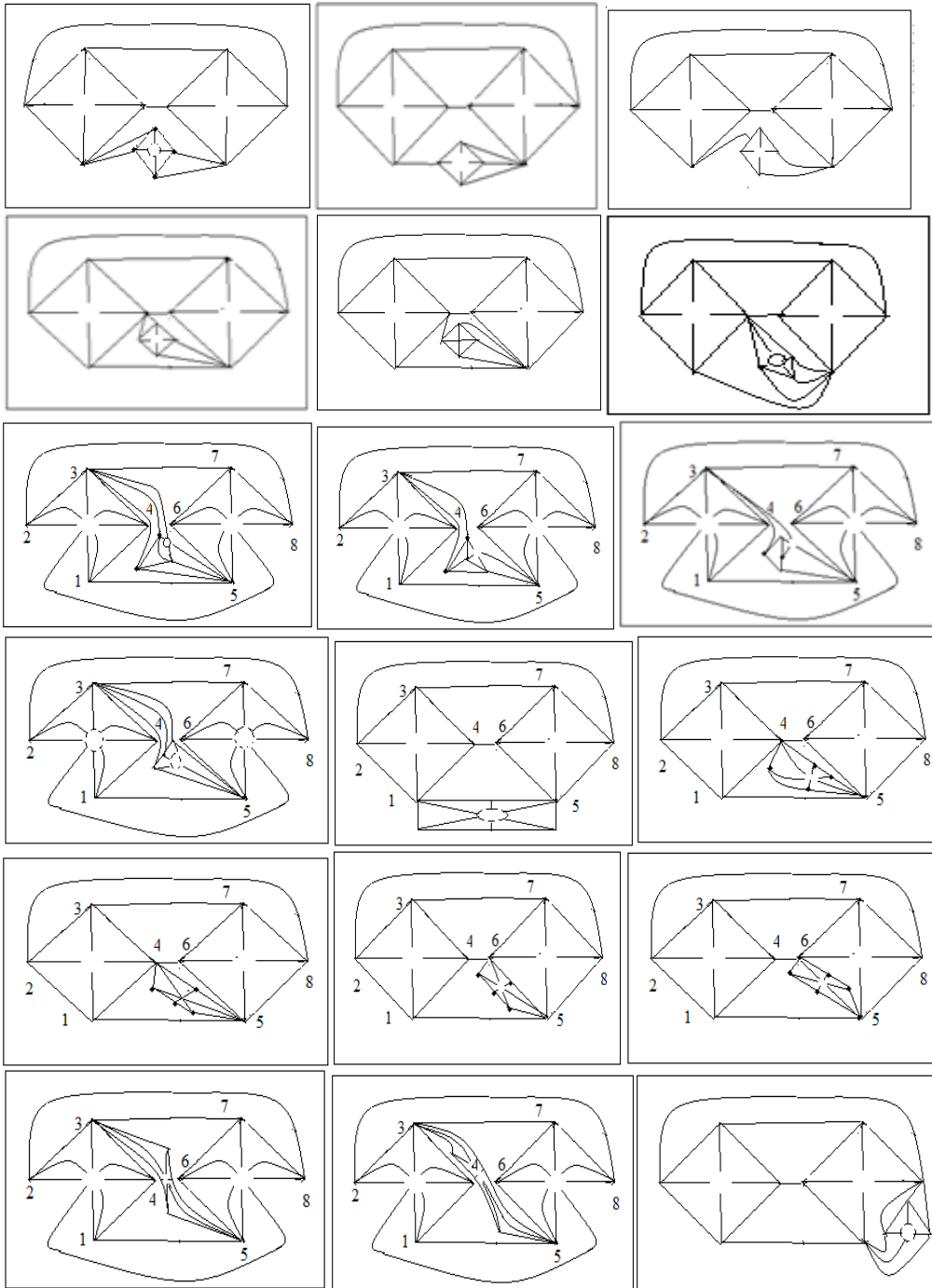


Рис. 3. Діаграми 2-зв'язних мінорів для поверхні Клейна..

Твердження 2. Приблизне число 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна - 700.

Доведення. Кількість зв'язних мінорів для проєктивної площини дорівнює 32. Для вибраного наосліп серед цих графів мінору D_{17} маємо множину з 21-го графа, наведену на рис. 3. Вважатимемо, що для кожного з графів-мінорів проєктивної площини кількість мінорів приблизно однакова. Отже матимемо число 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна приблизно 700. Схематичне доведення закінчене. Твердження 1 є основою лінійного алгоритму 1 яким можливо побудувати всі 2-зв'язні мінори поверхні Клейна.

Алгоритм 1. Вхід: Множина $\{G_i\}_{i=1}^{35}$ із 35-ти мінорів проективної площини, множина всіх неізоморфних вкладень цих графів в поверхню Клейна, $\{St_{n_j}(H_j)\}_{j=1}^7$ множина квазізірок для склеювання по двом парам виділених вершин. Вихід: Множина 2-зв'язних графів-обструкцій $\{\varphi(G_k)\}_{k=1}^R$ неорієнто-ваного роду 3.

Для циклу з параметром i від 1 до 35 виконати наступні дії:

1. $G := G_i$;
2. Побудуємо множину $B = \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{|B|}$ всіх пар вершин графа G , які розташовані на границі 2-клітки поверхні Клейна чи її псевдоклітки та зберігають досяжність в графах, отриманих шляхом видалення довільного ребра чи стискання ребра в точку.
3. Для циклу з параметром k від 1 до $|B|$ виконати наступні дії:
4. $(a, b) := \{a_k, b_k\}$;
5. Для циклу з параметром j від 1 до 7 виконати наступні дії:
 - a. $St_n(H) := St_{n_j}(H_j)$;
 - b. Склеїмо попарно $(G, (a, b))$ та $(St_n(H), (a', b'))$;
 - c. Отримаємо пару $\varphi(G), (a^*, b^*)$;
 - d. Виводимо $\varphi(G)$;
 - e. Кінець циклу по j .
6. Кінець циклу по k
7. Кінець циклу по i .
8. Кінець алгоритму 1

Висновки. Таким чином наведена побудова лінійного побудови діаграм 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна.

Література

- [1] Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ АНУ. Киев.. – 1973. -383 с.
- [2] Хоменко М. П. φ -перетворення графів. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1970. -299 с.
- [3] Mohar B., Thomassen C. Graphs on Surfaces. Johns Hopkins University Press, 2001. – 412 p.
- [4] P.Skoda. Obstructions for embedding graphs into surfaces, Simon Fraser University, PhD dissertation, 2012.-133 p.
- [5] Петренко В.І. Про структуру площинних підграфів графів-обструкцій неорієнтованої поверхні заданого роду. Фізико математичне моделювання та інформаційні технології. 2021, № 33. с. 105–109.
- [6] [Anna Flotto. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, University Bielefeld, 2010. -174 pp.](#)
- [7] Hur S. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Phd, Ohio State University, 2008. http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1209141894.
- [8] Петренко В.І., Петренко Д.А., Оришака О.В. Структура проективно площинних підграфів графів - обструкцій заданої поверхні. Кібернетика та комп'ютерні технології, №2, Інститут кібернетики НАНУ, Київ, 2022, с.13-30. http://cctech.org.ua/images/docs/Articles/2022/paper_22_2_2.pdf

4.2. Структура проєктивно площинних підграфів графів-обструкцій заданої поверхні

Розглянемо *задачу* вивчення метричних властивостей підграфа $G \setminus v$, де v довільна вершина графа-обструкцій G неорієнтованого роду k , $k \geq 1$, які визначатимуть множини точок приєднання одного підграфа до іншого і дозволятиме будувати прототипи графів-обструкцій із числом вершин більшим 10 неорієнтованого роду більшого ніж k . Певним чином з цією задачею пов'язана гіпотеза Ердьоша [3] про покриття графів-обструкцій неорієнтованої поверхні роду k , де $k \geq 1$, найменшою за включенням множиною із $k + 1$ -го графа гомеоморфного $K_{3,3}$, або K_5 . В [4] гіпотеза конструктивно доведена для 35-ти мінорів графів-обструкцій проєктивної площини N_1 , множини 62-х із не більшим ніж 10-ма вершинами графів-обструкцій та їхніх розщеплень для поверхні Клейна N_2 , а також деяких графів-обструкцій для поверхонь N_3 та N_4 . В роботі [5] доведено існування скінченної множини графів-обструкцій для неорієнтованої поверхні. Подібна задача розглядалася в [6], де розглядалися моделі-прототипи графів-обструкцій. Прототипом графа-обструкції неорієнтованого роду k , будемо називати граф, що мають власним підграфом граф-обструкцію неорієнтованого роду k , $k \geq 1$. В роботах [7, 8] розглядалась дотична задача покриття множини вершин найменшою кількістю циклів-границь 2-кліток, поняття кліткової відстані наведено в [9, 10]. Тут досліджено граничні межі орієнтованого роду графів, утворених з площинних графів і простої зірки, приклеєної до деяких його вершин. Гіпотетично можливо їх отримати шляхом рекурсивного φ -перетворення графа-обструкції проєктивної площини та копії його площинного підграфа, заданого на вершинах, ребрах чи частинах ребер, або простих ланцюгах, тобто досяжним частинам так званого графа-основи (графа гомеоморфного графу Куратовського і вкладеного в проєктивну площину). Вважатимемо, що замість одного підграфа може бути кілька копій підграфів графів-обструкцій проєктивної площини.

Нехай задано мінімальне вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$, тобто це найменша по включенню підмножина $\{s_i\}_{i=1}^t$ множини $S_G(N, f)$, $S_G(N, f) = N \setminus f(G)$, складена з кліток на границях яких розташовано точки з множини M . Кожен граф G неорієнтованого роду k , $k \geq 1$, може бути поданим наступним перетворенням: $\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=1}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, як φ -образ графа H та зірки $St_n(g_0)$, приєднаної висячими вершинами g_i до точок a_i , де задана множина M точок графа H , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, $M \subseteq (\partial s_1 \cup \partial s_2) \cap H^0$, яка розміщується на границях кліток s_1, s_2, \dots, s_t множини $N \setminus f'(H)$, де $t \geq 2$, $m \geq 2$, $i = 1, 2, \dots, m$, мінімальним вкладенням f' , $f': H \rightarrow N'$.

Аналогічно характеристикам вкладення графа до орієнтованої поверхні на підмножині $\{s_i, s_j, s_k\}$ множині $S_G(N, f)$, визначимо характеристику θ , $\theta = 1$, множини M коли виконується умова $\partial s_i \cap \partial s_j \cap \partial s_k \neq \emptyset$, тобто є, щонайменше, одна спільна точка на їхніх границях, яка є центром кліткової зірки, утвореної із трьох кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$, або визначено характеристику $\partial \theta$, $\partial \theta = 1$, якщо довільні пари цих кліток мають на границях, мінімум, одну спільну точку, тобто утворюють клітковий цикл довжини 3, утворених із трьох кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$.

Позначення 1. Позначатимемо $\angle(s_i, s_j)$ та називатимемо кутом між клітками чи псевдоклітками s_i, s_j множини $S_G(N, f)$ найменшу по включенню зірку графа G з центром в a , $a \in G^0 \cap (\partial s_i \cap \partial s_j)$, із множиною ребер-променів, розташованих з одного боку щодо точки перетину границь кліток s_i, s_j . Саме ці ребра чи їхні частини вкладатимемо до ленти Мебіуса, приклеєної до площини, для утворення псевдоклітки, на границі якої розміщуються об'єднаня границь s_i, s_j . На 4-й та 5-й картах рис. 1 показано кут між пофарбованими 2-клітками та вкладення його на ленту Мебіуса, приклеєну до елементарного диска поверхні N .

Позначення 2. Нехай задане мінімальне вкладення f графа H до неорієнтованої поверхні N . Позначатимемо $\alpha(\angle(s_1, s_2))$ операцію перетворення ребер e_1, e_2 , $f(e_1) \subset \partial s_1, f(e_2) \subset \partial s_2$, зі спільною вершиною a кліток s_1, s_2 , де $f(e_1) \cup f(e_2) \subseteq \partial s_{12}$, причому вкладення f графа H в N розміщує на границях кліток s_1, s_2 множину $f(M)$, $f(M) = f(\{a_i\}_{i=1}^m)$.

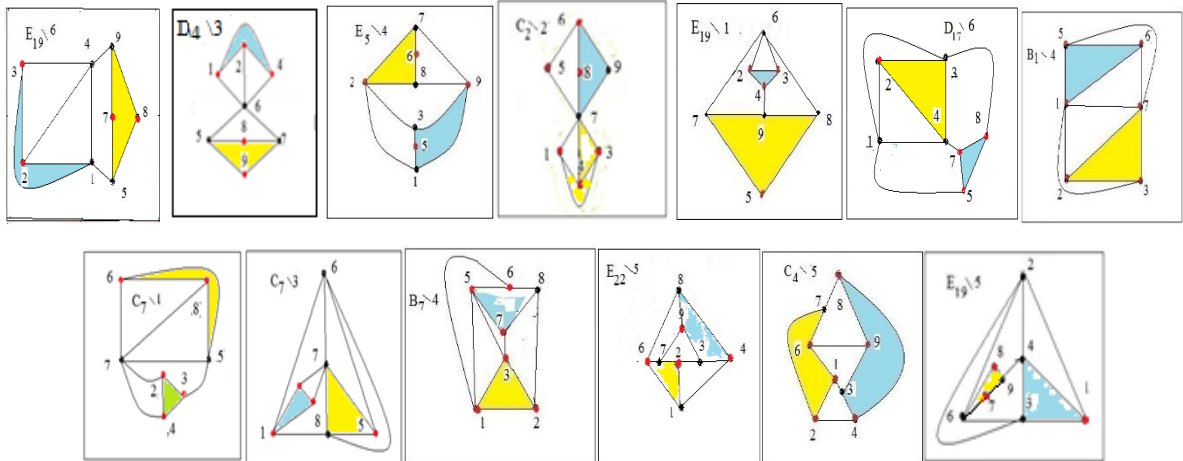


Рис. 1. Площинні підграфи проєктивних мінорів із множиною M з червоних вершин на границях зафарбованих кліток з числом досяжності 2 та клітковою відстанню 2 між двома виділеними кольором клітками-гранями на границях яких розташовані підмножини множини M

Наведемо алгоритм 1 який за поліноміальний час видає вкладення f вхідного графа G до поверхні N' неорієнтованого роду $\gamma(N')$, де має місце нерівність $\gamma(N') \geq \gamma(G) + 1$, а множина $N' \setminus f(G)$ містить тільки 2-клітки та псевдоклітки.

Алгоритм 1

Вхід: подано скінчений граф G неорієнтованого роду k , $k \geq 1$, як ϕ -образ графа H та зірки

$St_n(g_0)$, наступним перетворенням: $\phi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, тобто висячі

вершини g_i зірки $St_n(g_0)$ приєднано до точок a_i з множини точок M графа H , де $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, яка мінімальним вкладенням $f', f': H \rightarrow N'$ розміщується на границях кліток s_1, s_2, \dots, s_t множини $N' \setminus f'(H)$, де $t \geq 2$, $i = 1, 2, \dots, m$, $m \geq 2$. Нехай задане мінімальне вкладення f графа

H до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_H(M, N) = t$, множини точок M .

Функція A (вхідні клітки s_1, s_2 ; вихідна клітка s). Виконується операція $\alpha(\angle(s_1, s_2))$ перетворення ребер $e_1, e_2, f(e_1) \subset \partial s_1, f(e_2) \subset \partial s_2$, зі спільною вершиною a кліток s_1, s_{12}, s_2 , де $f(e_1) \cup f(e_2) \subseteq \partial s_{12}$, причому вкладення f графа H в N розміщує на границях кліток s_1, s_2 множину $f(M)$, $f(M) = f(\{a_i\}_{i=1}^m)$. Приклеїмо до клітки s_{12} ленту Мебіуса наступним чином. Розщепимо довільну внутрішню точку $f(x_i)$ ребра e_i , $e_i = (a_i, b_i)$ на точки x_i', x_i'' , де $i = 1, 2$. Виріжемо в середині s_{12} елементарний диск з центром в x_i та розташуємо на його границі діаметрально протилежні пари точок (x_1', x_2'') , (x_1'', x_2') як кінцеві точки частин перехрещених ребер на площині елементарного диска. Отримаємо таким чином псевдоклітку s неорієнтованої поверхні N' , де $\gamma(N') = \gamma(N) + 1$, $\partial s = \partial s_1 \cup \partial s_2$, в яку можливо вкласти ту частину зірки $f'(St_n(g_0))$, яка приклеєна до точок множини $f(M) \cap \partial s$ і таким чином матимемо вкладення графа G в поверхню N' .

Вихід: Множина R кліток чи псевдокліток неорієнтованої поверхні N' , $\gamma(N') \geq \gamma(G) + 1$, границі яких не перетинаються, а на їхніх границях розташовані всі точки множин M .

Початкові значення: $S := \{s_i\}_{i=1}^l$; $\partial S := \{\partial s_i\}_{i=1}^l$; $R := \emptyset$.

Для параметра i , що міняється від 1 до $|S|$ кроком 1 виконати циклічні дії.

Виберемо клітку s_1 , $s_1 \in S$.

Для параметра j , що міняється від $i+1$ до $|S|$ кроком 1 виконати циклічні дії.

Виберемо клітку s_j , $s_j \in S$;

Якщо $\partial s_j \cap \partial s_1 \neq \emptyset$ то виконати:

початок дій;

$s := A(s_1, s_j)$.

Перенумеруємо елементи множини $S := S \setminus \{s_1, s_j\} \cup s$;

$R := R \cup \{s\}$.

Перейти на мітку Крок_1.

кінець дій;

Крок_2: Кінець циклу по j .

Крок_1: Кінець циклу по i .

Кінець алгоритма 1.

Твердження 1. Алгоритм 1 для зв'язного графа G неорієнтованого роду $\gamma(G)$ на n вершинах та q ребрах із заданою множиною точок з числом досяжності t за поліноміальний час

$O(|S|^2)$, $|S| = 2 - \gamma(G) - n + q$, коректно буде множини ізольованих кліток вкладення графа до неорієнтованої поверхні, де $1 \leq t \leq |S|$.

Шляхом застосування наведеного алгоритму можливо довести наступні леми 1 та 2.

Лема 1. Мають місце наступні твердження.

1. Дві зірки, що перетинаються по внутрішнім точкам висячих ребер на площині елементарного диску, можливо вкласти без перетину у внутрішніх точках до елементарного диску площини із приклеєною до нього лентою Мебіуса.
2. Якщо ребро e перетинає ребра трикутника K_3 , розташованого на площині елементарного диска, то *справедливі* наступні твердження:
 - а) ребра графа K_4 можливо вкласти на ленті Мебіуса, приклеєній до елементарного диска так, щоб вкладалися без перетину на ленті Мебіуса пара ребер, схрещених на евклідовій площині, та одне з двох паралельних ребер;
 - б) якщо ребро e перетинає ребро, що є основою трикутника, то на приклеєну ленту Мебіуса можливо, або вкласти ребро e чи всі ребра трикутника;
 - в) якщо ребро e не перетинає інше ребро, що є основою трикутника, то можливо вкласти на приклеєну ленту Мебіуса ребро e та два суміжних з ним ребра трикутника, а ребро, що є основою трикутника – не вкладається на ленту Мебіуса.

Лема 2. Нехай на множині $S_G(N, f)$ задано множини з кліткових зірок із, мінімум, двома клітками-променями із спільною точкою – центром зірки та кліткових циклів довжиною не менше 3. Мають місце наступні співвідношення.

1. Нехай задано кліткову зірку чи клітковий цикл довжини 3. Для утворення однієї кітки, яка б містила на своїй границі об'єднання границь кліток зірки чи клітковий цикл довжини 3, необхідно приклеїти дві ленти Мебіуса до поверхні N .
2. Пара кліток зі спільною вершиною на границях перетворюється на одну псевдоклітку, яка містить на границі об'єднання двох границь шляхом приклеювання ленти Мебіуса;
3. Шляхом приклеювання ленти Мебіуса до місця вкладення спільної вершини кожної пари кліток з множини $S_G(N, f)$ неорієнтованої поверхні N можливо утворити поверхню N' роду $\gamma(N')$, де $\gamma(N') = \gamma(N) + \kappa$, на якій множина M є досяжною, тобто виконується рівність $t_G(M, N') = 1$, де κ – число всіх можливих кутів, які утворені під час перетворень кожної пари кліток з множини $S_G(N, f)$ чи множини новоутворених псевдокліток, що мають спільні точки на своїх границях.

Визначення 1. Нехай задано мінімальне вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$. Будемо називати клітковою довжиною $d_G(s_i, s_j, f)$ між границями кліток s_i, s_j із заданими на них підмножинами L_i, L_j вершин зв'язного графа G , де $L_i \subseteq G^0 \cap \partial s_i$, $L_j \subseteq G^0 \cap \partial s_j$, $\{s_i, s_j\} \subset S_G(N, f)$, потужність $|J|$ найменшої по включенню впорядкованої множини J , $J = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+k}, s_j\}$, $J \subseteq S_G(N, f)$, де послідовні пари кліток мають на своїх границях, мінімум одне, спільне ребро. Причому підмножину множини J , складену із не менше ніж двох послідовних кліток зі спільною

вершиною на границях, будемо рахувати як одну клітку. Також будемо вважати, що на множині J задано особливий простий клітковий ланцюг L_{ij} , $L_{ij} = L(s_i, s_j)$, який з'єднує клітки s_i, s_j кліткового графа для графа G . У випадку незв'язного графа G одна з кліток множини J буде не 2-кліткою і не псевдокліткою.

Визначення 2. Будемо позначати T , $T = T_G(M, N)$, та називати деревом досяжності множини точок M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, зв'язного графа G , при заданому мінімальному вкладенні f графа G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$, пару множин $(\{s_i\}_1^t, \{L_{ij}\})$, де $\{L_{ij}\}$ – найменша по включенню множина особливих кліткових ланцюгів $L(s_i, s_j)$ що, або безпосередньо, або як об'єднання кількох послідовних ланцюгів зі спільним кінцем одного та початком іншого, що з'єднують всі пари кліток s_i, s_j та мають найменшу суму довжин взяту по всім L_{ij} із множини $\{L_{ij}\}$.

Визначення 3. Для множини точок M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, площинного графа G з числом досяжності $t_G(M, \Sigma_0)$, де $t_G(M, \Sigma_0) = t$, $t \geq 2$, будемо називати клітковою довжиною $d_G(M, t)$, де $d_G(M, t) = \min_{\forall f \in fGN \forall s_i, s_j \in T} \sum d_G(s_i, s_j, f)$, між підмножинами L_i, L_j множини M , $M = L_i \cup L_j$, $L_i \cap L_j = \emptyset$, розташованими на границях довільних кліток s_i, s_j , $\{s_i, s_j\} \subset S_G(\Sigma_0, f)$, що реалізують число досяжності $t_G(M, \Sigma_0)$, де fGN – множина всіх неізоморфних вкладень графа G до Σ_0 , що реалізують число досяжності $t_G(M, \Sigma_0)$ множини точок M .

Визначення 4. Будемо називати множини M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, точок графа G з числом досяжності t , де $t_G(M, \Sigma_0) = t$, критичною відносно кліткової довжини $d_G(M)$ при операції видалення довільного елемента a_i , якщо має місце нерівність $d_G(M \setminus a_i) < d_G(M)$, чи відносно операції стискання ребра $u = (ab)$ в точку a' (якщо $\{a, b\} \subset M$, то замість M розглядатимемо множину $M' = (M \setminus \{a, b\}) \cup \{a'\}$), якщо має місце нерівність $d_{G_u}(M') < d_G(M)$.

Визначення 5. Будемо називати граф G мінімальним відносно $d_G(M)$ при операції видалення або стискання у точку довільного ребра u , якщо, або $d_{G \setminus u}(M) + 1 = d_G(M)$, $d_{G_u}(M') < d_G(M)$, де G_u - граф зі стиснутим у точку a' ребром $u = (a, b)$ та $M' = (M \setminus \{a, b\}) \cup \{a'\}$.

Твердження 2. Кожен граф G неорієнтованого роду k , $k \geq 1$, поданий перетворенням:

$$\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m),$$

як φ -образ площинного графа H та зірки $St_n(g_0)$, приєднаної висячими вершинами g_i до точок a_i , де M – задана множина точок графа H ,

$M = \{a_i\}_{i=1}^m$, $M \subseteq (\partial s_1 \cup \partial s_2) \cap H^0$, яка розміщується на границях кліток s_1, s_2, \dots, s_t множини $\Sigma_0 \setminus f(H)$, де $t \geq 2$, $m \geq 2$, $i = 1, 2, \dots, m$, мінімальним вкладенням f , $f: H \rightarrow \Sigma_0$, та задовольняє наступним співвідношенням.

1. Якщо $t_H(M, \Sigma_0) = 2$, $k \geq 2$, то $d_H(M) = k - 1$.

2. Якщо $t_H(M, \Sigma_0) = 3$, $\theta_H(M, \Sigma_0) = 1$, $k = 2$, то $d_H(M) = 1$.

3. Серед ребер підграфа H можуть бути несуттєві відносно числа досяжності заданої множини точок чи кліткової відстані цієї ж множини при видаленні ребра, чи стисканні ребра у точку.

Доведемо співвідношення 1. Нехай граф G неорієнтованого роду k , $k = 2$, ϕ -образ наступного перетворення: $\phi(H + St_n(g_0), \sum_{i=1}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, тобто до площинного графа H приєднано зірку $St_n(g_0)$ шляхом отождоження пар (a_i, g_i) , утворених точками a_i графа H , та висячими вершинами g_i , де $i = 1, 2, \dots, m$. Будемо вважати, що M – задана множина точок графа H має число досяжності 2, де $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, тобто мінімальним вкладенням f графа H до евклідової площини Σ_0 розміщується на границях двох кліток s_1, s_2 , де $\{s_i\}_1^2 \subseteq \Sigma_0 \setminus f(H)$. Оскільки $t_H(M, \Sigma_0) = 2$, то існує клітковий ланцюг між клітками s_1, s_2 довжиною d , $d \geq 1$. Розглянемо два вичерпні випадки.

1. Припустимо, що існують ребра e_1, e_2 , такі, що $f(e_1) \subset \partial s_1, f(e_2) \subset \partial s_2$, зі спільною вершиною a . Видалимо з цих ребер частини e_1', e_2' , де $e_1' \cap e_2' \cap G^0 = a$, та розщепимо вершину a на дві вершини a', a'' , які є центрами двох зірок $St_G(a'), St_G(a'')$, одна з яких містить $f(e_1' \cup e_2' \setminus \{a\}) \cup \{a'\}$ та розглянемо нову клітку s , яка утворилася з двох кліток s_1, s_2 при розщепленні вершини a та має границю ∂s , де $\partial s = \partial s_1 \cup \partial s_2$. До клітки s приклеїмо ленту Мебіуса L на яку розмістимо вкладенням f' зірку $St_G(a')$, $f'(St_G(a')) \subset L$, тобто перехрестимо висячі ребра зірки e_1', e_2' , e_1, e_2 та отождожнимо вершини a', a'' у вершину a . Побудуємо вкладення $f', f': H \rightarrow N_1$, де $f'|_{H \setminus St_H^1(a'')} = f|_{H \setminus St_H^1(a'')}$, $f'|_{St_H^1(a'')} = f|_{St_H^1(a'')}$, яке робить множину M досяжною на проективній площині, що дозволяє продовжити f' до вкладення у клітку s образу зірки $f'(St_n(g_0))$. Тим самим отримаємо, що неорієнтовний рід $\gamma(G) = 1$. Припущення неправильне. Випадок 1 неможливий.

2. Вважатимемо, що немає ребер e_1, e_2 , $f(e_1) \subset \partial s_1, f(e_2) \subset \partial s_2$, зі спільною вершиною a , але є клітковий ланцюг L , $L = L_{f(G)}(s_1, s_2)$ довжиною не менше 1, який містить щонайменше три клітки s_1, s_{12}, s_2 , де $f(e_1) \cup f(e_2) \subseteq \partial s_{12}$, причому вкладення f графа H в Σ_0 , розміщує на границях кліток s_1, s_2 множину $f(M)$, $f(M) = f(\{a_i\}_{i=1}^m)$. Приклеїмо до кліток s_1, s_{12}, s_2 евклідової площини дві ленти Мебіуса наступним чином. Розщепимо внутрішню точку $f(x_i)$ ребра e_i , $e_i = (a_i, b_i)$ на точки x_i', x_i'' , де $i = 1, 2$. Виріжемо на Σ_0 елементарний диск з центром в x_i та розташуємо на його границі діаметрально протилежні точки x_i', x_i'' як кінцеві точки частин ребра e_i . Отримаємо клітку s поверхні N_2 , де $\partial s = \partial s_1 \cup \partial s_{12} \cup \partial s_2$, в яку можливо вкласти зірку $f'(St_n(g_0))$ і таким чином отримати мінімальне вкладення графа G у поверхню N_2 , тобто $\gamma(G) = 2$. Тоді матимемо рівність $d_H(M) = k - 1$, що й треба довести. Доведення співвідношення 1 закінчене.

Доведення співвідношення 2 для $k > 2$ аналогічне наведеному для співвідношення 1.

Співвідношення 3 матиме схематичне доведення. На рис.2 наведені всі неізоморфні площинні підграфи непроективних мінорів, що є мінімальним відносно видалення ребер чи стискання їх у точку, як відносно кліткової відстані 2, так і числа досяжності 2 заданих множин червоних вершин, які приєднуються попарно до кінцевих точок ребер простих зірок.

Доведення твердження 2 закінчене.

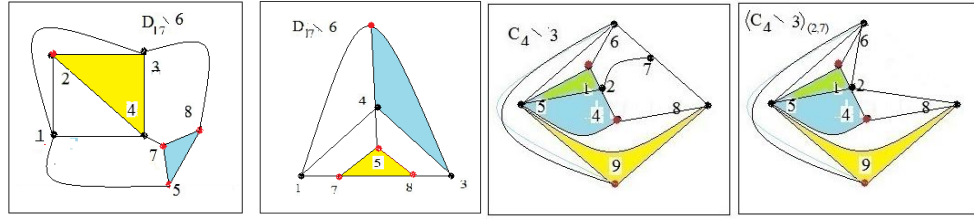


Рис. 2. Підграфи мінорів проективної площини D_{17} та C_4 як приклад до твердження 2, де ребро $(1,3)$ є несуттєвим при видаленні відносно числа досяжності 2 та клітковою відстанню $d_H(M) = 2$, де $M = \{2,5,7,8\}$ підграф $C_4 \setminus 3$ має несуттєве ребро $(2,7)$ при операції стискання у точку відносно відстані між двома довільними клітками множини кліток, яка реалізує число досяжності множини $\{1,4,8,9\}$ точок графа $C_4 \setminus 3$

Теорема 1. Нехай граф G має площинний підграф H , $H = G \setminus v$, v – вершина графа G подано -го як φ -образ $\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, де $v := g_0$, а підграф H – мінімальний відносно $d_H(M)$, $d_H(M) = k$, при операціях видалення чи стискання у точку довільного його ребра, а множина M мінімальна щодо $d_H(M)$, $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, $t_H(M, \Sigma_0) = t$, $\theta_H(M, \Sigma_0) = \theta$, $\partial\theta_H(M, \Sigma_0) = \partial\theta$, $\theta \geq 0$, $\partial\theta \geq 0$, $m \geq k \geq 1$. Граф G або його підграф є граф-обструкцією неорієнтованого роду $\gamma(G)$, де $\gamma(G) \leq k + 1$, якщо має місце одна з наступних умов:

- 1) $t = 2$;
- 2) $((t = 3) \wedge ((\theta = 1) \vee (\partial\theta = 1)))$.

Доведення при умові 1 випливає з твердження 2 та полягає в побудові вкладення графа G в евклідову площину із приклеєними $k + 1$ лентами Мебіуса, на яких розміщено по одному спільному ребру сусідніх границь кліткового ланцюга. Нехай граф G неорієнтованого роду подано як φ -образ $\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$ та виконуються умови теореми 1.

Оскільки за визначенням граф G є граф-обструкцією неорієнтованого роду $\gamma(G)$ тоді й тільки тоді, коли кожне ребро u графа G є суттєвим відносно роду як при операції видалення, так і при стисканні в точку. Якщо ребро u , $u \in G^1$, матиме прообраз u' , де $u' \in H^1$, то видалення чи стискання у точку ребра u призводить до таких самих дій над u' . Оскільки площинний граф H мінімальний відносно $d_H(M)$ при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра, то існуватиме клітковий ланцюг $L(s_1, s_2)$, що з'єднуватиме клітки s_1 та s_2 , на границях яких розташовується множина M , та матиме довжину d , $d = d_H(M) - 1$. Стискання у точку ребра u призводить до таких самих дій над u' . Якщо ребро u , $u \in G^1$, матиме прообраз u' , де $u' = (a_1, g_0)$, $u' \in St_n(g_0)^1$, то видалення ребра u означитиме видалення з множини M кінцевої вершини a_1 , що за умови критичності множини M відносно $d_H(M)$, матимемо нерівність $d_G(M \setminus a_1) < d_G(M)$. Стискання у точку ребра u призводить до стискання у точку a_0 ребра u' і означитиме подання графа G_u як φ -образу графа H' та $St_m(a_0)$, де $H' \subset H$.

Використаємо метод індукції по d . База індукції $d = 1$. Побудуємо, згідно леми 1, вкладення f графа H в поверхню N_2 , тоді має місце нерівність $\gamma(G \setminus u) \leq 2$ та при цьому вкладенні f множина M буде досяжною на поверхні N_2 . Аналогічно для бази індукції $d = 2$ матимемо

доведену теорему 1. Зробимо індукційний крок від $d = k - 1$ до $d = k$, $k > 2$. У випадку, коли $d = k$, де $d_H(M) = k + 1$, матимемо, щонайбільше, $k + 1$ ленту Мебіуса приклеєну до кліток ланцюга $L(s_1, s_2)$ так, щоб на кожній розмістити $k + 1$ ребро графа H , які належать границям послідовних пар кліток ланцюга $L(s_1, s_2)$. Тоді матимемо нерівність $\gamma(G) \leq k + 1$. Доведемо методом від протилежного, що граф G – граф-обструкція неорієнтованого роду $\gamma(G)$. Припустимо, що ребро u , $u \in G^1$, є несуттєвим відносно $d_H(M) = k + 1$ при операції видалення. Оскільки підграф H є мінімальним відносно $d_H(M)$ при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра, то $u \in H^1$. Із визначення 3 випливатиме, що кожне ребро графа H є спільним для границь двох послідовних кліток деякого кліткового ланцюга $L(s_1, s_2)$ довжини k , тому підграф $H \setminus u$ матиме клітковий ланцюг L' довжини $k - 1$, утворений з ланцюга $L(s_1, s_2)$ довжини k шляхом видалення ребра u на спільній границі двох кліток. Видалимо у графі $H \setminus u$ всі несуттєві ребра відносно $d_{H \setminus u}(M)$, де $d_{H \setminus u}(M) = k - 1$, при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра. Отримаємо підграф H' із заданою множиною вершин M з числом досяжності 2 та відстанню $k - 1$ між двома підмножинами M , є мінімальним відносно $d_H(M)$ при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра. Тоді за індукційним припущенням матимемо граф-обструкцію G' , неорієнтованого роду $\gamma(G')$, де $\gamma(G') \leq k$, якщо виконаємо ϕ -перетворення графа H' та $St_m(g_0)$, задане наступним чином: $\phi : (H' + St_m(g_0), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G', \{a_j^*\}_1^m)$,

де $St_m(g_0)$ – квазізірка з центром у вершині g_0 та m ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини X_2 , X_1 підмножина множини точок графа H , $X_1 = \{x_{1j}\}_1^m$, матиме число досяжності t_1 та характеристики $\theta_1, \partial\theta_1$, то $\gamma(G') \leq 0 + 2 - 1 - (\theta_1 + \partial\theta_2) + k4 - st$. Зауважимо, що в нашому випадку $\theta_1 + \partial\theta_2 = 0$ і $k4 - st = 0$, де $k4 - st$ – число додаткових 2-ручок приклеєних до клітки s з множини $N_r \setminus f(H)$ при вкладенні $f : H \rightarrow N_r$, $r = 2 - 1 - (\theta_1 + \partial\theta_1)$, із st – стороннім доступом до тих точок приєднання на границі ∂s клітки s (до якої приклеєно r штук 2-ручок і вкладено квазізірку), що при ототожненні пар точок приєднання (x_{1j}, x_{2j}) породжують $k4$ різних підграфів гомеоморфних K_4 , чи $K_{2,3}$. Доведення для умови 1 завершено.

Доведення Теорема 1 для умови 2. Доведення впливає з твердження 2 та побудови вкладення графа G в евклідову площину із приклеєними, мінімально, двома лентами Мебіуса, на яких розміщено, щонайменше, по одному спільному ребру з тих двох, що мають спільну точку та належать границям суміжних кліток трьохкліткової зірки для випадку $\theta = 1$, чи по два суміжних ребра, що належать границям суміжних кліток кліткового простого циклу довжини 3 для випадку $\partial\theta = 1$.

Нехай $k = 2$ і виконується умова $((t = 3) \wedge ((\theta = 1) \vee (\partial\theta = 1)))$. Це означатиме, є три клітки s_1, s_2, s_3 з множини $\Sigma_0 \setminus f(H)$, які на своїх границях містять множину заданих точок M , де $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, та з яких утворено, або зірку, або трикутник. Розглянемо випадок, коли границі кліток s_1, s_2, s_3 містять мінімум одну спільну вершину a графа G . Позначимо $St_{n_j}(a)$ зірку, що розміщена між границями кліток s_i, s_j , де $n_{ij} = n_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$, та розглянемо дві з них $St_{n_{12}}(a)$, $St_{n_{23}}(a)$ та вважатимемо, що $n_{12} \geq n_{23} \geq 1$. На кожному ребрі (a, g_r) зірки $St_{n_{12}}(a)$ чи $St_{n_{23}}(a)$

виберемо внутрішню точку x та розщепимо її на дві вершини x' , x'' , утворюючи два нових ребра, (a, x') , (x'', g_r) з одного висячого ребра (a, g_r) . Переставимо кінцеві вершини висячих ребер (a, x') з спільною вершиною a в оберненому порядку слідування (перше з останнім, друге з передостаннім, і так далі) та розмістимо ці переставлені вершини на границі елементарного диску D_1 , вирізаному в площині біля розщеплених точок ребер, утворюючи пари (x', x'') діаметрально протилежних точок на границі елементарного диску D_1 , які попарно отождоимо в точку x ребра (a, g_r) зірки $St_{n_{12}}(a)$. Виконавши такі операції для кожного ребра (a, g_r) , побудуємо вкладення f' , $f': H \rightarrow N_1$, шляхом розміщення всіх ребер (a, g_r) зірки $St_{n_{12}}(a)$ на ленті Мебіуса, як продовження вкладення f , причому замість кліток s_1, s_2 буде клітка s_{12} , де $\partial s_{12} = \partial s_2 \cup \partial s_1$. Для зірки $St_{n_{23}}(a)$ аналогічні дії потрібні для побудови вкладення f'' , де $f'': H \rightarrow N_2$, як продовження вкладення f' , тільки замість s_1, s_2 буде s_{12} , а замість кліток s_{12}, s_3 буде клітка s_{123} , де $\partial s_{123} = \partial s_{12} \cup \partial s_3$, $f''(M) \subset \partial s_{123}$. Продовжимо вкладення f'' до вкладення f''' , де $f''': G \rightarrow N_2$, шляхом вкладення зірки $St_n(g_0)$ до клітки s_{123} . Тоді матиме місце нерівність $\gamma(G) \leq 2$. Доведення при умові 2 закінчено. Приклади площинні підграфи проективних мінорів із заданими трьома підмножинами множини наведені на рис. 3. Доведення теореми 1 закінчено.

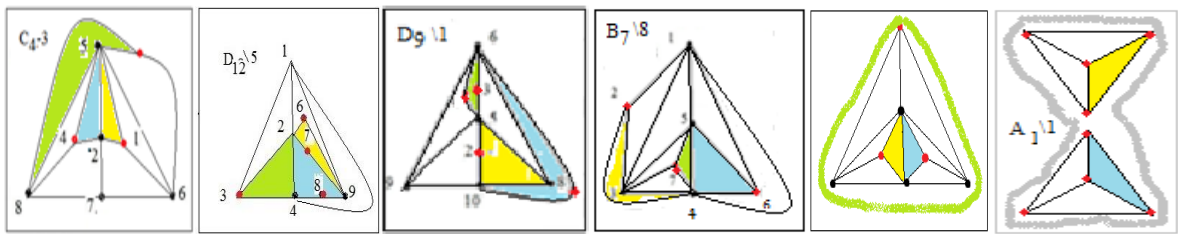


Рис. 3. Площинні підграфи проективних мінорів із заданими трьома підмножинами множини M червоних вершин (розташованою на границях трьох зафарбованих кліток) з числом досяжності 3 та клітковою відстанню 1 чи 0 між парами довільних підмножин множини M . На першій, другій та четвертій картах три зафарбовані клітки утворюють кліткову зірку, на третій клітковий цикл довжини 3, а на п'ятій карті є граф $C_4 \setminus 3$ із стиснутим у точку ребром $(2,7)$, на шостій карті показано клітковий ланцюг довжини 1

Наслідок 1. Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді матимуть місце твердження.

1. Видалення довільного ребра e графа $H = G \setminus v$ не змінюватиме число досяжності t множини M точок приєднання до графа $H \setminus e$ висячих точок зірки $St_n(g_0)$, де $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, $t_{H \setminus e}(M, \Sigma_0) = t$, $m \geq t$, $t = 2$;

2. Якщо граф G є граф-обструкцією неорієнтованого роду $\gamma(G)$, де $\gamma(G) \leq k + 1$, $\theta = 1$, то видалення довільного ребра e , $e = (a, b)$, підграфа $H = G \setminus v$, або зменшує на 1 обидві характеристики $t_H(M, \Sigma_0)$ і $\theta_H(M, \Sigma_0)$, або існує вкладення частини H' підграфа H із однією з кінцевих вершин ребра $e = (a, b)$, нехай a , до середини клітки s' , $s' \in S_H(M, \Sigma_0)$, (наприклад, це симетричне відображення відносно простого ланцюга на границі з іншою кліткою s' , що є суміжною через спільну вершину b), де множини кліток $S_H(M, \Sigma_0)$ реалізує характеристику $t_H(M, \Sigma_0)$.

Структура площинних графів H із клітковими відстанями 2 та 3 проілюстрована на рис 4.

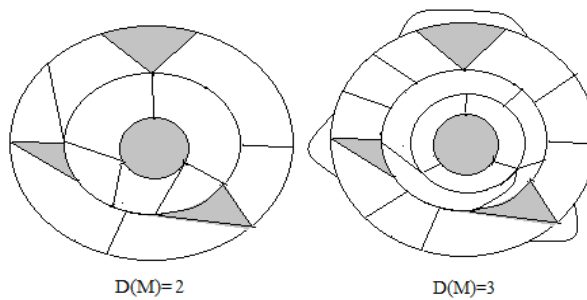


Рис. 4. Приклад площинного графа H із клітковими відстанями 2 та 3 для множини точок M , розміщеної на границях чотирьох сірих кліток, відповідно зліва-направо

Твердження 4. Нехай граф G має площинний підграф H та $d_H(M) = k$, де множина M мінімальна стосовно $d_H(M)$, $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, $t_H(M, \Sigma_0) = t$, підграф H мінімальний стосовно $d_H(M)$ при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра і граф G подано як φ -образ $\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$. Якщо мають місце умови теореми 1, $t = 2$, $k > 2$, то матимемо наступні співвідношення.

1. Існує вкладення площинного графа H в N_3 при якому довільний найкоротший клітковий ланцюг, що з'єднує клітки, на границях яких розташована задана множина точок, замінимо на інший неклітковий ланцюг у якого одна з кліток є 2-ручкою, приклеєною до початкової та передостанньої кліток ланцюга; також є псевдоклітка утворена з кінцевої клітки та приклеєної до неї ленти Мебіуса.

2. Площинний граф H складається з k концентричних кілець, утворених із замкнутих кліткових ланцюгів (де початкова та кінцева клітки мають границі із мінімально одним спільним ребром), із границями кліток досяжності множини M як центральний та зовнішній цикли k концентричних кілець.

Твердження 5. Нехай граф G поданий як φ -образ $\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$ має проєктивно площинний підграф H , $H = G \setminus v$ – мінімальний відносно $d_H(M)$ при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра e , $e \in H^1$, де $d_H(M) = k$, M множина точок мінімальна відносно $d_H(M)$, $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, $t_H(M, \Sigma_0) = t$, $m \geq t \geq 2$.

Якщо $t = 2$, $k > 2$ та виконуються умови теореми 1, то матимемо співвідношення.

1. Не існуватиме вкладення проєктивно площинного графа H в N_3 при якому довільний найкоротший клітковий ланцюг, (що з'єднує клітки, на границях яких розташована задана множина точок), замінено на інший неклітковий ланцюг, у якого одна з кліток є 2-ручкою, приклеєною до початкової та передостанньої кліток найкоротшого кліткового ланцюга, та є псевдоклітка, утворена з кінцевої клітки найкоротшого кліткового ланцюга та приклеєної до неї ленти Мебіуса.

2. Проєктивно площинний граф H має підграфи – кліткові зірки, які складаються з вершин та ребер на границях кліток із мінімально однією спільною точкою та мають попарно щонайменше одне спільне ребро на границі цих кліток, серед яких має бути одна з двох кліток, що реалізують на проєктивній площині число досяжності 2 множини точок M .

3. Видалення довільного ребра у графа G , або зменшуватиме рід $\gamma(H)$ проективно площинного підграфа H , або зменшуватиме на 1 число досяжності t , $t_H(M, N_1) = t$, відносно проективної площини, множини $M = \{a_i\}_{i=1}^m$ точок приєднання до графа H висячих точок зірки $St_n(g_0)$, або одночасно зменшить на 1 рід $\gamma(H)$ та матиме місце рівність $t_{H \setminus u}(M, \Sigma_0) = t + 1$.

На рис. 5 наведено приклади проективних підграфів H мінорів проективної площини із заданими двома непустими підмножинами множини виділених точок цих графів.

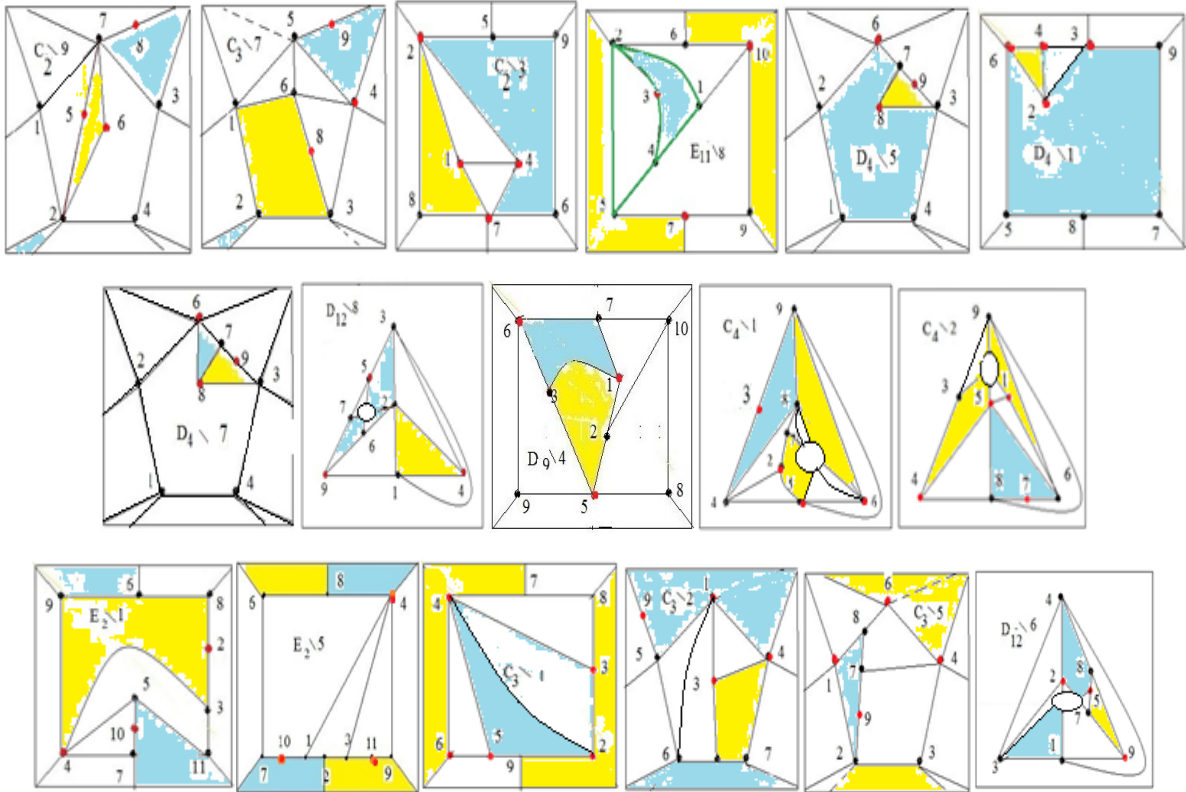


Рис. 5. Проективні підграфи мінорів проективної площини із заданими двома непустими підмножинами множини M , складеної з червоних вершин і розташованої на границях зафарбованих кліток, з числом досяжності 2 та клітковою відстанню 1 (між двома підмножинами M).

Твердження 6. Нехай граф G неорієнтованого роду 2 має проективно площинний підграф H , $H = St_m(H') \cup H''$, мінімальний відносно $d_H(M)$ при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра, де $d_H(M) = k$, множина M - мінімальна відносно $d_H(M)$, $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, $t_H(M, N_1) = t$, причому граф G подано як φ -образ $\varphi: (K + St_m(H'), \sum_{i=1}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, де $m \geq 1$, H', H'' - не вироджені підграфи чи частини графа H , а граф K гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$. Матимемо наступні співвідношення.

1. Видалення довільного ребра e , $e \in H'$, призводить до одного з трьох наступних випадків:

а) зменшує рід графа H відносно K ;

б) породжує вкладення графа $G \setminus e$ в N_1 та ребер $St_m(H') \setminus e$ до основної 2-клітки s_0 та псевдоклітки s_1 , $\{s_0, s_1\} \subseteq N_1 \setminus f(K)$, графа K , (подібне розпаданню $St_m(H') \setminus e$ на дві непусти частини, вкладені до псевдоклітки s_1 та до 2-клітки s_0 , тобто в різні клітки відносно графа K ;

в) зменшує на 1 рід $\gamma(G)$ і граф $G \setminus e$ не матиме підграфа ізоморфного K .

2. Підграф H має наступні властивості:

а) є пара ребер (e_0, e_1) , що належать простим реберним ланцюгам (L_0, L_1) , відповідно, вкладені з перетином до евклідової площини основної клітки s_0 , а пара кінцевих точок пари ланцюгів (L_0, L_1) , які належить підграфу H , розташовані на границі ∂s_0 , розділять одна другу та не розділяють кінцеві точки третього реберного ланцюга L_2 , який, можливо, містить таке ребро графа K , що входить до числа перехрещених на площині пар ребер графа K .

На рис. 6 проілюстровано структуру проективних підграфів H мінорів проективної площини із співвідношення 1. Приклади проективних підграфів H мінорів проективної площини із множинами множини виділених точок цих графів наведено на рис.7.

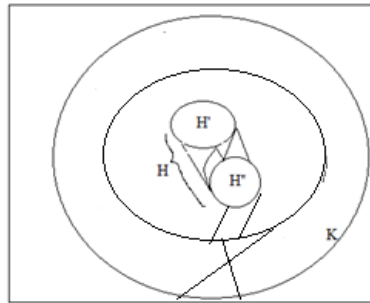


Рис. 6. Структура графа G із твердження 6

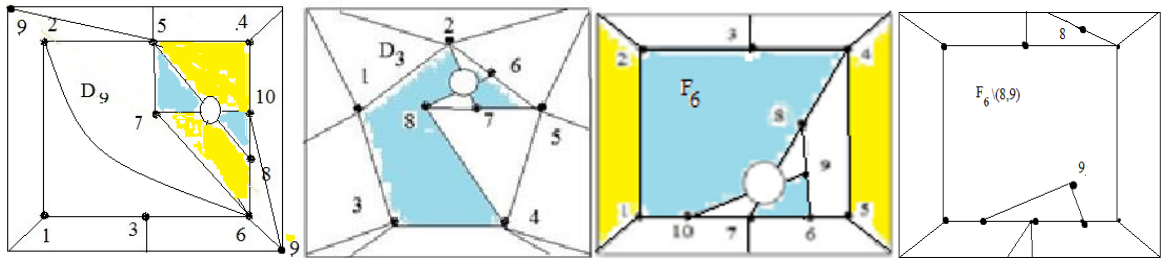


Рис. 7. Графи D_9 , D_3 , F_6 ілюструють співвідношення 1 та 2 твердження 6, граф D_9 матиме підграф K гомеоморфний $K_{3,3}$ на множині вершин $\{1,2,3,4,5,6, 8,10\}$ та підграфи H' , H'' на кінцевих вершинах наступних ребер $\{(7,5), (9,5), (9,6), (9,10), (7,10), (7,6)\}$, $\{(8,5), (4,5), (8,6), (8,10), (4,10)\}$, відповідно.

Теорема 2. Кожен граф-обструкція G із n вершинами, $n \geq 10$, неорієнтованого роду k , $k > 0$, можливо подати одним із варіантів:

1) об'єднання k копії графів гомеоморфних $K_{3,3}, K_5, K_4$ чи $K_5 \setminus e$;

2) φ -образ двох графів-обструкцій G_i неорієнтованого роду k_i заданого наступним чином

$\varphi : (\sum_{i=1}^2 G_i, \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^m (L_{1j} + L_{2j})) \rightarrow (G, \{L_i^*\}_{i=1}^m)$, де L_{1i}, L_{2i} – прості ланцюги чи підланцюги довжини

$l_{ij} \geq 0$ графів G_i , причому можливим є ототожнення пари, нехай це $L_{1j'}, L_{1j''}$ графа G_1 , із парою $L_{2j'}, L_{2j''}$ які належать одному простому циклу графа G_2 , де $k \leq \sum_{i=1}^2 k_i$, $k_i \geq 1$.

Доведення варіанту 1. Нехай G - довільний граф-обструкція із n вершинами, $n \geq 10$, неорієнтованого роду k . Для $k = 2$ в [4] конструктивно доведена справедливість гіпотези про подання графа G як об'єднання двох графів гомеоморфних одному з графів Куратовського для 35-ти мінорів графів-обструкцій проективної площини N_1 .

Матиме місце допоміжна лема: якщо граф $G \setminus u$ є блоком, то існуватиме простий цикл на якому розташовані вершини $\{a, b\}$, який належатиме мінімальному по включенню підграфу чи частині гомеоморфному K_4 чи $K_5 \setminus u$. Доведемо це допоміжну лему. Кожне довільне ребро $e = (a, b)$ графа-обструкції G неорієнтованого роду k , $k \geq 1$, можливо розмістити на ленті Мебіуса разом із, щонайменше, одним ребром $e' = (a', b')$, що схрещуються на поверхні меншого неорієнтованого роду, та кінцеві вершини яких розміщені на простому циклі мінімальної довжини 4. Видалення довільного ребра $e = (a, b)$ графа-обструкції G неорієнтованого роду k призводить до того, що довільний підграф $G \setminus e$ неорієнтованого роду $k - 1$ містить множину $M = \{a, b\}$ із числом досяжності 2 та розміщену на границях двох кліток із, як мінімум, одною спільною точкою. Згідно визначення кліткової відстані $D_{G \setminus e}(M)$ матимемо, що $D_{G \setminus e}(M) = 0$. Позначимо через M' найменший по включенню локальний площинний підграф чи частину графа G з вершинами a, b . Для нього можливими є чотири випадки, із яких тільки два випадки є різними з точністю до гомеоморфізму, наведені на рис. 8. У випадку 1 є спільне ребро для границь кліток з точками a, b , то існує локальний площинний підграф M' ізоморфний K_4 із двома виділеними точками a, b як кінцевими вершинами видаленого ребра. Додане ребро $e = (a, b)$ породжує підграф $M' \cup (a, b)$ гомеоморфний графу $K_{3,3}$. У випадку 2 є клітковий кут в спільній точці границь обох кліток з точками a, b . Тобто є локальний площинний підграф M' ізоморфний $K_5 \setminus u$ із двома виділеними точками a, b як кінцевими вершинами ребра $e = (a, b)$. Додавання ребра (a, b) до M' породжуватиме граф, що стягуватиметься до K_5 . Таким чином, кожне ребро належатиме підграфу гомеоморфному одному із графів Куратовського чи тому, що стискається до одного з них.

З іншого боку, якщо рід більше 1, то окрім ребер підграфа Куратовського є принаймні декілька ребер графа-обструкції роду 2, які не належать до виділеного підграфа $M' \cup (a, b)$, але мають належати до іншого, щонайменше, одного підграфа, гомеоморфного $K_{3,3}$ чи K_5 , відмінного від виділеного підграфа, тобто серед графів покриття ребер різними є, принаймні, два. Доведення допоміжної лемі закінчене. Аналогічним буде доведення для випадку, коли граф $G \setminus u$ не є блоком.

Використаємо метод індукції по $\gamma(G)$ - неорієнтованому роду графа G із n вершинами, де $k = \gamma(G)$. База індукції: для $k = 2$ в [4] конструктивно доведена справедливість гіпотези про подання графа G , як об'єднання двох графів гомеоморфних одному з графів Куратовського для 35-ти мінорів графів-обструкцій проективної площини N_1 .

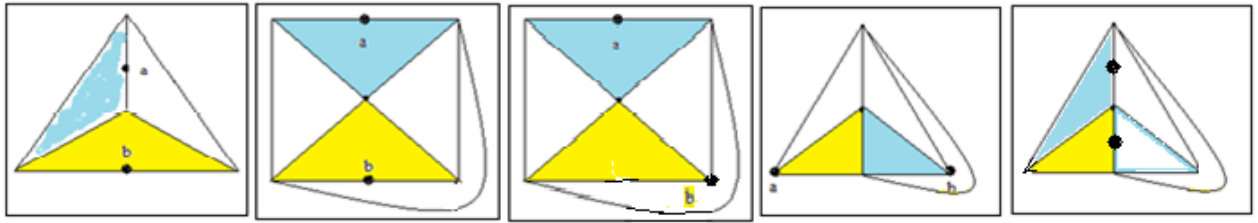


Рис.8. На 1-й та 2-й картах варіанти 1 та 2 для підграфа M' , відповідно, на 3-й, 4-й і 5-й картах підграф M' , можливо привести до одного з перших двох варіантів.

Виконаємо індукційний крок: $k - 1 \Rightarrow k$, де $k = \gamma(G)$. Для довільного ребра u , $u = (a, b)$, графа G існує пара (u, u') ребер розміщених на ленті Мебіуса. Множина ребер графа $G \setminus u$, який матиме рід $\gamma(G \setminus u)$, де $k = \gamma(G \setminus u) + 1$, та містить підграф H - граф-обструкцію яка, за припущенням, покриватиметься множиною підграфів G_i , де $i = 1(1)k - 1$, графа G чи його частин гомеоморфних $K_{3,3}, K_5, K_4, K_5 \setminus e$. Розглянемо підграф на множині ребер $G^1 \setminus H^1$. З умови, що G - граф-обструкція впливатиме наявність іншого ребра u' , яке разом з $u = (a, b)$, належить підграфу чи його частині розташовані на ленті Мебіуса. Оскільки граф $G \setminus u$ є блоком, то згідно допоміжної лемми існуватиме простий цикл z на якому розташовані кінцеві вершини ребер u, u' , які на площині розділяють одна другу, утворюючи підграф чи частину гомеоморфну K_4 або $K_5 \setminus e$. Множину ребер циклу z об'єднаємо із множиною $W \cup \{u, u'\}$, де W - множина всіх тих ребер з $G^1 \setminus H^1$, що мають, щонайменше одну спільну кінцеву вершину із циклом z . Позначимо підграф графа G з множиною ребер $z^1 \cup W \cup \{u, u'\}$ через G_k . Тоді маємо вкладення графа G в неорієнтовану поверхню N_k як суму вкладень підграфів G в N_k , а саме підграфа G_k в N_1 та підграфа H до N_{k-1} зі спільною множиною точок приєднання цих підграфів. Припустимо, що є непокрите ребро $u'' = (a'', b'')$, яке не належить до G_k . Оскільки граф $G \setminus u''$ міститиме підграф $G_k \cup H$, то застосовуючи наведені вище міркування для ребра u'' матимемо нерівність $\gamma(G \setminus u'') \geq k$, яка суперечить визначенню графа G як графа-обструкції. Припущення невірне. Таким чином, кожне непокрите ребро в графі $G \setminus u$ покриватиметься в G підграфом G_k гомеоморфними $K_{3,3}, K_5, K_4$ або $K_5 \setminus e$. Доведення варіанту 1 закінчене.

Доведення варіанту 2. Використаємо наведені вище аргументи та вважатимемо, що кілька зірок подібних $St_G(a')$ може бути. Позначимо через G_1 підграф графа G породжений парою непокрытих ребер та ребер графа G , що мають кінцевими вершинами пари точок приєднання, а через G_2 - підграф графа G породжений множиною всіх покритих ребер та тих ребер графа G , що мають кінцевими вершинами пари точок приєднання. Тоді спільними для цих є L_i, L_{2i} - прості ланцюги чи підланцюги довжини $l_{ij} \geq 0$ графів G_i , причому можливим є отождоження пари, нехай це $L_{1j}, L_{1j'}$, із парою $L_{2j}, L_{2j'}$ які належать одному простому циклу графа G_2 . Доведення теореми 2 закінчене.

Частина 2. Розглянемо задачу побудови графів-обструкцій неорієнтованого роду на основі множини відомих графів-обструкцій, але не більш ніж на 10 вершинах для неорієнтованого

роду k , а саме, повної для проєктивної площини чи неповної для інших поверхонь, зокрема, поверхні Клейна. Моделлю чи прототипом граф-обструкції G неорієнтованого роду 2 будемо називати граф більшого неорієнтованого роду, отриманий шляхом приклеювання у доступних частинах частини чи підграфа, гомеоморфного K_5 чи $K_{3,3}$, щонайменше однієї копії площинного підграфа H граф-обструкції G , чи побудований, до певної міри, на зразок цього підграфа H .

Існує інший спосіб побудови графів обструкцій заданого неорієнтованого роду шляхом розділення кінцевих точок приєднання до границі основної клітки графа-основи схрещених пар графів меншого роду як аналога схрещених ребер, що розділятимуть пари кінцевих вершин на колі евклідової площини. Для цього використаємо метод ϕ -перетворень та метод рекурсивних аналогій, або їх комбінацію. Приклади використання методу аналогій та методу ϕ -перетворень наведено на рис. 9, 10 і 11 відповідно.

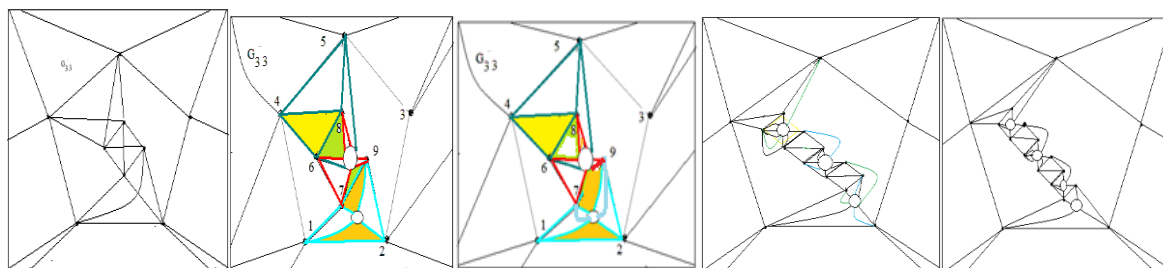


Рис. 9. На перших трьох картах граф-обструкція G_{33} мінімально вкладена на N_3 , де клітки з границями (1, 7, 9, 2) та (4, 6, 8) мають кліткову відстань 1, а його аналогії на 4-й та 5-й картах

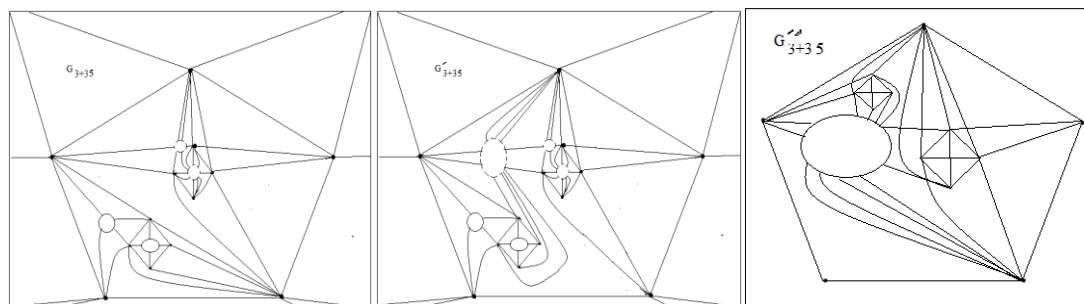


Рис. 10. Графи неорієнтованого роду не більше 6, отримані шляхом склейки графів G_3 та G_{35} по підграфу K_5

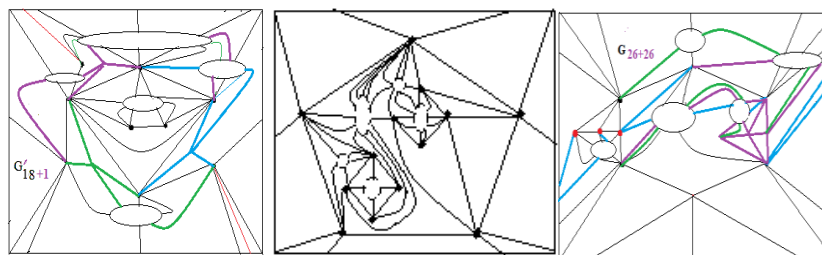


Рис. 11. Графи неорієнтованого роду не більше 6, отримані шляхом склейки графів G_1 та G_{18} по підграфу K_5 (перша карта), графів G_3 та G_{33} по підграфу K_5 (друга карта), двох копій графа G_{26} по підграфу K_6 , (третья карта) зліва направо

Визначення 6. Будемо називати $L_2(H_1, H_2)$ простим ланцюгом довжини 2 із двох графів H_1, H_2 , гомеоморфних K_4 , таке об'єднання $H_1 \cup H_2$, коли $H_1^1 \cap H_2^1 \in$ або K_2^1 , або K_3^1 .

Називатимемо об'єднання $\bigcup_{i=1}^n H_i$ графів $H_1, H_3, \dots, H_{n-1}, H_2$, гомеоморфних K_4 , простим ланцюгом $L_n(H_1, H_2)$ – довжини n , $n > 2$, якщо перетини $H_i^1 \cap H_{i+1}^1$ кожної пари (H_i, H_{i+1}) , де $i = 3, 4, \dots, n-1$, та перетини $H_1^1 \cap H_3^1, H_4^1 \cap H_3^1, \dots, H_{n-1}^1 \cap H_2^1$ пар $(H_1, H_3), (H_4, H_3), (H_{n-1}, H_2)$ відповідно, матимуть множину спільних ребер K_2^1 , або K_3^1 .

Лема 3. Нехай є простий ланцюг $L_n(H_1, H_2)$ із n графів $H_1, H_3, \dots, H_{n-1}, H_2$, гомеоморфних K_4 , приєднаний до графа H , гомеоморфного K_5 чи $K_{3,3}$ та вкладеного до проективної площини, наступним φ -перетворенням: $\varphi(H + L_2(H_1, H_2), \sum_{i=s}^2 (h_i + e_i)) \rightarrow (G, \{h_i^*\}_{i=1}^2)$, де пара несуміжних ребер $e_1, e_2, e_i \in H_i^1$, ототожнюється з парою ребер h_i , що належить до границі найбільшої клітки s графа H з ребрами $h_i, i = 1, 2$. Мають місце твердження:

1. Якщо перетини $H_1^1 \cap H_3^1, H_4^1 \cap H_3^1, \dots, H_{n-1}^1 \cap H_2^1$ пар $(H_1, H_3), (H_4, H_3), (H_{n-1}, H_2)$ відповідно, матимуть множину спільних ребер K_2^1 , то матимемо наступні співвідношення:

а) якщо $n = 2$ та ребра h_i несуміжні, то граф G – граф-обструкція роду 2 та при видаленні спільного ребра графів H_1, H_2 одна з двох зірок зі схрещеними ребрами вкладається до псевдоклітки s' із спільним ребром з s ;

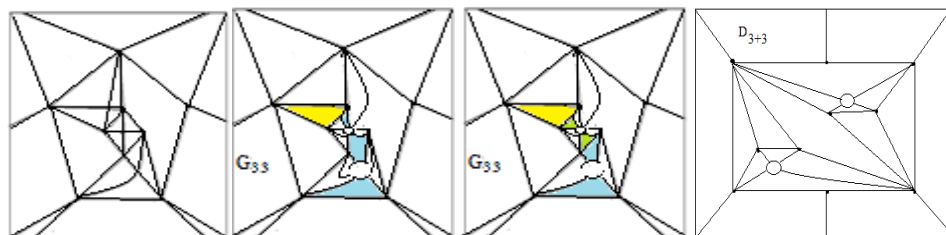
б) якщо $n = 2$ та ребра h_i суміжні, то при видаленні спільного ребра графів H_1, H_2 одна з двох зірок зі схрещеними ребрами вкладається до псевдоклітки s' із спільним ребром з 2-кліткою s та граф G – граф-обструкція роду 2;

в) якщо ланцюг $L_n(H_1, H_2)$ має, щонайменше, три графи, то несуттєвими ребрами графа G відносно роду при видаленні будуть ребра із H_3^1 .

2. Якщо перетини $H_1^1 \cap H_3^1, H_4^1 \cap H_3^1, \dots, H_{n-1}^1 \cap H_2^1$ пар $(H_1, H_3), (H_4, H_3), (H_{n-1}, H_2)$, відповідно, матимуть множину спільних ребер K_3^1 , то матимемо наступні співвідношення:

а) якщо до графа H приклеїти по простим реберним ланцюгам L_1, L_2 два різні ланцюги $L_2(H_1, H_2), L_2(H_1', H_2')$, де L_1, L_2 без спільних ребер графа H , або $L_1 = L_2$, то граф G – граф-обструкція роду 3.

Приклади графів, побудованих за твердженнями леми 3, наведені на рис 12



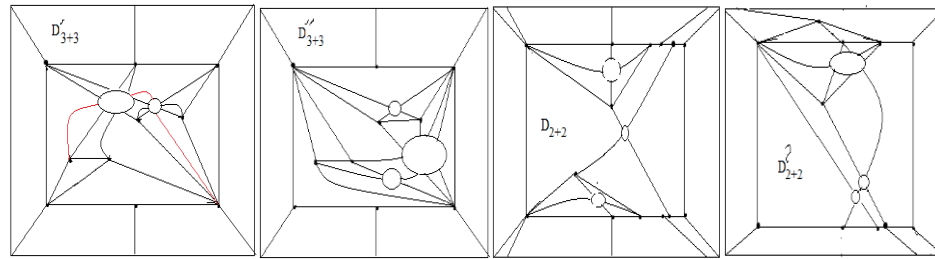


Рис. 12. Графи та граф-обструкції неорієнтованого роду 3 та 4, отримані шляхом склейки по підграфу K_{33} двох графів G_3 та склейки графів G_2 по підграфу K_{33}

Список літератури

1. Хоменко М. П. φ -перетворення графів. Препринт ИМ АНУ. Київ. 1973. 383 с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ АНУ. Київ. 1970. 299 с.
3. Mohar B., Thomassen C. *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins University Press, 2001. 412 p. <https://www.sfu.ca/~mohar/Book.html>
4. Hur S. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Phd, Ohio State University, 2008. http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1209141894
5. Archdeacon D., Huneke P. A Kuratowski Theorem for Nonorientable Surfaces. *Journal of combinatorial theory, Series B*. 1989. **46**. P. 173–231.
6. Петренко В.І. Про структуру площинних підграфів графів-обструкцій неорієнтованої поверхні заданого роду. *Фізико математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021. № 33. С. 105–109. [Google Scholar](https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=uk&user=Vp1GAAAAAJAJ&citation_for_view=Vp1GAAAAAJAJ:2021)
7. Bienstock D., Dean N. On obstructions to small face covers in planar graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*. 1992. **55**. P. 163–189. <https://doi.org/10.1016/0095-8956%2892%2990040-5>
8. Bienstock D., Monma C.L. On the complexity of covering vertices by faces in a planar graph. *SIAM J. Comput.* 1988. **17**. P. 53–76. <https://doi.org/10.1137/0217004>
9. Mohar B. Face Covers and the Genus Problem for Apex Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 2001. **82**. P. 102–117. <https://doi.org/10.1006/jctb.2000.2026>
10. Mohar B. Apex graphs with embeddings of face-width three. *Discrete Mathematics*. 1997. **176**. P. 203–210. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(96\)00363-9](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00363-9)

4.3. Про структуру 9-ти вершинних графів-обструкцій для поверхні поверхні Клейна.

Розглянемо *задачу* вивчення методом ϕ -перетворення графів структурних властивостей 9-ти вершинних графів-обструкцій для неорієнтованої поверхні N_k роду k , $k = 2$. Основні поняття та позначення узяті із [1]-[3], всі графи неорієнтовані без кратних ребер та петель. В [4], [5] отримано всі неізоморфні графи-обструкції для N_2 -поверхні Клейна на не більш ніж 9-ти вершинах, а в [6] наведено діаграми цих графів та 36-ти графів-обструкцій на 9-ти, окрім цього наведено 27 нових графів-обструкцій утворених шляхом розщеплення вершин 8-ми вершинних графів-обструкцій для неорієнтованої поверхні N_2 .

Нехай 2-многовид S без країв неорієнтованого роду $\bar{\gamma}(S)$ подано як поверхню S' орієнтованого роду $\gamma(S')$, де $\gamma(S') \geq 0$, $\bar{\gamma}(S) = 2\gamma(S') + r$, до якої приклеєно r лент Мебіуса, $r > 0$; наприклад, поверхня S є пляшкою Клейна коли $\gamma(S') = 0$ і $r = 2$, чи поверхня S роду $\bar{\gamma}(S) = 3$ матиме S' - тор із однією приклеєною лентою Мебіуса. Для заданого вкладення $f, f: G \rightarrow S$, графа G в S та заданої множини точок $X, X \subset G^0 \cup G^1$ визначимо $t_G(X, S, f), t = t_G(X, S, f)$, число досяжності множини X відносно S , якщо існує підмножина $S_G(X), S_G(X) = S \setminus f(G), S_G(X) = \{s_i\}_1^t$, що задовольняє умові: $(f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^t \partial s_i \cap X) \wedge (f(X) \not\subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^t \partial s_i \cap X), j = 1, 2, \dots, t$. Будемо говорити, що множина X має число досяжності t , $t_G(X, S) = t$, відносно S , якщо серед всіх неізоморфних вкладень $f, f: G \rightarrow S$ число t є найменшим серед чисел $t_G(X, S, f)$. Вважатимемо надалі, що $\bar{\gamma}$ позначено через γ .

Визначення 1. Нехай задано вкладення $f, f: G \rightarrow S$, графа G в S , яке реалізує t , $t_G(X, S) = t$, де $S_G(X) = S \setminus f(G), S_G(X) = \{s_i\}_1^t$. Будемо говорити, що відносно заданої поверхні S множина X матиме характеристику $\theta_G(X, S, f), \theta_G(X, S, f) = \theta, \theta \geq 1$, якщо існує θ трійок кліток $\{s_i\}_1^3$ з множини $S_G(X)$, на границях яких підмножини $X_i, X_i \subseteq X$, розміщуються довільним чином і задовольняють співвідношенню: $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\} \wedge G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\} \wedge G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$, та породжує найменший по включенню підграф G' графа G , (можливо вироджений в точку), який містить точки $\{a_i\}_1^3$ попарного перетину границь кліток $\{s_i\}_1^3$; Множина X матиме відносно S характеристику $\theta_G(X, S)$, якщо $\theta_G(X, S) = \max \theta_G(X, S, f)$, де максимум береться по всім неізоморфним вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X, S) = t$.

Визначення 2. Нехай задано вкладення $f, f: G \rightarrow S$, графа G в S , яке реалізує t , $t_G(X, S) = t$, де $S_G(X) = \{s_i\}_1^t, S_G(X) = S \setminus f(G)$, та виконується рівність $\theta_G(X, S) = 0$. Будемо говорити, що відносно S множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X, f), \partial\theta = \partial\theta_G(X, f), \partial\theta \geq 1$, якщо існує підмножина $\{s_i, s_j, s_k\}$, множини $S_G(X)$, яка задовольняє співвідношенням: $G^1 \cap \partial s_i \cap \partial s_j \supseteq \{(a_1, b_1)\}$ і $G^1 \cap \partial s_k \cap \partial s_j \supseteq \{(a_2, b_2)\}$, для всіх $i \neq j \neq k$,

$i, j, k = 1, 2, 3$. На границях $\{\partial s_i, \partial s_j, \partial s_k\}$ множина X розміщується довільним чином, якщо не містить точок ребер (a_1, b_1) , (a_2, b_2) та особливим чином (без точок множини X на $\partial s_j \setminus L(a_1, a_2) \cup \{(a_2, a_{20}), (a_1, a_{10})\}$), якщо містить принаймні точку цих ребер. Також існуватимуть клітка s_0 та, можливо, клітка s_{00} . Клітка $s_0, s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$, границя якої містить простий ланцюг $L(a_1, a_2)$ ненульової довжини із кінцевими вершинами a_1, a_2 спільно із ∂s_j і два простих ланцюги, можливо вироджені в точку, $L_1(a_1, a_{12}), L_1(a_2, a_{22})$ спільними з ∂s_i та ∂s_k , відповідно, та ребро (a_{12}, a_{22}) . Клітка $s_{00}, s_{00} \in (S \setminus f(G)) \setminus (S_G(X) \cup \{s_0\})$, має границю яка містить простий ланцюг $L(a_{10}, a_{20})$ ненульової довжини із кінцевими вершинами a_{10}, a_{20} спільно із ∂s_j . Множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X, S)$, якщо $\partial\theta_G(X, S) = \max \partial\theta_G(X, S, f)$, де максимум по неізоморфним вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X, S) = t$ та $\theta_G(X, S)$.

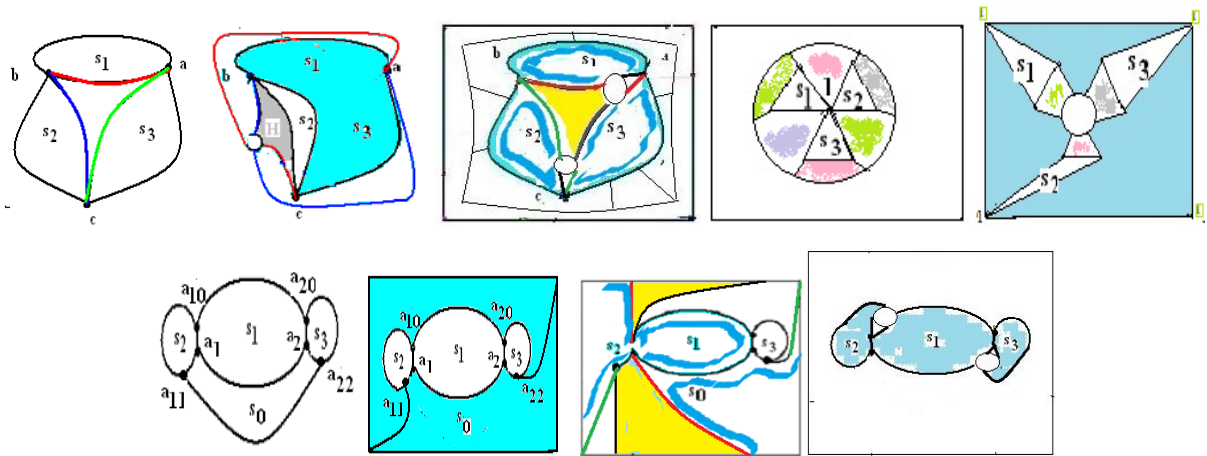


Рис. 1. В 1-му ряду на перших трьох картах циклічна кліткова структура, а інші ілюструють зіркову на проєктивній площині та плящі Клейна, на 2-му ряду перших трьох картах проілюстровано ланцюжкову кліткову структуру на проєктивній площині та плящі Клейна.

Визначення 3. Позначимо через $krt_G(M)$, $kr = krt_G(M)$, kr - кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G , як найбільшу кількість варіантів вибору різних підмножини $S_G(M, S_\gamma)$ множини клітин $S_\gamma \setminus f(G)$ на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M , узята по всіх мінімальних вкладеннях $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ . Іншими словами, це найбільша кількість зірок які приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr 2-кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Визначення 4. Позначимо через $ms_G(M, s, f)$, $k = ms_G(M, s, f)$, k - сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітки s , $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f - задане мінімальне вкладення $f: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M . Найбільшу кількість копій

підмножини M на ∂s серед всіх клітин s заданого мінімального вкладення $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $ms_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G які приєднані кінцевими вершинами до кожного із принаймні трьох елементів множини M та вкладені до однієї клітки із множини $S_\gamma \setminus f(G)$ заданого мінімального вкладення $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ .

Визначення 5. Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), \dots, ms_G(M, f_N))$ вектором l -стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, $l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0$, $|M| > 2$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ - множина всіх неізоморфних мінімальних вкладень $f_k, f_k: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел $ms_G(M, f_k)$ узяті по всім s та всім $f_k, s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, називатимемо характеристикою l -стороннього доступу до множини M точок графа G та позначимо через $ms_G(M)$.

Визначення 6. Будемо називати множину підграфів $M, M = \{H_k\}_{k=1}^N$ графа-обструкції H для N_2 , вкладеної до евклідової площини, такою, що мінімально покриває множину ребер графа, якщо матиме місце співвідношення $(H^1 \subseteq \{H_k^1\}_{k=1}^N) \& ((\forall j, j = 1, 2, \dots, k)(H^1 \not\subseteq \{H_k^1\}_{k=1}^N \setminus H_j^1))$.

Визначення 7. Будемо називати підграф K графа-обструкції H для N_2 локально проєктивно-площинним, якщо $f|_K(K) \subset D$, де $f: H \rightarrow N_2$ - мінімальне вкладення графа H в N_2 , D - елементарний диск поверхні N_2 .

Позначення 1. Будемо позначати через $St_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_m}(K)$ граф K із i -тої вершини якого виходять $n_i, n_i \geq 0$, висячих ребер, що приєднані до різних вершин, де $i = 1, 2, 3, \dots, m$.

Частина 1.

Твердження 1.1. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф, $G = K_6$, має на N_2 число досяжності множини вершин $t_G(K_6^0, N_2) = 2$ і не має вершини з подвійним доступом та кожне видалене ребро зменшує число $t_G(K_6^0, N_2)$;
2. Граф $G, G = K_5$, має на N_2 число досяжності множини вершин $t_G(G^0, N_2) = 1$ та дві вершини з двостороннім доступом, а граф $G, G = K_5 \setminus e$, має на N_2 три вершини з двостороннім доступом;
3. Граф $G, G = K_7$, має рід $\gamma(G) = 3$;
4. Граф $G, G = K_8 \setminus K_{1,2}$, має рід $\gamma(G) = 3$;
5. Граф $G, G = K_6 \setminus 2K_2$, має на N_2 число досяжності множини вершин $t_G(G^0, N_2) = 2$ та має вершину з подвійним доступом, а $G = K_6 \setminus 3K_2$ має на N_2 $t_G(G^0, N_2) = 2$ та має тільки одну вершину без подвійного доступу;

6. Множина вершин $K_{3,3}^0$ графа $K_{3,3}$ має кратний доступ і є досяжною відносно N_2 ;

7. Три графи K_4 , що утворюють дві пари із одним спільним ребром, для кожної своїм, мають три пари ребер, зхрещених на площині, вкладаються на дві ленти Мебіуса.

Доведення цих тверджень наведено на рис 1.2, де на перших двох картах зображено вкладення графа K_7 в N_3 , відповідно, побудовані як продовження вкладення f_6 графа K_6 в N_2 та вкладення f_5 графа K_5 в N_2 , причому синім кольором позначимо клітку з множини $N_2 \setminus f_5(K_5)$ на якій маємо подвійний доступ до вершин з під множин $\{4\}, \{1\}$. На четвертій карті зображено мінімальне вкладення графа $K_8 \setminus K_{1,2}$ в N_4 . На п'ятій карті зображено вкладення графа K_6 в N_2 яке реалізує число $t_G(G^0, N_2) = 2$ та видно зменшення цього числа при видаленні ребра (3,5).

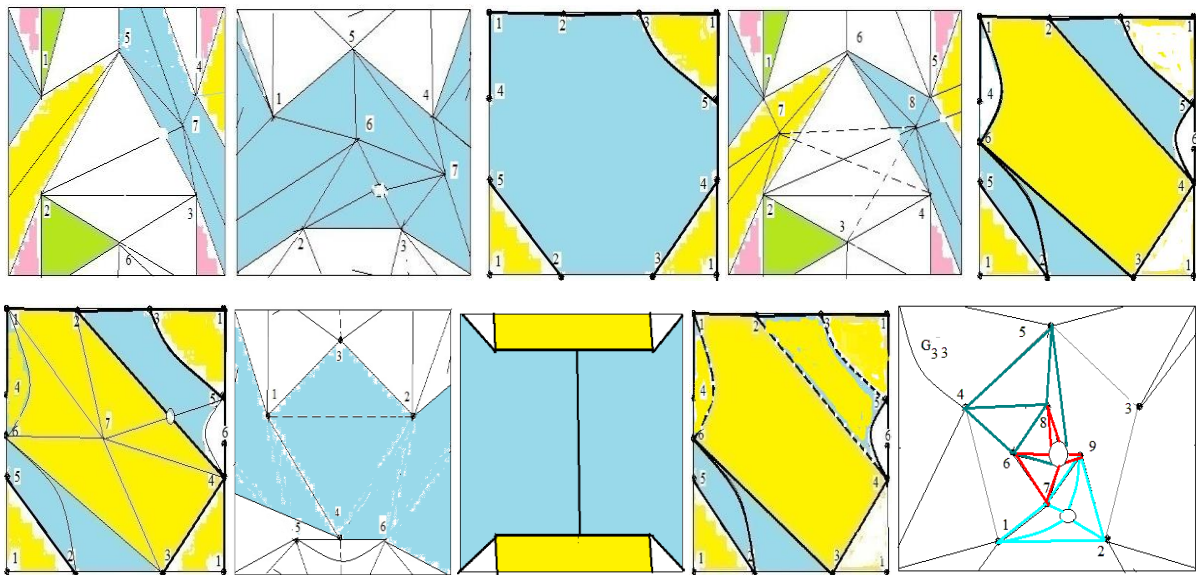


Рис. 1.2. На другій карті вершини 1,4 графа K_5 мають на N_2 двосторонній доступ, а на 3-й,5-й,6-й,8-й,9-й картах ребра позначені дугами та відрізками товстих ліній. Три підграфи графа G_{33} ізоморфні K_4 утворюють пару із одним спільним ребром (6,8) та пару із одним спільним ребром (7,9), вкладаються на N_1 із двома лентами Мебіуса

Лема 1.1. Нехай граф G є φ -образом графів-обструкцій G_1 та G_2 при φ -перетворенні визначеному наступним чином: $\varphi(G_1 + G_2, \sum_{i=1}^2 (e_1 + e_2)) \rightarrow (G, e)$, де $e = (a, b)$, $e \in G^1$. $e_i = (a_i, b_i)$ є ребром, або частиною ребра графа G_i , $i = 1, 2$. Для орієнтованого роду $\gamma(G)$ мають місце наступні твердження:

- 1). Якщо принаймні одна кінцева вершина кожного з ребер e_i не матиме двостороннього доступу, то маємо рівність $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$;
- 2). Якщо кожна кінцева вершина одного з ребер e_i має двосторонній доступ, то матимемо рівність $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1$;

Доведення. Доведення лема 1.1 для довільних графів-обструкцій G_1 та G_2 аналогічне доведенню для двох графів K_5 , виконаному на рис. 1.3. Наведемо на рис. 1.4. доведення тверджень лема 1.1. для двох вкладених (ребра K_4 сині) в тор графів, зліва–направо, отриманих з двох пар графів $(K_4, K_{3,3})$, (K_4, K_5) шляхом φ -перетвореннями заданим на парі ребер цих пар. Відмітимо, що наявність двостороннього доступу до ототожнених кінцевих вершин ребра означатиме відсутність додаткової 2-ручки. Так для графа K_5 вкладеного до Σ_2 - пляшки Клейна із двостороннім доступом до двох вершин (завдяки наявності кольорової клітини в яку можливо вкласти дві зірки із суміжними центрами на 5-ти та 6-ти ребрах-променях) та отримати мінімальне вкладення графа $K_7 \setminus e$ до Σ_2 .

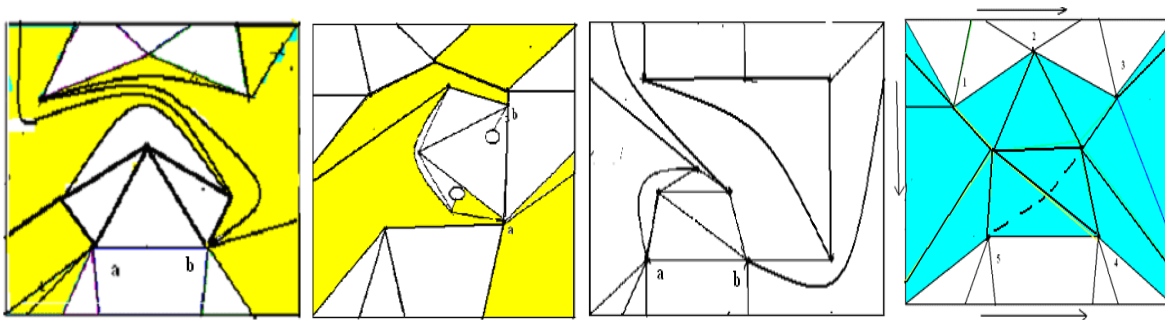


Рис. 1.3. До тверджень лема 1.1. наведено два перші графи (зліва-направо), що отримані з двох графів K_5 двома наступними φ -перетвореннями: 1) по парі ребер, 2) по ребру $e=(a,b)$ та частині ребра u , відповідно, де кольоровою є клітка вкладення в тор графа K_5 , до якої вкладено інший K_5 та виконано склейку; 3) Наведено склейку по ребру e , $e=(a,b)$, графів K_5 , $K_{3,3}$; 4) Наведено мінімальне вкладення графа $K_7 \setminus e$ до Σ_2 - пляшки Клейна.

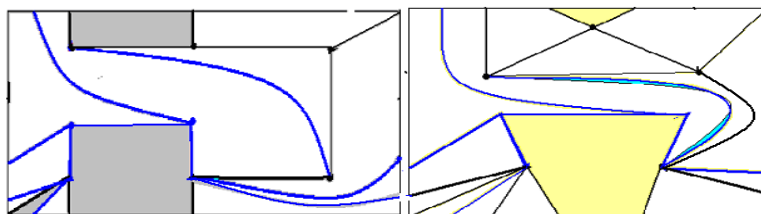


Рис. 1.4. Наведемо до тверджень лема 1.1. два вкладені в тор графи (зліва-направо) отримані з двох пар графів $(K_4, K_{3,3})$, (K_4, K_5) φ -перетвореннями на парах ребер.

Лема 1.2. Нехай граф G є φ -образом графів G_1 та G_2 - обструкцій для проективної площини при φ -перетворенні визначеному наступним чином: $\varphi(G_1 + G_2, \sum_{i=1}^2 (e_1 + e_2)) \rightarrow (G, e)$, де $e = (a, b)$, $e \in G^1$, $e_i = (a_i, b_i) \in$ ребром, або частиною ребра графа G_i , $i = 1, 2$. Тоді для неорієнтованого роду $\gamma(G)$ не виконуються твердження лема 1.1.

Доведення. Дійсно із наведених на рис. 1.5. вкладень до проективної площини графів K_5 та $K_{3,3}$ видно відсутність двостороннього доступу до довільної підмножини їхніх вершин. Але для $K_5 \setminus (4,7)$ є двосторонній доступ до пари суміжних вершин 3, 4, 7, який не впливає на рід графа A_2 зі списку графів-обструкцій для проективної площини.

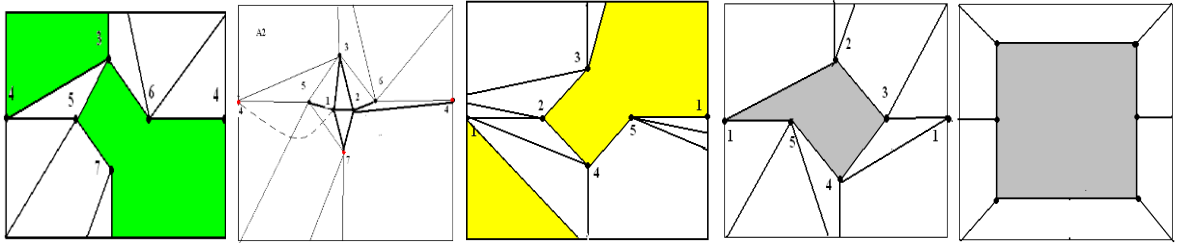


Рис.1.5. Мінімальні вкладення графів $K_5/(4,7)$, $A_2/(1,4)$, K_5 , $K_{3,3}$ до проєктивної площини.

Частина 2.

Твердження 2.1. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_1 є φ -образом графа K_6 та квазізірки $St_{4,4,4}(\overline{K_3})$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_6 + St_{4,4,4}(\overline{K_3}), \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 (a_{ij} + x_{ij})) \rightarrow (G_1, \{a_{ij}^*\}_{i=1}^4 \}_{j=1}^4)$, де x_{ij} - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються з вершинами a_{ij} трьох підграфів K_4 графа K_6 , які попарно мають одне спільне ребро, а множина ребер графа G_1 мінімально покрита трьома графами K_4 .
2. Граф G_2 є φ -образом графа K_6 та квазізірки $St_{4,4,4}(\overline{K_3 \setminus K_2})$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_6 + St_{4,4,4}(\overline{K_3 \setminus K_2}), \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 (a_{ij} + x_{ij})) \rightarrow (G_2, \{a_{ij}^*\}_{i=1}^4 \}_{j=1}^4)$, де ототожнюються x_{ij} - кінцеві вершини квазізірки з вершинами a_{ij} трьох підграфів K_4 графа K_6 , три з яких утворюють послідовність, бо мають по одному спільному ребру, причому множина ребер графа G_2 мінімально покрита трьома графами K_5 і одним K_6 . Доведення цих тверджень наведено на рис 2.1.

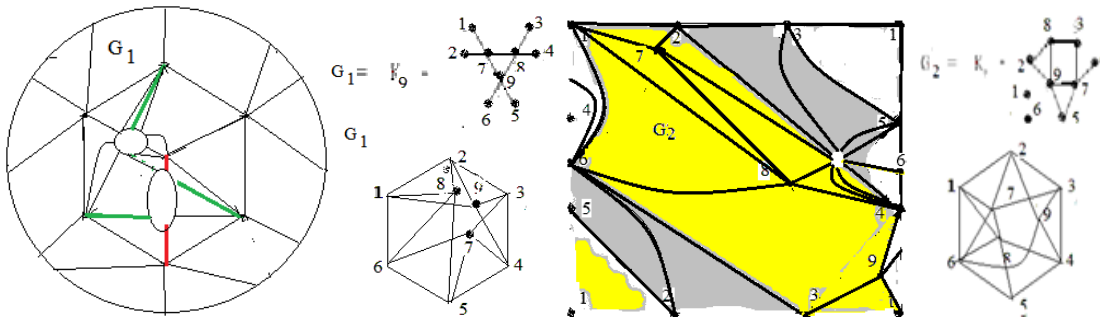


Рис. 2.1. Граф G_1 вкладений до проєктивної площини N_1 із приклеєними двома лентами Мебіуса, граф G_2 вкладено на N_3 , утвореної з пляшки Клейна та однієї ленти Мебіуса.

Твердження 2.2. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_3 є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,6,6,6}(K_4)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{4,6,6,6}(K_4), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_3, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , де $\deg_{St_{4,6,6,6}(K_4)}(x_4) = 4$, $\deg_{St_{4,6,6,6}(K_4)}(x_i) = 2, i=1,2,3$, причому множина ребер графа G_3 мінімально покрита двома графами K_5 із спільною

вершиною, трьома графами K_4 (один з яких містить K_3 , який унеможливорює двосторонній доступ до точок з $\{a_i\}_{i=1}^4$ - множини приєднання.

2. Граф G_4 є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_4, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазі зірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , де $\deg_{St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2)}(x_i) = 2, i = 1, 2, 3, 4$, причому множина ребер графа G_4 мінімально покрита одним графом K_5 , чотирма графами K_4 .

3. Граф G_5 є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазізірки $St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus K_2)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus K_2), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_5, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа $K_5 \setminus e$, де $\deg_{St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus K_2)}(x_i) = 3, i = 1, 2, 3, 4$, причому множина ребер графа G_5 мінімально покрита одним графом $K_5 \setminus (4,5)$, одним колесом W_4 з чотирма спицями (частинним $K_{2,3}$ на вершинах 4,5,6,7,8,9 із ребрами (6,7), (6,9)) та двома графами K_4 .

4. Граф G_6 є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{2,2,3,4}(K_4 \setminus K_2)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{2,2,3,4}(K_4 \setminus K_2), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_6, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазі зірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , де $\deg_{St_{2,2,3,4}(K_4 \setminus K_2)}(x_i) = 3, i = 1, 2, 3, 4$, причому множина ребер графа G_6 мінімально покрита одним графом K_5 , одним $K_5 \setminus (7,5)$ і трьома графами K_4 . Доведення цих тверджень наведено на рис 2.2.

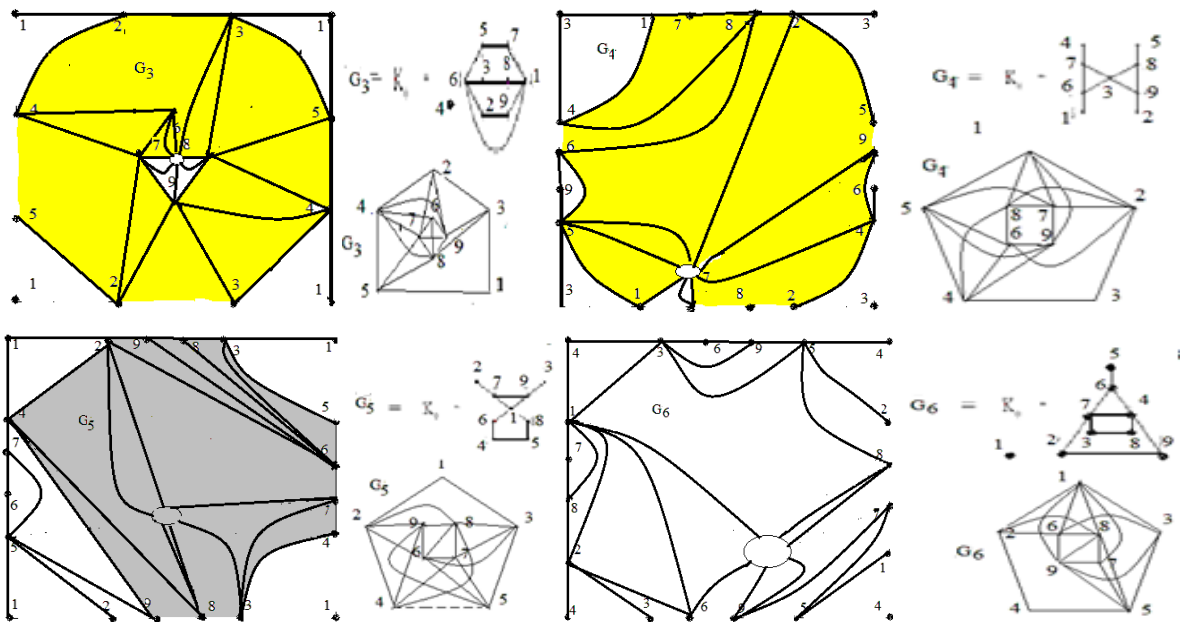


Рис. 2.2. Графи G_3, G_4, G_5, G_6 вкладені мінімально на N_2 з приклеєною лентою Мебіуса.

Твердження 2.3. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_7 є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{2,2,3,3,4}(K_4 \setminus K_3^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{2,2,3,3,4}(K_4 \setminus K_3^1), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_7, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 2, x_3, x_4 мають степінь 3, $\deg_{St_{2,2,3,3,4}(K_4 \setminus K_3^1)}(x_4) = 4$, причому множина ребер графа G_7 мінімально покрита одним графом K_5 , одним $K_{2,3}$, одним $K_5 \setminus (4,5)$ і двома графами K_4 .

2. Граф G_8 є φ -образом графа $K_5 \setminus e$, де $e = (a_3, a_4)$, та квазізірки $St_{3,3,4,4}(C_4 \setminus e)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{3,3,4,4}(C_4 \setminus e), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_8, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа $K_5 \setminus e$, x_1, x_2 мають степінь 3, x_3, x_4 мають степінь 4, де $C_4 \setminus e$ - простий ланцюг довжини 3, причому множина ребер графа G_8 мінімально покрита одним графом $K_5 \setminus e$ і п'ятьма графами K_4 .

Доведення цих тверджень наведено на рис 2.3.

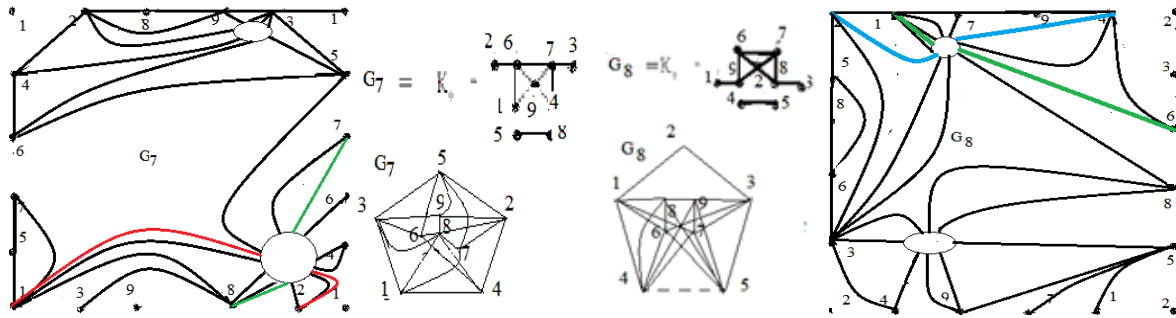


Рис. 2.3. Графи G_7, G_8 вкладено до проективної площини N_1 із двома лентами Мебіуса.

Твердження 2.3. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_9 є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{2,2,2,2,2}(K_4)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{2,2,2,2,2}(K_4), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_9, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_i мають степінь 2, $i=1,2,3,4,5$, причому множина ребер графа G_9 мінімально покрита одним K_5 і чотирма K_4 .

2. Граф G_{10} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{1,1,2,4,4}(K_4 \setminus K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{1,1,2,4,4}(K_4 \setminus K_2^1), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{10}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 1, x_3, x_4 мають степінь 4, $\deg_{St_{1,1,2,4,4}(K_4 \setminus K_2^1)}(x_5) = 2$, причому множина ребер графа G_{10} мінімально покрита множинами ребер графів K_5 і трьох графів K_4 .

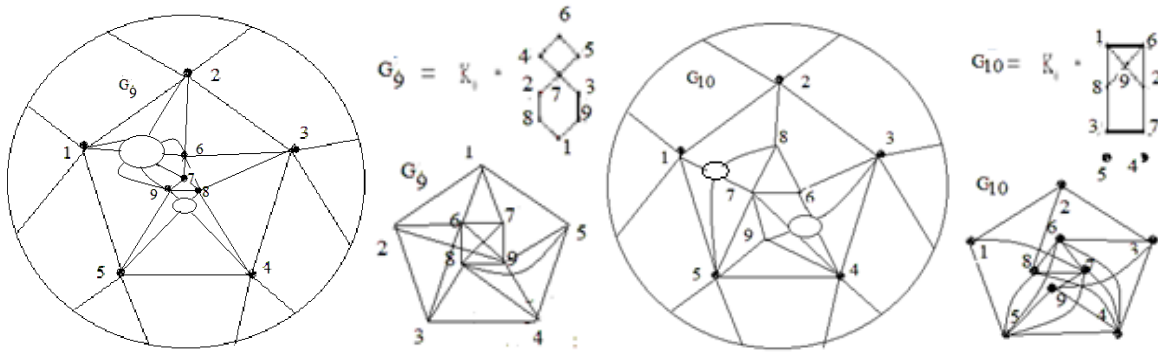


Рис. 2.4. Графи G_9, G_{10} вкладені в проективну площину N_1 із двома лентами Мебіуса.

Твердження 2.4. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{11} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2^1), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{11}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 2, x_3, x_4 мають степінь 4, причому множина ребер графа G_{11} мінімально покрита множинами ребер графів K_5 , двох графів K_4 та одного $K_6 \setminus 2K_2$.

2. Граф G_{12} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{3,4,4,5}(K_4 \setminus K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{3,4,4,5}(K_4 \setminus K_2^1), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{12}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 2, x_3, x_4 мають степінь 1, $\deg_{St_{3,4,4,5}(K_4 \setminus K_2^1)} x_5 = 3$, причому множина ребер графа G_{12} мінімально покрита множинами ребер графів K_5 та чотирьох графів K_4 .

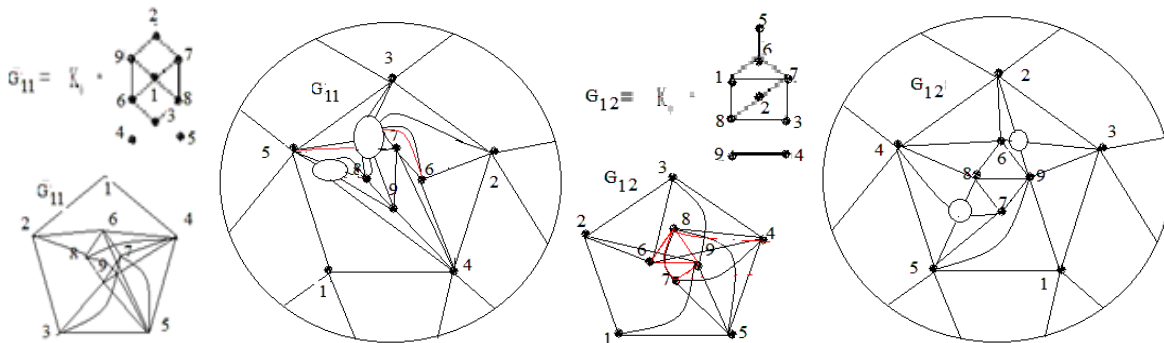


Рис. 2.5. Графи G_{11}, G_{12} вкладені в проективну площину N_1 із двома лентами Мебіуса.

Твердження 2.5. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{13} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,5,5,6}(K_4 \setminus K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{4,5,5,6}(K_4 \setminus K_2^1), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{13}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 2, x_3, x_4 мають

ступінь 3, $\deg_{St_{4,5,5,6}(K_4 \setminus K_2^1)} x_5 = 3$, причому множина ребер графа G_{13} мінімально покрита множинами ребер графів K_5 , п'ятьох графів K_4 .

2. Граф G_{14} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,5,5,6}(K_4 \setminus K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{4,5,5,6}(K_4 \setminus K_2^1), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{14}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_3, x_2 мають ступінь 2, x_4 мають ступінь 4, причому множина ребер графа G_{14} мінімально покрита множинами ребер графів K_5 , одного графа $K_5 \setminus (7,8)$ та двох графів K_4 .

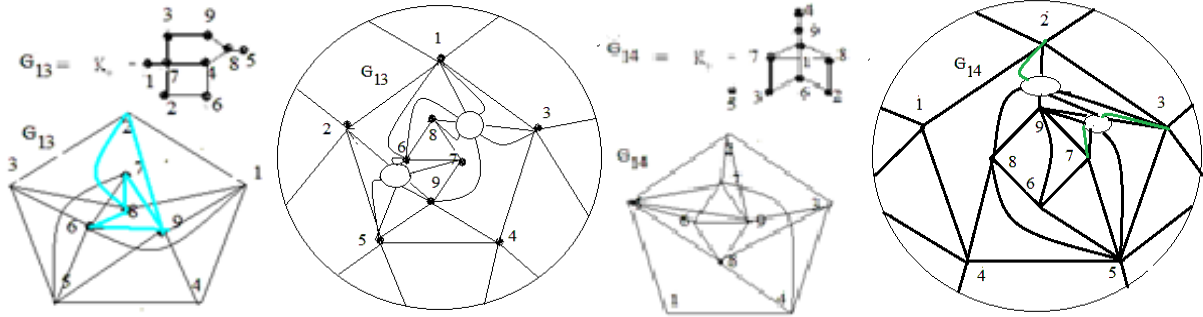


Рис. 2.6. Графи G_{13} , G_{14} вкладені мінімально в проективну площину N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса.

Твердження 2.6. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{14} є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазізірки $St_{5,5,5,6}(K_4 \setminus K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{5,5,5,6}(K_4 \setminus K_2^1), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{14}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають ступінь 2, x_3, x_4 мають ступінь 4, причому множина ребер графа G_{14} мінімально покрита множинами ребер трьох графів $K_5 \setminus e$ та двох графів K_4 .

2. Граф G_{16} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,5,6,6}(K_4 \setminus K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{4,5,6,6}(K_4 \setminus K_2^1), \sum_{i=1}^3 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{16}, \{a_i^*\}_{i=1}^3)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають ступінь 4, x_3 мають ступінь 3, причому множина ребер графа G_{16} мінімально покрита множинами ребер графів K_5 , двох графів $K_5 \setminus (9,8)$ та одного графа K_4 .

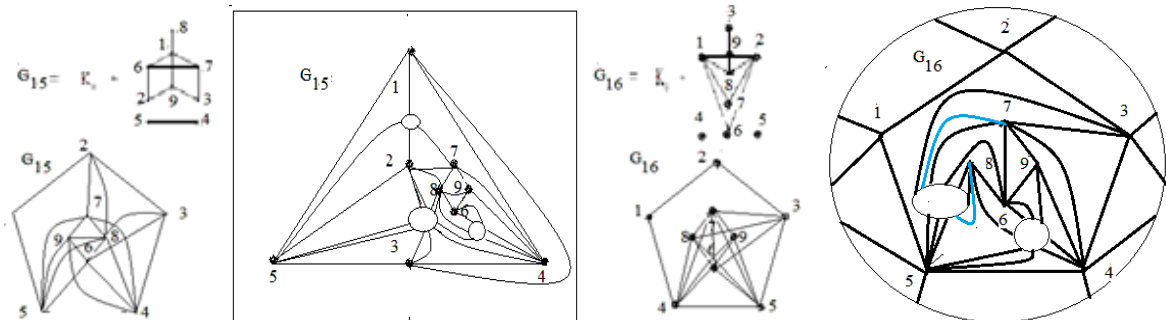


Рис. 2.7. Графи G_{15} , G_{16} вкладені в евклідову площину із трьома приклеєними лентами Мебіуса та в проєктивну площину N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса, відповідно.

1. Частина 3.

Твердження 3.1. Мають місце наступні співвідношення:

- Граф G_{17} є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазізірки $St_{4,5,6,6}(K_4 \setminus K_{1,2}^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{4,5,6,6}(K_4 \setminus K_{1,2}^1), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{17}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 3, x_3 має степінь 6, x_4 має степінь 1, x_5 має степінь 2, причому множина ребер графа G_{17} мінімально покрита множинами ребер двох графів $K_5 \setminus (1,2)$ та п'ятих графів K_4 .
- Граф G_{18} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,4,4,5}(K_2 + \overline{K_2})$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{4,4,4,5}(K_2 + \overline{K_2}), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{18}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2, x_3 мають степінь 4, x_4 має степінь 2, x_5 має степінь 1, причому множина ребер графа G_{18} мінімально покрита множинами ребер графів $K_7 \setminus K_2^1$ та двох графів K_4 .

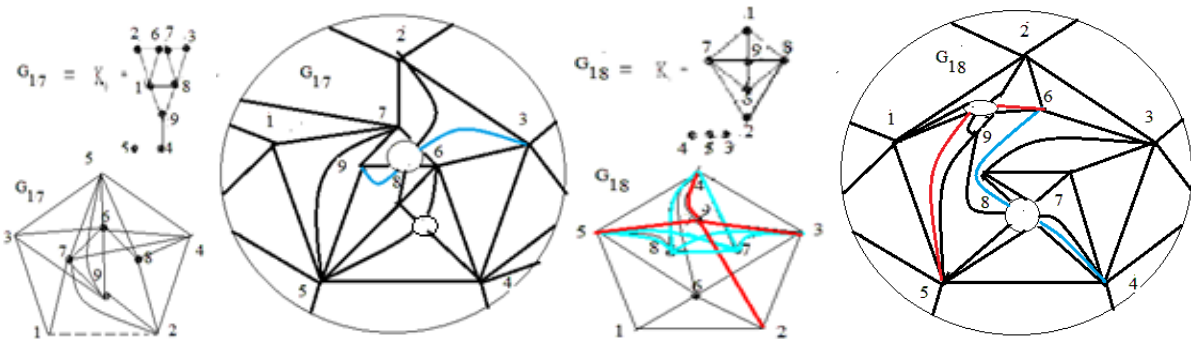


Рис. 3.1. Графи G_{17} , G_{18} вкладені мінімально в N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса.

Твердження 3.2. Мають місце наступні співвідношення:

- Граф G_{19} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2^1), \sum_{i=1}^3 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{19}, \{a_i^*\}_{i=1}^3)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2, x_3, x_4 мають степінь 4, причому множина ребер графа G_{19} мінімально покрита множинами ребер одного графа K_4 та 2-х графів $K_5 \setminus K_2^1$.
- Граф G_{20} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,5,5,5}(z_4 \setminus K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{4,5,5,5}(z_4 \setminus K_2^1), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{20}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де z_4 - простий цикл довжини 4, x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 1, x_3, x_4, x_5 мають степінь 4, причому множина ребер графа G_{20} мінімально покрита множинами ребер графів K_5 та шістьма графами K_4 .

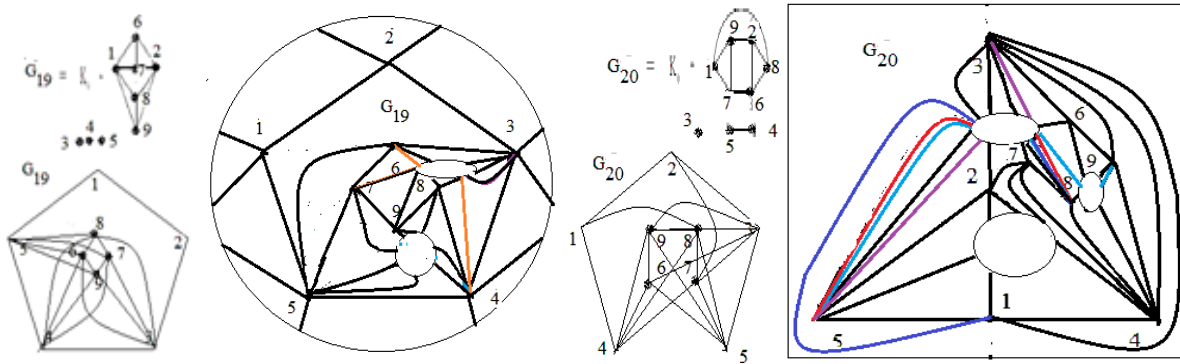


Рис. 3.2. Графи G_{19} , G_{20} вкладені мінімально в N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса та в евклідову площину із трьома приклеєними лентами Мебіуса, відповідно.

Твердження 3.3. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{21} є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазізірки $St_{5,5,6,7}(K_4)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{5,5,6,7}(K_4), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{21}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа $K_5 \setminus e$, x_1 має степінь 1, x_2, x_3 мають степінь 2, x_4, x_5 мають степінь 3, причому множина ребер графа G_{21} мінімально покрита множинами ребер графа $K_5 \setminus e$, чотирьох графів K_4 .
2. Граф G_{22} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2^1), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{22}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 1, x_3 мають степінь 2, x_4, x_5 має степінь 4, причому множина ребер графа G_{22} мінімально покрита множинами ребер графа K_5 та чотирьох графів K_4 .

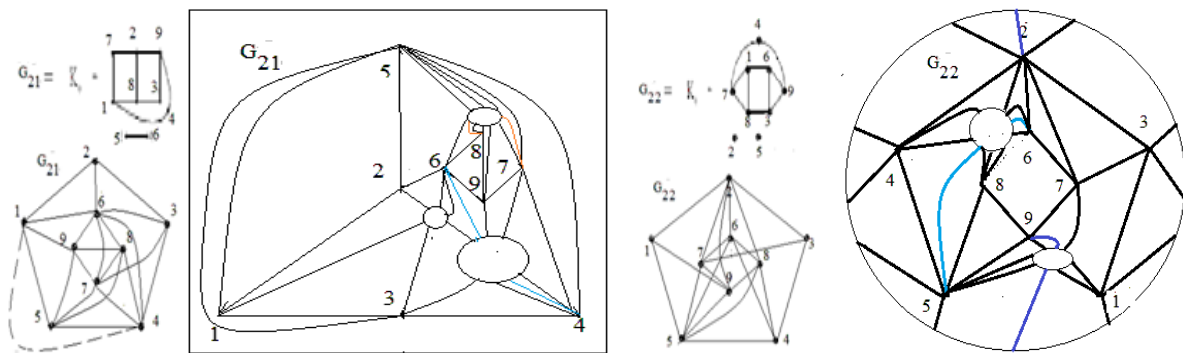


Рис. 3.4. Графи G_{21} , G_{22} вкладені в евклідову площину із трьома приклеєними лентами Мебіуса та в N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса, відповідно.

Твердження 3.4. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{23} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,5,5,6}(K_4)$ при наступному φ -пере творенні $\varphi(K_5 + St_{4,5,5,6}(K_4), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{23}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2, x_3 мають степінь 2, x_4 має степінь 3, причому множина ребер графа G_{23} мінімально покрита множинами ребер графа K_5 та чотирьох графів K_4 .

2. Граф G_{24} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,5,6,6}(K_4)$ при наступному φ -пере творенні $\varphi(K_5 + St_{4,5,6,6}(K_4), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{24}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1 має степінь 1, x_2 має степінь 2, x_4, x_3 , мають степінь 3, причому множина ребер графа G_{24} мінімально покрита множинами ребер графа K_5 та чотирьох графів K_4 .

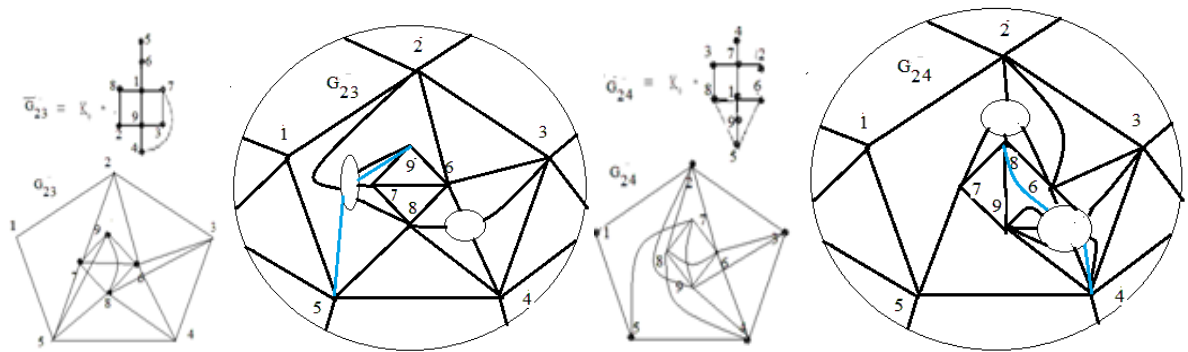


Рис. 3.5. Графи G_{23} , G_{24} вкладені мінімально в N_1 із двома приклясними лентами Мебіуса.

Твердження 3.5. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{25} є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазізірки $St_{5,5,5,6}(K_4 \setminus e)$ при наступному φ -пере творенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{5,5,5,6}(K_4 \setminus e), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{25}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа $K_5 \setminus e$, x_1, x_2, x_3 мають степінь 2, x_4 має степінь 4, x_5 має степінь 1, причому множина ребер графа G_{25} мінімально покрита множинами ребер двох графів $K_5 \setminus e$ та чотирьох графів K_4 .

2. Граф G_{26} є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазізірки $St_{5,5,6,6}(K_4 \setminus e)$ при наступному φ -пере творенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{5,5,6,6}(K_4 \setminus e), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{26}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа $K_5 \setminus e$, x_1, x_2 мають степінь 1, x_4 має степінь 2, x_3, x_5 мають степінь 4, причому множина ребер графа G_{26} мінімально покрита множинами ребер трьох графів $K_5 \setminus e$ та двох графів K_4 .

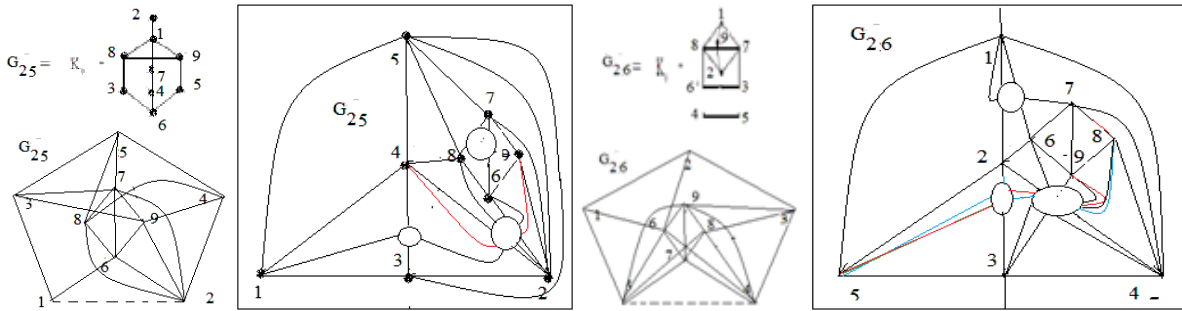


Рис. 3.6. Графи G_{25} , G_{26} вкладені в евклідову площину із трьома лентами Мебіуса.

Твердження 3.6. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{27} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{5,5,5,6}(K_4)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{5,5,5,6}(K_4), \sum_{i=1}^3 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{27}, \{a_i^*\}_{i=1}^3)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2, x_3 мають степінь 3, причому множина ребер графа G_{27} мінімально покрита множинами ребер графа K_5 та трьох графів K_4 .
2. Граф G_{28} є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазізірки $St_{4,4,5,7}(K_4 \setminus K_{1,2}^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{4,4,5,7}(K_4 \setminus K_{1,2}^1), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{28}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа $K_5 \setminus e$, x_1, x_2, x_3 мають степінь 2, x_4, x_5 мають степінь 2, причому множина ребер графа G_{28} мінімально покрита множинами ребер графа $K_5 \setminus e$ та чотирьох графів K_4 .

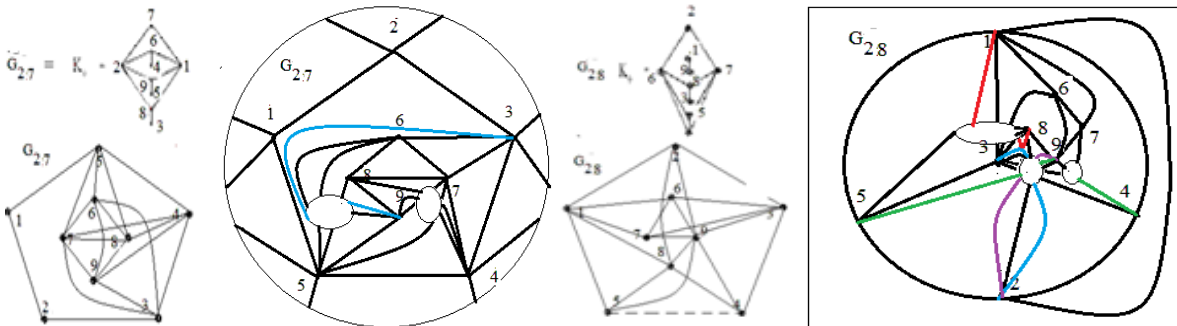


Рис. 3.7. Графи G_{27} вкладено в N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса, G_{28} вкладено в евклідову площину із трьома лентами Мебіуса.

2. Частина 4.

Твердження 4.1. Мають місце наступні співвідношення:

- 1 Граф G_{29} є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазізірки $St_{5,5,5,5}(K_4)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{5,5,5,5}(K_4), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{29}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа $K_5 \setminus e$, x_1, x_2, x_3 мають степінь 2, x_4 має степінь 3,

причому множина ребер графа G_{29} мінімально покрита множинами ребер двох графів $K_5 \setminus e$ та трьох графів K_4 .

2. Граф G_{30} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,4,6,6}(K_4 \setminus K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{4,4,6,6}(K_4 \setminus K_2^1), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{30}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 1, x_3 має степінь 2, x_4, x_5 мають степінь 3, причому множина ребер графа G_{30} мінімально покрита множинами ребер графа K_5 та трьох графів K_4 .

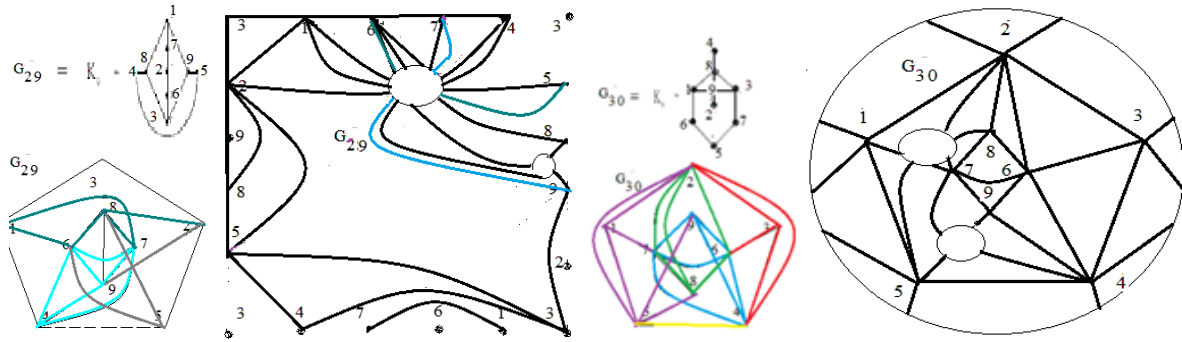


Рис. 4.1. Графи G_{29}, G_{30} вкладені в N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса.

Твердження 4.2. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{31} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,4,6,6}(K_4)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{4,4,6,6}(K_4), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{31}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2, x_3, x_4 мають степінь 2, причому множина ребер графа G_{31} мінімально покрита множинами ребер графа K_5 та чотирьох графів K_4 .

2. Граф G_{32} є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазізірки $St_{3,5,5,6}(z_4 \setminus e)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{3,5,5,6}(z_4 \setminus e), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{32}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де $z_4 \setminus e$ простий ланцюг довжини 3, x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа $K_5 \setminus e$, x_1 має степінь 1, x_3, x_2, x_4 мають степінь 3, x_5 має степінь 2, причому множина ребер графа G_{32} мінімально покрита множинами ребер графа $K_5 \setminus e$ та чотирьох графів K_4 .

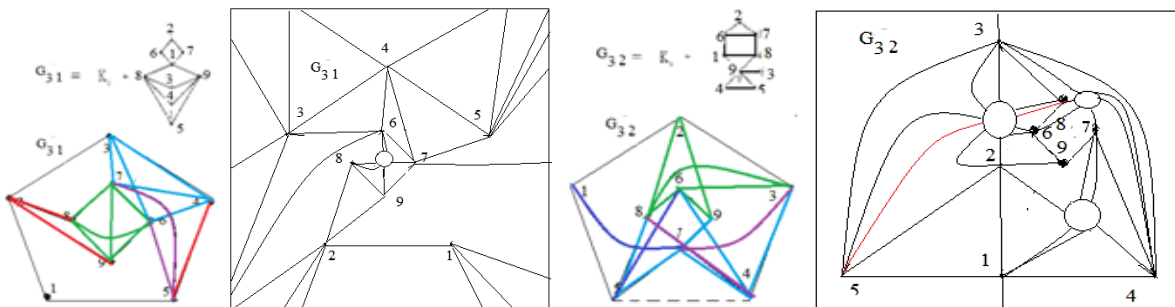


Рис. 4.2. Графи G_{31}, G_{32} вкладені мінімально в N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса.

Твердження 4.3. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{33} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{5,5,5,5}(K_4)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{5,5,5,5}(K_4), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{33}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2, x_3, x_4 мають степінь 2, причому множина ребер графа G_{33} мінімально покрита множинами ребер графа K_5 та трьох графів K_4 .
2. Граф G_{34} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{3,3,5,6}(K_4)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{3,3,5,6}(K_4), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{34}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2, x_3, x_4 мають степінь 2, x_5 має степінь 1, причому множина ребер графа G_{34} мінімально покрита множинами ребер графа K_5 та трьох графів K_4 .

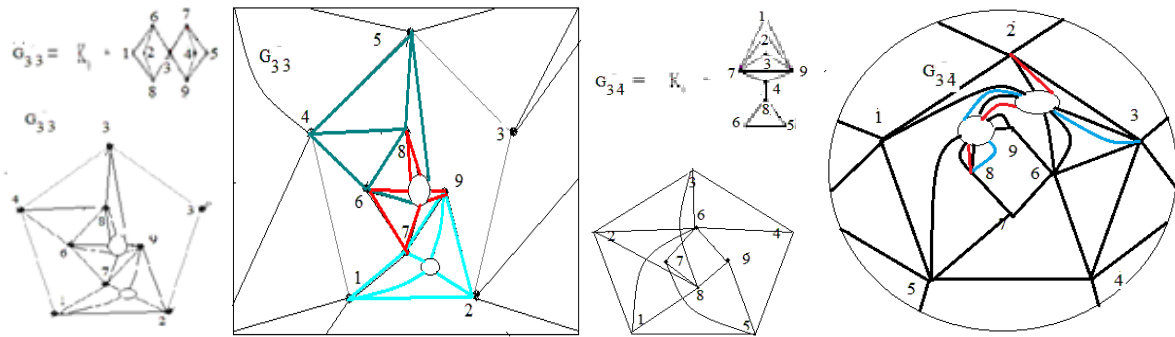


Рис. 4.3. Графи G_{33} , G_{34} вкладені мінімально в N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса.

Твердження 4.4. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{35} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,4,6,6}(K_4)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{4,4,6,6}(K_4), \sum_{i=1}^3 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{35}, \{a_i^*\}_{i=1}^3)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 2, x_3 має степінь 4, причому множина ребер графа G_{35} мінімально покрита множинами ребер двох графів K_5 та графа K_4 .
2. Граф G_{36} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{5,5,5,6}(K_4)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{5,5,5,6}(K_4), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{36}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2, x_3 мають степінь 2, x_4 має степінь 3, причому множина ребер графа G_{36} мінімально покрита множинами ребер графів K_5 , $K_5 \setminus (8,5)$ та графа K_4 .

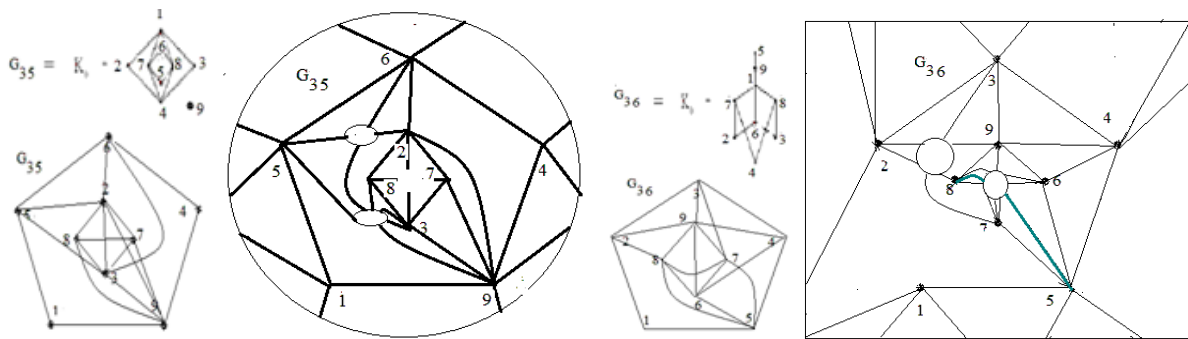


Рис.4.4. Графи G_{35} , G_{36} вкладено в N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса.

Частина 5.

Твердження 5.1. Для довільного мінімального вкладення f простого графа G до неорієнтованої поверхні N мають місце наступні співвідношення:

1. Немає ребер $e, e', e = (a, b), e' = (b, a)$ на границі довільної клітки s , $s \in S_G(N, f)$, але можуть мати місце повторення деяких вершин;
2. Немає повторення двох пар вершин чи двох пар частин ребер $e, e = (a, b)$, $e', e' = (c, d)$, які попарно розділяють одна одну та лежать на границі довільної клітки s , $s \in S_G(N, f)$;
3. Немає двох 2-кліток s_1, s_2 , де $s_1, s_2 \in S_G(N, f)$, на границях яких розташовані повторення трьох виділених ребра із різним порядком слідування.

Доведення. Доведемо співвідношення 1. Припустимо, методом від протилежного, що для деякого мінімального вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N границі клітки s , $s \in S_G(N, f)$ є два ребра $e, e', e = (a, b), e' = (b, a)$, як протилежно направлені копії ребра $\phi(e) = (\phi(a), \phi(b))$, розташовані на границі ∂s , т. то, на поверхні N одна лента Мебіуса містить одне ребро $\phi(e)$, де операція ϕ - ототодження точок на границях кліток є оберненою до операції розбиття на клітки поверхні N . Оскільки кожне з цих ребер належить перетину однієї з двох пар кліток $(s, s_1), (s, s_2)$ то, видаливши ребро e , ми, тим самим, видаляємо й ребро e' , утворюючи простий цикл Z , який містить всі ті ребра простого графа $G \setminus e$, що належали границям кліток s, s_1, s_2 , та стане границею нової клітки s_0 , $s_0 \in S_{G \setminus e}(N, f)$.

Побудуємо вкладення $f', f': G \rightarrow N$, де $f'|_{G \setminus e} = f|_{G \setminus e}$, $f'(e) \subset \overline{s_0}$, причому вершинами нового ребра стане кінцева вершина ребра (a, b) та початкова вершина ребра (b, a) . Отримаємо розбиття клітки s_0 на дві клітки, причому одна з яких буде утворена шляхом ототодження двох пар діаметрально протилежних вершин, т.то лентою Мебіуса без ребра, яку замінимо 2-кліткою зменшивши рід $\gamma(N)$ на 1. Тим самим отримаємо суперечність умові про рід графа G , припущення невірне. Доведення співвідношення 1 закінчене.

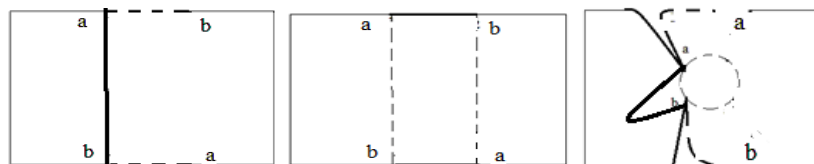


Рис. 5.1. Ряд з трьох карт ілюструє співвідношення 1 твердження 5.1.

Доведемо співвідношення 2. Припустимо, методом від протилежного, що деяким мінімальним вкладенням f графа G до неорієнтованої поверхні N із, принаймні, двома 2-ручками та однією лентою Мебіуса, розташовані на границі деякої клітки $s, s \in S_G(N, f)$, повторення або двох пар вершин, або двох пар частин ребер e, e' , де $e = (a, b), e' = (c, d)$, які розміщені на границі ∂s як копії ребер $\phi(e), \phi(e')$, де $\phi(e) = (\phi(a), \phi(b)), \phi(e') = (\phi(c), \phi(d))$, т. то, на поверхні N дві ручки містять по одному ребру $\phi(e)$ чи $\phi(e')$, де операція ϕ - ототождження вершин та ребер на границях кліток є оберненою до операції розбиття на клітки поверхні N мінімальним вкладенням f графа G . Розглянемо простий шлях L , що лежить в середині клітки s і з'єднує середні точки копій ребра e чи його частини, та який стане негомотопним нулю простим циклом $\phi(L)$ на поверхні N після операції ϕ - ототождження копій ребер (частин) та вершин графа G . Видалимо цикл $\phi(L)$ і ребро $\phi(e)$ тим самим відріжемо звільнену ручку поверхні та розглянемо вкладення $f', f' = f|_{G \setminus e}$, як звуження вкладення f на підграф $G \setminus e$ до неорієнтованої поверхні N' роду $\gamma(N'), \gamma(N') = \gamma(N) - 2$, причому ребро $\phi(e') = (\phi(c), \phi(d))$ буде вкладене на ручці h' , так, що з одного боку якого розташовано клітку s' з вершиною $\phi(a)$ на границі $\partial s'$, а з другого боку розташовано клітку s'' з вершиною $\phi(b)$ на $\partial s''$, де $\phi(e') \subset \partial s' \cap \partial s''$. Приклеїмо до цих кліток $\bar{s}' \cup \bar{s}''$ ленту Мебіуса та вкладемо ребро $f'(\phi(a), \phi(b))$ до $\bar{s}' \cup \bar{s}''$ не перетинаючи $f'(\phi(e'))$. Тим самим отримаємо вкладення графа G до поверхні N'' роду $\gamma(N''), \gamma(N'') = (\gamma(N) - 2) + 1$, яке суперечить умові співвідношення 2, т. то припущення невірне. Доведення співвідношення 2 закінчене.

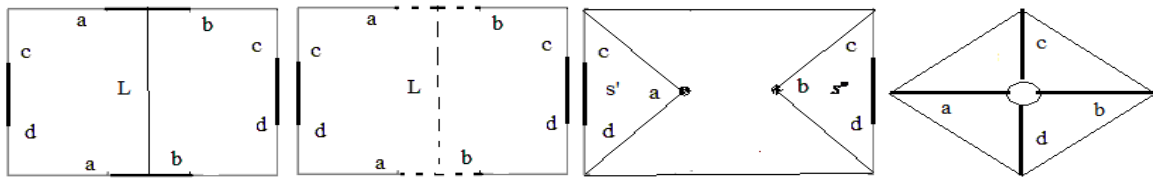


Рис. 5.2.

Ілюструє співвідношення 2 твердження 20,

Доведемо твердження 3. Припустимо, методом від протилежного, що деяким мінімальним вкладенням f графа G до неорієнтованої поверхні N із, принаймні, 2-ручкою R та лентою Мебіуса M , розташовані на границях деяких 2-кліток s_1, s_2 , де $s_1, s_2 \in S_G(N, f)$, три ребра e, e', e'' , де $e = (a, b), e' = (c, d), e'' = (g, h)$, які розміщені на границі ∂s_1 в порядку $\phi(e), \phi(e'), \phi(e'')$, а на границі ∂s_2 в порядку $\phi(e), \phi(e''), \phi(e')$, де $\phi(e) = (\phi(a), \phi(b)), \phi(e') = (\phi(c), \phi(d)), \phi(e'') = (\phi(g), \phi(h))$, де ϕ - операція ототождження вершин та ребер на границях кліток, яка є оберненою до операції розбиття на клітки поверхні N мінімальним вкладенням f графа G . Тоді ребра $\phi(e), \phi(e')$ з $G \cap (\partial s_1 \cup \partial s_2)$ мають розміщуватися на 2-ручці R , та на M ленті Мебіуса, на якій переставимо місцями кінцеві вершини (перевернемо ребро) $\phi(e)$. Розглянемо прості ланцюги L_1, L_2 , які з'єднують середини ребер e, e' на клітках s_1, s_2 , відповідно, та утворюють простий цикл Z в результаті операції ототождження вершин та ребер на границях кліток s_1, s_2 . Видалимо ребра $\phi(e)$ та $\phi(e')$ та отримаємо вільну від ребер 2-ручку R . Видалимо простий цикл Z , т. то розріжемо 2-ручку R , причому не розділяємо поверхню N на дві частини. Отримаємо вкладення $f', f' = f|_{G \setminus \{e, e'\}}$, графа $G \setminus \{e, e'\}$ до неорієнтованої поверхні N' , утвореної з N шляхом видалення ручки R , де $\gamma(N') \leq \gamma(N) - 2$. Оскільки таке вкладення 2-клітковим, то розмістимо на ленті M ребро $f'(e'')$, яке, разом з вершинами

видаленого ребра e' належатиме двом псевдокліткам на границях яких розділятимуть одна одну пари кінцевих вершин ребер e, e' . Продовжимо вкладення f' на ребра e, e' , які перехрещені на площинному диску, уникаючи перетину шляхом розташування їх на ленті M , де вже вкрито вершини ребра e'' . Тим самим отримаємо суперечливі умови про мінімальність вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N , т. то припущення невірне. Доведення співвідношення 3 закінчене. Доведення твердження 5.1 закінчене.

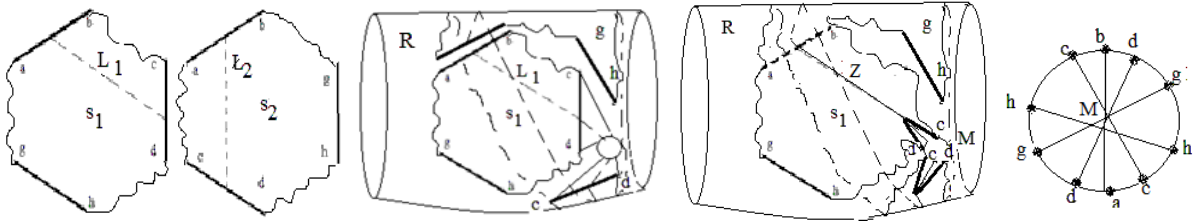


Рис. 5.3. Ілюструє співвідношення 3 твердження 5.1.

Твердження 5.2. Для довільного мінімального вкладення f простого графа G до орієнтованої поверхні N не мають місця співвідношення твердження 5.1.

Доведення. В кожному із співвідношень твердження 5.1 є лента Мебіуса, тому для орієнтованої поверхні N кожне з цих співвідношень не матиме місця.

Теорема 5.1. Кожен граф-обструкція H для N_2 -неорієнтованої поверхні рода 2 задовольняє наступним співвідношенням:

1. Довільне ребро $u, u = (a, b)$, розміщується на ленті Мебіуса деяким мінімальним вкладенням графа H в N_3 та існує мінімальний по включенню проєктивно-площинний підграф K графа $H \setminus u$ чи його частина, що задовольняє умові:
 $(t_K(\{a, b\}, N_3) = 1) \wedge (t_{K \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2)$;
2. Існує найменша по включенню множина різних підграфів K_i яка покриває множину ребер 2-зв'язного графа H , де, K - локальний проєктивно-площинний підграф чи частинний підграф графа $H \setminus e$, гомеоморфний $K_5 \setminus e$ чи $K_{3,3} \setminus e$.

Доведення. Доведемо співвідношення 1. Нехай $u, u = (a, b)$, довільне ребро графа-обструкції H для неорієнтованої поверхні N_2 рода 2 та мінімальне вкладення f , $f : H - u \rightarrow N_2$, яке розташовує кінцеві вершини ребра $u = (a, b)$ на границях двох кліток s_1, s_2 , $s_i \in S_H(N_2, f)$, $S_H(N_2, f) = N_2 \setminus f(H)$, де $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$. Тоді це ребро не може з'єднувати два підграфи графа-обструкції H та існуватиме підграф K_5 графа-обструкції H гомеоморфний або K_5 , або $K_{3,3}$, який вкладенням f розміщується на проєктивній площині із однією приклеєною лентою Мебіуса так, що всі його вершини виходитимуть на границю однієї клітки, причому деякі з подвійним доступом. Тоді ребро $u = (a, b)$ буде розміщено на ленті Мебіуса разом з, принаймні одним ребром, яке на проєктивній площині зхрещене із u . Відмітимо, що $s_1 \neq s_2$, тобто матимемо рівняння $t_{H \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2$, бо у разі однієї клітки $s_1 = s_2$ було б можливо продовжити вкладення шляхом розміщення ребра $f(u)$ в середину клітки s_1 , що суперечить визначенню граф-обструкції для неорієнтованої поверхні N_2 рода 2. Тоді існуватиме найменший по включенню локально площинний на неорієнтованої

поверхні N_2 підграф K графа $H \setminus u$, який містить всі вершини, що виходять на границі кліток $\partial s_1 \cup \partial s_2$, тобто задовольняє рівності $t_{H \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2$. Довизначивши вкладення f шляхом додавання відрізка $[a, b]$ до 2-зв'язного підграфа $f(K)$, матимемо перетин принаймні одного ребра $f(u')$ з $[a, b]$. Приклеїмо до N_2 ленту Мебіуса в місці перетину ребер $f(u')$, та перевизначимо вкладення $f : H - u \rightarrow N_2$ шляхом розведення на ленті Мебіуса ребра $f(u')$ з ребром $f'(u)$. Тим самим отримаємо мінімальне вкладення $f', f' : H \rightarrow N_3$, яке розташовує кінцеві вершини ребра $u = (a, b)$ на границі однієї клітки, та рівність $t_H(\{a, b\}, N_3) = 1$. Доведення співвідношення 1. закінчене.

Доведемо співвідношення 2 використовуючи наведені вище позначення для виділення локально площинних підграфів K_i графа $H \setminus u$, який задовольняє умові:

$(t_{K_i}(\{a, b\}, N_3) = 1) \wedge (t_{K_i \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2)$. Розглянемо всі можливі випадки для графа $H \setminus u$:

- 1). Існує простий цикл $f(z)$ графа $H \setminus u$, $u = (a, b)$, який містить вершини $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$;
- 2). Не існує простого циклу $f(z)$ графа $H \setminus u$, який містив би вершини $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$;

Випадок 1). Циклом $f(z)$ буде простий цикл, який містить принаймні ребра з кінцевими вершинами $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$ та входить до об'єднання границь тих кліток чи псевдокліток s_i , $s_i \in N_2 \setminus f(H)$, $i = 1, 2, \dots, n$, що утворюють ланцюжок з початком в s_1 та кінцем в s_n , $s_n = s_2$, а кожна наступна клітка ланцюжка матиме принаймні одне спільне ребро із попередньою кліткою цього ланцюжка. У виродженому випадку цей ланцюжок кліток складатиметься тільки з двох трикутних кліток чи псевдокліток s_1, s_2 . В графа $H \setminus u$ має існувати найменший по включенню локально площинний підграф K , який задовольняє умові: $(t_K(\{a, b\}, N_3) = 1) \wedge (t_{K \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2)$, бо інакше порушуватиметься умова про H як граф-обструкцію. Тобто мають бути, або три ланцюги ненульової довжини, що належать границям кліток ланцюжка і мають спільну кінцеву вершину, або два зхрещених на площині діагональ них відносно $f(z)$ ланцюги L_1, L_2 ненульової довжини, (один з них належатиме до границь кліток ланцюжка, а інший не матиме спільних ребер із границею жодної клітки ланцюжка), які парами своїх кінцевих вершин розділятимуть один одного та пару вершини a, b на $f(z)$. Тоді локально площинний підграф K матиме вигляд $f(z) \cup L_1 \cup L_2$ тобто $f(K) \cong K_4$, та задовольнятиме умові: $t_{K \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2$ для довільного ребра $u = (a, b)$. У випадку коли вершини a, b є внутрішніми точками несуміжних ребер графа K , то граф $K + (a, b) \cong K_{3,3}$.

Випадок 2). Нехай не існує простого циклу $f(z)$ графа $H \setminus u$, який містив би вершини $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$. Це означатиме що, видалене ребро $u = (a, b)$ розірвало той простий цикл z' графа H , що за умови 2- зв'язності графа H проходив через вершини a, b . Тоді має бути 2-зв'язний підграф H' графа $H \setminus u$ який має вершину a та простий ланцюг L' , який задовольнятиме умові $H' \cup L' \cup u \supseteq z'$. Для 2-зв'язного підграфа H' виконуватиметься наведений вище випадок 1). Доведення для випадку 2) закінчене. Таким чином для кожного ребра u графа 2-зв'язного графа H є підграф K_i , $K_i = K(u) + u$, де локально площинний підграф $K(u)$ із доданим ребром u (принаймні $K + e \cong K_5$, чи $K + e \cong K_{3,3}$). Тоді об'єднання

всіх таких K_i покриває множину ребер графа H . Доведення співвідношення 2 закінчене. Доведення теореми 5.1 закінчене.

Наслідок 1. Граф-обструкція H для неорієнтованої поверхні рода 2 є φ -образом двох квазізірок $St_{n_1, n_2, \dots, n_{k_1}}(H_1), St_{m_1, m_2, \dots, m_{k_2}}(H_2)$ з центрами - підграфами $H_i, k_i = |H_i|, i \neq j, i, j = 1, 2$, де квазізірка може не мати висячих ребер, а у випадку наявності висячих ребер, кожна l -та висяча вершина інцидентна nl висячим вершинам тих ребер, що приєднуються кінцевими вершинами до ml' вершин підграфа H_j , де $l = 1, 2, \dots, k_1, l' = 1, 2, \dots, k_2, i \neq j, i, j = 1, 2$, саме ці кінцеві вершини утворюють множину точок приєднання з числом досяжності 2 відносно N_2 та мають наступні властивості для 2-зв'язного H :

а). для кожна вершина центру H_i з підмножини точок приєднання приєднана, або висячим ребром до однієї вершини підграфа H_j , або двома висячими ребрами до кожної з кінцевих вершин деякого ребра підграфа H_j , або трьома висячими ребрами до кожної вершини підграфа K_3 графа H_j , де $i \neq j, i, j = 1, 2$;

б). кожне ребро підграфа H_i чи H_j є суттєвим при операції його видалення, або відносно неорієнтованого роду $\gamma(H_i)$ чи $\gamma(H_j)$, де $i \neq j, i, j = 1, 2$, або відносно числа досяжності $t_{H_i}(X_{ij}, N_2)$, множини точок приєднання $X_{ij}, X_{ij} = X(H_i, H_j)$, квазізірки $St_{n_1, n_2, \dots, n_{k_1}}(H_1)$ до графа H_j , де $i \neq j, i, j = 1, 2$, або, як бокове ребро підграфа K_3 , відносно числа багатосторонності $ms_{H_i}(X_{ij}, N_2)$, множини точок приєднання $X_{ij}, X_{ij} = X(H_i, H_j)$, квазізірки $St_{n_1, n_2, \dots, n_{k_1}}(H_1)$ до графа H_j , де $i \neq j, i, j = 1, 2$.

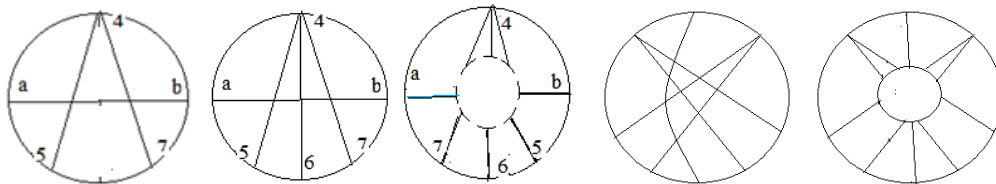


Рис. 5.3. На картах наведено приклад підграфа K графа H з теореми 5.1, вкладеного до елементарного диска проективної площини

Список літератури

1. Хоменко М. П. φ -перетворення графів. препринт ИМ АНУ, Киев, 1973, 383 с.
2. Хоменко Н. П. Топологические аспекты теории графов. препринт ИМ АНУ, Киев, 1970.
3. Хоменко Н. П. Островерхий Е. Б. Существенные элементы и род графа. препринт "Минимальные вложения графов" ИМ АНУ, Киев, 1972, 62 с.
4. Cashy J., Irreducible graphs for the Klein bottle, Ohio State University Ph.D. Thesis, 2000.
5. Mohar B., Thomassen C., Graphs on Surfaces, Johns Hopkins University Press, 2001.
6. Suhkjin Hur. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10, Phd, Ohio State University, 2008.
7. Петренюк В.І., Петренюк Д.А., Нова верхня межа неорієнтованого роду простого графа. Комп'ютерна математика, №1, ІК НАНУ, Київ, 2019, с.10-19.

РОЗДІЛ 5. СТРУКТУРИ НА ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА

5.1. ПРО АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ 2-ЗВ'ЯЗНИХ МІНОРІВ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА

Вступ. Основні визначення та позначення узяті із [1,2,3]. Під точкою графа розумітимемо або його вершину, або внутрішню точку його ребра. Розглянемо задачу побудови всіх 2-зв'язних графів-обструкцій для N_2 - поверхні Клейна із множинами ребер, кожне з яких є суттєвим відносно неорієнтованого роду 3 при операціях видалення ребра чи стискання його в точку, тобто мінорів неорієнтованого роду 3. В [4] наведено числом 668, як потужність множини всіх неізоморфних 2-зв'язних мінорів неорієнтованого роду 3, але немає їхніх діаграм. Використаємо для побудови діаграм 2-зв'язних мінорів неорієнтованого роду 3 структурні властивості таких графів, виписані в [5,8]. Список всіх неізоморфних мінорів неорієнтованого роду 2 містить 35 графів. В [6] наведено 12 базисних графів проективної площини, утворених перетвореннями методу релятивних компонент, та наведено множину з 63-х базисних графів для поверхні Клейна. Подібна задача побудови графів-обструкцій неорієнтованого роду на основі множини відомих графів-обструкцій для неорієнтованого роду k , має розв'язок для не більш ніж на 10 вершинах [7], а саме, повної множини для проективної площини та неповної для інших поверхонь, зокрема, поверхні Клейна.. Використаємо метод ϕ -перетворень графів та теорему 2 [8].

Твердження 1. Нехай G_i - мінор неорієнтованого роду 2, а граф G поданий як ϕ -образ $\phi(G_i \setminus e + St_n(H), \sum_{j=1}^2 (a_{j1} + g_{j1})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_{i=1}^2)$, де $i=1(1)35$, $G_i \setminus e \in G_i$ - мінор із видаленим ребром e та заданими точками з множини M_i , $M_i = \{a_{j1}, a_{j2}\}$, досяжною на поверхні Клейна. Задано $St_n(H)$ -квасзірку з центром графом H та множиною висячих ребер як сумою підмножин $\{(a_i, g_{j1})\}_{i=1}^m$ та $\{(b_k, g_{j2})\}_{k=m+1}^n$, де $n > m \geq 1$, які висячими вершинами a_i, b_k приклеєно довільним чином до двох точок з множини X , $X = \{g_{j1}, g_{j2}\}$, причому множина точок Y , $Y = \{a_i, b_k\}_{i+k=1}^n$, на евклідовій площині має число досяжності $t_H(Y, S_0)$, де $t_H(Y, S_0) = 2$, а множина X на поверхні Клейна має число досяжності $t_{St_n(H)}(X, N_2)$, де $t_{St_n(H)}(X, N_2) = 1$.

Якщо граф H гомеоморфний одному з графів $\{K_4, K_{2,3}, K_5 \setminus e\}$ та має задану множину точок $X \cup Y$, де $X \cap Y = \emptyset$, досяжно на проективній площини, та з числом досяжності $t_G(X \cup Y, S_0)$ відносно евклідової площини S_0 , де $t_G(X \cup Y, S_0) = 2$, то граф G - мінор чи граф-обструкція неорієнтованого роду 3.

Доведення. Граф $G, G = D_{17}$, можливо подати як призму, в основах якої лежать два підграфи ізоморфних K_4 , вершини яких попарно з'єднані ребрами. Множину G^1 ребер графа G розіб'ємо на класи еквівалентності відносно групи автоморфізмів цього графа, тобто підмножини ребер графів обох основ та множина з чотирьох ребер граней. Для кожного представника класу еквівалентності проведемо стискання в точку. Результат наведено на рис.1. для ребер класу з представником (4.6), на другій карті для (7,8). Згідно цих карт кожна пара вершин цих стиснутих графів лежить або на границі 2-клітки чи псевдоклітки, тобто є досяжною на проективній площині. Тому можливо приклеїти до червоних пар квазіірки, з числа наведених на рис.2, ототожнивши з парою неінцидентних вершин графа G . Варіанти склеєних ϕ -образів графів наведені на рис.3.

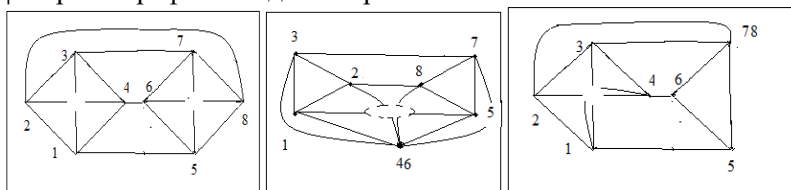


Рис.1. Вкладення D_{17} в N_2 на 1-й карті, на 2-й та на 3-й графі $G_{(4,6)}$, $G_{(7,8)}$ вкладені в N_1 .

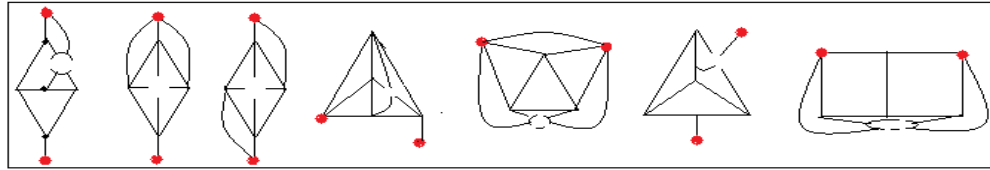
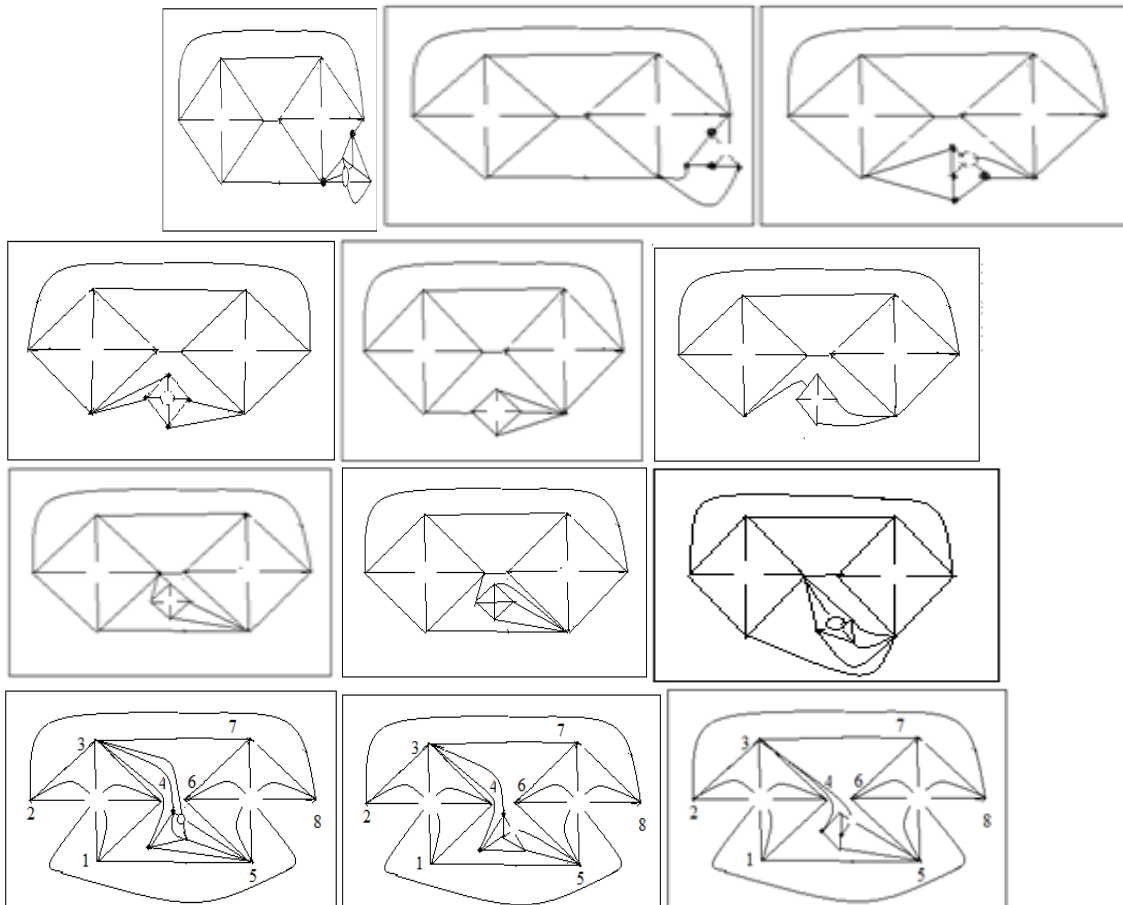


Рис.2. Квазіірки $St_n(H)$ зі склеєними в пару точок підмножинамиисячих вершин.

Для побудови 2-зв'язних мінорів для N_2 використаємо множину всіх неізоморфних мінорів проективної площини. Нехай $G := D_{17}$. Перебираємо всі різні варіанти склейки по множині з двох точок графа G та пари точок квазіірки із центром H , можливим є ототождження кількохисячих вершинами в одну чи другу точку пари склейки. Можливими будуть наступні варіанти ϕ -образу зображені на рис 2, де виділено пару склеєнихисячих вершин, які приклеюватимемо до пари вершин графа D_{17} . Відмітимо, що деякіисячі ребра квазіірки $St_n(H)$ стягнуті в точку як несуттєві відносно неорієнтованої поверхні N_2 . Виберемо точки склейки робимо серед тих пар вершин, які є елементами досяжної множини на N_2 . Видалимо одне з ребер (a, b) та приклеїмо попарно до кінцевих вершин видаленого ребра ті вершини квазіірки із центром H та множиноюисячих вершин, розбитою на дві підмножини, що утворились при ототоженні цих двох підмножин. Можливими є випадки склейок зображені на рис.2. Доведення твердження 1 закінчене.



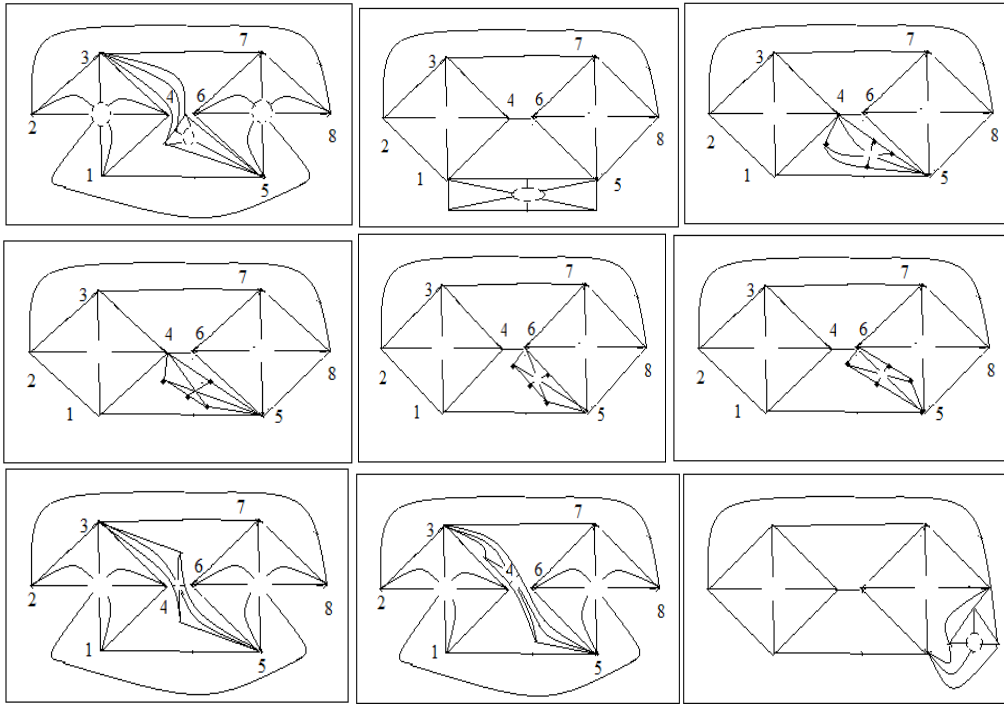


Рис. 3. Діаграми 2-зв'язних мінорів для поверхні Клейна..

Твердження 2. Приблизне число 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна - 700.

Доведення. Кількість зв'язних мінорів для проективної площини дорівнює 32. Для вибраного наосліп серед цих графів мінору D_{17} маємо множину з 21-го графа, наведену на рис. 3. Вважатимемо, що для кожного з графів-мінорів проективної площини кількість мінорів приблизно однакова. Отже матимемо число 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна приблизно 700. Схематичне доведення закінчене. Твердження 1 є основою лінійного алгоритму 1 яким можливо побудувати всі 2-зв'язні мінори поверхні Клейна.

Алгоритм 1. Вхід: Множина $\{G_i\}_{i=1}^{35}$ із 35-ти мінорів проективної площини, множина всіх неізоморфних вкладень цих графів в поверхню Клейна, $\{St_{n_j}(H_j)\}_{j=1}^7$ множина квазізірок для склеювання по двом парам виділених вершин. Вихід: Множина 2-зв'язних графів-обструкцій $\{\varphi(G_k)\}_{k=1}^R$ неорієнто-ваного роду 3.

Для циклу з параметром і від 1 до 35 виконати наступні дії:

9. $G := G_i$;

10. Побудуємо множину $B = \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{|B|}$ всіх пар вершин графа G , які розташовані на границі 2-клітки поверхні Клейна чи її псевдоклітки та зберігають досяжність в графах, отриманих шляхом видалення довільного ребра чи стискання ребра в точку.

11. Для циклу з параметром k від 1 до $|B|$ виконати наступні дії:

12. $(a, b) := \{a_k, b_k\}$;

13. Для циклу з параметром j від 1 до 7 виконати наступні дії:

a. $St_n(H) := St_{n_j}(H_j)$;

b. Склеїмо попарно $(G, (a, b))$ та $(St_n(H), (a', b'))$;

c. Отримаємо пару $\varphi(G), (a^*, b^*)$;

d. Виводимо $\varphi(G)$;

e. Кінець циклу по j.

14. Кінець циклу по k

15. Кінець циклу по i .
16. Кінець алгоритму 1

Висновки. Таким чином в роботі наведена побудова лінійного побудови діаграм 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна.

Література

- [9] *Хоменко М. П.* Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ АНУ. Киев.. – 1973. -383 с.
- [10] *Хоменко М. П.* φ -перетворення графів. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1970. -299 с.
- [11] *Mohar B., Thomassen C.* Graphs on Surfaces. Johns Hopkins University Press, 2001. – 412 p.
- [12] *P.Skoda.* Obstructions for embedding graphs into surfaces, Simon Frazer University, PhD dissertation, 2012.-133 p.
- [13] *Петренюк В.І.* Про структуру площинних підграфів графів-обструкцій неорієнтованої поверхні заданого роду. *Фізико математичне моделювання та інформаційні технології.* 2021, № 33. с. 105–109.
- [14] [Anna Flotto. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, University Bielefeld, 2010. -174 pp.](#)
- [15] *Hur S.* The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Phd, Ohio State University, 2008. http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1209141894.

Петренюк В.І., Петренюк Д.А., Оришака О.В. Структура проєктивно площинних підграфів графів - обструкцій заданої поверхні. Кібернетика та комп'ютерні технології, №2, Інститут кібернетики НАНУ, Київ, 2022, с.13-30. http://cctech.org.ua/images/docs/Articles/2022/paper_22_2_2.pdf

5.2. МОДЕЛІ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА.

Вступ. Основні поняття та позначення взяті з [1],[2],[3]. Розглянуто задачу дослідження структури графів-обструкцій для поверхні Клейна та побудовані їхні граф-моделі як основу з якої, шляхом видалення чи стискання деякої множини ребер, утворюються графи-обструкції для заданої поверхні неорієнтованого роду. Задача дослідження структури графів неорієнтованого роду розглядалася [4,5,6]. В [7] методом релятивних компонент була стиснута множина мінорів для проєктивної площини до 12-ти базисних мінорів та побудовано множину з 62-х мінорів поверхні Клейна. Для цього розглядали всі неізоморфні мінімальні вкладення кожного з базисних мінорів та знаходили множину всіх різні пари вершин, які є досяжними на проєктивній площині при операціях видалення чи стискання в точку довільного ребра цього графа, потім до обраної пари точок приєднували пару несуміжних вершин графа $K_3 \setminus e$. В [8] обчислена кількість 2-зв'язних графів-обструкцій для поверхні Клейна, частина діаграм цих графів наведена в [10].

Наш підхід, як продовження [9], полягатиме в знаходженні реберного покриття графа-обструкції G заданого роду мінімальним числом підграфів покриття з числа квазізірок з центрами - графами з суттєвими ребрами відносно числа досяжності чи неорієнтованого роду при операціях стискання в точку чи видалення ребра відносно заданої множини точок з числом досяжності 2 відносно евклідової площини та досяжними на проєктивній площині чи поверхні Клейна, наприклад, це підмножини множини точок графів $K_4, K_{2,3}, K_5 \setminus e, \overline{K_r}, r \geq 2$, чи граф-обструкцій проєктивної площини. Також знайдено необхідні умови для побудови графів-обструкцій для поверхні Клейна шляхом ототодження пар точок центрів та висячих вершин трьох квазізірок, тим самим маємо основу алгоритма побудови більшого числа графів-обструкцій для поверхні Клейна. Гіпотетично граф-обструкція заданого неорієнтованого роду $n, n \geq 2$, має вигляд циліндричної поверхні з n дисками-основами та бічною частиною, які можуть мати спільні множини точок на границях та на яких вкладені, принаймні частиною, графи-центри квазізірок, що мають задану множину точок досяжності 2 на евклідовій площині, а на бічній поверхні розміщуються висячі ребра, що перетинаються на площині та вкладаються без перетину за допомогою приклеєних до бічної поверхні лент Мебіуса. При цьому ребра матимуть, принаймні, два варіанти вкладення в бічну частину циліндричної поверхні, але не більше кількості приклеєних лент Мебіуса, завдяки цьому кожне висяче ребро вклатиметься на ленті Мебіуса, або тільки з одним ребром, або з двома суміжними ребрами. Відмітимо, що наведене нижче визначення 3 має аналогічне в [11].

Частина 1.

Нехай задано мінімальне вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$, тобто це найменша по включенню підмножина $\{s_i\}_{i=1}^t$ множини $S_G(N, f)$, $S_G(N, f) = N \setminus f(G)$, складена з кліток на границях яких розташовано точки з множини M . Кожен граф G неорієнтованого роду $k, k \geq 1$, може бути поданим наступним перетворенням:

$\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=1}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, як φ -образ графа H та зірки $St_n(g_0)$, приєднаної висячими вершинами g_i до точок a_i , де задана множина точок графа H , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, $M \subseteq (\partial s_1 \cup \partial s_2) \cap H^0$ яка розміщується на границях кліток s_1, s_2, \dots, s_t множини $N \setminus f'(H)$, де $t \geq 2, m \geq 2, i = 1, 2, \dots, m$, мінімальним вкладенням $f', f': H \rightarrow N'$.

Аналогічно характеристикам вкладення графа G до орієнтованої поверхні на підмножині $\{s_i, s_j, s_k\}$ множині $S_G(N, f)$, визначимо характеристику $\theta, \theta = 1$, множини M коли виконується умова

$\partial s_i \cap \partial s_j \cap \partial s_k \neq \emptyset$, тобто є, хоча б одна, спільна точка на їхніх границях, яка є центром кліткової зірки, утвореної із трьох кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$, або визначено характеристику $\partial\theta$, $\partial\theta = 1$, якщо довільні пари цих кліток мають на границях, мінімально, одну спільну точку, тобто утворюють клітковий цикл довжини 3, утворених із трьох кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$.

Позначення 1. Позначатимемо через $\angle(s_i, s_j)$ та називатимемо кутом між клітками чи псевдоклітками s_i, s_j множини $S_G(N, f)$ найменшу по включенню зірку графа G з центром в a , $a \in G^0 \cap (\partial s_i \cap \partial s_j)$, із множиною ребер - променів, розташованих з одного боку відносно точки перетину границь кліток s_i, s_j . Саме ці ребра чи їхні частини вкладатимемо до ленти Мебіуса, приклеєної до площини, для утворення псевдоклітки, на границі якої розміщуються об'єднання границь s_i, s_j .

Позначення 2. Нехай задане мінімальне вкладення f графа H до неорієнтованої поверхні N . Будемо позначати через $\alpha(\angle(s_1, s_2))$ операцію перетворення ребер e_1, e_2 , $f(e_1) \subset \partial s_1$, $f(e_2) \subset \partial s_2$, зі спільною вершиною a кліток s_1, s_{12}, s_2 , де $f(e_1) \cup f(e_2) \subseteq \partial s_{12}$, причому вкладення f графа H в N розміщує на границях кліток s_1, s_2 множину $f(M)$, $f(M) = f(\{a_i\}_{i=1}^m)$. Приклеїмо до клітки s_{12} ленту Мебіуса наступним чином. Розщепимо довільну внутрішню точку $f(x_i)$ ребра e_i , $e_i = (a_i, b_i)$ на точки x_i', x_i'' , де $i = 1, 2$. Виріжимо в середині s_{12} елементарний диск з центром в x_i та розташуємо на його границі діаметрально протилежні пари точок (x_1', x_2'') , (x_1'', x_2') як кінцеві точки частин схрещених ребер на площині елементарного диска. Отримаємо таким чином псевдоклітку s неорієнтованої поверхні N' , де $\gamma(N') = \gamma(N) + 1$, $\partial s = \partial s_1 \cup \partial s_2$, в яку можливо вкласти ту частину зірки $f'(St_n(g_0))$, яка приклеєна до точок множини $f(M) \cap \partial s$ і таким чином отримати вкладення графа G в поверхню N' .

Позначення 3. Під квазізіркою $St_G(H)$ з центром H будемо розуміти підграф чи частину H графа G з множиною висячих ребер прикріплених однією кінцевою точкою до вершини чи точки ребра підграфа H , а інші кінцеві точки належать множині приєднання M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$.

Визначення 1. Нехай задано мінімальне вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$. Будемо називати клітковою довжиною $d_G(s_i, s_j, f)$ між границями кліток s_i, s_j із заданими на них підмножинами L_i, L_j вершин зв'язного графа G , де $L_i \subseteq G^0 \cap \partial s_i$, $L_j \subseteq G^0 \cap \partial s_j$, $\{s_i, s_j\} \subseteq S_G(N, f)$, потужність $|J|$ найменшої по включенню впорядкованої множини J , $J = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+k}, s_j\}$, $J \subseteq S_G(N, f)$, де послідовні пари кліток мають на своїх границях, принаймні одне, спільне ребро. Причому підмножину множини J , складену із не менше ніж двох послідовних кліток зі спільною вершиною на границях, будемо рахувати як одну клітку. Також будемо говорити, що на множині J задано особливий простий клітковий ланцюг L_{ij} , $L_{ij} = L(s_i, s_j)$, який з'єднує клітки s_i, s_j кліткового графа для графа G . У випадку незв'язного графа G одна з кліток множини J буде не 2-кліткою і не псевдокліткою.

Визначення 2. Будемо називати деревом T досяжності множини точок M , та позначати через $T = T_G(M, N)$, зв'язного графа G , при заданому мінімальному вкладенні f графа G до неорієнтованої поверхні N , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$, пару множин

$(\{s_i\}_1^t, \{L_{ij}\})$, де $\{L_{ij}\}$ - найменша по включенню множина особливих кліткових ланцюгів $L(s_i, s_j)$ які, або безпосередньо, або як об'єднання кількох послідовних кліткових ланцюгів зі спільним кінцем одного та початком іншого, що з'єднують всі пари кліток s_i, s_j та мають найменшу суму довжин всіх L_{ij} із множини $\{L_{ij}\}$.

Визначення 3. Для множини точок $M, M = \{a_i\}_{i=1}^m$, зв'язного графа G роду $\gamma = \gamma(G)$ з числом досяжності $t_G(M, N_\gamma)$, де $t_G(M, N_\gamma) = t, t \geq 2$, будемо називати клітковою довжиною $d_G(M, t)$, де $d_G(M, t) = \min_{\forall f \in fGN \forall s_i, s_j \in T} \sum d_G(s_i, s_j, f)$, між підмножинами L_i, L_j множини $M, M = L_i \cup L_j, L_i \cap L_j = \emptyset$, розташованими на границях довільних кліток $s_i, s_j, \{s_i, s_j\} \subset S_G(N_\gamma, f)$, що реалізують число досяжності $t_G(M, N_\gamma)$, де fGN - множина всіх неізоморфних вкладень графа G до N_γ , що реалізують число досяжності $t_G(M, N_\gamma)$ множини точок M .

Визначення 4. Будемо називати множини $M, M = \{a_i\}_{i=1}^m$, точок графа G з числом досяжності t , де $t_G(M, \Sigma_0) = t$, критичною відносно кліткової довжини $d_G(M)$ при операції видалення довільного елемента a_i , якщо має місце нерівність $d_G(M \setminus a_i) < d_G(M)$, чи відносно операції стискання ребра $u = (ab)$ в точку a' (якщо $\{a, b\} \subset M$, то замість M розглядатимемо множину $M' = (M \setminus (a, b)) \cup \{a'\}$), якщо має місце нерівність $d_{Gu}(M') < d_G(M)$.

Визначення 5. Будемо називати граф G мінімальним відносно $d_G(M)$ при операції видалення або стискання в точку довільного ребра u , якщо, або $d_{Gu}(M) + 1 = d_G(M)$, або $d_{Gu}(M') < d_G(M)$, де Gu - граф з стиснутим в точку a' ребром $u = (a, b)$ та $M' = (M \setminus \{a, b\}) \cup a'$.

Визначення 6. Будемо говорити, що 2-зв'язний граф-обструкція G неорієнтованого роду $\gamma(G)$, $\gamma(G) > 1$, покривається множиною з $k, k = 2$, квазізірок $St_G(H_i)$ з центром H_i (коли центр є

виродженим графом з множиною вершин $H_i^0 = \{v_j\}_{j=1}^{r_i}$ матимемо множину $\sum_{j=1}^{r_i} St_G(v_j)$ зірок), якщо має

місце $G^1 = \sum_{j=1}^k St_G^1(H_j)$, (тобто кожне ребро графа належить, принаймні, одній з двох квазізірок), де

H_1 - площинний граф із заданою множиною точок M_1 з числом досяжності 2 відносно евклідової площини, граф H_2 роду $\gamma(H_2) \geq 0$ із заданою множиною точок M_2 з числом досяжності $t, t = 1$, (якщо $\gamma(H_2) = 0$, то $t = 2$) відносно поверхні роду $\gamma(H_2)$, причому всі висячі ребра-промені мають бути суттєвими відносно числа досяжності при операції видалення ребра, а деякі висячі ребра-промені можуть належати різним квазізіркам, або бути відсутніми взагалі, де $M_i = \{m_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$, та n_i висячими ребрами (m_{ij}, b_{ij}) , де $i = 1, 2, \dots, n, j \neq j', j, j' = 1(1) | G$.

Лема 1. Мають місце наступні твердження:

1. Кліткова відстань між заданою парою кліток мінімального неорієнтованого вкладення заданого зв'язного графа є збільшеною на 1 найменшою метричною відстанню між довільними парами точок на границях цих кліток.

2. Якщо множина M має більш ніж дві клітки мінімального неорієнтованого вкладення зв'язного графа та визначено дерево $T(M)$ (в якому вершинами будуть елементи множини M , а ребром буде наявність спільної точки для границь кліток множини M), то кліткова відстань між її елементами є сумою збільшених на 1 довжин найкоротших ланцюгів між парами довільних вершин дерева $T(M)$.

3. Ребро у графа G суттєве відносно числа досяжності заданої множини точок M , $M = \{a, b\}$, графа G при операції його видалення, якщо належить квазізірці $St_G(K_4 \setminus (a, b))$.
4. Граф $K_5 \setminus (a, b)$ ізоморфний $St(K_4)$ з чотирма висячими ребрами, з яких три мають висячі вершини ототожені в точку a , а четверте ребро стягнуте в точку b .
5. Зірка $St(K_4)$ 2-зв'язного графа-обструкції G заданого неорієнтованого роду 3 має, щонайменше, по одному висячому ребру-променю з кожної вершини графа K_4 чи, принаймні, чотирьох внутрішніх точок його ребер, причому деякі з них можуть бути стягнутими в точку.
6. Для кожного графа-обструкції є реберне покриття підграфами чи частинами гомеоморфними K_4 .

Доведення. Твердження 1,2,3 леми 1 впливатиме з поняття метрики графа та наведених вище визначень 3, 4, 5. Твердження 4 є очевидним. Довести твердження 5 можливо методом від протилежного, припустивши, що є вершина v графа K_4 , як центра квазізірки, що має степінь 3 та не належить ребру-променю квазізірки $St(K_4)$. Можливі два випадки для пари внутрішніх ребер графа K_4 :

Випадок 1. Ребра розміщені на ленті Мебіуса;

Випадок 2. Ребра розміщені на різних лентях Мебіуса.

Розглянемо випадок 1. Тоді можливо звільнити від одного зі схрещених ребер ленту Мебіуса, розташовану в середині 2-клітки δ з границею $\partial\delta$ – циклом z довжини 4 центра квазізірки, шляхом розміщення назовні циклу одного зі схрещених ребер, яке не матиме кінцевої вершини v . Тим самим зменшимо рід графа-обструкції G заданого неорієнтованого роду, що суперечить визначенню графа-обструкції. Припущення неможливе, твердження 5 для випадку 1 доведене. Розглянемо випадок 2. Якщо обидва внутрішні ребра графа K_4 не розміщені на ленті Мебіуса, то одне з них схрещується на площині із ребром–променем квазізірки $St(K_4)$ та розміщується на ленті Мебіуса, яка приклеєна до зовнішньої, відносно циклу z , клітки. Виконаємо симетричне відображення по вертикальній осі графа K_4 . Для цього переставимо місцями тільки пару протилежних вершин в циклі z одна з яких має степінь 3 та суміжні ребра. Тоді на зовнішній клітці, відносно повернутого циклу z , вкладемо без перетину ті висячі ребра-промені квазізірки, що вкладалися на ленті Мебіуса. Матимемо в результаті такого вкладення квазізірки, що, принаймні, лента Мебіуса h звільниться від одного з двох схрещених ребер. Схематично показано це на картах 6 та 7 рис.1. Тим самим зменшимо рід графа-обструкції G заданого неорієнтованого роду, що суперечить поняттю графа-обструкції. Припущення неможливе, твердження 5 для випадку 2. доведене

Доведення твердження 6. Оскільки кожне ребро графа-обструкції неорієнтованого роду графа G на евклідовій площині перетинається у внутрішній точці z , принаймні з одним ребром, розміщується певним мінімальним вкладенням на ленті Мебіуса неорієнтованої поверхні разом із, принаймні, одним ребром. Тоді довільне ребро є ребром підграфа гомеоморфного K_4 , який в свою чергу є підграфом чи частиною підграфа гомеоморфного графу Куратовського. З іншого боку, обидва графи Куратовського мають реберне покриття парою чи трійкою підграфів гомеоморфних K_4 . Таким чином граф-обструкція G матиме реберне покриття скінченою множиною з графів чи частин гомеоморфних K_4 . На 8-й карті рис. 1 наведено реберне покриття $K_{3,3}$ з двома частинами гомеоморфними графу K_4 , один без наведеного ребра, а друга частина отримана видаленням одного з трьох несуміжних ребер, окрім наведеного ребра. На 9-й карті рис. 1 наведено реберне покриття K_5 трьома гомеоморфними графу K_4 , один без чотирьох ребер з спільною вершиною v , із них два виділені ребра, а два інших утворені з колеса O_4 з чотирма ребрами-шпицями почерговим видаленням одного з наведених ребер. Доведення леми 1 закінчене.

Твердження 1. Нехай 2-зв'язний граф G є графом-обструкцією неорієнтованого роду 3, всі ребра якого є суттєвими відносно роду при операції видалення ребра чи його стискання в точку, має підграф $St_G(H_i)$ - квазізірка з центром H_i (коли центр є виродженим графом з множиною вершин

$H_i^0 = \{v_j\}_{j=1}^{r_i}$ матимемо замість квазізірки множини $\sum_{j=1}^{r_i} St_G(v_j)$ зірок), гомеоморфним площинному графу

із заданою множиною точок M_i з числом досяжності 2, де $M_i = \{m_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$, та n_i висячими ребрами $(m_{ij}, b_{ij'})$, де $i=1,2,3$, $j \neq j'$, $j, j' = 1(1) | G |$. Існує покриття множини ребер графа G трьома квазізірками $St_G(H_i)$, можливо із, однією спільною вершиною чи частиною ребра графів H_i, H_j .

Доведення. Нехай для 2-зв'язного графа G виконуються умови твердження 1. Тоді граф G має підграф чи частину Θ гомеоморфний одному із 104 графів-обструкцій для проективної площини, який в свою чергу можливо подати як об'єднання двох підграфів гомеоморфних одному з графів Куратовського [4]. Тобто множина ребер графа Θ покривається двома квазізірками виду $St_G(H_i)$, бо містить два різних підграфи чи частини H_i , кожен з яких гомеоморфний квазізіркам з центром $K_4, K_{2,3}, K_{3,3} \setminus e, K_5 \setminus e$, чи $K_5, K_{3,3}$. Відмітимо, що у випадку центру $K_{2,3}$ частина висячих ребер квазізірки матимуть кінцеву вершину, а сама зірка міститиме підграф чи частину гомеоморфну K_5 . Граф $G \in$ графом-обструкцією роду 3, то множина ребер $G^1 \setminus \Theta^1$ непушта і кожне ребро $u, u \in G^1$, належатиме графу K_5 , чи $K_{3,3}$ тобто, або до ребер з множини K_4^1 та додаткового ребра, яке з'єднує пару точок несуміжних ребер з K_4 , або до ребер-променів простої зірки, які попарно ототожені з кожною вершиною графа K_4 . Таким чином граф G покривається, принаймні, трьома підграфами чи частинами гомеоморфними одному з графів Куратовського, які є квазізірками з центрами гомеоморфними K_4 . Доведемо достатність такого покриття. Видалимо ребро $u, u = (a, b)$, та розглянемо підграф чи частину K гомеоморфну графу $K_4 \setminus u$. Тоді в графі $G \setminus u$ матимемо квазізірку $St_{G \setminus u}(K)$, якій належать всі ребра з множини $G^1 \setminus \Theta^1$, що інцидентні вершинам підграфа чи частини K та є суттєвими відносно $t_{G \setminus u}(\{a, b\})$ - числа досяжності множини $\{a, b\}$ при операції видалення ребер графа $G \setminus u$. Стверджуємо, що інших ребер немає. Припустимо зворотне, що $x \in G^1 \setminus (\{u\} \cup St^1(K) \cup \Theta^1)$. Видаливши ребро x отримаємо його несуттєвість відносно неорієнтовного роду графа $G \setminus u$, бо $x \notin \Theta^1$, або несуттєвість відносно числа $t_{G \setminus u}(\{a, b\})$, бо $x \notin St(K)$. Приєднаємо ребро u до $G \setminus u$ та отримаємо граф $G \setminus x$ роду 3, тобто з ребром x несуттєвим відносно неорієнтовного роду графа G при операції видалення. Це суперечить умові, що G - граф-обструкція неорієнтованого роду 3. Припущення невірне. Достатність доведена. Доведення твердження 1 закінчене.

Наслідок 1. Існує мінімальне вкладення f' графа-обструкції G для поверхні Клейна як продовження мінімального вкладення підграфа Θ графа-обструкції G гомеоморфного графу-обструкції для проективної площини.

Доведення. Нехай мають місце позначення вище позначення і задане мінімальне вкладення $f_0, f_0 : \Theta \rightarrow N_2$. Продовжимо його до вкладення $f, f : G \setminus u \rightarrow N_2$, в якому вершини a, b належить границям різних 2-кліток чи псевдокліток s_1, s_2 з множини $N_2 \setminus f(G \setminus u)$ та мають число досяжності $t_{G \setminus u}(\{a, b\}, N_2)$, де $t_{G \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2, L \subseteq G^1 \cap (\partial s_1 \cap \partial s_2)$. Тепер продовжимо вкладення f до $f', f' : G \rightarrow N_3$, шляхом розміщення ребра u на ленту Мебіуса, яку приклеєно до зовнішньої грані циклу $z, z = G^1 \cap (\partial s_1 \cup \partial s_2) \setminus L$ на поверхні Клейна. Таким вкладенням f' множина ребер графа-обструкції для поверхні Клейна покриватиметься трьома квазізірками з центрами гомеоморфними K_4 .

Наслідок 2. Для 2-зв'язного графа-обструкції G неорієнтованого роду 3 та площинного графа N_2 мають місце наступні співвідношення:

1. $2 \leq t \leq 4$;

2. $(d_{H_2}(M)=3) \wedge (t_{H_2}(M, \Sigma_0)=2)$, або $(d_{H_2}(M)=2) \wedge (t_{H_2}(M, \Sigma_0)=3)$, або $(d_{H_2}(M)=1) \wedge (t_{H_2}(M, \Sigma_0)=4)$.

Доведення. Нехай для 2-зв'язного графа G виконуються умови твердження 1. Оскільки $\gamma(G)=3$, то графа G має підграф H гомеоморфний одному з графів Куратовського, який в свою чергу містить підграф чи частину H_1 гомеоморфну K_4 чи $K_{2,3}$. Розглянемо в H просту зірку $St_G(v)$, де $v \in G^0 \setminus H_1^0$, приєднану висячими ребрами до кожної з вершин графа K_4 чи вершинами степені 2 графа $K_{2,3}$, та шляхом 1-розбиття всіх висячих ребер зірки $St_G(v)$. Тим самим перетворимо граф G на G' . Виділимо таким чином квазізірку $St_G(H_1)$ з центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та частинами ребер $\{(a_i, v)\}_{i=1}^m$ простої зірки $St_G(v)$ як висячими ребрами квазізірки. Тоді граф H_2 , де $H_2 = G' \setminus St_G(H_1)$, матиме неорієнтований рід $\gamma(H_2)$ не більше 2 та міститиме частини висячих ребер з кінцевими вершинами, можливо ототожнених в вершину v . За умови невідродженості графа H_1 (вироджений граф H_1 із k вершинами є центром квазізірки $St_G(H_1)$ яка є об'єднанням k простих зірок) можливі наступні варіанти:

1. $\gamma(H_2)=0$; 2. $\gamma(H_2)=1$; 3. $\gamma(H_2)=2$. Розглянемо варіант 1. Позначимо через M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, множину точок площинного графа H_2 з числом досяжності t , де $t_{H_2}(M, \Sigma_0) = t$, до яких приєднуються кінцевими вершинами висячі ребра квазізірки $St_G(H_1)$, граф G ϕ -образ

$\phi: (H_2 + St_m(H_1), \sum_{i=1}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i\}_{i=1}^m)$, де $m \geq 1$. Доведемо наступні співвідношення 1 та 2:

1. $2 \leq t \leq 4$; 2. $((d_{H_2}(M)=3) \wedge (t_{H_2}(M, \Sigma_0)=2)) \vee ((d_{H_2}(M)=2) \wedge (t_{H_2}(M, \Sigma_0)=3)) \vee ((d_{H_2}(M)=1) \wedge (t_{H_2}(M, \Sigma_0)=4))$.

Доведення співвідношення 1. Дійсно, якщо припустити, що має місце нерівність $t < 2$, то тоді множина M буде досяжною на евклідовій площині. В такому разі граф G' , як результат склейки H_2 та $St_G(H_1)$ по парам $(a_i, b_i)_{i=1}^m$ точок 1-підрозділених висячих ребер, матиме рід $\gamma(G') = 1$. Матимемо рівність $\gamma(G') = \gamma(G) = 1$, яка суперечить умові, що граф є граф-обструкцією для поверхні Клейна. Припущення невірне, нерівність $t \geq 2$ має місце. На рис.1 наведений приклад для $t = 4$.

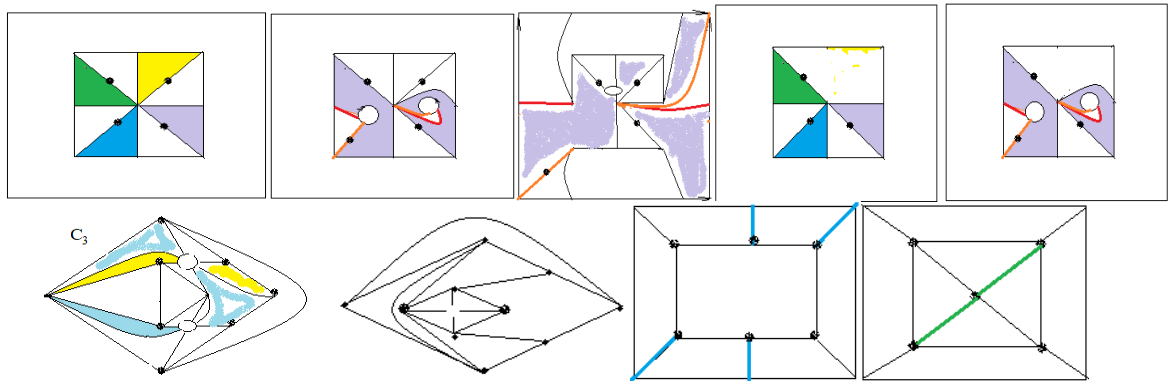


Рис.1. На перших трьох картах приєднання 2-ручки та ленти Мебіуса до евклідової площини призведе до вкладення графа H в поверхню Клейна з множиною M з чотирьох наведених вершин із числом досяжності 4 і тета характеристикою $\theta_H(M, \Sigma_0)$, $\theta_H(M, \Sigma_0) = 1$. На 4-й та 5-й картах приєднання 2-ручки до евклідової площини з множиною з трьох заданих (наведених жирно) вершин із числом досяжності 3 і тета характеристик ою 1. На 6-й і 7-й картах проілюстровано твердження 5, на 8-й та 9-й приклади до твердження 6 леми 1.

Доведемо нерівність $t \leq 4$ методом від протилежного. Припустимо, що $t > 4$. Тоді для досяжності множини M має бути вкладення f графа H_2 в N , де поверхня N утворена з евклідової площини Σ_0 шляхом приклеювання до неї двох лент Мебіуса, яке розміщує множини M на границях кліток S_i , , принаймні п'ять з яких мають спільну точку, тобто $\theta_{H_2}(M, \Sigma_0) \geq 2$. На рис.1 на другій та третій карті наведено приклад перетворення трьох 2-кліток на одну клітку S_0 шляхом розміщення границь трьох 2-кліток, принаймні, з однією спільною точкою, на 2-ручку приклеєну до Σ_0 . Довизначимо вкладення квазізірки $St_G(H_1)$ в $\overline{s_0} \setminus \partial s_0$ - середину побудованої 2- клітки із приклеєною лентою Мебіуса, то отримаємо продовження f вкладення графа G в неорієнтовану поверхню N , де $\gamma(N) \geq 4$, яка є, принаймні, тором з двома приклеєними лентами Мебіуса. Оскільки графи G' , G гомеоморфні, то матимемо нерівність $\gamma(G) > 3$, яка суперечить умові, що граф G є граф-обструкцією для поверхні Клейна. Припущення, що $t > 4$ невірне. Доведення співвідношення 1 закінчене.

Доведення співвідношення 2. Граф H_2 містить квазізірку гомеоморфну графу Куратовського. Якщо множина M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, точок графа H_2 , є критичною відносно кліткової довжини $d_{H_2}(M)$ при операції видалення довільного елемента a_i , то має місце нерівність $d_{H_2}(M \setminus a_i) < d_{H_2}(M)$, чи відносно операції стискання ребра $u = (ab)$ в точку a' (якщо $\{a, b\} \subset M$, то замість M розглядатимемо множину $M' = (M \setminus (a, b)) \cup \{a'\}$), якщо має місце нерівність $d_{Gu}(M') < d_G(M)$. Згідно визначення 5 граф G є мінімальним відносно $d_G(M)$ при операції видалення або стискання в точку довільного ребра u , тобто, або $d_{Gu}(M) + 1 = d_G(M)$, або $d_{Gu}(M') < d_G(M)$, де Gu - граф зі стиснутим в точку a' ребром $u = (a, b)$ та $M' = (M \setminus \{a, b\}) \cup a'$. З умови $\gamma(G) = 3$ випливатиме, що довжина d найкоротших 2-кліткових ланцюгів, які з'єднують t кліток, $t_{H_2}(M, \Sigma_0) = t$, має задовольняти умові: якщо $t = 2$, то $d = 3$, інакше, якщо $t = 3$, то $d = 2$, інакше, якщо $t = 4$, то $d = 1$. Ці випадки проілюстровано на рис.1, 2. Доведення наслідку 2 закінчене.

Наслідок 3. Для 2-зв'язного графа-обструкції G неорієнтованого роду 3 та проєктивно-площинного графа H_2 мають місце наступні співвідношення:

1. $2 \leq t \leq 3$;
2. $((d_{H_2}(M) = 2) \wedge (t_{H_2}(M, N_1) = 2)) \vee ((d_{H_2}(M) = 1) \wedge (t_{H_2}(M, N_1) = 3))$.

Доведення. Вважатимемо, що граф H_2 має неорієнтований рід 1, тобто містить підграф гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$, кожен з яких можливо подати як квазізірку з центром K_4 чи $K_{2,3}$, відповідно. Позначимо через M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, множину точок проєктивного графа H_2 з числом досяжності t , де $t_{H_2}(M, N_1) = t$, де кожна точка a_i ототожнюється з кінцевими вершинами g_i всяких ребер квазізірки $St_G(H_1)$, а граф G отримано наступним ϕ -перетворенням:

$\phi : (H_2 + St_m(H_1), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, де $m \geq 1$. Мають місце наступні співвідношення:

1. $2 \leq t \leq 3$;
2. $((d_{H_2}(M) = 2) \wedge (t_{H_2}(M, N_1) = 2)) \vee ((d_{H_2}(M) = 1) \wedge (t_{H_2}(M, N_1) = 3))$.

Доведення цих співвідношень аналогічне доведенню для наслідка 2.

Наслідок 4. Для 2-зв'язного графа-обструкції G неорієнтованого роду 3 та непроєктивно-площинного графа H_2 мають місце наступні співвідношення:

1. $(t = 2) \wedge (d_{H_2}(M) = 1) \wedge (t_{H_2}(M, N_1) = 2)$:

2. Якщо $t = 1$ і задано досяжну на поверхні Клейна множину M точок графа H_2 , то квазізірка $St_G(K_4)$ матиме, як мінімум, дві точки та, як максимум, $|M|$ точок приєднання висячих вершин до H_2 , з яких, принаймні, $|M| - 4$ точки мають бути суттєвими відносно роду при операції видалення цих точок.

Доведення наслідка 4. Доведемо співвідношення 1. Вважатимемо, що граф H_2 має неорієнтований рід 2, тобто містить підграф гомеоморфний одному з 104-х графів-обструкцій проєктивної площини [5]. Позначимо через M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, множину точок непроєктивного графа H_2 з числом досяжності t , де $t_{H_2}(M, N_2) = t$, де кожна точка a_i ототожнюється з кінцевою вершиною g_i висячих ребер квазізірки $St_G(H_1)$. Нехай граф G отримано наступним ϕ -перетворенням:

$$\phi: (H_2 + St_m(H_1), \sum_{i=1}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m), \text{ де } m \geq 1. \text{ Довести рівняння } t = 2 \text{ та відношення}$$

$(d_{H_2}(M) = 1) \wedge (t_{H_2}(M, N_1) = 2)$ можливо по аналогії доведення наслідку 2. Доведемо співвідношення 2. За нашими позначеннями матимемо, що $H_1 = K_4$. Як в проєктивну площину, вкладемо квазізірку $St_m(K_4)$ із m променями, із схрещеними на площині несуміжними ребрами K_4 , тобто розмістимо її в середину 2-клітки s із приклеєною лентою Мебіуса, де $s \in N_2 \setminus f(H_2)$, на ∂s якої розміщена досяжна множина M складена з точок приєднання. Якщо припустити, що одна з вершин K_4 не інцидентна ребру-променю, то тоді можливо звільнити ленту Мебіуса від одного з схрещених ребер. Тим самим отримати суперечність умові щодо графа G роду 3. Якщо несуміжних один з одним ребер-променів більше 4, то тоді їхні кінцеві точки ототожнюються попарно з точками, які мають бути суттєвими відносно роду при операції видалення. Інакше матимемо ці всі $|M| - 4$ ребер несуттєвими відносно роду при операції видалення ребра графа G , що суперечить визначенню графа-обструкції роду 3. Доведення закінчене.

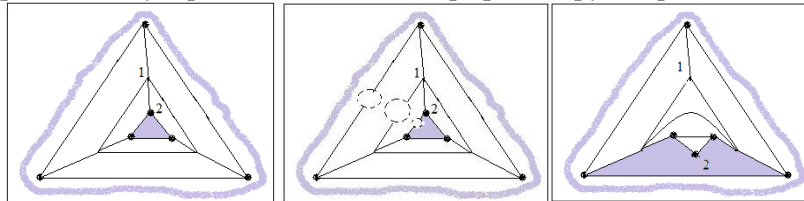


Рис.2. При видаленні ребра (1,2) графа, наведеного на 1-й карті, не змінилося число досяжності 2 множини з 6-х вершин (наведені точки), а мінімальна відстань цієї множини зменшилася з 3 до 1.

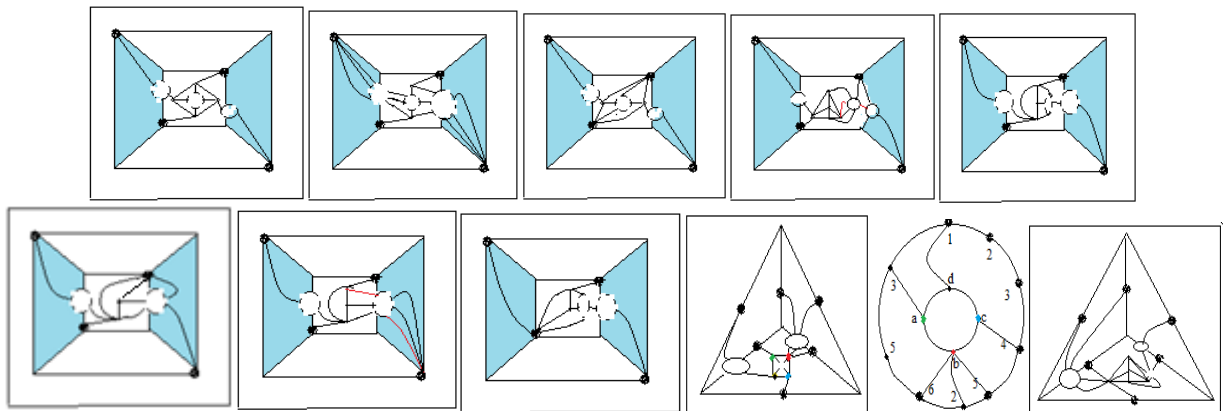


Рис.3. Моделі графів-обструкцій для поверхні Клейна.

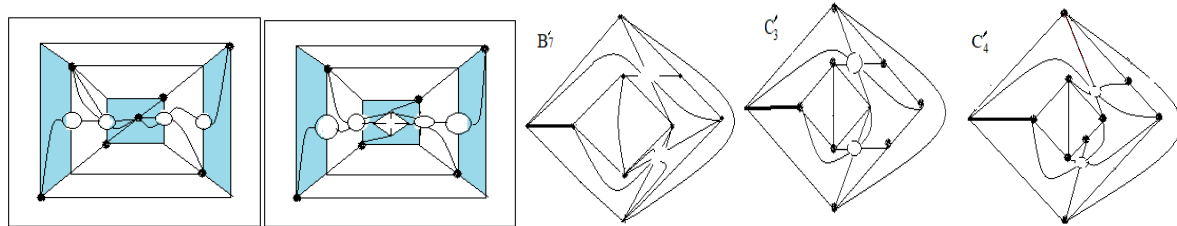


Рис.4. Моделі графів-обструкції: на 1-й та 2-й карті графи з кількома ребрами, які як несуттєві можливо стягнути в точку для поверхні неорієнтованого роду 3; на 3-й, 4-й, 5-й картах графи роду 2, утворені шляхом додавання ребра замість спільної вершини у пари графів гомеоморфних K_4 у однойменних (без штриха) мінорів роду 2.

Твердження 2. Нехай граф G неорієнтованого роду $\gamma(G)$ має реберне покриття множиною з n квазізірок $St_G(H_i)$, , кожна пара $(St_G(H_i), St_G(H_j))$ з яких породжує підграфи H_{ij} гомеоморфні мінорам неорієнтованого роду 2, де $H_i, H_j, i \neq j, 1 \leq i < j \leq n-1, n \geq 2$, гомеоморфні площинному графу із заданою множиною точок з числом досяжності 2 та задане наступне φ -перетворення:

$\varphi: (H_{12} + St_m(H_n), \sum_{i=3}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, де квазізірка $St_m(H_3)$ з центром H_3 та ребрами-променями з досяжною на проєктивній площині множиною $\{g_i\}_{i=1}^m$ кінцевих вершин вісячих ребер $\{(b_i, g_i)\}_{i=1}^m$, $m \geq 2$, а на евклідовій площині має число досяжності 2, та попарно ототожнюється з точками множини $\{a_i\}_{i=1}^m$ графа H_{12} , яка є досяжною на поверхні Клейна. Якщо граф G має k перетинів у внутрішніх точках вісячих ребер з множини $\{(b_i, a_i^*)\}_{i=1}^m$, то мають місце наступні співвідношення:

1. Якщо $n = 3$ та для кожної пари (H_i, H_j) виконується умова $H_i \cap H_j = \emptyset$, то $3 \leq \gamma(G) \leq k + 3$;
2. Якщо $n = 3$ та для кожної пари (H_i, H_j) виконується умова $H_i \cap H_j = \{v\}$, то $4 \leq \gamma(G) \leq k + 3$;
3. Якщо $n = 2$ та для пари (H_i, H_j) виконується умова $H_i^1 \cap H_j^1 = \{(u, v)\}$, де (u, v) - спільна частина двох ребер чи ребро, то $\gamma(G) = 2$, а коли це спільне ребро, то $\gamma(G) = 3$;
4. Якщо дві пари з трьох квазізірок з центрами гомеоморфними K_4 мають спільні частини двох пар простих ланцюгів, то $\gamma(G) \leq 4$.
5. Граф G , побудований згідно співвідношень 1, 2, 3, 4, може мати несуттєві ребра відносно роду при операції видалення чи стискання в точку ребра;

Доведення. Нехай граф G задовольняє умові твердження 2, тоді згідно [4] матимемо $\gamma(G) \geq 2$.

Зауважимо, що приєднання до зв'язного графа H_{12} вісячих вершин ребер-променів квазізірки $St_G(H_3)$, де H_3 гомеоморфний $K_4, K_{2,3}, K_5 \setminus e$ чи $\overline{K_r}, r \geq 2$, до точок досяжної на поверхні Клейна підмножини точок підграфа H_{12} є гомеоморфним $K_{3,3}$ чи K_5 .

Доведемо співвідношення 1. Розглянемо множини всіх різних мінімальних вкладень графа H_{12} в поверхню Клейна та для кожного побудуємо множини з різних підмножин точок досяжних на поверхні Клейна. Виберемо одне з таких вкладень та приклеїмо ленту Мебіуса до однієї з тих кліток s , на границі якої розташовано досяжну підмножину точок, та вкладемо на ленту центр H_3 квазізірки $St_G(H_3)$, щоб отримати на отриманій псевдоклітці s' проєктивної площини досяжну множини вершин графа H_3 . Вкладемо вісячі ребра в середину цієї псевдоклітки s' вісячі ребра квазізірки та ототожнимо пари точок приєднання до підграфа H_{12} . Можливими є такий порядок слідування копій точок на границі $\partial s'$ з числа пар точок приєднання, коли є k перетинів у внутрішніх

точках висячих ребер з множини $\{(b_i, a_{i_i}^*)\}_{i=1}^m$, можливо розташувати на приклеєних k лентях до поверхні Клейна висячі ребра квазізірки без перетину у внутрішній точці. Тоді для неорієнтованого роду $\gamma(G)$ матимемо нерівність $3 \leq \gamma(G) \leq k + 3$. Коли перетину у внутрішніх точках висячих ребер $\{(b_i, a_{i_i}^*)\}_{i=1}^m$ немає, то $\gamma(G) = 3$. Найнижче значення роду досягнуте для графів на 3-й, 4-й, 5-й картах рис. 7. Доведення співвідношення 1 закінчене.

Доведення співвідношення 2 аналогічне наведеному для співвідношення 1 тільки одне з ребер-променів, яке з'єднує центри двох зірок є несуттєвим відносно роду та підлягатиме стисканню в точку. Центрами квазізірок мають бути графи з суттєвими ребрами при операціях стискання в точку чи видалення ребра відносно заданої множини точок з числом досяжності 2 відносно евклідової площини, наприклад $K_4, K_{2,3}, K_5 \setminus e$ чи $\overline{K_r}, r \geq 2$.

Доведення співвідношень 3,4 аналогічне наведеному для співвідношення 1

Доведемо співвідношення 5. Нехай граф G неорієнтованого роду $\gamma(G)$ побудований згідно співвідношень 1, 2, 3, 4. Маємо два наступні випадки. 1. Якщо ребро суттєве відносно роду графа G при операції видалення, то воно належатиме до числа ребер графа K_4 чи $K_{3,3}$ та мінімальним вкладенням графа в поверхню Клейна має розташовуватися на ленті Мебіуса. Дійсно, якщо видалити довільне висяче ребро квазізірки $St_G(H_3)$, то тим самим зменшуємо число досяжності множини точок приєднання цієї $St_G(H_3)$ до інших. Тоді матимемо, що рід графа G має зменшитися на 1, що суперечить умові щодо роду.

2. Якщо ребро суттєве відносно роду графа G при операції стискання, то воно не належатиме до центру квазізірки. Нехай суттєве ребро $e, e = (a, b)$, належить до числа висячих ребер, яке належить квазізірці. Тоді жодна пара ребер суміжних даному ребру e , що належать до центрів різних квазізірок не вклатиметься на різних лентях Мебіуса. Дійсно, якщо стиснути ребро e в точку ab , то пари суміжних ребер зі спільною вершиною ab утворюватимуть кут з цих ребер, який може розташовуватися на одній ленті. Тим самим отримуємо суперечність умові щодо роду графа G . Припущення невірне. Доведення співвідношення 5 закінчене.

На рисунках 5,6,7,8 наведені приклади графів G , які задовольняють граничним значенням, вказаним у співвідношеннях 1,2,4,5 нерівностям для випадку наявності підграфів графа G , породжених парами $St_G(H_i), St_G(H_j)$, однакових мінорів проєктивної площини, склеєних шляхом ототождження пар точок з заданою парою множин точок приєднання.

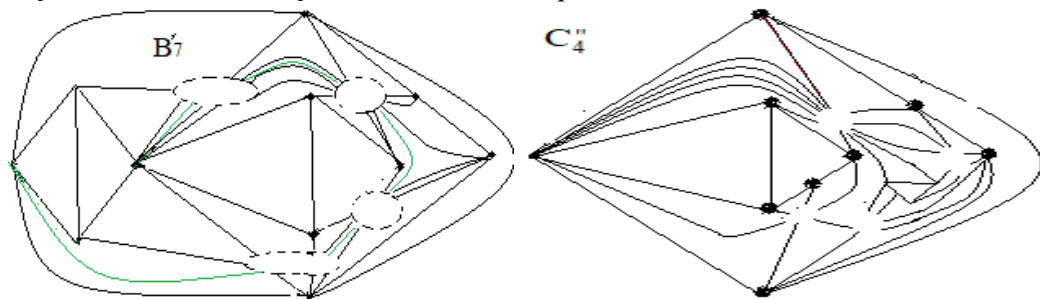


Рис 5. Графи B_7, C_4 роду 4 склеєні, із B_7, C_4 -графів-обструкцій роду 2 та квазізірок із центром K_4 та ребрами, що приєднані так само, як ребра такої ж квазізірки, як підграфа, в графах B_7, C_4 , відповідно.

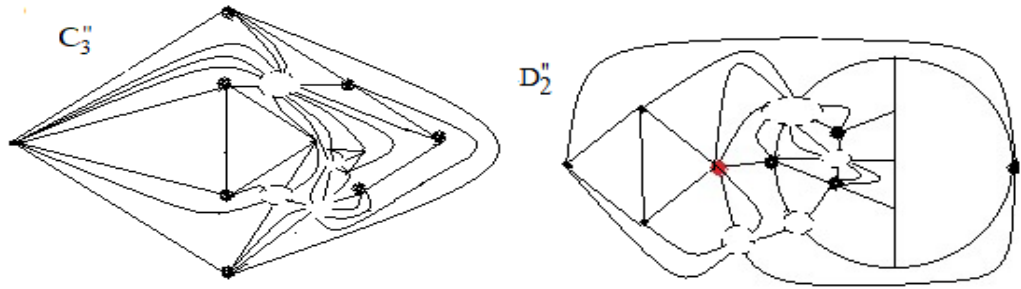


Рис 6. Графи D_2'' , C_3'' роду не більше 4 склеєні з D_2 , C_3 - графів-обструкцій роду 2 та пари квазізірок із центром K_4 та ребрами, що приєднані так, як ребра такої ж квазізірки-підграфа, в графах D_2 , C_3 , відповідно.

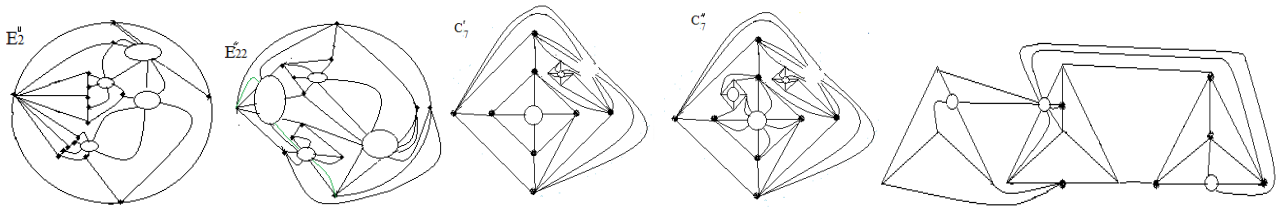


Рис 7. Графи E_2'' , E_{22}'' , C_7' роду не більше 4 утворені як ϕ -образи пари графів із E_2, E_{22}, C_7 - графів-обструкцій роду 2 та двох чи однієї квазізірок із центром K_4 , відповідно, та променями - ребрами, що приєднані так само, як висячі ребра такої ж квазізірки-підграфа, в графах E_2 , E_{22} , C_7 , відповідно.

П'ятий та третій графи є графами-обструкціями роду 3, де C_7' склеєний з C_7 та квазізірки $St_4(K_4)$.

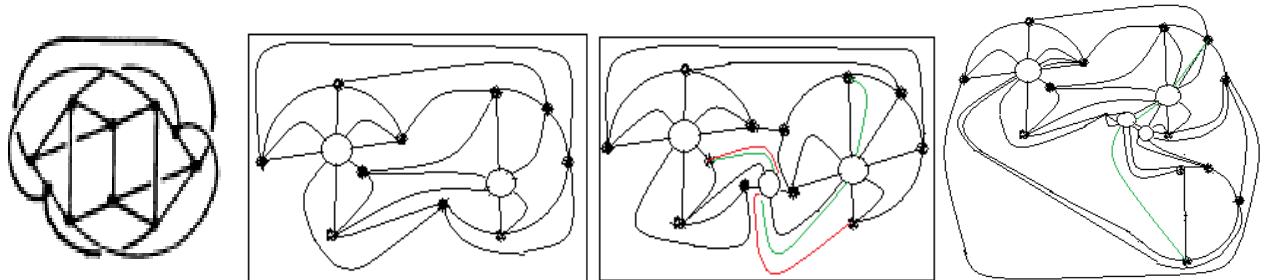


Рис. 8. До співвідношень 1 та 4 твердження 2. Граф B_{11} та його вкладення в поверхню Клейна, де B_{11} - граф-обструкція для проєктивної площини як об'єднання двох квазізірок з центрами графами K_4 , що мають спільне ребро. На третій карті наведено модифікований B_{11} без спільного ребра у центрів цих квазізірок з двома додатковими висячими ребрами вкладений мінімально в поверхню неорієнтованого роду 3. На четвертій карті наведено граф для ілюстрації співвідношення 5 твердження 2.

Твердження 3. Нехай граф G неорієнтованого роду $\gamma(G)$ має покриття із n квазізірок $St_G(H_i)$, $St_G(H_j)$, з яких одна пара $(St_G(H_1), St_G(H_2))$ породжує підграф H_{12} гомеоморфний мінору неорієнтованого роду 2, а інші квазізірки приєднуються кінцевими вершинами до множини точок M графа H_{12} , яка є досяжною на поверхні Клейна та містить точки центрів H_1 і H_2 квазізірок $St_G(H_1), St_G(H_2)$, де H_1, H_j -гомеоморфні $K_4, K_{2,3}$ чи вироджений граф на кількох вершинах, де $i \neq j, 1 \leq i < j \leq n, n \geq 2$.

Мають місце наступні співвідношення:

1. Якщо $n = 3$ і для кожної пари (H_1, H_2) виконується умова $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ та $St_G(H_3)$ приєднується до, принаймні, двох точок заданої множини точок графа H , досяжною на поверхні Клейна, то $\gamma(G) = 3$;

2. Якщо для кожної пари (H_i, H_j) виконується умова $H_i \cap H_j = \{v\}$, $n = 3$, та $St_G(H_3)$ приєднується до, принаймні, двох точок заданої множини точок графа H , досяжної на поверхні Клейна, то $\gamma(G) = 3$;
3. Якщо $n = 2$ та для пари (H_i, H_j) виконується умова $H_i^1 \cap H_j^1 = \{(u, v)\}$, де (u, v) - спільна частина двох ребер чи ребро, то $\gamma(G) = 2$, а коли це спільне ребро та $St_G(H_3)$ приєднується до, принаймні, двох точок заданої множини точок графа H , досяжної на поверхні Клейна, то $\gamma(G) = 3$;
4. Якщо дві пари з трьох квазізірок з центрами гомеоморфними K_4 мають спільні частини двох пар простих ланцюгів, то $\gamma(G) \leq 4$.
5. Граф G , побудований згідно співвідношень 1,2,3,4, може мати несуттєві ребра відносно роду при операції видалення чи стискання в точку ребра;

Алгоритм побудови моделей 3-зв'язних графів-обструкцій поверхні Клейна.

Початок алгоритму А(вхідні:G, вихідні:D).

Вхідні дані:

1. Вхідний граф-обструкція G проективної площини, n -число зв'язності вихідного графа D ;
2. Множину $F(G) = \{f_i\}_{i=1}^{|F|}$ всіх неізоморфних вкладень графа G в S - поверхню Клейна;
3. Для кожного вкладення f_i побудовані наступні множини:

а) $R_i = \{\{a_{i,k'}\}_{k'=1}^n\}_{i=1}^{m_i}$ мінімальну за включенням і складену із підмножин

неізоморфних (при автоморфних відображеннях графа G) точок $\{a_{i,k'}\}_{k'=1}^n$ заданої потужності множини R_i розташованих на границях кожної із наступних кліток s_j, s_j', s_j'' , де $s_j' \in S \setminus f'(G_u)$, $s_j'' \in S \setminus f''(G \setminus u)$, та мінімальну при операціях видалення чи стискання в точку довільного ребра u графа G , де f', f'' - мінімальні вкладення графів $G_u, G \setminus u$ в неорієнтовані поверхні S', S'' меншого роду ніж S , відповідно,

б) $M = M(f_i, R_i) = \{s_j\}_{j=1}^{|M|}$, складеної з кліток s_j , де $s_j \in S \setminus f_i(G)$, які містять на своїх

границях всю множину вершин графа;

4. Множина квазізірок з центром K , де $K \in \{K_4, K_{2,3}\}$ та, із принаймні, чотирма (для K_4) чи трьома (для $K_{2,3}$) висячими ребрами, яких може бути не більше $|G^0|$;

5. Множини $st(K_4) = \{g_k\}_{k=1}^{|ie(K_4)|}$, $st(K_{2,3}) = \{h_k\}_{k=1}^{|ie(K_{2,3})|}$ всіх вкладень квазізірок з центрами

$K_4, K_{2,3}$, відповідно, в клітку s , як в локальну проективну площину з розташуванням на ленті Мебіуса ребер центру та висячих ребер квазізірки.

6. Функція Function Π (вхід: R, n ; вихід: R^n, NG) видає при кожному звертанні елемент з множини R^n - множини всіх перестановок вершин $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ за час пропорційний $n!$ та множину NG - всіх розбиттів множини висячих вершин $g_1, g_2, g_3, \dots, g_m$ квазізірки на n непустих підмножин G_1, G_2, \dots, G_n , кожен з елементів підмножини G_i ототожнюється в одну точку ng_i , яка попарно ототожнюється з a_i , число розбиттів які видаватиме функція за час пропорційний NN , де $NN = (m(m-1)(m-2) \dots (m-(n-1)))$, де $m > n$.

Вихідні дані: Граф D – модель n -зв'язного графа-обструкції для поверхні Клейна.

Ввести G, n ;

Для i від 1 до $|F(G)|$ кроком 1 виконати: // початок циклу з параметром i

початок дій;

$f := f_i$;

$R := R_i$;

Для j від 1 до $|M|$ кроком 1 виконати:
 початок дій;
 $s := s_j + h$; // приклеїмо до площинного диску s ленту Мебіуса h ;
 $R := \partial s \cap R$; // до n точок a_i границі клітки s приклеюватимемо g_j висячі вершин зірки;
 Якщо $|\partial s \cap R| < n$ то перехід на кінець циклу з параметром j ;
 Вкладемо K в $\bar{s} \setminus \partial s$; // центр квазізірки зірки вкладемо в середину клітки s
 // так, щоб одне з ребер лежало на ленті Мебіуса h ;
 Function Π (вхід: R, n ; вихід: R^n); // при кожному звертанні на виході нова перестановка
 // з множини R^n - всіх перестановок вершин $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$;
 // з якими ототожнюється множина висячих вершин $ng_1, ng_2, ng_3, \dots, ng_n$.
 // матимемо ототожені вершини $a_1ng_1, a_2ng_2, \dots, a_nng_n$.

Для k від 1 до n кроком 1 виконати:
 початок дій;
 $g := a_kng_k$; // маємо вершину приєднання з тими ж ребрами графа G та;
 // висячими ребрами квазізірки з центром K укладемо
 $D^0 = G^0 \setminus \{a_k\} \cup K^0 \setminus \{g_k\} \cup \{a_kng_k\}$;
 $D^1 := G^1 \cup K^1 \cup (St^1(K) \setminus K^1)$;
 кінець дій циклу з параметром k ;
 Виводимо ("Граф $D = "$, (D^0, D^1));
 кінець дій циклу з параметром j ;
 кінець дій циклу з параметром i ;
 кінець алгоритму A .

Твердження 4. Мають місце наступні співвідношення для алгоритму A :

- Алгоритм A коректний та має часову складність $O(b|G^0| \text{time}(\text{Function } \Pi(R, n)))$, де $b = b(G)$ – добуток числа неізоморфних мінімальних вкладень заданого графа G неорієнтованого роду γ та найбільшого числа $2 - \gamma - |G^0| + |G^1|$ кліток в них, яке для невеликого роду пропорційне $|G^0|^2/2$;
- Функція (Function $\Pi(R, n)$) для $n=3$ має часову складність пропорційну $O(|G^0|^n)$, де $|G| \leq 12$;
- Вихідний граф D може мати серед образів висячих ребер квазізірки несуттєві ребра відносно роду при операції стискання ребра в точку. Виконавши стискання в точку всіх таких ребер графа D отримаємо мінор поверхні Клейна.

Висновок. Отримано математичне забезпечення для алгоритмів побудови моделей мінорів заданої зв'язності для поверхні Клейна.

Список літератури

- Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1973. 383 с.
- Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1970. 299 с.
- Mohar B., Thomassen C. Graphs on Surfaces. Johns Hopkins University Press, 2001. 412 p. <https://www.sfu.ca/~mohar/Book.html>
- Hur S. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Phd, Ohio State University, 2008. http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1209141894
- Archdeacon D., Huneke P. A Kuratowski Theorem for Nonorientable Surfaces. *Journal of combinatorial theory*, Series B. 1989. **46**. P. 173–231.
- Петренко В.І. Про структуру площинних підграфів графів-обструкцій неорієнтованої поверхні заданого роду. *Фізико математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021. № 33. С. 105–109. [Google Scholar](#).
- Anna Flötto. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, University Bielefeld, 2010, -174 pp.
- P. Skoda. Obstructions for embedding graphs into surfaces, Simon Fraser University, PhD dissertation, 2012.-133 p.
- В.І. Петренко, Д.А. Петренко, О.В. Оришака. Структура проєктивно площинних підграфів графів-обструкцій заданої поверхні. *Кібернетика та комп'ютерні технології*. 2022, № 2. С. 1-20 [DOI:10.34229/2707-451X.22.2.0](https://doi.org/10.34229/2707-451X.22.2.0)

10. В.І. Петренюк, Д.А. Петренюк. Про алгоритм побудови 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, № 37 (2023): 72-74.
<http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit/article/view/308>
11. Edwin R. van Dam, Jack H. Koolen, Hajime Tanaka. Distance-regular graphs, E-JC, DS22: Apr 15, 2016,
<https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/issue/view/Surveys>.

5.3. ПЛОЩИННІ ПІДГРАФИ ІЗ ЗАДАНИМИ МЕТРИЧНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА.

Вступ. Основні поняття та позначення взяті з [1],[2],[3]. В багатьох статтях досліджувалися структурні властивості графів-обструкцій заданої неорієнтованої поверхні як неорієнтованого 2-многовиду без країв та побудовані їхні прототипи як основу з якої, шляхом видалення чи стискання деякої множини ребер та, можливо, додавання нових ребер без зміни роду, утворюються графи-обструкцій заданої поверхні. Такі дослідження структури графів неорієнтованого роду виконувалися в [4,5,6]. Супутні питання розглядалися в [7,8,9]. В [10,11] досліджено структурні властивості графів як ϕ -образ площинного графа та простої зірки та графа-обструкції неорієнтованої поверхні, відповідно.

Розглянемо **задачу** побудови графа-обструкції неорієнтованого роду 3 як ϕ -образа площинного 3-мінімального графа із заданою клітковою довжиною множини вершин та квазізірки з центром 2-мінімальним площинним графом. Для 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна є разв'язок в [12,13].

Частина 1.

Нехай задано мінімальне вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$, тобто це найменша по включенню підмножина $\{s_i\}_{i=1}^t$ множини $S_G(N, f)$, $S_G(N, f) = N \setminus f(G)$, складена з кліток на границях яких розташовано точки з множини M . Кожен граф G неорієнтованого роду k , $k \geq 1$, може бути поданим наступним перетворенням:

$\phi(H + St_n(g_0), \sum_{i=1}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, як ϕ -образ графа H та зірки $St_n(g_0)$, приєднаної

висячими вершинами g_i до точок a_i , де задана множина M точок графа H , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$,

$M \subseteq (\partial s_1 \cup \partial s_2) \cap H^0$, яка розміщується на границях кліток s_1, s_2, \dots, s_t множини $N \setminus f'(H)$, де $t \geq 2$, $m \geq 2$, $i = 1, 2, \dots, m$, мінімальним вкладенням f' , $f': H \rightarrow N'$.

Аналогічно характеристикам вкладення графа до орієнтованої поверхні на підмножині $\{s_i, s_j, s_k\}$ множині $S_G(N, f)$, визначимо характеристику θ , $\theta = 1$, множини M коли виконується умова $\partial s_i \cap \partial s_j \cap \partial s_k \neq \emptyset$, тобто є, хоча б, одна спільна точка на їхніх границях, яка є центром кліткової зірки, утвореної із трьох кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$, або визначено характеристику $\partial\theta$, $\partial\theta = 1$, якщо довільні пари цих кліток мають на границях, мінімально, одну спільну точку, тобто утворюють клітковий цикл довжини 3, утворених із трьох кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$.

Позначення 1. Позначатимемо через $\angle(s_i, s_j)$ та називатимемо кутом між клітками чи псевдоклітками s_i, s_j множини $S_G(N, f)$ найменшу по включенню зірку графа G з центром в a , $a \in G^0 \cap (\partial s_i \cap \partial s_j)$, із множиною ребер-променів, розташованих з одного боку відносно точки перетину границь кліток s_i, s_j . Саме ці ребра чи їхні частини вкладатимемо до ленти Мебіуса, приклеєної до площини, для утворення псевдоклітки, на границі якої розміщуються об'єднання границь s_i, s_j .

Позначення 2. Нехай задане мінімальне вкладення f графа H до неорієнтованої поверхні N . Будемо позначати через $\alpha(\angle(s_1, s_2))$ операцію перетворення ребер e_1, e_2 , $f(e_1) \subset \partial s_1$, $f(e_2) \subset \partial s_2$, зі спільною вершиною a кліток s_1, s_2 , де $f(e_1) \cup f(e_2) \subseteq \partial s_{12}$, причому вкладення f графа

H в N розміщує на границях кліток s_1, s_2 множини $f(M)$, $f(M) = f(\{a_i\}_{i=1}^m)$. Приклеїмо до клітки s_{12} ленту Мебіуса наступним чином. Розщепимо довільну внутрішню точку $f(x_i)$ ребра e_i , $e_i = (a_i, b_i)$ на точки x_i' , x_i'' , де $i = 1, 2$. Виріжимо в середині s_{12} елементарний диск з центром в x_i та розташуємо на його границі діаметрально протилежні пари точок (x_1', x_2'') , (x_1'', x_2') як кінцеві точки частин схрещених ребер на площині елементарного диска. Отримаємо таким чином псевдоклітку s неорієнтованої поверхні N' , де $\gamma(N') = \gamma(N) + 1$, $\partial s = \partial s_1 \cup \partial s_2$, в яку можливо вкласти ту частину зірки $f'(St_n(g_0))$, яка приклеєна до точок множини $f(M) \cap \partial s$ і таким чином отримати вкладення графа G в поверхню N' .

Позначення 3. Під квазізіркою $St_G(H)$ з центром H будемо розуміти підграф чи частину H графа G з множиною висячих ребер прикріплених однією кінцевою точкою до вершини чи точки ребра підграф H , а інші кінцеві точки належать множині приєднання M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$.

Визначення 1. Нехай задано мінімальне вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$, Будемо називати клітковою довжиною $d_G(s_i, s_j, f)$ між границями кліток s_i, s_j із заданими на них підмножинами L_i, L_j вершин зв'язного графа G , де $L_i \subseteq G^0 \cap \partial s_i$, $L_j \subseteq G^0 \cap \partial s_j$, $\{s_i, s_j\} \subseteq S_G(N, f)$, потужність $|J|$ найменшої по включенню впорядкованої множини J , $J = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+k}, s_j\}$, $J \subseteq S_G(N, f)$, де послідовні пари кліток мають на своїх границях, принаймні одне, спільне ребро. Причому підмножину множини J , складену із не менше ніж двох послідовних кліток зі спільною вершиною на границях, будемо рахувати як одну клітку. Також будемо говорити, що на множині J задано особливий простий клітковий ланцюг L_{ij} , $L_{ij} = L(s_i, s_j)$, який з'єднує клітки s_i, s_j кліткового графа для графа G . У випадку незв'язного графа G одна з кліток множини J буде не 2-кліткою і не псевдокліткою.

Визначення 2. Будемо називати деревом T досяжності множини точок M , та позначати через $T = T_G(M, N)$, зв'язного графа G , при заданому мінімальному вкладенні f графа G до неорієнтованої поверхні N , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$, пару множин $(\{s_i\}_1^t, \{L_{ij}\})$, де $\{L_{ij}\}$ - найменша по включенню множина особливих кліткових ланцюгів $L(s_i, s_j)$ які, або безпосередньо, або як об'єднання кількох послідовних кліткових ланцюгів зі спільним кінцем одного та початком іншого, що з'єднують всі пари кліток s_i, s_j та мають найменшу суму довжин всіх L_{ij} із множини $\{L_{ij}\}$.

Визначення 3. Для множини точок M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, площинного графа G з числом досяжності $t_G(M, \Sigma_0)$, де $t_G(M, \Sigma_0) = t$, $t \geq 2$, будемо називати клітковою довжиною $D_G(M, t)$, де $D_G(M, t) = \min_{\forall f \in fGN \forall s_i, s_j \in T} \sum d_G(s_i, s_j, f)$, між підмножинами L_i, L_j множини M , $M = L_i \cup L_j$, $L_i \cap L_j = \emptyset$, розташованими на границях довільних кліток s_i, s_j , $\{s_i, s_j\} \subseteq S_G(\Sigma_0, f)$, що реалізують число досяжності $t_G(M, \Sigma_0)$, де fGN - множина всіх неізоморфних вкладень графа G до Σ_0 , що реалізують число досяжності $t_G(M, \Sigma_0)$ множини точок M .

Визначення 4. Будемо називати множину M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, точок графа G з числом досяжності t , де $t_G(M, \Sigma_0) = t$, критичною відносно кліткової довжини $D_G(M)$ при операції видалення довільного елемента a_i , якщо має місце нерівність $D_G(M \setminus a_i) < D_G(M)$, чи відносно операції стискання ребра $u = (ab)$ в точку a' (якщо $\{a, b\} \subset M$, то замість M розглядатимемо множину $M' = (M \setminus (a, b)) \cup \{a'\}$), якщо має місце нерівність $D_{G_u}(M') < D_G(M)$.

Визначення 5. Будемо називати граф G мінімальним відносно $D_G(M)$ при операції видалення або стискання в точку довільного ребра u , якщо, або $D_{G_u}(M) + 1 = D_G(M)$, або $D_{G_u}(M') < D_G(M)$, де G_u - граф зі стиснутим в точку a' ребром $u = (a, b)$ та $M' = (M \setminus \{a, b\}) \cup a'$.

Лема 1. Мають місце наступні твердження:

1. Кліткова відстань між заданою парою кліток мінімального неорієнтованого вкладення заданого зв'язного графа є збільшеною на 1 найменшою метричною відстанню між довільними парами точок на границях цих кліток.
2. Якщо множина M має більш ніж дві клітки мінімального неорієнтованого вкладення зв'язного графа та визначено дерево $T(M)$ (в якому вершинами будуть елементи множини M , а ребром буде наявність спільної точки для границь кліток множини M), то кліткова відстань між її елементами є сумою збільшених на 1 довжин найкоротших простих ланцюгів між парами довільних вершин дерева $T(M)$.
3. Ребро u графа G суттєве відносно числа досяжності заданої множини точок M , $M = \{a, b\}$, графа G при операції його видалення, якщо належить квазізірці $St_G(K_4 \setminus (a, b))$.
4. Граф $K_5 \setminus (a, b)$ ізоморфний $St(K_4)$ з чотирма висячими ребрами, з яких три мають висячі вершини ототожені в точку a , а четверте ребро стягнуте в точку b .
5. Зірка $St(K_4)$ 2-зв'язного графа-обструкції G заданого неорієнтованого роду 3 має, щонайменше, по одному висячому ребру-променю з кожної вершини графа K_4 чи, принаймні, чотирьох внутрішніх точок його ребер, причому деякі з них можуть бути стягнутими в точку.
6. Для кожного графа-обструкції є реберне покриття підграфами чи частинами гомеоморфними K_4 .
7. Для площинного графа G має місце співвідношення; якщо $(t = 3) \wedge (\theta = 1)$, то $D_G(M) = 2$, а якщо $(t > 3) \wedge (\theta = \lfloor (t-1)/2 \rfloor)$, то $D_G(M) = \theta + 1$;

Доведення. Твердження 1, 2, 3, 7 леми 1 впливатимуть з наведених вище визначень 3, 4, 5. Твердження 4 є очевидним. Довести твердження 5 можливо методом від протилежного, припустивши, що є вершина v графа K_4 , як центра квазізірки, що має степінь 3 та не належить ребру-променю квазізірки $St(K_4)$. Можливі два випадки для пари ребер - діагоналей простого циклу довжини 4 графа K_4 : випадок 1. Обидва розміщені на ленті Мебіуса, випадок 2. Вони розміщені не на одній ленті Мебіуса. Розглянемо випадок 1. Тоді можливо звільнити від одного зі схрещених ребер ленту Мебіуса, розташовану в середині 2-клітки s з границею ∂s - циклом z довжини 4 центра квазізірки, шляхом розміщення назовні циклу одного зі схрещених ребер, яке не матиме кінцевої вершини v . Тим самим зменшимо рід графа-обструкції G заданого неорієнтованого роду, що суперечить поняттю графа-обструкції. Припущення неможливе, твердження 5 для випадку 1 доведене. Розглянемо випадок 2. Якщо обидва внутрішні ребра графа K_4 не розміщені на ленті Мебіуса, то одне з них схрещується на площині із ребром-променем квазізірки $St(K_4)$ та розміщується на ленті Мебіуса, яка приклеєна до зовнішньої, відносно циклу z , клітки. Виконаємо симетричне відображення по вертикальній осі графа K_4 . Для цього переставимо місцями тільки пару протилежних вершин в циклі z одна з яких має степінь 3 та суміжні ребра. Тоді на зовнішній клітці, відносно повернутого циклу z , вкладемо без перетину ті висячі ребра-промені квазізірки, що вкладалися на ленті Мебіуса. Матимемо в результаті такого вкладення квазізірки, що, принаймні, лента Мебіуса h

звільниться від одного з двох схрещених ребер. Схематично показано це на картах 6 та 7 рис. 1. Тим самим зменшимо рід графа-обструкції G заданого неорієнтованого роду, що суперечить поняттю графа-обструкції. Припущення неможливе, твердження 5 для випадку 2. доведене

Доведення твердження 6. Оскільки кожне ребро графа-обструкції неорієнтованого роду графа G на евклідовій площині перетинається у внутрішній точці з , принаймні з одним ребром, розміщується певним мінімальним вкладенням на ленті Мебіуса неорієнтованої поверхні разом із, принаймні, одним ребром. Тоді довільне ребро є ребром підграфа гомеоморфного K_4 , який в свою чергу є підграфом чи частиною підграфа гомеоморфного графу Куратовського. З іншого боку, обидва графи Куратовського мають реберне покриття парою чи трійкою підграфів гомеоморфних K_4 . Таким чином граф-обструкція G матиме реберне покриття скінченною множиною з графів чи частин гомеоморфних K_4 . На 8-й карті рис. 1 наведено реберне покриття $K_{3,3}$ з двома частинами гомеоморфними графу K_4 , один без наведеного ребра, а друга частина отримана видаленням одного з трьох несуміжних ребер, окрім наведеного ребра. На 9-й карті рис. 1 наведено реберне покриття K_5 трьома гомеоморфними графу K_4 , один без чотирьох ребер з спільною вершиною v , із них два виділені ребра, а два інших утворені з колеса O_4 з чотирма ребрами-шпицями почерговим видаленням одного з наведених ребер. З іншого боку це квазізірка з центром K_4 чи $K_{3,3}$ з кожної вершини якого виходить промінь-ребро, всіячі вершини яких мають вершини на простому циклі. Доведення леми 1 закінчене.

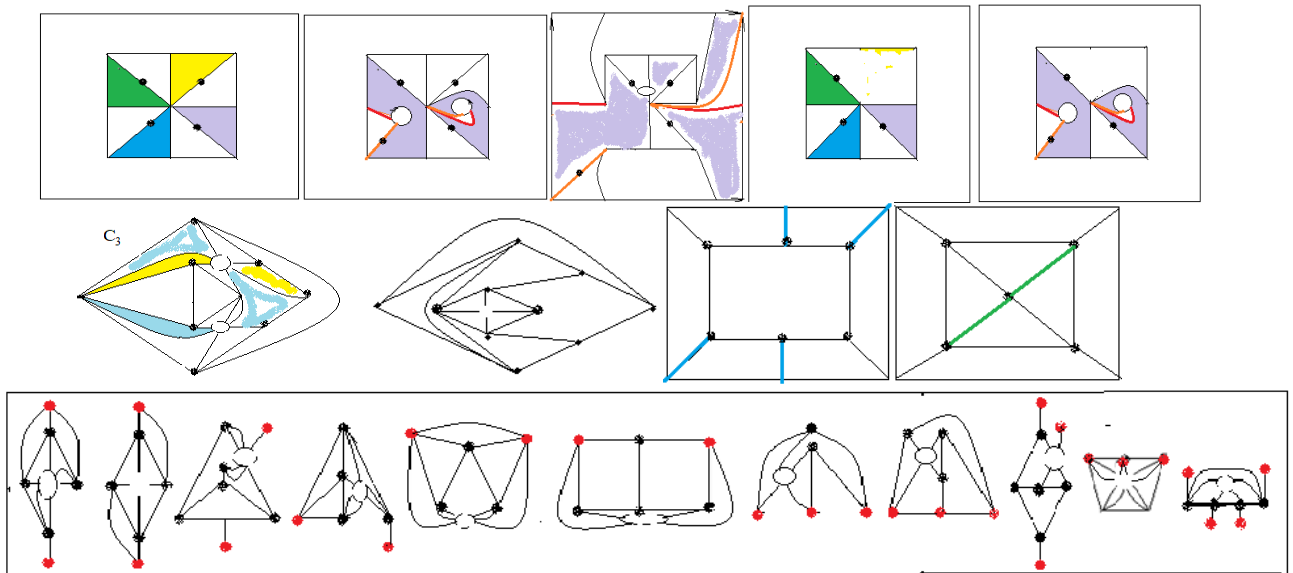


Рис.1. На перших трьох картах приєднання 2-ручки та ленти Мебіуса до евклідової площини призведе до вкладення графа H в поверхню Клейна з множиною M з чотирьох наведених вершин із числом досяжності 4 і тета характеристикою $\theta_H(M, \Sigma_0)$, $\theta_H(M, \Sigma_0) = 1$. На 4-й та 5-й картах приєднання 2-ручки до евклідової площини з множиною з трьох заданих (наведених жирно) вершин із числом досяжності 3 і тета характеристик ою 1. На 6-й і 7-й картах проілюстровано твердження 5, на 8-й та 9-й приклади до твердження 6 леми 1. В третьому ряду наведені квазізірки з множинами виділені жирно вершин та всіячих ребер-променів

Твердження 1. Нехай задано площинні графи G, H , які є 3-мінімальним та 2-мінімальним, відповідно, із заданими множинами M та N суттєвих відносно видалення з множини точок з числом досяжності $t_G(M) = t$, клітковою відстанню $D_G(M)$ множини M та характеристикою $\theta_G(M) = \theta$, де $t \geq 3$, $\theta \geq 1$. Якщо граф D задано ϕ -перетворенням графа G та квазізірки $St(H)$ з множиною всіячих вершин $\{g_i\}_{i=1}^{|M|}$ наступним чином: $\phi: (G + St(H), \sum_{i=1}^{|M|} (a_i + g_i)) \rightarrow (D, \{a_i^*\}_{i=1}^{|M|})$, де H - центр квазізірки гомеоморфний одному з графів множини $\{K_{2,3}, K_4, K_5 \setminus e\}$, із заданою множиною M

висячих вершин чи точок з характеристиками $t_G(M) = 1$ та $\theta_G(M) = 1$, то граф D матиме підграф-обструкцію для поверхні Клейна, причому пари висячих ребер квазізірки можуть породжувати щонайбільше три підграфи гомеоморфні K_4 , та, може бути, принаймні, одне висяче ребро квазізірки несуттєвим відносно неорієнтованого роду при стисканні в точку.

Доведення твердження 1. Нехай виконуються умови співвідношення 3, де $H=K_4$. Розглянемо вкладення $f: G \rightarrow \Sigma_0$ 3-мінімального графа G із заданою множиною M з суттєвих (відносно характеристик t, θ при операції видалення з множини) точок з числом досяжності $t_G(M) = 3$ та $\theta_G(M) = 1$. Розширимо це вкладення до $f': G \rightarrow N_2$, де N_2 - пляшка Клейна, так, щоб отримати недвоклітку s , $s \in N_2 \setminus f'(G)$, на границі якої розташована вся множина точок M . Для цього приєднаємо до евклідової площини дві ленти Мебіуса на яких вкладемо два суміжних ребра e_1, e_2 з числа ребер, які розташованих на границях кліток досяжності множини точок M , та які є спільними для границь двох суміжних кліток. Решта ребер та вершин графа G вклатиметься таким же чином, як вкладенням f . Відмітимо, що границя ∂s_1 містить стільки копій заданої точки множини M , $M = \{a_i\}_{i=1}^{|M|}$, графа, скільки зустрічається точка при обході границі ∂s_1 по колу за напрямком часової стрілки. Для 2-мінімального графа H є один варіант-ізоморфізм одному з графів множини $\{K_{2,3}, K_4, K_5 \setminus e\}$, описаної в [10], а задана множина точок N графа H матиме число досяжності 2. Для графа H матимемо наступні випадки:

Випадок 1. $H \approx K_4$; Випадок 2. $H \approx K_{2,3}$; Випадок 3. $H \approx K_{3,3} \setminus e$; Випадок 4. $H \approx K_5 \setminus e$.

Розглянемо випадок 1. Для множини N матимемо тільки два підвипадки:

- а). Множина N містить тільки вершини графа H ;
- б). Множина N містить принаймні одну внутрішню точку ребра;

Нехай має місце підвипадок а). Позначимо через H центр квазізірки $St(H)$ із заданою множиною N висячих вершин, де $N = \{g_i\}_{i=1}^{|N|}$, $|N| = |M|$, та вкладемо $H \setminus e$ в середину клітки s_1 , а ребро e розмістимо на ленті Мебіуса, приклеєній до зовнішньої грані графа $H \setminus e$, на яку вкладається одна пара схрещених ребер-променів квазізірки, що суміжні вершинам графа H . Тобто побудуємо мінімальне вкладення f'' , де $f'': St(H) \rightarrow N_1$, де N_1 отримано шляхом приклеювання ленти Мебіуса до замкнутої клітки s_1 , що задовольняє умові досяжності множини N на проєктивній площині, тобто $f''(N) \subset \partial s_2$, де $s_2 \in N_1 \setminus f''(St(H))$. Відмітимо, що за наявності другої пари e_1, e_2 схрещених на евклідовій площині ребер-променів квазізірки $St(H)$, потрібно приклеїти до s_1 другу ленту h_2 Мебіуса та вкласти на неї зазначену пару ребер. За визначенням φ -перетворення склеїмо пару вершин (a_i, g_i) в точку a_i^* , де $i = 1(1) |M|$ та отримаємо граф D і вкладення $f''': D \rightarrow N_3$. У випадку відсутності серед множини підграфів кільцевого графа K , породженого множиною всіх тих ребер графа D , гомеоморфних K_4 та які мають ребрами φ -образи приклеєних висячих ребер квазізірки та тих, що розташовані на $\partial s_1 \cup \partial s_2$ вкладенням f''' , то матимемо вкладення графа D в неорієнтовану поверхню N_3 . Припустимо, що існує мінімальне вкладення графа D в неорієнтовану поверхню рода 2. Тоді на одній ленті Мебіуса мають бути розміщені, принаймні, частини двох ребер підграфів G , H графа D . Це означатиме, що на площині елементарного диска ці ребра чи їх частини мають перетинатися, тобто належатимуть найменшому по включенню підграфу чи частині K_4 , який буде підграфом графа D , що стягуватиметься до K_5 чи буде гомеоморфним $K_{3,3}$. Тобто є спільна вершина у цих ребер чи їх частин, а отже і графів G та H . Згідно заданого φ -перетворення графів G , $St(H)$

на D це неможливо. Припущення неможливе, тобто граф D має неорієнтований род 3. Таким чином доведення у підвипадок а) завершене.

Розглянемо підвипадок б). Наявність внутрішніх точок ребер графа G серед елементів множини точок приєднання означатиме, що граф G можливо подати як квазізірку з центром H' , можливо виродженого, з множиною висячих вершин M' графа $St(H')$, $M' = \{a'_i\}_{i=1}^{|M'|}$, яка матиме таке ж число досяжності, що і множина M графа G та деякі елементи-вершини є несуттєвими відносно числа досяжності стосовно H' при видаленні з множини.

Випадок 2. $H \approx K_{2,3}$.

Розглянемо випадок 2. Тоді множина N складатиметься принаймні з трьох точок степені 2 та, згідно умови числа досяжності 2 множини N містить тільки три вершини графа H . Вкладення в клітку з приклеєною лентою Мебіуса з розміщенням на ленті ребер, які виходять від однієї з вершин множини N , є єдиним з можливих. Подальші кроки доведення аналогічні випадку 1.

Випадок 3. $H \approx K_{3,3} \setminus e$. Оскільки граф H ізоморфний K_4 з виділеними точками приєднання на несуміжних ребрах, то випадок 3 зводиться до випадку 1.

Випадок 4. $H \approx K_5 \setminus e$. Тоді подамо H як квазізірку з центром K_4 з кожної вершини якого виходять висячі ребра, три з них матимуть висячі кінцеві вершини ототоженні в одну. Тобто зводимо цей випадок до випадку 1.

Зауважимо, що кілька висячих ребер-променів квазізірки можуть мати спільну некінцеву вершину. Тоді розіб'ємо множину висячих ребер на три підмножини $St_i = \{e_{ij}\}_{j=1}^{m_i}$, де St_1, St_2 складені з ребер, що матимуть кінцевими точками вершину та внутрішню точку деякого ребра підграфів H чи H' , а підмножина St_3 , що складена з ребер, які матимуть кінцевими точками тільки внутрішні точки ребер підграфів H чи H' можливо є пустою.

Доведення суттєвості кожного ребра впливатиме із визначень числа досяжності множини точок та кліткової довжини.

Відмітимо наступне: 1) центр квазізірки може бути виродженим з принаймні однією вершиною та квазізірка стане простою зіркою; 2) можливість стискання в точку v висячого ребра-променя квазізірки $St(H)$ як несуттєвого відносно роду. Тоді одне ребро з числа двох схрещених на площині ребер графа H буде вкладеним на поверхні роду 2 так, як було наведено в припущеному вище випадку. Тоді квазізірка буде іншою, бо всі ребра графа H , суміжні стиснутому ребру та утворюють множину S , будуть висячими променями квазізірки $St(H')$, де множина вершин графа H' буде такою $(H^0 \setminus \{v\}, H^1 \setminus L)$. Доведення закінчене.

Наслідок 1. Нехай виконуються умови твердження 1. Якщо маємо вкладення $f : D \rightarrow N_2$ для графа D , як для ϕ -образа графів G та $St(H)$, заданого як наведено вище у доведенні співвідношення 1 твердження 1, то серед ребер з $f(St(H))$ може бути, принаймні, одне несуттєве ребро відносно роду при операції видалення.

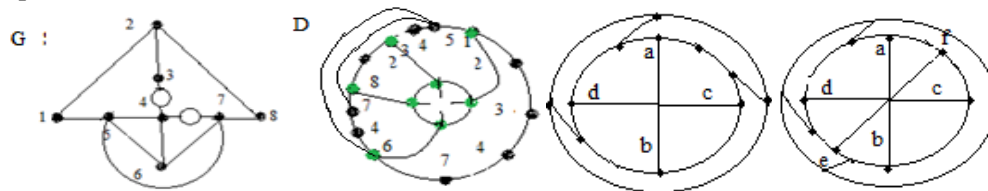


Рис. 2. Ілюструємо твердження 1 (за умови ототождження однакових вершин на границі недовклітки), де $St(H)$ вкладена в середину недовклітки є квазізірка з центром K_4 , з кожної зеленої вершини якого виходить промінь-ребро із зеленою кінцевою вершиною, яка попарно ототожнюється із однією з вершин підмножини M ,

$M = \{1,3,8,6\}$, графа G . Третій та четвертий графи O_2 та O_3 містять ребра чи прості ланцюги, які кінцевими вершинами розділяють на площині пари кінцевих вершин кожного зі схрещених ребер.

Наслідок 2. Нехай виконуються умови твердження 1. Матимуть місце співвідношення:

1. Якщо ребро e графа D є суттєвим відносно роду при операції видалення, то воно належить підграфу гомеоморфному $K_{3,3}$, K_5 , чи тому, що стягується до них.

2. Якщо ребро e графа D є несуттєвим відносно роду при операції видалення, то належить підграфу гомеоморфному O_3 (на рис.2) чи не належить квазізірці з центром K_4 у кожній з вершин якого є висячі ребра промінь, висячі вершини яких ототожнюються з вершинами одного спільного циклу.

3. Якщо ребро e графа D є несуттєвим відносно роду при операції стягування в точку, то воно належить до висячих ребер квазізірки цього графа.

Твердження 2. Нехай задано площинні графи G та H які є t -мінімальним із заданими множинами точок M та N , відповідно, суттєвими відносно числа досяжності при операції видалення довільного елемента з множини) з числом досяжності $t_G(M) = t_G(N) = t$, $\theta_G(M) = \theta_G(N) = \theta$, де

$t \geq 2$, $\theta \geq 0$. Якщо $t = 2$, $\theta = 0$ і зафіксовано квазізірку $St(H)$ із множиною висячих вершин $\{g_i\}_{i=1}^{|M|}$ ребер, які матимуть другу кінцеву вершину серед елементів множини N , та задано φ -перетворення

наступним чином: $\varphi : (G + St(H), \sum_{i=1}^{|M|} (a_i + g_i)) \rightarrow (D, \{a_i^*\}_{i=1}^{|M|})$, де H - центр квазізірки гомеоморфний

одному з графів множини $\{K_{2,3}, K_4, K_5 \setminus e\}$, то граф D містить підграф-обструкцію для проективної площини та можливі несуттєві висячі ребра у квазізірки відносно роду при стисканні його в точку, де образи висячих ребер квазізірки породжують не більше двох підграфів гомеоморфних K_4 .

Доведення твердження 2. Нехай виконуються умови твердження 2. Розглянемо вкладення f , $f : G \rightarrow \Sigma_0$ 2-мінімального графа G із заданою множиною M з суттєвих (відносно характеристик t, θ при операції видалення з множини) точок з числом досяжності $t_G(M) = 2$ та $\theta_G(M) = 0$.

Розширимо це вкладення до $f' : G \rightarrow N_2$, де N_2 - поверхня Клейна, так, щоб отримати недвоклітку s , $s \in N_1 \setminus f'(G)$, на границі якої розташована вся множина точок M . Для цього приєднаємо до евклідової площини дві ленти Мебіуса на яких вкладемо два суміжних ребра e_1, e_2 з числа ребер, розташованих на границях кліток досяжності множини точок M , та які є спільними для границь двох суміжних кліток. Решта ребер та вершин графа G укладатиметься так само як вкладенням f . Відмітимо, що границя ∂s_1 містить стільки копій заданої точки множини M ,

$M = \{a_i\}_{i=1}^{|M|}$, графа G , скільки зустрічається точка при обході за часовою стрілкою границі ∂s_1 . Кожен 2-мінімального графа H ізоморфний одному з графів множини $\{K_{2,3}, K_4, K_5 \setminus e\}$, описаної в [10], а задана множина точок N графа H матиме число досяжності 2. Якщо H є центром квазізірки $St(H)$ із заданою множиною N висячих вершин чи точок, де $N = \{g_i\}_{i=1}^{|M|}$, то можливо побудувати мінімальне вкладення f'' , де $f'' : St(H) \rightarrow N_1$, де N_1 отримано шляхом приклеювання ленти Мебіуса до замкнутої клітки s_1 , що задовольняє умові досяжності множини N на проективній площині, тобто

$f''(N) \subset \partial s_2$, де $s_2 \in N_1 \setminus f''(St(H))$. За визначенням φ -перетворення склеїмо пару вершин (a_i, g_i) в

точку a_i^* , де $i = 1(1)|M|$ та отримаємо граф D і вкладення $f''' : D \rightarrow N_2$, де $f''' = f' + f''$. Розглянемо множину K' підграфів кільцевого графа K , породженого множиною всіх тих ребер графа D , які є

образом приклеєних висячих ребер квазізірки, які розташовані на $\partial s_1 \cup \partial s_2$ вкладенням f''' . За умови наявності підграфа K'' гомеоморфного K_4 в графі K' потрібно розмістити на ленті Мебіуса одне ребро графа K'' з тих, що вкладалися на евклідовій площині із перетином у внутрішній точці (схрещених) та одного ребра з графів G чи H . Оскільки є дві ленти Мебіуса, то матимемо не більше двох таких підграфів K'' . Таким чином отримуємо вкладення графа D в неорієнтовану поверхню роду 2, то $\gamma(D) \leq 2$.

Відмітимо, що граф G можливо подати як квазізірку з центром підграфом H' з множиною висячих вершин M' , $M' = \{a'_i\}_{i=1}^{|M'|}$, яка матиме ті ж властивості, що і множина N графа H . Наявність в M принаймні однієї внутрішньої точки ребра графа G суттєво впливатиме на рід графа D , якщо інша кінцева вершини висячого ребра квазізірки буде суттєвою вершиною відносно числа досяжності при операції її видалення з множини точок приєднання.

Доведемо, що $\gamma(D) = 2$. Припустимо, що існує мінімальне вкладення графа D в неорієнтовану поверхню роду 1. Тоді на одній ленті Мебіуса мають бути розміщені, принаймні, частини двох ребер підграфів G , H графа D . Це означатиме, що на площині елементарного диска ці ребра чи їх частини мають перетинатися, тобто належатимуть найменшому по включенню підграфу чи частині K_4 , який належатиме підграфу графа D , що стягуватиметься до K_5 чи буде гомеоморфним $K_{3,3}$. Тобто має бути спільна вершина у цих ребер чи їх частин, а отже і графів G , H . Це неможливо згідно заданого в умові ϕ -перетворення графів G та $St(H)$ на граф D . Припущення неможливе, тобто граф D неорієнтованого роду 2.

Твердження щодо несуттєвості деякого ребра графа D відносно неорієнтованого роду при операції видалення впливатиме із визначень числа досяжності множини точок. Згідно умови t -мінімальності графів матимемо, що видалення довільного ребра графа G чи H змінюватиме число досяжності множини приєднання, а це призведе до досяжності на евклідовій площині множини точок приєднання та зменшить рід одного із наведених вище вкладень. Якщо видалити довільне висяче ребро квазізірки $St(H)$, то тим самим зменшимо потужність множини точок приєднання, що за умовою мінімальності також зменшить число досяжності на 1 та, як наголошено вище, призведе до зменшення роду. Останній варіант, коли тільки два ребра розташовані на одній ленті Мебіуса, то це означатиме, що видалення одного з них вивільнить ленту і тим самим зменшить рід на 1.

Відмітимо про можливість стискання в точку v висячого ребра-променя квазізірки $St(H)$ як несуттєвого відносно роду. Якщо одне ребро з числа двох схрещених на площині ребер графа H буде вкладеним на поверхні роду 2 так як було наведено в вище наведеному випадку. Тоді квазізірка буде іншою, бо всі ребра графа H , суміжні стиснутому ребру та утворюють множину S , стануть променя-ми квазізірки $St(H')$, де $H' = (H^0 \setminus \{v\}), H^1 \setminus L$. Доведення твердження 2 закінчене.

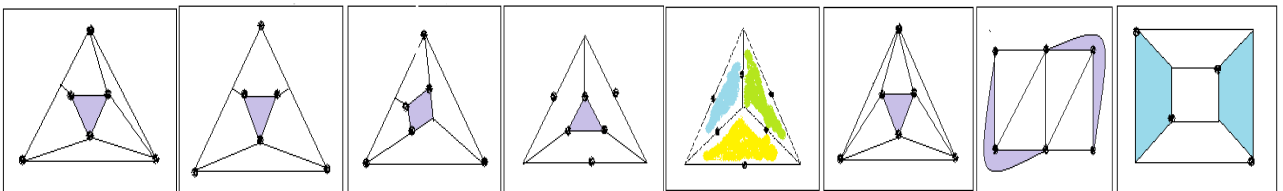


Рис 2. Проілюструємо твердження 3: площинні підграфи графів B_7 , C_3 , C_4 , D_2 , E_2 , $K_{1,2,2,2}$, $K_7 \setminus C_4$, $K_{4,5} \setminus 4K_2$, відповідно, з виділеними жирним вершинами із множин приєднання висячих вершин простої зірки. На п'ятій карті граф K_4 із 1-підрозділеними ребрами, де множина точок 1-підрозділення матиме $(t=3) \wedge (\theta=1)$.

Твердження 3. Нехай площинний граф G не є t -мінімальним, але є ϕ -образом трьох копій графів ізоморфних $K_{2,3}$, чи K_4 , чи $K_5 \setminus e$ при ϕ -перетворенні, заданому на двох парах простих ланцюгів чи

підланцюгів цих графів та задано множину M суттєвих точок (відносно операції видалення)
 $t_G(M) = t$, $\theta_G(M) = \theta$, $D_G(M) \geq 1$. Мають місце наступні твердження:

1. Якщо $(t=3) \wedge (\theta=0)$, то $D_G(M) \geq 3$;

2. Якщо задано φ -перетворення наступним чином: $\varphi : (G + St(H), \sum_{i=1}^{|M|} (a_i + g_i)) \rightarrow (D, \{a_i^*\}_{i=1}^{|M|})$,

де H - центр квазізірки гомеоморфний одному з графів множини $\{K_{2,3}, K_4, K_5 \setminus e\}$, де множина M ,
 $M = \{a_i\}_{i=1}^{|M|}$, точок має характеристики $t = 2$, $\theta = 0$, квазізірка $St(H)$ із множиною висячих вершин
 $\{g_i\}_{i=1}^{|M|}$, тоді граф D є прототипом графа-обструкції для проективної площини (із можливо
 несуттєвими висячими ребрами квазізірки відносно роду при стисканні його в точку), причому образи
 пари висячих ребер квазізірки породжують не більше двох підграфів гомеоморфних K_4 ;

3. Якщо змінити в співвідношенні 2 тільки $t = 3$, то граф D є прототипом графа-обструкції для
 поверхні Клейна, причому образи пари висячих ребер квазізірки породжують не більше трьох
 підграфів гомеоморфних K_4 .

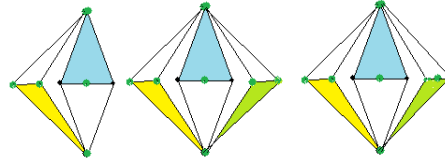


Рис 3. Приклад до твердження 3, де підграф G графа D_3 (перший зліва-направо) та його аналоги з
 множинами із наведених точок приєднання, які попарно ототожнюються з кінцевими вершинами простої зірки

Алгоритм побудови n -зв'язних графів-обструкцій поверхні Клейна.

Початок алгоритму A (вхідні: G , вихідні: D);

Вхідні дані:

1. Вхідний площинний граф G є 3-мінімальним чи мінімальний відносно кліткової відстані 2 підграф графа-обструкції проективної площини та в ньому задано множину вершин із числом досяжності 2, n -число зв'язності вихідного графа D ;

2. Множина $F(G) = \{f_i\}_{i=1}^{|F|}$ всіх неізоморфних вкладень графа G в S - поверхню Клейна;

3. Для кожного вкладення f_i побудовані наступні множини:

а) $R_i = \{\{a_{ik'}\}_{k'=1}^n\}_{i=1}^{m_i}$ мінімальну за включенням і складену із підмножин

неізоморфних (при автоморфних відображеннях графа G) точок $\{a_{ik'}\}_{k'=1}^n$ заданої потужності множини R_i розташованих на границях кожної із наступних кліток s_j, s'_j, s''_j , де $s'_j \in S \setminus f'(G_u)$, $s''_j \in S'' \setminus f''(G \setminus u)$, та мінімальну при операціях видалення чи стискання в точку довільного ребра u графа G , де f', f'' - мінімальні вкладення графів $G_u, G \setminus u$ в неорієнтовані поверхні S', S'' меншого роду ніж S , відповідно,

б) $M = M(f_i, R_i) = \{s_j\}_{j=1}^{|M|}$, складеної з кліток s_j , де $s_j \in S \setminus f_i(G)$, які містять на своїх границях всю множину вершин графа;

4. Множина квазізірок з центром K , де $K \in \{K_4, K_{2,3}\}$ та, із принаймні, чотирма (для K_4) чи трьома (для $K_{2,3}$) висячими ребрами, яких може бути не більше $|G^0|$;

5. Множини $st(K_4) = \{g_k\}_{k=1}^{|e(K_4)|}$, $st(K_{2,3}) = \{h_k\}_{k=1}^{|e(K_{2,3})|}$ всіх вкладень квазізірок з центрами $K_4, K_{2,3}$, відповідно, в клітку s , як в локальну проективну площину з розташуванням на ленті Мебіуса ребер центру та висячих ребер квазізірки.

6. Function Π (вхід: R, n ; вихід: R^n, NG), яка при кожному звертанні видає елемент з R^n -множини всіх перестановок вершин $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ за час пропорційний $n!$ та множину NG - всіх розбиттів множини висячих вершин $g_1, g_2, g_3, \dots, g_m$ квазізірки на n непустих підмножин G_1, G_2, \dots, G_n , кожен з елементів підмножини G_i ототожнюється в одну точку ng_i , яка попарно ототожнюється з a_i , число розбиттів які видаватиме функція за час пропорційний NN , де $NN = (m(m-1)(m-2) \dots (m-(n-1)))$, $m > n$.

Вихідні дані: Граф D – прототип n -зв'язного графа-обструкції для поверхні Клейна.

Ввести G, n ;

Для i від 1 до $|F(G)|$ кроком 1 виконати: // початок циклу з параметром i
початок дій;

$f := f_i$;

$R := R_i$;

Для j від 1 до $|M|$ кроком 1 виконати:

початок дій;

$s := s_j + h$; // приклеїмо до площинного диску s ленту Мебіуса h ;

$R := \partial s \cap R$; // до n точок a_i границі клітки s приклеюватимемо g_j висячі вершин зірки;

Якщо $|\partial s \cap R| < n$ то перехід на кінець циклу з параметром j ;

Вкладемо K в $\bar{s} \setminus \partial s$; // центр квазізірки зірки вкладаємо в середину клітки s

// так, щоб одне з ребер лежало на ленті Мебіуса h ;

Function Π (вхід: R, n ; вихід: R^n); // при кожному звертанні на виході нова перестановка

// з множини R^n - всіх перестановок вершин $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$;

// з якими ототожнюється множина висячих вершин $ng_1, ng_2, ng_3, \dots, ng_n$.

// матимемо ототоженені вершини $a_1 ng_1, a_2 ng_2, \dots, a_n ng_n$.

Для k від 1 до n кроком 1 виконати:

початок дій;

$g := a_k ng_k$; // маємо вершину приєднання з тими ж ребрами графа G та;

// висячими ребрами квазізірки з центром K укладемо

$$D^0 = G^0 \setminus \{a_k\} \cup K^0 \setminus \{g_k\} \cup \{a_k ng_k\};$$

$$D^1 := G^1 \cup K^1 \cup (St^1(K) \setminus K^1);$$

кінець дій циклу з параметром k ;

Виводимо (“Граф $D = ”, (D^0, D^1)$);

кінець дій циклу з параметром j ;

кінець дій циклу з параметром i ;

Кінець алгоритму A .

Твердження 4. Мають місце співвідношення:

- Алгоритм A коректний та має часову складність $O(b|G^0| \text{time}(\text{Function } \Pi(R, n)))$, де $b = b(G)$ – добуток числа неізоморфних мінімальних вкладень заданого 3-мінімального площинного графа G та найбільшого числа кліток в них пропорційне $|G|^2$.
- Функція (Function $\Pi(R, n)$) для $n=3$ та деяких квазізірок має часову складність пропорційну $O(|G^0|^n)$, де $|G| \leq 10$.
- Вихідний граф D може мати серед образів висячих ребер квазізірки несуттєві ребра відносно роду при операції стискання ребра в точку. Виконавши стискання в точку всіх таких ребер графа D отримаємо мінор поверхні Клейна.

Твердження 5. Нехай площинний граф G є мінімальним відносно кліткової довжини 2 підграфом графа обструкції проективної площини (одним з графів на рис. 3) та задано його підмножину точок M з суттєвих вершин відносно чисел $D_G(M)$ і $t_G(M) = t$, де $t = 2$, $D_G(M) = 2$, при операції

видалення точки з множини M . Якщо задано φ -перетворення графа G та квазіірки $S_G(H)$ з центром-графом H наступним чином: $\varphi : (G + St(H), \sum_{i=1}^{|M|} (a_i + g_i)) \rightarrow (DH, \{a_i^*\}_{i=1}^{|M|})$,

де H - центр квазіірки гомеоморфний одному з графів множини $\{K_{2,3}, K_4, K_5 \setminus e, \bar{K}_r\}$, $r \geq 1$, де множина M , $M = \{a_i\}_{i=1}^{|M|}$, точок має характеристики $t = 2$, $\theta = 0$, квазіірка $St(H)$ із множиною висячих вершин $\{g_i\}_{i=1}^{|M|}$, тоді мають місце наступні співвідношення:

1. Якщо $r = 1$, ($t = 2$, $\theta = 0$) чи ($t = 3$, $\theta = 1$), то граф DH є графом-обструкцією для проективної площини, причому образи пари висячих ребер квазіірки не породжують підграфів гомеоморфних графу K_4 з двома видаленими несуміжними ребрами;

2. Якщо граф DH є графом-обструкцією для поверхні Клейна, то образи пар висячих ребер квазіірки породжують не більше двох різних підграфів гомеоморфних K_4 та можуть бути несуттєвими відносно роду при операції стягування висячих ребер в точку;

3. Якщо замінити в співвідношенні 1 рівність для t на $t = 3$, то граф DH стане прототипом графа-обструкції для поверхні Клейна, причому образи пари висячих ребер квазіірки породжують не більше трьох підграфів гомеоморфних K_4 .

Доведення. Нехай виконуються умови твердження 5 та співвідношення 1. Покажемо виконання умови суттєвості кожного ребра графа DH відносно неорієнтованого роду 2 при операції видалення. Для прообраза u довільного ребра можливі наступні випадки:

Випадок 1 u належить графу G ;

Випадок 2 u належить графу H ;

Випадок 3 u належить до множини висячих ребер-променів квазіірки $St(H)$

Нехай має місце випадок 1. Видаливши ребро матимемо згідно умови суттєвості множини M відносно числа кліткової відстані $D_G(M)$ матимемо зменшення на 1 цього числа. Тоді матимемо можливість такого вкладення графа G в площину з меншим на 1 числом приклеєних лент Мебіуса яке розміщуватиме множину M на границі однієї псевдоклітки в яку вкладемо квазіірку $St(H)$.

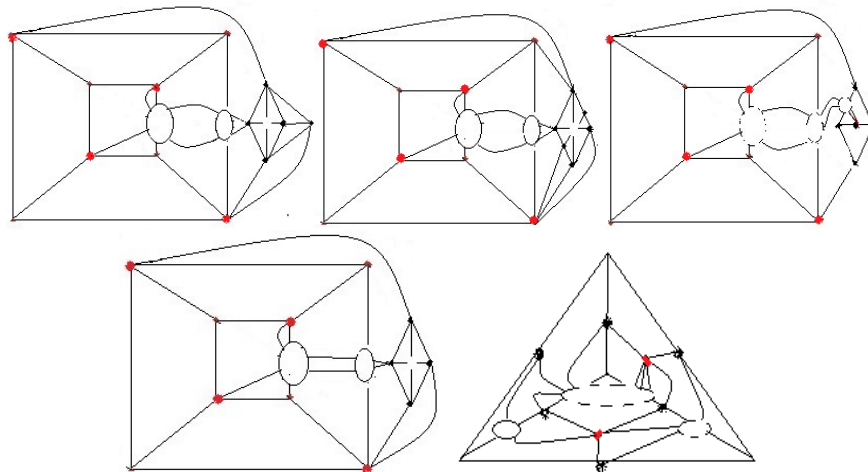


Рис.4. Приклади ручного виконання алгоритму побудови 3-зв'язних графів обструкцій неорієнтованого роду 3 на перших чотирьох картах, на 5-й карті граф не 3-зв'язний.

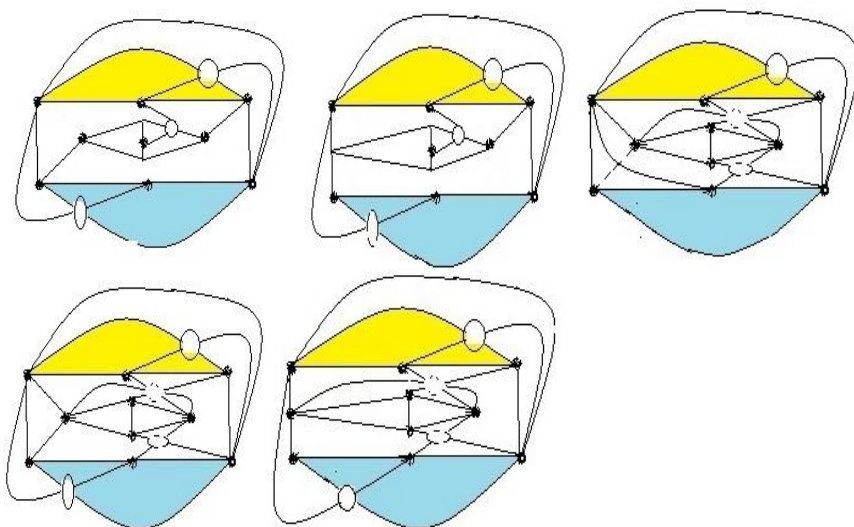


Рис.5. Приклади ручного виконання алгоритму побудови 3-зв'язних графів обструкцій неорієнтованого роду 3 на перших двох картах, на 5-й та 4-й картах графу роду 4.

Висновок. Отримано математичне забезпечення для алгоритмів побудови мінорів заданої зв'язності для поверхні Клейна шляхом φ -перетворення 3-мінімальних площинних графів та квазізірок з центром K_4 чи $K_{2,3}$.

Список літератури

19. Хоменко М. П. φ -перетворення графів. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1973. 383 с.
20. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1970. 299 с.
21. Mohar B., Thomassen C. *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins University Press, 2001. 412 p. <https://www.sfu.ca/~mohar/Book.html>
22. Hur S. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Phd, Ohio State University, 2008. http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1209141894
23. Archdeacon D., Huneke P. A Kuratowski Theorem for Nonorientable Surfaces. *Journal of combinatorial theory, Series B*. 1989. **46**. P. 173–231.
24. Петренко В.І. Про структуру площинних підграфів графів-обструкцій неорієнтованої поверхні заданого роду. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021. № 33. С. 105–109. [Google Scholar](#).
25. Anna Flötotto. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, University Bielefeld, 2010, -174 pp.
26. P.Škoda. Obstructions for embedding graphs into surfaces, Simon Frazer University, PhD dissertation, 2012.-133 p.
27. Bienstock D., Dean N. On obstructions to small face covers in planar graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*. 1992. **55**. P. 163–189. <https://doi.org/10.1016/0095-8956%2892%2990040-5>
28. Bienstock D., Monma C.L. On the complexity of covering vertices by faces in a planar graph. *SIAM J. Comput.* 1988. **17**. P. 53–76. <https://doi.org/10.1137/0217004>
29. Mohar B. Face Covers and the Genus Problem for Apex Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 2001. **82**. P. 102–117. <https://doi.org/10.1006/jctb.2000.2026>
30. Mohar B. Apex graphs with embeddings of face-width three. *Discrete Mathematics*. 1997. **176**. P. 203–210. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(96\)00363-9](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00363-9)
13. В.І. Петренко, Д.А. Петренко, О.В. Оришака. Структура проективно площинних підграфів графів-обструкцій заданої поверхні. *Кібернетика та комп'ютерні технології*. 2022, № 2. С. 1-20 DOI:10.34229/2707-451X.22.2.0
14. В.І. Петренко, Д.А. Петренко. Про алгоритм побудови 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*, № 37 (2023): 72-74. <http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit/article/view/308>
15. Edwin R. van Dam, Jack H. Koolen, Hajime Tanaka. Distance-regular graphs, E-JC, DS22: Apr 15, 2016, <https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/issue/view/Surveys>.
16. Bojan Mohar, Petr Škoda Excluded minors for the Klein bottle I. Low connectivity case, *Journal of Combinatoria Theory, Series B, Volume 164*, January 2024, Pages 299-320. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2023.10.002>
17. Bojan Mohar, Petr Škoda Excluded minors for the Klein bottle II. Low connectivity case, *Journal of Combinatoria Theory, Series B, Volume 166*, May 2024, Pages 80-108. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2023.12.006>

РОЗДІЛ 6.

6.1. ABOUT Φ -TRANSFORMATION GRAPHS AS A TOOL FOR INVESTIGATIONS

Let's dissolve the problem of modeling a complex system in general form and propose a theoretical and graphical approach as a way of thinking with artificial images-structures. In systems modeling theory, there are mathematical methods in which large structures are regarded as a set of small and simple substructures, which may have some common parts that can be identified when constructing or reconstructing an entire structure from a finite number of substructures. The main object of ϕ -method is creating graph (graph model) obtained as a pair of finite sets: sets of vertices and sets of edges to determine the relationships between structure of vertices as objects. The basic idea of the method ϕ -transformation can be interpreted as a way to inherit a particular property of substructures throughout the structure, depending on the properties of the connection (identification of given parts of substructures). An example of this is the transformation of basic system programming problems into graph theory problems, with mathematical support for their solution algorithms.

The graph model of a mathematical model of a complex system is presented in the form of an undirected graph G without multiple edges and loops and is studied by studying the structured properties of a graph embedded in a closed surface S of an undirected genus $\gamma(S)$; the graph edges placed on the S will be located at least on the projective plane or the Mobius band glued to the oriented surface and will have no common points except the vertices of the graph G with genus $\gamma(G)$ and may not be located only on the handles. A graph G is said to be minimal over S ($\gamma(S)$ -no irreducible) if for each proper subgraph H of graph G there is an inequality $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. A minimal graph over S is called a graph G that decreases $\gamma(G)$ after the edge is removed or the edge is reduced to a point. For sphere S such are K_5 and $K_{3,3}$. The following results can be used for systematic analysis of graph models.

1. Main definitions and results

For a graph \mathfrak{Z} (obtained as a φ -image $G + St_n(g_0)$ with n vertices of the star $St_n(g_0)$ amalgamate with vertices of the set X having the number of reachability $t_G(X)$ and characteristics $\theta_G(X), \partial\theta_G(X)$, [3-4] the following inequality holds:

$$\gamma(\mathfrak{Z}) \leq \gamma(G) + t_G(X) - \theta_G(X) - \partial\theta_G(X) - 1.$$

Was introduced a characteristic at $\theta_G(X)$ is a measure of the cyclic connectivity of 2-cells of set $S_G(X)$ as opposed to $\partial\theta_G(X)$ which characterizes the cyclicity of the set $S_G(X)$. They can be used in the analysis of graph models of linguistic circuits which know that vertex and vertex links have some common property-context and some pairs of vertexes may conflict or contradict each other. To resolve these conflicts, we suggest placing graph models on the surface of another kind without crossing the edges at the inner points. In order to investigate the behavior of a mathematical model of a complex system placed on the orienting surface S , its graph model G without multiple edges and loops is considered. Then it is possible to use the transform method created for graphs to solve modeling problems by splitting into "simpler" submodels with further identification of elements made with predefined properties. So the expansion of model G can be determined by the following transformation:

$$\varphi : (G, St_n(g_0), \sum_{i=1}^n (g_i + a_i)) \rightarrow (\mathfrak{S}, \{a_i^*\}_{i=1}^n)$$

where $\{a_i\}_{i=1}^n$ is the set X of points of graph G with the number of reachability $t_G(X)$, which is one set for identification and amalgamation, and the other $\{g_i\}_{i=1}^n$ is the set of end vertices of the star $St_n(g_0)$ with center g_0 . Generalization of the characteristic relating to the cyclic structure of the set X points of the graph G embedded in the surface S. Introduction of a new characteristic that measures the chain structure of the set X of points of graph G on S. This result will be useful in the systematic analysis of both graph models and their topological aspect. which will have common properties at the edges and vertices of the graph model. The solution to our problem is based on the method of graph transformations [1-2], whose founder is M.P. Khomenko, and the concepts he introduced. For the take of completeness, we present the most important part of them.

Definition 1.1. A φ -transformation of space X into X relative homeomorphism $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$ which is the sum $\varphi_0 + \sum_{i=1}^q \varphi_i$ of $q+1$ homeomorphisms:

1. $\varphi_0 = \varphi|_{X \setminus A} : X \setminus A \cong X \setminus A$, φ_0 is a homeomorphism;
2. $\varphi_j : A_j \rightarrow A_j$;
3. $\sum_{j=1}^q \varphi_j = \varphi|_A$, $\sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j + \sum_{j=k+1}^q \varphi_j \neq \varphi|_A$, $k_j = 1(1)q$;
4. $\varphi_j = \sum_{i=1}^{d_j} \varphi_{ji}$; $\varphi_{ji} = \varphi|_{A_{ji}} : A_{ji} \rightarrow \bigcup_{i=1}^{d_j} A_{ji}$; $d_j \geq 2$; $j = 1(1)q$;
5. $-1 \leq \dim(A_{ji} \cap A_{j'i'}) \leq \dim(A_j)$, $i \neq i'$, $i, i' = 1(1)q$;
6. $A_{ji} \neq A_{ij}$, $j \neq i, i, j = 1(1)q$.

An important class φ -transformations are φ -transformations satisfying the condition: $A_{ji} \cap A_{j'i'} = \emptyset$ at $(i \neq i') \cup (j \neq j')$. Then the subspace A is decomposed into the sum q of the subspace systems A_{ji} homeomorphic to each other within each system. Thus, on the subspace A, the relation R - equivalence is given, i.e. $R = \sum_{j=1}^q R_j$, moreover $R_j[A_{ji}] = \sum_{i=1}^{d_j} A_{ji}$. Let $X = \sum_{r=1}^m X_r$, $X = \sum_{l=1}^{m_0} X_l$, $p_0(X_r) = p_0(X_l) = 1$ for $l = 1(1)m_0$, $r = 1(1)m$.

Define φ -transformation $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$ in accordance with definition 1.1. We introduce the following characteristics φ -transformation:

$$k_r^{j j'} = \left\{ \left[A_{ji} | A_{ji} \subseteq A_{j'i'} \subseteq X_r, i = 1(1)d_j, i' = 1(1)d_{j'} \right] k_{rj} = \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq j}}^q k_r^{j j'} \right.$$

$$A(\varphi_j) = \left\{ k^{j j'} / (k^{j j'} \neq 0) \wedge (\forall j'', j'' \in \{1, 2, \dots, q\}) [(j'' \neq j, j') \Rightarrow ((k^{j j''} = 0) \vee (k^{j'' j'} = 0))] \right\} k^{j j'} = \sum_{r=1}^m k_r^{j j'}, j \neq j', j' = 1(1)q.$$

Possible causes are shown in figure 1.

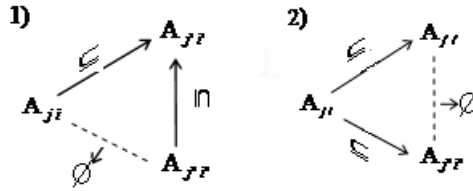


Fig. 1

The set $A(\phi_j)$ is uniquely defined. We denote k_r^j by a number $k_r^{j,j}$.

2. Main three graphs

Definition 2.1. The φ -base $B_j = B(\varphi_j)$ of reflection $\varphi_j : A_j \rightarrow A_j$ with given φ -transformation $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$ is the sum of those components of the subspace X that intersect with the subspace A_j , that is $B_j = \sum_{r \in J_j} X_r$, $J_j = \{r / k_r^j > 0\}$.

Definition 2.2. The complex φ -base $B_l = B(X_l)$ over X_l is called the prototype of this component at a given φ -transformation, i.e. $B_l = \varphi^{-1}(X_l)$.

Statement 2.1. If fixed φ -transformation $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$, $J_l = \{j / A_j \subseteq B_l\}$, $v_l = |J_l|$, $l = 1(1)m$, then

$$1) B_l = \bigcup_{j \in J_l} B_j, \quad l = 1(1)m_0,$$

$$2) B_l \cap B_{l'} = \emptyset, \quad l \neq l', \quad l, l' = 1(1)m_0,$$

$$3) \sum_{l=1}^{m_0} v_l = q.$$

Proof of this statement follows from the fact that B_l - the set of components of spaces X "glued" into a component X_l on the subsystem A_j .

Definition 2.3. The graph of the complex φ -base B_l φ -transformation $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$ is called a graph Z_l , $Z_l = (Z_l^0, Z_l^1)$, where $Z_l^0 = \{x_r / X_r \subseteq B_l\}$ the vertices x_r are joined by edges so that $k_r^j \neq 0$ a tree with a $k_r^j - 1$ -loop in x_r for all j , $j = 1(1)q$ is formed on all vertices.

Definition 2.4. The graph φ -base φ -transformation is called a graph $Z(X, X) = \sum_{l=1}^{m_0} Z_l$.

Statement 2.2. The graph $Z(X, X)$ is defined uniquely if and only if, when $p_0(B_j) \leq 2$ for $j = 1(1)q$, i.e. we have no more than two connected components that intersect with the system A_j . If $(A_j = A_{j1} \cup A_{j2}) \wedge (d_j = 2)$ for all $j = 1(1)q$, then the graph $Z(X, X)$ is uniquely defined.

Theorem 2.1. For each graph $Z(X, X) = Z$ φ -bases φ -transformations $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$ we have:

$$1) p_0(Z) = p_0(X);$$

$$2) p_1(Z) = \sum_{j=1}^q d_j + p_0(X) - p_0(X) - q;$$

In order to ensure that these properties are valid, it is sufficient to calculate $\alpha_1(Z(X, X))$,

$$\alpha_1(Z) = \sum_{j=1}^q (p_0(B_j) - 1) + \sum_{j=1}^q \sum_{r=1}^m (k_r^j - 1) + \sum_{j=1}^q \left\{ \left| \frac{k_r^j}{k_r^j} = 0 \right| \right\},$$

where $m = p_0(X)$ and use the formula $p_1(Z) = \alpha_1(Z) - \alpha_0(Z) + p_0(Z)$.

Theorem 2.2. The graphs of the φ -bases $Z(X, X)$ are simple (i.e. without multiple edges and loops) if and only if, when $k_r^j \leq 1$ and $\left| \left\{ \varphi_j / (k_r^j \neq 0) \wedge (k_{r'}^j \neq 0) \right\} \right| \leq 1$, where $r \neq r'$, $r, r' = 1(1)m$, $j = 1(1)q$. In other words, the graphs $\{Z\}$ are simple if and only if, when:

1) we have only one subspace A_{ji} on each component X_r ;

2) there no more than one system $\sum_{i=1}^{d_j} A_{ji}$ for each pair of such components.

Definition 2.5. The graph φ -transformation $\varphi|_{B_l} : (B_l, B_l \cap A) \rightarrow (X_l, X_l \cap A)$

of a complex φ -base B_l at a given φ -transformation of space X is called a graph Λ_l , where

$$\Lambda_l^0 = \{x_r / X_r \subseteq B_l\} \cup \{y_j / A_j \subseteq B_l\},$$

$$\Lambda_l^1 = \{(k_r^j - k_{r'}^j)(x_r, y_j) / (X_r \subseteq B_l) \wedge (A_j \subseteq B_l)\} \cup \{(y_j, y_j) / (k_r^j - k_{r'}^j \in A(\varphi_j)) \wedge (A_j \subseteq B_l)\}$$

Definition 2.6. Graph φ -transformation of space X is the graph

$$\Lambda(X, X) = \sum_{l=1}^m \Lambda_l$$

Statement 2.3.

1. The arbitrary φ -transform graph $\Lambda(X, X)$ is uniquely defined and is simple if and only if, when:

$$k_r^j - k_{r'}^j \leq 1, j = 1(1)q, r = 1(1)m;$$

2. There is a connection between $p_1(Z)$ and $p_1(\Lambda)$.

Consider the following example in figures 2,3, where:

$$A_1 = \bigcup_{j=1}^3 A_{1j}, A_2 = \bigcup_{j=1}^3 A_{2j}, A_3 = \bigcup_{j=1}^2 A_{3j}.$$

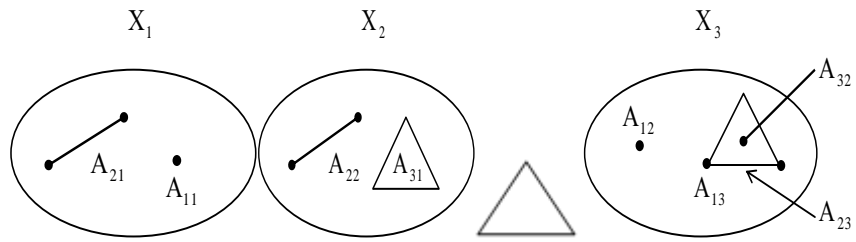


Fig. 2.

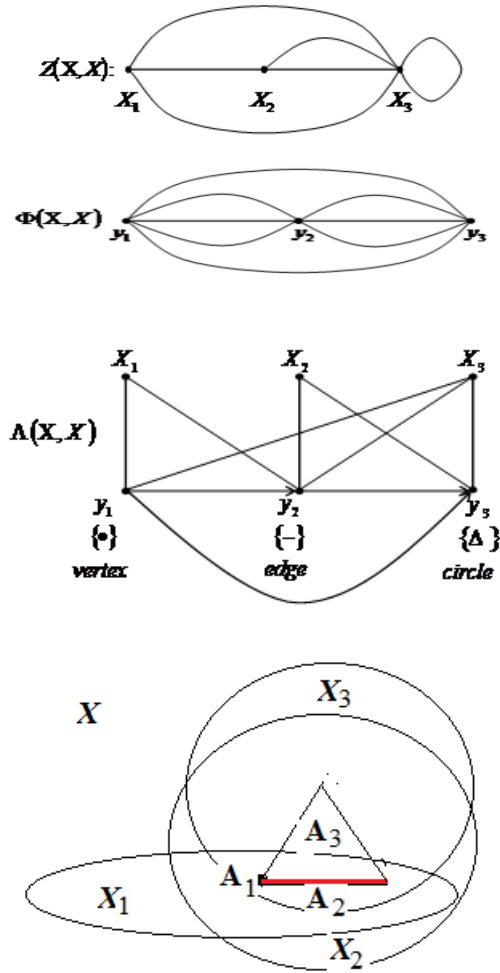


Fig. 3.

3 φ -transformations for graphs on some surfaces

1. Projective plane.

The problem of studying the structure of all minimal non-planar projective graphs is solved by sorting through all the different variants of removing one of the vertices of one of the 35 minors of the projective plane and selecting non isomorphic graphs of nonorientable genus 1. Since [5] does not show the diagrams of these graphs, the construction of all minimal non-planar projective graphs, and in the study of the properties of these subgraphs of the minors of the projective plane relative to the number of reachability of the set of points and the genus of graph.

The solution of this problem is to construct all minimal non-outer projective-planar graphs by sorting out all the different variants of removing one of the vertices of a graph - minor of a projective plane and selecting non isomorphic graphs of nonorientable genus 1. Constructing similarly to how minimally projective non-planar graphs K_5 or $K_{3,3}$ are formed from minimal non-outer planar graphs K_4 or $K_{2,3}$ by gluing a simple star $St(v)$ to the minimum power subset of points of graphs K_4 or $K_{2,3}$ with number reachability equals 2. Main results: theorem 3.1 and diagrams of 118 non-outer projective-planar graphs are given and the numbers of reachability of sets of vertices of minors of a projective plane and sets with points of attachment of a star to subgraphs of these minors are calculated. The full list of these non-outer projective-planar graphs will be published as soon as possible.

Theorem 3.1. For an arbitrary graph - obstruction G of the projective plane N_1 and each of its vertices v with the set $M(v)$ of all vertices of the incident occur the following statements:

1. For the subgraph $G \setminus v$ of the nonorientable genus, the following relations will take place:

a) If $\gamma(G \setminus v) = 1$, then we have the following relations a1) and one of a2) or a3):

a1) $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 2$, wherein the set $M(v)$ belongs to the boundaries $\partial s_1, \partial s_2$ of two cells s_1, s_2 of the projective plane having at least one common vertex;

a2) each edge of the subgraph $G \setminus v$ is significant in relation genus $\gamma(G \setminus v)$ with respect to the removing the edge or compressing it in point;

a3) each edge of a subgraph $G \setminus v$ is significant with respect to the removal or compression operations of an edge;

b) If $\gamma(G \setminus v) = 0$ then, one of the following two relationships will occur:

b1) $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 3$ and the set $M(v)$ is located on the boundaries of three cells s_1, s_2, s_3 of the projective plane satisfying the relation $\partial s_3 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \neq \emptyset$, each edge of the subgraph $G \setminus v$ being significant relative $t_{G \setminus v}(M(v), N_1)$ to the operations of removing the edge or compressing it to a point, and each point w of the set $M(v)$ satisfies equality $t_{G \setminus v}(M(v) \setminus \{w\}, N_1) = t_{G \setminus v}(M(v), N_1) - 1$;

b2) $t_{G \setminus v}(M(v), \Sigma_0) = 2$, where $t_{G \setminus v}(M(v), \Sigma_0)$ is the number of reachability of the set $M(v)$ relative to the euclidean plane Σ_0 , is realized by minimal embedding $f: (G \setminus v) \rightarrow \Sigma_0$ at the boundaries $\partial s_1, \partial s_2$ of the cells s_1, s_2 , where $\{s_1, s_2\} \subset \Sigma_0 \setminus f(G \setminus v)$, which satisfies equality $\partial s_1 \cap \partial s_2 = \emptyset$, that is, separated by a ring from the cells, then relative to the projective plane, the set $M(v)$ will have a number of reachability $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 2$, with each point w of the set $M(v)$ satisfies equality $t_{G \setminus v}(M(v) \setminus \{w\}, N_1) = t_{G \setminus v}(M(v), N_1)$ and the set $f(M(v) \setminus \{w\})$ by some embedding $f': G \setminus v \rightarrow N_1$ is placed at the boundaries $\partial s'_1, \partial s'_2$ of two cells s'_1, s'_2 having at least one common point where $\{s'_1, s'_2\} \subset \Sigma_0 \setminus f'(G \setminus v)$, and equality $\partial s'_1 \cap \partial s'_2 \neq \emptyset$ is satisfied.

2. Each minor G of the nonorientable genus 2 (except G_3, E_1, G_4) is covered by a maximum of 4 (eg, graphs A_2, G_1) subgraphs or parts homeomorphic to one of the following graphs: $K_{2,3}, K_4, K_5 \setminus e, K_{3,3} \setminus e, K_5, K_{3,3}$ and relatively Klein surface N_2 the number of reachability 2 for the set of vertices (for $G \in \{G_3, E_1, G_4\}$ we have), and for each removed edge e the graph $G \setminus e$ will have at N_1 the number of reachability equals 2 for the set of vertices;

3. The presence of the coating specified in the statement 2 is not sufficient to make the graph an obstruction of nonorientable genus 2.

4. If $\gamma(G \setminus v) = 0$ and on the Euclidean plane Σ_0 made up a set $M(v)$ of points of a graph G formed from the obstruction graph of a projective plane N_1 by removal of a vertex v and adjacent edges is given by an arbitrary minimal embedding $f: G \setminus v \rightarrow \Sigma_0$ on the boundaries of two cells that have no common points and have end points that does not belong to their borders. Removing an arbitrary point from the set M leads to the failure of relation 4.

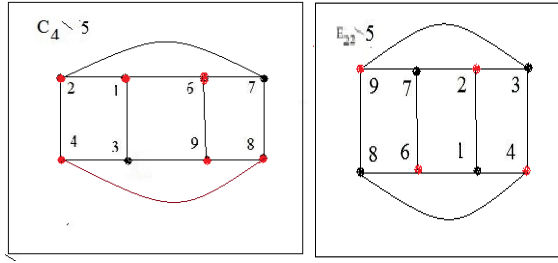


Fig. 4. Illustrates the relation b) of statement 1 of theorem 3.1, where sets $\{1,2,4,5,8,9\}$ for graph $C_4 \setminus 5$, $\{2,4,6,9\}$ for graph $E_{22} \setminus 5$.

Proof. We prove statements 1 of Theorem 3.1. Suppose that for each vertex v of the graph - obstruction G for a projective plane N_1 with the set $M(v)$ of all vertices incident v , there is a subgraph $G \setminus v$ of a nonorientable genus $\gamma(G \setminus v)$. Then we will either $\gamma(G \setminus v) = 1$ have and $G \setminus v$ contain a subgraph or part homeomorphic K_5 , or $K_{3,3}$, or $G \setminus v$ that subgraph does not contain these partial subgraph, where K_5 has two non-isomorphic embeddings in N_1 and $K_{3,3}$ has one non isomorphic embedding in N_1 . Prove the relation a1) relation a) statement 1, namely $\gamma(G \setminus v) = 1$, if, then inequality $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 2$ holds. Using the opposite method, suppose that $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) > 2$, that is, the set $M(v)$ is placed by some minimal embedding f of a graph $G \setminus v$ in N_1 the boundaries of at least three cells of the projective plane, namely s_1, s_2, s_3 . Let the graph G be the φ -image of the graph $G \setminus v$ and $St_G(v)$, if the pairs of vertices (v_{1i}, v_{2i}) are identified, where $v_{1i} \in M(v)$, $v_{2i} \in St_G^0(v) \setminus \{v\}$, $i = 1(l) \deg_G(v)$. To continue embedding $f : G \setminus v \rightarrow N_1$ on the graph G , it is necessary and sufficient to attach all the edges of the star and its center to one cell formed of two cells s_1, s_2 , where $\{s_1, s_2\} \subseteq N_1 \setminus f(G \setminus v)$ whose boundaries have at least one, the common vertex w , where $w \in G^0 \setminus \{v\} \cap \partial s_1 \cap \partial s_2$, and contain the set $M(v)$. To form a single surface cell from these cells s_1, s_2 , we attach on N_1 a Mobius strip L on which we place $f'(N(w))$ by new embedding $f' : G \setminus v \rightarrow N_2$, where $f'(N(w)) \subset L$, $f'|_{G^1 \setminus St^1(v) \setminus N(w)} = f|_{G^1 \setminus St^1(v) \setminus N(w)}$, $N(w)$ is the smallest subset of the set of adjacent edges belonging to the boundary of one or to the boundaries of several cells, which on N_1 at least one side separate the cell s_1 from cells s_2 , $N(w) = N_1(w, s_1, s_2)$. Note that the insertion of an edge adjacent w to the Mobius strip will be to separate some of the inner points of the edge, which it splits into two parts, and to place its copies on diametrically opposite parts of the circle, and the edges will have endpoints of these copies and the boundary of that edge. As a result, we get a sell s_0 where $\partial s_0 = \partial s_1 \cup \partial s_2$, $\{s_0\} \subseteq N_2 \setminus f'(G^1 \setminus St^1(v))$ in which we put vertex v the center of the star and the subset $St^1(v)$ of its rays of edges that terminate as a bundle of straight segments finished on ∂s_0 . Then we will have at least one edge (v, u) , where $u \in \partial s_3 \setminus (\partial s_1 \cup \partial s_2)$ there is no investment $f'(v, u)$ in N_2 , that is $\gamma(G \setminus (v, u)) = 2$. This contradicts the condition that the graph is an obstruction graph of type 2, the assumption is incorrect. Then the assumption is wrong, we will have equality $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 2$.

We prove the relation a2) of the statement 1. We give the graph $G \setminus e$ as an φ -image of the graph $(G \setminus v) \setminus e$ and in the identification of pairs of vertices (v_{1i}, v_{2i}) , where $v_{1i} \in M(v)$, $v_{2i} \in St_G^0(v) \setminus \{v\}$, $i = 1(l) \deg_G(v)$, which satisfies the equality $\gamma(G \setminus e) = 1$, since the graph is an obstruction of nonorientable genus 2. Since $(G \setminus v) \setminus e = (G \setminus e) \setminus v$ and by Theorem 1[5] $\gamma(G \setminus e) \leq \gamma((G \setminus v) \setminus e) + t_{(G \setminus v) \setminus e}(M(v), N_1) - 1$, then we will have inequality $\gamma((G \setminus e) \setminus v) + t_{(G \setminus e) \setminus v}(M(v), N_1) \geq 2$, so deleting an arbitrary edge leads either to a decrease of 1 genus of subgraph $(G \setminus e) \setminus v$ and then $\gamma((G \setminus e) \setminus v) = 0$, or to a decrease in the number $t_{(G \setminus e) \setminus v}(M(v), N_1)$ of reachability by 1 and then $t_{(G \setminus e) \setminus v}(M(v), N_1) = 1$. The materiality of the edges of the subgraph relative to the genus upon removal is proved. We will prove other statements similarly and presented proofs as soon as possible.

2. Klein surface.

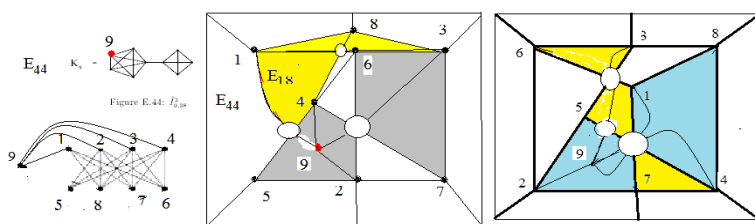
Another problem is constructing all non-outer Klein-planar graphs. In [8] a solution to a similar problem of constructing non-Klein surface graphs by the method of relativistic components was presented.

Theorem 3.2. Each graph obstruction H for N_2 -surface of the nonorientable genus 2 satisfies the following statements:

1. An arbitrary edge $u, u = (a, b)$ is placed on the Mobius strip by some minimal embedding of the graph H in N_3 and there is a minimum on inclusion projective-planar subgraph K of the graph or a part of it satisfying the condition: $(t_K(\{a, b\}, N_3) = 1) \wedge (t_{K \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2)$;

2. There is a finite smallest inclusion set of different subgraphs K_i covering the set of edges of a 2-connected graph H , where K is a local projective-planar subgraph or partial subgraph $H \setminus e$ of a graph, homeomorphic $K_5 \setminus e$ or $K_{3,3} \setminus e$;

3. Every 8-vertex graph - obstruction of non-oriented genus 3 is covered by a minimum of 5 or a maximum of 6 subgraphs or parts of a homeomorphic planar graph with sets of points with reachability 2, or projective-planar, or non-projective-planar graphs (possibly without an edge) from the list of 118 non outer projective planar graphs or set of 103 graphs - obstructions of the projective plane [4].



Fig, 4. ϕ - transformation of the non-outer projective planar graph E_{18} and $St_4(9)$ give non-outer Klein planar graph E_{44}

Conclusion. The use of the ϕ -transformation of graphs method for the above problems for the projective plane and Klein surface can be generalized to an arbitrary nonorientable surface.

1. Khomenko, M.P.: Topological aspects of graph theory. Institute of Mathematics, Kiev (1971)
2. Khomenko, M.P.: ϕ - transformation of graphs. Institute of Mathematics, Kiev (1973)
3. Petrenjuk, V.I., Petrenjuk, D.A., Shulenok, I.B.: Upper bound of the orientable genus of amalgamation simple graphs, Theory optimal designs, .69-79, Kyjv (2018)
4. Petrenjuk, V.I., Petrenjuk, D.A.: Upper bound of the nonorientable genus of amalgamation simple graphs. Computer mathematic 1, 10-19. Kyjv (2019)
5. D. Archdeacon, N. Hartsfield, C. H. C. Little, B. Mohar. Obstructions sets for outer-projective -planar graphs. Ars Combinatoria 49, 113-128; (1998)
6. Hur Surkhjin. The kuratowski covering conjecture for graphs of the order less than 10. Dissertation, The Ohio State University (2008).
7. Bojan Mohar, Carsten Thomassen. Graphs on surfaces, Johns Hopkins University Press, (2001)
8. Anna Flütotto. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, Universitat Bielefeldvorgeleg (2010)

6.2. LIST OF NON-OUTER PROJECTIVE PLANAR GRAPHS

The main notations and definitions are taken from [1]. The problem of search all non-outer projective planar graphs has the following two subtasks.

1. Investigate the structure of projective plane graphs, minimal concerning the operation of removal or contraction to a point of an arbitrary edge, with a given set of points, having the number of reachability t , $t = 2$, and is itself or has a subset projective planar graphs and give their graph diagrams indicating the specified subsets of points;
2. Investigate the structure of the glueing graph and the algorithm for constructing no projective planar or non-Klein surface graphs as ϕ -images of a small number of special graphs. Their special graphs are elements of the set of minimums relative to the number of reachability 2 for a given Klein surface or projective plane, having a reachability number of 2 and are minimal relative to the reachability number in the operation of removing an arbitrary point.

The solution of subtask 1 is to construct all minimal non-outer projective planar graphs solved in [2] by searching all different options for deleting one of the vertices of the projective planar minor graph and selecting no isomorphic graphs of nonorientable genus 1. The idea of construction is similar to how minimally non-planar projective graphs K_5 or $K_{3,3}$ are formed from minimal non-outer planar graphs K_4 or $K_{2,3}$ by glueing a simple star $St(v)$ to the minimum power subsets of points of graphs K_4 or $K_{2,3}$ with the number reachability 2. According to subtask 1, the obtained theoretical results are presented in part 1, and in part 2 the algorithm and diagrams of graphs constructed by it are given.

Subtask 2 is to identify the minimum subset of points in the minimum non-projective planar or minimal non-Klein planar graphs with a given number of reachability 2 and the nature of their bonding for another construction of non-projective planar or construction of all non-Klein surface minor graphs. A similar problem was solved in [3], where the coverage of non-projective planar or non-Klein surface graphs G with the number of vertices not more than 10 as obstructions of the nonorientable genus $\gamma(G)$ by subgraphs homeomorphic to K_5 or $K_{3,3}$. Pairs of which inform subgraphs homeomorphic to obstructions of the nonorientable genus is associated in [3] for nonorientable surfaces of the genus not more than 5, and for the torus also has the specified coating. However, in [4, p. 203] a counterexample is given. In [5] the solution of a similar problem of construction of non-projective plane graphs by the method of relative components is given. Some results on the analogue of this task were given in [8]. The list of non-outer projective planar graphs has presented here.

Definition 1. For a given embedding f , $f: G \rightarrow S$, a graph G in S and a given set of points X , $X \subset G^0 \cup G^1$ determine $t_G(X, S, f)$, $t = t_G(X, S, f)$, the number of reachability of the set X relative to S , if there is a set $S_G(X)$, $S_G(X) = S \setminus f(G)$, which satisfies the condition: $(f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^t \partial s_i \cap X) \wedge (f(X) \not\subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^t \partial s_i \cap X)$, $j = 1, 2, \dots, t$.

We say that the set X has a reachability number t , $t_G(X, S) = t$, relative to S , if among all no isomorphic embedding's f , $f: G \rightarrow S$, the number t is the smallest among the numbers $t_G(X, S, f)$. We consider further the set X of points of the graph G t -non-planar concerning the surface S , or (t, S) -non-planar, if $t \geq 2$, where $t_G(X, S) = t$. If $t = 2$, S is a projective plane, and the set X is the set of vertices of the graph G , $X = G^0$, then we will call the graph G non-outer projective planar. **A graph G is** outer-

projective-planar if **embeds on the projective-plane with all vertices on the boundary of one distinguished cell.**

Definition 2. Suppose the embedding $f, f: G \rightarrow S$, of the graph G in the surface S , which implements $t, t_G(X, S) = t$, where $S_G(X) = S \setminus f(G)$ $S_G(X) = \{s_i\}_1^3$. We will say that concerning a given surface S the set X will have the characteristic $\theta_G(X, S, f)$, $\theta_G(X, S, f) = \theta$, $\theta \geq 1$, if there are θ three cells $\{s_i\}_1^3$ from the set $S_G(X)$, on the boundaries of which the subsets $X_i, X_i \subseteq X$, are placed arbitrarily and satisfy the relation:

$G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\} \wedge G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\} \wedge G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$, and generates the smallest subgraph G' of the graph G , (possibly degenerate), contains the points $\{a_i\}_1^3$ of pairwise intersection of cell boundaries $\{s_i\}_1^3$. The set X will have the θ -characteristic $\theta_G(X)$ if $\theta_G(X) = \max \theta_G(X, f)$, where the maximum is taken for all embedding's $f: G \rightarrow S$, realizing $t_G(X, f) = t$ and $\theta = \theta_G(X, f)$.

Main results

The mathematical base for the algorithm

Theorem 2.1. The graph G is non-outer projective planar if and only if then $G = H \setminus v$, where v is a vertex of graph-obstruction H of the projective plane N_1 .

Theorem 2.2.[9]. For an arbitrary graph - obstruction G of the projective plane N_1 and each of its vertices v with the set $M(v)$ of all vertices of the incident occurred the following statements:

1. For the subgraph $G \setminus v$ of the nonorientable genus, the following relations will take place:

a) If $\gamma(G \setminus v) = 1$, then we have the following relations a1) and one of a2) or a3):

a1) $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 2$, wherein the set $M(v)$ belongs to the boundaries $\partial s_1, \partial s_2$ of two cells s_1, s_2 of the projective plane having at least one common vertex;

a2) each edge of the subgraph $G \setminus v$ is significant in relation to a genus $\gamma(G \setminus v)$ with respect to removing the edge or compressing it in point;

a3) each edge of a subgraph $G \setminus v$ is significant with respect to the removal or compression operations of an edge;

b) If $\gamma(G \setminus v) = 0$ then, one of the following two relationships will occur:

b1) $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 3$ and the set $M(v)$ is located on the boundaries of three cells s_1, s_2, s_3 of the projective plane satisfying the relation $\partial s_3 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \neq \emptyset$, each edge of the subgraph $G \setminus v$ being significant relative $t_{G \setminus v}(M(v), N_1)$ to the operations of removing the edge or compressing it to a point, and each point w of the set $M(v)$ satisfies equality $t_{G \setminus v}(M(v) \setminus \{w\}, N_1) = t_{G \setminus v}(M(v), N_1) - 1$;

b2) $t_{G \setminus v}(M(v), \Sigma_0) = 2$, where $t_{G \setminus v}(M(v), \Sigma_0)$ is the number of reachability of the set $M(v)$ relative to the Euclidean plane Σ_0 , is realized by minimal embedding $f: (G \setminus v) \rightarrow \Sigma_0$ at the boundaries $\partial s_1, \partial s_2$ of the cells s_1, s_2 , where $\{s_1, s_2\} \subset \Sigma_0 \setminus f(G \setminus v)$. Satisfies equality $\partial s_1 \cap \partial s_2 = \emptyset$, which is, separated by a ring from the cells, then relative to the projective plane. The set $M(v)$ will have a number of reachability $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 2$, with each point w of the set $M(v)$ satisfies equality $t_{G \setminus v}(M(v) \setminus \{w\}, N_1) = t_{G \setminus v}(M(v), N_1)$ and the set $f(M(v) \setminus \{w\})$ by

some embedding $f': G \setminus v \rightarrow N_1$ is placed at the boundaries $\partial s'_1, \partial s'_2$ of two cells s'_1, s'_2 having at least one common point where $\{s'_1, s'_2\} \subset \Sigma_0 \setminus f'(G \setminus v)$, and equality $\partial s'_1 \cap \partial s'_2 \neq \emptyset$ is satisfied.

2. Each minor G of the nonorientable genus 2 (except G_3, E_1, G_4) is covered by a maximum of 4 (e.g., graphs A_2, G_1) subgraphs or parts homeomorphic to one of the following graphs: $K_{2,3}, K_4, K_5 \setminus e, K_{3,3} \setminus e, K_5, K_{3,3}$. The number of reachability 2 relatively Klein surface N_2 for the set of vertices (for $G \in \{G_3, E_1, G_4\}$ we have), and for each removed edge e the graph $G \setminus e$ will have at N_1 the number of reachability equals 2 for the set of vertices;

3. The presence of the coating specified in statement 2 is not sufficient to make the graph an obstruction of nonorientable genus 2.

4. If $\gamma(G \setminus v) = 0$ and on the Euclidean plane Σ_0 made up a set $M(v)$ of points of a graph G formed from the obstruction graph of a projective plane N_1 by removal of a vertex v and adjacent edges. If is given by an arbitrary minimal embedding $f: G \setminus v \rightarrow \Sigma_0$ on the boundaries of two cells that have no common points and have endpoints that do not belong to their borders. Removing an arbitrary point from the set M leads to the failure of relation 4.

Algorithm

The construction of all no isomorphic non-outer projective plane graphs based on the results of the following polynomial algorithm 1:

Begin of Algorithm 1.

Input: The set P of 35 minors P_i of the projective plane N_1 with the sets of numbered vertices, which for each graph P_i is divided into equivalence classes l_{ij} with respect to the transitivity of its vertices,

where $P_i^0 = \sum_{j=1}^{n_i} l_{ij}, n_i \leq |P_i^0|$.

Output: List X of all no isomorphic graphs.

$X := \emptyset;$

$v := 0;$

// where P_0 is the current graph of the order $|P_0|$ with the selected vertex, which is a representative of the transitivity class l_{0j} of its vertices.//

For $i=1$ step 1 to 35, do these steps:

begin //cycle action on i .

$P_0 := P_i;$

$v := v_{i1};$

procedure $A(P_0, \Pi_0, P_0^0, N_2);$

// Procedure $A(P_0, \Pi_0, P_0^0, N_2)$; Construct the embedding of the graph G in the surface S (projective plane N_1 or Klein bottle N_2) and determine the cells of the graph at the boundaries of which is a given subset M of the set of vertices of the graph G with which the incident vertex v //;

Output $(P_0, \sum_{j=1}^{n_i} L_j)$ in X ;

For $k = 2$ step 1 to $|P_0|$, do these steps:

begin

If $v \approx v_{ik}$ then go to the end of the cycle by k ;

// that is, the vertices belong to the same class of transitivity; /

else $P_0 := P_i \setminus v$; // remove the vertex v and all adjacent edges; /

$\Pi_0 := \Pi_i$;

$L := \text{Function B}(P_0, X)$;

If $L == \text{true}$ // graph $P_i \setminus v$ no isomorphic to any of the graphs in the list X //

then do:

begin;

$M := \{\forall u \mid (u, v) \in P_0^1\}$;

If $K(G) == 1$ // the graph $P_i \setminus v$ contains a subgraph of Kuratowsky //

then do

begin;

procedure $A(P_0, \Pi_0, M, N_1)$;

output (Π_0, M) in X ;

end;

else do

begin;

procedure $A(P_0, \Pi_0, M, \Sigma_0)$;

output (Π_0, M) in X ;

end;

end; // of cycle by k ;

end; // of cycle on i ;

End of Algorithm 1.

Procedure A(G, Π, M, S) do the following:

// Must construct the embedding Π of a graph G (without vertices of degree 2) with a given number of vertices in the surface S (Euclidean plane, projective plane or Klein surface) and determine the cells on the boundaries of which are the set of vertices M //.

If a graph G has a subgraph or part of the graph H is homeomorphic K_5 or $K_{3,3}$, then we construct embedding's of these graphs in the projective plane, otherwise, we attach a graph to the Euclidean plane Σ_0 . In nested graphs K_5 or $K_{3,3}$ a projective plane, there are cells $s_5, s_{3,3}$ with the following boundaries: ∂s_5 - a cycle of length 5 and 5 triangles for K_5 , or $\partial s_{3,3}$ - a cycle of length 6 and 4 quadrilaterals for $K_{3,3}$, in which we will embed stars with centres taken from a subset $G^0 \setminus H^0$.

First of all, we will put all these stars in cells with either cycle boundaries of length 5 for or length 6 for and try to use no more than one additional Mobius strip glued to the cells ∂s_5 or $\partial s_{3,3}$. The number of vertices $|G^0|$ of the obstruction graph of the projective plane is at least 12. The number of options for the location of the centres and edges of stars, not more than 7 stars, is equal r^7 because each centre of the star does not belong to two cells, where r the number of cells of the graph embedded in the projective plane $r = 6$ for K_5 , $r = 5$ for $K_{3,3}$.

The time complexity of procedure A(G, Π, M, S) is proportional $O(r^7)$.

The function $K(G)$ will determine the presence or absence of a graph G of a subgraph or part of a homeomorphic K_5 or $K_{3,3}$ and will give it out. To do this, we need to examine the complement of the \overline{G} graph G for the presence of a subgraph of five isolated vertices, i.e. $\overline{K_5}$, or two triangles without common vertices, i.e. $2K_3$. If such subgraphs of the graph are detected, the function $K(G)$ will give 1 and return to algorithm 1 the found vertices as vertices of the graph K_5 or $K_{3,3}$. In the absence case $\overline{K_5}, 2K_3$ the function $K(G)$ will give 0.

The function $B(P_0, X,)$ checks for the presence of an isomorphism of a graph P_0 with another element of the set of graphs X and will have polynomial complexity [7].

Data analysis of work of algorithm

The output data of algorithm 1 is described in figures 1, 2, 3, 4, 5, 6. The analysis of output data of algorithm 1 in the next corollaries.

Corollary 2.1. The correctness of algorithm 1 will follow from Theorem 2.1 and Theorem 2.2. [9].

Corollary 2.2. The next 78 non-outer projective planar graphs have number reachability of their set of vertices equal 2:

1. There are 16 graphs with genus 0: $E_{20} \setminus 8, E_{22} \setminus 5; F_1 \setminus 1, F_1 \setminus 2, F_1 \setminus 3, E_2 \setminus 6, D_{17} \setminus 6, C_4 \setminus 5$ (has another set of glueing red vertexes to endpoints of $St_6(5)$ then $E_{22} \setminus 5, D_3 \setminus 2, D_3 \setminus 4, D_2 \setminus 4, A_2 \setminus 4, B_1 \setminus 4, B_3 \setminus 1, B_7 \setminus 4, C_3 \setminus 4$).

2. There are 62 graphs with nonorientable genus 1 as:

$F_6 \setminus 2, F_6 \setminus 3, G_1 \setminus 5, E_{19} \setminus 2, E_{20} \setminus 9, E_{22} \setminus 1, E_{22} \setminus 2, E_{27} \setminus 3, E_{27} \setminus 7, F_1 \setminus 9, E_2 \setminus 1, E_2 \setminus 5, F_1 \setminus 8, E_2 \setminus 8, A_1 \setminus 2, E_5 \setminus 1, E_5 \setminus 2, E_6 \setminus 1, E_6 \setminus 2, E_6 \setminus 7, E_{11} \setminus 1, E_{11} \setminus 5, E_{11} \setminus 6, E_{11} \setminus 8, E_{18} \setminus 2, E_{18} \setminus 1$ (is subgraph of $E_{18} \setminus 2$), $D_4 \setminus 1, D_4 \setminus 5, D_4 \setminus 7, D_9 \setminus 4, D_{12} \setminus 6, D_{12} \setminus 8, C_4 \setminus 1, C_4 \setminus 2, C_7 \setminus 2, D_3 \setminus 1, D_3 \setminus 6, D_3 \setminus 8, D_2 \setminus 1, D_2 \setminus 2, D_2 \setminus 5, A_2 \setminus 6, E_1 \setminus 8, E_1 \setminus 1, E_2 \setminus 1, B_1 \setminus 6, B_3 \setminus 5, B_7 \setminus 1, B_7 \setminus 2, B_7 \setminus 6, B_7 \setminus 3, B_7 \setminus 5, B_7 \setminus 7, C_1 \setminus 8, C_1 \setminus 5, C_1 \setminus 1, C_2 \setminus 3, C_3 \setminus 5, C_3 \setminus 1, C_3 \setminus 2, C_3 \setminus 5, C_3 \setminus 7$.

Corollary 2.3. The next 41 non-outer projective planar graphs with genus 0 have number reachability of their set of vertices equal 3 and:

a) θ - characteristic equal 1: $F_6 \setminus 1, F_6 \setminus 4, G_1 \setminus 3, E_{19} \setminus 1, E_{19} \setminus 5, E_{19} \setminus 6, E_{20} \setminus 7, E_{20} \setminus 1, E_{20} \setminus 8, E_{22} \setminus 2$ (for red vertices only), $E_{27} \setminus 2, E_{27} \setminus 6, F_1 \setminus 5, E_2 \setminus 2, E_2 \setminus 4, E_2 \setminus 6, E_2 \setminus 10, E_3 \setminus 1, E_5 \setminus 2, E_6 \setminus 5, E_{11} \setminus 2, E_{11} \setminus 7, D_4 \setminus 3, D_4 \setminus 6, D_9 \setminus 1, D_9 \setminus 5, D_{12} \setminus 2, D_{12} \setminus 5, C_7 \setminus 1, C_7 \setminus 3, D_4 \setminus 5, D_2 \setminus 8, D_{17} \setminus 6, E_2 \setminus 4, E_2 \setminus 2, B_7 \setminus 8, C_2 \setminus 2, C_3 \setminus 9$.

b) θ - characteristic equal 0: $A_1 \setminus 1, C_4 \setminus 3, E_1 \setminus 6$.

Corollary 2.4. The next 11 non-outer projective planar graphs with genus 1 have number reachability of their set of vertices equal 3 and θ -characteristic equal 1: $E_{27} \setminus 5, E_{27} \setminus 9, F_6 \setminus 3, E_3 \setminus 7, E_{11} \setminus 3, E_{11} \setminus 4, D_9 \setminus 2, D_{12} \setminus 3, D_4 \setminus 10, D_4 \setminus 6, C_2 \setminus 9$.

Graphs.

On the following figures 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 is presented the result of algorithm 1.

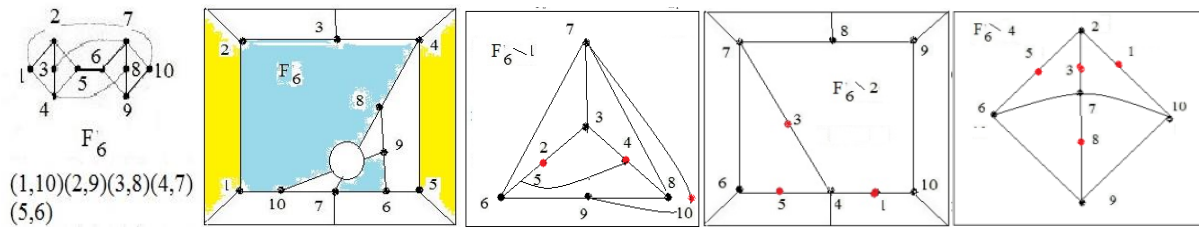
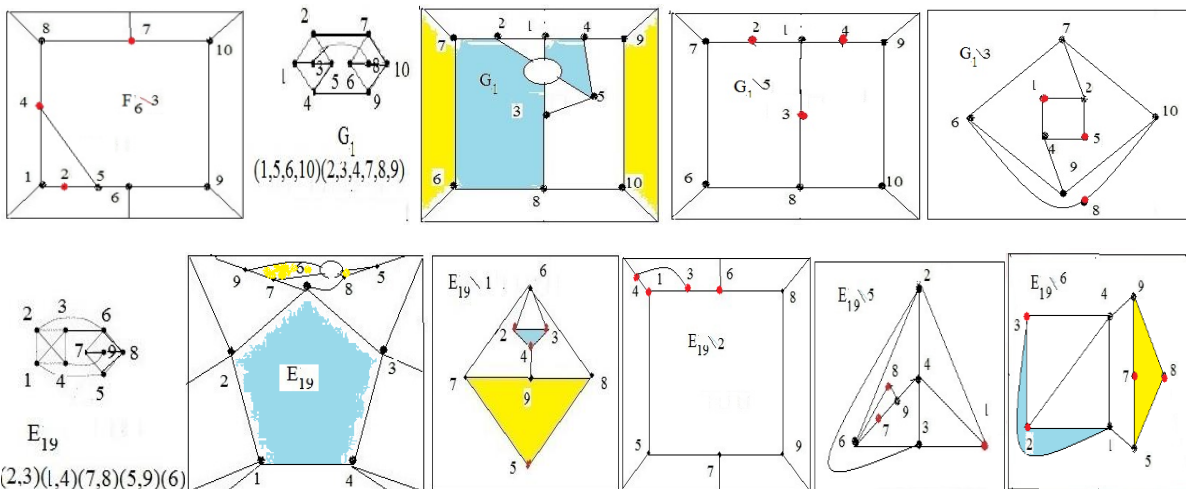


Fig. 4



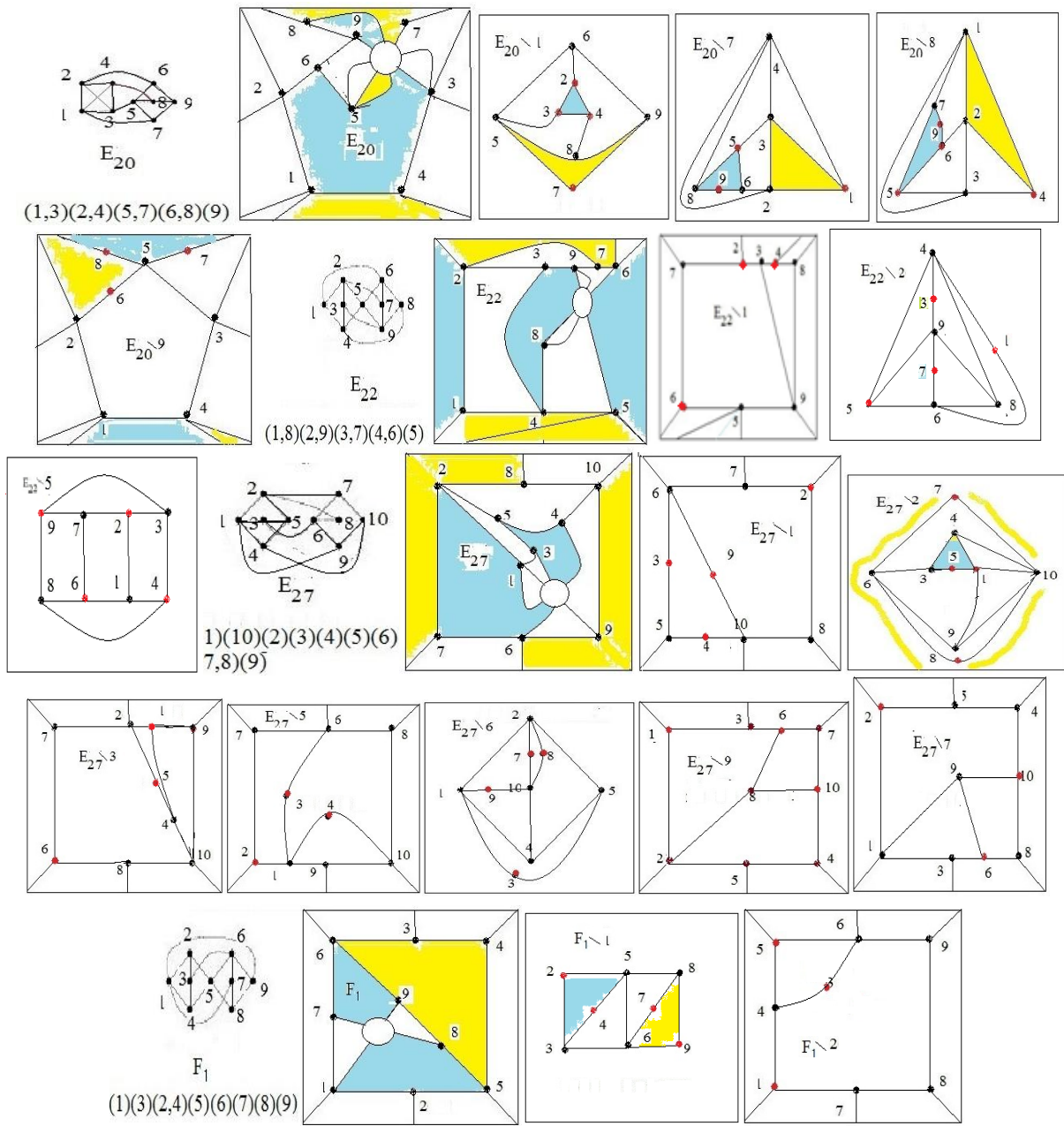
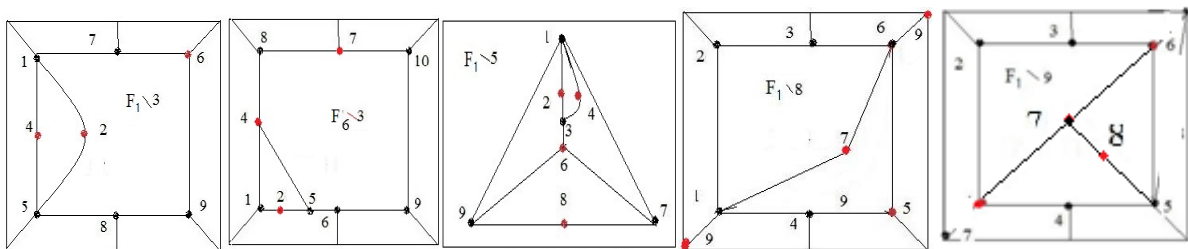


Fig. 2



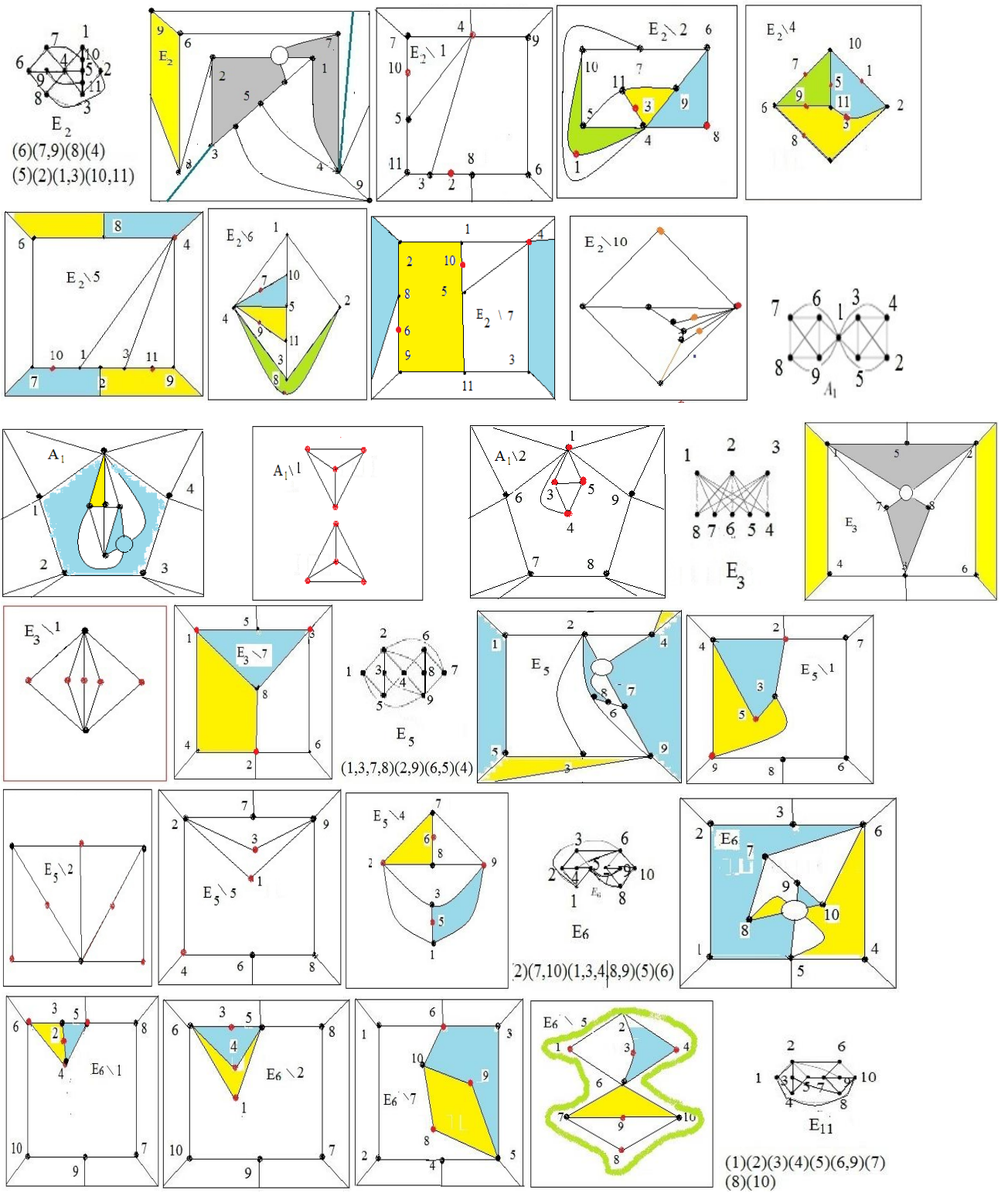


Fig. 3

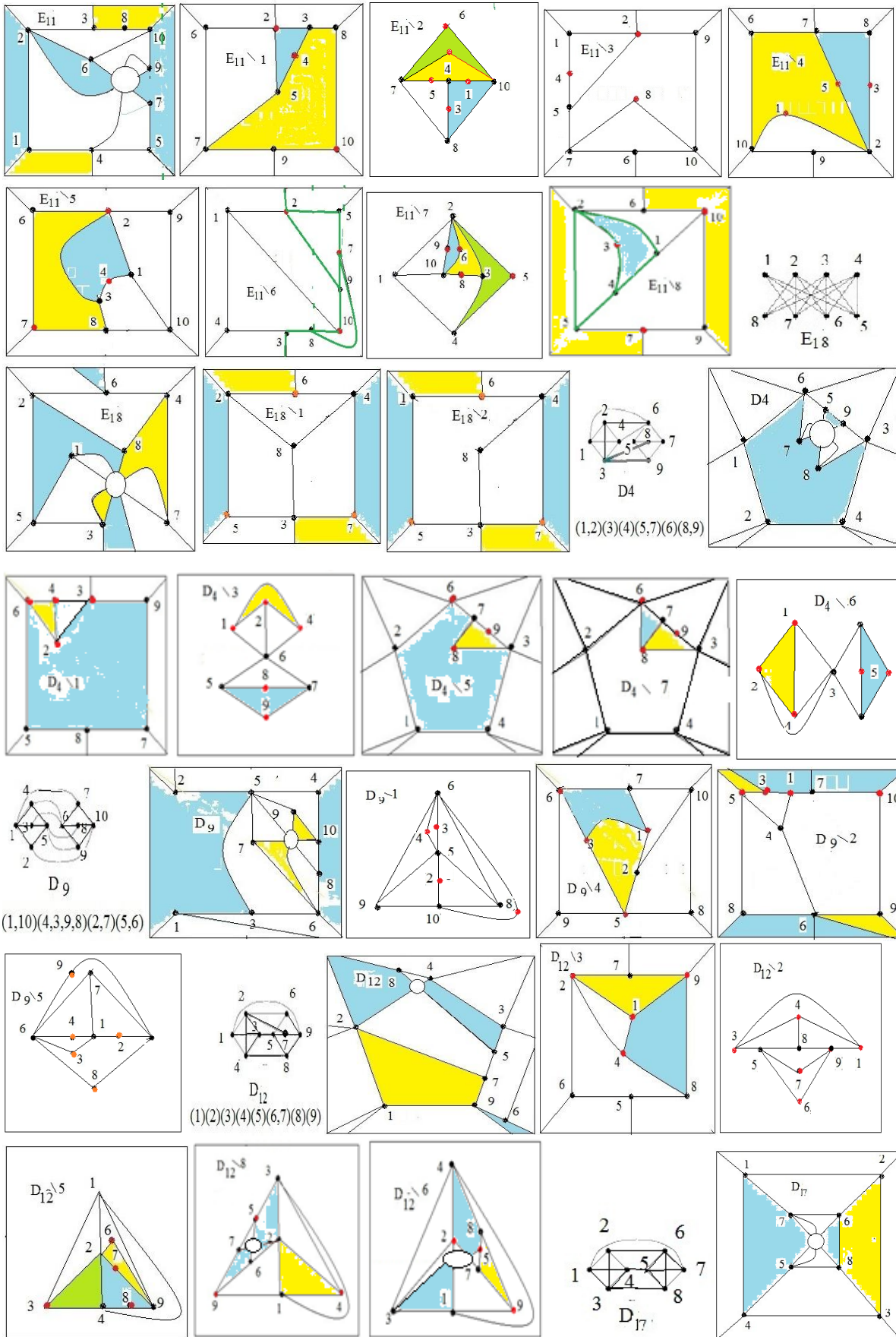
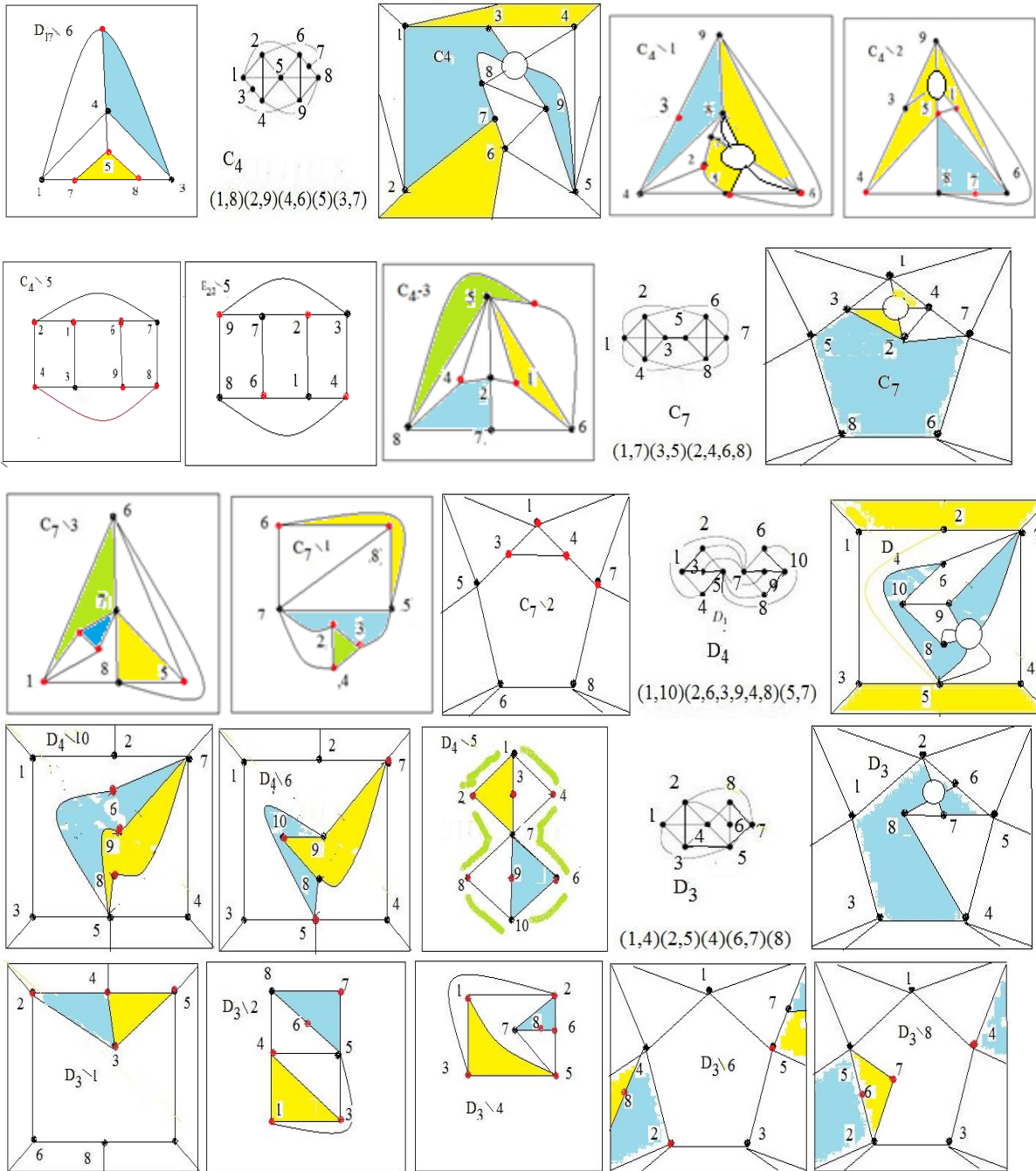


Fig. 4



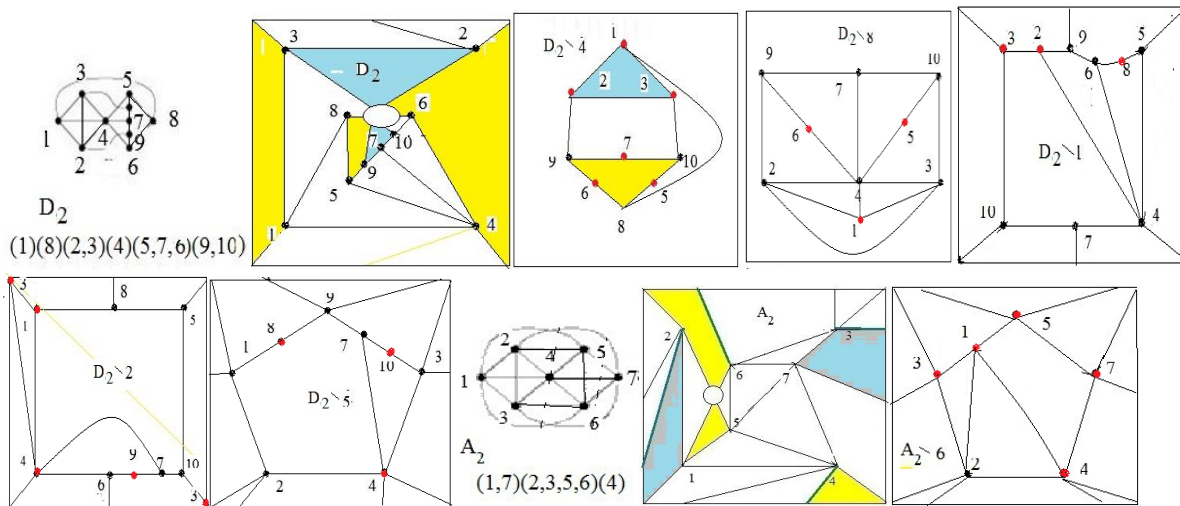
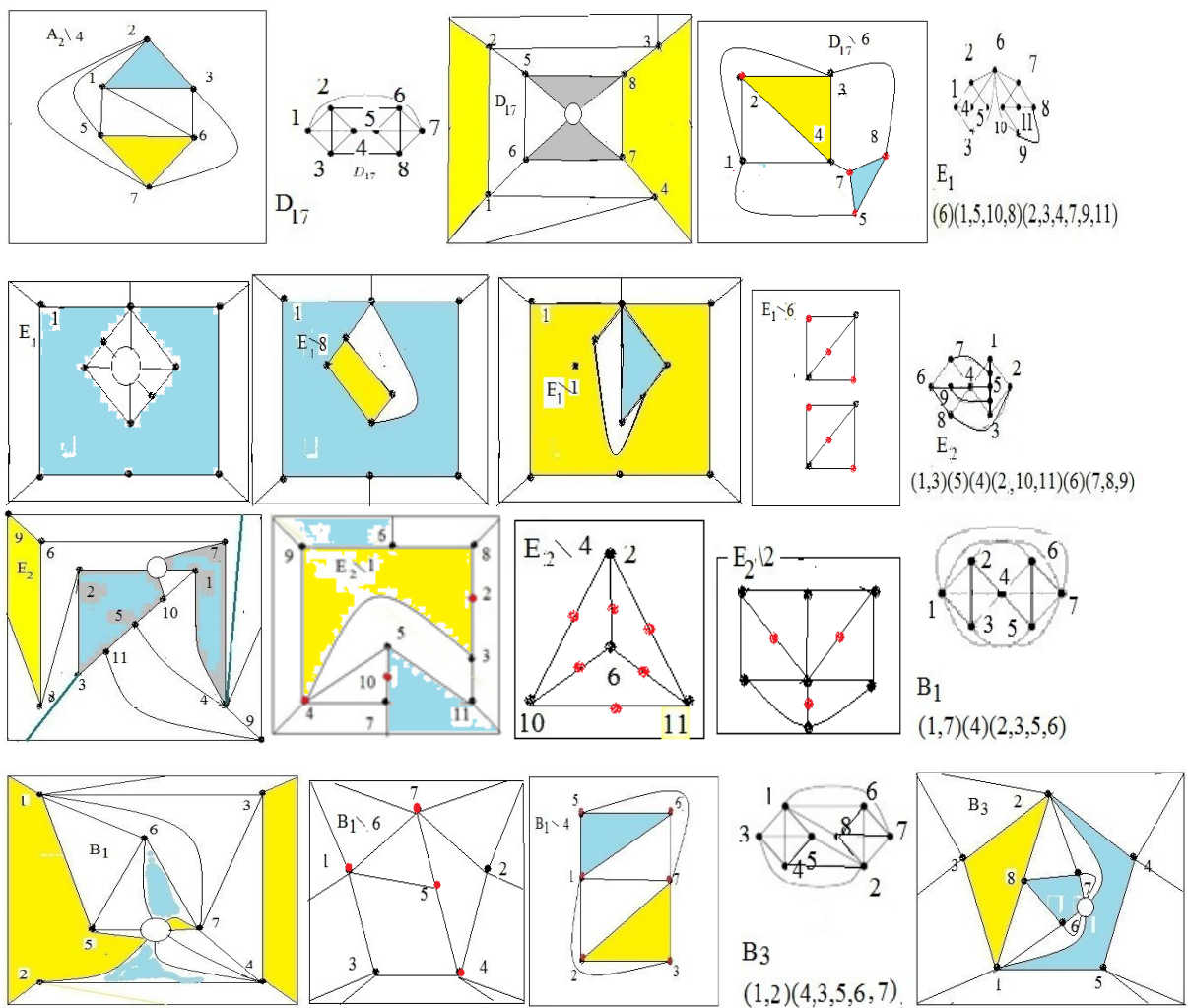


Fig. 5



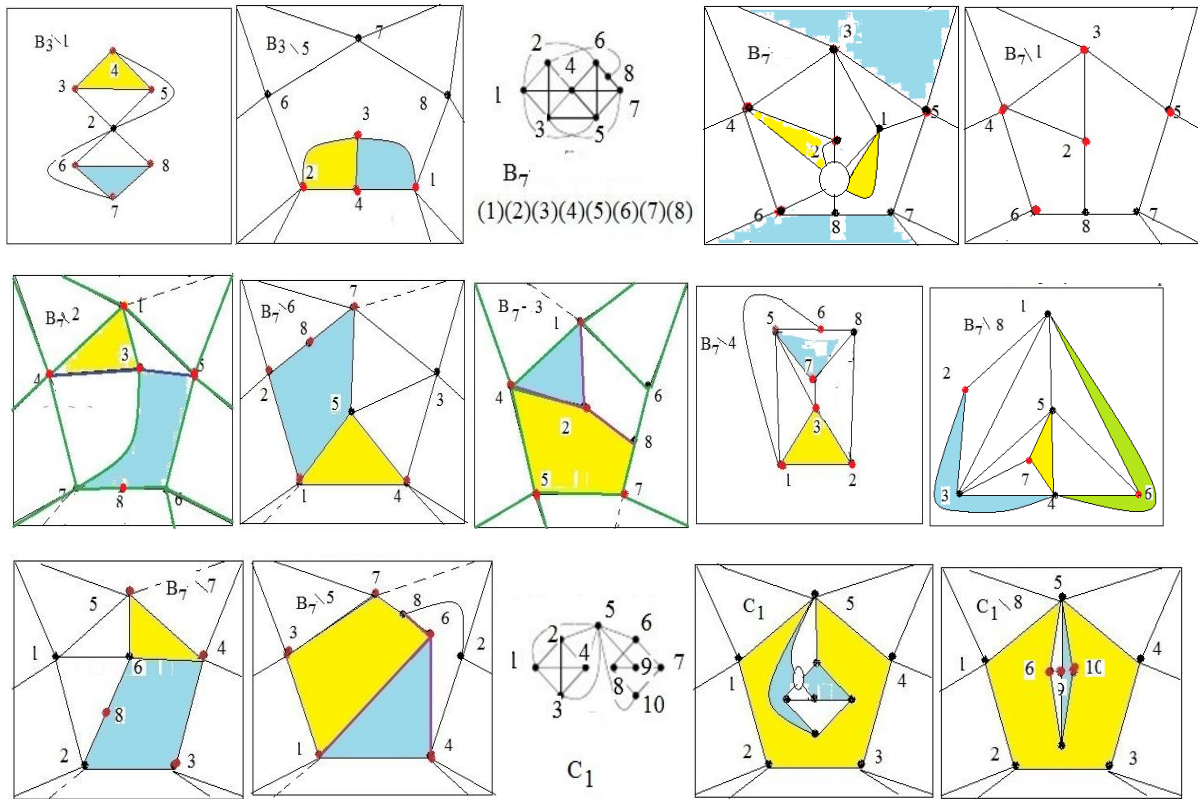


Fig. 6

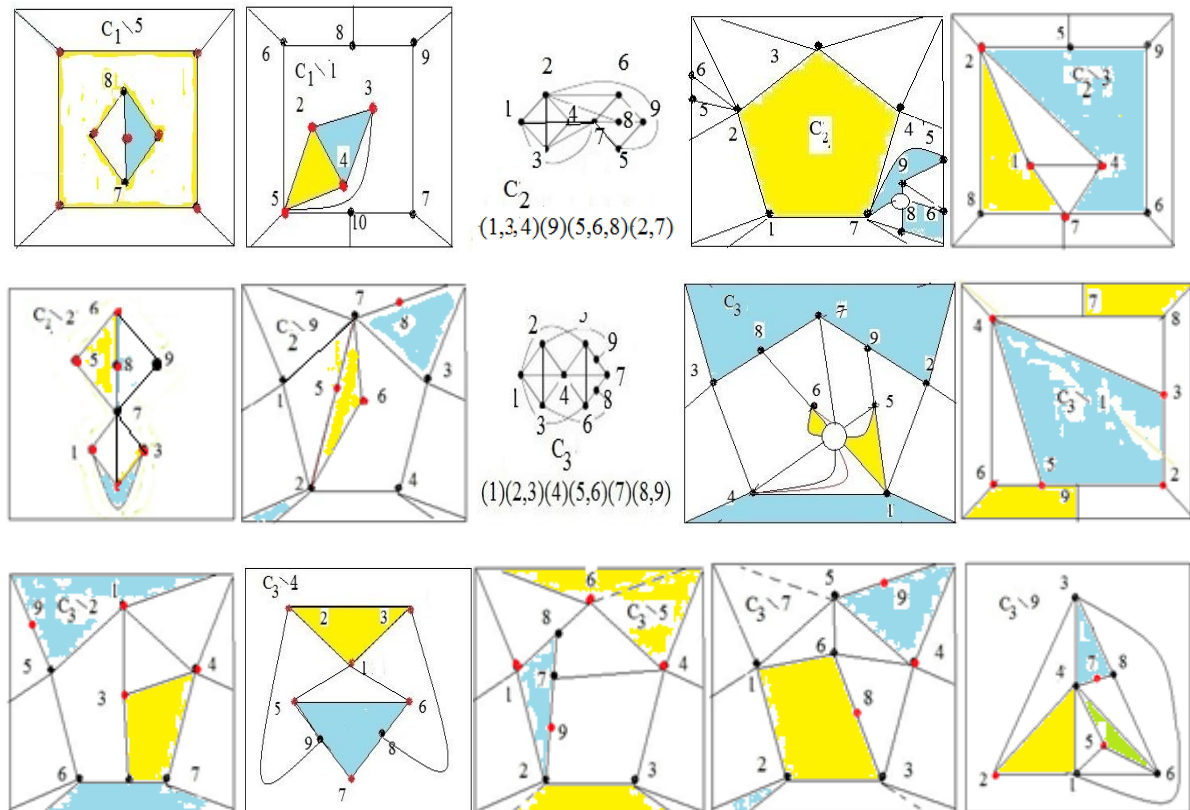


Fig. 7

Acknowledgements

The authors gratefully acknowledge the support and help of officers of the organizing committee of the Colins conference 2021.

References

- [1] Khomenko. M.P. φ - transformation of graphs. Institute of Mathematics, Kyiv (1973)
- [2] D. Archdeacon, N. Hartsfield, C. H. C. Little, B. Mohar. Obstructions sets for outer-projective -planar graphs. *Ars Combinatoria* 49, 113-128; (1998)
- [3] Hur Surkhjin. The Kuratowski covering conjecture for graphs of the order less than 10. Dissertation, The Ohio State University (2008)
https://etd.ohiolink.edu/rws_etd/send_file/send?accession=osu1209141894&disposition=inline
- [4] Bojan Mohar, Carsten Thomassen. *Graphs on surfaces*, Johns Hopkins University Press, (2001)
- [5] Anna Flütotto. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, Universitat Bielefeldvorgeleg (2010)
- [6] V.Petrenjuk. About Transformation graphs as a tool for investigation. Proceedings of the 4th International Conference on Computational Linguistics and Intelligent Systems (COLINS 2020). Volume I: Main Conference Lviv, Ukraine, April 23-24, 2020,1309-1319
<http://ceur-ws.org/Vol-2604/>
- [7] **LEDA: A library of efficient data types and algorithms, Max Planck Institute for Computer Science.** <http://www.mpi-sb.mpg.de/LEDA/>
- [8] K. Scott. Outermobius and cylindrical graphs. Senior Thesis, Princeton University, 1997.

6.3. APPLICATION TREND THROUGH PLANAR 3-MINIMAL & PROJECTIVE PLANAR 2-MINIMAL GRAPHS

Introduction

Let's solve the problem of analysis of a complex system synthesized from the studied simpler substructures in general and their application in computer sciences. We offer a theoretical-graph approach as a way of machine thinking or operating with artificial images-structures. It is known that there are mathematical methods by which large systems as structures are considered through a set of small and simple substructures, which may have some common parts that can be identified in the construction or reconstruction of the whole structure from a finite number of substructures.

The main tool is the ϕ -method of creating a graph model obtained in the form of a pair of finite sets: sets of vertices and sets of edges to determine the relationships between the structure of vertices as objects. An example of this is the transformation of the main problems of system programming into problems of graph theory with the mathematical support of algorithms.

The main idea of the method of ϕ -transformation can be interpreted as a way of inheriting a certain property of substructures in the whole structure depending on the properties of the connection (identification of given parts of pair of substructures).

Task. To demonstrate the possibilities of this method for the constructing of the set of all nonisomorphic 3-minimal plane graphs in which the set of all vertices is located on the boundaries of three 2-cells and constructing the set of all nonisomorphic 2-minimal projective-planar graphs in which the fixed set of points is located on the two boundaries 2-cell or pseudosells.

The solution to our task was based on the method of graph transformations, whose founder is M.P. Khomenko, and the concepts he introduced. The recognition of ϕ -transformations of graphs was taken from [1].

The structural properties of a complex system model presented in the form of a graph model can be studied using a simple graph G with a fixed set of points embedded in the surface on which the edges of the graph will be located, where S is the Euclidean plane or projective plane. The point is either vertex G , or the inner point of the graph of edges G . Let us consider the connected simple graph G , $G = (G^0, G^1)$, where G^0 is the set of vertices and G^1 is the set of edges without multiple edges and without loops as its 2-cell minimal embedding in the surface S . The property of minimality of the model graph over S will be that the graph G with the edge removed or the edge compressed into a point will have changed the specified numerical measure of the fixed set of points of the graph G . For example, model G such a property outer-planarity of the set of all vertices which located on the boundary of one cell is the presence of subgraphs homeomorphic to K_4 or $K_{2,3}$.

This result will be useful in the systematic analysis of both graph models and their topological aspect which will have common properties at the edges and vertices of the graph model.

The cylindrical graphs were introduced in [2]. There was investigated from the point of view of their external-planarity and a complete list of 38 graphs characterized by non-cylindrical graphs as minor ones were obtained.

Results: 1) The algorithm and the list of 3-minimal graphs, namely their characterization by the method of ϕ -transformation of graphs, was given in [3], the list of 32 3-minimal graphs is given in [4]. 2) The algorithm and the list of 34 2-minimal projective planar graphs with a fixed set of points of this graph's nonorientable genera 0 or 1 are presented here.

Application trend. An example of a possible application is the set of points placement problems or automatic control with subsequent access to its points. If we talk about the surface as an almost infinite set of values of the function of several variables on a given finite subset as a set of vertices whose relationship between pairs of elements as a set of edges, we have an almost embedded graph in the surface. If it is possible to set edges as an almost infinite subset of points and in the absence of intersection of edges in infinite vertices of edges, we will have an almost exact embedding of the graph in the surface. If the surface is spherical or resembles some extent a plane without holes, then use the following list of 3-minimal graphs to place on the boundaries of three cells of all vertices of the graph. If the surface is a sphere with a hole or to some extent resembles a plane of holes, then we use the following list of 2-minimal projective planar graphs to place on the boundaries of two cells of a given set of vertices of the graph.

3-Minimal planar graphs and non-cylindrical graphs.

According to [3] we will consider a simple graph G to be a planar graph having the following properties: 1) three 2-cells at the borders of which all vertices of the graph G are located, 2) removal of any edge or its pinching into the point of this edge leads to the destruction of property 1).

According to [2] we define a non-cylindrical graph NCG as a flat-integrated graph NCG having more than two 2-cells of the cylindrical graph on their boundaries where all the vertices of NCG are located. Whereas removal of any edge of graph NCG or squeezing the point of this edge leads to the distribution of all the graph vertices on the boundaries of two 2-cells of the cylindrical graph.

Problem. Let us study the identity of non-cylindrical and 3-minimal dense graphs and compare the graphs from the given lists in figure 1 with the list [2] and the modified algorithm of building all 3-minimal planar graphs.

History of the problem. In [7] there is a short review of works on this problem and the similar problems of shunting of the lists of graphs which would play a role of non-conserved (with the accuracy to homeomorphism) subgraphs for the input graphs, which are checked for the presence of an analogous "external planarity" property for some surfaces.

We have the following relation for the planar graphs:

Proposition 1. All graphs from the list [4] are in the list [2], non-cylindrical and 3-minimal graphs are equivalent, and graphs $\theta_6, \theta_7, K_5, K_{3,3}$ from the list [2], are absent in the list [4].

We consider the modification of algorithm [4] for constructing three-minimal planar graphs, which was based on the inexact result of characterization of planar graphs with all significant edges with respect to the number of an auxiliary multiplicity of vertices equal to 3 at the operation of removing the remaining edge. The main idea is that such graphs have at least one homeomorphic graph subgraph and at most three such graphs; it is necessary to define the nature and possible variants of combining them.

The mathematical base for constructing 3-minimal planar graphs.

Theorem 1. If the connected planar graph G has the following condition $(\forall u)(u \in G^1)(t_{G \setminus u}(G^0) = t_G(G^0) - 1 = 2)$, then one of the following propositions holds:

1) $G = K_4'$. The graph K_4' is a graph K_4 in which each edge is 1-divisible;

2) There is a graph φ -transformation $\sum_{i=1}^2 G_i$ into a graph G defined as follows

$\varphi(\sum_{i=1}^2 G_i, \sum_{j=1}^n (y_{1j} + y_{2j})) \rightarrow (G, \{y_j\}_{j=1}^n)$ and which satisfies the following conditions:

a) $(\forall i, i=1,2)[(G_i \neq K_4') \wedge ((G_i \cong K_{2,3}) \vee (G_i \approx K_4))];$

b) $G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n) = C_{G_i}^{n-1}(y_{i1}, y_{in})$ - the simple path of the length $n-1$ of the graph G_i , where $y_{i1} \neq y_{in}$, $\{y_{ij}\}_{j=1}^n \subset G_i^0 \cup G_i^1$, where $i=1,2$, (if $n=0$ then the simple path is formed into a point y_{i1});

c) $G(\{y_i\}_{i=1}^n)$ - the simple path of the graph G of length $n - 1$ ($n = 0$ the simple path is generated to a point y_1);

3) Existence of φ -transformation of the graph $G_0 + G_3$ in the graph G by the following:

$\varphi(G_0 + G_3, \sum_{j=1}^n (Z_{0j} + Z_{3j})) \rightarrow (G, \{Z_j\}_{j=1}^n)$, where graph image satisfies the following conditions:

a) The G_0 is an φ -image of graph $\sum_{i=1}^2 G_i$ written as in statement 2) of this theorem;

b) $G_3 \approx K_{2,3}$; $G_0(\{Z_{0j}\}_{j=1}^n)$ is a cycle of the length n (possibly with diagonals) of the graph (possibly the boundary of the outer boundary of the graph $f(G_0)$), where $f|G_0 : G_0 \rightarrow \sigma$ is the contribution that realizes $t_G(G_0^0)$, $\{Z_j\}_{j=1}^n \subset G_0^0 \cup G_0^1$;

c) $G_3(\{Z_{3j}\}_{j=1}^n)$ is a simple cycle of graph G_3 , possibly with diagonals.

4) There is a φ -transformation of the graph $\sum_{i=1}^2 G_i$ into a graph G defined as follows:

$\varphi(\sum_{i=1}^2 G_i, \sum_{j=1}^n (y_{1j} + y_{2j}) + (y^*_{1j} + y^*_{2j})) \rightarrow (G, \{y_j\}_{j=1}^n \cup \{y^*\})$ and satisfies the following conditions:

a) $(\forall i, i=1,2)[(G_i \neq K_4) \wedge ((G_i \cong K_{2,3}) \vee (G_i \approx K_4))]$;

b) $G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n) = C_{G_i}^{n-1}(y_{i1}, y_{in}) + y^*_{i1}$ - simple path length $n - 1$ graph G_i is connected with y^*_{i1} - the isolated graph G_i point which does not belong to the subgraph $G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n) = C_{G_i}^{n-1}(y_{i1}, y_{in})$ of $y_{i1} \neq y_{in}$, $\{y_{ij}\}_{j=1}^n \subset G_i^0 \cup G_i^1$, $i = 1, 2$, ($n = 0$ the simple path is generated in the point y_{i1} of, at that $y^*_{i1} = y_{i1}$);

c) $G(\{y_j\}_{j=1}^n)$ - simple path of graph G with length $n - 1$ which no include in subgraph $G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n)$.

Proof. Let simple graph G is the connected planar with all significant edges with respect to the number of reachability of the set of vertices equal to 3, in the operation of removing an arbitrary edge and embedding $f, f : G \rightarrow \sigma$ set the attachment that implements $t_G(G^0), t_G(G^0) = t = 3$, $S_G(G^0) = \{s_i\}_{i=1}^3$ - set of 2-cells on the border of which all vertices of the graph G . We denote by the $M(G)$ set of all the different subgraphs H of the graph G constructed for each pair (s_i, s_j) , where $i \neq j$, of 2-cells from the set $S_G(G^0)$ as the smallest part of the graph G that satisfies the ratio:

$$\left[(G^0 \cap ds_i \subset H_{ij}^0) \wedge (H_{ij}^0 \cap (ds_j - ds_i) \neq \emptyset) \right] \vee \left[(G^0 \cap ds_j \subset H_{ij}^0) \wedge (H_{ij}^0 \cap (ds_i - ds_j) \neq \emptyset) \right] \wedge (H_{ij} \cong K_4) \vee (H_{ij} \cong K_{2,3}) \quad (*)$$

Denote by $M'(G)$ - the least included a subset of the set $M(G)$, consisting of the smallest included subgraphs H_{ij} of the graph G , or parts of these subgraphs that satisfy the following conditions:

$$a) G^0 \subseteq \bigcup_{\forall H' \in M(G)} (H')^0 ;$$

b) If the subgraph H_{ij} (or its part) is homeomorphic to the graph K_4 which, or all the edges of the graph are 1-subdivided or no edge of the graph K_4 is 1-subdivided. In the future, if no reservations are made, we will assume that, with respect to the elements of the set M' and the term "subgraph" of the graph G , does not preclude the fact that this element may be part of the graph.

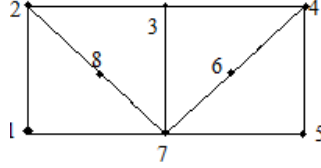


Figure 1. The graph G for constructing the set M.

For example, consider the following embedding of a graph G in an Euclidean plane (fig. 1) and distinguish two sets $S_i = \{s_{ij}\}_{j=1}^3$, $i = 1, 2$, namely a) $ds_{11} = \{1, 2, 7, 8\}$, $ds_{12} = \{2, 3, 7, 8\}$, $ds_{13} = \{4, 5, 6, 7\}$; b) $ds_{21} = \{1, 2, 7, 8\}$, $ds_{22} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $ds_{23} = ds_{13}$. For each of them we construct a set M_i , $M_i = M(G)$, $H_{12}^0 = \{1, 2, 3, 7, 8\}$, $H_{21} = \{1, 2, 7, 8\}$, $H_{23}^0 = H_{32}^0$; $(H_{13}^0)' = \{1, 2, 6, 7, 8\}$, $(H_{13}^0)'' = \{1, 2, 4, 7, 8\}$, $(H_{13}^0)''' = \{1, 2, 5, 7, 8\}$, $H_{13}^0 \in \{(H_{13}^0)', (H_{13}^0)'', (H_{13}^0)'''\}$, $H_{32}^0 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $H_{31}^0 = \{1, 4, 5, 6, 7\}$, $H_{12}^0 = \{1, 2, 7, 8, 3\}$, $H_{13}^0 = \{1, 2, 8, 7, 6, 4, 3\}$, $H_{21}^0 = H_{12}^0$, $H_{23}^0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 6\}$, $H_{32}^0 = \{4, 5, 6, 7, 3\}$, $M(G) = \{H_{12}, H_{13}, H_{23}, H_{32}\}$. It is easy to see that the above sets a) and b) exhaust all nonisomorphic sets $S_G(G^0)$, and as a result $M'(G) = \{H_{12}, H_{32}\}$.

We prove Proposition 1). Since the graph K_4' is a graph K_4 with all 1-subdivisions edges and will have the property: $(\forall u)(u \in (K_4')^1)[(t_{K_4' \setminus u}((K_4')^0) = 2) \wedge (t_{K_4'}((K_4')^0) = 3)]$, then we will have the inclusion $K_4' \subset G$. On the other hand, if $K_4' \subset G$, then there is an edge u , $u \in G \setminus K_4'$. Proposition 1) is proved.

Let the graph G be nonisomorphic to the graph K_4' . The following two cases are possible: m), $|M| = m$, where $m = 2, 3$. Let there be a case 2). Suppose there is equality $M = \{H_i\}_{i=1}^2$. Due to the flatness of the graph G, we have three options φ -transformation of two graphs from the set M defined by one of three options: 1) for two simple chains, 2) for two different pairs of simple chains, 3) for two simple cycles. The first option is called linear in a simple chain, the second nonlinear in two simple chains, the third in a simple cycle. We prove Proposition 2). We have the following two options of the ϕ -transformation of two subgraphs from the set M: 1) two simple chains, 2) two different pairs of simple chains. That is, we have the

$$\text{following relationship: } G[\bigcap_{i=1}^2 H_i] = \sum_{j=1}^n C_G^{n_j}(a_j, b_j) \quad (\text{b1}),$$

where $n \geq 0$, (possibly $n_j = 0$, then a simple chain degenerates into a point a_j). Since, $G \neq K_4'$ the relation

b1) implies the existence the φ -transformation of a graph $\sum_{i=1}^2 H_i$ into a graph G , given as follows:

$$\varphi(\sum_{i=1}^2 H_i, \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^{n_i+1} C_{1ij} + C_{2ij})) \rightarrow (G, \{\{a^*_{ij}\}_{j=1}^{n_i}\}_{i=1}^n), \quad (A)$$

where $C_{H_k}^{n_i}(a_{k1}, a_{k(n_i+1)})$ is a simple chain of a subgraph H_k of length n_i with finite vertices a_{ki1} ,

$a_{ki(n_i+1)}$, where $i = 1(1)n$, $k = 1, 2$. Note that the set $\{a_{kij}\}_{j=1}^{n_i+1}$ consists of the vertices of the graph H_k

and the inner points of its edges, $\{a^*_{ij}\}_{j=1}^{n_i+1}$ - the set of vertices of a simple chain $C_G^{n_i}(a^*_{i1}, a^*_{i(n_i+1)})$ of

graphs G with finite set of vertices a^*_{i1} , $a^*_{i(n_i+1)}$, such that $\varphi(a_{1ij} + a_{2ij}) = a^*_{ij}$, $j = 1(1)n_i$, $i = 1(1)n$. For

$n = 1$ option 1) and statement 2) in this case is proved. For $n = 2$ we have option 2). We prove the right-

hand side of the next double inequality $0 \leq p_1(L(\sum_{i=1}^2 H_i, G)) \leq 1$, because the left-hand side is trivial. To do

this, use the method of proving the opposite.

Assume that for a graph L - the φ -transformation of a graph $\sum_{i=1}^2 H_i$ into a graph G given in (A), where

$L = L(\sum_{i=1}^2 H_i, G)$ and the inequality holds: $p_1(L) > 1$. Then the graph L will have at least two simple circles.

Each of this circles will mean the execution of the 2) φ - transformations at points on at least three different

pairs of simple chains without common points. The first elements of each pair will belong to a simple cycle

z of graph H_1 . The second elements of each pair will belong to a simple cycle z' of the graph H_2 . As a

result, at least three new 2-cells s with boundaries simple cycles, which cannot all together be the

boundaries of two 2-cells s_j , where $S_G(G^0) = \{s_j\}_{j=1}^3$, $j = 2, 3$. This means that at least one edge of the graph

G belonging to z_i one of the loops will not belong to the intersection of two 2-cells s_j , s_i , which belong

to the set $S_G(G^0)$ will be insignificant relative $t_G(G^0)$ to the operation of its removal. Thus we will have a

contradiction to the condition of 3-minimality of the graph G . Since our assumption is incorrect, we have

inequality $p_1(L) \leq 1$, which proves the double inequality. Since in Proposition 2) we have a transformation

on one pair of simple chains, the proof is complete.

We prove Proposition 3). Let's put $M = \{H_i\}_{i=1}^3$. For φ -transformation of a graph $\sum_{i=1}^3 H_i$ into the graph G , only the following two types are possible:

a) the φ -transformation of type (A), given in the same way as the φ -transformation of a graph $\sum_{i=1}^3 H_i$ into a graph G , ie on the edges (or parts of edges) of graphs H_i , $i = 1(1)3$, has the property that - the

image of the graph $\sum_{i=1}^2 H_i$ has at least one edge insignificant relative $t_G(G^0)$. And this property will be regardless of whether or not the graph $L(\sum_{i=1}^3 H_i, G)$ has cycles;

b) φ - transformation of non-type (A) graph $\sum_{i=1}^3 H_i$ into a graph G , ie it is given so that some φ -images of graphs have common simple cycles. Each pair of φ -images of the graphs H_i, H_j of the set $M'(G)$ can have no more than one common simple cycle. Then the following statements are made with precision to the renumbering of the elements of the set $M'(G)$:

- 1) There are elements $\varphi(H_i)$, $i = 1, 2$, of the set $M'(G)$ with a common cycle and homeomorphic graphs $K_{2,3}$ that do not have common simple loops with the element $\varphi(H_3)$;
- 2) There are elements $\varphi(H_i)$, $i = 1, 2$, that do not have common simple cycles, and an element homeomorphic $K_{2,3}$ has a common simple cycle with an element $\varphi(\bigcup_{i=1}^2 H_i)$.

Proposition 3) is proved. We prove Proposition 4). The proof will follow as a partial case from the above proof of statement 2) and will differ in that part concerning the necessary condition of degeneracy at the point of simple chains of the second pair.

The proof of theorem 1 is complete.

Algorithm for constructing 3-minimal planar graphs.

The modification of the algorithm for constructing all 3-minimal plane graphs is based on Theorem 1 and will have the following form:

Input data: The set L_1 of all nonisomorphic chains of graphs for each of the graphs $K_4, K_{2,3}$, ordered by their length and marked for which pair of graphs the chain is taken;

Output: the set of all 3-minimal graphs G ;

1. Construct a set L_2 from all different pairs of chains of the set L_1 and a set L_3 from all different two pairs of chains from L_1 , as well as a set L_4 composed of different pairs of elements of the set L_1 that generate simple loops without diagonals in columns K_4 or $K_{2,3}$;
2. While the set L_1 is not empty to perform the following actions:
 - 2.0. Take the element x from L_1 , enter the element x in the list B_1 ;
 - 2.1. $L_1 := L_1 \setminus x$;
 - 2.2. While the set $L_1 \setminus B_1$ is not empty to perform the following actions:
 - 2.2.1. Take the element u from $L_1 \setminus (B_1 + B_2)$, enter the element u in the list B_2 ;
 - 2.2.2. We perform the identification of pairs of vertices or points of pairs of graphs (K_4, K_4) , or $(K_4, K_{2,3})$, or $(K_{2,3}, K_4)$, or $(K_{2,3}, K_{2,3})$, indicated as vertices or points of chains pairs (x, u) , for all types of possible ϕ -transformations of the selected pair of graphs and we obtain a graph G ;

2.2.3. Procedure (G): Define the reachability number t of the set of all vertices of graph G as the minimum number of simple cycles covering the set of all vertices of graph G .

2.2.4. If $t = 3$ then perform:

for each edge e of the graph G perform in the loop the contraction edge e to a point

$G := G_e$,

perform the procedure 2.2.3;

If $t = 3$ then perform the end of the cycle on the edges of the graph G ,

else we derive the graph G ;

end of the cycle on the edges e ;

2.3. end of the internal cycle;

3. end of the external cycle;

4. While the set L_2 is not empty to perform the following actions:

4.0. Take the element x from L_2 , enter the element x in the list B_3 ;

4.1. $L_2 := L_2 \setminus x$;

4.2. While the set $L_2 \setminus B_2$ is not empty to perform the following actions:

4.2.1. Take the element u from $L_2 \setminus (B_3 + B_4)$, enter the element u in the list B_4 ;

4.2.2. We perform the identification of pairs of vertices or points of pairs of graphs (K_4, K_4) or $(K_4, K_{2,3})$ or $(K_{2,3}, K_4)$ or $(K_{2,3}, K_{2,3})$. They are indicated as vertices or points of two different pairs of chains x and u performed on all types of possible ϕ -transformations for the selected pair of graphs and we obtain the graph G ;

4.2.3. Procedure (G): Define the reachability number t of the set of all vertices of the graph G as the minimum number of simple cycles covering the set of all vertices of the graph G ;

4.2.4. If $t = 3$, then perform:

for each edge e of the graph G perform the operation of contraction to a point ;

$G := G_e$, perform the procedure 4.2.3;

If $t = 3$, then perform the end of the cycle on the edges of the graph G ,

else derive the graph G ;

else the end of the cycle on the edges;

4.3. end of the internal cycle;

5. end of the external cycle;

6. While the set L_4 is not empty to perform the following actions:

6.0. Take the element z from L_4 , enter the element x in the list B_4 ;

6.1. $L_4 := L_4 \setminus z$;

6.2. While the set $L_4 \setminus B_4$ is not empty to perform the following actions:

6.2.1. Take the element u from $L_2 \setminus (B_5 + B_4)$, enter the element u in the list B_5 ;

6.2.2. We identify pairs of vertices or points of pairs of graphs (K_4, K_4) or $(K_4, K_{2,3})$ or $(K_{2,3}, K_4)$ or $(K_{2,3}, K_{2,3})$ indicated as vertices of different pairs of cycles, performed on all possible ϕ -transformations for the selected pair of graphs and get the graph G ;

6.2.3. Procedure (G): Determine the minimum number t of simple cycles covering the set of all vertices of the graph G ;

6.2.4. If $t = 3$ then perform:

For each edge e of the graph G perform the contraction operation to a point;

$G := G_e$, perform the procedure 6.2.3;

If $t = 3$ then perform the end of the cycle on the edges of the graph G ,

else derive the graph G ;

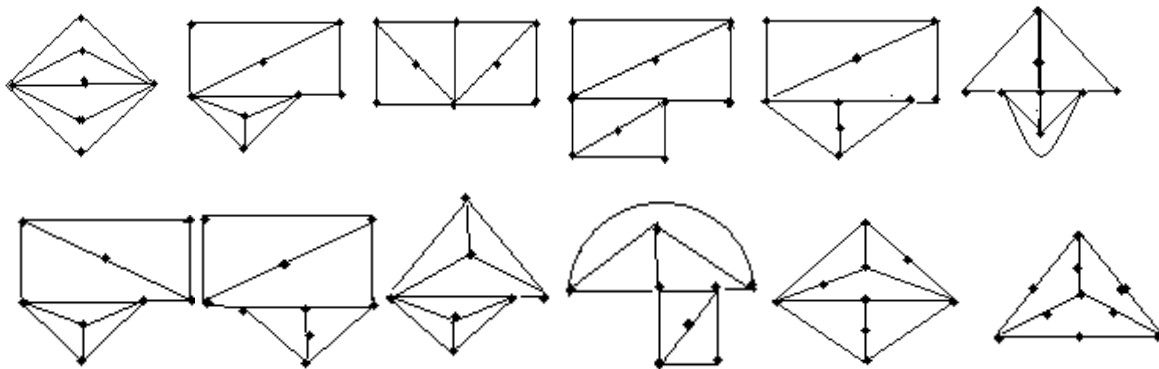
end of the cycle on the edges;

6.3. end of the internal cycle;

7. end of the external cycle;

8. end of the algorithm.

Result: Identity of non-cylindrical graphs to 3-minimal graphs with the proof of equivalence of non-cylindrical and 3-minimal planar graphs, theorem 1 on the characterization of 3-minimal planar graphs, and a modified algorithm for constructing all 3-minimal planar graphs. The 38 diagrams of 3-minimal planar graphs as result presented in the figure 2.



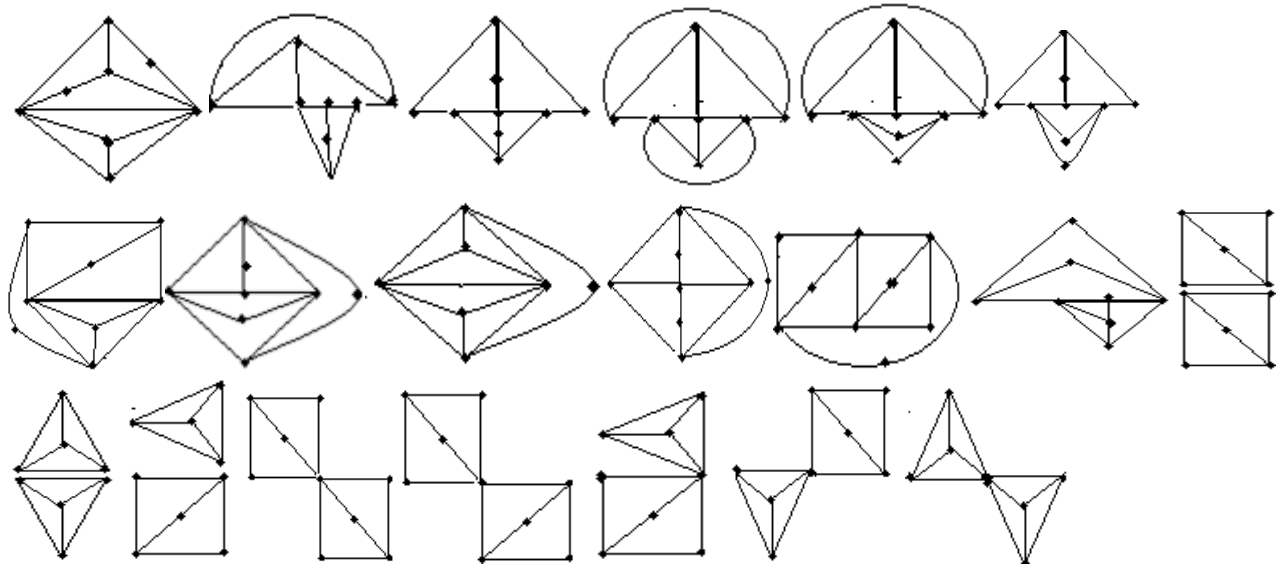


Figure 2. The list of 3-minimal planar graphs.

2-Minimal projective planar graphs.

Task: To construct the set of all nonisomorphic 2-minimal projective-planar graphs in which the fixed set of points is located on the two boundaries of 2-cells or pseudocells. Similarly of this task was the tasks for graphs with number of vertexes less than 10 on various genus which solved in [6], [7], [8].

Introduce a new characteristic that measures the some structure of the set X of points of graph G on S .

Definition 1. For a given embedding $f, f: G \rightarrow S$, a graph G in S and a given set of points $X, X \subset G^0 \cup G^1$ determine $t_G(X, S, f), t = t_G(X, S, f)$, the number of reachability of the set X relative to S , if there is a set $S_G(X), S_G(X) = S \setminus f(G)$, which satisfies the condition: $(f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^t \partial s_i \cap X) \wedge (f(X) \not\subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^t \partial s_i \cap X), j = 1, 2, \dots, t$.

We say that the set X has a reachability number $t, t_G(X, S) = t$, relative to S , if among all no isomorphic embedding's $f, f: G \rightarrow S$, the number t is the smallest among the numbers $t_G(X, S, f)$. We consider further the set X of points of the graph G t -non-planar concerning the surface S , or (t, S) -non-planar, if $t \geq 2$, where $t_G(X, S) = t$. If $t = 2$, S is a projective plane, and the set X is the set of vertices of the graph $G, X = G^0$, then we will call the graph G non-outer projective planar. **A graph G is outer-projective-planar if embeds on the projective-plane with all vertices on the boundary of one distinguished cell.**

Definition 2. Suppose the embedding $f, f: G \rightarrow S$, of the graph G in surface S , which implements $t, t_G(X, S) = t$, where $S_G(X) = S \setminus f(G) S_G(X) = \{s_i\}_1^t$. We will say that concerning a given surface S the set X will have the characteristic $\theta_G(X, S, f), \theta_G(X, S, f) = \theta, \theta \geq 1$, if there are θ three cells $\{s_i\}_1^3$ from the set $S_G(X)$, on the boundaries of which the subsets $X_i, X_i \subset X$, are placed arbitrarily and satisfy the relation:

$G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\} \wedge G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\} \wedge G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$, and generates the smallest

subgraph G' of the graph G , (possibly degenerate), contains the points $\{a_i\}_1^3$ of pairwise intersection of cell boundaries $\{s_i\}_1^3$. The set X will have the θ -characteristic $\theta_G(X)$ if $\theta_G(X) = \max \theta_G(X, f)$, where the maximum is taken for all embedding's $f : G \rightarrow S$, realizing $t_G(X, f) = t$ and $\theta = \theta_G(X, f)$.

Proposition 3.1. Each non-outer projective planar subgraph with a given set of points that are not located on the boundary of one 2-cell or pseudocell of an arbitrary graph-obstruction of the projective plane can be represented as 1-subdivision graph K_4 , or a ϕ -image of a pair of graphs homeomorphic to graphs from the set $\{K_5, K_{3,3}, K_4, K_{2,3}, K_5 \setminus e\}$ when identifying pairs of points from the connection sets both in a path and in a cycle.

The algorithm 1 and his mathematical base

Theorem 3.1. [5]. The graph G is non-outer projective planar if and only if then $G = H \setminus v$, where v is a vertex of graph-obstruction H of the projective plane N_1 .

Theorem 3.2. [9] is the mathematical base for the algorithm 1 for the construction of all no isomorphic non-outer projective plane graphs. The list of minimal projective planar graphs with genus 0 or 1 and fixed subsets of vertices witch has reachability number 2 or 3 is the results of the following modified polynomial algorithm 1.

Begin of Algorithm 1.

Input: The set P of 35 minors P_i of the projective plane N_1 with equivalence classes l_{ij} where $P_i^0 = \sum_{j=1}^{n_i} l_{ij}$,
 $n_i \leq |P_i^0|$.

Output: List X of graphs.

$X := \emptyset$; $v := 0$;

For $i = 1$ step 1 to 35, do these steps:

begin

$P_0 := P_i$;

$v := v_{i1}$;

procedure $A(P_0, \Pi_0, P_0^0, N_2)$;

Output ($P_0, \sum_{j=1}^{n_i} l_{ij}$) in X ;

For $k = 2$ step 1 to $|P_0|$, do these steps:

begin

If $v \approx v_{ik}$ then go to the end of the cycle by k ;

else $P_0 := P_i \setminus v$;

```

 $\Pi_0 := \Pi_i;$ 

L: = Function B (  $P_0, X$  );

If L == true then do:

    begin;

     $M := \{ \forall u \mid (u, v) \in P_0^1 \};$ 

    If  $K(G) == 1$  then do

        begin;

        procedure A(  $P_0, \Pi_0, M, N_1$  );

        output (  $\Pi_0, M$  ) in  $X$  ;

        end;

    else do

        begin;

        procedure A (  $P_0, \Pi_0, M, \Sigma_0$  );

        output (  $\Pi_0, M$  ) in  $X$  ;

        end;

    end;

end;

end;

```

End of Algorithm 1.

Procedure A (G, Π, M, S) do the following:

// Must construct the embedding Π of a graph G (without vertices of degree 2) with a given number of vertices in the surface S (Euclidean plane, projective plane or Klein surface) and determine the cells on the boundaries of which are the set of vertices M //.

If a graph G has a subgraph or part of the graph H is homeomorphic K_5 or $K_{3,3}$, then we construct the embedding of these graphs in the projective plane, otherwise, we attach a graph to the Euclidean plane Σ_0 . In nested graphs K_5 or $K_{3,3}$ a projective plane, there are cells $s_5, s_{3,3}$ with the following boundaries: ∂s_5 - a cycle of length 5 and 5 triangles for K_5 , or $\partial s_{3,3}$ - a cycle of length 6 and 4 quadrilaterals for $K_{3,3}$, in which we will embed stars with centers taken from the subset $G^0 \setminus H^0$.

First of all, we will put all these stars in cells with either cycle boundaries of length 5 for or length 6 for and try to use no more than one additional Mobius strip glued to the cells ∂s_5 or $\partial s_{3,3}$. The number of vertices $|G^0|$ of the obstruction graph of the projective plane is at least 12. The number of options for the

location of the centers and edges of stars, not more than 7 stars, is equal r^7 because each center of the star does not belong to two cells, where r the number of cells of the graph embedded in the projective plane $r = 6$ for K_5 , $r = 5$ for $K_{3,3}$.

The time complexity of procedure A (G, Π, M, S) is proportional $O(r^7)$.

The function $K(G)$ will determine the presence or absence of a graph G of a subgraph or part of a homeomorphic K_5 or $K_{3,3}$ and will give it out. To do this, we need to examine the complement of the \overline{G} graph G for the presence of a subgraph of five isolated vertices, $\overline{K_5}$, or two triangles without common vertices, i.e. $2K_3$. If such subgraphs of the graph are detected, the function $K(G)$ will give 1 and return to algorithm 1 the found vertices as vertices of the graph K_5 or $K_{3,3}$. In the absence case $\overline{K_5}, 2K_3$ the function $K(G)$ will give 0. The function $B(P_0, X)$ checks for the presence of an isomorphism of a graph P_0 with another element of the set of graphs X and will have polynomial complexity [10], [11] herein hand checking evidence identity of amalgamating sets of isomorphic graphs.

The part of the output result of algorithm 1 is on figures 3, 4.

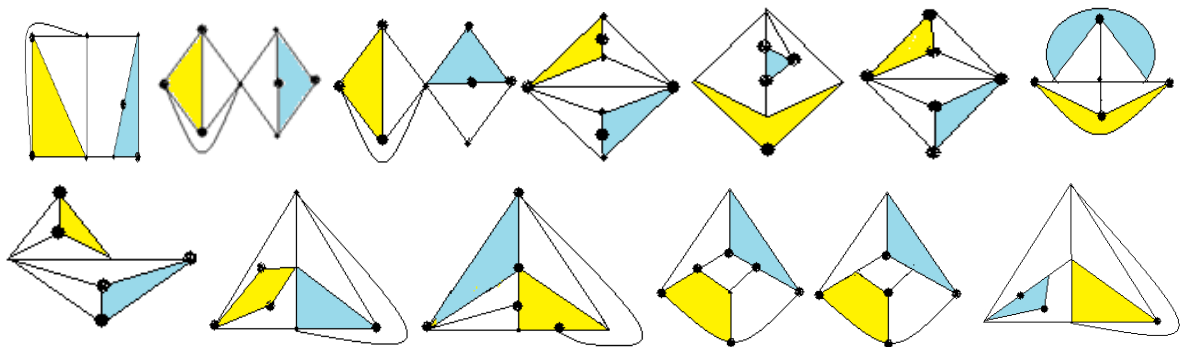
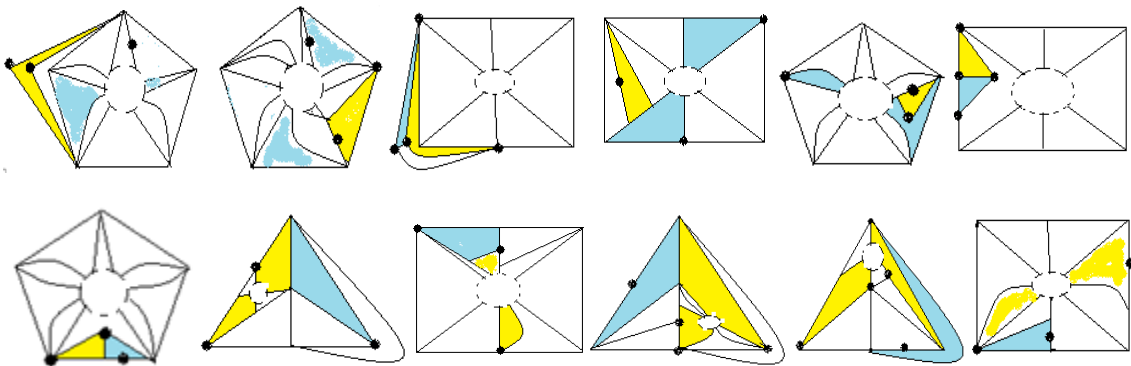


Fig. 3. Planar subgraphs of the projective minors with set M from push vertices at the boundaries of colored cells with the number of reachability 2 between two highlighted color 2-cells or 2-cell and pseudocell on the boundaries of which are subsets of the set M .



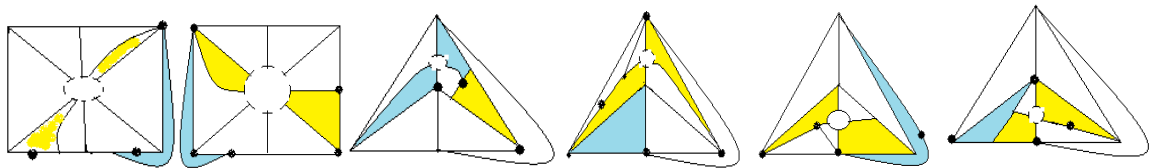


Fig. 4. The projective subgraphs of minors of the projective plane with two non-empty subsets of the set M , consisting of the push vertices and located on the boundaries of the colored 2-cells or 2-cell and pseudocell).

References

- [9] M.P. Khomenko. φ -Transformation of Graphs. Institute of Mathematics, Kyiv (1973)
- [10] D. Archdeacon, C.P. Bonnington, N. Dean, N.Hartsfield. Obstructions Sets for Outer-Cylindrical Graphs. 2000, 29pp.
- [11] V. Petrenjuk. Characterization of the 3-minimal Planar Graph. Collection of the proceedings of a seminar of discrete mathematics and applications. Moscow, MGU 1993, p.217.
- [12] V. Petrenjuk. List of 3-minimal Planar Graphs. Preprint DNTB 31.10.86 #2450-86. 7p.
- [13] D. Archdeacon, N. Hartsfield, C. H. C. Little, B. Mohar. Obstructions sets for outer-projective-planar graphs. Ars Combinatoria 49, 1998, 113-128.
- [14] Hur Surkhjin. The Kuratowski covering conjecture for graphs of the order less than 10. Dissertation, the Ohio State University (2008).
https://etd.ohiolink.edu/rws_etd/send_file/send?accession=osu1209141894&disposition=inline
- [15] Bojan Mohar, Carsten Thomassen. Graphs on surfaces, Johns Hopkins University Press, 2001.
- [16] Anna Flötotto. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, Universität Bielefeld vorgelegt, 2010.
- [17] V. Petrenjuk. About Transformation graphs as a tool for investigation. Proceedings of the 4-th International Conference on Computational Linguistics and Intelligent Systems (COLINS 2020). Volume I: Main Conference, Lviv, Ukraine, April 23-24, 2020, 1309-1319. <http://ceur-ws.org/Vol-2604/>
- [18] **LEDA: A library of efficient data types and algorithms, Max Planck Institute for Computer Science.**
<http://www.mpi-sb.mpg.de/LEDA/>.
- [19] K. Scott. Outermobius and cylindrical graphs. Senior Thesis, Princeton University, 1997.
- [20] V. Petrenjuk, D. Petrenjuk. List of Non-Outer Projective Planar Graphs. Proceedings of the Workshop Conference of COLINS-2021 the fifth edition of the International Conference on Computational Linguistics and Intelligent Systems, Kharkiv, Ukraine on April 22-23, 2021, Volume II, ISSN 2523-4013, 38-50, <http://colins.in.ua>, online.