

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

Механіко-технологічний факультет
Кафедра кібербезпеки та програмного забезпечення

Петренюк В.І.

СТРУКТУРА ГРАФІВ НА ПОВЕРХНЯХ. III
монографія

КРОПИВНИЦЬКИЙ
2026

УДК 519.1

ББК

Рекомендовано Вченою радою Центральноукраїнського національного технічного університету протокол № 10 від 25 травня 2026 року

Рецензент: Волков Ю. І., доктор фізико-математичних наук, професор;

Петренюк В.І.

Структура графів на поверхнях. III : монографія-Кропивницький; 2026.-358с.

В один файл зібрано статті автора (деякі у співавторстві) опубліковані в різних виданнях. У 8-му розділі розглянуто нові неопубліковані результати автора. Монографія призначена для студентів, які навчаються за спеціальностями F5-Кібербезпека, F3-Комп'ютерні науки, F2-Комп'ютерна інженерія, а також аспірантів, науковців в напрямку -Інформаційні технології

© Петренюк В.І., 2026

© Центральноукраїнський національний

технічний університет, 2026

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

РОЗДІЛ 1. СТРУКТУРА ГРАФІВ НА ПЛОЩИНІ.

1.1. СТРУКТУРА ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ ІЗ ЗАДАНИМ ЧИСЛОМ ДОСЯЖНОСТІ ДЕЯКОЇ ПІДМНОЖИНИ МНОЖИНИ ЇХ ТОЧОК	9
1.2. АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ ЧИСЛА ДОСЯЖНОСТІ СПЕЦІАЛЬНОЇ МНОЖИНИ ТОЧОК 2-ЗВ'ЯЗНОГО ГРАФА	22
1.3. АЛГОРИТМ ВСТАНОВЛЕННЯ 3-ВЛАСТИВОСТІ ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ . АЛГОРИТМИ ДО ₂₃ , ДО ₄	25 29
1.4. ІДЕНТИЧНІСТЬ НЕЦИЛІНДРИЧНИХ ГРАФІВ 3-МІНІМАЛЬНИМ ПЛОЩИННИМ ГРАФАМ	31

РОЗДІЛ 2. СТРУКТУРА ГРАФІВ НА ТОРІ

2.1. НОВА ВЕРХНЯ МЕЖА ОРІЄНТОВАНОГО РОДУ ПРОСТОГО ГРАФА	39
2.2. СТРУКТУРА 8-МИ ТА 9-ТИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ТОРА	49
2.2.1. ПОБУДОВА 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРУ	51
2.2.2. АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЇ ТОРУ	66
2.2.3 9-ТИ ВЕРШИННІ ГРАФИ D_5, \dots, D_{19} ГРАФ-ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРУ	68
2.2.4. 9-ТИ ВЕРШИННІ $N_2, N_3, D_{20}, \dots, D_{47}$ ГРАФИ-ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРУ	77
2.3. СТРУКТУРА 7-МИ ВЕРШИННИХ ПІДГРАФІВ 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ТОРА	99
2.4. ПРО МЕТОД φ -ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІВ ОРІЄНТОВАНОГО РОДУ	111

РОЗДІЛ 3. СТРУКТУРА ГРАФІВ НА ПРОЕКТИВНІЙ ПЛОЩИНІ ТА ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА

3.1. НОВА ВЕРХНЯ МЕЖА НЕОРІЄНТОВАНОГО РОДУ ПРОСТОГО ГРАФА	116
3.2. ПРО СТРУКТУРУ 7-МИ ТА 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ПОВЕРХНІ НЕОРІЄНТОВАНОГО РОДУ	127
3.3. СТРУКТУРА НЕПРОЕКТИВНИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ	134
3.4. ВЛАСТИВОСТІ МІНІМАЛЬНИХ ГРАФІВ ПРОЕКТИВНОЇ ПЛОЩИНІ	155
3.5. ПРО ГРАФ-МОДЕЛІ НЕОРІЄНТОВАНОГО РОДУ.	160

ДОДАТКИ ДО РОЗДІЛУ 1:

СПИСОК 3-МІНІМАЛЬНИХ ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ	68
---------------------------------------	----

СПИСОК 4-МІНІМАЛЬНИХ ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ	169
РОЗДІЛ 4. СТРУКТУРА ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ НА ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА	
4.1. АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ 2-ЗВ'ЯЗНИХ МІНОРІВ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА	172
4.2. СТРУКТУРА ПРОЕКТИВНО ПЛОЩИННИХ ПІДГРАФІВ ГРАФІВ- ОБСТРУКЦІЙ ЗАДАНОЇ ПОВЕРХНІ	176
4.3. ПРО СТРУКТУРУ 9-ТИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА	192
РОЗДІЛ 5. СТРУКТУРИ НА ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА	
5.1. МОДЕЛІ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА	212
5.2. ПЛОЩИННІ ПІДГРАФИ ІЗ ЗАДАНИМИ МЕТРИЧНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА	226
РОЗДІЛ 6. ДЕЯКІ ТЕНДЕНЦІЇ ЗАСТОСУВАННЯ.	
6.1. ABOUT Φ -TRANSFORMATION GRAPHS AS A TOOL FOR INVESTIGATIONS	239
6.2. LIST OF NON-OUTER PROJECTIVE PLANAR GRAPHS	248
6.3. APPLICATION TREND THROUGH PLANAR 3-MINIMAL & PROJECTIVE PLANAR 2- MINIMAL GRAPHS	261
РОЗДІЛ 7. ЗАСТОСУВАННЯ ДО ПРОЕКТИВНИХ ТА ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ	
7.1. ВЛАСТИВОСТІ НЕЗОВНІШНЬО ПРОЕКТИВНОПЛАНАРНИХ ГРАФІВ	278
7.2. КВАЗИМЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЛАНАРНИХ ПІДГРАФІВ НЕПРОЕКТИВНО- ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ	286
РОЗДІЛ 8. МОДЕЛЮВАННЯ ГРАФІВ ОБСТРУКЦІЙ ТА МІНОРІВ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА	
8.1. ПРО СИНТЕЗ МІНОРІВ ПРОЕКТИВНОЇ ПЛОЩИНИ З ПІДГРАФОМ ЧИ ЧАСТИНОЮ ГОМЕОМОРФНИМИ $K_{3,3}$	310
ДОДАТКИ ДО ПІДРОЗДІЛУ 8.1:	
ДОДАТОК А	313
ДОДАТОК Б	317
ДОДАТОК 1	324
ДОДАТОК 2	330
8.2. ПРО СИНТЕЗ МІНОРІВ ПРОЕКТИВНОЇ ПЛОЩИНИ З ПІДГРАФОМ ЧИ ЧАСТИНОЮ ГОМЕОМОРФНИМИ K_5	340
ДОДАТОК 1 ДО РОЗДІЛУ 8.2	343

ДОДАТОК 2 ДО РОЗДІЛУ 8.2

349

8.3. АЛГОРИТМ ВИЯВЛЕННЯ МІНОРІВ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА СЕРЕД ГРАФІВ НЕОРІЄНТОВАНОГО РОДУ 3 СИНТЕЗОВАНИХ З МІНОРІВ ПРОЕКТИВНОЇ ПЛОЩИНИ, ЯКІ МАЮТЬ ПІДГРАФ ГОМЕОМОРФНИЙ $K_{3,3}$

354

ПЕРЕДМОВА.

За кілька минулих десятиріччя стався бурхливий розвиток теорії графів зокрема її найважчої та найзмістовнішої топологічної частини:

теорії вкладень графів в 2-многовиди,

вивчення структури графів заданого роду,

оцінка роду композиції графів виражена через роди їхніх частин,

декомпозиція графів відносно інших топологічних інваріантів,

синтез графів заданого роду з мінорів меншого неорієнтованого роду з підграфами певного виду, наприклад Куратовського.

Зокрема було отримано один з найглибших результатів-теореми Робертсона-Сеймура згідно яких в нескінченній множині графів існують два таких, що один є мінором іншого, тобто шляхом стягування та видалення ребер одного графа можливо отримати інший граф та встановлена структура мінорів з чотирьох компонент; тим самим створили метод мінорів.

Якщо раніше методами в топологічній теорії графів були: метод обертань та метод компонент, якими оперували формулою Ейлера-Пуанкаре, метод потоків, метод φ -перетворень графів, як формалізація операцій по композиції графів з кількох простіших графів, чи декомпозиції графів.

Зауважимо, що автором методу φ -перетворень графів Хоменком М.П. було отримано результат, аналогічний вище згаданому, ще у 1973р. Робочим методом автора є метод φ -перетворень графів як топологічних просторів та спочатку основна задача полягала у оцінці роду графа як φ -образу наступних φ -перетворень:

-площинного графа та зірки заданого на множині точок із числом досяжності більше 1;

- площинного графа та графів K_4 , чи $K_{2,3}$, як центрів квазізірок, на множині точок із числом досяжності більше 1;

-графів $K_{3,3}$ чи K_5 та графів K_4 чи $K_{2,3}$ на множині точок із числом досяжності 1.

Отримані результати роздруковувалися здебільшого як препринти чи депонувалися в ДНТБ,. Структурно монографія складається з 8-х розділів та кількох додатків.

В розділі 1 розглянуто наступні питання: структура площинних графів із заданим числом досяжності деякої підмножини множини їх точок, спеціальний клас площинних графів, оцінка роду спеціальних графів, список 3-мінімальних площинних графів, про алгоритм встановлення 3-властивості графів, характеристика спеціальних площинних графів. структурні властивості площинних графів із заданою множиною точок досяжності більше 1 для ототодження із усіма множинами вершин графа $K_{2,3}$, структурні властивості площинних графів із заданою множиною точок досяжності більше 1, які попарно ототожнювалися із множинами вершин графа K_4 , оцінка роду φ -образу t -мінімального площинного графа та графа $K_{2,3}$, заданого на множинах точок

досяжності більше 1, оцінка роду φ -образа t -мінімального площинного графа та графа K_4 , заданого на множинах точок досяжності більше 1.

В розділі 2 розглянуто подання графів-обструкцій орієнтованого роду 2 на 8-ми та 9-ти вершинах, у яких кожне ребро є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, як результату φ -перетворення по підмножинам множин точок (точок приєднання із заданими характеристиками – числом досяжності та двостороннім доступом) одного із графів K_5 , $K_{3,3}$ (можливо без ребра чи із кількома додатковими ребрами) та квазізірки K із центральним графом M з щонайбільше чотирма вершинами. Основні результати: а) теорема 1 для 8-вершинних графів-обструкцій роду 2, т.то матимемо $M \in \{K_3, \overline{K_3}\}$; б) теорема 2 про подання графів-обструкцій роду 2 на 9-ти вершинах, як результату φ -перетворення не більше ніж трьох зв'язних графів X, Y, Z одного з двох випадків.

В розділі 3 розглянуто задачу для неорієнтованих поверхонь роду 1 чи 2, а саме полягатиме в уточненні верхньої межі неорієнтованого роду $\gamma(G)$ простого графа G як φ -образу двох невідроджених графів G_i неорієнтованого роду $\gamma(G_i)$ при ототоженні пар точок (x_{1j}, x_{2j}) із множин точок приєднання $x_i, j=1,2,\dots, |X_i|$, де під точкою розумітимемо, або вершину, або довільну точку ребра графа G . Якщо задано φ -перетворення зв'язних графів G_1 та $St_m(G_2)$ наступним чином:

$\varphi : (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ - квазізірка з центром G_2 та кількома ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини X_2 , X_i підмножина множини точок графа G_i , $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, матиме число досяжності t_i та характеристики, $\theta_i, \partial\theta_i, i=1,2$, то

$$\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i) + k4 - st, \text{ де } k4 \geq st \geq 0, st = \sum_{j=1}^{t_1} st(X_{1j}, G_1), k4 = \sum_{j=1}^{t_1} k4(X_{1j}, X_{2j}), k4 - st -$$

число додаткових 2-ручок приклеєних до клітки s з множини $\sigma_{r_1} \setminus f(G_1)$ при мінімальному вкладенні $f : G_1 \rightarrow S_{r_1}, r_i = \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i)$, із st -стороннім доступом до тих точок приєднання на границі ∂s клітці s (до якої приклеєно r_2 штук 2-ручок і вкладено граф G_2), що при ототоженні пар точок приєднання (x_{1j}, x_{2j}) породжують $k4$ різних підграфів гомеоморфних K_4 , чи $K_{2,3}$. В додатках 1,2 до розділу 3 наведені списки 3- та 4-мінімальних площинних графів.

В розділі 4 розглядалась структура підграфів графів-обструкцій для поверхні Клейна, тобто мінімальних графів неорієнтованого роду не більше 3, в яких видалення довільного ребра зменшує рід.

В розділі 5 досліджено причину адитивності неорієнтованого роду та структурні властивості моделей графів-обструкцій та мінорів поверхні Клейна. На основі поняття кліткової досяжності підмножини M приєднання множини точок простого графа була знайдена межа неорієнтованого графа поданого як φ -образ площинного графа та квазізірки.

В розділі 6 наведено англomовні статті задачею яких була популяризація теоретичних результатів та приклади їхнього застосування. Зокрема наведено алгоритм отримання та список незовнішньо проєктивно- площинних графів.

В розділі 7 наведені результати застосування теоретичних результатів та вивчення структурних властивостей незовнішньо проєктивно- площинних графів та квазіметричні властивості непроєктивно-площинних графів.

В розділі 8 розглянуто задачу синтезу графів моделей графів-обструкцій та мінорів поверхні Клейна з пар мінорів проєктивної площини, що мають породжений чи частинний підграф гомеоморфний одному й тому графу Куратовського. В додатках до підрозділу 8.1 наведені, як графи для синтезу, так і графи-моделі роду 3 синтезовані по підграфу гомеоморфному $K_{3,3}$. В додатках до підрозділу 8.2 наведені, як графи для синтезу, так і графи-моделі роду 3 синтезовані по підграфу гомеоморфному K_5 . Підрозділ 8.3 містить лінійний алгоритм виявлення графів-обструкцій та мінорів поверхні Клейна серед графів, які отримано шляхом синтезу мінорів проєктивної площини по одному з графів Куратовського.

Дякую воїнам Збройних сил України за можливість наукової роботи під час війни

РОЗДІЛ 1. СТРУКТУРА ГРАФІВ НА ПЛОЩИНІ.

1.1. СТРУКТУРА ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ ІЗ ЗАДАНИМ ЧИСЛОМ ДОСЯЖНОСТІ ДЕЯКОЇ ПІДМНОЖИНИ МНОЖИНИ ЇХ ТОЧОК.

Вивчимо структурні властивості площинних графів, кожне ребро яких істотно щодо заданого числа досяжності при операціях видалення або стискання ребра.

Позначення 1.1. Надалі через G будемо позначати плоский граф, через δ площину. Через $G_0(X)$ або через $(G)_0(X)$ будемо позначати граф, отриманий із графа G шляхом і-підрозділу ребер крапками графа G , що належать цим ребрам і множини X .

Пропозиція 1.0.0. Нехай G - не зовнішньопланарний граф, X - множина точок графа G . Мають місце наступні твердження :

(1) а) Граф G не зовнішньопланарний тоді тільки тоді, коли існує підграф H графа G гомеоморфний або K_4 , або $K_{2,3}$.

б) Існує таке вкладення $f, f : G \rightarrow \sigma$ реалізуюче t , де $t = t_G(X)$, $S_G(X) = \{s_i\}_{i=1}^t$, що $s \notin S_G(X)$, де s - зовнішня грань графа $f(G)$;

(2) Якщо G - блок, $t_G(G^0) = t$, $S_G(G^0) = \{s_i\}_{i=1}^t$, те для кожної пари $(s_i s_j)$, де $i \neq j$, існує найменша по включенню частина H_{ij} графа, що G задовольняє співвідношенню:

$$\begin{aligned} & [((G^0 \cap ds_i \subset H_{ij}^0) \wedge (H_{ij}^0 \cap (ds_j - ds_i) \neq 0)) \vee \quad (*) \\ & [((G^0 \cap ds_j \subset H_{ij}^0) \wedge (H_{ij}^0 \cap (ds_i - ds_j) \neq 0)) \wedge \\ & (H_{ij} \cong K_4) \vee (H_{ij} \cong K_{2,3})] \end{aligned}$$

Доведення. Нехай G - не зовнішньопланарний граф, X - множина крапок графа G . Доведемо твердження (1). Частина а) твердження 1 випливає з теореми 11.10 [4]. Доведемо частину б). Нехай задане вкладення $f, f : G \rightarrow \sigma$, що реалізує t , де $t = t_G(X)$. Безпосередньо з визначення 1.1 випливає співвідношення:

$(\exists s)(s \notin \sigma(G, f))(s \notin S_G(X))$. Припустимо, що α - операція стереографічного проектування з центром у клітці s . Побудуємо вкладення $f_1 : G \rightarrow \sigma$, де $f_1 = \alpha f$. Очевидно, що вкладення f_1 реалізує t , причому клітка s є зовнішньою гранню графа $f_1(G)$, де $\alpha(s_i) = s_i, i = 1(1)t$. Отже, вкладення f_1 задовольняє частини б) твердження(1). Твердження (1) доведено.

Доведемо твердження(2) методом індукції по t . База індукції: $t=2$.

Якщо $t=2$, то в силу теореми 11.10 [4] існує частина H графа, що G задовольняє співвідношенню (*). База доведена. Покладемо, що для $t = n$ твердження (2) доведено.

Обґрунтуємо індукційний крок: $n = n + 1$. Припустимо що в блоці G , де $t_G(G^0) = n + 1$ при кожнім $S_G(G^0)$ мається така пари $(s_i, s_j), i \neq j$, для якої не існує частина H графа G

задовольняючому співвідношенню (*). Покладемо, що $i = n + 1, j = n$. Оскільки G - блок, то існує найменша по включенню 2-зв'язна частина H графа G , що задовольняє співвідношенню:

$$[((ds_n \subset H^0) \wedge (ds_{n+1} \setminus ds_n) \cap H^0 \neq 0)) \vee ((ds_{n+1} \subset H^0) \wedge (ds_n \setminus ds_{n+1}) \cap H^0 \neq 0)].$$

Розглянемо вкладення $f|_H, f|_H: H \rightarrow \sigma$. Нехай s'' - зовнішня грань графа $f|_H(H)$, а через H' - позначимо ту частину підграфа H графа G , що не містить ребер з множини $G^1 \cap (ds'' \cap \bigcup_{k=n}^{n+1} ds_k)$. У силу зробленого вище пропозиції маємо $(H')^0 \subset ds''$.

Тому можливо побудувати вкладення $f', f': G \rightarrow \sigma$, у такий спосіб:

а) $f'|_{G^1 \setminus (H')^1} = f|_{G^1 \setminus (H')^1}$;

б) $f'(H' \setminus ((H')^1 \cap ds'')) \subset s_0$;

де s_0 - зовнішня грань графа $f(G)$.

В результаті одержимо наступне співвідношення:

$$f'(G^0) \subset ds'' \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} ds_k \right), \text{ де}$$

$$ds'' = \bigcup_{k=n}^{n+1} ds_k \setminus \bigcup_{k=n}^{n+1} ((H')^1 \cap ds_k),$$

$$S_G(G^0) = \{s_k\}_{k=1}^{n-1} \cup \{s''\},$$

з якого випливає, що $t_G(G^0) \leq n$. Одержимо протиріччя умові, що $t = n + 1$. Отже, для будь-якої пари (s_i, s_j) , $i \neq j$, мається найменша по включенню частина H_{ij} графа, що G задовольняє співвідношенню (*). Доведення пропозиції 1.0.0. закінчено.

Наслідок 1.0.0. Мають місце наступні твердження:

1. Якщо G - 1-зв'язний граф, то для кожного 2-компонента G_i графа G , $G_i \subset \varphi^{-1}(G)$, має місце твердження (2) пропозиції 1.0.0.
2. Якщо G - незв'язний граф, то для кожного його 1-компонента виконується твердження 1) дійсного наслідку.

Доведення цих тверджень очевидно.

Позначення 1.3. Будемо позначати через $M(G)$ множина усіх різних підграфів H графа G , описаних у твердженні (2) пропозиції 1.0.0., а через $M'(G)$ - найменше по включенню підмножина множини $M(G)$, що складає з найменших по включенню підграфів H_{ij} графа G , або частин цих підграфів, що задовольняють наступним умовам:

а) $G^0 \subseteq \bigcup_{\forall H' \in M'(G)} (H')^0$;

б) Якщо підграф H_{ij} або його частина гомеоморфні графові K_4 , то, або усі ребра графа K_4 1-підрозділені, або жодне ребро графа K_4 не 1-підрозділено.

Зауваження. Надалі якщо не зроблені застереження, будемо вважати що, у відношенні елементів множини M' термін «підграф» графа G , не виключає того, що цей елемент може бути частиною графа G .

Приклад. Розглянемо наступне вкладення графа G в площину:

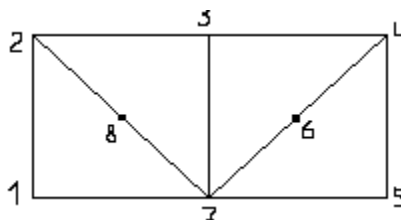


Рис 1.

Виділимо множини $S_i = \{s_{ij}\}_{j=1}^3, i=1,2$,

де а) $ds_{11} = \{1,2,7,8\}$, $ds_{12} = \{2,3,7,8\}$, $ds_{13} = \{4,5,6,7\}$;

б) $ds_{21} = \{1,2,7,8\}$, $ds_{22} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $ds_{23} = ds_{13}$.

Для кожного з них побудуємо множини $M_i, M_i = M(G)$:

$$H_{12}^0 = \{1,2,3,7,8\}, H_{21} = \{1,2,7,8\}, H_{23}^0 = H_{32}^0;$$

$$(H_{13}^0)' = \{1,2,6,7,8\}, (H_{13}^0)'' = \{1,2,4,7,8\}, (H_{13}^0)''' = \{1,2,5,7,8\},$$

$$H_{13}^0 \in \{(H_{13}^0)', (H_{13}^0)'', (H_{13}^0)'''\},$$

$$H_{32}^0 = \{3,4,5,6,7\}, H_{31}^0 = \{1,4,5,6,7\},$$

$$M(G) = \{H_{12}, H_{13}', H_{13}'', H_{13}''', H_{21}, H_{31}, H_{32}\};$$

$$H_{12}^0 = \{1,2,7,8,3\}, H_{13}^0 = \{1,2,8,7,6,4,3\}, H_{21}^0 = H_{12}^0,$$

$$H_{23}^0 = \{1,2,3,4,5,7,6\}, H_{32}^0 = \{4,5,6,7,3\},$$

$$M(G) = \{H_{12}, H_{13}, H_{23}, H_{32}\}.$$

Не важко переконається в тім, що приведені вище множини а) і б) вичерпують усі неізоморфні множини $S_G(G^0)$. У результаті $M'(G) = \{H_{12}, H_{32}\}$.

Наслідок 1.0.1. Нехай G - блок, $G = (G^0, G^1)$, $t = t_G(G^0)$, кожне ребро якого істотне відносно t при операції видалення, $|M'(G)| = m$. Тоді мають місце співвідношення:

$$а) (\forall u)(\exists H)(u \in G^1)(H \in M'(G))[u \in H^1];$$

$$б) (\forall ij)(i \neq j, i, j = 1(1)m)[H_i \cap H_j \neq 0 \Rightarrow p_1(H_i \cap H_j) \leq 1].$$

Доведення. Нехай виконана умова наслідка 1.0.1. Доведемо співвідношення 1). Розглянемо вкладення $f' f' : G \rightarrow \sigma$, що реалізує t , $t = t_G(G^0)$. Нехай u - довільне ребро графа G . Будь-яка множина $S_G(G^0)$, $S_G(G^0) = \{s_i\}_{i=1}^t$, що задовольняє одному з наступних співвідношень :

$$а) f(u) \subset ds_1,$$

$$б) f(u) \subseteq \bigcap_{i=1}^2 ds_i.$$

Згідно твердження(2) пропозиції 1.0.0. для будь-якої пари $(s_i, s_j), j = 2(1)t$, існує підграф H_{ij} гомеоморфний або K_4 , або K_{23} і задовольняючому співвідношенню:

$$(G^0 \cap ds_1 \subset H_{ij}) \wedge (H_{ij} \cap (ds_j \setminus \bigcup_{\substack{k=0 \\ k=1}}^t ds_k))$$

Таким чином, для кожного u , $u \in G'$, мається такий підграф $H_{ij}, H_{ij} \in M(G)$, що $u \in H_{ij}'$. Тоді існує підмножина $M'(G)$ множини $M(G)$, що містить найменше число таких підграфів H_{ij} . Доведення твердження а) закінчено.

Доведемо твердження б). З визначення множини $M'(G)$ випливає, що будь-які його два різних елементи $H_i, H_j, i \neq j$, що має не порожнє перетинання, можуть мати не більш одного загального циклу. Дійсно, якщо запропонувати, що елементи H_i, H_j множини $M'(G)$ мають два загальних цикли, то в силу умов а), б) приведених у позначенні 1.3, те ці елементи гомеоморфні графові K_4 , у якого жодне ребро не 1-підрозділене. Тоді можливо побудувати множина M , де $M = M'(G) \setminus \{H_i\}$, що задовольняє умовам а), б) позначення 1.3., т.е одержимо протиріччя умові для множини $M'(G)$. Припущення не вірне. Твердження б) доведено. Доведення наслідка закінчений.

Наслідок 1.0.2. Нехай G - блок, $M'(G) = \{H_i\}_{i=1}^m$. Мають місце наступні твердження:

а) Елементи множини $M'(G)$ можуть мати не більш одного простого циклу у своєму перетинанні;

б) Якщо $t_G(G^0) = 3, m = 2$, те виконується одне з наступних співвідношень:

$$б1) \bigcap_{i=1}^2 H_i = \sum_{j=1}^n C_G^{nj}(a_j, b_j), \text{ де } n \geq 0;$$

б1) існує частина графа G гомеоморфна графові K_4 .

Доведення. Нехай G - блок, $M'(G) = \{H_i\}_{i=1}^m$ $m > 1$. Незавжди побачити незалежність співвідношення 2) наслідка 1.0.1. від умови істотності кожного ребра графа щодо числа при операції видалення ребра. Твердження а) доведено.

Доведемо співвідношення б). Покладемо, що $m > 2$ $t_G(G^0) = 3$. В силу твердження а) можливі тільки наступні випадки:

$$\text{а) } p_1\left(\bigcap_{i=1}^2 H_i\right) = 0,$$

$$\text{б) } p_1\left(\bigcap_{i=1}^2 H_i\right) \neq 0.$$

Розглянемо випадок а). Якщо графи H_i , $i = 1, 2$ не мають спільних простих циклів, то виконується співвідношення б1), де $C_G^{n_j}(a_j, b_j)$ - простий ланцюг графа G довжини n_j , $n_j \geq 0$. Що було потрібно довести. Розглянемо випадок б). Відповідно до визначення множини $M'(G)$ можливі тільки 3 різні пари, що складають частини H_i графа G - гомеоморфні графу $K_{2,3}$ або ізоморфні графу K_4 . Незавжди переконається в тім, що наявність пари (K_4, K_4) суперечить умові, т. то об'єднання двох графів K_4 із загальним простим циклом містить частина гомеоморфну графові $K_{2,3}$, тобто одержимо включення $\bigcup_{i=1}^2 H_i^0 \subset H^0$, що суперечить умові. Інші пари (H, H) , (K_4, H) можуть мати місце тільки тоді, коли $\bigcup_{i=1}^2 H_i$, містить частина гомеоморфну графу K_4 . Дійсно, якщо простий цикл Z , $Z \in \bigcap_{i=1}^2 H_i$ має довжину n , $n \geq 8$, то для пари (H, H) , одержимо що граф $\bigcup_{i=1}^2 H_i$, де $H_i \cong H$, гомеоморфний графу K_4 , а для іншої пари (K_4, H) , одержимо що граф $\bigcup_{i=1}^2 H_i$ має частина гомеоморфні графу K_4 . Тим самим доведено співвідношення б2). Твердження б) доведено. Доказ наслідку 1.0.2 закінчено.

Наслідок 1.0.3. Нехай G - блок, $M'(G) = \{H_i\}_{i=1}^3$. Якщо елементи множини $M'(G)$ мають загальний простий цикл Z , то мають місце наступні співвідношення: а) $p_1\left(\bigcap_{i=1}^2 H_i\right) = 0$; б) якщо $Z \subset H_i \cap H_j$, то графи $H_k \cap H_j$, $H_k \cap H_j$ не містять простих циклів і $H_i \cong H_j \cong K_{2,3}$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$; в) якщо $H \cong K_{2,3}$, то $Z \subset H_i \cap (H_j \cup H_k)$, де Z цикл графа G , що є границею зовнішньої грані для графа $f|H_j \cup H_k(H_j \cup H_k)$, де вкладення $f, f: G \rightarrow \sigma$, реалізує $t_G(G^0)$.

Доведення. Нехай G - блок, $t_G(G^0) = 3$, $M' = \{H_i\}_{i=1}^3$. Це означає, що граф G не містить частини гомеоморфної графу K_4 . Покладемо, що для деякого графа G при кожнім $M'(G)$ маються елементи, наприклад H_i , $i = 1, 2$, що володіють загальним простим циклом Z . Відповідно до визначення множини $M'(G)$, елементи якого або гомеоморфні графові $K_{2,3}$, (у цьому випадку

будемо позначати них через H), або ізоморфні графові K_4 . Можливими є тільки наступні випадки:

1) Існує Z , $Z \subset \bigcap_{i=1}^3 H_i$; 2) тільки одна пара елементів множини $M'(G)$ має загальний простий цикл; 3) у точності дві пари елементів мають загальні цикли приналежні: 3а) одному елементові; 3б) різним елементам; 4) три пари мають різні загальні цикли.

Розглянемо випадок 1). Маємо наступні 4 різних варіанти для трійок елементів множини $M'(G)$, що вичерпують усі можливості:

$$10) (H, H, H) \quad 12) (H, K_4, K_4)$$

$$11) (H, H, K_4) \quad 13) (K_4, K_4, K_4).$$

Неважко переконається в тім, що в кожному з цих варіантів можна знайти такі 2 частини $H_i, i = 1, 2$ графа G , що гомеоморфні або $K_{2,3}$, або ізоморфні графу K_4 і мають властивість: $G^0 \subseteq \bigcup_{i=1}^2 H_i$. Тим самим одержимо протиріччя умові, що $|M'(G)| = 3$ Випадок 1) неможливий.

Розглянемо три різні пари елементів множини $M'(G)$. Нехай має місце випадок 2). Для пари, наприклад (H_1, H_2) , що має загальної простий цикл можливі тільки наступні варіанти:

$$20) (H, H); \quad 21) (H, K_4); \quad 22) (K_4, K_4).$$

Відповідно до визначення множини $M'(G)$ варіанти 21) і 22) є неможливими, т. то у кожному випадку є частина (H') графа G з властивістю: $(H' \cong K_{2,3}) \wedge (\bigcup_{i=1}^2 H_i \subseteq H')$, що суперечить умові:

$|M'(G)| = 3$. Можливий варіант 20), що дає співвідношення б) дійсний. Випадок 2) розглянутий.

Нехай має місце випадок 3а). Покладемо, що дві різні пари елементів $H_i, H_i \in M'(G)$, мають спільні складові, що належать одному елементові. Дійсно, якщо припустити, що існують дві пари, наприклад: $(H_1, H_2), (H_1, H_3)$, що володіють наступною властивістю: $(\forall_i)(i = 1, 2)(z_i \subset H_1 \cap H_i)$ z_i - простий цикл елемента H_1 те неважко переконати, що це неможливе припущення.

Розглянемо наступні можливі під випадки для випадку 3а): 3а1) $H_1 \cong K_{2,3}$; 3а2) $H_1 \approx K_4$. У кожному підвипадку має місце співвідношення $G^0 \subseteq \bigcup_{i=1}^2 H_i$, що суперечить умові. Обое підвипадки неможливі. Такому образом випадок 3а) неможливий. Нехай має місце випадок 3б). Покладемо, що дві різні пари елементів $H_i, H_i \in M'(G)$, мають загальні цикли для своїх складових, приналежним різним елементам множини $M'(G)$.

Припустимо, що дві пари, наприклад: $(H_1, H_2), (H_2, H_3)$, мають властивість:

$$(\forall_i)(i = 1, 2)[(z_1 \subset \bigcap_{i=1}^2 H_i) \wedge (z_2 \subset \bigcap_{j=2}^3 H_j)], \text{ де } z_1 \subset H_3, z_2 \not\subset H_1.$$

Використовуючи ті ж твердження, що і для випадку 3а) ми одержимо, що випадок 3б) неможливий. Нехай має місце випадок 4). Оскільки серед трьох пар, що володіють попарно загальними циклами, маються 2 пари, що володіють загальними циклами, що належать або одному елементові, або різним елементам, те випадок 4) зводиться до випадку 3). Випадок 4) неможливий.

3 приведених вище міркувань впливає наступне: якщо $H_i \cong K_{2,3}$, то $z \subset H_i \cap (H_j \cup H_k)$, де z -цикл графа G , що є границею зовнішньої грані для графа $f | H_j \cup H_k (H_j \cup H_k)$, де вкладення f , $f: G \rightarrow \sigma$, реалізує $t_G(G^0)$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Доведення наслідка закінчено.

Наслідок 1.0.4. Нехай $K'_4 = (K_4)_0 (K_4^0)$. Мають місце твердження:

1) Граф G - задовольняє співвідношенню:

$$(\forall u)(u \in G^1)[t_{G \setminus u}(G^0) = t_G(G^0) - 1 = 1]$$

тоді і тільки тоді, коли граф G гомеоморфний або $K_{2,3}$, або K_4 , причому $G \neq K'_4$.

2) Якщо граф G гомеоморфний K'_4 , то має місце співвідношення:

$$(\forall u)(u \in G^1)[t_{G \setminus u}(G^0) = t_G(G^0) - 1 = 2].$$

Доведення. Доведемо 1). Нехай граф G задовольняє зазначеному співвідношенню, тобто кожне ребро графа G істотно відносно $t_G(G^0)$ при операції видалення. У силу пропозиції 1.0.0. існує частина H графа G , гомеоморфні, або K_4 , або $K_{2,3}$. Припустимо, що має місце співвідношення:

$G^1 \setminus H^1 \neq \emptyset$. Розглянемо ребро u , $u \in G^1 \setminus H^1$ і граф G^1 , $G_1 = G \setminus u$. Тому що $H \subset G_1$,

$t_G(G^0) = 2$, те в силу твердження 2 пропозиції 1.0.0. маємо рівність: $t_{G_1}(G_1^0) = 2$, що суперечить

приведеному співвідношенню. Припущення невірне. Отже, граф G гомеоморфний або $K_{2,3}$, або K_4

. Нехай граф G гомеоморфний K_4 або $K_{2,3}$, причому граф $G \neq K'_4$. Очевидно, що $t_G(G^0) = 2$

. Твердження 1) доведено.

Доведемо 2). Нехай $G \cong K'_4$, тобто граф G може бути отриманий із графа K_4 , шляхом 1-підрозділу всіх його ребер. Тому що існує єдине неізоморфне мінімальне вкладення графа G в σ , те має місце: $t_G(G^0) = 3$. Неважко переконається в тім, що виконується співвідношення:

$(\forall u)(u \in G^1)(t_{G \setminus u}(G^0) = 2)$. Доведення наслідка закінчене.

Пропозиція 1.0.1. Нехай G - плоский граф, $t_G(G^0) = t$, $t > 1$. Для будь-якого ребра u , $u \in G^1$, виконується нерівність: $t - 1 \leq t_{G \setminus u}(G^0) \leq t$.

Доведення. Нехай G - площинний граф, $t_G(G^0) = t$, $t > 1$, $u \in G^1$, $H = G \setminus u$. Оскільки $H^0 \subseteq G^0$, та нерівність $t_H(H^0) \geq t - 1$ справедлива для кожного ребра u графа G . Використовуємо метод доведення від протилежного. Припущення 0. Нехай для деякого u , $u = (a_1 a_2)$, виконується нерівність: $t_H(H^0) < t - 1$, де $t_H(H^0) = t'$

Доведемо лему 01: Кожне вкладення $f', f' : H \rightarrow \sigma$, що реалізує t' задовольняє співвідношенню: $(\forall i, s)(s_i \in S_h(H^0))(s \in \sigma(H, f')(i=1,2)[(f'(a_i) \in ds_i) \wedge (f'(du) \not\subset ds)]$. Припустимо, що мається таке вкладення $f, f : H \rightarrow \sigma$, що реалізує t' , що задовольняє співвідношенню: $f(du) \subset ds$, де $s \in \sigma(H, f)$. Побудуємо вкладення $f_1, f_1 : G \rightarrow \sigma$, так, щоб виконувалися наступні умови: 1) $f_1|H = f|H$, 2) $f_1(u) \subset s$. Одержимо наступне співвідношення $f_1(G^0) \subset \bigcup_{i=1}^i ds_i$, що суперечить умові нашої пропозиції. Припущення невірне. Отже при будь-якому вкладенні $f', f' : H \rightarrow \sigma$, що реалізує t' , має місце співвідношення: $f'(a_i) \in ds_i$, де $s_i \in S_H(H^0)$, $i=1,2$. Лема доведена.

Відповідно до припущення можливі тільки наступні випадки:

А) $p_G(a_1) \geq p_G(a_2) > 2$; Б) $(p_G(a_1) \geq p_G(a_2)) \wedge (p_G(a_2) = 2)$.

Розглянемо випадок А). Покладемо, що вкладення $f' : H \rightarrow \sigma$, реалізує t' $S_H(H^0) = \{s_i\}_{i=1}^i$. Згідно леми 01 маємо, що $f'(a_i) \in ds_i$, $i=1,2$. Нехай M - найменший по включенню блок графа H , що містить $\bigcup_{i=1}^2 ds_i$. Підграф M графа H містить простий ланцюг C_2 , $C_2 = C_G(b_1, b_2)$, таку, що пари вершин $(b_1, b_2), (a_1, a_2)$ розділяють один одного на площині і належать простому циклові Z підграфа M . Доведемо лему 02: Не існує простого ланцюга C_3 , $C_3 = C_G(C_1, C_2)$, такої, що пари вершин $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ належать циклові Z і розділяють один одного на площині. Припустимо, що є простий ланцюг C_3 , описана в умові. Розглянемо підграф N , $N = Z \cup C_2 \cup C_3$ графа H . Оскільки $N \cong K_4$ і вершини a_1, a_2 є крапками несуміжних ребер графа N , те маємо рівність: $t_H(\{a_i\}_{i=1}^2) = 2$. Розглянемо наступне φ - перетворення $\varphi(H + St_2(y_0), \sum_{i=1}^2 (a_i + y_i)) = (Y, \{a_i^*\}_{i=1}^2)$, де $St_2^0(y_0) = \{y_i\}_{i=0}^2$. Доведемо, що \hat{N} - блок. Отже, якщо \hat{N} - однозв'язний, те випадок 4 неможливий. Таким чином, якщо зроблено припущення (*), те неможливі всі підвипадки для \hat{N} - блоку або для \hat{N} - однозв'язного графа. Отже, випадок 4) неможливий. Доведення пропозиції 4 закінчено.

Пропозиція 3. 1) Випадок 3) еквівалентний випадкові 2); 2) Випадок 3) неможливий.

В еквівалентності випадків 2) і 3) неважко переконатися, якщо поміняти ролями X_1 і X_2 , тобто покласти, що X_1 позначає X_2 , а X_2 позначає множина X_1 . Тим самим виконаємо перепозначення, несуттєве для умови теореми I. Отже випадок 3) неможливий. У такий спосіб доведено, що з припущення (*) випливає, що неможливим є кожний з можливих випадків, що описують взаємозв'язок множини $\bigcup_{i=1}^2 X_i$ і підграфа \hat{N} графа H . Це означає, що або $\bigcup_{i=1}^2 X_i = \emptyset$, або \hat{N} - порожній підграф графа H ; що неможливо. Отже невірним є наше припущення (*). Отже, якщо має місце рівність: $t_G(X_i \cup X_j) = 2$, то існує підграф H_{ij} графа G , де $i < j, i, j = 1(1)t$. Доведення теореми 2.1 закінчено.

Теорема 2.2. Нехай X - кінцева множина крапок 2-зв'язного графа G ,
 $t_G(X) = t, \{s_i\}_{i=1}^t \subseteq \sigma(G, f), X_i = X \cap \partial s_i, i = 1(1)t, t > 1$

Для кожної пари підмножин X_i, X_j множини X , де $i < j, i, j = 1(1)t$, виконується рівність
 $t_G(X_i \cup X_j) = 2$, тоді і тільки тоді, коли існує частковий підграф H_{ij} графа G , описаний у визначенні
 2.3. Доведення цієї теореми випливає з лем 2.0, 2.1, 2.2, а також теореми 2.1.

Наслідок 2.0. Нехай X - скінчена множина крапок 2-зв'язного графа G , задане вкладення
 $f, f: G \rightarrow \sigma, X_i = \{x_i\}, X_i = X \cap \partial s_i, \{s_i\}_{i=1}^t \subseteq \sigma(G, f)$ має місце співвідношення:

$(\exists f)(\forall s)(\forall i, j, i \neq j, i, j = 1(1)t)(s \in \sigma(G, f)) \left[f(\{x_i, x_j\}) \not\subset \partial s \right], H_{ij}$ — підграф графа G , описаний у
 визначенні 2.3, де $i < j, i, j = 1(1)t, t > 1$. Якщо існує найменше по включенню множина M ,
 $m = \left\{ H_{k(k+1)} \right\}_{k=1}^{t-1} + \{H_{1t}\}$, з властивостями:

- 1) $(\forall i, j)(\exists H_{ij})(i < j, i+1 \neq j, i, j = 1(1)t) \left[H_{ij} \subset \left(\bigcup_{k=1}^{t-1} H_{k(k+1)} \right) \cup H_{1t} \right]$:
- 2) $(\forall k')(k' = 1(1)t) \left[\left(H_{k'(k'+1)} \not\subset \bigcup_{k=1}^{t-1} H_{k(k+1)} \cup H_{1t} \right) \wedge \left(H_{1t} \not\subset \bigcup_{k=1}^{t-1} H_{k(k+1)} \right) \right]$ то $t_G(X) = t..$

Доведення. Нехай X - скінчена множина точок 2-зв'язного плоского графа G , задане вкладення
 $f, f: G \rightarrow \sigma, X_i = X \cap \partial s_i, X_i = \{x_i\}, \{s_i\}_{i=1}^t \subseteq \sigma(G, f), i = 1(1)t$; має місце співвідношення:
 $(\exists f)(\forall s)(\forall i, j = 1(1)t)(s \in \sigma(G, f)) \left[f(\{x_i, x_j\}) \subset \partial s \right]$, де H_{ij} - підграф графа G , описаний у
 визначенні 2.3, $i < j, i, j = 1(1)t$. Покладемо, що існує найменша по включенню множина M
 елементами якої є підграфи H_{ij} , що володіють властивостями 1), 2). Приведені в умові
 співвідношення для множини X означають, що при будь-якому вкладенні $f, f: G \rightarrow \sigma$, ніякі дві
 різні крапки x_i, x_j не лежать на границі однієї і тієї ж клітки $s, s \in \sigma(G, f)$. Тоді з теореми 2.2 випливає
 співвідношення: $(\forall i, j)(i < j, i, j = 1(1)t) \left[t_G(X_i \cup X_j) = 2 \right]$. Отже має місце включення: $f(X) \subset \bigcup_{i=1}^t \partial s_i$,
 де $t = t_G(G^0)$. Що і було потрібно довести. Для доведення наслідків 2.1 і 2.2 необхідні наступні леми.

Лема 2.3. Нехай X - скінчена множина точок плоского графа $G, G = \sum_{i=1}^n G_i, \rho_0(G_i) = 1,$
 $t_G(X) = t, t > 1, i = 1(1)n$. Має місце рівність: $t_G(X) = \sum_{i=1}^n t_{G_i}(X \cap G_i) - n + 1$

Доведення: Нехай X - скінчена множина точок площинного графа $G, G = \sum_{i=1}^n G_i, \rho_0(G_i) = 1, i =$
 $1(1)n$, і задане вкладення $f, f: G \rightarrow \delta$, що реалізує $t_G(X)$, де $t_G(X) = t, t > 1$. Розглянемо вкладення
 $f_i, f_i = f|_{G_i}, f_i: G_i \rightarrow \delta, i = 1(1)n$. Тоді маємо співвідношення: а) вкладення f_i реалізує t_i ,

$t_i = t_{G_i}(G_i \cap X)$, $i = 1(1)n$; б) $f = \sum_{i=1}^n f_i$ Дійсно, якщо для деякого i вкладення f_i не реалізує $t_{G_i}(X \cap G_i)$, то тоді є вкладення $f'_i : G_i \rightarrow \delta$, що реалізує $t_{G_i}(X \cap G_i)$. Це означає, що вкладення f не реалізує $t_G(X)$. Одержимо протиріччя умові. Співвідношення а) вірне. Розглянемо множину S_i , $S_i = S_G(G_i \cap X)$ де $S_i = \{s_{ij}\}_{j=1}^{t_i}$, а також вкладення $f'_i, f'_i : G_i \rightarrow \delta$, що задовольняє умові:

- 1) $f_i = \alpha_i f'_i$, де α_i - операція стереографічного проектування з центром у клітці s_{i1} , $i = 1(1)n$.
- 2) $f'_i(s_{ij})$ - зовнішня грань графа $f'_i(G_i)$, $i = 1(1)n$. Неважко бачити, що вкладення f'_i реалізує t_i .

Одержимо вкладення f' , $f' = \sum_{i=1}^n f'_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$, що реалізує t і таке, що $S_G(X) = \bigcup_{i=1}^n (S_i - \{s_{ij}\}) \cup \{s_0\}$, де s_0 - зовнішня грань графа $f'(G)$, причому $\rho_0(\partial s_0) = n - 1$. Звідси випливає рівність:

$$t_G(X) = \sum_{i=1}^n t_{G_i}(X \cap G_i) - n + 1, \text{ що було потрібно довести.}$$

Лема 2.4. Нехай X - скінчена множина точок однозв'язного плоского графа G , $t_G(X) = t$, $t > 1$, $P = \{a_i\}_{i=1}^m$ - множина усіх точок зчленування графа G . Мають місце твердження: 1). Існує φ -перетворення графа $\sum_{k=1}^n G_k$ в граф G що має наступний вид: $\gamma\left(\sum_{k=1}^n G_k, \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_j} a_{ij}\right) = \left(G, \sum_{i=1}^m a_i\right)$, де

$$\sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} = \gamma^{-1}(a_i), \text{ причому } i = 1(1)m, G_k \text{ - 2-зв'язний площинний граф, } k = 1(1)n; 2)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{G_i}(X \cap G_i) - n + 1 \leq t_G(X) \leq \sum_{i=1}^n t_{G_i}(G_i \cap X)$$

Доведення. Нехай X - скінчена множина точок однозв'язного плоского графа G , $t_G(X) = t$, $t > 1$, $P = \{a_i\}_{i=1}^m$ - множина усіх точок зчленування графа G . Доведемо твердження 1). Виконаємо операцію φ , тобто операцію розщеплення всіх точок зчленування графа G і виділимо підграфи G_k графа $\varphi(G)$ так, щоб виконувалися умови:

$$а) \varphi(a_i) = \sum_{k=1}^{k_i} a_{ik}, \text{ де } i = 1(1)n, \text{ б) } \rho_G(a_i) = \sum_{k=1}^{k_i} \rho_{G_k}(a_{ik}), G_k = \varphi^{-1}(G_k), k = 1(1)k_i.$$

Позначимо через M множину $\varphi(G_k) \cap P, k = 1(1)n$. Неважко бачити, що операція φ є зворотною стосовно φ - перетворення з умови твердження І). Твердження І) доведено.

Доведемо твердження 2). Нехай вкладення $f, f : G \rightarrow \sigma$, реалізує $t_G(X)$. За допомогою операції φ^{-1} виконаємо розщеплення всіх точок зчленування графа G й одержимо графа $\varphi^{-1}(G)$, де

$$\varphi^{-1}(G) = \sum_{k=1}^n G_k, \rho_o(G_k) = 1, k = 1(1)n, n \geq 2. \text{ Розглянемо вкладення}$$

$f', f'' := G \rightarrow \sigma, f' = \sum_{k=1}^n (f|_{G_k})\varphi^{-1}, n \geq 2$ і позначимо через s зовнішню грань графа $f'(G)$, де $p_1(\partial s) \geq n-1, s \in \sigma(\varphi^{-1}(G), f')$. Позначимо через X_k підмножину $G_k \cap X$ множина X і покладемо,

що $X_k = \sum_{j=1}^{n_k} X_{kj}$ причому $(f|_{G_k}(X_{kj}) \subset \partial s_{kj}) \wedge (f|_{G_k}(X_k) = \bigcup_{j=1}^{n_k} \partial s_{kj})$, де

$s_{kj} \in \sigma(G, f), j = 1(1)n_k, k = 1(1)n$. Маємо наступне включення: $f(X) \subseteq \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{j=1}^{n_k} \partial s_{kj}$. Звідси випливає, що

$t_G(X) = \sum_{k=1}^n n_k$. Оскільки має місце співвідношення: $P \cap X \neq \emptyset$, те виконується наступне:

$f'(X) \subset \left(\bigcup_{k=1}^n \bigcup_{j=1}^{n_k} \partial s_{kj} \right) \cup \partial s$. Далі, у силу визначення числа $t_{G_k}(X_k), k = 1(1)n$, виконується наступне:

$t_{G_k}(X_k) \leq n_k, k = 1(1)n$, . Тоді виконується:

$$t_G(X) \geq \sum_{k=1}^n n_k - n + 1 \geq \sum_{k=1}^n t_{G_k}(X_k) - n + 1$$

. Відзначимо, що отримана нижня оцінка числа $t_G(X)$ є точною. Для того, щоб переконатися в тім, що це так, досить припустити наступне: для кожного графа

G_k існує вкладення $f_k, f_k : G_k \rightarrow \sigma, k = 1(1)n$, реалізує $t_k, t_k = t_{G_k}(X \cap G_k), f_k(X_k) \subset \bigcup_{j=1}^{t_k} \partial s_{kj}$ й має

властивість: $f_k(\varphi^{-1}(P) \cap G_k) \subset \partial s_{k1}, s_{kj} \in \sigma(G_k, f_k), j = 1(1)n_k, k = 1(1)n$. Отже, отримана нижня

точна оцінка $t_G(X)$. Очевидним є наступна нерівність: $t_G(X) \leq \sum_{k=1}^n t_{G_k}(X_k)$. • У точності верхньої

оцінки числа $t_G(X)$ можна переконатися, якщо вважати, що виконується співвідношення (а): для

кожного G_k не існує вкладення $f_k, f_k : G_k \rightarrow \sigma$, що реалізує $t_k, t_k = t_{G_k}(G_k \cap X)$, де

$f_k(X_k) \subset \bigcup_{j=1}^{t_k} \partial s_{kj}$, і має властивість: $f_k(\varphi^{-1}(P) \cap G_k) \supset \partial s_{k1}$, де

$$f'', f'' = \varphi \left(\sum_{k=1}^n f_k \right),$$

$s_{kj} \in \sigma(G_k, f_k), j = 1(1)n_k, k = 1(1)n$. Тоді маємо вкладення -

$$f'' : \sum_{k=1}^n G_k \rightarrow \sigma,$$

таке, що реалізує $t_G(X), t_G(X) = t'', t'' = \sum_{k=1}^n t_k$. Доведемо, що f'' - реалізує $t_G(X), t_G(X) = t'', t'' = \sum_{k=1}^n t_k$.

Для цього припустимо зворотнє, що при деякому іншому вкладенні $f''', f''' : G \rightarrow \sigma$, що реалізує t''

має місце: $t''' < t''$. Нехай $f'''(X) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n'} \bigcup_{j=1}^{n'_k} \partial s'_{kj}$, де $s'_{kj} \in \sigma(G, f''')$. Розглянемо тепер граф $\varphi^{-1}(f'''(G))$.

В силу зробленого припущення і співвідношення (а) має місце одне з наступних співвідношень: а) або

існує таке $k, k = k'$, що $\varphi^{-1}(f'''|_{G_{k'}})(X_k) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n'_k} \partial s'_{kj}$, причому $n'_k < n_k, s'_{kj} \in \sigma(G_k, \varphi^{-1}(f'''|_{G_k}))$; б)

або для якогось $P', P \subseteq P$, найдуться, щонайменше, дві графи $G_{k_1}, G_{k_2}, k_1 \neq k_2$, задовольняють співвідношенню $(\forall k)(k = k_1, k_2) [\varphi^{-1}(f'''|_{G_k})(\varphi^{-1}(P') \cap G_k^o) \subset \partial S'''_{k_1}]$; в) або обоє співвідношення а), б) разом узяті.

Одержимо протиріччя співвідношенню (а), наше припущення невірне. Отже вкладення f''' реалізує $t_G(X), t_G(X) = \sum_{k=1}^n t_{G_k}(X \cap G_k)$.

Твердження 2) доведено. Доведення закінчено.

Для ілюстрації твердження 2) приведемо приклади 2.1 і 2.2. Без доведення приведемо наступне: у прикладі 2.1 граф G_i , має властивість: $(\forall i)(i = 1(1)4)(t_{G_i}(X \cap G_i) = 4)$,

а в прикладі 2.2 кожен граф G_i , задовольняє рівності: $t_{G_i}(X \cap G_i) = 3$, де $i = 1(1)3$. Доведення цих фактів приведемо нижче.

Приклад 2.1. Нехай: $\varphi\left(\sum_{i=1}^4 G_i, \{a_1 + a_2, b_{21} + b_{31}, c_3 + c_4\}\right) = (G, \{a, b, c\})$,
 $P = \{a, b, c\}, X = \{i\}_1^{16}$.

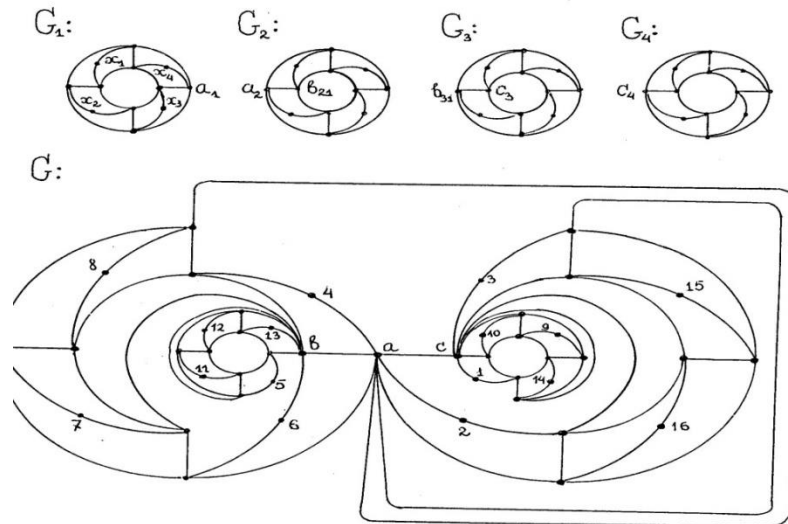
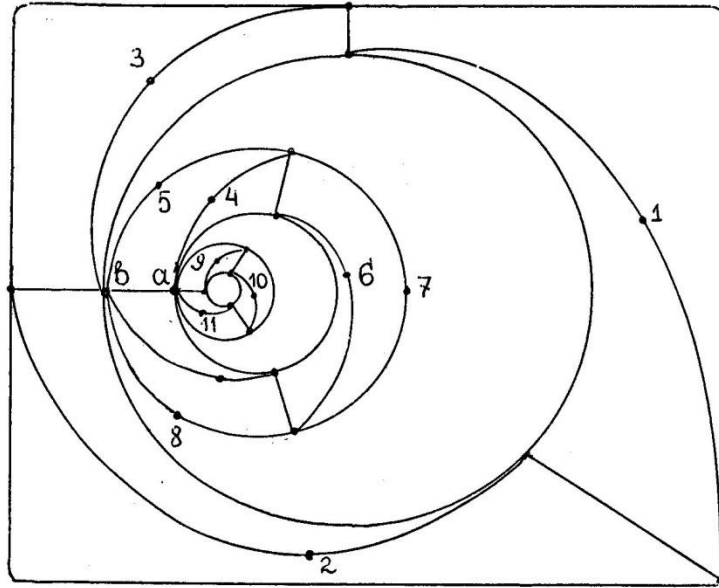
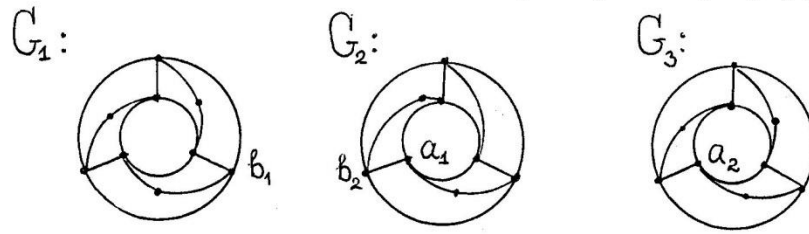


Рис. 7.

Виконується рівність: $t_G(X) = \sum_{i=1}^4 (X \cap G_i^o) - 4 + 1 = 13$.

Приклад 2.2. $\varphi\left(\sum_{i=1}^3 G_i, \{b_1 + b_2, a_1 + a_2\}\right) = (G, (b, a))$;
 $P = \{a, b\}, X = \{i\}_{i=1}^{11}$,



Виконується рівність: $t_G(G^o) = \sum_{i=1}^3 t_G(X \cap G_i) = 9$.

Приведемо деякі наслідки з теореми 2.2.

Наслідок 2.1. Нехай

X - скінчена множина точок плоского однозв'язного графа $G, t_G(X) = t, t > 1, P = \{a_i\}_{i=1}^m$ - множина усіх точок зчленування графа G - і задане φ - перетворення графа $\sum_{k=1}^n G_k$ в графа G , описане у

$$S_{G_k}(X_k) = \{s_{kj}\}_{j=1}^{n_k},$$

твердженні I) леми 2.4, причому

$$X = \sum_{k=1}^n X_k, X_k = G_k \cap X, X_k = \sum_{j=1}^{n_k} X_{kj},$$

де $n_k = t_{G_k}(X_k), k = 1(1)n$.

Для кожної пари $(X_{kj}, X_{k'j'})$, складеної з підмножин множини X , де

$k' \neq k, j \neq j', j' = 1(1)n_k, j = 1(1)n_{k'}, k', k = 1(1)n$, має місце рівність, тоді і тільки тоді, коли $k' = k$ й існує частковий підграф H_{ij} графа G , описаний у визначенні 2.3.

Доведення цього наслідку впливає з леми 2.4 і теореми 2.2, яку можна застосувати для кожного графа G_k , оскільки G_k - двозв'язний граф. Підграф $H_{kjk'j'}$ графа G це той же H_{ij} , тільки індекси $ki, k'j'$ відіграють роль i, j .

Наслідок 2.2. Нехай X - скінчена множина точок площинного незв'язного графа G ,
 $G = \sum_{i=1}^n G_i, \rho_o(G_i) = 1, i = 1(1)n, X_i = G_i \cap X, X_i = \sum_{i=1}^{t_i} X_{ij}, t_i = t_{G_i}(X_i), S_{G_i}(X_i) = \{s_{ij}\}_{j=1}^{t_i}$.

Для кожної пари $(X_{i'j'}, X_{i''j''})$, складеної з різних підмножин X , виконується умова:

$t_G(X_{i'j'} \cup X_{i''j''}) = 2$ тоді і тільки тоді, коли існує частковий підграф $H_{kjk'j'}$ графа G (описаний у визначенні 2.3), причому $i = i'', j' \neq j'', j', j'' = 1(1)t_i, i = 1(1)n$.

Доведення наслідка 2.2 впливає з леми 2.3 і наслідка 2.1, що можливо застосувати до кожного графа G_k оскільки G_k - зв'язний граф. Відзначимо, що підграф $H_{i'j'i''j''}$ графа G суть H_{ij} , тут індекси $i'j', i''j''$ замінюють індекси i, j , відповідно, тобто замість X_i, X_j , виступають, відповідно $X_{i'j'}, X_{i''j''}$. У зв'язку з теоремою 2.2 виникає припущення: Нехай виділене X - скінчена довільна множина точок плоского 2-зв'язного графа G і задане розбиття множини X_i на t окремих непорожніх підмножин X_i ,

тобто $X = \sum_{i=1}^t X_i$, причому Для кожної пари цих підмножин існує підграф H_{ij} , графа G , описаний у визначенні 2.3. Тоді маємо рівність: $t_G(X) = t$. Однак це не так. Побудуємо контрприклад. Нехай

$$X_1 = \{x_{1i}\}_{i=1}^2, X_2 = \{x_{21}\}, X_3 = \{x_{3i}\}_{i=1}^2, X = \sum_{i=1}^3 X_i,$$

де $x_{11} \in (12), x_{21} \in (14), \{x_{32}, x_{12}\} \subset (23), x_{31} \in (34)$. Неважко бачити, що підграфи H_{12}, H_{13}, H_{23} графа G стягаються відносно $X_{H_{ij}}$ до графа $K_4^{(1)}$, де $i < j, i = 1, 2, j = 2, 3$. У силу нашого припущення одержимо, що $t = 3$. З іншої сторони маємо рівність: $t_G(X) = 2$, тому що виконується співвідношенням $X \cap \{(13)\} = \emptyset$. Припущення невірне.

1.2. АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ ЧИСЛА ДОСЯЖНОСТІ СПЕЦІАЛЬНОЇ МНОЖИНИ ТОЧОК 2-ЗВ'ЯЗНОГО ГРАФА

Розглянемо задачу перебування числа досяжності $t_G(X)$ деякої спеціальної множини X - точок плоского 2-зв'язного графа G такого, що при будь-якому вкладенні $f: G \rightarrow \sigma$ ніякі два елементи множини X не належать границі якої-небудь 2-клітки. Згідно визначення цього числа один зі шляхів рішення цієї задачі зводиться до побудови множини всіх неізоморфних вкладень графа G в σ . На підставі наслідку 2.0 теореми 2.2 можна побудувати наступний алгоритм обчислення числа $t_G(X)$:

Крок 0. У графі G виділимо множина M , що складається з усіх його різних підграфів H , що відносно X_H стягаються до одному з графів, описаних у визначенні 2.3.

Крок 1. Вибираємо підмножини M_i множини M , $|M_i|=m$, $M_i = \left\{ H_{k \ k+1}^{(i)} \right\}_{k=1}^{m-1} \cup \left\{ H_{1m}^{(i)} \right\}$,

елементи яких мають ту властивість, що для кожної з інших пар (i', j') , $i' < j'$ існує підграф $H_{i'j'}$

графа G , де $H_{i'j'} \in M_i$, такий, що $H_{i'j'} \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{m-1} H_{k \ k+1}^{(i)} \right) \cup H_{1m}^{(i)}$, причому $H_{i'j'}$ задовольняє визначенню

2.3.

Будемо називати підмножину M_i покриттям довжини m_i , множини X , причому назвемо покриття M_i, M_j різними, якщо $|M_i| \neq |M_j|$.

Крок 2. Побудуємо послідовність M , що складається з усіх різних покриттів множини. Оскільки G скінчений граф і розглядаються різні підграф H , то M скінчена послідовність. Тому можливо упорядкувати елементи послідовності M по убаванню їхньої довжини, а також перенумерувати їх.

Крок 3. Якщо отримана послідовність M має довжину P , то M_P - покриття мінімальної довжини. Тоді виконується рівність: $t_G(X) = |M_P|$.

Опис алгоритму закінчений.

На підставі наслідків 2.1 і 2.2 можливо побудувати аналогічні алгоритми рішення задачі обчислення числа досяжності деякої множини X , що складає з точок однозв'язного графа або незв'язного графа.

Для ілюстрації нашого алгоритму звернемося до прикладів 2.1, 2.2 і знайдемо числа

$t_{G_i}(G_i \cap X)$, $i = 1(1)4$, для кожного приклада. Розглянемо граф G_1 із приклада 2.1. Нехай $X = \{x_i\}_{i=1}^4$. і

задана множина S , $S = \{s_i\}_{i=1}^4$, $X_i = X \cap \partial s_i$, $i = 1(1)4$. Для кожної пари (s_i, s_j) , де $i < j$, $i, j = 1(1)4$

побудуємо H_{ij} - частковий підграф графа G_1 , описаний у визначенні 2.3, що стягається відносно $X_{H_{ij}}$ до графа $K_4^{(1)}$. Неважко переконатися в тім, що при будь-якому вкладенні $f: G_1 \rightarrow \sigma$ для будь-яких

x_i, x_j , де $x_i \neq x_j$, $f(\{x_i, x_j\}) \not\subset \partial s$, $s \in \sigma(G_1, f)$. Дійсно, для будь-якої пари (x_i, x_j) , $i \neq j$, існує підграф

H_{ij} , такий, що $H_{ij} \cong K_4^{(1)}$. Маємо M_1 покриття множини X , де $M_1 = \{H_{12}^{(1)}, H_{14}^{(1)}, H_{23}^{(1)}, H_{34}^{(1)}\}$, причому для

всіх інших пар (i, j) , $i < j$, $i, j = 1(1)4$, існує такий підграф H_{ij} графа G_1 що $H_{ij} = \bigcup_{H \in M_1} H$, де H_{ij}

описаний у визначенні 2.3. Очевидно, що M_1 містить найменше число елементів. Згідно наслідку

2.0 маємо рівність: $t_{G_1}(X \cap G_1) = |M_1| = 4$. Аналогічним образом можна довести, що $t_{G_1}(X \cap G_1) = 3$, де G -граф із приклада 2.2 ,Ілюстрація алгоритму закінчена.

1.3. АЛГОРИТМ ВСТАНОВЛЕННЯ 3-ВЛАСТИВОСТІ ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ

Визначення 3.1. Будемо говорити, що граф G має 3-властивість, якщо має місце нерівність: $t(G^0) \geq 3$. Використовуючи визначення 3-мінімального плоского графа G , а також список таких неізоморфних графів, приведений у додатку 1, одержимо наступну лему 3.1:

Якщо граф G має 3-властивість, то існує частина H графа G гомеоморфна деякому 3-мінімальному графові.

Доведення. Нехай граф G задовольняє нерівності: $t(G^0) \geq 3$. Перетворимо граф G у граф G_1 шляхом видалення всіх його ребер несуттєвих відносно $t(G^0) \geq 3$ т.е. таких ребер u , $u \in G^1$, що задовольняють рівності: $t_{G \setminus u}(G^0) = t(G^0)$.

Можливо, що граф G_1 буде мати ізольовані вершини, що є несуттєвими при визначенні числа $t(G^0_1)$. Очевидно, що граф G_1 задовольняє наступному співвідношенню:

$$(\forall u \in G^1)(t_{G \setminus u}(G^0) = 2)$$

З визначення 1.3 випливає, що граф G_1 гомеоморфний 3-мінімальному графові. Для того, щоб одержати з графа G_1 3-мінімальний граф варто виконати операцію

отождження кожної вершини a , де $a \in M$, де $M = \{ \forall a / t_{G_1 \setminus \{a\}} = 3 \}$, або з однієї із суміжних вершин множини M , або з множини $G_1 \setminus M$. Що було потрібно довести. Доведення леми закінчено.

Має місце наступна *теорема 3.0.1*:

Граф G має 3-властивість тоді і тільки тоді, коли існує частина графа G гомеоморфна 3-мінімальному графу.

Доведення. Якщо граф G має 3-властивість, то в силу леми 3.1 маєтья частина графа G гомеоморфна деякому 3-мінімальному графові, з числа приведених у додатку 2. Якщо граф G містить частина H гомеоморфну 3-мінімальному графові, то в силу нерівності: $t_G(G^0) \geq t_H(H^0)$ одержимо, що граф G має 3-властивість. Що було потрібно довести. Доведення теореми закінчено.

У зв'язку з цим виникає задача побудови алгоритму для встановлення 3-властивості вхідного графа G за поліноміальний час. Мають місце наступні леми.

Лема 3.2. Якщо існує простий ланцюг $C, C = C_G^m(a, b), m \geq 2, (a, b) \notin G^1$, такий, що

$$(\forall v)(v \in C^0 \setminus \{a, b\}) [(\rho_G(v) = 2) \wedge (\rho_G(a) \geq \rho_G(b) > 2) \wedge (w(G) > 1)]$$

те є простий цикл $Z, \{a, b\} \subset Z^0$, де $Z^0 = \{z_i\}_{i=1}^n$, $G_1 = (G^0, G^1 \setminus C^1), n > 3$ такий, що підграф $G[zUC]$ містить частину гомеоморфну графові $K_{2,3}$.

Лема 3.3. Нехай $a_0 \in G^0, \rho_G(a_0) = n, St_G(a_0)$ - зірка графа G з центром у вершині a_0 , де $St_G^0(a_0) = \{a_i\}_{i=0}^n$, а ребра-промені можуть бути 1-підрозділені вершинами ступеня 2, $S_1 = \{a_i\}_{i=1}^n, \rho_G(a_i) > 2, i = 1(1)n$

Якщо має місце співвідношення: $(\rho_G(a_0) = n) \wedge (\omega(G \setminus St_G^1(a_0)) > 1)$, то існує такий простий цикл Z графа G , де $|z^0| = m, S_1 \supset z^0$ що підграф $G[z^0 U St_G^0(a^0)]$, або гомеоморфний графу K_4 , або містить частина гомеоморфну графові K_4 . Доведення цих лем 3.2, 3.3 очевидно. Відмітимо, що описаний у їхніх умовах підграф $G[z^0]$ - простий цикл довжини $|z^0|$ з можливими діагоналями.

Позначення 3.2. Через M_i позначимо найбільше по включенню множина $\{z_{ij}\}_{j=1}^{|M_i|}$ усіх різних простих циклів Z_{ij} графа G , описаних у лемі 3. $i+1$, де $i=1,2$, і задовольняючим умовам:

$$1). (\forall j)(j) = 1(1)|M_i| \left(z_{ij} \notin \bigcup_{\substack{j \neq j \\ j=1}}^{|M_i|} \right);$$

$$2). \left(\bigcup_{j=1}^{|M_1|} z_{ij}^1 \cap \bigcup_{j=1}^{|M_2|} St_G^1(v_j) \right) = \emptyset,$$

де $St_G(v_j)$ - зірка графа G з центром у крапці v_j , зв'язана з z_{2j} і описана в лемі 3.3. Позначимо через O_n φ - образ графа $St(v) + z$, де $z^0 = \{z_i\}_{i=1}^n, z$ - простий цикл довжини n , $St_G(v) = \{v\} \cup \{v_i\}_{i=1}^n$, якщо φ - перетворення задане в такий спосіб:

$$\varphi \left(z + St(v), \sum_{i=1}^n (z_1 + v_i) \right) = (O_n, \{z_i\}_{i=1}^n),$$

і назвемо граф O_n - колесом з n -спицями.

Лема 3.4. Якщо M_i - множина, описана в позначенні 3.2, таке, що $\sum_{i=1}^2 |M_i| = k$, то має місце нерівність: $t_G(G^0) \geq k$.

Доведення. В силу прийнятого вище позначення 3.2 маємо, що з кожним елементом множини, M_i описаного в позначенні 3.2, зв'язана однозначним образом деяка частина графа G або його підграф гомеоморфний графові K_4 або графові $K_{2,3}$. Якщо $\sum_{i=1}^2 |M_i| = k$, то в G існуватиме k - штук таких частин графа G , які не мають один з одним спільних простих циклів гомеоморфних, або графу K_4 , або графу $K_{2,3}$. Кожний із графів $K_4, K_{2,3}$ має число досяжності множини вершин більше k , тому $t_G(G^0)$ - число досяжності графа G задовольняє нерівності: $t_G(G^0) \geq k$..Доведення леми 3.4 закінчено.

Лема 3.5. . Нехай $H_i \subset G, H_i \cong O$ або $H_i \cong K_{2,3}$, де $i = 1,2, \dots, n > 2$. Якщо має місце співвідношення: $\left(\sum_{i=1}^2 |M_i| = 2 \right) \wedge \left(w \left(\bigcup_{i=1}^2 H_i \right) > 0 \right)$, то існує не більш одного простого ланцюга Z ,

$C = C_G^k(a, b)$, довжини до 2 , де $(a, b) \notin G^1$, $\{a, b\} \subset \bigcup_{i=1}^2 H_i$, такий, що задовольняє умові:
 $C^1 \cap \left(\bigcup_{i=1}^2 H_i^1 \right) = \emptyset$.

Доведення. Нехай $\sum_{i=1}^2 |M_i| = 2$, $\{H_i\}_{i=1}^2$ множина підграфів графа G або його частин гомеоморфних або $K_{2,3}$ або K_4 , кожний з H_i містить точно один простий цикл, що є елементом одного з множин M_i , $i=1,2$. . Покладемо, що $\bigcup_{i=1}^2 H_i$ - зв'язний граф. Для Доведення використовуємо метод від противного . Припустимо, що існує множина $\{C_j\}_{j=1}^m$, де $m > 1$, що складається з простих ланцюгів C_j , $C_j = C_G^{m_j}(a_j, b_j)$ де $m_j \geq 2$ для всіх $j, j=1(1)m$, $\{a_j, b_j\}_{j=1}^m \subset \bigcup_{i=1}^2 H_i^0$, таких, що задовольняють співвідношенню:

$$\left(G^1 \cap \{(a_j, b_j)\}_{j=1}^m = \emptyset \right) \wedge \left(\bigcup_{j=1}^m C_j^1 \cap \bigcup_{i=2}^2 H_i^1 = \emptyset \right)$$

Тоді існує простий цикл Z графа G , що містить одну з простих ланцюгів C_j , нехай $j=1$, а також простий ланцюг Z , $C = C_G(a_1, b_1)$, таку, що

$$\{a_2, b_2\} \subset C^0 \wedge \left(C \subset \bigcup_{i=1}^2 z_i \right)$$

Неважко бачити, що $G[z^0] \cup C_2$ - підграф графа G - або його частина гомеоморфна $DO_{2,3}$. Це означає, що $z \in M_1$. Тим самим одержимо протиріччя умові, що $\sum_{i=1}^2 |M_i| = 2$

Припущення невірне. Отже існує не більш одного простого ланцюга C , описаної в умові леми. Доведення закінчений.

Алгоритм ДО4 матиме наступний вигляд:

0) $H_2 := \emptyset, Z := \emptyset, F := \emptyset$;

1) Вибираємо вершину v , так, щоб існувала зірка $St_G^n(v)$ графа G з центром в v и n ребрами, $n > 2$, (можливо, що деякі з них виявляться 1-підрозділеними), така, що $w(G \setminus (St_G^n(v))^1 \setminus \{v\}) > 1$. Якщо такої вершини немає, то переходимо до мітки 4).

2) Знайдемо вершини простого циклу $z, z = z^n$, у такий спосіб:

а) вибираємо $c, c \in M$, де $M = G^0 \setminus (St_G(v) \cup Z)$;

в) $F := F + (cv)$

Якщо $\gamma(F) = 0$, то: заносимо вершину C в список Z ,

$M := M \setminus Z$ переходимо до мітки а);

Якщо $\gamma(F) > 0$, то: $M := M \setminus \{c\}$

Інакше, якщо $M = \emptyset$, то переходимо до мітки 3)

інакше переходимо до мітки а).

з) $z^0 = Z \cup S_1$

де S - множина кінцевих вершин зірки $St_G(v)$, відмінних від v і ступені, що має, більше 2. Тут $G[z^0]$ - простий цикл довжини $m, m = |Z| + n$, (можливі діагоналі циклу не розглядаємо).

$$H_2 := G[z^0] \cup St_G^n(v)$$

4) Якщо $H_2 := \emptyset$ то видаємо "НІ", інакше $H_2 = G[z^0] \cup St_G^{n(v)}$

Кінець роботи.

Алгоритм ДО23

0) $H_2 := \emptyset, Z := \emptyset, F := \emptyset$;

1) Вибираємо ланцюг C , що задовольняє умові леми 3.2, де $C = C_G(a, b)$, $(ab) \notin G^1$. Якщо такий ні, то переходимо до мітки 4).

2) Знайдемо вершини простого циклу $z, z = z^n$, у такий спосіб:

а) вибираємо вершину $g, g \in C^0 \setminus \{a, b\}$;

б) вибираємо вершину $c, c \in G^0 \setminus (C^0 \cup Z)$;

в) $F := F + (gc)$

якщо $\gamma(F) = 0$, те $c \rightarrow Z$ тобто заносимо c в список Z , переходимо до мітки б);

якщо $\gamma(F) > 0$, то $G^0 := G^0 \setminus (\{c\} \cup C^0 \cup Z)$,

якщо $|G^0| = 0$, те переходимо до мітки 3);

інакше: переходимо до мітки б).

3) $z^0 = Z \cup \{a, b\}$,

де a, b - кінцеві вершини ланцюга $C, G[z^0]$ простий цикл довжини n , без діагоналей $n = |Z| + 2$, (можливі діагоналі цього циклу відкинемо). Якщо $n > 3$, то

$H_1 := G[z^0] \cup C$, видаємо відповідь: " $H_1 = H_1$ "; переходимо до мітки кінець. Інакше:

4) Видаємо відповідь "НІ". Кінець роботи.

Теорема 3.1. Алгоритми ДО4, ДО23 є коректними і мають поліноміальну складність.

Доведення. Незавжди бачити, що в основі алгоритмів ДО4, ДО23 лежить перевірка наявності властивостей 2-связності або площинності вхідного графа F . Властивість 2-связності вхідного графа F можна знайти за $O(|F^0|)$ операцій за допомогою алгоритму, описаного в роботі [27], а властивість планарності можна знайти за $O(|F^0|)$ операцій за допомогою алгоритму, описаного в роботі [28], де $|F^0| = |G^0|$. Доведення теореми закінчене. Обчислимо $K, K = \sum_{i=1}^2 |M_i|$

Алгоритм А. //

о) $M_i := \emptyset, F := G$,

$Z := \emptyset, K := 0$ / для результату /

$i := 0$;

1) $i := i + 1, v := v_i$, де $\{v_i\}_{i=1}^{|F|} = F^0 \setminus Z$;

Якщо $|F \setminus Z| = 0$, то переходимо до мітки 4).

1.а) чи є зірка $St_F(v)$ графа F з центром в v і n -ребрами, де $n = \rho_1(v)$, що можливо і-підрозділені, така, що H_2 , де $H_2 = St_F(v) \cup z$, містить частина графа G гомеоморфну графові O_n (використовуємо алгоритм ДО4).

Якщо "є", то: $v \rightarrow Z$,

$z \rightarrow M_2$

$F := G \setminus (St^0(v) \setminus S)$

перехід до мітки 2); де S_1 - множина усіх кінцевих вершин зірки $St_F(v)$;

Інакше:

1.б) за допомогою алгоритму ДО23 перевіримо існування простого ланцюга $C, C = C_G(a, b)$, де $(a, b) \notin G^1$, такий, що $v \in C^0 \setminus \{a, b\}$, де підграф $H, H = C \cup z$ -містить частина гомеоморфную ДО_{2,3}.

Якщо "є" то: $v \rightarrow Z$,

$F := G \setminus (C \setminus \{a, b\})$,

$z \rightarrow M_1$;

переходимо до мітки 2). Інакше переходимо до мітки кінець).

2) $j := j + 1$;

$uj \in F^0 \setminus Z$; Якщо $|F^0 \setminus Z| = 0$, то переходимо до мітки 4).

2.а) За допомогою алгоритму ДО4 визначимо чи немає підграфа H_2 , графа F або його частини H_2 , де $H_2 = St_F(u_j) \cup z$ гомеоморфної $O_n, n = \rho_F(u_j), n > 2$.

Якщо "є", то:

$u_j \in Z; F := F \setminus (St_F(u_j) \setminus S_1); z \rightarrow M$; перехід до мітки 2);

Інакше

крок 2.6): Перевіримо за допомогою алгоритму ДО23 наявність підграфа H_1 графа F гомеоморфного графові $K_{2,3}$ де $H_1 = z \cup C, C = C_F(a, b), u_j \in C^0 \setminus \{a, b\}$.

Якщо є, то переходимо до мітки 2).

Інакше: $i^* = 1, K := 0$, перехід до мітки 3).

3) $K := K + 1$;

Якщо $K > |M_i|$, те переходимо до 4).

Інакше перевіримо чи є такі $z_k, z_{k^*} \in M_i$ що $z_k \subset \bigcup_{\substack{j \neq k^* \\ j=1}}^{m^*} Z_j, m^* = |M_i|$.

Якщо "є", то $M_i := M_i \setminus \{z_k\}$, переходимо до мітки 3).

Інакше переходимо до мітки 4).

4) Якщо $i = 1$, то $K = \sum_{i=1}^2 |M_i|$; переходимо до мітки 1).

Якщо $(1 < i < |G^0|) \wedge \left(\sum_{i=1}^2 |M_i| > K \right)$, то $K := \sum_{i=1}^2 |M_i|$; переходимо до мітки I). Кінець. Видаємо К. Кінець роботи.

Теорема А. Алгоритм А коректний і має поліноміальну складність для До задовольняючої нерівності: $0 \leq K \leq 3$.

1.4. ІДЕНТИЧНІСТЬ НЕЦИЛІНДРИЧНИХ ГРАФІВ 3-МІНІМАЛЬНИМ ПЛОЩИННИМ ГРАФАМ

Розглянемо скінчений простий граф $G, G=(G^0, G^1)$, де G^0 - множина вершин, а G^1 - множина ребер, без кратних ребер та без петель та його 2-кліткове мінімальне вкладення у орієнтовний замкнутий 2-многовид Ω із ейлеровою характеристикою $\chi(\Omega), \chi(\Omega)=2-2\gamma$, де γ - рід графа G . Позначення та визначення ϕ -перетворення графів узяті із [1]. Основний результат по 3-мінімальним графам, а саме їх характеристизація методом ϕ -перетворення графів, наведено в [3], список із 34-х 3-мінімальних графів приведено в [4]. В [2] досліджувалися циліндричні графи з точки зору їхньої зовнішньопланарності та було отримано повний список із 38-ми графів якими, як мінорами, охарактеризовані нециліндричні графи.

Позначення 1. Згідно [3] будемо розуміти під 3-мінімальним графом G такий площинний, що матиме наступні властивості: 1) щонайменше три 2-клітини на границях яких розташовані всі вершини графа G , 2) видалення довільного ребра чи стискання в точку цього ребра призводить до порушення властивості 1).

Позначення 2. Згідно [2] будемо розуміти під нециліндричним графом такий площинний граф HCG , що матиме більше двох 2-клітин на границях яких розташовані всі вершини графа HCG , причому видалення довільного ребра графа HCG чи стискання в точку цього ребра призводить до розміщення всіх вершин графа на границях двох 2-клітин.

Розглянемо питання ідентичності нециліндричних та 3-мінімальних площинних графів та порівняємо графи із наведених списків на рис. 1 та рис. 2 із списком [2] та модифікований алгоритм побудови всіх 3-мінімальних площинних графів. Історія проблеми. В [5] присутній короткий огляд робіт по цій задачі та подібним задачам відшукування списків графів котрі б відігравали роль заборонених (із точністю до гомеоморфізму) підграфів для входних графів, яких перевіряють на наявність властивості аналогічної “зовнішньої площинності” для деяких поверхонь.

Результат щодо еквівалентності нециліндричних та 3-мінімальних площинних графів, теорема 1 про характеристизацію 3-мінімальних площинних графів та модифікований алгоритм побудови всіх 3-мінімальних площинних графів наведено в твердженні 1.

Твердження 1. Будемо використовувати порядкову нумерацію числами 1,2,3,...,34 графів на рис. 1 і рис. 2, а для графів із списку [2] збережемо нумерацію. Маємо наступні співвідношення для площинних графів:

0) Графи нециліндричні та 3-мінімальних еквівалентні між собою;

1) Всі графи із списку [4] є в списку [2];

2) Відсутніми в списку [4] є графи $\theta_6, \theta_7, K_5, K_{3,3}$.

Доведення. Доведення 0) співвідношення випливає із позначень 1 та 2.

Розглянемо питання модифікації алгоритма [] побудови 3-мінімальних площинних графів в основі якого лежав неточний результат по характеристизації площинних графів із усіма суттєвими ребрами відносно числа досяжності множини вершин, що дорівнює 3, при операції видалення довільного ребра. Основна ідея полягатиме в тому, що такі графи матимуть не менше одного підграфа гомеоморфного графам $K_{2,3}, K_4$ та не більше трьох

таких підграфів; потрібно визначити характер та можливі варіанти зв'язання їх між собою.

Теорема 1. Нехай G зв'язний площинний граф із наступною властивістю:

$(\forall u)(u \in G^1)(t_{G \setminus u}(G^0) = t_G(G^0) - 1 = 2)$. Тоді виконується одне із наступних тверджень:

1) $G = K_4'$, де K_4' - граф K_4 , у якого кожне ребро 1- підрозділене;

2) Існує φ -перетворення графа $\sum_{i=1}^2 G_i$ в граф G визначене наступним чином:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^2 G_i, \sum_{j=1}^n (y_{1j} + y_{2j})\right) \rightarrow (G, \{y_j\}_{j=1}^n),$$

•

та яке задовольняє наступним умовам:

а) $(\forall i, i=1,2)[(G_i \neq K_4') \wedge ((G_i \cong K_{2,3}) \vee (G_i \approx K_4))]$;

б) $G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n) = C_{G_i}^{n-1}(y_{i1}, y_{in})$ - простий ланцюг довжини $n-1$, графа G_i , де $y_{i1} \neq y_{in}$,

$$\{y_{ij}\}_{j=1}^n \subset G_i^0 \cup G_i^1, \quad i=1,2 \quad (\text{при } n=0 \text{ простий ланцюг вироджується в точку } y_{i1});$$

в) $G(\{y_i\}_{j=1}^n)$ - простий ланцюг графа G довжини $n-1$ (при $n=0$ простий ланцюг вироджується в точку y_1);

3) Існує φ -перетворення графа $G_0 + G_3$ в G задане наступним чином:

$$\varphi(G_0 + G_3, \sum_{j=1}^n (Z_{0j} + Z_{3j})) \rightarrow (G, \{Z_j\}_{j=1}^n)$$

•

та яке задовольняє наступним умовам::

а) G_0 - φ -образ графа $\sum_{i=1}^2 G_i$, вписаний як у твердженні 2) цієї теореми;

б) $G_3 \approx K_{2,3}$; $G_0(\{Z_{0j}\}_{j=1}^n)$ - цикл довжини n (можливо із діагоналями), графа G_0 (можливо, це границя зовнішньої грані графа) $f(G_0)$, де $f|G_0: G_0 \rightarrow \sigma$ є вкладенням, що реалізує $t_{G_0}(G_0^0)$,
 $\{Z_j\}_{j=1}^n \subset G_0^0 \cup G_0^1$;

в) $G_3(\{Z_{3j}\}_{j=1}^n)$ - простий цикл графа G_3 , можливо із діагоналями.

4) Існує φ -перетворення графа $\sum_{i=1}^2 G_i$ в граф G визначене наступним чином:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^2 G_i, \sum_{j=1}^n (y_{1j} + y_{2j}) + (y_{1j}^{\bullet} + y_{2j}^{\bullet})\right) \rightarrow (G, \{y_j\}_{j=1}^n \cup \{y^{\bullet}\}),$$

•

та яке задовольняє наступним

умовам: а) $(\forall i, i=1,2)[(G_i \neq K_4') \wedge ((G_i \cong K_{2,3}) \vee (G_i \approx K_4))]$;

б) $G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n) = C_{G_i}^{n-1}(y_{i1}, y_{in}) + y_{i1}^\bullet$ - простий ланцюг довжини $n - 1$ графа G_i об'єднаний із ізольованою точкою y_{i1}^\bullet графа G_i , яка не належить до підграфа $G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n) = C_{G_i}^{n-1}(y_{i1}, y_{in})$, де $y_{i1} \neq y_{in}$, $\{y_{ij}\}_{j=1}^n \subset G_i^0 \cup G_i^1$, $i = 1, 2$ (при $n = 0$ простий ланцюг вироджується в точку y_{i1} , причому $y_{i1}^\bullet = y_{i1}$);

в) $G(\{y_j\}_{j=1}^n)$ - простий ланцюг графа G довжини $n - 1$ об'єднаний із ізольованою точкою y_1^\bullet , що не належить до підграфа $\varphi(G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n))$ (при $n = 0$ простий ланцюг вироджується в точку y_1);

Доведення. Нехай G - зв'язний площинний граф із усіма суттєвими ребрами відносно числа досяжності множини вершин, що дорівнює 3, при операції видалення довільного ребра і задано вкладення $f, f: G \rightarrow \sigma$, яке реалізує $t_G(G^0), t_G(G^0) = t = 3$, $S_G(G^0) = \{s_i\}_{i=1}^3$ - множина 2-клітин на границі яких виходять всі вершини графа G .

Будемо позначати через $M(G)$ множину усіх різних підграфів H графа G , побудованих

для кожної пари (s_i, s_j) , де $i \neq j$, 2-клітин з множини $S_G(G^0)$ як найменша по включенню частина H_{ij} графа G , яка задовольняє співвідношенню(*):

$$\left[(G^0 \cap ds_i \subset H_{ij}^0) \wedge (H_{ij}^0 \cap (ds_j - ds_i) \neq \emptyset) \right] \vee \left[(G^0 \cap ds_j \subset H_{ij}^0) \wedge (H_{ij}^0 \cap (ds_i - ds_j) \neq \emptyset) \right] \wedge (H_{ij} \cong K_4) \vee (H_{ij} \cong K_{2,3}).$$

Через $M'(G)$ - найменше по включенню підмножина множини $M(G)$, що складається із найменших по включенню підграфів H_{ij} графа G , або частин цих підграфів, що задовольняють наступним умовам: а) $G^0 \subseteq \bigcup_{\forall H' \in M(G)} (H')^0$; б) Якщо підграф H_{ij} (або його частина) гомеоморфні графові K_4 у якого,

або усі ребра графа 1-підрозділені, або жодне ребро графа K_4 не 1-підрозділено. Надалі, якщо не зроблені застереження, будемо вважати що, відносно елементів множини M' термін «підграф» графа G , не виключає того, що цей елемент може бути частиною графа G . Наприклад, розглянемо наступне вкладення графа G в площину σ : (рис. 1)

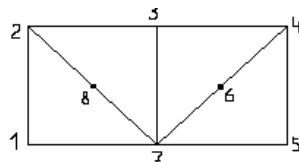


Рис 3. Приклад графа для побудови множини М.

та виділимо дві множини $S_i = \{s_{ij}\}_{j=1}^3, i = 1, 2$, а саме

а) $ds_{11} = \{1, 2, 7, 8\}$, $ds_{12} = \{2, 3, 7, 8\}$, $ds_{13} = \{4, 5, 6, 7\}$;

б) $ds_{21} = \{1, 2, 7, 8\}$, $ds_{22} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $ds_{23} = ds_{13}$.

Для кожного з них побудуємо множину $M_i, M_i = M(G)$:

$$H_{12}^0 = \{1,2,3,7,8\}, H_{21} = \{1,2,7,8\}, H_{23}^0 = H_{32}^0; (H_{13}^0)' = \{1,2,6,7,8\}, (H_{13}^0)'' = \{1,2,4,7,8\},$$

$$(H_{13}^0)''' = \{1,2,5,7,8\}, H_{13}^0 \in \{(H_{13}^0)', (H_{13}^0)'', (H_{13}^0)'''\}, H_{32}^0 = \{3,4,5,6,7\}, H_{31}^0 = \{1,4,5,6,7\},$$

$$M(G) = \{H_{12}, H_{13}', H_{13}'', H_{13}''', H_{21}, H_{31}, H_{32}\}; H_{12}^0 = \{1,2,7,8,3\}, H_{13}^0 = \{1,2,8,7,6,4,3\}, H_{21}^0 = H_{12}^0,$$

$$H_{23}^0 = \{1,2,3,4,5,7,6\}, H_{32}^0 = \{4,5,6,7,3\}, M(G) = \{H_{12}, H_{13}, H_{23}, H_{32}\}.$$

Неважко переконається в тім, що приведені вище множини а) і б) вичерпують усі неізоморфні множини $S_G(G^0)$, тобто в результаті $M'(G) = \{H_{12}, H_{32}\}$.

Доведемо твердження 1). Так як граф K_4' є графом K_4 із всіма 1-підрозділеними ребрами та матиме властивість: $(\forall u)(u \in (K_4')^1)[(t_{K_4' \setminus u}((K_4')^0) = 2) \wedge (t_{K_4'}((K_4')^0) = 3)]$,

то матимемо включення: $K_4' \subset G$. З іншого боку, якщо $K_4' \subset G$, то знайдеться ребро $u, u \in G \setminus K_4'$. Твердження 1 доведено.

Нехай граф G неізоморфний графу K_4' . Наступні два випадки є можливими: м) $|M| = m$, де $m = 2, 3$. Нехай має місце випадок 2). Припустимо, що має місце рівність $M = \{H_i\}_{i=1}^2$. В силу площинності графа G маємо три варіанти φ -перетворення (склеювання) двох графів з множини M визначених одним із трьох варіантів: 1) по двом простим ланцюгам, 2) по двом різним парам простих ланцюгів, 3) по двом простим циклам.

Перший варіант назвемо лінійним по простому ланцюгові, другий нелінійним- по двом простим ланцюгам, третій по-простому циклу.

Доведемо твердження 2). Маємо наступні два варіанти φ -перетворення (склеювання) двох підграфів з множини M :

1) по двом простим ланцюгам, 2) по двом різним парам простих ланцюгів.

Тобто матимемо наступне співвідношення: $G[\bigcap_{i=1}^2 H_i] = \sum_{j=1}^n C_G^{n_j}(a_j, b_j)$ (б1),

де $n \geq 0, n_j \geq 0$ (можливо, що $n_j = 0$, тоді простий ланцюг вироджується в точку a_j). Оскільки

$G \neq K_4'$, то із співвідношення б1) слідує існування φ -перетворення графа $\sum_{i=1}^2 H_i$ в граф G , заданого наступним чином:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^2 H_i, \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n_i+1} C_{1ij} + C_{2ij}\right)\right) \rightarrow (G, \{\{a_{ij}^*\}_{j=1}^{n_i}\}_{i=1}^n), \quad (A)$$

де $C_{H_k}^{n_i}(a_{k1}, a_{k(n_i+1)})$ - простий ланцюг підграфа H_k довжини n_i з кінцевими вершинами a_{ki1} , $a_{ki(n_i+1)}$, де $i = 1(1)n$, $k = 1, 2$. Відзначимо, що множина $\{a_{kij}\}_{j=1}^{n_i+1}$

складається із вершин графа H_k та із внутрішніх точок его рёбер, $\{a_{ij}^*\}_{j=1}^{n_i+1}$ - множина вершин простого ланцюга $C_G^{n_i}(a_{i1}^*, a_{i(n_i+1)}^*)$ графа G із кінцевими вершинами a_{i1}^* , $a_{i(n_i+1)}^*$, такими що $\varphi(a_{1ij} + a_{2ij}) = a_{ij}^*$, $j = 1(1)n_i$, $i = 1(1)n$.

Для $n = 1$ має місце варіант 1) і твердження 2) в цьому випадку доведене.

Для $n = 2$ маємо варіант 2). Доведемо, праву частину наступною подвійної нерівності

$0 \leq p_1(L(\sum_{i=1}^2 H_i, G)) \leq 1$, бо ліва частина є тривіальною. Для цього використаємо метод доведення від

зворотнього. Припустимо, що для графа L φ -перетворення графа $\sum_{i=1}^2 H_i$ в граф G , заданого в (А),

де $L = L(\sum_{i=1}^2 H_i, G)$, виконується нерівність: $p_1(L) > 1$. Тоді граф L матиме, принаймні, два простих

цикли, кожен з яких означатиме виконання заданих в твердженні 2) φ -перетворень на точках щонайменше трьох різних пар простих ланцюгів без спільних точок, перші елементи кожної пари належатимуть простому циклу z графа H_1 , а другі елементи кожної пари належатимуть простому

циклу z' графа H_2 . В результаті в 2-клітці s , де $s \in (\sigma \setminus f|_G(H_1)) \setminus \{s_1\}$, з границею z буде

вкладено граф $f|_G(H_2)$ де вкладення $f, f: G \rightarrow \sigma$, реалізує $t_G(G^0)$, та утворено, принаймні, три нових 2-клітки з границями- простими циклами z_i , $i = 1(1)3$, які не можуть всі разом бути границями двох 2-кліток s_j , де $S_G(G^0) = \{s_j\}_{j=1}^3$, $j = 2, 3$.

Це означатиме що, принаймні одне ребро графа G , яке належить одному з циклів z_i не належатиме перетину двох 2-кліток s_j , s_i , які належать до множини $S_G(G^0)$, тобто будуть несуттєвими відносно $t_G(G^0)$ при операції його видалення. Тим самим матимемо суперечність умові 3-мінімальності графа G . Оскільки наше припущення є невірним, то маємо нерівність $p_1(L) \leq 1$, що й доводить подвійну нерівність. Оскільки в твердженні 2) маємо перетворення на одній парі простих ланцюгів, то доведення закінчено.

Доведемо твердження 3). Покладемо, що $M = \{H_i\}_{i=1}^3$. Для φ -перетворення графа $\sum_{i=1}^3 H_i$ в граф G можливі тільки наступні два типи:

а) φ перетворення типу (А), задане так само, як і φ - перетворення графа $\sum_{i=1}^3 H_i$ в граф G , тобто на ребрах (або частинах ребер) графів $H_i, i = 1(1)3$, має ту властивість, що φ - образ графа $\sum_{i=1}^2 H_i$ має принаймні одне ребро несуттєвим відносно $t_G(G^0)$. Причому ця властивість буде

незалежно від того, має чи ні граф $L(\sum_{i=1}^3 H_i, G)$ цикли;

б). φ - перетворення не типа (А) графа $\sum_{i=1}^3 H_i$ в граф G , т.то задане так, що деякі φ -образи графів H_i мають спільні прості цикли. Кожна пара φ -образів цих графів H_i, H_j множини $M'(G)$ може мати не більше одного спільного простого цикла. Тоді мають місце наступні твердження, зформульовані з точністю до перенумерації елементів множини $M'(G)$:

1) Існують елементи $\varphi(H_i), i = 1, 2$ множини $M'(G)$ із спільним циклом та гомеоморфні графу $K_{2,3}$, які не мають спільних простих циклів з елементом $\varphi(H_3)$;

2) Елементи $\varphi(H_i), i = 1, 2$, не мають спільних простих циклов, а елемент $\varphi(H_3)$, гомео-морфний $K_{2,3}$ має спільний простий цикл з елементом $\varphi(\sum_{i=1}^2 H_i)$. Твердження 3) доведено. Доведемо

твердження 4). Доведення впливатиме як частинний випадок із наведеного вище доведення твердження 2) та відрізнятиметься в тій частині, що стосується необхідної умови виродженості в точку простих ланцюгів другої пари. Доведення теореми закінчено.

Алгоритм для побудови всіх 3-мінмальних площинних графів спирається на теорему 1 та матиме наступний вигляд:

Вхідні дані: Множина \mathcal{L}_1 усіх неізоморфних ланцюгів графів для кожного з графів $K_4, K_{2,3}$, впорядкована за їхньою довжиною та із позначкою для якої саме пари графів узятий ланцюг;

Вихідні дані: множина всіх 3-мінімальних графів G ;

1. Будуємо множину \mathcal{L}_2 із всіх різних пар ланцюгів множини \mathcal{L}_1 та множину \mathcal{L}_3 з усіх різних двох пар ланцюгів із \mathcal{L}_1 , а також множину \mathcal{L}_4 складену із різних пар тих елементів множини \mathcal{L}_1 , які породжують в графах K_4 чи $K_{2,3}$ прості цикли без діагоналей;

2. Доки множина \mathcal{L}_1 не пуста виконувати наступні дії:

2.0. Беремо елемент x із \mathcal{L}_1 , заносимо елемент x до списку V_1 ;

2.1. $\mathcal{L}_1 := \mathcal{L}_1 \setminus x$; 2.2. Доки множина $\mathcal{L}_1 \setminus V_1$ не пуста виконувати наступні дії:

2.2.1. Беремо елемент u із $\mathcal{L}_1 \setminus (V_1 + V_2)$, заносимо елемент u до списку V_2 ;

2.2.2. Виконуємо отожднення пар вершин чи точок пар графів (K_4, K_4) , чи $(K_4, K_{2,3})$, чи $(K_{2,3}, K_4)$, чи $(K_{2,3}, K_{2,3})$, зазначених як вершини чи точки ланцюгів пари (x, u) , по всім типам можливих перетворень вибраної пари графів та отримуємо граф G ;

2.2.3. Визначимо число досяжності t множини всіх вершин графа G як мінімальне число простих циклів що покривають множину всіх вершин графа G .

2.2.4 Якщо $t=3$, то виконати: для кожного ребра e графа G виконаємо в циклі операцію стягування в точку та для отриманого графа G_e , де $G:=G_e$, виконуємо процедуру 2.2.3; Якщо $t=3$ то виконати кінець цикла по ребрам графа G , інакше виводимо граф G ; інакше кінець цикла по ребрам; інакше кінець внутрішнього циклу;

2.3. Кінець внутрішнього циклу; 3. Кінець зовнішнього циклу;

4. Доки множина L_2 непушта виконувати наступні дії:

4.0. Беремо елемент x із L_2 , заносимо елемент x до списку V_3 ;

4.1. $L_2:=L_2 \setminus x$; 4.2. Доки множина $L_2 \setminus V_2$ непушта виконувати наступні дії:

4.2.1. Беремо елемент u із $L_2 \setminus (V_3 + V_4)$, заносимо елемент u до списку V_4 ;

4.2.2. Виконуємо ототожнення пар вершин чи точок пар графів (K_4, K_4) , чи $(K_4, K_{2,3})$, чи $(K_{2,3}, K_4)$, чи $(K_{2,3}, K_{2,3})$, зазначених як вершини чи точки двох різних пар ланцюгів x та u , здійснені по всім типам можливих ϕ -перетворень для обраної пари графів та отримаємо граф G ;

4.2.3. Визначимо число досяжності t множини всіх вершин графа G як мінімальне число простих циклів які покривають множину всіх вершин графа G ;

4.2.4. Якщо $t=3$, то виконати: для кожного ребра e графа G виконаємо операцію стягування в точку та для отриманого графа G_e , де $G:=G_e$, виконуємо процедуру 4.2.3 Якщо $t=3$, то виконати кінець цикла по ребрам графа G , інакше виводимо граф G ;

інакше кінець циклу по ребрам;

4.3. Кінець внутрішнього циклу; 5. Кінець зовнішнього циклу;

6. Доки множина L_4 непушта виконувати наступні дії:

6.0. Беремо елемент z із L_4 , заносимо елемент x до списку V_4 ;

6.1. $L_4:=L_4 \setminus z$; 6.2. Доки множина $L_4 \setminus V_4$ непушта виконувати наступні дії:

6.2.1. Беремо елемент u із $L_2 \setminus (V_5 + V_4)$, заносимо елемент u до списку V_5 ;

6.2.2. Виконуємо ототожнення пар вершин чи точок пар графів (K_4, K_4) , чи $(K_4, K_{2,3})$, чи $(K_{2,3}, K_4)$, чи $(K_{2,3}, K_{2,3})$, зазначених як вершини різних пар циклів, здійснені по всім можливим ϕ -перетворень для обраної пари графів та отримаємо граф G ;

6.2.3. Визначимо мінімальне число t простих циклів які покривають множину всіх вершин графа G ;

6.2.4. Якщо $t=3$, то виконати: Для кожного ребра e графа G виконаємо операцію стягування в точку та для отриманого графа G_e , де $G:=G_e$, виконуємо процедуру 6.2.3; Якщо $t=3$, то виконати кінець циклу по ребрам графа G , інакше виводимо граф G ; інакше кінець циклу по ребрам;

6.3. Кінець внутрішнього циклу; 7. Кінець зовнішнього циклу;

8. Кінець роботи алгоритму.

Твердження 2. Алгоритм побудови всіх 3-мінмальних площинних графів є коректними та має поліноміальну складність.

Література

1. Хоменко М.П. ϕ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ 1971, 384 с., Е-ресурс <http://www.kntu.kr.ua/mnsp/books>.
2. D. Archdeacon, C.P. Bonnington, N. Dean, N.Hartsfield. Obstructions Sets for Outer-Cylindrical Graphs. Е-ресурс 2000, 29pp.
3. Petrenjuk V. Characterization of the 3-minimal Planar Graph. Collection of the proceedings of a seminar of discrete mathematics\ and applications. Moscow, MGU 1993 p.217
4. Petrenjuk V. List of 3-minimal Planar Graphs. preprint DNTB 31.10.86 #2450-86. 7p.
5. Dan Archdeacon. Topological graph theory: A survey. Congressus Numerantium. A Conference Journal on Numerical Themes, 115:5–54, 1996. Surveys in graph theory (San Francisco, CA, 1995), Е-ресурс.

РОЗДІЛ 2. ГРАФИ ОРІЄНТОВАНОГО РОДУ

2.1. НОВА ВЕРХНЯ МЕЖА ОРІЄНТОВАНОГО РОДУ ПРОСТОГО ГРАФА.

Задача полягатиме в уточненні верхньої межі орієнтованого роду простого графа G орієнтованого роду $\gamma(G)$ як ϕ -образу двох не вироджених графів G_i орієнтованого роду $\gamma(G_i)$ при ототождженні пар точок (x_{1j}, x_{2j}) із множин точок приєднання $X_j, j=1,2,\dots, |X_i|$, де під точкою розумітимемо, або вершину, або довільну точку ребра графа G . Для множин точок приєднання X_i із заданим числом досяжності $t_i, t_i \geq 1$, яке дорівнює найменшій кількості кліток-граней на границях яких розміщуються всі точки множини X_i , та використовуються як відомі характеристики $\theta(X_i), \partial\theta(X_i)$, так і визначаються дві нові: 1) багатосторонність чи $st(X_{ij}, G_i)$ - доступ до точок з X_{ij} розташованих на границях кліток-граней поверхні орієнтовної роду $\gamma(G_i)$; 2) $k4(X_{1j}, X_{2j})$ - кількість всіх різних частинних графів гомеоморфних K_4 чи $K_{2,3}$ породжених ототождженням пар точок (x_{1j}, x_{2j}) з множин точок $X_{ij}, j=1,2,\dots, |X_{ij}|, m = \sum_{j=1}^{t_i} |X_{ij}|, i=1,2$. **Основний результат** - теорема 1: Якщо задано ϕ -перетворення зв'язних графів G_1 та $St_m(G_2)$ орієнтованого роду $\gamma(G_i)$ наступним чином: $\phi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ - квазізірка з центром G_2 та кількома ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини X_2, X_1 множина точок графа $G_i, X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, матиме число досяжності та характеристики $t_i, \theta_i, \partial\theta_i$, то $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i) + k4 - st$, де $k4 \geq st \geq 0, st = \sum_{j=1}^{t_1} st(X_{1j}, G_1), k4 = \sum_{j=1}^{t_1} k4(X_{1j}, X_{2j}), k4 - st$ - число додаткових 2-ручок приклеєних до клітки s з множини $\sigma_{r_1} \setminus f(G_1)$ при мінімальному вкладенні $f: G_1 \rightarrow \sigma_{r_1}, r_i = \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i)$, із st -стороннім доступом до тих точок приєднання на границі ∂s клітці s (до якої приклеєно r_2 штук 2-ручок і вкладено граф G_2), що при ототождженні пар точок приєднання (x_{1j}, x_{2j}) породжують $k4$ різних підграфів гомеоморфних графу K_4 , чи графу $K_{2,3}$.

Основні поняття та позначення узяті із [1],[2]. В роботі [4] отримано наступний результат для площинних графів G : якщо граф \mathfrak{Z} - ϕ -образ графа G та простої зірки $St_m(a_0)$ з центром a_0 та m висячими ребрами з кінцевими вершинами a_i , що попарно ототожнюються з точками множини X з числом досяжності $t, t=3$, то $\gamma(\mathfrak{Z}) \leq \gamma(G) + t - \theta - 1$, де $\gamma(G)=0, \theta = \theta_G(X), \theta \in \{0,1\}$, θ - описує деякі структурні властивості множини точок X , що розташована на границях кліток граней графа G . Задача: 1) узагальнення цього результату [4] для не площинних неорієнтованих графів G та квазізірки з центром-графом без кратних ребер та дуг, що містять множину точок X із числом досяжності $t, t > 0$; 2) узагальнення θ і $\partial\theta$ - характеристик множини X наведених нижче та проілюстрованих на рис. 1 для орієнтованого роду та на рис.2 для неорієнтованого роду. Нехай S - 2-многовид без країв.

Визначення 1. Нехай задане вкладення $f, f: G \rightarrow S$, графа G в S , яке реалізує $t, t_G(X) = t$, де $S_G(X) = S \setminus f(G), S_G(X) = \{s_i\}_1^t$. Будемо говорити, що множина X матиме характеристику

$\theta_G(X, f)$, $\theta_G(X, f) = \theta$, $\theta \geq 1$, якщо існує θ трійок кліток $\{s_i\}_1^3$ з множини $S_G(X)$, на границях яких множина X розміщується довільним чином, та кожна з яких задовольняє співвідношенню $G^0 \cap \partial s_i \cap \partial s_j \neq \emptyset$ для всіх $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$, причому $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\}$ і $G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\}$, $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$, та породжує найменший по включенню підграф G' графа G , можливо вироджений в точку, який містить точки $\{a_i\}_1^3$ попарного перетину границь кліток $\{s_i\}_1^3$. Множина X матиме характеристику $\theta_G(X)$, якщо $\theta_G(X) = \max \theta_G(X, f)$, де максимум береться по всім вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X) = t$.

Визначення 2. Нехай задане вкладення $f, f: G \rightarrow S$, графа G в S , яке реалізує $t, t_G(X) = t$, де $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$, $S_G(X) = S \setminus f(G)$, та виконується рівність $\theta_G(X) = 0$. Будемо говорити, що множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta = \partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta \geq 1$, якщо існує підмножина $\{s_i, s_j, s_k\}$, множини $S_G(X)$, яка задовольняє співвідношенням $G^1 \cap \partial s_i \cap \partial s_j \supseteq \{(a_1, b_1)\}$ і

$G^1 \cap \partial s_k \cap \partial s_j \supseteq \{(a_2, b_2)\}$, для всіх $i \neq j \neq k$, $i, j, k = 1, 2, 3$. На границях $\{\partial s_i, \partial s_j, \partial s_k\}$ множина X розміщується довільним чином, якщо не містить точок ребер (a_1, b_1) , (a_2, b_2) та особливим чином (без точок множини X на $\partial s_j \setminus L(a_1, a_2) \cup \{(a_2, a_{20}), (a_1, a_{10})\}$), якщо містить принаймні точку цих ребер. Також існуватимуть клітка s_0 та, можливо, клітка s_{00} . Клітка $s_0, s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$, границя якої містить простий ланцюг $L(a_1, a_2)$ ненульової довжини із кінцевими вершинами a_1, a_2 спільно із ∂s_j і два простих ланцюги, можливо вироджених в точку, $L_1(a_1, a_{12}), L_1(a_2, a_{22})$ спільними з ∂s_i та ∂s_k , відповідно, та ребро (a_{12}, a_{22}) . Клітка $s_{00}, s_{00} \in (S \setminus f(G)) \setminus (S_G(X) \cup \{s_0\})$, має границю яка містить простий ланцюг $L(a_{10}, a_{20})$ ненульової довжини із кінцевими вершинами a_{10}, a_{20} спільно із ∂s_j . Множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X)$, якщо $\partial\theta_G(X) = \max \partial\theta_G(X, f)$, де максимум береться по всім вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X) = t$ та $\theta_G(X) = 0$.

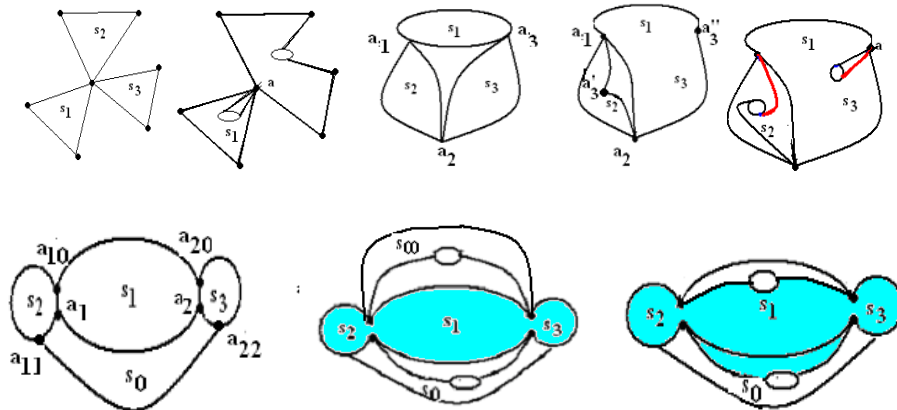


Рис. 1. На торі зіркову та трикутну кліткову структуру, що задовольняє визначенню 1, описуватиме $\theta = 1$ (перший ряд), другий ряд для ланцюжкової структури із $\partial\theta = 1$.

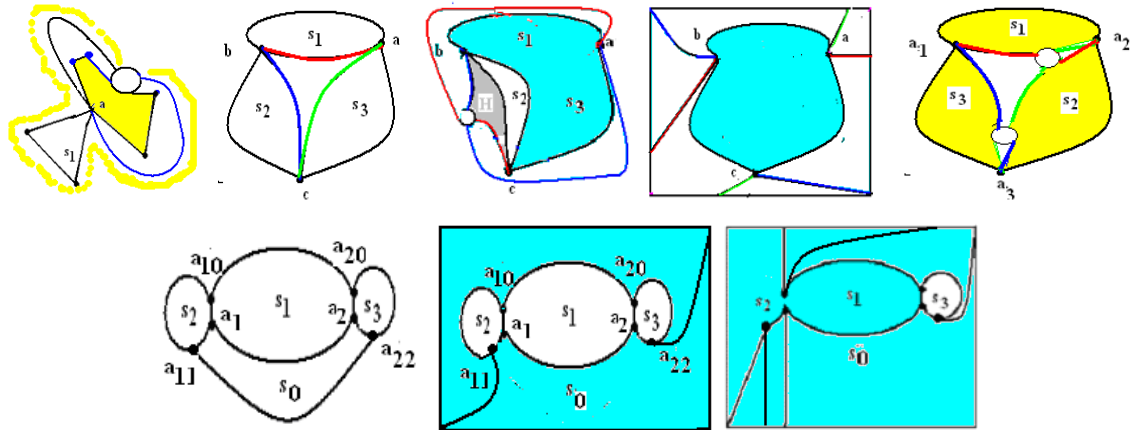


Рис. 2. На проективній площині зіркову структуру описуватиме $\theta=1$ (перша карта верхнього ряду), на інших парах карт цього ряду показано, що трикутна кліткова структура, як узагальнена не зіркова структура, не задовольняє визначенню 1 навіть у випадку, коли три ребра (a_i, a_j) трикутника G' не входять до $L = \bigcup_{i=1}^3 \partial s_i$, а ланцюжкова кліткова структура задовольняє визначенню 2 тільки тоді, коли внутрішніми гранями будуть тільки клітки з $\{\partial s_i\}_{i=0}^3$, а на ∂s_0 є ребро, можливо 1-підрозділене, графа G , що не належить до L .

Твердження 1. Нехай на множині $S_G(X)$ задано відношення інцидентності наявності, принаймні однієї спільної точки на границях двох кліток. Мають місце наступні співвідношення:

1. Для S -орієнтованого роду визначення 1 виконуються в загальному випадку, а для визначення 2 є два варіанти: а) множина X не має точок на жодному із ребер, які є спільними для двох різних пар кліток включають другу клітку, б)) множина X не має точок на тій частині границі другої клітки, що має спільні ребра з двома іншими, та не належить до кожної з них та до $\partial s_0 \cup \partial s_{00}$.

2. Для S -неорієнтованого роду визначення 1 не виконуються в загальному випадку, а саме виконується тільки тоді, коли точки множини X відсутні на трьох ребрах (a_i, a_j) трикутника G' , а ланцюжкова кліткова структура не задовольняє визначенню 2 в загальному випадку, але задовольняє тоді, коли клітка s_0 має на ∂s_0 тільки одне ребро графа G , що не належить до $\partial s_i \cap G^1$, $i=1,2,3$.

$$3. \theta_G(X) + \partial\theta_G(X) \leq \left\lceil \frac{t_G(X) - 2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{t_G(X) - 2}{2} \right\rceil < t_G(X) - 2.$$

Доведення. Оскільки 2-многовид S -орієнтованого роду $\gamma(S)$, то являтиме собою тор із приклеєною $\gamma(S) - 1$ 2-ручкою. Твердження 1 впливає з того, що на торі перетворення зіркової та циклічної кліткової структури описуватиме перший ряд рис. 1 (для $\theta=1$), а другий ряд рис. 1 для перетворення на торі ланцюжкової структури із $\partial\theta=1$. 2-многовид S -неорієнтованого роду $\gamma(S)$ являтиме собою проективну площину із приклеєними лентами Мебіуса у кількості $\gamma(S) - 1$.

Твердження 2 впливає з того, що на проективній площині зіркову структуру $\theta=1$ описуватимуть перші дві карти верхнього ряду рис.2, а на двох інших парах карт цього ряду показано, що циклічна кліткова структура задовольняє визначенню 1 тільки тоді, коли три ребра (a_i, a_j) трикутника G' не

входять до $\bigcup_{i=1}^3 \partial s_i$, т.то $\bigcup_{\forall i \neq j, i, j=1}^3 f(a_i, a_j) \cap (\bigcup_{i=1}^3 \partial s_i \cap X)$, а ланцюжкова кліткова структура задовольняє визначенню 2 тільки тоді, коли внутрішніх граней графа G окрім кліток з множини $\{\partial s_i\}_{i=0}^3$ не буде, а на ∂s_0 є ребро графа, можливо 1-підрозділене, графа G , що не належить до $\bigcup_{i=1}^3 \partial s_i$, коли клітка s має на ∂s тільки одне ребро графа G , яке не належить до $\bigcup_{i=1}^3 \partial s_i$, та на спільних ребрах немає точок множини X . Доведення співвідношень 1) та 2) закінчене. Доведення співвідношення 3), т. то обчислення формальної суми впливає із їхніх визначень.

Наслідок 1. Перетворення множини кліток-граней графа G , вкладеного до 2-многовида S , виконані за визначеннями 1 та 2, трансформують елементи з $S_G(X)$ не змінюючи сусідні з ними клітки; клітки оточення задіяні в деяких випадках.

Алгоритм_О.

Вхід. До 2-многовида S орієнтованого роду вкладено граф G мінімальним вкладенням f , $f: G \rightarrow S$, що реалізує $t_G(X)=t$ та $\theta_G(X)=\theta$. Занумеруємо перші три клітки з $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 1, як підмножину $\{s_i\}_1^3$, Вважатимемо заданими функції функція_ $\theta(M)$ та функція_ $\partial \theta(M)$, які визначають характеристики $\theta, \partial \theta$, відповідно, для M - множини кліток, впорядкованої відношенням суміжності на множині границь кліток з M .

Крок 0. Якщо $\theta = 0$, то переходимо до кроку 3,

інакше, доки $\theta > 0$ виконувати циклічно наступні дії:

початок циклу 1;

Крок 1. Для $S_G(X)$ використання характеристики θ для орієнтованого роду означає приклеювання нової 2-ручки h на заміну трьох клітин-граней $\{s_i\}_1^3$ із границями, що мають, принаймні, одну спільну вершину чи вони попарно мають спільні вершини, на нову клітку-грань s поверхні на 1 більшого роду, що має границею $\partial s = \bigcup_{i=1}^3 \partial s_i$, $S := S + h$;

Крок 2. $S_G(X) := (S_G(X) \setminus \{s_i\}_1^3) \cup \{s\}$; $\theta = \text{функція_}\theta(S_G(X))$, $\theta := \theta - 1$;

перенумеруємо всі елементи нової множини $S_G(X)$ так, щоб перші три клітки з $S_G(X)$, для яких має місце визначення 1, мали номери 1,2,3;

кінець циклу 1;

Крок 3. $\partial \theta := \text{функція_}\partial \theta(S_G(X))$, де $S_G(X)$ побудована циклом 1 множини кліток. Якщо $\partial \theta > 0$, то перенумеруємо клітки з побудованої вищенаведеним циклом множини кліток $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 2, як $\{s_i\}_1^3$ та s_0 ;

Якщо $\partial \theta = 0$, то переходимо до кроку 6,

інакше, доки $\partial\theta > 0$ виконувати наступні дії:

початок циклу 2;

Крок 4. Для $S_G(X)$ використання характеристики $\partial\theta$ для орієнтованого роду означає приклеювання нової 2-ручки h на заміну трьох клітин-граней $\{s_i\}_1^3$ із границями, де s_2 одна з трьох має два спільні ребра з двома іншими, та четвертої клітки s_0 , $s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$ на нову клітку-грань s поверхні на 1 більшого роду, що має границею $\partial s = \bigcup_1^3 \partial s_i \setminus R$, де множина R складена, або з двох попарно спільних ребер без точок з множини X , або з тієї частини границі ∂s_2 , що не належить до границь $\partial s_1 \cup \partial s_2 \cup \partial s_0$ та без точок з множини X ; $\gamma(S) := \gamma(S) + 1$.

Крок 5. $S_G(X) := (S_G(X) \setminus \{s_i\}_1^3) \cup \{s\}$; $\partial\theta = \text{функція_}\partial\theta(S_G(X))$ $\partial\theta := \partial\theta - 1$; Якщо $\partial\theta > 0$, то перенумеруємо всі елементи нової множини $S_G(X)$ так, щоб три клітки $\{s_i\}_1^3$ та четверта s_0 , для яких має місце визначення 2, мали номери 1,2,3.

кінець циклу 2;

Крок 6. Виводимо $S_G(X)$ та "Множина X розташована на границях кліток-граней з множини $S_G(X)$, перетвореної до нульових характеристик $\theta, \partial\theta$, 2-многовида орієнтованого роду $\gamma(S)$ ", кінець алгоритму

Твердження 2. Алгоритм_О коректно перетворює 2-многовид S та вкладення $f: G \rightarrow S$ графа G в S , де $\gamma(G) = \gamma(S)$, в 2-многовид S' та вкладення $f': G \rightarrow S'$ графа G в S' , де $\gamma(S') > \gamma(S)$, шляхом використання характеристик $\theta, \partial\theta$, одна з яких має бути нульовою, множини точок X графа G та має поліноміальну часову складність.

Доведення. Алгоритм перетворення орієнтованого 2-многовида S із вкладеним графом G в орієнтований 2-многовид S' , де $\gamma(S') > \gamma(S)$, шляхом приклеювання нових 2-ручок до S спирається на використання характеристики θ множини точок X графа G . Вважатимемо, що ручка h приклеєна до кліток $s', s'' \in S(G, f)$ і позначати її через $h(s', s'')$, якщо задано φ - перетворення φ' в такий спосіб:

$\varphi'((s' \cup s'') \setminus (\tau' + \tau''), \partial\tau' + \partial\tau'') = (h, \tau^*)$, де τ', τ'' - такі регулярні двоклітки, що задовольняють $\tau' \subset s', \tau'' \subset s'', \partial\tau' \cap \partial\Delta s' = \partial\tau'' \cap \partial s'' = \emptyset$.

Вважатимемо заданими функцію $\theta(M)$ та функцію $\partial\theta(M)$, які визначають характеристики $\theta, \partial\theta$, відповідно, на множини кліток M , що впорядкована відношенням суміжності заданим на множині границь кліток з M , т. то якщо границі двох кліток мають принаймні спільну точку, то ці клітки суміжні.

Нехай до 2-многовиду S орієнтованого роду $\gamma(G)$ вкладено граф G вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, що реалізує $t_G(X) = t$ та $\theta_G(X) = \theta$. Занумеруємо перші три клітки з $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 1, як підмножину $\{s_i\}_1^3$ та позначимо через G' найменший по включенню підграф графа G , можливо вироджений в точку, який містить точки $\{a_i\}_1^3$ попарного перетину границь кліток $\{s_i\}_1^3$, причому $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\}$, $i G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\}$, $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$. Розглянемо плаский диск d

з центром в a_1 та нескінченно малим радіусом ε , який своєю границею перетинатиме ребра підграфа G' , що інцидентні вершині a_1 , у внутрішніх точках a_{1j} , де $j=1,2,\dots,k$. Розщепимо кожну вершину a_{1j} на a'_{1j}, a'_{2j} , де $j=1,2,\dots,k$ степеня 2. Цим розіб'ємо підграф G' на частинні - підграфи $G'_i, i=1,2$, де G'_1 містить a'_{1j} та всі ребра (a_1, a'_{1j}) , G'_2 містить a'_{2j} .

Відображенням ϕ перевернемо на 180° підграф $f(G'_1)$ як множину образів ребер на поверхні, симетрично навколо вісі симетрії, яка є простим ланцюгом $L(a_2, a_3)$, що проходить через точки a_2, a_3 та задовольняє умові: $f(G'_2) \cap \partial s_3 = f(G') \cap \partial s_3 = L(a_2, a_3)$. В результаті отримаємо підграф $\phi f(G'_2)$ вкладений до $\overline{s_3}$, де $\overline{s_3} = s_3 \cup \partial s_3$. Відображенням ϕ' вигнемо за часовою стрілкою на 180° всі висячі ребра інцидентні a'_{2j} , де $j=1,2,\dots,k$, не змінюючи порядок слідування, і розмістимо їхні висячі вершини на лівій частині границі регулярної підклітки τ' , де $\tau' \subset \overline{s_3} \setminus \phi f(G'_2)$. В підграфі $f(G'_2)$ вкладеному до $\overline{s_1} \cup \overline{s_2}$, де $\overline{s_3} = s_3 \cup \partial s_3$, відображенням ϕ'' поміняємо місцями ребра в парах виду $(a'_{1j}, a_1), (a'_{1(k-j+1)}, a_1)$ для всіх $j, j=1,2,\dots,k$, та за часовою стрілкою розмістимо на правій частині границі регулярної підклітки τ'' , де $\tau'' \subset (\overline{s_1} \cup \overline{s_2}) \setminus f(G'_1)$. Ототожнимо, за часовою стрілкою, пари вершин (a'_{1j}, a'_{2j}) у внутрішню точку a'_j деякого j -го ребра (a'_{1j}, a'_j, a'_{2j}) , для всіх $j, j=1,2,\dots,k$. Приклеєна ручка h до кліток $s' = \overline{s_3}, s'' = \overline{s_1} \cup \overline{s_2}, s', s'' \in S(G, f')$, позначена через $h(s', s'')$, матиме вкладені відображенням ϕ''' зклеєні половинки ребра $\phi'' \phi' \phi f((a'_{1j}, a'_j, a'_{2j}))$, які розрізають її на клітки, де $j=1,2,\dots,k$. В результаті суперпозиції $\phi''' \phi'' \phi' \phi f$ наведених вище відображень отримаємо вкладення $f', f': G \rightarrow S', f' = \phi''' \phi'' \phi' \phi f$, графа G до 2-многовиду S' орієнтованого роду $\gamma(G) + 1$, причому $S'(G, f') = (S(G, f) \setminus \{s_1, s_2, s_3\}) \cup h(s', s'') \setminus \sum_{j=1}^k f'(a'_{1j}, a'_j, a'_{2j})$, т.то тіж самі клітки, тільки замість

s_1, s_2, s_3 буде клітка $s, s \in h(s', s'') \setminus \sum_{j=1}^k f'(a'_{1j}, a'_j, a'_{2j})$, така, що $\partial s = \bigcup_{i=1}^3 \partial s_i$. Крім цього множина

$f'(X)$ на S' буде розміщуватися на границях $t_G(X) - 2$ та матиме характеристику $\theta_G(X) - 1$. Тим самим виконані всі дії однієї ітерації циклу 1 алгоритма $_O$.

Нехай до 2-многовиду S орієнтованого роду $\gamma(G)$ вкладено граф G вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, що реалізує $t_G(X) = t, \theta_G(X) = 0$ та $\partial \theta_G(X) = \partial \theta, \partial \theta > 0$. Перші три з чотирьох кліток з множини $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 2, утворюють підмножину $\{s_i\}_1^3$, а четверта s_0 . Для $S_G(X)$ використання характеристики $\partial \theta$ для орієнтованого роду означає приклеювання нової 2-ручки $h, h = h(s_1, s_0)$ чи $h = h(s_1, s_{00})$, на заміну чотирьох кліток-граней $\{s_i\}_1^3, s_0$, де s_1 одна з трьох має два спільні ребра e_i з s_3, s_2 та клітки $s_0, s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$, на нову клітку-грань s з границею $\partial s = \bigcup_{i=1}^3 \partial s_i \setminus R$, де множина R матиме два наступні варіанти складання: 1) якщо $h = h(s_1, s_0)$, то R є тією частиною границі ∂s_1 , що не належить до границь ∂s_0 та без точок з множини $X \setminus \{\partial e_1 \cup \partial e_2\}$; 2) якщо

$h = h(s_{00}, s_0)$ (за умови існування такої клітки s_{00} , що множина точок $(\partial s_{00} \cap \partial s_1) \cup (\partial s_0 \cap \partial s_1)$ містить кінцеві вершини обох ребер e_i), то $R = e_1 \cup e_2$ і ребра e_i не містять точок з множини $X \setminus \{\partial e_1 \cup \partial e_2\}$, де $e_1 \in \partial s_2 \cap \partial s_1$, $e_2 \in \partial s_1 \cap \partial s_3$. В кожному з цих випадків на приклеєній 2-ручці розміщуються ребра e_i за допомогою вкладення f' , $f': G \rightarrow S'$, $f'|G \setminus \{e_2, e_2\} = f|G \setminus \{e_2, e_2\}$, графа G до 2-многовиду S' орієнтованого роду $\gamma(G) + 1$, причому множина $S'(G, f')$ для варіанту 2) матиме вид

$$(S(G, f) \setminus \{\bigcup_{i=0}^3 s_i \cup s_{00}\}) \cup (h(s_{00}, s_0) \setminus \sum_{j=1}^k f'(e_1, e_2)), \text{ для варіанту 1) } \in (S(G, f) \setminus \{\bigcup_{i=0}^3 s_i\}) \cup (h(s_1, s_0) \setminus \sum_{j=1}^k f'(e_1, e_2)).$$

Тим самим всі дії однієї ітерації циклу 2 алгоритму_0 виконані. Кількість ітерацій в обох циклах дорівнюватиме $\theta_G(X) + \partial\theta_G(X)$. Оскільки $\theta_G(X) + \partial\theta_G(X) < t_G(X) - 2$ і $t_G(X)$ не перевищує числа кліток – граней графа G орієнтованого роду, вкладеного до 2-многовиду S роду $\gamma(G)$, то алгоритм рекурсивно перетворюватиме множину кліток допоки не отримаємо перетворену множину кліток-граней із нульовими характеристиками $\theta, \partial\theta$. Число ітерацій обох циклів не перевищуватиме $2(2 - 2\gamma(G) - |G^0| + |G^1|)$, тобто матиме поліноміальну часову складність. Твердження 2 доведено.

Зауважимо, що використання $\partial\theta$ можливе тільки після використання характеристики θ для орієнтованого роду γ і перетворенням трьох клітин-граней, дві пари з яких мають два спільні ребра, шляхом приклеювання до них нової 2-ручки, на нову клітку-грань поверхні більшого роду, що має границею об'єднання границь цих трьох кліток без двох спільних ребер (чи додаткових лент Мебіуса до неорієнтованої S).

Визначення 3. Позначимо через $krt_G(M)$, $kr = krt_G(M)$, kr - кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G , як найбільшу кількість варіантів вибору різних підмножини $S_G(M, S_\gamma)$ множини клітин $S_\gamma \setminus f(G)$ на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M , узята по всіх мінімальних вкладеннях f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ . Іншими словами, це найбільша кількість зірок які приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr 2-кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Визначення 4. Позначимо через $ms_G(M, s, f)$, $k = ms_G(M, s, f)$, k - сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітки s , $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f - задане мінімальне вкладення $f: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M . Найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх клітин s заданого мінімального вкладення f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $ms_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G які приєднані кінцевими вершинами до кожного із принаймні трьох елементів множини M та вкладені до однієї клітки із множини $S_\gamma \setminus f(G)$ заданого мінімального вкладення f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ .

Визначення 5. Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), \dots, ms_G(M, f_N))$ вектором l -стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, $l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0$, $|M| > 2$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ -множина всіх неізоморфних мінімальних вкладень f_k , $f_k: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел

$ms_G(M, f_k)$ узяті по всім s та всім f_k , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, називатимемо характеристикою l -стороннього доступу до множини M точок графа G .

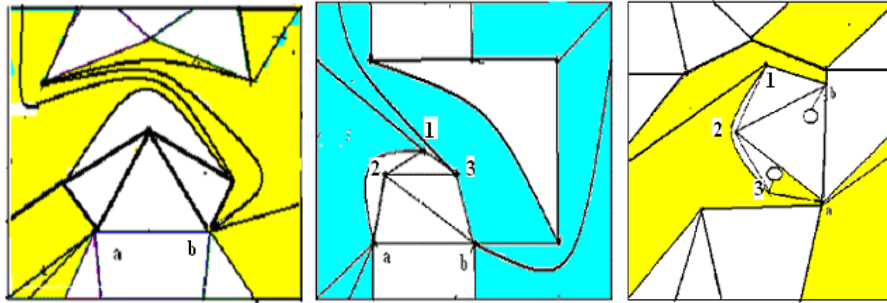


Рис. 3. Роль st , $st = st(\{a, b\}) = 1$, як параметра двостороннього доступу видно на перших двох картах, де пару ребер із двох графів K_5 склеєно по вершинам в ребро e , $e=(a, b)$, та наведено вкладення склеєного графа в тор, теж саме для пари ребер із графів $K_5, K_{3,3}$; на третій карті два графи K_5 склеєні по ребру $e=(a, b)$ та частині ребра u , відповідно, де кольоровою є клітка утворена вкладенням в тор графа K_5 , до якої вкладено інший K_5 та виконано склейку.

Теорема 1. Якщо задано наступне ϕ -перетворення зв'язних графів G_i та $St_m(G_2)$ орієнтованого роду $\gamma(G_i)$: $\phi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ -квасизірка з центром G_2 та кількома ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини X_2 , X_i множина точок графа G_i , $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, матиме число досяжності та характеристики $t_i, \theta_i, \partial\theta_i$, то $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i) + k4 - st$, де $st = \sum_{j=1}^{t_1} st(X_{1j}, G_1)$, $k4 = \sum_{j=1}^{t_1} k4(X_{1j}, X_{2j})$, $k4 - st$ - число 2-ручок приклесних до клітки s з множини $\sigma_{r_1} \setminus f(G_1)$, $k4 - st \geq 0$, f - мінімальне вкладення $f: G_1 \rightarrow \sigma_{r_1}$, $r_1 = \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i)$, із st -стороннім доступом до тих точок приєднання на границі ∂s клітці s (до якої приклеєно r_2 2-ручки і вкладено граф G_2), що при ототоженні пар точок приєднання (x_{1j}, x_{2j}) породжують $k4$ різних підграфів гомеоморфних K_4 , чи $K_{2,3}$.

Доведення. Нехай граф G розбито на дві зв'язні частини G_1 та $St_m(G_2)$ із m спільними вершинами x_j , кожна з яких розщеплюється на вершини x_{1j}, x_{2j} , де $j = 1, 2, \dots, m$. Ототоження цих пар задаватиме наступне ϕ -перетворення зв'язних графів G_1 та $St_m(G_2)$ роду $\gamma(G_i)$:

$\phi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ -квасизірка з центром G_2 та кількома ребрами-променями із кінцевими вершинами з множини X_2 , де X_i множина точок графа G_i , $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, має число досяжності t_i та характеристики. $\theta_i, \partial\theta_i$, $i = 1, 2$. Нехай до 2-многовиду S_i орієнтованого роду $\gamma(G_i)$ вкладено граф G_i мінімальним вкладенням f_i , $f_i: G_i \rightarrow S_i$, що реалізує $t_{G_i}(X_i) = t_i$ та $\theta_{G_i}(X_i) = \theta_i$, де $i = 1, 2$. Для графа G_i виконаємо перетворення за алгоритмом_0 та отримаємо перетворену множину кліток-граней із нульовими характеристиками $\theta_i, \partial\theta_i$, із точною

кількістю, не більше ніж $t_i - (\theta_i + \partial\theta_i)$, кліток s_{ij} на границях яких розміщуються точки приєднання із множини $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, де $i = 1, 2$.

Стандартним способом приклеїмо до 2-многовиду S_i p 2-ручок $h_{ij} = h(s_{i1}, s_{ij})$, де $p = t_i - (\theta_i + \partial\theta_i) - 1$, одним кінцем до клітки s_{i1} , а іншим до кожної клітки s_{ij} , $j = 2, \dots, m$, тим самим отримуємо клітку s_i^* на границі якої знаходяться всі точки з X_i , де $i = 1, 2$.

Відмітимо, що клітка s_i^* матиме st_i - багатосторонній доступ до вершин приєднання із множини X_i , де $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, як суму багатостороннього доступу $st_i = \sum_{j=1}^{t_i} st(X_{ij}, G_1)$ по всіх тих кліток з яких утворилася клітка s_i^* , де $i = 1, 2$. Приклеїмо стандартним способом циліндр C до кліток s_1^*, s_2^* та отримуємо вкладення $f, f = f_1 + f_2$, графа $G_1 + G_2$ до 2-многовиду S^* орієнтованого роду $\gamma(G_1) + \gamma(G_2) + p$. Продовження f_2^* вкладення f_2 на множину всіх висячих ребер квазізірки $St_m(G_2)$ із кінцевими вершинами x_{2j} які ототожнюються з x_{1j} , $j = 1, 2, \dots, m$ можливо побудувати за умови розміщення на додаткових $k4 - st_1$ 2-ручках приклеєних до циліндру C по одному із зхрещених на C ребер підграфів K_4 чи $K_{2,3}$, що породжені висячими ребрами квазізірки, т.то розведення $k4 - st_1$, де st_1 - багатосторонній доступ матиме клітка s_1^* до точок із X_1 , $X_1 = \{x_{1j}\}_1^m$. В результаті отримуємо вкладення $f', f' = f_1 + f_2^*$ графа G в 2-многовид S^{**} орієнтованого роду $\gamma(G_1) + \gamma(G_2) + p + k4 - st_1$, т.то $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i) + k4 - st_1$. Доведення теореми 1 закінчено.

Наслідок 1. Нехай $\varphi : (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$ та виконується умова теореми 1 і рівності: $\theta_i = 0, \partial\theta_i = 0, s = 0, t_1 = t_2 = m$. Тоді $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + m^2 + m - 2$.

Доведення впливатиме із наведеної в теоремі 1 нерівності та умови $t_i = m$ за якою всі $\theta_i = 0, \partial\theta_i = 0, s = 0$, а число $k4$ є числом всіх різних пар перехрещених ребер на множині всіх висячих ребер квазізірки $St_m(G_2)$, т.то $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + 2k - 2 + k(k - 1)$.

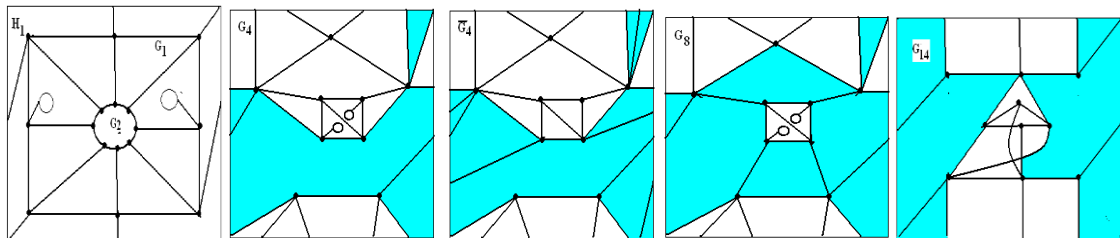


Рис.4. На першій карті вкладення в 2-тор графа H_1 із $k4 = st = 0$, на другій вкладення графа G_4 із $k4 = 0$, $st = 1$ в 2-тор, відповідно, на третій карті вкладення в тор графа $\overline{G_4} = G_4 \setminus e$ із $k4 = st = 2$, четверта та п'ята карти - вкладення в 2-тор графів G_8 із $k4 = 0, st = 2$, G_{14} із $k4 = 0, st = 2$, відповідно.

Приклад. Точна верхня оцінка роду та роль двостороннього доступу видні на графі G з другої карти рис.3, де $G_1 = K_{3,3}$, $G_2 = K_3$, $m = 2$, $t_1 = t_2 = 1$, $\theta_i = \partial\theta_i = 0$,

$St_2^1(G_2) = K_3^1 \cup \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$, $st_1(\{a,b\}) = 2$, $st_2 = 0$, $k4 = 2$, тоді $\gamma(G) \leq 1 + 0 + (1-1) + (1-1) - 0 + 2 - 2 = 1$, та на третій карті рис.3, де $G_1 = K_5$, $G_2 = K_3$, $m = 2$,

$St_2^1(G_2) = K_3^1 \cup \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$, $t_1 = t_2 = 1$, $\theta_i = \partial\theta_i = 0$, $st_1(\{a,b\}) = 1$, $st_2(\{a,b\}) = 0$, $k4 = 2$, тоді $\gamma(G) \leq 1 + 0 + (1-1) + (1-1) - 0 + 2 - 1 = 2$. На рис. 4 наведено залежність між характеристиками $k4$ та st графів H_1 , G_4 , $\overline{G_4}$, G_8 , G_{14} .

Література

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. препринт ИМ АНУ, Киев, 1973, 383 с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. препринт ИМ АНУ, Киев, 1970.
3. Хоменко Н. П. Островерхий Е. Б. Существенные элементы и род графа. препринт "Минимальные вложения графов" ИМ АНУ Киев 1972.
4. Петренюк В. І. Об оценке рода специальных графов. деп. в УкрНИИТИ №2259-Ук86 22.09. 1986.
5. Петренюк В. І. О структуре плоских графов с заданным числом достижимости некоторого множества точек. деп. рукопис в УкрНИИТИ N 2245-Ук86 22.09.1986.
6. R. Bodendiek, K. Wagner. A characterization characterization of the minimalbasis of the torus. *Combinatorica* 6,3,1986245-260

2.2. СТРУКТУРА 8-МИ ТА 9-ТИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ТОРА

Задача полягатиме у поданні графів-обструкцій роду 2 на 8-ми та 9-ти вершинах, у яких кожне ребро є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, як результату φ -перетворення по підмножинам множин точок (точок приєднання із заданими характеристиками – числом досяжності та двостороннім доступом) одного із графів K_5 , $K_{3,3}$ (можливо без ребра чи із кількома додатковими ребрами) та квазізірки K із центральним графом M з щонайбільше чотирма вершинами.

Основні результати: а) теорема 1 для 8-вершинних графів-обструкцій роду 2, т.то матимемо $M \in \{K_3, \overline{K_3}\}$; б) теорема 2 про подання графів-обструкцій роду 2 на 9-ти вершинах, як результату φ -перетворення не більше ніж трьох зв'язних графів X, Y, Z одного з наступних випадків:

1) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ (можливо із кількома додатковими ребрами) вкладений в тор σ , а інший граф X - є або площинним 2-мінімальним відносно множини точок приєднання до графа Y на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із нульовими характеристиками θ та $\partial\theta$ для множини точок приєднання до графа Y , або є 3-мінімальним на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із характеристиками θ , $\partial\theta$, де $\theta=1$ чи $\partial\theta=1$ для множини точок приєднання графа X до графа Y , граф Z відсутній; 2) граф Y один з графів K_5 чи $K_{3,3}$, можливо без ребра, вкладений в тор σ , а інший граф X роду 1 є 2-мінімальним відносно множини точок приєднання на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із нульовими характеристиками θ , $\partial\theta$ множини точок приєднання графа X до графа Y , граф Z відсутній; 3) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ (можливо із кількома додатковими ребрами) вкладений в тор σ , граф Z - проста зірка, граф X є площинною квазізіркою із центральним графом M на двох вершинах, яка не є 2-мінімальним графом на недвоклітці s , $s \in \sigma \setminus Y$, причому існує, принаймні одна пара вершин простої зірки Z , сформована із елементів множини приєднання графа X до графа Y , що розділяє на ∂s пару кінцевих вершин з множини приєднання графа X до графа Y .

Вступ. Основні позначення взяті із [1], [2]. Нехай G неорієнтований скінчений граф без петель і кратних ребер ейлерового роду $\gamma(G)$, а S - замкнутий 2-многовид роду $\gamma(S)$, де $\gamma(G) = \gamma(S) + 1$. Якщо поверхня орієнтована, то позначатимемо її через σ , а якщо це неорієнтована поверхня, то позначатимемо її Σ .

Визначення 1. Граф G називається таким, що неприводиться над S , або $\gamma(G)$ -неприведеним (irreducible) для S , якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх $\gamma(G)$ -неприведених над S графів позначимо через $\zeta(S)$.

Визначення 2. Граф G мінімальний (мінор) над S , якщо для будь-якого графа G' , отриманого з графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G') \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх графів мінімальних над S позначимо через Γ_S .

Множина всіх графів, що неприводяться над S містить Γ_S характеризує множину всіх графів рід яких не менше $\gamma(S) + 1$. Якщо $S = \sigma_0$ евклідова площина, то $\Gamma_S = \{K_5, K_{3,3}\}$.

Визначення 1,2 узяті з [3], [4], відповідно. Нехай $S = \sigma$ - орієнтована замкнута поверхня роду $\gamma(\sigma)$, $\gamma(\sigma) > 0$, $\gamma(\sigma) = n - 1$. Задача побудови всіх графів, що неприводяться над σ зводиться, як показано в [5] до задачі переліку всіх блоків, тобто графів без точок з'єднання, що неприводяться над σ . Доведено в [9], що графи $B_1, B_2, B_3, K_{3,7}$ неприводяться для тору σ_1 , а G_n n -мінімальний блок, що неприводиться при $n > 1$. Граф G_n був побудований в [6], а в [7], [8] було доведено, що є три 2-

неприведених підграфи графа K_8 , а саме: $B_1 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_3^1)$, $B_2 = (K_8^0, K_8^1 \setminus (K_{1,2}^1 \cup 2K_2^1))$, $B_3 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1)$. В [18] розв'язувалася ця ж задача, доведено, що один граф містить підграф ізоморфний B_3 , тобто має зайве ребро. В [9] наведено два графи G_1, G_2 неприведені для тору, а в [14] знайдені в обох зайві ребра. В [10] доведено, що граф $K_{3,7}$ мінімальний над тором. Граф $K_{3,7}$ наведено в [11], де було доведено, що $K_{3,11}$ мінімальний для подвійного тору σ_2 . В [10], [13] зроблено припущення, що граф $K_{3,4p+3} \in (p+1)$ -мінімальний блоком, $p > 0$, та доведено, що граф $K_{3,7}$ мінімальний для пляшки Клейна, а $K_{3,9}$ мінімальний для поверхні ейлерової характеристики -1 . Наведений в [15] повний список 63-х 2-неприведених графів із 9-ма вершинами; 51 із них (48 мінорів) можливо побачити в он-лайн РНД-дисертації Nur Suhjin «The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10» на відміну від [16], [17]. Спочатку в [27], а потім в [19], [20] виписані 2-неприведені для тору графи без підграфів гомеоморфних $K_{3,3}$. Більше наведено в [21] та інших статтях де розбудовують та використовують ідею К-мостів заданого графа.

Число досяжності підмножини M множини точок графа G роду γ , $\gamma = \gamma(G)$, що є найменшою кількістю клітин з підмножини Δ множини $S \setminus f(G)$, де S поверхня роду γ , а $f, f: G \rightarrow S$, довільне мінімальне вкладення при якому елементи $f(M)$ розташовуються на границях клітин із підмножини Δ , потрібне для оцінки роду ϕ -образу деякого графа та простої зірки; у випадку заміни зірки на квазізірку доповнимо наступними визначеннями, які враховують наявність на границі недвоклітки кількох копій вершин графа.

Визначення 3. Позначимо через $krt_G(M)$, $kr = krt_G(M)$, kr -кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G , як найбільшу кількість варіантів вибору різних підмножини $S_G(M, S_\gamma)$ множини клітин $S_\gamma \setminus f(G)$ на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M , узята по всіх мінімальних вкладеннях $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ . Іншими словами, це найбільша кількість зірок які приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr 2-кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Визначення 4. Позначимо через $ms_G(M, s, f)$, $k = ms_G(M, s, f)$, k -сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої клітини \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітини s , $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f -задане мінімальне вкладення $f: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M , а найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх клітин s заданого мінімального вкладення $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $ms_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G приєднаних кінцевими вершинами до кожного з, принаймні трьох, елементів множини M та вкладені без перетину ребер у внутрішніх точках до однієї клітини s , $s \in S_\gamma \setminus f(G)$, із цикломатичним числом $p_1(\partial s)$, де $p_1(\partial s) \geq k$, та заданим мінімальним вкладенням $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ .

Визначення 5. Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), \dots, ms_G(M, f_N))$ вектором l -стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої клітини \bar{s} , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, $l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0$, $|M| > 2$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ -множина всіх неізоморфних мінімальних вкладень $f_k, f_k: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел

$ms_G(M, f_k)$ узяті по всім s та всім f_k , називатимемо характеристикою l -стороннього доступу до множини M точок графа G . В подальшому тексті вважатимемо, що $S_\gamma = \sigma_2$, тобто є 2-тором.

2.2.1. ПОБУДОВА 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРУ

Задача. Вивчити структуру 8-ми вершинних графів-обструкцій для тору з метою використання при побудові 9-ти вершинних графів-обструкцій для тору. Для цього із кількох скінчених простих графів-обструкцій обмеженого ейлерового роду G_i роду $\gamma(G_i)$, де $i = 1, 2, \dots, k$, побудуємо новий граф G , $G = (G^0, G^1)$, без вершин степеня 2 та із обмеженням роду $\gamma(G)$ певною верхньою величиною, кожне ребро якого є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, тобто для довільного ребра $u \in G^1$ виконується рівність $\gamma(G \setminus u) = \gamma(G) - 1$. Для орієнтованого роду графа ця задача буде задачею 1, а для неорієнтованого роду графа задачею 2.

Позначення 1. Під квазізіркою $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ з центром графом G_1 будемо розуміти об'єднання графа G_1 , $G_1 = (\{v_i\}_{i=1}^3)$, та трьох зірок $St_{n_i}(v_i)$ із висячими вершинами $\{g_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ і ребрами в кількості n_i , які можуть мати спільні кінцеві вершини, та із центральними вершинами v_i , що породжують підграф G_1 графа G . В подальшому вважатимемо, що $G \setminus \bigcup_{i=1}^3 (St_{n_i}^1(G_1) \setminus G_1^1) \setminus G_1^1$ - 2-зв'язний підграф графа G .

Позначення 2. Будемо називати трикутним променем квазізірки $St_n(G_1)$ з центром-графом G_1 її підграф K_3 утворений з одного ребра графа G_1 та двох суміжних йому ребер із множини $St_n^1(G_1) \setminus G_1^1$ зі спільною вершиною степеня 2. Відмітимо, що такий трикутний промінь символізує приєднання довільної точки ребра до вершини.

Твердження 1.1. Два трикутні промені квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ 2-зв'язного графа G утворені з одного ребра e та двох пар (e_i, e_j) суміжних йому ребер з множини $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1) \setminus G_1^1$ з двома спільними вершинами степені 2, що належать зв'язному підграфу $G \setminus St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$, породжують підграф гомеоморфний K_4 .

Відмітимо, що два трикутні промені символізують приєднання довільної точки грані, на границі якої лежать два суміжні ребра, до вершини.

Твердження 1.2. Три трикутні промені квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ 2-зв'язного графа G утворені з пари вершин u, v та трьох пар ребер (e_{i1}, e_{i2}) , $\{e_{i1}, e_{i2}\} \subset St_{n_i, n_2, n_3}(G_1) \setminus G_1$, $i = 1, 2, 3$, інцидентних вершинам u, v та із попарно спільними вершинами v_i , що належать підграфу $G \setminus St_n^1(G_1)$, породжують на множині вершин $\{u, v\} \cup \{v_i\}_{i=1}^3$ підграф: гомеоморфний: або $K_{2,3}$, якщо u, v несуміжні, або K_4 , якщо u, v суміжні вершини графа G та якась пара з $\{v_i\}_{i=1}^3$ вершини графа G , або K_5 , чи $K_5 \setminus e$, якщо u, v та дві чи всі пари з множини $\{v_i\}_{i=1}^3$ є суміжними вершинами графа G .

Доведення тверджень 1.1 та 1.2 впливатиме із умови наведеної в позначенні 1.

Лема 1.1. Для графа K_5 мають місце наступні твердження:

- а) Існує 2-кліткове вкладення в тор при якому множина вершин розміщується на простому циклі довжини 5, спільному для трьох 2-кліток;
- б) Існує не 2-кліткове вкладення в тор при якому множина вершин розміщується на циклі довжини 8 та частково на циклі довжини 4;
- в) Множина M , складена з усіх точок графа K_5 , а саме всіх вершин та по одній внутрішній точці кожного ребра, розміщується, або на двох 2-клітках-п'ятикутниках та одній 2-клітці чотирикутнику, або на двох трикутниках та восьмикутнику, причому підмножина точок, які не лежать на границі деякої клітки, що містить найбільшу кількість вершин та внутрішніх точок ребер, породжує, або підграф K_3 , або $K_{1,2}$;
- г) Число досяжності $t_{K_5}(M, \sigma_1) = 3$ та характеристики $\theta_{K_5}(M, \sigma_1) = 1$, $\partial\theta_{K_5}(M, \sigma_1) = 0$.
- д) Множина вершин K^0 графа K . $K_5 \setminus u = K$, $K^0 = \{1, 2, a, b, c\}$, із ребром $u = (1, 2)$ має дві підмножини $\{a, b, c\}$, $\{1, 2\}$ з числами досяжності 2 та мінімальні відносно видалення з них довільного елемента;
- е) $K_5 \setminus u \in \varphi$ -образом колеса W_4 з центром в вершині b та зірки $St_3(d) \setminus (d, b)$, а $K_{3,3} \in \varphi$ -образом колеса W_4 з центром в вершині b та зірки $St_3(d)$, причому одна з двох трійок належить $K_3 \setminus e$, а інша $\overline{K_3}$;
- ж) Для п'яти вершин графа K_5 маємо: $ms_{K_5}(K_5^0) = 1$, $krt_{K_5}(K_5^0) = 2$;
- з) Для чотирьох довільних вершин графа K_5 маємо: $ms_{K_5}(K_5^0 \setminus v) = 2$, $krt_{K_5}(K_5^0 \setminus v) = 3$;
- і) Для трьох довільних вершин графа K_5 маємо: $ms_{K_5}(K_5^0 \setminus \{u, v, w\}) = 2$, $krt_{K_5}(K_5^0 \setminus \{u, v, w\}) = 2$.

Доведення тверджень леми 1.1 полягає в побудові всіх неізоморфних вкладень графа K_5 в тор та перевірці вказаних властивостей як показано на рис.1.1.

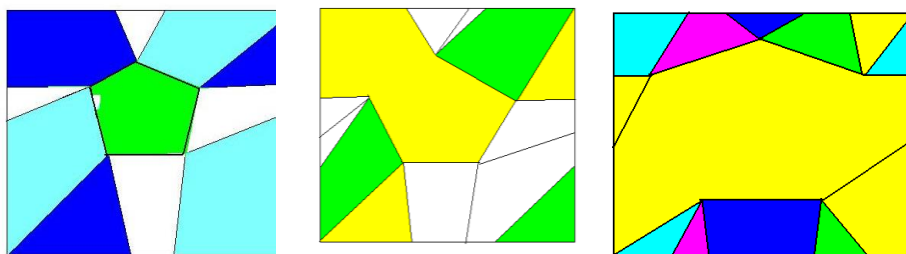


Рис.1.1 Вкладення 2-кліткове та два неізоморфних не 2-кліткових графа K_5 в тор.

Лема 1.2. Для графа $K_{3,3}$ мають місце наступні твердження:

- а) Існує 2-кліткове вкладення в тор при якому множина вершин розміщується на простому циклі довжини шість, спільному для трьох 3-кліток;
- б) Існує не 2-кліткове вкладення в тор при якому множина вершин розміщується на циклі довжини 10 та по чотири вершини на двох простих циклах довжини 4;

в) Множина M складена з усіх точок графа $K_{3,3}$, а саме всіх вершин та по одній внутрішній точці кожного ребра, розміщується, або на двох 2-клітинах-шестикутниках, або на одній 2-клітці-чотирикутнику та одній 2-клітці-десятикутнику, причому підмножина точок, які не лежать на границі деякої клітки, що містить найбільшу кількість вершин та внутрішніх точок ребер, породжує підграф K_2 ;

г) Число досяжності $t_{K_5}(M, \sigma_1) = 2$ та характеристики $\theta_{K_5}(M, \sigma_1) = 0$, $\partial\theta_{K_5}(M, \sigma_1) = 0$.

д) Множина вершин K^0 графа $K_{3,3} \setminus u = K$, $K^0 = \{1, 2, a, b, c, d\}$, із ребром $u = (1, 2)$ має дві підмножини $\{a, b, c, d\}$, $\{1, 2\}$ з числами досяжності 2 та мінімальні відносно числами досяжності при операції видалення із них довільного елемента;

е) $ms_{K_{3,3}}(K_{3,3}^0) = 2$, $krt_{K_{3,3}}(K_{3,3}^0) = 3$;

ж) $ms_{K_{3,3}}(K_{3,3}^0 \setminus \{u, v\}) = 2$ для деякої пари суміжних вершин u, v ;

з) $ms_{K_{3,3}}(K_{3,3}^0 \setminus \{u, v, w\}) = 3$ для довільної трійки попарно несуміжних вершин.

Доведення леми 1.2 полягає в побудові всіх неізоморфних вкладень графа $K_{3,3}$ до тору та перевірки вказаних властивостей, які видно з рис.1.2.

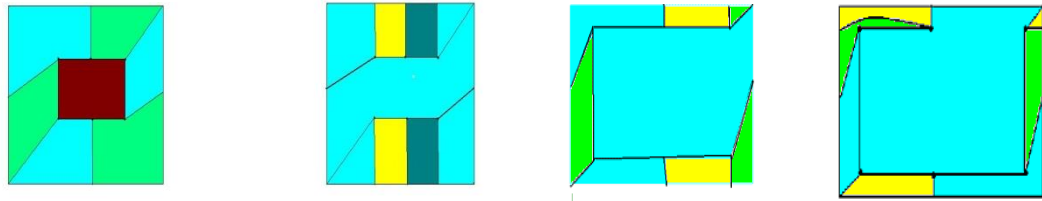


Рис.1.2. 2-кліткове вкладення графа $K_{3,3}$ в тор та не 2-кліткові, відповідно.

Лема 1.3. Нехай граф G є ϕ -образом графів-обструкцій G_1 та G_2 при ϕ -перетворенні визначеному наступним чином: $\phi(G_1 + G_2, \sum_{i=1}^2 (e_1 + e_2)) \rightarrow (G, e)$, де $e = (a, b)$, $e \in G^1$. $e_i = (a_i, b_i)$ є ребром, або частиною ребра графа G_i , $i = 1, 2$. Для орієнтованого роду $\gamma(G)$ мають місце наступні твердження:

1). Якщо принаймні одна кінцева вершина кожного з ребер e_i не матиме двостороннього доступу, то маємо рівність $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$;

2). Якщо кожна кінцева вершина одного з ребер e_i має двосторонній доступ, то матимемо рівність $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1$;

Доведення. Доведення леми 1.3 для довільних графів-обструкцій G_1 та G_2 аналогічне доведенню для двох графів K_5 , виконаному на рис. 1.2.1. Наведемо на рис. 1.2.2 доведення тверджень леми 1.3. для двох вкладених (ребра K_4 сині) в тор графів, зліва–направо, отриманих з двох пар графів $(K_4, K_{3,3})$, (K_4, K_5) шляхом ϕ -перетвореннями заданим на парі ребер цих пар. Відмітимо, що наявність

двостороннього доступу до ототожнених кінцевих вершин ребра означатиме відсутність додаткової 2-ручки. Так для графа K_5 вкладеного до Σ_2 -пляшки Клейна із двостороннім доступом до двох вершин (завдяки наявності кольорової клітини в яку можливо вкласти дві зірки із суміжними центрами на 5-ти та 6-ти ребрах-променях) та отримати мінімальне вкладення графа $K_7 \setminus e$ до Σ_2 .

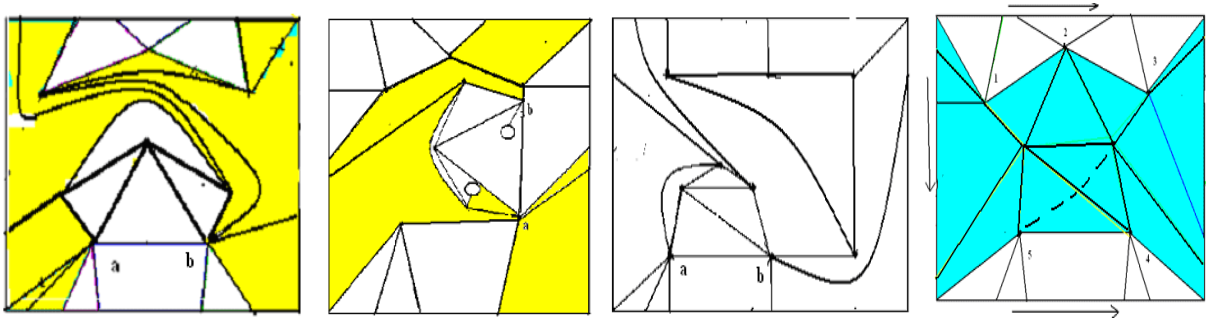


Рис. 1.2.1 До тверджень леми 1.3. наведено два перші графи (зліва-направо), що отримані з двох графів K_5 двома наступними φ -перетвореннями: 1) по парі ребер, 2) по ребру $e=(a,b)$ та частині ребра u , відповідно, де кольоровою є клітка вкладення в тор графа K_5 , до якої вкладено інший K_5 та виконано склейку; 3) Наведено склейку по ребру $e, e=(a,b)$, графів $K_5, K_{3,3}$; 4) Наведено мінімальне вкладення графа $K_7 \setminus e$ до Σ_2 -пляшки Клейна.

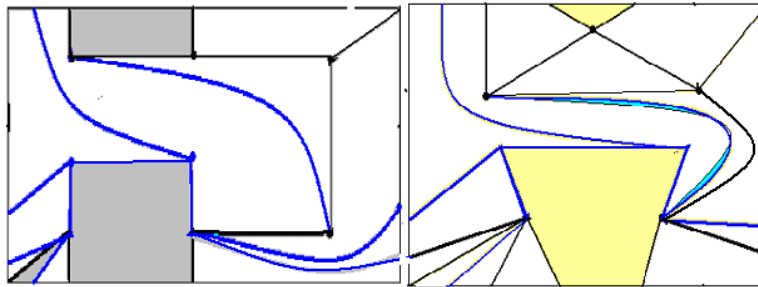


Рис. 1.2.2 Наведемо до тверджень леми 1.3. два вкладені в тор графи (зліва-направо) отримані з двох пар графів $(K_4, K_{3,3}), (K_4, K_5)$ φ -перетвореннями на парах ребер.

Лема 1.4. Нехай граф G є φ -образом графів G_1 та G_2 -обструкцій для проективної площини при φ -перетворенні визначеному наступним чином: $\varphi(G_1 + G_2, \sum_{i=1}^2 (e_1 + e_2)) \rightarrow (G, e)$, де $e = (a, b)$, $e \in G^1$, $e_i = (a_i, b_i)$ є ребром, або частиною ребра графа G_i , $i = 1, 2$. Тоді для неорієнтованого роду $\gamma(G)$ не виконуються твердження леми 1.3.

Доведення. Дійсно із наведених на рис. 1.2.3 вкладень до проективної площини графів K_5 та $K_{3,3}$ видно відсутність двостороннього доступу до довільної підмножини їхніх вершин. Але для $K_5 / (4,7)$ є двосторонній доступ до пари суміжних вершин 3, 4, 7, який не впливає на рід графа A_2 зі списку графів-обструкцій для проективної площини.

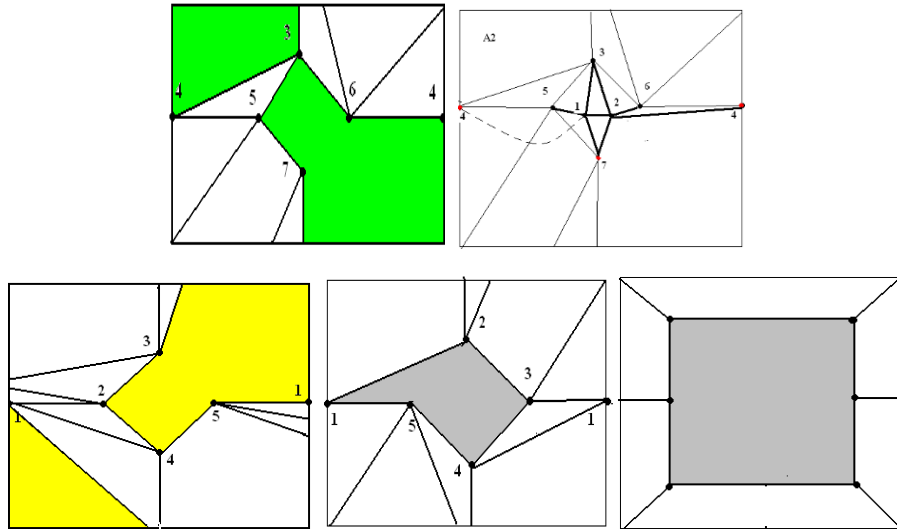


Рис.1.2.3. Мінімальні вкладення графів $K_5/(4,7)$, $A_2/(1,4)$, K_5 , $K_{3,3}$ до проективної площини.

Лема 1.5. Нехай граф G є ϕ -образом графів G_1 та G_2 -обструкцій для поверхні орієнтовного роду $\gamma(G)$ при ϕ -перетворенні визначеному наступним чином: $\phi(G_1 + G_2, \sum_{i=1}^3 (a_{1i} + a_{2i})) \rightarrow (G, \{a_i\}_{i=1}^3)$, на множині точок $\{a_{ji}\}_{i=1}^3$ графа G_j , де $j = 1, 2$. Для орієнтовного роду $\gamma(G)$ мають місце наступні твердження:

- 1). Якщо принаймні одна вершина a_{ji} не матиме двостороннього доступу, то маємо рівність $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + 1$;
- 2). Якщо кожна кінцева вершина a_{ji} із множини приєднання одного з графів до іншого має двосторонній доступ, то матимемо рівність $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$;

Доведення цієї леми проілюстроване на рис 1.2.4.

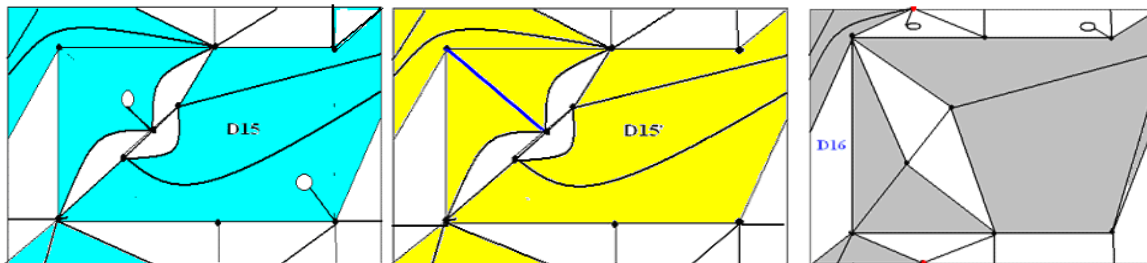


Рис.1.2.4. Мінімальні вкладення до 2-тору та тору графів $D15$ і $D15'$, (зліва направо) та вкладення в 2-тор графа $D16$, який містить підграф $K_5 \setminus e$, приєднаний до $K_{3,3}$ по двом суміжним ребрам, у яких спільна вершина з $K_{3,3}$ має двосторонній доступ на торі.

Лема 1.6. Графи K_6, K_7 задовольняють наступним твердженням:

- а) Для графа K_6 на торі маємо два неізоморфних 2-кліткових вкладення;
- в) Для множини вершин графа K_6 маємо $t_{K_6}(K_6^0) = 1$, а для довільного ребра e існує така вершина v , що має місце рівність $ms_{K_6 \setminus e}\{v\} = 2$.

Доведення тверджень лема 1.6 полягає в побудові всіх неізоморфних вкладень графа K_6 в тор та перевіряє вказаних властивостей як показано на рис.1.2.5.

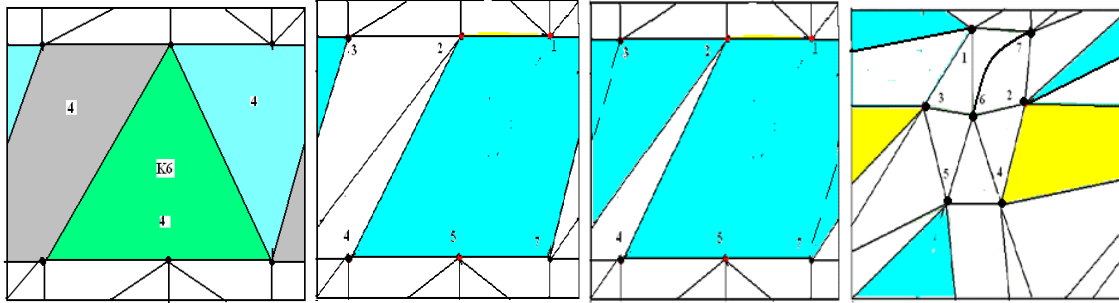


Рис.1.2.5. Два 2-кліткових неізоморфних вкладення графа K_6 , та по одному вкладенню $K_6 \setminus e, K_7$ в тор.

Твердження 1.4. Нехай задане вкладення f графа G - обструкції тора в 2-тор і ребро $u, u = (c, d)$, яке розміщується на 2-ручці $h(s_1, s_2)$, приєднаній до $s_1, s_2, \{s_1, s_2\} \subset \sigma_1 \setminus f(G)$, т.то $f(u) \subset h(s_1, s_2)$. Тоді видалення деякого ребра $e, e = (a, b)$, графа G призводить до зменшення принаймні на 1 числа підграфів графа G гомеоморфних K_4 та таких, що містять ребро $u, u = (c, d)$, де $f|_G(e)$ розташоване вкладенням f на 2-ручці приєднаній до тору, а в графі $f|_{G \setminus e}$ ребро u розміщуватиметься в середині клітки s з границею $\partial s, \partial s = \partial s_1 \cup \partial s_2 \setminus f(e)$.

Із наведених вище лем та тверджень випливають твердження наступної теореми.

Теорема 1.0. Для G -граф-обструкції тора мають місце наступні твердження:

0). Кожне ребро 2-зв'язного графа-обструкції для тора належить підграфу гомеоморфно му, або K_4 , якщо підграф $G \setminus e$ 2-зв'язний, або $K_{2,3}$, якщо підграф $G \setminus e$ 1-зв'язний.

1) Існує φ -перетворення графів H та $St_r(M)$, визначене наступною формулою:

$$\varphi(H + St_m(M), \sum_{i=1}^h (h_{i1} + h_{i2})) \rightarrow (G, \{h_i\}_{i=1}^h)$$
, при умові, що $\gamma(G)$ - орієнтовний рід графа G задовольняє рівності $\gamma(G) = \gamma(H) + 1$, де підграф H має найменше число $\Phi_G(H, M)$ серед всіх підграфів графа G , що містить частину гомеоморфну K_4 , чи $K_{2,3}$, із підмножиною вершин $\{h_{i1}\}, 0 < i \leq h$, а квазізірка $St_r(M)$ із центром-графом $M, m_j \in M^0, 0 < j \leq m$, містить підмножину потужності r складену з ребер (h_{i2}, m_j) , як всіх висячих з підмножини M_1 , де $M_1 = \{h_{i1}\}_{i=1}^h$, так і трикутних променів з підмножини $M_2, M_2 = \{h_{i2}\}_{i=1}^h$, множини $(G^1 \setminus H^1) \setminus M^1, m_j \in M^0, 0 < j \leq m, \deg_{St_r(M)}(h_{i2}) = 2$;

2). $\gamma(G) \leq \gamma(H) + \gamma(M) - ms'_H(M_1, f|_H) + x(H, M)$, де $(\gamma(H), \gamma(M)) \in \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$, $0 \leq x_G(H, M) \leq 4$, $|0 \leq ms'_H(M_1, f|_H) \leq 3$, де $ms'_H(M_1, f|_H)$ - кількість точок двостороннього доступу задіяних при вкладенні f графа G в поверхню орієнтованого роду $\gamma(G)$, $x_G(H, M)$ - найменша кількість мінімальних по включенню підграфів чи частин графа G гомеоморфних K_4 чи $K_{2,3}$, які покривають всі ребра e_{ij} , де $e_{ij} = (h_i, m_j)$, $h_i \in H$, $m_j \in M$, та, можливо, найкоротшими простими ланцюгами графів H, M , що починаються та закінчуються кінцевими вершинами ребер e_{ij} тільки одного з цих графів H, M ;

3). Орієнтований рід $\gamma(G)$ граф-обструкції G задовольняє нерівності

$$\gamma(G) \leq \gamma(H) + \gamma(M) + t_H(M_1, \sigma_1) + t_M(M_1, s) - \theta_H(M_1, \sigma_1) - \theta_M(M_1, s) - \partial\theta_H(M_1, \sigma_1) - \partial\theta_M(M_1, s) - ms'_H(M_1, f|_H) + x(H, M) - 2;$$

4). Довільна граф-обструкція G має величини $|\Phi_G(H, M)| - ms'_H(M_1, f|_H)$ та

$t_M(M_1, s) - \theta_H(M_1, \sigma_1) - \theta_M(M_1, s) - \partial\theta_H(M_1, \sigma_1) - \partial\theta_M(M_1, s) - 2 + t_H(M_1, \sigma_1)$ різного порядку для одного й того ж перетворення довільного графа G , заданого так як наведено в 1);

5). Множина точок приєднання може бути розбита на дві підмножини: або $M_1 = \{h_{i1}\}_{i=1}^h$, або $M_2 = \{h_{i2}\}_{i=1}^h$, та $\{m_j\}_{j=1}^n$, $\{m_j\}_{j=1}^n \subset M^o$, які мають на площині числа досяжності 2, а видалення довільного ребра приєднання призводить до зменшення числа досяжності однієї з цих множин;

6). Вкладення $St_r(M)$ до 2-клітини s з множини $\sigma_1 \setminus f|_H(H)$ визначає підмножину ребер $e \in f|_H(H^1) \cap \partial s$, видалення яких приводить до появи ненульового двостороннього доступу $ms_{H \setminus e}(M_1, f|_{H \setminus e})$;

7). Видалення довільного ребра e підграфа H збільшує $ms_{H \setminus e}(M_1, f|_{H \setminus e})$ -кратність доступу до M_1 як множини точок приєднання, або $krt_G(M_1)$ -сторонній доступу до M_1 ;

8). Якщо підграф M має дві зв'язні компоненти M_1, M_2 , яких мінімальним вкладенням $f|_M: G \rightarrow \sigma_2$ розміщено до клітини s 2-тора, то образи компонент розділять одна одну як пара зхрещених ребер на площині кола.

Доведення. Нехай граф G , $G = (G^0, G^1)$, є 2-неприведеним графом орієнтовного роду із n вершинами, f_i - мінімальне вкладення графа G в 2-тор яке розташовує на одній з 2-ручок 2-тора тільки одне задане ребро графа G . Доведемо твердження 0). Оскільки для кожного ребра e 2-зв'язного графа G -обструкції для тора існує таке мінімальне вкладення f графа G в 2-тор при якому тільки це ребро розрізатиме 2-ручку приклеєну до двох кліток s_1, s_2 з множини $\sigma_1 \setminus f(G \setminus e)$, то кожне ребро 2-зв'язного графа-обструкції для тора має належати підграфу гомеоморфному, або K_4 , якщо підграф $G \setminus e$ 2-зв'язний, або $K_{2,3}$, якщо підграф $G \setminus e$ 1-зв'язний.

Доведемо твердження 1). В графі G виділимо підграф H . Позначимо через $\Phi_G(H, M)$ множину всіх різних підграфів Φ_i графа G гомеоморфних K_4 чи $K_{2,3}$, та породжених принаймні однією парою ребер (e_1, e_2) , $e_i = (h_{i2}, m_j)$, у яких кінцеві вершини h_{i2} розділяють одна одну на ∂s клітині тора (можливо, простими ланцюгами, що належать до підграфа H). Нехай підграф H або гомеоморфний K_5 , $K_5 \setminus e$, $K_{3,3}$, чи $K_{3,3} \setminus e$, або містить, принаймні, деяку частину гомеоморфну K_5 , $K_5 \setminus e$, $K_{3,3}$, чи

$K_{3,3} \setminus e$, та такий, що має найменше число $\Phi_G(H, M)$ на множині всіх таких підграфів H . Позначимо через h' кількість його вершин. На множині ребер $G^1 \setminus H^1$ визначимо квазізірку $St_r(M)$ із центром-графом M на m вершинах та підмножиною потужності r з елементами - висячими ребрами (h_{i_2}, m_j) , які належать до підмножини $(G^1 \setminus H^1) \setminus M^1$, де $h'+m = |G^0| = n$, що утворені розщепленням кожної вершини h_i на пару вершин (h_{i_1}, h_{i_2}) , де $h_{i_1} \in H^0$, $h_{i_2} \in M^0$, $M_1 = \{h_{i_1}\}_{i=1}^h$, $M_2 = \{h_{i_2}\}_{i=1}^h$, $0 < i \leq h$, $0 < j \leq m$, $2 \leq h$, $3 \leq m$. Згідно визначення 5 вектор доступу до точок з M_1 має вид $(ms_H(M_1, f_1), ms_H(M_1, f_2), \dots, ms_H(M_1, f_N))$, де N кількість неізоморфних мінімальних вкладень f_i графа G в 2-тор та їхніх звужень $f_i|_H$ на підграф H . Для кожного такого звуження $f_i|_H$ визначимо клітину s , $s \in \sigma_1 \setminus f_i|_H(H)$, на границі якої ∂s розміщуються елементи множини $M_1 = \{h_{i_1}\}_{i=1}^h$ та має місце k -сторонній доступ, $k = ms_H(M_1, f_1)$, до кожної з точок h_{i_1} із довільної внутрішньої точки клітини s . Будемо при цьому враховувати те, що однаковими є й ті підграфи, які відрізнятимуться тільки парою ребер-хорд чи парою простих ланцюгів із принаймні однією спільною кінцевою вершиною.

Вважатимемо, що ці h_{i_2} розміщені у внутрішніх точках клітини \bar{s} навпроти вершини h_{i_1}

розташованої на границі клітини тора ∂s та попарно ототожнюються в точку h_i , де $\bar{s} = s \cup \partial s$, $s \in \sigma_1 \setminus f(G)$, f - довільне мінімальне вкладення графа G в 2-тор, $0 < i \leq h$. Наведене розбиття графа G на підграфи H та $St_m(M)$ визначає на них ϕ -перетворення на множинах точок M_1, M_2 , шляхом ототождження пар вершин (h_{i_1}, h_{i_2}) на вершину h_i , де $M_1 = \{h_{i_1}\}_{i=1}^h$, $M_2 = \{h_{i_2}\}_{i=1}^h$, з числами досяжності t_{M_1}, t_{M_2} та характеристиками $\theta_{M_1}, \partial\theta_{M_1}, \theta_{M_2}, \partial\theta_{M_2}$, відповідно. Якщо порядок ототождження пар вершин (h_{i_1}, h_{i_2}) не призводить до перетину у внутрішніх точках будь-яких пар ребер (e_1, e_2) виду $e_i = (h_i, m_j)$, то згідно [29] для орієнтовного роду графа G матимемо нерівність $\gamma(G) \leq \gamma(H) + \gamma(M) + t_H(M_1, \sigma_1) + t_M(M_1, s) - \theta_H(M_1, \sigma_1) - \theta_M(M_1, s) - \partial\theta_H(M_1, \sigma_1) - \partial\theta_M(M_1, s) - 2$.

В іншому випадку, коли є перетин ребер підграфів Φ_i гомеоморфних K_4 чи $K_{2,3}$, потрібно приєднувати стандартним перетворенням кожну з $|\Phi_G(H, M)|$ дворучок до тору на яких розміщуватиметься одне з тих ребер, що перетинаються. З урахуванням двостороннього доступу до точок з множини M_1 кількість приєднаних дворучок не перевищуватиме

$|\Phi_G(H, M)| - ms'_H(M_1, f|_H)$ для заданого f - довільного мінімального вкладення графа G в 2-тор σ_2 , тобто $\gamma(G) \leq \gamma(H) + \gamma(M) + |\Phi_G(H, M)| - ms'_H(M_1, f|_H)$.

Наступні два варіанти є вичерпними: 1) $f_i|_H$ - двокліткове вкладення підграфа H в тор (s двоклітина); 2) $f_i|_H$ - недвокліткове вкладення підграфа H в тор (s недвоклітина)

та вичерпні наступні підвипадки: а) M - зв'язний граф, б) M - незв'язний граф.

Розглянемо випадок 1) та підвипадок а) коли M - зв'язний граф принаймні на двох вершинах. Стверджуємо, що є принаймні чотири висячі ребра інцидентних різним вершинам графа M . Доведемо нерівність $1 \leq |\Phi_G(H, M)| \leq 3$. Очевидно, що $|\Phi_G(H, M)| \geq 1$. Оскільки рід графа G дорівнює 2, то маємо нерівність $|\Phi| > 0$. Якщо задане мінімальне недвокліткове вкладення $f|_H$ графа H в тор даватиме двосторонній доступ до принаймні однієї з вершин пари (h_1, h_2) по недвоклітці s , то згідно лем 1.1, 1.2, 1.3 можливе вкладення графа з множини Φ без перетину у внутрішніх точках ребер e_1, e_2

в s та розширення вкладення $f|_H$ до вкладення f графа G в тор. Відмітимо, що коли обидві вершини пари $(h_1, h_2) \in$ внутрішніми точками ребер графа H , то немає доступу двостороннього до цих вершин у випадку частини графа G як це показано на рис.1.2.3.

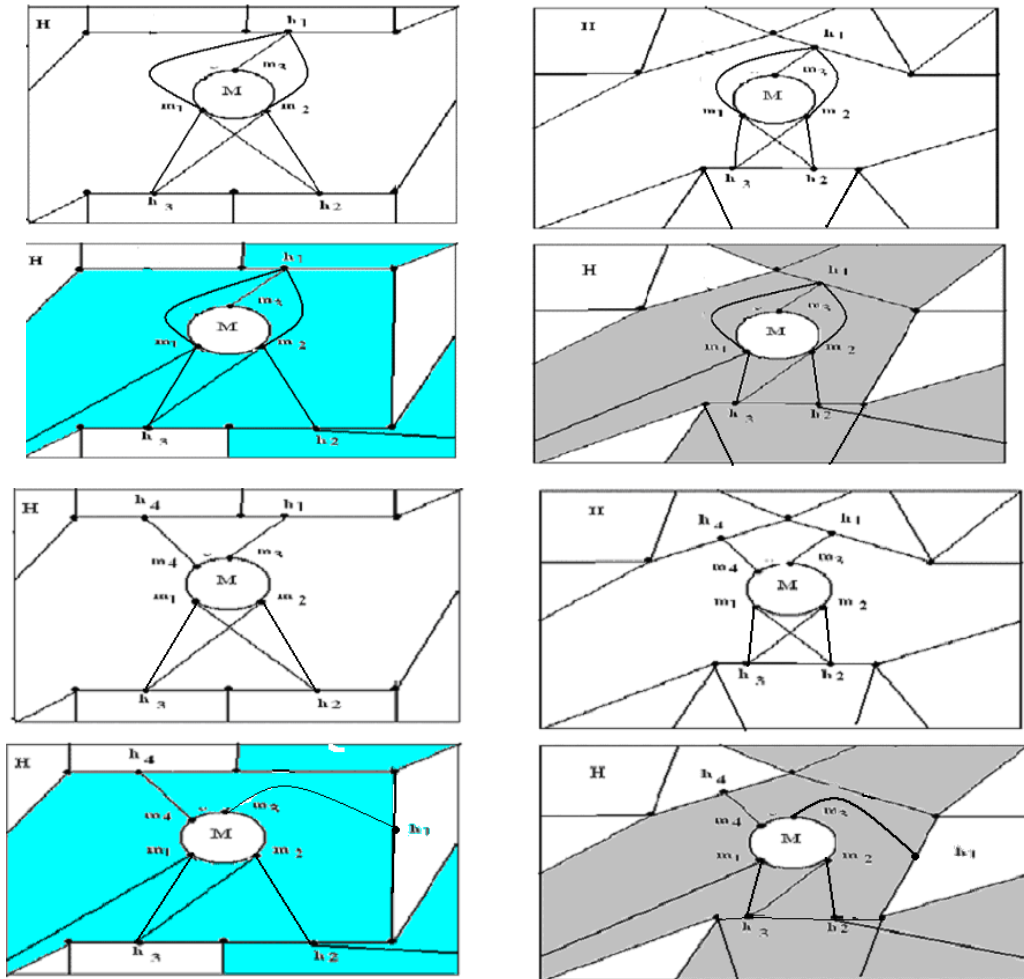


Рис 1.2.3. Схеми вкладення в тор графа G для $H = K_{3,3}$ та $H = K_5$ на яких видно роль двостороннього доступу до вершин пари несуміжних ребер графа K_4 , яка не призводить до збільшення роду $\gamma(G)$, хоча порядок отождоження точок вимагає цього.

Виконаємо скінчену кількість φ -перетворень - операцій по приєднанню до G по множині із n_1 вершин підграфа H приєднаємо до нього зірку $St_{n_1}(v_1)$ із кількістю ребер n_1 та отримаємо граф G_{01} .

З іншого, боку оскільки для кожного ребра e 2-зв'язного графа G -обструкції для тора існує таке мінімальне вкладення f графа G в 2-тор при якому тільки це ребро розрізатиме 2-ручку приклеєну до двох кліток s_1, s_2 з множини $\sigma_1 \setminus f(G \setminus e)$, то кожне ребро 2-зв'язного графа-обструкції для тора має належати підграфу гомеоморфному, або K_4 , якщо підграф $G \setminus e$ 2-зв'язний, або $K_{2,3}$, якщо підграф $G \setminus e$ не 2-зв'язний.

Теорема 1.1. [8] З точністю до ізоморфізму є тільки три 2-неприведені для тору підграфи графа K_8 : $B_1 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_3^1)$, $B_2 = (K_8^0, K_8^1 \setminus (K_{1,2}^1 \cup 2K_2^1))$, $B_3 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1)$.

Доведення. Нехай G є 2-неприведеним графом орієнтовного роду 2. Виділимо в ньому підграф H гомеоморфний K_5 , чи $K_{3,3}$ і по досяжній множині із n_1 вершин підграфа H приєднаємо до нього зірку $St_{n_1}(v_1)$ із кількістю ребер n_1 та отримаємо граф G_{01} . Замінімо граф H на граф G_{01} та зробимо теж саме, що й для $St_{n_1}(v_1)$ тільки замість зірки $St_{n_1}(v_1)$ оберемо $St_{n_2}(v_2)$, де $n_1 \geq n_2 > 2$, та отримаємо граф G_{02} . Якщо H гомеоморфний K_5 , то повторимо цю операцію третій раз для G_{02} та зірки $St_{n_3}(v_3)$, де $n_1 \geq n_2 \geq n_3 > 2$, та отримаємо граф G_{03} . Для графа G_{03} на восьми вершинах потрібно знайти всі різні пари вершин з досяжністю 2 та з'єднати їх ребром. В результаті матимемо граф-обструкцію роду 2 на 8-ми вершинах. Зауважимо, що підграф H не гомеоморфний $K_{3,3}$. У разі, коли підграф H гомеоморфний $K_{3,3}$ маємо до нього приєднувати по множині вершин дві різні зірки щонайбільше із 6-ма висячими вершинами, тоді згідно леми 1.2 отримаємо граф роду 1, що суперечить умові щодо 2-неприведеності графу G орієнтовного роду 2.

Реалізуємо цей алгоритм на вхід якого подано граф G . Алгоритм перебирає всі різні варіанти укладання на торі графа $G \setminus e$ для довільного ребра e та визначає, чи буде досяжною на торі множина кінцевих вершин ребра e , тобто чи це ребро укладатиме ться з одним перетином у внутрішній точці із деякими ребрами квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$, яку вкладено до клітин як 2-клітин, чи не 2-клітин, що утворилися як при 2-кліткових, так і не 2-кліткових вкладеннях в тор графа K_5 , чи немає такого перетину. Перетин у внутрішній точці деяких ребер квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ обумовлений наявністю хоча б одного підграфа K , гомеоморфного графу K_5 чи графу $K_{3,3}$, і породженого на деяких ребрах квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ та графа K_5 . Вкладення графа K до клітин, породжених вкладенням в тор графа K_5 , може бути як 2-клітковим так і не 2-клітковим, і пов'язане з тим, що інша частина графа $G \setminus (K \cup K_5)$ має вкладатися до кліток породжених вкладенням в тор графа K_5 так, щоб давати при кожному укладанні на торі принаймні один перетин ребер графа G . Роботу алгоритму буде закінчено тоді коли будуть переглянуті всі варіанти вкладень в тор підграфа $G \setminus e$ для кожного ребра e графа G .

Позначимо через G 2-неприведений граф орієнтовного роду 2 та ізоморфний деякому підграфу графа K_8 . Розглянемо звуження f' довільного мінімального вкладення $f, f : G \rightarrow \sigma_2$ на підграф K_5 графа G та введемо наступні позначення.

Позначення 1. Під квазізіркою $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ з центром графом G_1 будемо розуміти об'єднання графа G_1 , $G_1 = (\{v_i\}_{i=1}^3)$, та трьох зірок $St_{n_i}(v_i)$ із висячими вершинами $\{g_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ і ребрами в кількості n_i , але без спільних ребер та із центральними вершинами v_i , що породжують підграф G_1 графа G .

Позначення 2. Будемо називати трикутним променем квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ граф K_3 утворений з одного ребра e графа G_1 та двох суміжних йому ребер e_1, e_2 із $St_{n_1, n_2, n_3}^1(G_1) \setminus G_1^1$ зі спільною вершиною v степеня 2. Іншими словами, це символізуватиме довільне ребро типу (v_i, v) , де v_i - внутрішня точка ребра e .

Тоді матимемо ϕ -перетворення графа K_5 та квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ на граф G визначене наступним чином: $\phi(K_5 + St_{n_1, n_2, n_3}(G_1), \sum_{i=1}^5 (a_i + \{g_{ij}\}_{j=1}^{n_1+n_2+n_3})) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, т. то утворюємо граф G шляхом отожднення кожної пари $(a_i, \{g_{ij}\}_{j=1}^{k_i})$, складеної з вершини a_i графа K_5 та кожної з вершин підмножини $\{g_{ij}\}_{j=1}^{k_i}$ кінцевих точок висячих ребер квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$, в вершину a_i^* , де $\sum_{i=1}^5 k_i = n_1 + n_2 + n_3$.

Видалимо в G довільне ребро (a, b) . Для множини ребер графа G_1 є чотири наступних випадки: а) $|G_1^l| = 0$, б) $|G_1^l| = 1$, в) $|G_1^l| = 2$, г) $|G_1^l| = 3$. Відмітимо те, що у випадках в), г) граф $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$, як зв'язний граф з трьома вершинами, вкладатиметься до однієї клітки s , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$, де $p_1(\partial s) > 0$, тому число досяжності множини висячих вершин зменшиться на 1, у тому випадку коли мало ненульове значення. Наприклад, для множини з трьох пофарбованих вершин $K_5 \setminus u$ досяжної на торі, бо вкладеної до не 2-клітки тора, маємо на площині число досяжності 2, теж саме має місце для множини з двох пофарбованих червоним вершин графа $K_{3,3} \setminus u$, див. рис. 1.2а. Тоді у випадках в), г) має місце одне з двох тверджень:

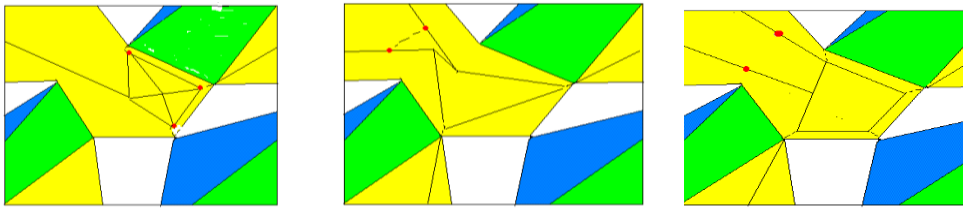


Рис. 1.2а. $K_5 \setminus u$ та $K_{3,3} \setminus u$ із множинами досяжних, пофарбованих червоним, вершин.

або є двосторонній доступ до підмножини з чотирьох вершин графа $f(K_5)$ та один варіант доступу для підмножини з трьох вершин, одна з яких не входить до цієї четвірки вершин графа $f(K_5)$, або є двосторонній доступ до трьох вершин графа $f(K_5)$ та один варіант доступу для підмножини з цих же трьох вершин графа $f(K_5)$.

Розглянемо випадок в). Маємо не 2-кліткове вкладення $f, f : K_5 \rightarrow \sigma_1$ та два різних підвипадки укладання (відносно зеленого чотирикутника) графа $St_{3,4,4}(K_{1,2}) \setminus (a,b)$ в середину восьмикутника, які наведені на рис. 1.3, де три вершини графа $K_{1,2}$ розфарбовані. Підвипадок в1) –центральна вершина графа $K_{1,2}$ з'єднана ребрами з трьома із чотирьох вершин із двократним доступом, якщо з'єднати ребром дві нецентральні вершини графа, то матимемо граф B_2 , де $B_2 = (K_8^0, K_8^1 \setminus (K_{1,2}^1 \cup 2K_2^1))$.

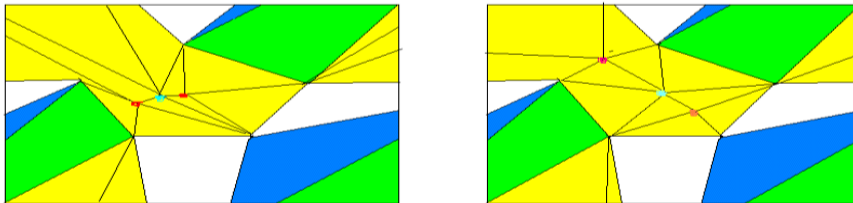


Рис. 1.3. Підвипадки в1), в2), зліва направо, та $St_{3,4,4}(K_{1,2}) \setminus (a,b) \subset \bar{s}$

Підвипадок в2) –центральна вершина графа $K_{1,2}$ з'єднана ребрами із кожною з чотирьох вершин із двократним доступом. Якщо з'єднати ребром дві нецентральні вершини графа $K_{1,2}$, то матимемо граф B_2 із лишнім ребром, де $B_2 = (K_8^0, K_8^1 \setminus (K_{1,2}^1 \cup 2K_2^1))$.

Розглянемо випадок г). Маємо не 2-кліткове вкладення $f, f : K_5 \rightarrow \sigma_1$ та два різних підвипадки укладання (відносно зеленого чотирикутника) графа $St_{3,4,4}(K_3) \setminus (a,b)$ в середину восьмикутника, які аналогічні наведеним на рис. 1.3, де три вершини графа K_3 розфарбовані, та три підвипадки г1), г2), г3). Підвипадок г1) –одна вершина графа K_3 з'єднана ребрами з трьома із чотирьох вершин із двократним доступом, тобто матимемо граф B_2 . Підвипадок г2) –одна з вершин графа K_3 з'єднана ребрами із кожною з чотирьох вершин із двократним доступом, то матимемо граф B_2 із лишнім ребром. Підвипадок г3) –одна вершина графа K_3 з'єднана ребрами з трьома із чотирьох вершин із двократним доступом, тобто граф $St_{3,4,4}(K_3) \setminus (a,b)$ укладемо (відносно зеленого чотирикутника) граф $St_{3,3,4}(K_3) \setminus (a,b)$ в середину восьмикутника, як наведено на рис. 1.4, де три ребра графа K_3 пофарбовані. Підвипадок г4) –одна вершина графа K_3 з'єднана ребрами з чотирма із чотирьох вершин із двократним доступом, тобто граф $St_{3,3,4}(K_3) \setminus (a,b)$ укладемо (відносно зеленого чотирикутника) sz в середину восьмикутника, як наведено на рис. 1.4, де три ребра графа K_3 пофарбовані.

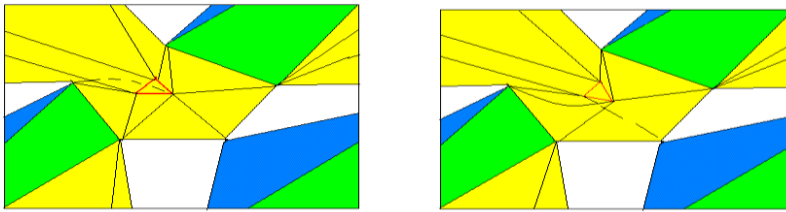


Рис. 1.4. Підвипадки г3), г4), зліва направо, та $St_{3,3,4}(K_3) \setminus (a,b) \subset \bar{s}$

Розглянемо випадок б). Наявність одного ребра e графа G_1 з трьома вершинами породжує два підвипадки: б1) $f(G_1) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ для не 2-кліткового вкладення f графа K_5 в тор σ_1 ; б2) $f(G_1) \not\subset \bar{s} \setminus \partial s$, для довільної клітини s , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ 2-кліткового вкладення f графа K_5 в тор σ_1 . У підвипадку б1), згідно леми 1.1, матимемо для не 2-кліткового вкладення f графа K_5 в тор σ_1 таку клітину s , що забезпечує двосторонній доступ до трьох вершин графа K_5 при вкладенні в неї ребра (a,b) .

У підвипадку б2), згідно леми 1.1, матимемо для 2-кліткового вкладення f графа K_5 в тор σ_1 такі дві 2-клітини s, s' в одну з яких вклатиметься ребро (a,b) .

З іншого боку для $St_{n_1}(v_{i1})$ та $St_{n_2, n_3}(K_2)$ маємо наступні три підвипадки: підвипадок б1)- обидва графи вкладено в не 2-клітину, підвипадок б2)- один граф вкладено в не 2-клітину, а інший до 2-клітки; підвипадок б3)- обидва графи вкладено до 2-клітин. В кожному з цих підвипадків існуватиме підграф ізоморфний $B_3 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1)$.

Підвипадок б1) коли обидва графи вкладено в не 2-клітину.

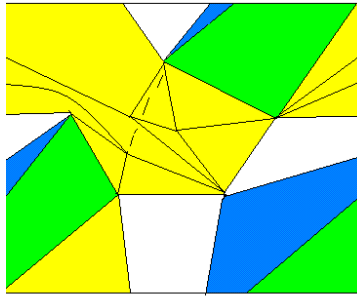


Рис. 1.5. Підвипадок б1) та $St_{3,3}(K_2) \subset \bar{s}$, $St_5(v) \subset \bar{s}$

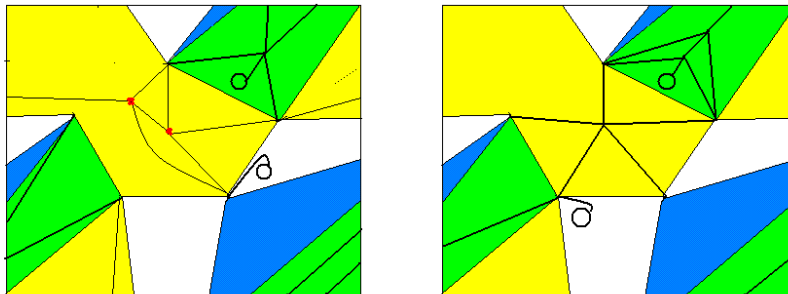


Рис. 1.6. Підвипадок б2) та $St_{3,3}(K_2) \subset \bar{s}$, $St_5(v) \subset sz$.

Підвипадок б2) коли один граф вкладено в не 2-клітину, а інший до 2-клітки.

Підвипадок б3) обидва графи вкладено до 2-клітин. Мають місце два варіанти наведені на рис.1.6а в кожному з яких маємо підграф B_3 .

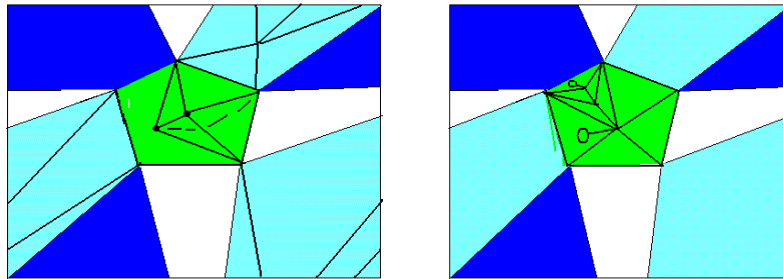


Рис. 1.6а. Два варіанти підвипадку б3).

Розглянемо випадок а). Стверджуємо, що для кожної із трьох зірок $St_{n_i}(v_i)$ із центральними вершинами v_i , які належатимуть графу G_1 , та висячими вершинами $\{g_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ і ребрами в кількості n_i , має виконуватися умова $n_i = 5$. Якщо припустити, що для якогось n_i матиме місце $n_i < 5$, нехай це ребро (v_1, g_1) , то згідно лемі 1 для не 2-кліткового f' існує клітина в середину якої вкладатимуться дві зірки з п'ятьма висячими ребрами та одна зірка з чотирма висячими ребрами. Це означатиме побудову вкладення $f'', f'' : G \rightarrow \sigma_1$, що суперечить умові щодо роду графа G , тобто наше припущення невірне. Таким чином $G = B_1$. Мінімальне вкладення графа B_1 в подвійний тор, або тор з ручкою $h, h = h(s_1, s_2)$, побудуємо шляхом розширення f'' до f''' , яке полягатиме у розміщенні ребра $f'''(v_1, g_1)$ на ручці h , де $f'''(v_1) \in \partial s_1, f'''(g_1) \in \partial s_2$.

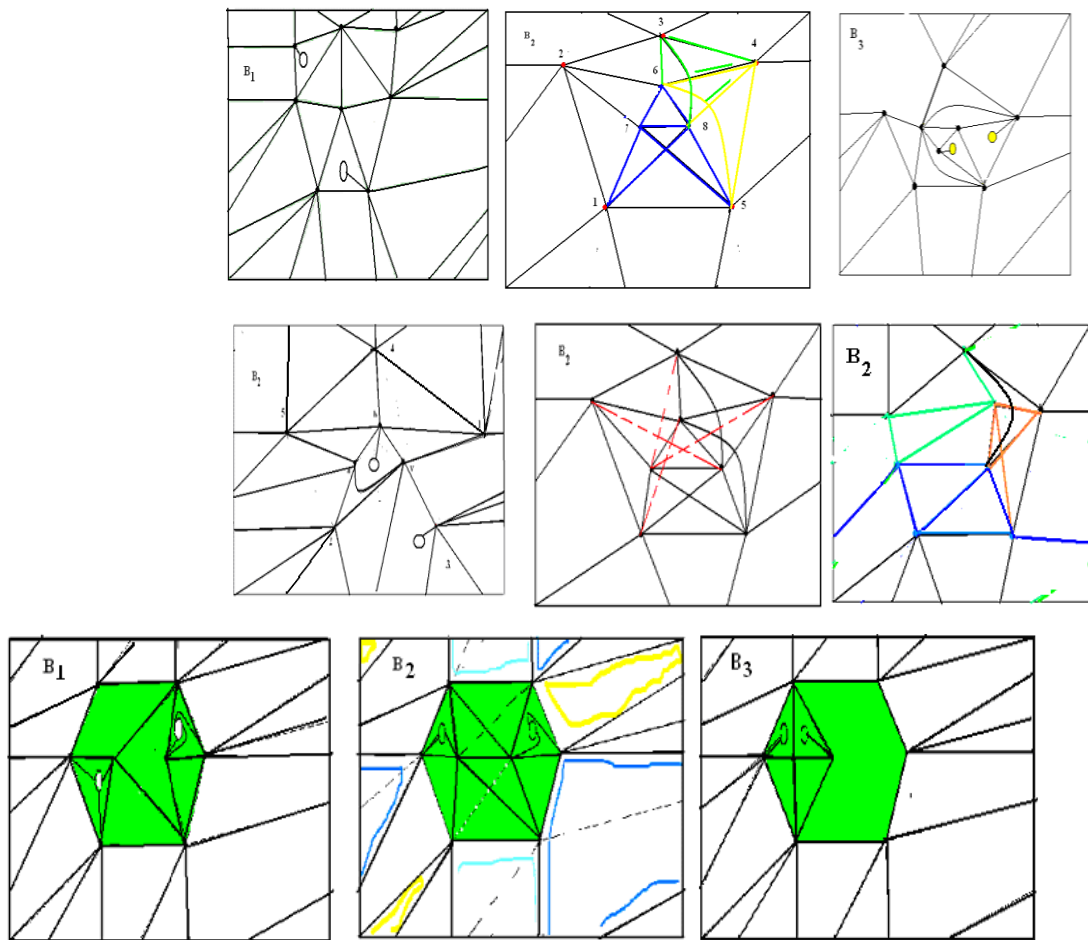


Рис.1.7.

Мінімальні вкладення графів B_1, B_2, B_2, B_3 , зліва направо. Верхній ряд доводить, що $H=K_5$ мінімізує число перехрещень ребер на торі графів B_1, B_2, B_3 .

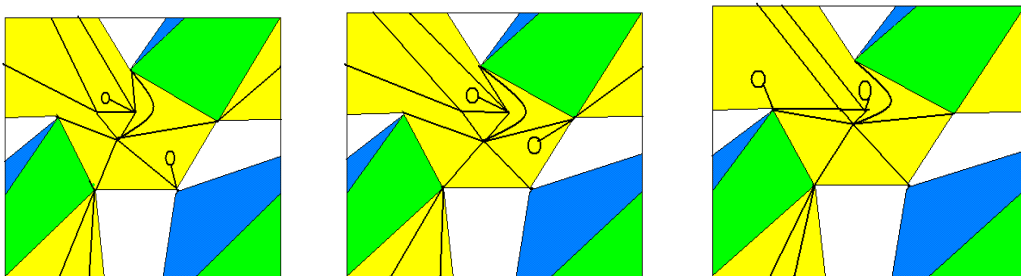


Рис.1.7а. Вкладення квазізірки з центром K_3 до не 2-клітини тору та його розширення на K_5 до вкладення в подвійний тор.

Наслідок 1.1. Для B_1, B_2, B_3 неізоморфних 8-ми вершинних графів-обструкцій для тору мають місце наступні φ -перетворення:

- 1) $\varphi(K_5 + St_{5,5,5}(\bar{K}_3), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (B_1, \{i\}_{i=1}^5)$, де $St_{5,5,5}(\bar{K}_3)$ -квазізірка з центром з трьох несуміжних між собою вершин, які мають по п'ять висячих ребер із кінцевими вершинами, кожна з яких

ототожнюються із кожною вершиною з множини $\{1'', 2'', 3'', 4'', 5''\}$, а потім з вершинами $\{1', 2', 3', 4', 5'\}$ графа K_5 , $St_{5,5,5}(\bar{K}_3) = \bigcup_{j=1}^3 St_5(j)$;

2) $\varphi(K_5 + St_{3,4,4}(K_3), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (B_2, \{i\}_{i=1}^5)$, де $St_{3,4,4}(K_3)$ квазізірка з центром з трьох суміжних між собою вершин, одна з яких має три висячих ребра із кінцевими вершинами, кожна з яких ототожнюється із вершинами $1', 2', 3'$ графа K_5 , а дві інші вершини матимуть по чотири висячих ребра із кінцевими вершинами, кожна з яких ототожнюється із однією з вершин $1', 2'$ та трьома вершинами $3', 4', 5'$ графа K_5 , причому множина вершин $St_{3,4,4}^0(K_3)$ породжує підграф K_4 , $K_4^0 = \{1'', 2'', 3'', 5''\}$ із трикутником K_3 одне ребро якого має ще два кратних 1-підрозділених виділеними точками $3'', 4''$, а два інших ребра цього K_3 мають по одному кратному ребру 1-під-розділеному виділеними точками $1'', 2''$;

3) $\varphi(K_5 + St_{2,2,5}(K_3), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (B_3, \{i\}_{i=1}^5)$, де $St_{2,2,5}(K_3)$ квазізірка з центром з трьох суміжних між собою вершин, одна з яких має п'ять висячих ребра із кінцевими вершинами, кожна з яких ототожнюється із вершинами $1', 2', 3', 4', 5'$ графа K_5 , а дві інші вершини матимуть по два висячих ребра із кінцевими вершинами, кожна з яких ототожнюється із однією з вершин $1', 2'$ графа K_5 , причому множина вершин $St_{2,2,5}(K_3)$ породжує підграф K_5 . Іншими словами B_3 є парою графів K_5 склеєною по трикутнику.

Наслідок 1.2. Для побудови графа G , $G \in \{B_1, B_2, B_3\}$, де B_i - неізоморфний 8-ми вершинна граф-обструкція для тору, поданого як φ -образ графа K_5 та квазізірки з центром N та підмножини M точок приєднання, є наступний алгоритм.

2.2.2. АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРУ

Крок 0. Нехай задані всі неізоморфні мінімальні вкладення в тор графа K_5 та задано вкладення графа H (з принаймні одним перетином ребер у внутрішніх точках) в недвоклітку на границі якої розташовані точки приєднання графа K_5 до H . Вибираємо підмножину точок приєднання M з множини варіантів вибору \mathfrak{A} для M , складеної з множини точок графа, що є спільними для H та K_5 , і розщепимо кожну вершину з M на дві, тим самим утворимо дві множини M'' , M' графів H та K_5 , відповідно. Також фіксуємо порядок слідування (за часовою стрілкою) вершин приєднання. Вважатимемо даною процедуру обчислення роду графа, вкладеного в тор без перетину ребер у внутрішніх точках ребер, за допомогою формули Ейлера.

Крок 1. Якщо граф H має ребро e , то воно задовольняє одній із наступних умов:

а) Ребро e , $e = (a, b)$, разом з деякими висячими ребрами квазізірки та графа K_5 породжує, принаймні, один мінімальний за включенням підграф графа G гомеоморфний K_4 , і кількість всіх таких підграфів позначимо через $n(e)$.

б) Ребро e , $e = (a, b)$, разом із деякими висячим ребрам квазізірки та графа K_5 породжує мінімальний за включенням підграф не гомеоморфний K_4 , але гомеоморфний колесу чи напівколесу з центром в a чи b , наприклад, $K_4 \setminus e$, W_3 , C_4 та іншим графам. Відмітимо, що на ребрах вказаних вище графів утворюватиметься перешкода 2-доступу до хоча б однієї з кінцевих вершин пари ребер, що перехрещуються на площині, до однієї з вершин графа K_5 приєднання висячих ребер квазізірки з центром H і кількість таких підграфів позначимо через $m(e)$.

в) Ребро e , $e = (a, b)$, не породжує з висячими ребрами квазізірки та графа K_5 ніяких інших мінімальних за включенням зв'язних підграфів графа G , окрім згаданих в умовах а) та б).

Відмітимо: 1) наявність породженого деяким ребром e графа H підграфа графа G гомеоморфного $K_4 \setminus e$, означатиме наявність породженого іншим ребром u графа H підграфа гомеоморфного K_4 , та квазізірка із центром H графа має ребро у якого одна з кінцевих вершин має 2-доступ на торі, 2) одне з двох зхрещених на площині ребер підграфа гомеоморфного K_4 матиме кінцеву вершину, що ототожнюватиметься із вершиною графа гомеоморфного K_5 із 2-доступом на торі.

Перебираємо кожне ребро графа H та накопичимо n , m , $n = \sum_{\forall e, e \in H} n(e)$, $m = \sum_{\forall e, e \in H} m(e)$.

Крок 2. Якщо кількість різних підграфів гомеоморфних K_4 на 1 більше числа вершин з M -множини приєднання із 2-доступом на торі до K_5 , до яких ототожнюють кінцеву вершину того ребра, що схрещується на площині з іншим ребром з K_4 , то граф G матиме рід не більше 2, та перевіряємо наявність іншого ребра, яке своїми кінцевими вершинами розділяє на границі клітки тора пару кінцевих вершин кожного із схрещених ребер, інакше виводимо “граф G матиме рід 1” та переходимо на крок 0.

Крок 3. Якщо ребер в H немає, то приєднуємо дві прості зірки $St_5(1)$, $St_5(2)$ до всіх вершин з K_5 із 2-кратним доступом, а $St_5(3) \setminus e$ до чотирьох вершин з K_5 , а кінцеві вершини ребра e матимуть на торі число досяжності 2.

Крок 4. Перевіряємо кожне висяче ребро u квазізірки $St_M(H, K_5)$ чи суттєве воно відносно роду 2 шляхом стягнення його в точку та визначення роду отриманого графа G_u . Якщо ребро суттєве відносно роду 2, тобто рід $\gamma(G_u)$ отриманого графа дорівнює 2, то залишаємо ребро в первісному виді, інакше $G := G_u$, т.то залишаємо ребро u графа стягнутим в точку. Перевіривши всі ребра графа G виводимо: “граф G із стиснутими в точку несуттєвими ребрами є граф-обструкцією для тора”. Кінець алгоритму.

Висновок. Граф-обструкція порядку 8 є φ -образом K_5 та графа H в залежності від задіяних підмножин вершин та їхніх характеристик кратності та багатосторонності доступу множини вершин графу K_5 , де граф H є одним з наступних трьох:

1) об'єднання трьох однакових зірок із несуміжними центрами та п'ятьма променями, 2) квазізіркою з центром-графом $K_5 \setminus e$ з трьома трикутними променями та двома висячими, які підлягатимуть стисненню в точку, 3) є квазізіркою з центром-графом K_5 із п'ятьма променями з яких два підлягатимуть стисненню в точку.

2.2.3 9-ТИ ВЕРШИННІ ГРАФИ D_5, \dots, D_{19} ГРАФ-ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРУ

Задача. Вивчити структуру 9-ти вершинних графів-обструкцій для тору з метою використання при побудові n -вершинних, $n > 9$, графів-обструкцій для тору.

В [29] запропоновано спосіб побудови графів-обструкцій орієнтованого роду як ϕ -образу двох графів, один з яких має бути квазізіркою, з'єднаних шляхом ототодження пар вершин, для випадку несуттєвості порядку ототодження зазначених пар точок; тобто один із підграфів породжених підмножинами точок допускати перестановку довільної пари точок з'єднання, наприклад, є повним графом як в D_6, D_7, D_8 . Цей підхід може видавати такі графи, які набуватимуть статус обструкцій після стискання в точку деяких лишніх ребер-променів квазізірки, саме так побудовані графи $D_9, D_{11}, D_{15}, D_{16}, D_{17}, D_{19}, D_{20}$. Однак не всі графи-обструкції для тору можливо отримати цим способом, наприклад такими є графи $D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{17}, D_{18}, D_{21}, \dots, D_{27}$. Однією з причин відсутності лишніх ребер є необхідність двостороннього доступу до деяких точок із пар точок, що підлягають ототодженню.

Визначення 5. Граф K є t -мінімальним роду γ , якщо число досяжності множини вершин цього графа дорівнює t та при видаленні чи стисканні в точку довільного ребра зменшується число досяжності множини вершин нового графа чи зменшується рід нового графа утвореного з K . Наприклад, граф $K_6 \setminus K_3^1$ -2-мінімальний роду 1, тобто $K_{3,3}$ з додатковими трьома ребрами на вершинах однієї з двох долей, або це граф $K_5 \setminus e$ із додатковою вершиною степеня 3, що суміжна з трьома вершинами графа $K_5 \setminus e$ із числом досяжності 2.

Визначення 6. Граф K є t -мінімальним роду 1, $t > 0$, відносно заданої підмножини N множини точок цього графа при вкладенні до клітки s , $s \in \sigma_1 \setminus K$, границя якої може мати цикломатичне число $p_1(\partial s)$, $p_1(\partial s) \geq 0$, якщо число досяжності $t_K(N, \sigma_1)$ підмножини точок N цього графа дорівнює t та при видаленні довільного ребра e графа K матимемо або $t_{K \setminus e}(N, \sigma_1) > t_{K \setminus e}(N, \sigma_1)$, або $\gamma(K \setminus e) = 0$.

Твердження 2.1. Мають місце наступні співвідношення:

1. Площинний граф H із виділеною підмножиною точок X , що має число досяжності $t, t \leq 2$, та принаймні одним лишнім ребром відносно властивості 2-мінімальності при вкладенні (без перетину ребер у внутрішніх точках) до тору чи його клітини, або на проективній площині чи її частині (не двоклітці), може за певних умов набувати властивості 2-мінімальності роду 1.

2. Видалення ребра в такому площинному графі H призводить до збільшення на 1 числа двостороннього доступу до кінцевих точок видаленого ребра

Наприклад, граф K утворений із K_4 у якого один трикутник K_3 має три пари 2-кратних ребер 1-підрозділених вершинами з множини $\{v_i\}_1^3$, які разом з вершиною $v, v \in K_4 \setminus K_3$ утворюють множини з числом досяжності 2, та при не 2-клітковому вкладенні в тор граф K є 2-мінімальним. Для проективної площини таким буде граф I утворений з K_3 який має три пари 2-кратних ребер 1-підрозділених вершинами з $\{v_i\}_1^3$, що утворюють множини з числом досяжності 2 та при не 2-клітковому вкладенні в проективну площину граф I є 2-мінімальним.

Твердження 2.2. Нехай граф G є ϕ -образом графа $K_{3,3}$ та квазізірки H з множиною точок приєднання Y, X , де граф H роду 0 із виділеною підмножиною точок X , що має число досяжності $t, t \leq 2$, та є множиною приєднання до графа $K_{3,3}$, і має принаймні одне лишнє ребро відносно

властивості 2-мінімальності при вкладенні (без перетину ребер у внутрішніх точках) до тору чи його клітки.

Тоді мають місце наступні співвідношення:

1. Якщо підграф H вкладений в недвоклітку графа $K_{3,3}$, яка є гранню на торі, із двостороннім доступом до принаймні однієї з точок приєднання, то $\gamma(G) = 1$.
2. Якщо підграф H вкладений в двоклітку графа $K_{3,3}$, як грань на торі, то $\gamma(G) = 2$.

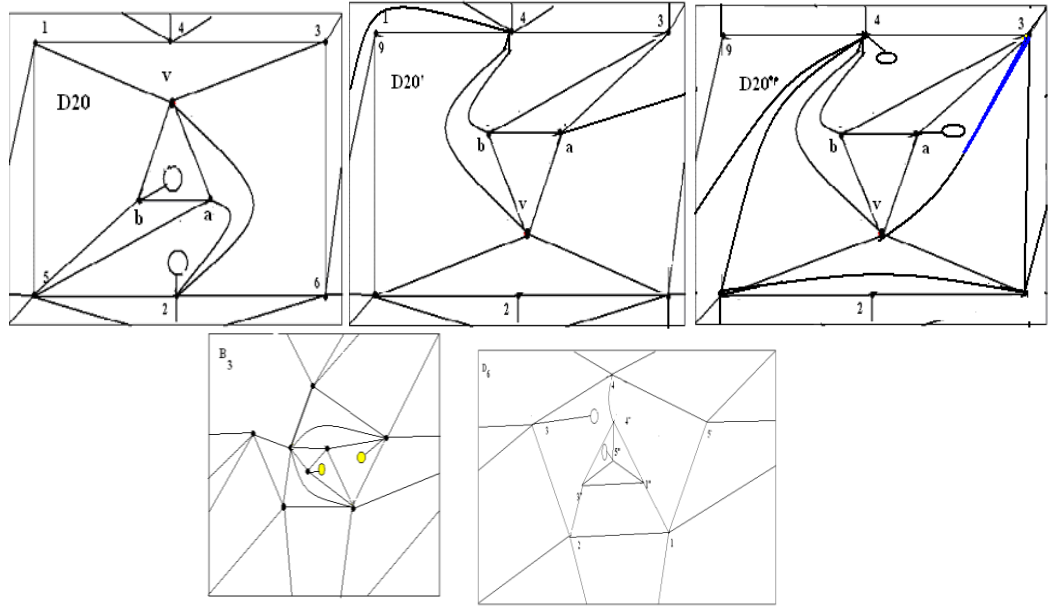


Рис.2.0. Графи $D_{20'}$ та D_{20} мінімально вкладені в тор та 2-тор є прикладами до твердження 2.2., відповідно,

Лема 2.1. Для графів D_4, D_5, D_6, D_7 як 9-вершинних графів-обструкцій для тору мають місце наступні ϕ -перетворення:

- 1) $\phi(K_{3,3} + K, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_4, \{i\}_1^6)$, $K_{3,3}^0 = \{i''\}_{i=1}^3 \cup \{i'\}_{i=4}^6$, $K = (\{i''\}_{i=1}^6 \cup \{a, b, c\}, St_4^1(c) \cup K_5^1 \setminus \{(a, b)\})$,
 $St_4^0(c) = \{i''\}_{i=1}^3 \cup \{a\}$, $K_5^0 = \{i''\}_{i=4}^6 \setminus \{(a, b)\}$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=1}^3) \cup K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, або D_4 ,
 $D_4 = (K_{4,5}^0, K_{4,5}^1 \cup \{(a, c)\})$, містить підграф ізоморфний графу E_{18} , наведеному в [28];
- 2) $\phi(K_{3,3} + K, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_5, \{i\}_{i=1}^6)$, де $K = (\{i''\}_{i=1}^6 \cup \{a, b, c\}, St_3^1(c) \cup K_5^1)$, $St_3^0(c) = \{i''\}_{i=1}^3$,
 $K_5^0 = (\{i''\}_{i=4}^6 \cup \{a, b\})$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=1}^3) \cup K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$ причому D_5 має підграф ізоморфний E_3 , або E_{18} , наведені в [28];
- 3) $\phi(K_5 + K, \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_6, \{i\}_{i=1}^5)$, де $K_5^0 = (\{i''\}_{i=1}^5)$, $K^0 = (\{i''\}_{i=1}^5 \cup \{a, b, c, v\})$, $K_4^0 = \{a, b, c, v\}$,
 $K^1 = K_4^1 \cup \{(a, 1''), (b, 5''), (c, 2''), (v, 4''), (v, 3'')\}$;

$$4) \varphi(K_5 + K, \sum_{i=1}^3 (i' + i'')) \rightarrow (D_7, \{i\}_{i=1}^3), \text{ де } K_5^0 = \{i'\}_{i=1}^5, K^0 = \{i''\}_{i=1}^3 \cup K_4^0, K_4^0 = \{a, b, c, v\},$$

$$K^1 = K_4^1 \cup \{(b, 1''), (a, 2''), (c, 3''), (v, 2'')\}.$$

Доведення. Доведемо твердження 1. Мінімальне вкладення $f_4 : D_4 \rightarrow \sigma_2$, наведене на рис. 2.1, побудовано як продовження мінімального вкладення f графа $K_{3,3}$ в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_4(K \setminus (c, 2'')) \subset \bar{s}_1 \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = \bar{K}_3$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = \bar{K}_3$, $f_4 | K_{3,3}$ в σ_1 , s_1 - клітка із границею ∂s_1 , $\partial s_1 \cap K_{3,3} = \{1', 4', 2', 5', 1', 6', 2', 4', 3', 6', 1'\}$; б) $f_4(c, 2'') \subset h(s_{11}, s_{12})$, $h(s_{11}, s_{12})$ -ручка приєднана до кліток s_{11}, s_{12} , $\{s_{11}, s_{12}\} \subset s_1 \setminus f_4(K \setminus (c, 2''))$, стандартним перетворенням цих кліток. Згідно формули Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_4) = 2$, бо граф $f_4(D_4)$ має 8 граней, 19 ребер та 9 вершин. Оскільки на множині вершин графа D_4 є підграф гомеоморфний $K_{3,3}$, то існує реберне покриття графа $D_4 \setminus u$ множиною із двох копій графів $K_{3,3}$. Порядок ототоження пар вершин (i', i'') є суттєвим.

Твердження 1 доведено

Доведемо твердження 2. Мінімальне вкладення $f_5 : D_5 \rightarrow \sigma_2$, наведене на рис. 2.1, побудовано як продовження мінімального вкладення f графа $K_{3,3}$ в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_5(K \setminus (a, b)) = f_5(St_3(a) \cup St_3(b) \cup St_3(c))$, $f_5(St_3(b)) \subset \bar{s}_2 \setminus \partial s_2$, $f_5(St_3(c)) \subset \bar{s}_3 \setminus \partial s_3$, $f_5(St_3(a)) \subset \bar{s}_1 \setminus \partial s_1$, де $s_i \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$, $i = 1, 2, 3$, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = \bar{K}_3$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = \bar{K}_3$; б) $f_5((a, b)) \subset h(s_{11}, s_{12})$, $h(s_{11}, s_{12})$ -2-ручка приєднана до кліток s_{11}, s_{12} стандартним перетворенням цих кліток. Згідно формули Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_5) = 2$, бо граф $f_5(D_5)$ має 7 граней, 18 ребер та 9 вершин. Існує реберне покриття графа $D_5 \setminus u$ двома графами гомеоморфними графу $K_{3,3}$. Твердження 2 доведено.

Доведення твердження 3. Мінімальне вкладення $f_6 : D_6 \rightarrow \sigma_2$, наведене на рис. 2.1, побудовано як продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_6(K \setminus (a, 1'')) \subset \bar{s}_1 \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$, s_1 - клітка із границею ∂s_1 , $\partial s_1 \cap K_5^0 = \{i'\}_1^5$; б) $f_6((a, 1'')) \subset h(s_{11}, s_{12})$, $h(s_{11}, s_{12})$ -ручка приєднана до кліток s_{11}, s_{12} , $\{s_{11}, s_{12}\} \subset s_1 \setminus f_6(K \setminus (a, 1''))$ стандартним перетворенням цих кліток. Згідно формули Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_6) = 2$, бо граф $f_6(D_6)$ має 9 граней, 20 ребер та 9 вершин. Існує реберне покриття графа D_6 множиною із двох графів гомеоморфних K_5 .

Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Мінімальне вкладення $f_7 : D_7 \rightarrow \sigma_2$, наведене на рис. 2.1, побудовано як продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_7(K \setminus (a, 2'')) \subset \bar{s}_1 \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$, s_1 - клітка із границею ∂s_1 , $\partial s_1 \cap K_5^0 = \{i'\}_1^5$; б) $f_7((a, 2'')) \subset h(s_{11}, s_{12})$, $h(s_{11}, s_{12})$ -ручка приєднана до кліток s_{11}, s_{12} , $\{s_{11}, s_{12}\} \subset s_1 \setminus f_7(K \setminus (a, 2''))$ стандартним перетворенням цих кліток. Згідно формули Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_7) = 2$, бо граф $f_7(D_7)$ має 9 граней, 20 ребер та

9 вершин. Оскільки на множині вершин графа D_7 існує підграф гомеоморфний K_5 , то є реберне покриття графа D_7 множиною із двох копій графів K_5 . Твердження 4 доведено. Лемма 2.1 доведена.

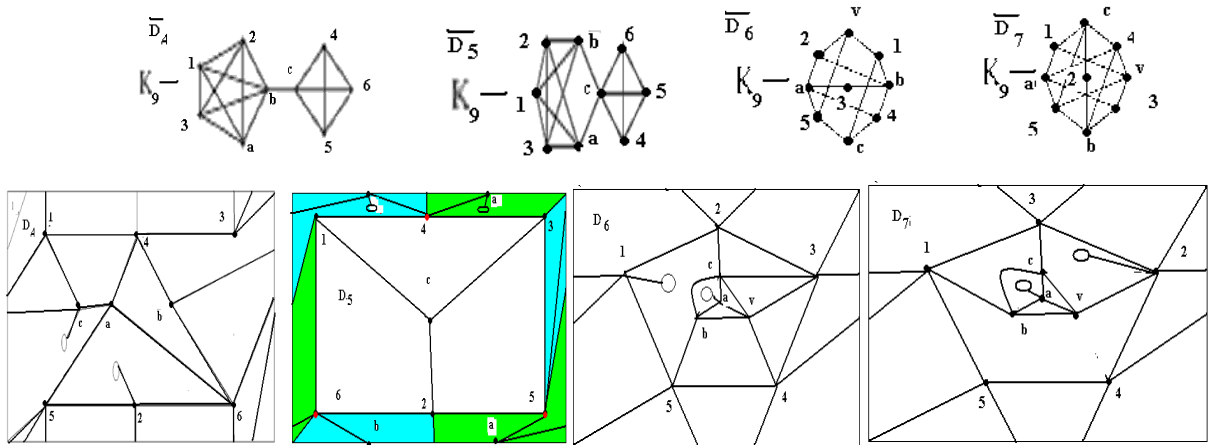
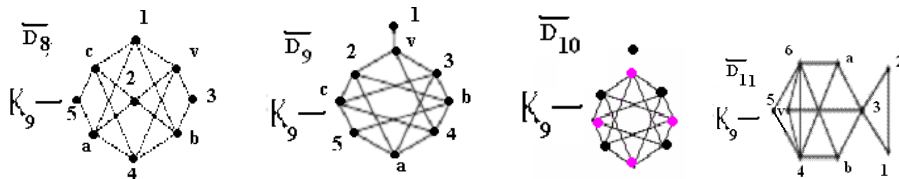


Рис.2.1. Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_4(D_4), f_5(D_5), f_6(D_6), f_7(D_7)$ в σ_2 ; де ручку, приклеєну до тору, зображено двома еліпсами, точки яких отождествлюються із збереженням напрямку обходу точок.

Лема 2.2. Для D_8, D_9, D_{10}, D_{11} -обструкцій для тору мають місце наступні ϕ -перетворення:

- 1) $\phi(K_5 + K, \sum_{i=3,5} (i' + i'')) \rightarrow (D_8, \{i\}_{i=3,5})$, де $K_5^0 = \{i'\}_{i=1}^5$, $K_4^0 = \{a, b, v, c\}$,
 $K = (K_4^0 \cup \{3'', 5''\}, K_4^1 \cup \{(a, 3''), (v, 3''), (b, 5''), (c, 5'')\})$;
- 2) $\phi(K_5 + K, \sum_{i=1,5} (i' + i'')) \rightarrow (D_9, \{i\}_{i=1,5})$, де $K_5^0 = \{i'\}_{i=1}^5$, $K = (\{a, b, c, v, 1'', 5''\}, (K_5^1 \setminus \{1'', v\}) \cup \{3'', 2''\})$,
 $K(\{a, b, c, v, 1'', 5''\}) = K_5$ граф D_9 наведений в [20];
- 3) $\phi(K_5 + K, \{1' + 1''\}) \rightarrow (D_{10}, \{1\})$, $K = K_5$, $K_5^0 = \{i'\}_{i=1}^5$, $K^0 = \{i''\}_{i=1}^5$.
- 4) $\phi(K_{3,3} + K, \sum_{i=1,2,5} (i' + i'')) \rightarrow (D_{11}, \{i\}_{i=1,2,5})$, $K = (\{1'', 2'', 5'', a, b, c\}, K_{3,3}^1 \cup K_3^1)$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = \overline{K_3}$,
 $K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $K(\{1'', 2'', 5''\}) = K_3$, $K(\{a, b, c\}) = K_3$.



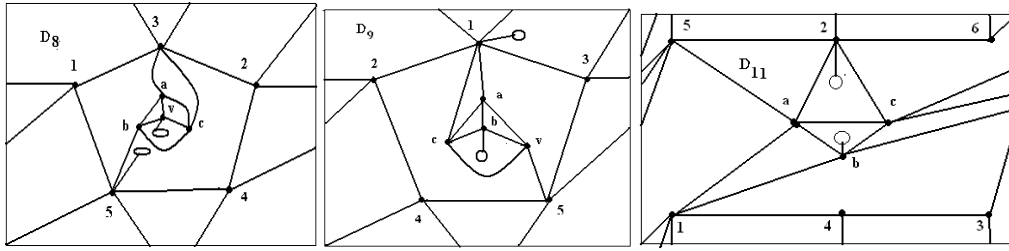


Рис.2.2. Графи $\overline{D}_8, \overline{D}_9, \overline{D}_{10}, \overline{D}_{11}$ і вкладення графів $f_8(D_8), f_9(D_9), f_{11}(D_{11})$ в 2-тор.

Доведення. Структура графів D_8, D_9, D_{10} виписана в [29], а їхній рід оцінено в [24]. Доведемо твердження 1. Граф $f_8(D_8)$ має 9 граней, 20 ребер та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_8) = 2$, а побудоване 2-кліткове вкладення f_8 графа D_8 в подвійний тор σ_2 буде мінімальним та наведене на рис. 2.2.

Доведемо твердження 2. Відмітимо той факт, що граф D_9 можливо подати як склейку двох графів K_5 ототожнених по ребру одного та частині ребра іншого графа. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_9 в подвійний тор σ_2 графа D_9 наступним чином: а) $f_9(K \setminus (b, 1'')) \subset \overline{s_1} \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f_9(K_5)$, $f_9|_{K_5}$ 2-кліткове вкладення в тор графа K_5 , б) $f_9(b, 1'') \subset h(s_1, s_{11})$, де ручка приклеєна до s_{11} та s_1 , $s_{11} \in (\overline{s_1} \setminus \partial s_1) \setminus f_9(K \setminus (v, 1''))$, стандартним перетворенням. Звуження 2-кліткового вкладення $f_9|_K$ задовільняє лемі 1.1. Граф $f_9(D_9)$ має 9 граней, 20 ребер та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_9) = 2$, а побудоване 2-кліткове вкладення f_9 графа D_9 в подвійний тор σ_2 буде мінімальним та наведене на рис. 2.2. Відмітимо факт реберного покриття графа D_9 множиною із двох копій графів K_5 . Множина вершин $\{1'', 2''\}$ площинного графа $K \setminus (1'', 3'') + (3'', 2'')$ має число досяжності 2, а множина вершин $\{1', 2'\}$ графа K_5 є досяжною на торі, порядок ототодження пар вершин $\{(1', 1''), (2', 2'')\}$ є несуттєвим, тому згідно [29] матимемо $\gamma(D_9) \leq 2$. Твердження 2 леми 2.2 доведено. Твердження 3 не потребує доведення, бо граф D_{10} - два графа K_5 зі спільною вершиною.

Доведемо твердження 4. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{11} в подвійний тор σ_2 графа D_{11} наступним чином: а) $f_{11}(K \setminus (b, 2'')) \subset \overline{s_1} \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f_{11}(K_{3,3})$, $f_{11}|_{K_{3,3}}$ не 2-кліткове вкладення в тор, б) $f_{11}((b, 2'')) \subset h(s_1, s_{11})$, де ручка приклеєна до 2-клітини s_{11} та кільця s_1 , стандартним перетворенням $s_{11} \in (\overline{s_1} \setminus \partial s_1) \setminus f_{11}(K \setminus (b, 2''))$. Звуження 2-кліткового вкладення $f_{11}|_K$ задовільняє лемі 1.2 причому ребра трикутника $K(\{i'\}_{i=4}^6) = K_3$ розташовані у 2-клітині-шестикутнику графа $K_{3,3}$, відмінному від s_1 . Граф $f_{11}(D_{11})$ має 10 граней, 21 ребро та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_{11}) = 2$, а побудоване 2-кліткове вкладення f_{11} графа D_{11} в подвійний тор σ_2 буде мінімальним та наведене на рис. 2.2. Відмітимо факт реберного покриття графа $D_{11} \setminus K_3^1$ множиною із двох копій графів $K_{3,3}$. Множина вершин $\{1'', 3''\}$ графа K має на торі двосторонній доступ, тому перехрещені на площині клітки s_1 ребра розташовуються в різних частинах розділеної навпіл $f_{11}(K)$ клітки,

порядок ототодження пар вершин $\{(1',1''),(2',2''),(5',5'')\}$ є суттєвим. Твердження 4 доведено. Лема 2.2 доведена.

Лема 2.3. Для графів $D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}$ як 9-вершинних графів-обструкцій для тору мають місце наступні φ -перетворення:

- 1) $\varphi(K_{3,3} + K, \sum_{i=1}^3 (i' + i'')) \rightarrow (D_{12}, \{i\}_1^3)$, де $K = K_6 \setminus K_3^1$, $K^0 = \{1'', 2'', 3'', a, b, v\}$, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_{i=1}^3 \cup \{i'\}_{i=4}^6$, $K^1 = (K_6^1 \setminus \{(a, b), (a, v), (b, v)\})$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = K_{3,3}(\{i'\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$;
- 2) $\varphi(K_5 + K, \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{13}, \{i\}_{i=1}^5)$, де $K_5^0 = \{i'\}_{i=1}^5$, $K^0 = \{1'', 2'', 3'', a, b, c\}$, граф K є φ -образом графів $K_4, K_5 \setminus (2'', 4'')$, виконаному шляхом ототодження по ребру (b, c) , де $K_4^0 = \{1'', 3'', 5'', b, c\}$, $K_5^0 \setminus (2'', 4'') = \{4'', 2'', a, b, c\}$, де вершина $5''$ розділяє ребро $(1'', 3'')$;
- 3) $\varphi(K_{3,3} + K, \sum_{i=1, \neq 4}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{14}, \{i\}_{i=1, \neq 4}^5)$, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_{i=1}^3 \cup \{i'\}_{i=4}^6$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = \overline{K_3}$, $K^0 = \{1'', 2'', 3'', 5'', a, b, v\}$, $K = (K_6^0 \cup \{3''\}, K_6^1 \setminus K_3^1 \cup \{(3'', v), (a, 3'')\})$, $K(2'', 3'', 6'') = \overline{K_3}$, $K(\{a, b, v, 3''\}) \cong K_3$, де вершина $3''$ розділяє ребро (a, v) ;
- 4) $\varphi((K_6 \setminus K_3^1) + K, \sum_{i=4}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{15}, \{i\}_{i=4}^6)$, $K = (K_5^0, K_5^1 \setminus (4'', 5'')) \cup \{(a, 6'')\}$, $K_6 \setminus K_3^1(\{i'\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $K^0 = \{4'', 5'', 6'', a, b, v\}$, $K_6^0 = \{i'\}_{i=1}^6$, $K_6 \setminus K_3^1(\{i'\}_{i=1}^3) = K_3$;

Доведення. Доведемо твердження 1. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{12} в подвійний тор σ_2 графа D_{12} наступним чином: а) $f_{12}(K \setminus (a, b)) \subset \overline{s_1} \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f_{12}(K_{3,3})$, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_{i=1}^3 \cup \{i'\}_{i=4}^6$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = \overline{K_3}$, $K^0 = \{1'', 2'', 3'', a, b, c\}$, $K_{3,3}(\{1'', 2'', 3''\}) = \overline{K_3}$, $K = (K_{3,3}^0 \cup \{6''\}, K_{3,3}^1 \cup \{(6'', c), (a, 6''), (a, c)\})$, $K_{3,3}(\{a, b, c\}) = \overline{K_3}$, $f_{13} | K_5$ в σ_1 не 2-кліткове, s_1 -клітка із границею ∂s_1 , $\partial s_1 \cap K_{3,3} = \{1', 4', 2', 5', 1', 6', 2', 4', 3', 6', 1'\}$; б) $f_{12}(a, b) \subset h(s_{11}, s_{12})$, де ручка $h(s_{11}, s_{12})$ приклеєна до клітини s_{11} та s_{12} , стандартним перетворенням, $\{s_{11}, s_{12}\} \in s_1 \setminus f(K)$. Граф $f_{12}(D_{12})$ має 11 граней, 22 ребра та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_{13}) = 2$, а побудоване 2-кліткове вкладення f_{12} графа D_{12} в подвійний тор σ_2 буде мінімальним та наведене на рис. 2.3. Порядок ототодження пар вершин з множини $\{(1', 1''), (2', 2''), (3', 3''), (6', 6'')\}$ є несуттєвим та здійснюватимемо в порядку слідування пар, тому матимемо $\gamma(D_{12}) = 2$. Твердження 1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{13} в подвійний тор σ_2 графа D_{13} наступним чином: а) $f_{13}(K \setminus (b, 2'')) \subset \overline{s_1} \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$, $K_5^0 = \{i'\}_{i=1}^5$, причому звужене вкладення $f_{13} | K_5$ в σ_1 є мінімальним, s_1 -клітка, а граф K є φ -образом графів $K_4, K_5 / u$, виконаному шляхом ототодження по (b, c) , б) $f_{13}((b, 2'')) \subset h(s_{11}, s_{12})$, де ручка приклеєна до клітини s_{11} та s_{12} , стандартним перетворенням, $\{s_{11}, s_{12}\} \in s_1 \setminus f(K)$. Граф $f_{13}(D_{13})$ має 11 граней, 22 ребра та 9 вершин, тому за

формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_{13}) = 2$, а побудоване 2-кліткове вкладення f_{13} графа D_{13} в подвійний тор σ_2 буде мінімальним та наведене на рис. 2.3. Порядок ототодження пар вершин з множини $\{(1',1''),(2',2''),(3',3''),(4',4''),\}$ є несуттєвим та здійснюватимемо в порядку слідування пар. Твердження 2 леми 2.3 доведено.

Доведемо твердження 3. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{14} в подвійний тор σ_2 графа D_{14} наступним чином: а) $f_{14}(K \setminus (v,1'')) \subset \bar{s}_1 \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f_{14}(K_{3,3})$, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = \bar{K}_3$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = \bar{K}_3$, причому звужене вкладення $f_{14} |_{K_{3,3}}$ графа $K_{3,3}$ в σ_1 є мінімальним, s_1 не 2-клітка; б) $f_{14}(v,1'') \subset h(s_{11},s_{12})$, де ручка $h(s_{11},s_{12})$ приклеєна до клітини s_{11} та s_{12} , стандартним перетворенням, $\{s_{11},s_{12}\} \in s_1 \setminus f(K)$, $c \in \partial s_{11} \cap f_{14}(K^0)$, $b \in \partial s_{12} \cap f(K^0)$. Граф $f_{14}(D_{14})$ має 11 граней, 22 ребра та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_{14}) = 2$, а побудоване 2-кліткове вкладення f_{14} графа D_{14} в подвійний тор σ_2 буде мінімальним та наведене на рис. 2.3. Відмітимо реберне покриття графа $D_{14} \setminus C_4^1$ множиною з двох графів $K_{3,3}$ та досяжність множини $\{1'',2'',3'',6''\}$ графа K вкладеного у не 2-клітину s_1 . Порядок ототодження пар вершин з множини $\{(1',1''),(2',2''),(6',6''),(3',3'')\}$ є суттєвим, тож здійснюватимемо в порядку слідування пар. Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{15} в подвійний тор σ_2 графа D_{15} наступним чином: а) $f_{15}(K \setminus (a,b)) \subset \bar{s}_1 \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f_{15}(K_6 \setminus K_3^1)$, б) $f_{15}((a,b)) \subset h(s_1,s_{11})$, де ручка $h(s_1,s_{11})$ приклеєна до клітини s_{11} , $s_{11} \in (\bar{s}_1 \setminus \partial s_1) \setminus f(K \setminus (b,a))$, та s_1 стандартним перетворенням. Граф $f(D_{15})$ має 11 граней, 22 ребра та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_{15}) = 2$, а побудоване 2-кліткове вкладення f_{15} графа D_{15} в подвійний тор σ_2 буде мінімальним та наведене на рис. 2.3. Відмітимо факт реберного покриття графа $D_{15} \setminus u$ множиною з двох графів K_5 та K_6 . Множина вершин графа K_6 є досяжною на торі, а множина вершин $\{4'',5'',6''\}$ графа K має на площині число досяжності 2, порядок ототодження пар вершин є несуттєвим. Твердження 4 леми 2.3 доведено.

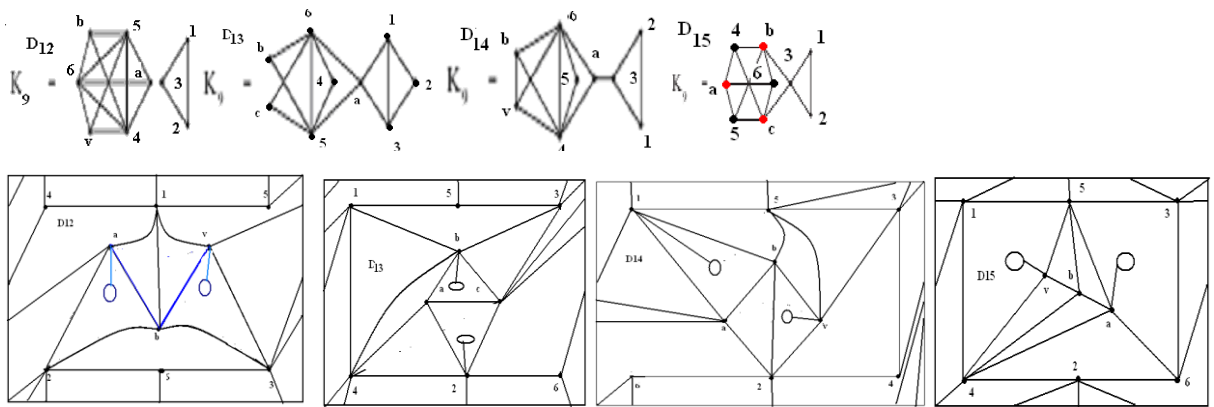


Рис.2.3. Доповнення до K_9 графів та їхні вкладення $f_{12}(D_{12})$, $f_{13}(D_{13})$, $f_{14}(D_{14})$, $f_{15}(D_{15})$ в 2-тор.

Лема 2.4. Для графів $D_{16}, D_{17}, D_{18}, D_{19}$ -обструкцій для тору мають місце наступні ф-перетворення:

- 1) $\varphi(K_{3,3} + K, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{16}, \{i\}_{i=1}^6)$, де граф $K = K_5 \setminus (4'', 6'') \cup St_6(c)$,
 $K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $St_6^0(c) = \{i''\}_{i=1}^6 \cup \{c\}$, $K_5 \setminus (4'', 5'') = \{a, b, 4'', 5'', 2''\}$;
- 2) $\varphi(K_{3,3} + (St_4(c) \cup K''), \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{17}, \{i\}_{i=1}^6)$, де граф K'' утворений з двох копій графа K_4
 $: K(\{a, b, 2'', 6''\})$ та $K(\{a, b, 1'', 5''\})$, що мають спільними дві вершини $\{a, b\}$,
 $K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $K_{3,3}^0 = \{i''\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6$, $St_4^0(c) = \{i''\}_{i=1}^4 \cup \{c\}$, $K_4 = K(\{a, b, 2'', 6''\})$,
 $K_4 = K(\{a, b, 1'', 5''\})$;
- 3) $\varphi(K_{3,4} \cup K_3^1 + K, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{18}, \{i\}_{i=1}^6)$, де граф K визначений наступним чином: , , ,
 $K = (\{1'', 2'', 4'', a, b\}, K_{5,5}^1 \setminus (1'', 4''))$, $K_{3,4}^0 = \{i''\}_{i=1}^7$, $K_{3,4}(\{i''\}_{i=1}^3 \cup \{7''\}) = \overline{K_4}$, $K_{3,4}(\{i''\}_{i=4}^6) = K_3$,
 $K_{3,4}^0 = (\{i''\}_{i=1}^3 \cup \{7''\}) \cup \{i''\}_{i=4}^6$;
- 4) $\varphi(K_5 + K, \sum_{i=1,2,5} (i' + i'')) \rightarrow (D_{19}, \{i\}_{i=1,2,5})$, де $K_5^0 = \{i''\}_{i=1}^5$ і граф K визначений наступним чином:
 $K = K_{3,3} \setminus (a, b) \cup \{(a, 5''), (b, 5'')\}$, $K^0 = \{i''\}_{i=1,2,5} \cup \{a, b, c, d\}$, причому вершина $5''$ розділяє ребро (a, b) ,
 $K\{a, 1'', 2''\} = \overline{K_3}$, $K\{d, c, b\} = K_3 \setminus (d, c)$.

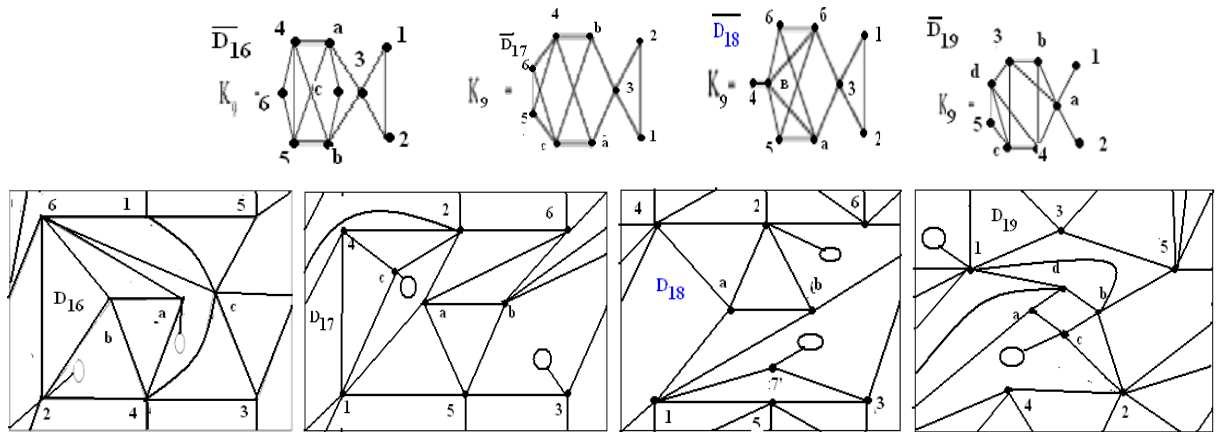


Рис.2.4. Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_{16}(D_{16})$, $f_{17}(D_{17})$, $f_{18}(D_{18})$, $f_{19}(D_{19})$ до 2-тору.

Доведення лема 2.4. Доведемо твердження 1. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{16} в подвійний тор σ_2 графа D_{16} наступним чином: а) $f_{16}(K \setminus (a, 2'')) \subset \overline{s_1} \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$, де f - мінімальне вкладення графа $K_{3,3}$ в тор, б) $f((a, 2'')) \subset h_1$, де ручка $h_1 = h(s_a, s_b)$, $\{s_i\}_{i=1}^3 = \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$, приклеєна до 2-клітин s_a, s_b стандартним перетворенням. Граф $f(D_{16})$ має 11 граней, 22 ребра та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\chi(D_{16}) = 2$, а побудоване 2-кліткове вкладення f_{16} графа D_{16} в подвійний тор σ_2 буде мінімальним. Твердження 1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{17} в подвійний тор σ_2 графа D_{17} наступним чином: а) $f_{17}(K'') \subset \bar{s}_1 \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$, f -мінімальне вкладення графа $K_{3,3}$ в тор, $K_{3,3}^0 = \{1',2',3'\} \cup \{4',5',6'\}$, $K_{3,3}(\{1',2',3'\}) = K_{3,3}(\{4',5',6'\}) = \bar{K}_3$, б) $f(St_4(c) \setminus (c,3'')) \subset \bar{s}_2 \setminus \partial s_2$, де $s_2 \in (\bar{s}_1 \setminus \partial s_1) \setminus f(K'')$, в) $f((c,3'')) \subset h_1$, де ручка $h_1 = h(s_a, s_b)$ приклеєна до 2-клітин s_a, s_b стандартним перетворенням, де $a \in \partial s_a, b \in \partial s_b$. Граф $f_{17}(D_{17})$ має 11 граней, 22 ребра та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_{17}) = 2$, а побудоване 2-кліткове вкладення f графа D_{17} в подвійний тор σ_2 буде мінімальним. Є реберне покриття графа $D_{17} \setminus u$ множиною з трьох копій графів $K_5, K_{3,3}$. Твердження 2 доведено.

Доведемо твердження 3. Побудуємо мінімальне вкладення f_{18} в подвійний тор σ_2 графа D_{18} наступним чином: а) $f_{18}(K \setminus (v,2'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $s \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,4} \setminus (v,2'') \cup K_3^1)$, б) $f((v,2'')) \subset h_1$, де ручка $h_1 = h(s_1, s_{11})$ приклеєна до 2-клітин s_{11}, s_1 стандартним перетворенням, причому $s_1, s_{11} \in s \setminus f(K)$. Граф $f_{18}(D_{18})$ має 11 граней, 22 ребра та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_{18}) = 2$. Оскільки множини вершин $\{i'''\}_{i=1}^5$ та $\{i''\}_{i=1}^5$ мають досяжність 2 на площині, а множина висячих вершини $\{i'''\}_{i=2}^4$ графа K та множина $\{1',5'\}$ графа $K_5 \setminus (4',5')$ є досяжними на площині, то порядок ототодження пар вершин є несуттєвим, тому згідно [29] матимемо нерівність $\gamma(D_{18}) \leq 2$. Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{19} в подвійний тор σ_2 графа D_{19} наступним чином: а) $f_{19}(K \setminus (c,1'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$, f -мінімальне вкладення графа K_5 в тор, б) $f_{19}((c,1'')) \subset h_1$, де ручка $h_1 = h(s_1, s_{11})$ приклеєна до 2-клітин s_{11}, s_1 , стандартним перетворенням. Граф $f(D_{19})$ має 11 граней, 22 ребра та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_{19}) = 2$. Порядок ототодження пар вершин $\{(1',1''), (2',2''), (5',5'')\}$ є суттєвим. Твердження 4 леми 2.4 доведено. Доведення леми 2.4 закінчено.

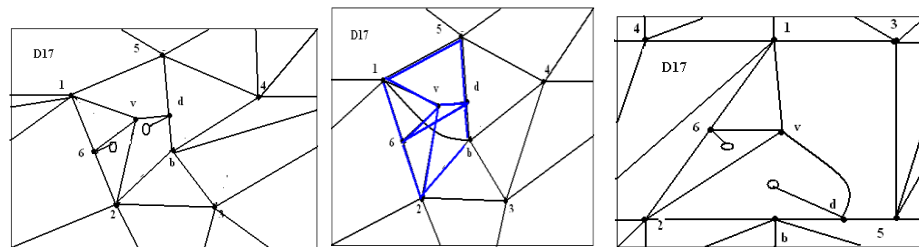


Рис.2.4.1. Вкладення графа $f_{17}(D_{17})$ до подвійного тору.

2.2.4. 9-ТИ ВЕРШИННІ №№D_{20,,,D₄₇} ГРАФИ-ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРУ.

Задача матиме дві частини: А) Встановити структуру 9-ти вершинних графів-обструкцій G для тору з метою перевірки наявності φ -перетворення графів G_0 та $St_{n_1, n_2, n_3, n_4}(G_1)$, де $G_0 \in \{K_5, K_{3,3}\}$, заданого на множині точок та кінцевих вершин, де для ненульових nk виконується подвійна нерівність $6 > nk > 1$, для $k \in \{i\}_1^5$, яке можливо використати при побудові n -вершинних графів-обструкцій для тору, $n > 9$;

Б) Перевірити гіпотезу про наступне:

1) в довільному графі-обструкції роду 2 є щонайбільше три різні копії графів K_5 чи $K_{3,3}$, які попарно з'єднані щонайменше трьома різними вершинами;

2) принаймні в одній з груп автоморфізмів $Aut(G)$ чи $Aut(St_M(H))$ є повні підгрупи перестановок елементів з підмножин N чи M множин точок графа G та квазізірки $St_M(H)$, відповідно, де N -множина точок графа G до якої приєднується квазізірка $St_M(H)$ шляхом ототождження пар точок з множин N та M , тобто підграфи $G(N)$ та $St_M(H)(M)$ графа G чи квазізірки $St_M(H)$, відповідно, є повними чи мають повне доповнення.

Лема 3.1. Виконуються наступні твердження:

1. Для графа D_{20} існує φ -перетворення визначене наступним чином:

$\varphi(K_{3,4} \cup K_3^1 + K, \sum_{i=1,2,5,7} (i+i'')) \rightarrow ((D_{20}, \{i\}_{i=1,2,5,7}),$ граф K визначений наступним чином:

$K = (\{7'', 2'', 5'', a, b\}, K_5^1 \setminus (2'', 7'')),$ де $K_{3,4}^0 = \{i''\}_{i=1}^7, K_{3,4}(\{i''\}_{i=1}^3 \cup \{7''\}) = \overline{K_4}, K_{3,4}(\{i''\}_{i=4}^6) = K_3,$
 $K_{3,4}^0 = (\{i''\}_{i=1}^3 \cup \{7''\}) \cup \{i''\}_{i=4}^6;$

2. Для графа D_{21} існує φ -перетворення визначене наступним чином:

$\varphi(K_5 + K, \sum_{i=1,4,5} (i+i'')) \rightarrow (D_{21}, \{i\}_{i=1,4,5}),$ де $K^0 = \{1'', 4'', 5''\} \cup \{a, b, v, c\}, K(\{a, b, v, c, 4'', 5''\}) \cong K_4,$

$K(\{a, b, v, c, 1'', 4'', 5''\}) \cong K_5,$ причому вершини $4'', 5''$ розділяють ребра $(a, b), (v, c),$ відповідно;

3. Для графа D_{22} існує φ -перетворення визначене наступним чином:

$\varphi(K^1 + H, \sum_{i=1}^6 (i+i'')) \rightarrow (D_{22}, \{i\}_{i=1}^6),$ де $K^1 = \{i''\}_{i=1}^6,$ причому вершина $6''$ розділяє ребро $(1'', 2''),$

$K^1 = K_5 \setminus (1'', 2'') \cup \{(6'', 1''), (6'', 2'')\},$ а граф H такий, що $H = K_{3,3} + (b, a), H(\{1'', c, 2''\}) = \overline{K_3},$
 $H(\{a, b, 6''\}) = (\{a, b, 6''\}, (a, b));$

4. Для графа D_{23} існує φ -перетворення визначене наступним чином:

$\varphi(K_{3,3} + H, \sum_{i=1}^5 (i+i'')) \rightarrow (D_{23}, \{i\}_{i=1}^5),$ де $H, H = (\{i''\}_1^6 \cup \{a, b, c\}, K_{3,3}^1 \cup K_3^1) \in K_{3,3}$ із трикутні ком на вершинах однієї долі у якого ребра $(b, a), (c, b)$ 1-підрозділені $4'', 5'',$ відповідно.

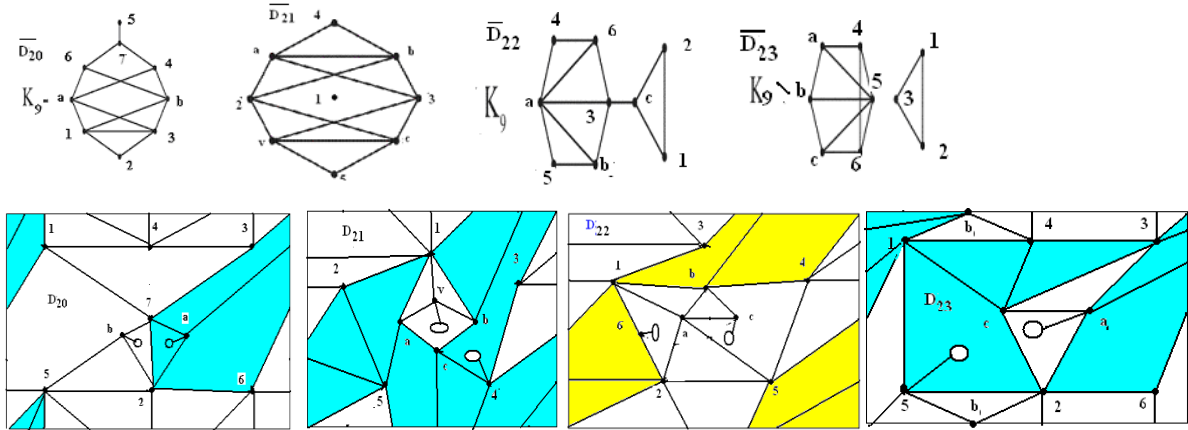


Рис.3.1.Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_{20}(D_{20}), f_{21}(D_{21}), f_{22}(D_{22}), f_{23}(D_{23})$ в 2-тор.

Доведемо твердження 1. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{20} в подвійний тор σ_2 графа D_{20}

наступним чином: а) $f_{20}(K_5 \setminus (b,a)) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $s \in \sigma_1 \setminus f_{20}(K_{3,4} + K_3^1)$, $f_{20}|_{K_{3,4} + K_3^1}$ -мінімальне вкладення графа $K_{3,4} + K_3^1$ до σ_1 , б) $f_{20}(a,b) \subset h_1$. укладатиметься до ручки $h_1 = h(s_1, s_{11})$ приклеєної до 2-клітин s_{11}, s_1 , стандартним перетворенням, де $\{s_1, s_{11}\} \subset s \setminus f_{20}(K \setminus (a,b))$, $\partial s_1 \cap \partial e = \{a\}$, $\partial s_{11} \supset \{a, g, v\}$.

Вкладення f_{20} графа D_{20} в подвійний тор σ_2 є 2-клітковим, бо ручка h_1 розрізана ребром $f_{20}(a,b)$. Граф $f_{20}(D_{20})$ має 12 граней, 23 ребра та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_{20}) = 2$, порядок ототодження пар вершин $\{(1',1''),(2',2''),(7',7''),(5',5'')\}$ є суттєвим. Твердження 1 леми 3.1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо вкладення f_{21} в подвійний тор σ_2 графа D_{21} наступним чином: а) $f_{21}(K \setminus (v,4'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $s \in \sigma_1 \setminus f_{21}(K_5)$, s - не 2-клітка, $f_{21}|_{K_{3,3}}$ мінімальне вкладення K_5 до тору, б) ребро $(v,4'')$ вкладатиметься до 2-ручки $h_1 = h(s_1, s_{11})$, приклеєної до 2-клітин s_{11}, s_1 , де $\{s_1, s_{11}\} \subset s \setminus f_{21}(K \setminus (v,4''))$, стандартним перетворенням. Вкладення f_{21} графа D_{21} в подвійний тор σ_2 є 2-клітковим, бо ручка розрізана ребром $(v,4'')$. Граф $f_{21}(D_{21})$ має 11 граней, 22 ребра та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_{21}) = 2$. Порядок ототодження пар вершин $\{(1',1''),(4'',4''),(5'',5'')\}$ є суттєвим відносно пари вершини $(1',1'')$, пари вершин $(4'',4''),(5'',5'')$ можливо переставляти між собою.

Доведемо твердження 3. Побудуємо вкладення f_{22} в подвійний тор σ_2 графа D_{22} наступним чином: а) $f_{22}(H \setminus (c,6'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $s \in \sigma_1 \setminus f_{22}(K_5)$, $f_{22}|_{(K_5)}$ -мінімальне вкладення K_5 до σ_1 , б) $f_{22}(c,6'') \subset h_1$, $h_1 = h(s_1, s_{11})$ -2-ручка приклеєна до 2-кліток s_{11}, s_1 , $\{s_1, s_{11}\} \subset s \setminus f_{22}(H \setminus (c,6''))$, стандартним перетворенням Вкладення графів $f_{22}(D_{22})$ до подвійного тору наведено на рис.3.3, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{22}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2-2*2=9-23-12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{22}) = 2$. Твердження

З доведено. Порядок ототождження пар вершин $\{(1',1''),(2',2''),(4'',4'),(5'',5')\}$ є суттєвим, відносно пар вершин $(1',1''),(2',2'')$ та $(4'',4'),(5'',5')$, які можливо переставляти в цих парах.

Доведемо твердження 4. Побудуємо вкладення f_{23} в подвійний тор σ_2 графа D_{23} наступним чином: а) $f_{23}(H \setminus (5'', a)) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $s \in \sigma_1 \setminus f_{23} |_{K_{3,3}}(K_{3,3})$ та s -не 2-клітка та має границею ∂s цикл довжини 10, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = \overline{K_3} = K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6)$, $H^0 = \{i''\}_{i=1}^5 \cup \{a, b, c\}$, $H(\{i''\}_{i=1}^3) = \overline{K_3}$, $H(\{a, b, v\}) = K_3$, де ребро (b, c) розподілене вершиною $4''$, ребро (a, b) розподілене вершиною $5''$, причому зірка $St_3(b)$ має вкладатися до $\bar{s} \setminus \partial s$ завдяки двосторонньому доступу до вершин з множини $\{i''\}_1^5$. б) $f_{23}(5'', a) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна стандартною процедурою до лвох кліток з множини $(\bar{s} \setminus \partial s) \setminus f_{23}(H \setminus (5'', a))$. Вкладення графів $f_{23}(D_{23})$ до подвійного тору наведене на рис.3.3, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{23}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 \cdot 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{23}) = 2$. Порядок ототождження пар вершин $\{(1',1''),(2',2''),(4'',4'),(5'',5')\}$ є суттєвим, відносно пар вершин $(1',1''),(2',2'')$ та $(4'',4'),(5'',5')$, які можливо переставляти в цих парах. Твердження 4 доведено. Лема 3.1 доведена.

Лема 3.2. Виконуються наступні твердження:

1. Граф $K_{3,7}$ -граф-обструкція для тору є ϕ -образом графів $K_{3,3}, K_{3,4}$ при ϕ -перетворенні виду $\phi(K_{3,3} + K_{3,4}, \sum_{i=1}^3 (i' + i'')) \rightarrow (K_{3,7}, \{i'\}_{i=1}^3)$, де $K_{3,3} \{i'\}_{i=1}^3 = K_{3,4} \{i''\}_{i=1}^3 = \overline{K_3}$.

2. Граф $K_{3,11}$ -граф-обструкція для подвійного тору є ϕ -образом графів $K_{3,7}, K_{3,4}$ $\phi(K_{3,7} + K_{3,4}, \sum_{i=1}^3 (i' + i'')) \rightarrow (K_{3,11}, \{i'\}_{i=1}^3)$, де $K_{3,7} \{i'\}_{i=1}^3 = K_{3,4} \{i''\}_{i=1}^3 = \overline{K_3}$.

Доведення леми 3.2. Доведення леми спирається на розширення мінімального вкладення f графа $K_{3,3}$ в тор із врахуванням двостороннього доступу до вершин, а саме, що згідно твердження 3) леми 1.3 маємо $ms_{K_{3,3}}(K_{3,3}^0 \setminus \{u, v, w\}) = 3$ для довільної трійки попарно несуміжних вершин графа $K_{3,3}$. Виконаємо покрокове приклеювання простих зірок $St_3(v_i)$ до $f(K_{3,3})$: першої зірки з вершиною v_i -центром зірки з трьома променями, якими три висячі вершини попарно ототожнюються з трьома вершинами графа $K_{3,3}$, а наступні прості зірки приєднують до графа, що отриманий на попередньому кроці, та того, що $ms_{K_{3,3}}(K_{3,3}^0 \setminus \{u, v, w\}) = 3$ для довільної трійки попарно несуміжних вершин. Мінімальні вкладення в 2-тор графа $K_{3,7}$ та в 3-тор графа $K_{3,11}$ наведені на рис 3.2. Доведення леми 3.2 закінчене.

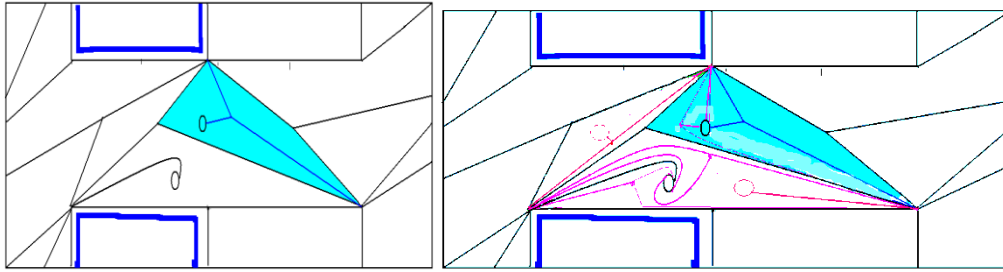


Рис. 3.2. Мінімальні вкладення в 2-тор графа $K_{3,7}$ та в 3-тор графа $K_{3,11}$, відповідно.

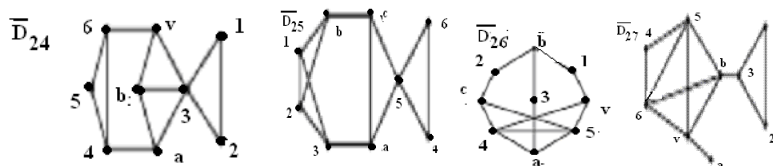
Лема 3.3. Виконуються наступні твердження:

1. D_{24} -граф-обструкція для тору є ϕ -образом графів $K_{3,3}$, де $K_{3,3}^0 = \{i'\}_1^3 + \{i''\}_4^6$, $K_{3,3}(\{i'\}_1^3) = K_{3,3}(\{i''\}_4^6) = \overline{K_3}$ та H , $H \cong K_6 \setminus K_3^1$, при наступному перетворенні $\phi(K_{3,3} + H, \sum_{i=1, i \neq 3}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{24}, \{i\}_{i=1, i \neq 3}^6)$ шляхом ототождження усіх пар (i', i'') вершин, окрім вершини 3, $M'' = \{i''\}_{1, i \neq 3}^6$, $M' = \{i'\}_{1, i \neq 3}^6$, де вершини 4'', 6'' розділяють ребра $(a, b), (b, v)$, відповідно, а вершина 5'' розділяє ребро $(1'', b)$, $H(\{1'', 2'', 5''\}) = \overline{K_3}$, $H(\{a, b, v\}) = K_3$,

2. D_{25} -граф-обструкція для тору є ϕ -образом $\phi(K_{3,3} + H, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{25}, \{i\}_{i=1}^6)$ графів $K_{3,3}$ та H , де $K_{3,3}^0 = \{i'\}_1^3 + \{i''\}_4^6$, $K_{3,3}(\{i'\}_1^3) = K_{3,3}(\{i''\}_4^6) = \overline{K_3}$, $H \cong K_6 \setminus K_3^1$, задане шляхом ототождження усіх пар (i', i'') вершин, окрім вершини 3, $M'' = \{i''\}_1^6$, $M' = \{i'\}_1^6$, де вершини 2'', 3'' розділяють ребра $(a, v), (b, v)$, відповідно, а вершина 5'' розділяє ребро $(1'', b)$, $H(\{a, b, v\}) = K_3$, $H(\{1'', 4'', 6''\}) = \overline{K_3}$.

3. Граф-обструкція для тору D_{26} є ϕ -образом $\phi(K_5 \setminus (4,5) + H, \sum_{i=1}^4 (i' + i'')) \rightarrow (D_{26}, \{i\}_{i=1}^5)$ графів K_5 та квазізірки H з центром K_4 , $K_4^0 = \{a, 4'', c, v\}$, в якому трикутник (a, c, v) має три кратних ребра, 1-підрозділених вершинами 1'', 2'', 3'', відповідно, а вершина 4' графа K_5 розділяє ребро $(5, 4)$, де $K_5^0 = \{1', 2', 3', 4, 5\}$;

4. D_{27} -граф-обструкція для тору є ϕ -образом графів $K_{3,3}$ та H при ϕ -перетворенні заданому на множинах вершин формулою $\phi(K_{3,3} + H, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{27}, \{i\}_{i=1}^6)$, де $K_{3,3}^0 = \{i'\}_1^6$, $H = K_5 \setminus (1'', 2'') \cup \{(3'', v), (3'', v), (v, 4''), (a, 5''), (a, 6'')\}$, $K_5^0 \setminus (1'', 2'') = \{a, b, v, 1'', 2''\}$, $\deg 3'' = 2$.



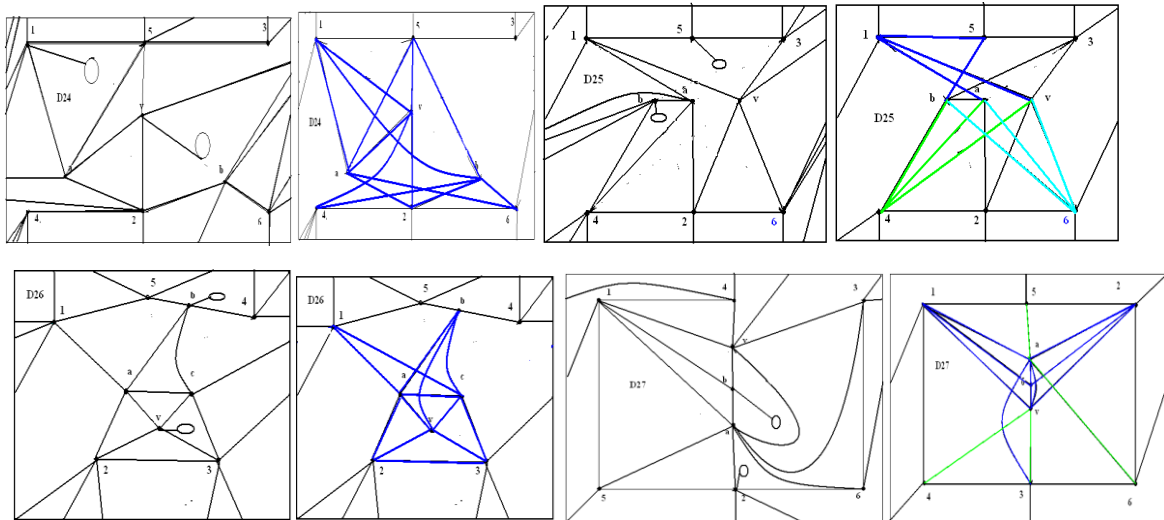


Рис.3.3. Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_{24}(D_{24}), \dots, f_{27}(D_{27})$ до 2-тору.

Доведення леми 3.3. Доведемо твердження 1. Побудуємо вкладення f_{24} в подвійний тор σ_2 графа D_{24} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_{3,3}$ в тор наступним чином: а)

$f_{24}(H \setminus (1, v)) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $H \cong K_6 \setminus K_3^1$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$ та $s \in$ не 2-кліткою та має границею ∂s цикл довжини 10, $K_{3,3}^0 = \{i''\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=1}^3) = \overline{K_3} = K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6)$ $H^0 = \{i''\}_{i=1, \neq 3}^6 \cup \{a, b, v\}$, $H(\{i''\}_{i=1, \neq 3}^4) = \overline{K_3}$, $H(\{a, b, v\}) = K_3$, де ребро (b, v) розділене вершиною $4'$, ребро (a, v) розділене вершиною $6''$,

б) $f_{24}((1'', v)) \subset h$, де h -2-ручка до тору. Вкладення графів $f_{24}(D_{24})$ до подвійного тору наведено на рис.3.3, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{24}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{24}) = 2$. Порядок ототождження пар вершин $\{(i', i'')\}_{i=1, \neq 3}^6 \in$ суттєвим та дві пари $(4', 4''), (6', 6'')$ можливо переставляти між собою відносно інших пар вершин. Твердження 1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо вкладення f_{25} в подвійний тор σ_2 графа D_{25} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_{3,3}$ в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_{25}(H \setminus (5, b)) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $H \cong K_6 \setminus K_3^1$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$ та $s \in$ кліткою із границею ∂s циклом довжини 10, $K_{3,3}^0 = \{i''\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=1}^3) = \overline{K_3} = K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6)$ $H^0 = \{i''\}_{i=1}^6 \cup \{a, b, v\}$, $H(\{i''\}_{i=1, \neq 3}^4) = \overline{K_3}$, $H(\{a, b, v\}) = K_3$, де ребро (b, v) розділене вершиною $3'$, ребро (a, v) розділене вершиною $2''$, а вершина $5''$ розділяє ребро $(1'', b)$;

б) $f_{25}((5, b)) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до тору. Вкладення графів $f_{25}(D_{25})$ до подвійного тору наведено на рис.3.3, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{25}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{25}) = 2$. Порядок ототождження пар вершин $\{(i', i'')\}_1^6 \in$ суттєвим та дві пари $(4', 4''), (6', 6'')$ можливо переставляти між собою відносно інших пар вершин. Твердження 2 доведено.

Доведемо твердження 3. Побудуємо вкладення f_{26} в σ_2 графа D_{26} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{26}(H \setminus (v, 4'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де квазізірка H з центром K_4 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та $s \in$ кліткою із границею ∂s довжини 8, $K_4^0 = \{a, 4'', c, v\}$, в якому трикутник (a, c, v) має три кратних ребра, 1-підрозділених вершинами $1'', 2'', 3''$, відповідно, а вершина $4'$ графа K_5 розділяє ребро $(5, 4)$ графа K_5 , $K_5^0 = \{1', 2', 3', 4', 4, 5\}$; б) $f_{26}((v, 4'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до тору. Вкладення графу $f_{26}(D_{26})$ до подвійного тору наведено на рис.3.3, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{26}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{26}) = 2$. Порядок ототождження пар вершин $\{(i', i'')\}_1^6$ є суттєвим та три пари $(1', 1''), (2', 2''), (3', 3'')$ можливо переставляти між собою відносно відносно інших пар вершин. Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо вкладення f_{27} в подвійний тор σ_2 графа D_{25} шляхом подовження мінімального вкладення f графа $K_{3,3}$ в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_{27}(H \setminus (3'', 2'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $s \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$ та s має границю ∂s - цикл довжини 10, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=1}^3) = K_3 = K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6)$, $K_5^0 \setminus (1'', 2'') = \{a, b, v, 1'', 2''\}$, $H = K_5 \setminus (1'', 2'') \cup \{(3'', v), (3'', v), (v, 4''), (a, 5''), (a, 6'')\}$, $\deg 3'' = 2$;

б) $f_{27}((3'', 2'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до тору. Вкладення графів $f_{27}(D_{27})$ до подвійного тору наведено на рис.3.3, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{27}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{27}) = 2$. Порядок ототождження пар вершин $\{(i', i'')\}_1^6$ є суттєвим та дві пари $(1', 1''), (3', 3''), (4', 4''), (6', 6'')$, можливо переставляти в парі між собою відносно відносно інших пар вершин. Твердження 4 доведено. Доведення леми 3.3 закінчено.

Лема 3.4. Виконуються наступні твердження:

1. D_{28} -граф-обструкція для тору є ϕ -образом графів K_5 та H , де $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^0 = \{i''\}_1^4 \cup \{a, b, c, v\}$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(2'', 5''), (b, v)\} \cup St_5^1(a)$, $St_5^0(a) = \{1'', 3'', 4'', b, v, c\}$ при перетворенні заданому наступною формулою: $\phi(K_5 + H, \sum_{i=1, \bullet}^4 (i' + i'')) \rightarrow (D_{28}, \{i\}_{i=1}^4)$ шляхом ототождження усіх пар (i', i'') вершин з $M' = \{i'\}_1^4$, $M'' = \{i''\}_1^4$;

2. Граф D_{29} -обструкція для тору є ϕ -образом графів K_5 та H , де $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(2'', 1''), (b, v)\} \cup \{(a, b), (a, v), (4'', v), (3'', v)\}$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\phi(K_5 + H, \sum_{i=1, \bullet}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{29}, \{i\}_{i=1}^5)$ шляхом ототождження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$;

3. Граф D_{30} -обструкція для тору є φ -образом графів K_5 та H , де $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(3'', 1''), (b, v)\} \cup \{(c, b), (c, v), (2'', c), (5'', c), (4'', b)\}$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_5 + H, \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{30}, \{i\}_{i=1}^5)$ шляхом ототождження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$;

4. D_{31} - обструкція для тору є φ -образом графів K_5 та H , де $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, d\}$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(5'', 1''), (b, 1'')\} \cup \{(d, b), (d, 1''), (2'', d), (3'', b), (4'', b)\}$, де вершина d розділяє ребро $(b, 1'')$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_5 + H, \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{31}, \{i\}_{i=1}^5)$ шляхом ототождження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$;

Доведення леми 3.4. Доведемо твердження 1. Побудуємо вкладення f_{28} в σ_2 графа D_{28} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{28}(H \setminus (a, v)) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $H^0 = \{i''\}_1^4 \cup \{a, b, c, v\}$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(2'', 5''), (b, v)\} \cup St_5^1(a)$, $St_5^0(a) = \{1'', 3'', 4'', b, v, c\}$, т.то H -квазізірка з центром C_4 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на якій із урахуванням 2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^4$ як досяжна на площині множина; б) $f_{28}((a, v)) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до кліток з множини $(\bar{s} \setminus \partial s) \setminus f_{28}(H \setminus (a, v))$. Вкладення графу $f_{28}(D_{28})$ до подвійного тору наведено на рис.3.4, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{28}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а ребер у графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{28}) = 2$. Твердження 1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо вкладення f_{29} в σ_2 графа D_{29} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{29}(H \setminus (a, v)) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $H^1 = K_5^1 \setminus \{(2'', 1''), (b, v)\} \cup \{(a, b), (a, v), (4'', v), (3'', v)\}$, $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$, т.то H -квазізірка з центром C_4 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на якій із урахуванням 2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$ як досяжна множина на площині; б)

$f_{29}((a, v)) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до кліток з множини $(\bar{s} \setminus \partial s) \setminus f_{29}(H \setminus (a, v))$. тору. Вкладення графу $f_{29}(D_{29})$ до подвійного тору наведено на рис.3.4, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{29}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{29}) = 2$. Твердження 2 доведено.

Доведемо твердження 3. Побудуємо вкладення f_{30} в σ_2 графа D_{30} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{30}(H \setminus (a, v)) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $H^1 = K_5^1 \setminus \{(3'', 1''), (b, v)\} \cup \{(c, b), (c, v), (2'', c), (5'', c), (4'', b)\}$, $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$, т.то H -квазізірка з

центром C_4 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та $s \in$ кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на якій із урахуванням 2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$ як досяжна множина на площині; б)

$f_{30}((a,v)) \subset h$, де h -ручка приклеєна до кліток з множини $(\bar{s} \setminus \partial s) \setminus f_{30}(H \setminus (a,v))$. Вкладення графу $f_{30}(D_{30})$ до подвійного тору наведено на рис.3.4, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{30}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{30}) = 2$. Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо вкладення f_{31} в σ_2 графа D_{31} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{31}(H \setminus (c,d)) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(5'',1''),(b,1'')\} \cup \{(d,c),(d,b),(d,1''),(2'',d),(3'',b),(4'',b)\}$, $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a,b,c,d\}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та $s \in$ кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на якій із урахуванням 2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$ як досяжна множина на площині; б) $f_{31}((c,d)) \subset h$, де h -ручка приклеєна до кліток з множини $(\bar{s} \setminus \partial s) \setminus f_{31}(H \setminus (c,d))$. Вкладення графу $f_{31}(D_{31})$ до подвійного тору наведено на рис.3.4, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{31}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{31}) = 2$. Твердження 4 доведено. Доведення леми 3.4 закінчене.

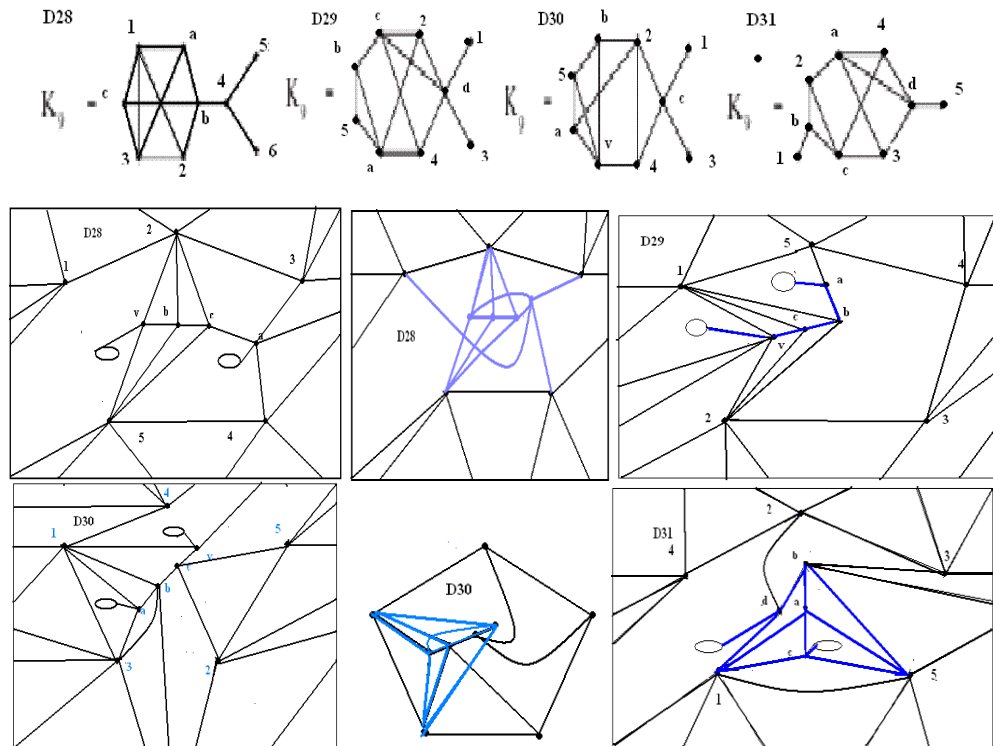


Рис.3.4. Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_8(D_{28}), \dots, f_{31}(D_{31})$ до 2-тору.

Лема 3.5.. Виконуються наступні твердження:

1. D_{32} -граф-обструкція для тору є φ -образом графів $K_6 \setminus K_2^1$ та квазізірки H з центром $K_{2,3}$, де $K_6^0 \setminus K_2^1 = \{i'\}_1^6$, $K_6^1 \setminus K_2^1 = K_6^1 \setminus \{(1',3'),(2',5')\}$, $H^1 = K_{2,3}^1 \cup \{(2'',a),(b,3''),(b,1''),(b,5'')\}$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a,b,v\}$ при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_6 \setminus K_2^1 + H, \sum_{i=1, \bullet}^6 (i'+i'')) \rightarrow (D_{32}, \{i\}_{i=1}^6)$ та виконаному шляхом ототодження усіх пар (i',i'') вершин з множин $M' = \{i'\}_1^6$ та $M'' = \{i''\}_1^6$;

2. D_{33} -граф-обструкція для тору є φ -образом графів K_5 та $H \cup St_3(b)$, де H -квазізірка з центром $K_{2,3}$, $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^1 = K_{2,3}^1 \cup \{(1'',a),(v,3''),(c,5'')\}$, $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a,c,v\}$, $St_3(b)$ - проста зірка з центром b , $St_3^0(b) = \{i''\}_1^3$, при перетворенні заданому наступною формулою:

$\varphi(K_5 + H \cup St_3(b), \sum_{i=1, \bullet}^5 (i'+i'')) \rightarrow (D_{33}, \{i\}_{i=1}^5)$ та виконаному шляхом ототодження усіх пар (i',i'') вершин з множин $M' = \{i'\}_1^5$ та $M'' = \{i''\}_1^5$;

3. D_{34} - обструкція для тору є φ -образом графів $K_6 \setminus K_3^1$ та H , де $K_6^0 = \{i'\}_1^6$, $K_6(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(c,1''),(c,4'')\} \cup \{(c,6''),(1'',6''),(d,1''),(2'',b),(3'',a),(5'',c)\}$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a,b,c\}$, $K_6(\{i''\}_{i=2}^3) = K_3$, де вершина b'' розділяє ребро $(c,1'')$ графа $K_5 \setminus (c,4'')$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_6 \setminus K_3^1 + H, \sum_{i=1, \bullet}^6 (i'+i'')) \rightarrow (D_{34}, \{i\}_{i=1}^6)$ шляхом ототодження усіх пар (i',i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

4. D_{35} - обструкція для тору є φ -образом графів $K_6 \setminus (K_3^1 + K_2^1)$ та H , де $K_6^0 = \{i'\}_1^6$, $K_6(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $K_6(\{i''\}_{i=2}^3) = K_3 \setminus (4',5')$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a,b,v\}$, $H^1 = K_{2,3}^1 \cup \{(b,2''),(4'',v),(3'',a),(5'',v)\}$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_6 \setminus (K_3^1 + K_2^1) + H, \sum_{i=1, \bullet}^6 (i'+i'')) \rightarrow (D_{35}, \{i\}_{i=1}^6)$ шляхом ототодження усіх пар (i',i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

Доведення леми 3.5. Доведемо твердження 1. Побудуємо вкладення f_{32} в σ_2 графа D_{32} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_6 \setminus K_2^1$ в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_{32}(H \setminus (a,4'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, $H^1 = K_{2,3}^1 \cup \{(2'',a),(b,3''),(b,1''),(b,5'')\}$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a,b,v\}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на якій із урахуванням 2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$ як досяжна множина на площині; б) $f_{32}((a,4'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до

кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s) \cup f_{32}(H \setminus (a,4''))$. Вкладення графу $f_{32}(D_{32})$ до подвійного тору наведено на рис.3.5, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{32}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 \cdot 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{32}) = 2$. Твердження 1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо вкладення f_{33} в σ_2 графа D_{33} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{33}(H \cup St_3(b) \setminus (a, 5'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H - квазізірка з центром $K_{2,3}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та s є кліткою із границею ∂s - циклом довжини 6, на якій із урахуванням 2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на площині; б) $f_{33}((a, 5'')) \subset h$, де h - 2-ручка стандартно приклеєна до двох кліток із множини $(\bar{s} \setminus \partial s) \setminus f_{33}(H \cup St_3(b) \setminus (a, 5''))$. Вкладення графу $f_{33}(D_{33})$ до подвійного тору наведене на рис.3.5, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{33}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер у графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{33}) = 2$. Твердження 2 доведено.

Доведемо твердження 3. Побудуємо вкладення f_{34} в σ_2 графа D_{34} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_6 \setminus K_3^1$ в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{34}(H \setminus (c, 6'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H - квазізірка з центром $K_5 \setminus (c, 4'')$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_6 \setminus K_3^1)$ та s є кліткою із границею ∂s - циклом довжини 9, на раниці якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на s ; б) $f_{34}((c, 6'')) \subset h$, де h - 2-ручка приклеєна до кліток з $(\bar{s} \setminus \partial s) \setminus f_{34}(H \setminus (c, 6''))$. Вкладення графу $f_{34}(D_{34})$ до подвійного тору наведене на рис.3.5, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{34}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер у графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{34}) = 2$. Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо вкладення f_{35} в σ_2 графа D_{35} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_6 \setminus (K_3^1 + K_2^1)$ в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{35}(H \setminus (a, 6'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H - квазізірка з центром $K_{2,3}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_6 \setminus (K_3^1 + K_2^1))$ та s є кліткою із границею ∂s - циклом довжини 9, на раниці якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6$, як досяжної на площині s ; б) $f_{35}((a, 6'')) \subset h$, де h - 2-ручка приклеєна до кліток з $(\bar{s} \setminus \partial s) \setminus f_{35}(H \setminus (a, 6''))$. Вкладення графа $f_{35}(D_{35})$ до подвійного тору наведене на рис.3.5, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{35}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер у графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{35}) = 2$. Твердження 4 доведено. Доведення леми 3.5 закінчено.

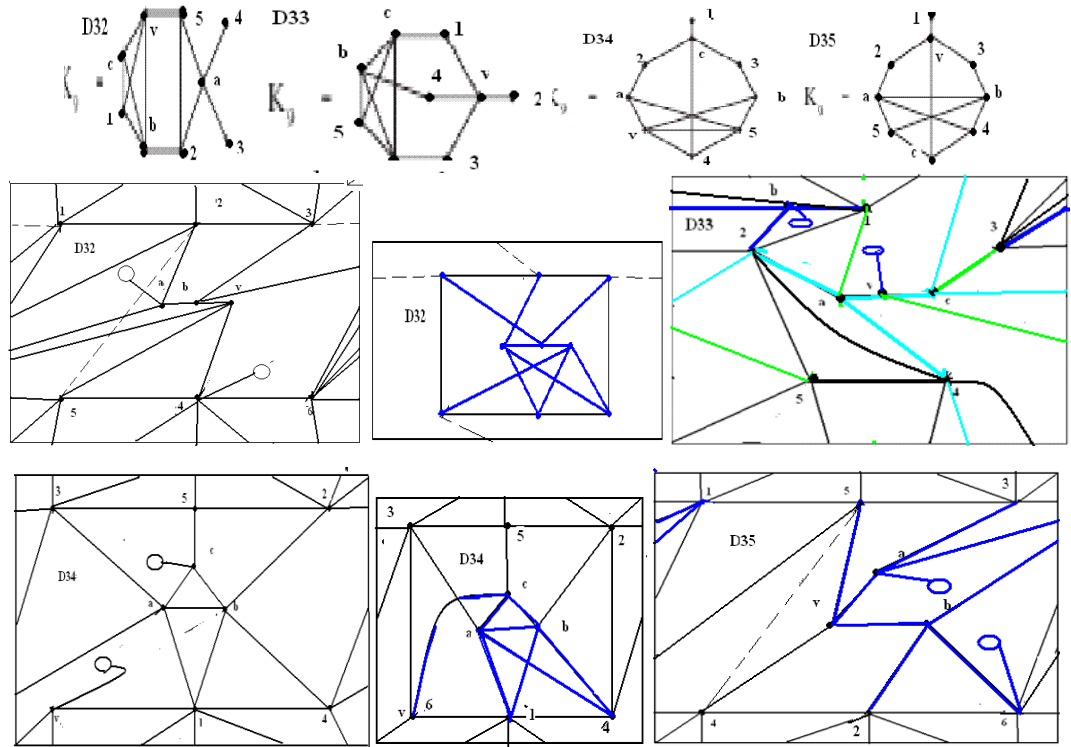


Рис.3.5. Доповнення до K_9 і вкладення графів $f_{32}(D_{32}) \dots f_{35}(D_{35})$ до 2-тору.

Лема 3.6. Виконуються наступні твердження:

1. D_{36} - обструкція для тору є φ -образом графів $K_6 \setminus K_3^1$ та H , де $K_6^0 = \{i'\}_1^6$, $K_6(\{i''\}_{i=4}^6) = K_3$, $H^1 = K_4^1 \setminus \{(a,v)\} \cup \{(1'',a), (v,1''), (4'',b), (5'',b), (2'',a), (3'',v)\}$, $K_6(\{i''\}_{i=1}^3) = K_3$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a,b,v\}$, де вершина $1''$ розділяє ребро (a,v) графа K_4 , при перетворенні заданому наступною формулою:

$$\varphi(K_6 \setminus K_3^1 + H, \sum_{i=1, \bullet}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{36}, \{i'\}_{i=1}^6)$$
 шляхом ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин

$$\text{приєднання } M' = \{i''\}_1^6, M'' = \{i''\}_1^6;$$

2. D_{37} - обструкція для тору є φ -образом графів $K_{3,3}$ та H , де $K_{3,3}^0 = \{i'\}_1^6$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = K_3$, $H^1 = K_4^1 \cup \{(5'',a), (a,4''), (2'',b), (5'',b), (2'',c), (4'',c), (a,1''), (a,3'')\}$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=1}^3) = K_3$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a,b,c\}$, $H\{a,b,c,6''\} = K_4$, де вершини $5'', 4'', 2''$ розділяє ребра $(a,b), (c,b), (a,c)$ графа K_4 з трьома кратними ребрами, при перетворенні заданому наступною формулою:

$$\varphi(K_{3,3} + H, \sum_{i=1, \bullet}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{37}, \{i'\}_{i=1}^6)$$
 шляхом ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання

$$M' = \{i''\}_1^6, M'' = \{i''\}_1^6;$$

3. D_{38} -граф-обструкція для тору є φ -образом графів K_5 , $K_5^0 = \{i'\}_1^7$, де вершини $6', 7'$ розділяють ребро $(4', 5')$, та H , де H -квазізірка з центром $K_5 \setminus e$, $H^0 = \{i''\}_2^5 \cup \{a, 7'', 6'', v\}$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(v, 6''), (a, 7'')\} \cup \{(3'', a), (v, 4''), (6'', 4''), (a, 5''), (7'', 5'')\}$, підграф $H(\{a, 5'', 6'', 7'', 4'', v\})$ гомеоморфний

K_4 , при перетворенні заданому наступною формулою: $\phi(K_5 + H, \sum_{i=2}^7 (i' + i'')) \rightarrow (D_{38}, \{i\}_{i=2}^7)$ та виконаному шляхом ототождження усіх пар (i', i'') вершин з множин $M' = \{i'\}_2^7$ та $M'' = \{i''\}_2^7$;

4. D_{39} -граф-обструкція для тору є ϕ -образом графів K_5 , $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, та H , де H -квазізірка з центром C_4 - простим циклом довжини 4, де $C_5^1 = \{(a,b), (v,b), (a,c), (c,v)\}$, $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup C_4^0$, $H^1 = C_5^1 \cup \{(5'', a), (5'', b), (4'', a), (4'', b), (v, 1''), (v, 3''), (c, 1''), (c, 3''), (v, 2''), (b, 2'')\}$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\phi(K_5 + H, \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{39}, \{i\}_{i=1}^5)$ та виконаному шляхом ототождження усіх пар (i', i'') з множин $M' = \{i'\}_1^5$ та $M'' = \{i''\}_1^5$;

Доведення лема 3.7. Доведемо твердження 1. Побудуємо вкладення f_{36} в σ_2 графа D_{35} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_6 \setminus K_3^1$ в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{36}(H \setminus (a, 2'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром K_4 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_6 \setminus K_3^1)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 9, на границі якої із урахуванням 2-дос тупу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6$, як досяжної на площині s ; б) $f_{36}((a, 2'')) \subset h$, де h -ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{36}(H \setminus (a, 2'')))$. Вкладення графу $f_{36}(D_{36})$ до подвійного тору наведено на рис.3.6, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{36}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а ребер у графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{36}) = 2$. Твердження 1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо вкладення f_{37} в σ_2 графа D_{37} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_{3,3}$ в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{37}(H \setminus (b, 6'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром K_4 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 10, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6$, як досяжної на площині s ; б) $f_{37}((b, 6'')) \subset h$, де h -ручка приклеєна до двох кліток з $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{37}(H \setminus (b, 6'')))$. Вкладення графу $f_{37}(D_{37})$ до подвійного тору наведено на рис.3.6, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{37}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а ребер у графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{37}) = 2$. Твердження 2 доведено. Доведемо твердження 3.

Побудуємо вкладення f_{38} в σ_2 графа D_{38} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{38}(H \setminus (a, c)) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром K_5 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 6, на якій із урахуванням 2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на площині; б) $f_{38}((a, c)) \subset h$, де h -ручка стандар тно приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{38}(H \setminus (a, c)))$. Вкладення графу $f_{38}(D_{38})$ до подвійного тору наведено на рис.3.6, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{38}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а ребер у графа

дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2-2*2=9-23+12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{38})=2$. Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо вкладення f_{39} в σ_2 графа D_{39} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{39}(H \setminus (I'', v)) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H - квазізірка з центром $K_5 \setminus e$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та s - клітка з границею ∂s -циклом довжини 6, на якій із урахуванням 2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на площині ; б) $f_{39}((I'', v)) \subset h$, де h -ручка приклеєна стандартно до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{39}(H \setminus (I'', v)))$. Вкладення графу $f_{39}(D_{39})$ до подвійного тору наведено на рис.3.6, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{39}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а ребер у графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2-2*2=9-23+12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{39})=2$. Твердження 4 доведено. Доведення леми 3.6 закінчено.

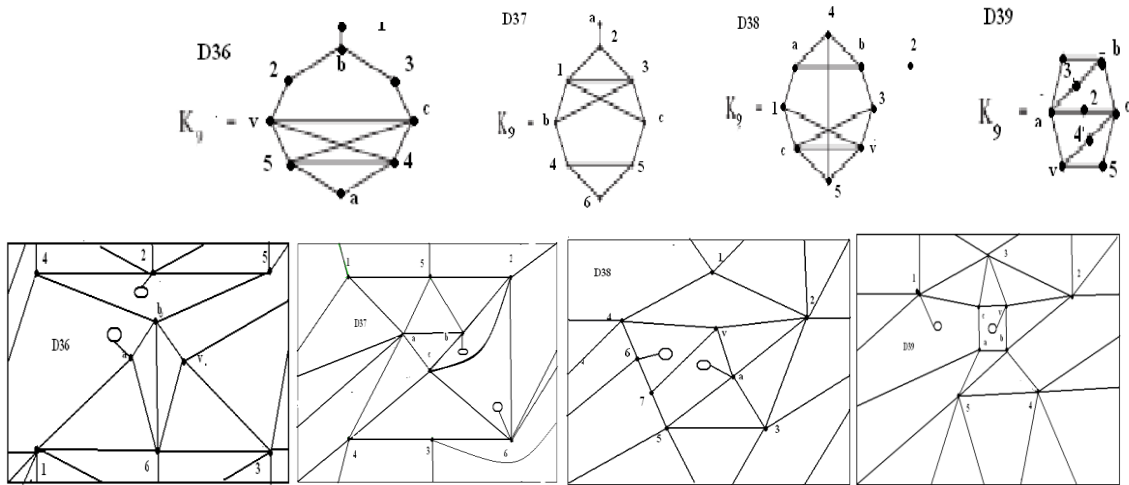


Рис.3.6. Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_{36}(D_{36}) \dots f_{39}(D_{39})$ до 2-тору.

Лема 3.7. Виконуються наступні твердження:

1. D_{40} - обструкція для тору є φ -образом графів $K_{3,3}$ та H , де $K_{3,3}^0 = \{i'\}_1^6$, $H^1 = 3K_4^1$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a, b, c\}$, причому кожна пара графів K_4 матиме тільки одну спільну вершину з множини $\{a, b, c\}$, де $H\{a, b, c\} = K_3$, при перетворенні заданому наступною формулою:

$$\varphi(K_{3,3} + H, \sum_{i=1, \bullet}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{40}, \{i\}_{i=1}^6)$$

шляхом ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин присднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

2. D_{41} - обструкція для тору є φ -образом графів K_5 та H , де $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$, $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^1 = K_5^1 \setminus (v, 2'') \cup \{(a, 5''), (c, 5''), (a, 4''), (c, 4''), (b, 3''), (c, 3''), (a, 1''), (b, 1'')\}$, H -квазізірка з центром $K_{1,3}$,

який на множині вершин $\{i''\}_1^4 \cup \{a,b,c,v\}$ породжує підграф гомеоморфний $K_5 \setminus (v,2'')$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_5 + H, \sum_{i=1, \bullet}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{41}, \{i\}_{i=1}^5)$ шляхом ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$;

3. D_{42} -граф-обструкція для тору є φ -образом графів K_5 , $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, та H , де H -квазізірка з центром C_4 - простим циклом довжини 4, який на вершинах $a,b,c,v,2''$ породжує підграф гомеоморфний K_4 , де $C_4^1 = \{(a,b),(c,b),(a,v),(c,v)\}$, $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup C_4^0$, $H^1 = K_4^1 \cup \{(1'',a),(1'',b),(3'',v),(3'',b),(v,4''),(a,4''),(c,5'')\}$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_5 + H, \sum_{i=1, \bullet}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{42}, \{i\}_{i=1}^5)$ та виконаному шляхом ототодження усіх пар (i', i'') з множин $M' = \{i'\}_1^5$ та $M'' = \{i''\}_1^5$;

4. D_{43} - обструкція для тору є φ -образом графів K_5 та H , де $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a,b,c,v\}$, $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^1 = K_5^1 \setminus (1'',2'') \cup \{(a,4''),(c,4''),(b,3''),(v,5'')\}$, H -квазізірка з центром C_4 , який на множині вершин $\{i''\}_1^2 \cup \{a,b,c,v\}$ породжує підграф гомеоморфний $K_5 \setminus (1'',2'')$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_5 + H, \sum_{i=1, \bullet}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{43}, \{i\}_{i=1}^5)$ шляхом ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$;

Доведення лема 3.7. Доведемо твердження 1. Побудуємо вкладення f_{40} в σ_2 графа D_{40} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_{3,3}$ в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_{40}(H \setminus (a,2'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром-трикутником K_3 на вершинах $\{a,b,c\}$ та трьома парами трикутних променів, що породжують три графи K_4 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_6 \setminus K_3^1)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 9, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6$, як досяжної на площині s ; б) $f_{40}((a,2'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох

кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{40}(H \setminus (a,2'')))$. Вкладення графу $f_{40}(D_{40})$ до подвійного тору наведено на рис.3.7, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{40}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 13, а ребер у графа дорівнює 24, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 24 + 13$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{40}) = 2$. Твердження 1 доведено.

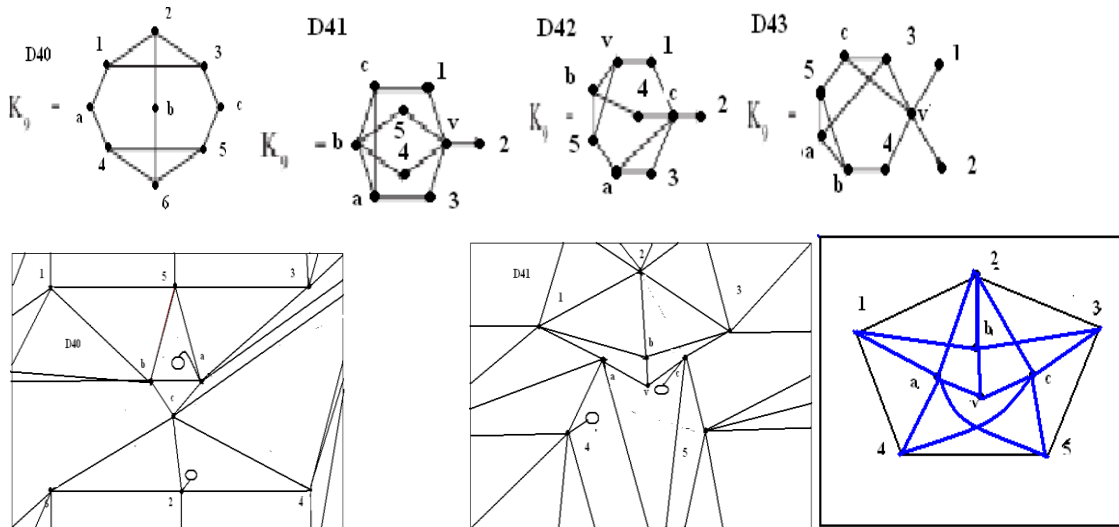
Доведемо твердження 2. Побудуємо вкладення f_{41} в σ_2 графа D_{41} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{41}(H \setminus (c,4'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром $K_{1,3}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на площині s ; б) $f_{41}((c,4'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{41}(H \setminus (c,4'')))$.

Вкладення графу $f_{41}(D_{41})$ до подвійного тору наведене на рис.3.7, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{41}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 13, а ребер у графа дорівнює 24, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 24 + 13$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{41}) = 2$. Твердження 2 доведено.

Доведемо твердження 3. Побудуємо вкладення f_{43} в σ_2 графа D_{43} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{42}(H \setminus (5'', c)) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H - квазізірка з центром C_4 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та $s \in$ кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на якій із урахуванням 2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на площині ; б)

$f_{42}((5'', c)) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{42}(H \setminus (5'', c)))$. Вкладення графу $f_{42}(D_{42})$ до подвійного тору наведене на рис.3.7, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{42}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 13, а ребер у графа дорівнює 24, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 24 + 13$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{42}) = 2$. Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо вкладення f_{43} в σ_2 графа D_{43} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{43}(H \setminus (v, 5'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H - квазізірка з центром C_4 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та $s \in$ кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на площині s ; б) $f_{43}((v, 5'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{43}(H \setminus (v, 5'')))$. Вкладення графу $f_{43}(D_{43})$ до подвійного тору наведене на рис.3.7, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{43}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 13, а ребер у графа дорівнює 24, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 24 + 13$. Матимемо рівність $\gamma(D_{43}) = 2$. Твердження 2 доведено. Доведення леми 3.7 закінчено.



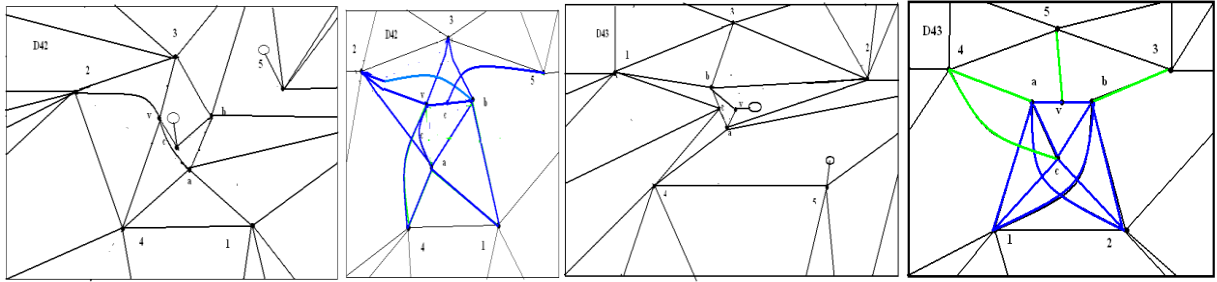


Рис.3.7.Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_{40}(D_{40}) \dots f_{43}(D_{43})$ до 2-тору.

Лема 3.8. Виконуються наступні твердження:

1. D_{44} - обструкція для тору є ϕ -образом графів $K_{3,3}$ та H , де $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a, b, c\}$, $H^1 = K_4^1 \setminus (a, c) \cup \{(a, 1''), (c, 1''), (a, 5''), (b, 5''), (a, 3''), (b, 3''), (c, 2''), (b, 2''), (c, 4''), (b, 4'')\}$, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_1^6$, де $H\{a, b, c, 6'', 1''\} \cong K_4$, причому вершина $1''$ розділяє ребро (a, c) , при перетворенні заданому наступною формулою: $\phi(K_{3,3} + H, \sum_{i=1, \bullet}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{44}, \{i\}_{i=1}^6)$ шляхом ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

2. D_{45} - обструкція для тору є ϕ -образом графів $K_6 \setminus K_3^1$ та H , де $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, v, c\}$, $H = St_5(a) + St_5(c) + St_3(v)$, $H^1 = St_5^1(a) \cup St_5^1(c) \cup St_3^1(v)$, $K_6^0 = \{i'\}_1^6$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\phi(K_6 \setminus K_3^1 + H, \sum_{i=1, \bullet}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{45}, \{i\}_{i=1}^6)$ шляхом ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

3. D_{46} - обструкція для тору є ϕ -образом графів K_5 та H , де $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c'', v\}$, $K_5^0 = \{i'\}_1^5 \cup \{c'\}$, вершина c' розділяє ребро $(1', 3')$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(1'', 3'')\} \cup K_4^1 \cup \{(a, 4''), (a, 5'')\}$, $H\{1'', 3'', v, a, b, c''\} = K_5 \setminus (1'', 3'')$, $H\{2'', 3'', c'', v\} = K_4$, $H(\{4'', 5'', a, b, c''\}) = K_{2,3}$, H - квазізірка з центром на множині вершин $\{a, b, v\}$ породжує підграф гомеоморфний K_3 , при перетворенні заданому наступною формулою: $\phi(K_5 + H, \sum_{i=1, \bullet}^5 (i' + i''), (c' + c'')) \rightarrow (D_{47}, \{i\}_{i=1}^5, c)$ шляхом ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$, та пари (c', c'') ;

4. D_{47} - обструкція для тору є ϕ -образом графів K_5 та H , де $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$, $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^1 = K_{3,3}^1 \cup K_{2,3}^1$, $K_{3,3}^0 = \{1'', 3'', v, \} \cup \{a, b, c\}$, $H\{1'', 3'', v, \} = H\{a, b, c\} = \overline{K_3}$, $H(\{4'', 5'', a, b, c\}) = K_{2,3}$ - квазізірка з центром на множині вершин $\{a, b, c, v\}$ породжує підграф гомеоморфний $K_{1,3}$, при

перетворенні заданому наступною формулою: $\phi(K_5 + H, \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{47}, \{i\}_{i=1}^5)$ шляхом ототождження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$;

Доведення леми 3.8. Доведемо твердження 1. Побудуємо вкладення f_{44} в σ_2 графа D_{44} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_{3,3}$ в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_{44}(H \setminus (b, b'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром-трикутником K_3 на вершинах $\{a, b, c, 1''\}$, де вершина $1''$ розділяє ребро (a, c) , та двома парами трикутних променів, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_6 \setminus K_3^1)$ та $s \in$ кліткою із границею ∂s -циклом довжини 9, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6$, як досяжної на площині s ; б) $f_{44}((b, b'')) \subset h$, де h -2-ручка стандартно

приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{44}(H \setminus (b, b'')))$. Вкладення графу $f_{44}(D_{44})$ до подвійного тору наведено на рис.3.8, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{44}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 13, а ребер у графа дорівнює 24, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 24 + 13$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{44}) = 2$. Твердження 1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо вкладення f_{45} в σ_2 графа D_{45} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_6 \setminus K_3^1$ в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{45}(H \setminus \{(v, 4''), (a, 3'')\}) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H - об'єднання трьох зірок з центрами на вершинах $\{a, b, v\}$, дві з яких мають однакові кінцеві вершини, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_6 \setminus K_3^1)$ де $s \in$ кліткою із границею ∂s -циклом довжини 9, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6$, як досяжної на площині s ; б)

$f_{45}(\{(v, 4''), (a, 3'')\}) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{45}(H \setminus \{(v, 4''), (a, 3'')\}))$. Вкладення графу $f_{45}(D_{45})$ до подвійного тору наведено на рис.3.8, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{45}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 14, а ребер у графа дорівнює 25, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 25 + 14$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{45}) = 2$. Твердження 2 доведено.

Доведемо твердження 3. Побудуємо вкладення f_{46} в σ_2 графа D_{46} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{46}(H \setminus (b, 3'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром $K_{1,3}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та $s \in$ кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на площині s ; б)

$f_{46}((b, 3'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{46}(H \setminus (b, 3'')))$. Вкладення графу $f_{46}(D_{46})$ до подвійного тору наведено на рис.3.8, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{46}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 14, а ребер у графа дорівнює 25, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 25 + 14$. Матимемо рівність $\gamma(D_{46}) = 2$. Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо вкладення f_{47} в σ_2 графа D_{47} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{43}(H \setminus (v, 5'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H - квазізірка з центром $K_{1,3}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та $s \in$ кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на площині s ; б) $f_{47}((v, 5'')) \subset h$, де h - 2-ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{43}(H \setminus (v, 5'')))$. Вкладення графу $f_{47}(D_{47})$ до подвійного тору наведено на рис.3.8, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{47}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 15, а ребер у графа дорівнює 26, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 26 + 15$. Матимемо рівність $\gamma(D_{47}) = 2$. Твердження 4 доведено. Доведення леми 3.8 закінчено.

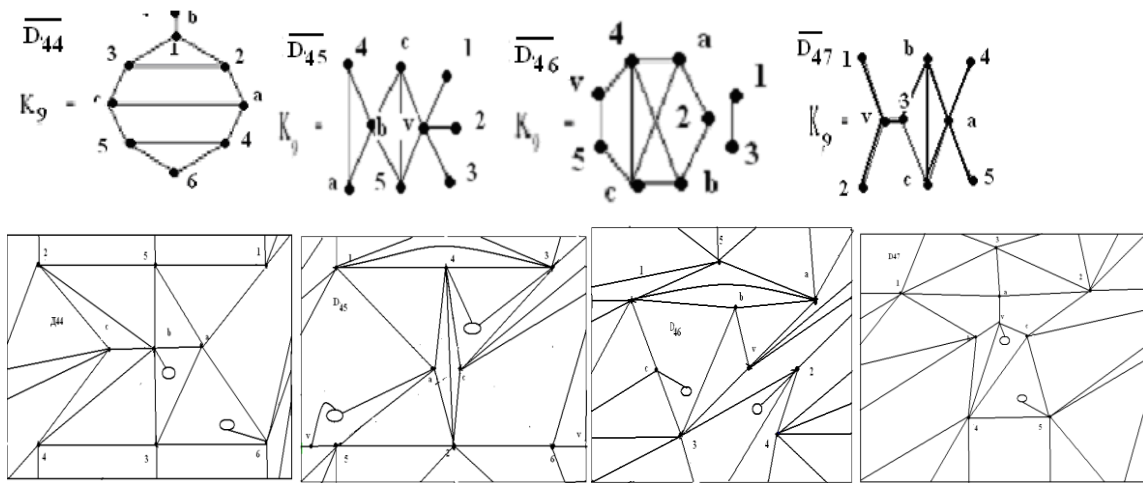


Рис.3.18. Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_{44}(D_{44}) \dots f_{47}(D_{47})$ до 2-тору.

Лема 3.9. Виконуються наступні твердження:

1. D_{48} - обструкція для тору є ϕ -образом графів $K_6 \setminus K_{1,2}^1$ та H , де $K_{3,3}^0 \setminus K_{1,2}^1 = \{i''\}_1^6$, $H^0 = \{i''\}_{1,i \neq 2}^6 \cup \{a, b, b''\}$, причому вершина b' розділяє ребро $(2', 6')$, $H^1 = K_5^1 \setminus (5'', 6'') \cup \{(a, 1''), (b, 1''), (a, 5''), (a, 4''), (c'', 3'')\}$, де $H\{a, b, c'', 6'', 5''\} \cong K_5 \setminus (5'', 6'')$, при перетворенні заданому формулою: $\phi((K_6 \setminus K_{1,2}^1) + H, (\sum_{i=1, i \neq 2}^6 (i' + i''), (b' + b''))) \rightarrow (D_{48}, (\{i''\}_{i=1, i \neq 2}^6, b))$ та виконаному шляхом ототождження усіх пар (i', i'') вершин з множин $M' = \{i''\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$ та (b', b'') в b , причому вершина $2'$ стане вершиною 2;

2. D_{49} - обструкція для тору є ϕ -образом графів $K_6 \setminus 2K_2^1$ та H , де $K_6 \setminus 2K_2^1 = \{i''\}_1^6$, $K_6^1 \setminus 2K_2^1 = K_6^1 \setminus \{(4', 6'), (2', 5')\}$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a, b, c\}$, $H(\{i''\}_1^2 \cup \{a, b\}) = K_4$, $H(\{1'', 2'', 4'', 6''\} \cup \{c\}) = St_4(c)$, $H^1 = K_4^1 \cup St_4^1(c) \cup \{(a, 6''), (b, 3''), (a, 4''), (a, 5'')\}$, при перетворенні заданому формулою:

$\varphi((K_6 \setminus 2K_2) + H, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{49}, \{i\}_{i=1}^6)$ та виконаному шляхом ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

3. D_{50} - обструкція для тору є φ -образом графів K_6 та H , де $K_6^0 = \{i'\}_1^6$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a, b, c\}$, $H(\{i''\}_4^5 \cup \{c, b\}) = K_4$, $H(\{1'', 6'', 4'', 5'' a\}) = St_4(a)$ $H^1 = K_4^1 \cup St_4^1(a) \cup \{(c, 2''), (b, 3'')\}$, при перетворенні заданому формулою: $\varphi(K_6 + H, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{50}, \{i\}_{i=1}^6)$ та виконаному шляхом ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

4. D_{51} - обструкція для тору є φ -образом графів K_5 та H , де $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$, $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^1 = H_1^1 \cup H_2^1 \cup \{(b, 1''), (v, 3'')\}$, $H_1^0 = \{4'', 5'', c, b, v\}$, $H_2^0 = \{2'', 4'', 5'', a, c\}$, $H_1 = H(\{4'', 5'', c, b, v\}) = K_5 \setminus (4'', 5'')$, $H_2 = H(\{2'', 4'', 5'', a, c\}) = K_5 \setminus (4'', 5'')$, причому H_2 має з K_5 спільний ланцюг довжини 2 на вершинах $\{4'', 5'', c\}$, де H -квазізірка з центром на множині вершин $\{a, b, c, v\}$ на якій породжує підграф $K_4 \setminus K_{1,2}$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_5 + H, \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{51}, \{i\}_{i=1}^5)$ шляхом ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$;

Доведення леми 3.8. Доведемо твердження 1. Побудуємо вкладення f_{48} в σ_2 графа D_{48} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_6 \setminus K_{1,2}^1$ в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{48}(H \setminus (c, 5'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром-трикутником K_3 на вершинах $\{a, b, c''\}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_6 \setminus K_{1,2}^1)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 9, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6 \setminus 2''$, як досяжної на площині s ; б)

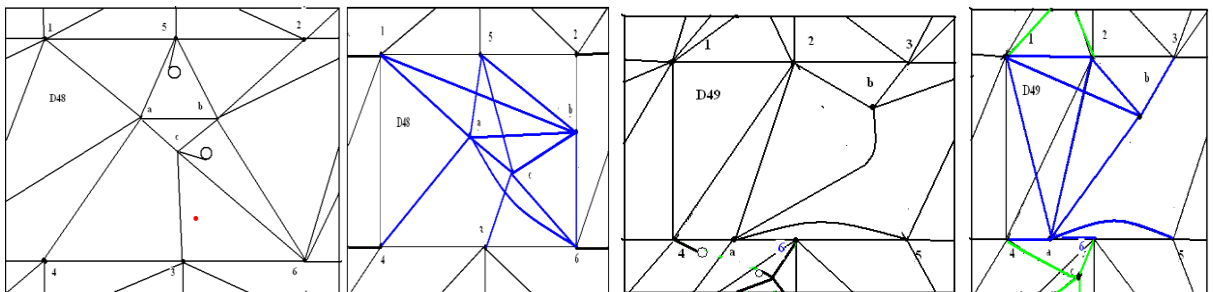
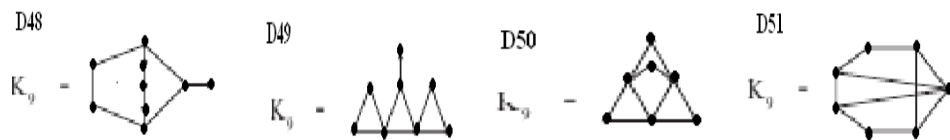
$f_{48}((c, 5'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{48}(H \setminus (c, 5'')))$. Вкладення графу $f_{48}(D_{48})$ до подвійного тору наведено на рис.3.9, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{48}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 15, а ребер у графа дорівнює 26, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 26 + 15$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{48}) = 2$. Твердження 1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо вкладення f_{49} в σ_2 графа D_{49} шляхом продовжен ня мінімального вкладення f графа $K_6 \setminus 2K_2^1$ в σ_1 наступним чином: а) $f_{49}(H \setminus (c, 4'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H - об'єднання зірки $St_4(c)$ та квазізірка з центром K_2 на вершинах $\{a, b\}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_6 \setminus 2K_2^1)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 9, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6$, як досяжної на площині s ; б) $f_{49}((c, 4'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{49}(H \setminus (c, 4'')))$. Вкладення графу $f_{49}(D_{49})$ до подвійного тору наведено на рис.3.9, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{49}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 15, а

ребер у графа дорівнює 26, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 26 + 15$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{49}) = 2$. Твердження 2 доведено.

Доведемо твердження 3. Побудуємо вкладення f_{50} в σ_2 графа D_{50} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_6 в σ_1 наступним чином: а) $f_{50}(H \setminus (b, 3'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H – об'єднання зірки $St_4(a)$ та квазізірка з центром K_2 на вершинах $\{c, b\}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_6)$ та s – кліткою із границею ∂s -циклом довжини 9, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6$, як досяжної на площині s ; б) $f_{50}((b, 3'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{50}(H \setminus (b, 3'')))$. Вкладення графу $f_{50}(D_{50})$ до подвійного тору наведено на рис.3.9, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{50}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 15, а ребер у графа дорівнює 26, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 26 + 15$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{50}) = 2$. Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо вкладення f_{51} в σ_2 графа D_{51} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в σ_1 наступним чином: а) $f_{51}(H \setminus (v, 5'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H – квазізірка з центром $K_{1,3}$ на вершинах $\{c, b\}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$, s – кліткою із границею ∂s -циклом довжини 9, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на площині s ; б) $f_{51}((v, 5'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{51}(H \setminus (v, 5'')))$. Вкладення графу $f_{51}(D_{51})$ до подвійного тору наведено на рис.3.9, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{51}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 15, а ребер у графа дорівнює 26, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 26 + 15$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{51}) = 2$. Твердження 4 доведено. Лема 3.9 доведена



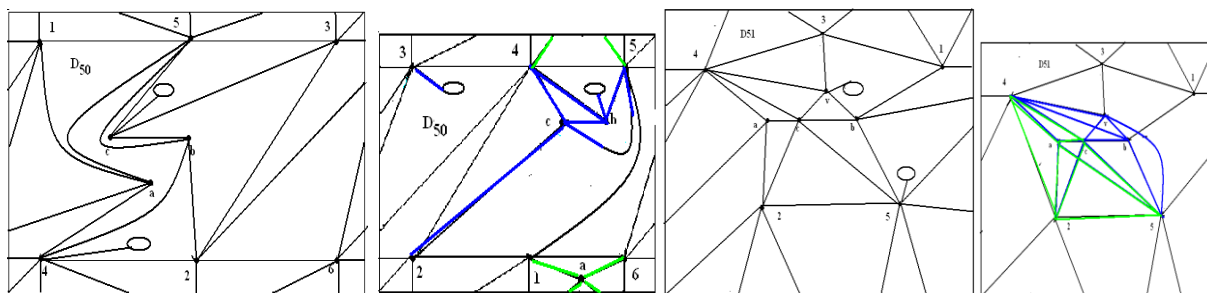


Рис.3.9. Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_{48}(D_{48}) \dots f_{51}(D_{51})$ до 2-тору.

З наведених лемм 3.1-3.9 випливатиме **основний результат**:

Теорема 2. Кожен граф-обструкція роду 2 на 9-ти вершинах є результатом ϕ -перетворення трьох зв'язних графів X, Y, Z , які задовольняють одному з наступних випадків:

1) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ (можливо із кількома додатковими ребрами) вкладений в тор σ , граф Z відсутній, а інший граф X - є

або площинним 2-мінімальним відносно множини точок приєднання до графа Y на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із нульовими характеристиками θ та $\partial\theta$ для множини точок приєднання до графа Y ,

або площинним 3-мінімальним на s недвоклітці тора, $s \in \sigma_1 \setminus Y$, із характеристиками θ , $\partial\theta$, де $\theta=1$ чи $\partial\theta=1$, для множини точок приєднання графа X до графа Y ;

2) граф Y один з графів K_5 чи $K_{3,3}$, можливо без ребра, вкладений в тор σ , а інший граф X роду 1 є 2-мінімальним відносно множини точок приєднання на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із нульовими характеристиками θ і $\partial\theta$ множини точок приєднання графа X до графа Y , граф Z відсутній;

3) граф Y містить частину гомеоморфну K_5 чи $K_{3,3}$ (можливо із кількома додатковими ребрами) вкладений в тор σ , граф Z - проста зірка, граф X є площинною квазізіркою із центральним графом M на двох вершинах, яка не є 2-мінімальним графом на недвоклітці s , $s \in \sigma \setminus Y$, причому існує, принаймні одна, пара вершин простої зірки Z , зформована із елементів множини приєднання графа X до графа Y , що розділяє на ∂s пару кінцевих вершин з множини приєднання графа X до графа Y

Література

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, 1971,378с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ НАНУ, Киев, 1970.
3. Brown T. Duke R. An irreducible graph consisting a single block. J.Math. and Mech.1966,15,№ 1, 129–135.
4. Joachim E. Minimale nicht in die Ringflache einbettbare Grapghen. Elem. Math. 1978, 33, № 3,57 – 61.
5. Youngs J. W. Irreducible graphs. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 404 – 405.
6. Auslander L. Brown T. Youngs J. W. T. The embedding graphs in manifolds. J.Math.and Mech.12,1963,629–634.
7. Brown T. Duke R. An irreducible graph consisting a single block. J.Math.and Mech.1966,15,№ 1,129 – 135.
8. Duke R. A. Haggard G. The genus subgraphs K_8 . Israel J. Math. 11 (1972) 452 – 455.
9. Huneke J. P. A genus a graph. Relations between combinatorics and other parts mathematics. Amer. Math. Soc. Providence R. I v 34 1979, 357 – 364.
10. Joachim E. Minimale nicht in die Ringflache einbettbare Grapghen. Elem. Math. 1978, 33 № 3 57 – 61.
11. Joachim E. Minimale Grapghen ouf orientierbaren geschlossenen Flächen. Math. phis. Semesterber 1979 26 № 2 205 – 216.
12. Joachim E. Zur Theorie der nicht ebenen Graphen. Praxis Math. 22 (1980) № 7 212 – 216.
13. Joachim E. Beispiele nicht ebenen Graphen. Praxis Math. 22 (1980) № 9 279 – 281.

14. Петренко В.І. Властивості 2-незведених простих графів. Штучний інтелект №2,2008,с.34-40
15. Huneke J.P, Johns G, A.Hlavachek 9-Vertex Irreducible Graphs on the Torus. Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Boca Raton, Florida, 2006
16. Milgram M. Irreducible graphs.J. Combin Theory Ser B12 (1972) 6 – 31.
17. Milgram M.Irreducible graphs.J. Combin Theory 14 (1973) 7- 45
18. Youngs J. W. Irreducible graphs. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 404 – 405.
19. Gagarin A.,William K. Embedding graphs containing K_5 -subdivisions. Ars Combinatoria, 64:33– 50,2002.
20. Gagarin A.,Myrvold W.,Chambers J.The obstructions for toroidal graphs with no $K_{3,3}$'s. , 1 February 2008
21. Mochar B.,Kawarabayashi K. Some Recent Progress and Applications in Graph Minor Theory, July 11, 2006
22. Петренко В.І. Об оценке рода специальных графов. деп.рукоп вУкрНИИТИ №2259-Ук86 22.09.1986
23. Mohar B. Face covers and the genus problem for apex graphs.J.Combin.Theory, B 2001.v. 82 p.102-117.
24. Петренко В.І. Узагальнена оцінка роду простого графа.Искусст. интеллект.2004. т.4,с. 34-45.
25. Петренко В. І. Две характеристики дуального графа плоского графа. Мат. межд. конф. "Искусст. интеллект-2004", Казивели,Украина: "Наука і освіта", 2004. с. 230-231.
26. Hur Suhjin. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. PhD dissertation,Ohio State University, 2008.
27. R.Bodendiek,K.Wagner.A characterization of the minimalbasis of the torus.Combinatorica 6,3,1986245-260
28. D. Archdeacon. A Kuratowski theorem for the projective plane. Journal of Graph Theory, 5:243–246, 1981
29. Петренко В.І. Построение графов-обструкций ограниченного ориентируемого рода. Сборник трудов XVI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» г. Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.,стр. 363-368

2.3. СТРУКТУРА 7-МИ ВЕРШИННИХ ПІДГРАФІВ 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ТОРА

Метою подання графів G обструкцій для тора на 8-ми вершинах із однією видаленою довільною вершиною v та всіма інцидентними їй ребрами, як результату φ -перетворення $G \setminus v$ та $St_G(v)$ шляхом ототодження пар точок з множин приєднання із числом досяжності 2, та дослідженні структури графів $G \setminus v$ на предмет мінімальності множини ребер відносно заданих характеристик множин приєднання при видаленні довільного ребра графа $G \setminus v$. **Основні результати:**

- а). Теореми 1, 2 про мінімальність ребер 7-ми вершинних графів $G \setminus v$ роду 1, де G – 8-ми вершинний граф-обструкція B_j для тора σ_1 , v - довільна його вершина, M -множина всіх точок приєднання підграфа $G \setminus v$ до зірки $St_G(v)$, із центральною вершиною v та M' - множиною всіх висячих вершин інцидентних v , де $t_{G \setminus v}(M) = 2$, і розміщується на границях двох кліток s_1, s_2 з множини $\sigma_1 \setminus (G \setminus v)$ так, що тільки одна з вершин приєднання не належить до границі іншої клітки, причому кожне видалене ребро e , або зменшує число досяжності M , та яка має число досяжності 2, а для кожного ребра e із кінцевими вершинами, що належать до множини M графа $B_j \setminus v$ виконується або співвідношення $e \in B_j^1 \cap (\partial s_1 \cap \partial s_2)$, або зменшується на 1 рід графа $B_j \setminus v$, т.то при операції видалення довільне ребра графа $B_j, j = 1, 2, 3$ є суттєвим відносно роду чи числа досяжності заданої множини M .
- б). Наведені всі неізоморфні 7-ми вершинні тороїдальні графи мінімальні відносно заданої множини точок з числом досяжності 2 при видаленні довільного ребра.

Вступ. Основні позначення взяті із [1], [2]. Нехай G неорієнтований скінчений граф без петель і кратних ребер ейлерового роду $\gamma(G)$, а S - замкнутий 2-многовид роду $\gamma(S)$, де $\gamma(G) = \gamma(S) + 1$. Якщо поверхня орієнтована, то позначатимемо її через σ , а якщо це неорієнтована поверхня, то позначатимемо її Σ .

Задача. Для довільної вершини v графа G , який є граф-обструкцією для тору з числом вершин менше 10, дослідити структуру графу G шляхом розкладу (розбиття множини його ребер на суму двох підмножин, що не перетинаються) на підграф H , $H = G \setminus v$, та просту зірку $St_G(v)$ графа G із спільними вершинами, що утворюватимуть підмножину M множини точок графа G , подану як результат ототодження пар точок (a_{1j}, a_{2j}) в точку a_j , де $M_i = \{a_{ij}\}_{j=1}^{|M|}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, |M|$, та яку називатимемо множиною точок приєднання підграфа H , $M_1 \subseteq H^0$, до зірки $St(v)$, $M_2 \subseteq St_G(v)^0 \setminus v$.

Визначення 1. Граф G називається таким, що неприводиться над S , або $\gamma(G)$ -неприведеним (irreducible) для S , якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх $\gamma(G)$ -неприведених над S графів позначимо через $\zeta(S)$.

Визначення 2. Граф G мінімальний (мінор) над S , якщо для будь-якого графа G' , отриманого з графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G') \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх графів мінімальних над S позначимо через Γ_S .

Множина всіх графів, що неприводяться над S містить Γ_S характеризує множину всіх графів рід яких не менше $\gamma(S) + 1$. Якщо $S = \sigma_0$ евклідова площина, то $\Gamma_S = \{K_5, K_{3,3}\}$.

Визначення 1,2 узяті з [3], [4], відповідно. Нехай $S = \sigma$ - орієнтована замкнута поверхня роду $\gamma(\sigma)$, $\gamma(\sigma) > 0$, $\gamma(\sigma) = n - 1$. Задача побудови всіх графів, що неприводяться над σ зводиться, як показано в [5] до задачі переліку всіх блоків, тобто графів без точок з'єднання, що неприводяться над σ . Доведено в [9], що графи $B_1, B_2, B_3, K_{3,7}$ неприводяться для тору σ_1 , а G_n n -мінімальний блок, що неприводиться при $n > 1$. Граф G_n був побудований в [6], а в [7], [8] було доведено, що є три 2-неприведених підграфи графа K_8 , а саме: $B_1 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_3^1)$, $B_2 = (K_8^0, K_8^1 \setminus (K_{1,2}^1 \cup 2K_2^1))$, $B_3 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1)$. В [18] розв'язувалася ця ж задача, доведено, що один граф містить підграф ізоморфний B_3 , тобто має зайве ребро. В [9] наведено два графи G_1, G_2 неприведені для тору, а в [14] знайдені в обох зайві ребра. В [10] доведено, що граф $K_{3,7}$ мінімальний над тором. Граф $K_{3,7}$ наведено в [11], де було доведено, що $K_{3,11}$ мінімальний для подвійного тору σ_2 . В [10], [13] зроблено припущення, що граф $K_{3,4p+3} \in (p+1)$ -мінімальний блоком, $p > 0$, та доведено, що граф $K_{3,7}$ мінімальний для пляшки Клейна, а $K_{3,9}$ мінімальний для поверхні ейлеревої характеристики -1 . Наведений в [15] повний список 63-х 2-неприведених графів із 9-ма вершинами; 51 із них (48 мінорів) можливо побачити в он-лайн PhD-дисертації Hur Suhjin «The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10» на відміну від [16], [17]. Спочатку в [27], а потім в [19], [20] виписані 2-неприведені для тору графи без підграфів гомеоморфних $K_{3,3}$. Більше наведено в [21] та інших статтях де розбудовують та використовують ідею К-мостів заданого графа.

Число досяжності підмножини M множини точок графа G роду γ , $\gamma = \gamma(G)$, є найменшою кількістю кліток з підмножини Δ множини $S \setminus f(G)$, де S поверхня роду γ , а $f, f: G \rightarrow S$, довільне мінімальне вкладення при якому елементи $f(M)$ розташовують ся на границях кліток із підмножини Δ , потрібне для оцінки роду φ -образу деякого графа та простої зірки; у випадку заміни зірки на квазізірку доповнимо наступними визначеннями, які враховують наявність на границі недвоклітки кількох копій вершин графа.

Визначення 3. Позначимо через $krt_G(M)$, $kr = krt_G(M)$, kr - кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G , як найбільшу кількість варіантів вибору різних підмножини $S_G(M, S_\gamma)$ множини кліток $S_\gamma \setminus f(G)$ на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M , узята по всіх мінімальних вкладеннях $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ . Іншими словами, це найбільша кількість зірок які приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Визначення 4. Позначимо через $ms_G(M, s, f)$, $k = ms_G(M, s, f)$, k - сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої клітки \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітки s , $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f - задане мінімальне вкладення $f: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M , а найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх кліток s заданого мінімального вкладення $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $ms_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G приєднаних кінцевими вершинами до кожного із принаймні трьох елементів множини M та вкладених без перетину ребер у внутрішніх точках до однієї клітки s , $s \in S_\gamma \setminus f(G)$, із цикломатичним числом $p_1(\partial s)$, де $p_1(\partial s) \geq k$, та заданим мінімальним вкладенням $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ .

Визначення 5. Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), \dots, ms_G(M, f_N))$ вектором l -стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої клітки \bar{s} , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, $l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0$, $|M| > 2$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ -множина всіх неізоморфних мінімальних вкладень $f_k, f_k: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел $ms_G(M, f_k)$ узяті по всім s та всім f_k , називатимемо характеристикою l -стороннього доступу до множини M точок графа G . В подальшому вважатимемо, що $S_\gamma = \sigma_2$, тобто є 2-тором.

Лема 1.1. Для графа K_5 мають місце наступні твердження:

- а) Існує 2-кліткове вкладення в тор при якому множина вершин розміщується на простому циклі довжини 5, спільному для трьох 2-клітин;
- б) Існує не 2-кліткове вкладення в тор при якому множина вершин розміщується на циклі довжини 8 та частково на циклі довжини 4;
- в) Множина M , складена з усіх точок графа K_5 , а саме всіх вершин та по одній внутрішній точці кожного ребра, розміщується, або на двох 2-клітинах-п'ятикутниках та одній 2-клітині чотирикутнику, або на двох трикутниках та восьмикутнику;
- г) Число досяжності $t_{K_5}(M, \sigma_1) = 3$ та характеристики $\theta_{K_5}(M, \sigma_1) = 1$, $\partial\theta_{K_5}(M, \sigma_1) = 0$.
- д) Множина вершин K^0 графа $K_5 \setminus u = K$, $K^0 = \{1, 2, a, b, c\}$, із ребром $u = (1, 2)$ має дві підмножини $\{a, b, c\}$, $\{1, 2\}$ з числами досяжності 2 та мінімальні відносно видалення з них довільного елемента;
- е) $K_5 \setminus u$ є ϕ -образом колеса W_4 з центром в вершині b та зірки $St_3(d) \setminus (d, b)$, а $K_{3,3}$ є підграфом ϕ -образом колеса W_4 з центром в вершині b та зірки $St_3(d)$, причому одна з двох трійок належить $K_3 \setminus e$, а інша $\overline{K_3}$;
- ж) Для п'яти вершин графа K_5 маємо: $ms_{K_5}(K_5^0) = 1$, $krt_{K_5}(K_5^0) = 2$;
- з) Для чотирьох довільних вершин графа K_5 маємо: $ms_{K_5}(K_5^0 \setminus v) = 2$, $krt_{K_5}(K_5^0 \setminus v) = 3$;
- і) Для трьох довільних вершин графа K_5 маємо: $ms_{K_5}(K_5^0 \setminus \{u, v, w\}) = 2$, $krt_{K_5}(K_5^0 \setminus \{u, v, w\}) = 2$;
- ї) Для графа K_6 на торі маємо два неізоморфних 2-кліткових вкладення;
- й) Для вершин графа K_6 маємо $t_{K_6}(K_6^0) = 1$, а для довільного ребра e існує така вершина v що має $ms_{K_6 \setminus e}(\{v\}) = 2$;

Доведення тверджень леми 1.1 полягає в побудові всіх неізоморфних вкладень графа K_5 в тор та перевірці вказаних властивостей як показано на рис.1.0.

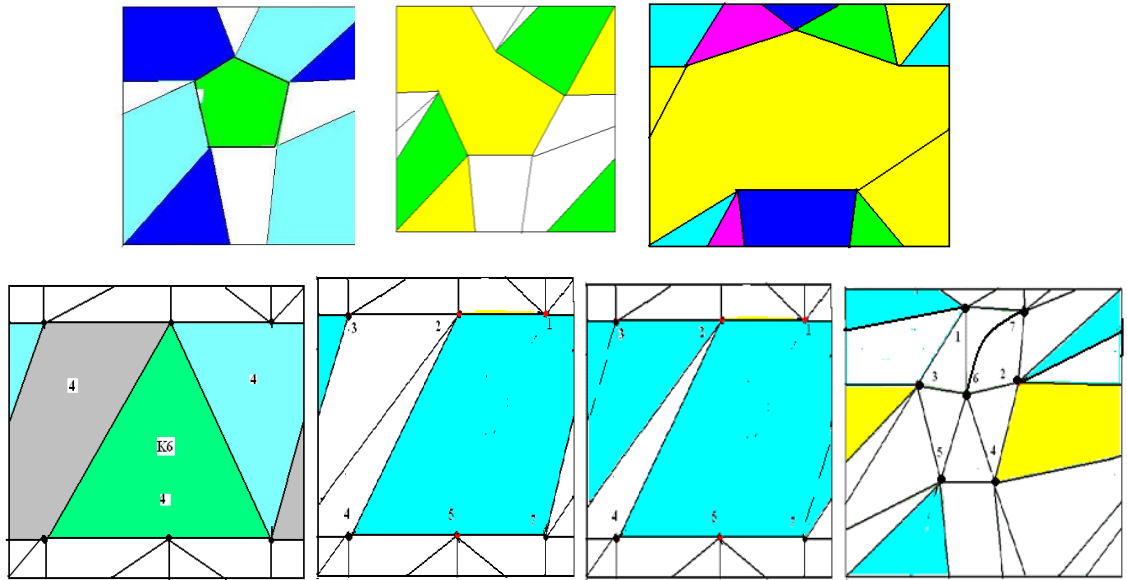


Рис.1.0. Вкладення графа K_5 в тор (2-кліткове та два неізоморфних не 2-кліткових у верхньому ряду), два 2-кліткових неізоморфних вкладення графа K_6 , та $K_6 \setminus e$, K_7 в тор.

Твердження 1.1. Видалення довільної вершини v графа $B_j, j = 1, 3, B_1 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_3^1), B_3 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1)$, призводить до одного з наступних тверджень (в залежності від $\deg v$ та підмножини M , яка складена з вершин інцидентних v та має число досяжності 2):

0). Множина вершин графа B_1 розбивається на два класи еквівалентності, а множина вершин графа B_3 розбивається на три класи еквівалентності відносно перестановки вершин;

1) Для графа B_1 маємо два випадки: а) якщо $\deg v = 5$, то $B_1 \setminus v = K_7 \setminus e$ і $M = K_5^0$, б) якщо $\deg v = 7$, то $B_1 \setminus v = K_7 \setminus K_3^1$ і $M = (K_7 \setminus K_3^1)^0$; причому в обох випадках множина M вершин графа $B_1 \setminus v$ матиме число досяжності 2 та розміщується на границях двох кліток s_1, s_2 так, що тільки одна не належить до границі іншої клітки, а для кожного ребра e із кінцевими вершинами, що належать до множини M графа $B_1 \setminus v$ виконується або співвідношення $e \in B_1^1 \cap (\partial s_1 \cap \partial s_2)$, або зменшується на 1 рід графа $B_1 \setminus v$ (див. рис. 1.1.);

2) Для графа B_3 маємо три випадки, в кожному з них існуватиме таке вкладення в тор графа $B_3 \setminus v$, при якому виконується рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$ і вершини з M розміщують ся на границях двох кліток так s_1, s_2 , що тільки одна не належить до границі іншої клітки, а для кожного ребра e із кінцевими вершинами, що належать до множини M графа $B_3 \setminus v$, виконується або співвідношення $e \in B_3^1 \cap (\partial s_1 \cap \partial s_2)$, або $\gamma((B_3 \setminus v) \setminus e) = 0$ (див. рис 1.2):

а) якщо $\deg v = 7$, то це склеєні по ребрам $e_i = (a_i, b_i)$ графі K_5, K_4 , відповідно, тобто задаємо ф-перетворення виду $\varphi(K_5 + K_4, (a_1 + a_2, b_1 + b_2)) \rightarrow (B_3 \setminus v, (a, b))$, де $e = (a, b)$, $e \in B_3^1 \setminus St^1(v)$, $M = B_3^0 = St^0(v) \setminus \{v\}$ причому виконується рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$;

б) якщо $\deg v = 4$, то це графи K_5, K_4 , відповідно, склеєні по ребрам $e_i = (a_i, b_i), i = 1, 2$, із додатковими трьома ребрами з спільною вершиною w графа K_4 , $w \in K_4^0 \setminus \{a_2, b_2\}$, $M = K_4^0 = St^0(v) \setminus \{v\}$, причому виконується рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$;

в) якщо $\deg v = 5$, то це склеєні по ребрам $e_i = (a_i, b_i)$ графи K_5 та K_4 , відповідно, тобто $\varphi(K_5 + K_4, (a_1 + a_2, b_1 + b_2)) \rightarrow (B_3 \setminus v, (a, b))$, де $e = (a, b), e \in B_3^1 \setminus St^1(v)$, із додатковими двома ребрами $(w, w_1), (w, w_2)$ з спільною вершиною w графа K_5 , $w \in K_5^0 \setminus \{a_2, b_2\}$ та $M = \{w\} \cup K_5^0 \setminus \{v\}$, причому виконується рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$.

Доведення твердження 1.1. Множини вершин та ребер графа $B_j \setminus v, B_j, j = 1, 3, B_1 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_3^1), B_3 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1)$, розіб'ємо на класи еквівалентності та впевнимся у виконанні наведених тверджень згідно рис. 1.1, а саме твердження 0) для множини вершин графа B_1 та твердження 1) для множини ребер графа B_1 . Для графа B_{21} має місце твердження 2) згідно рис. 1.2.

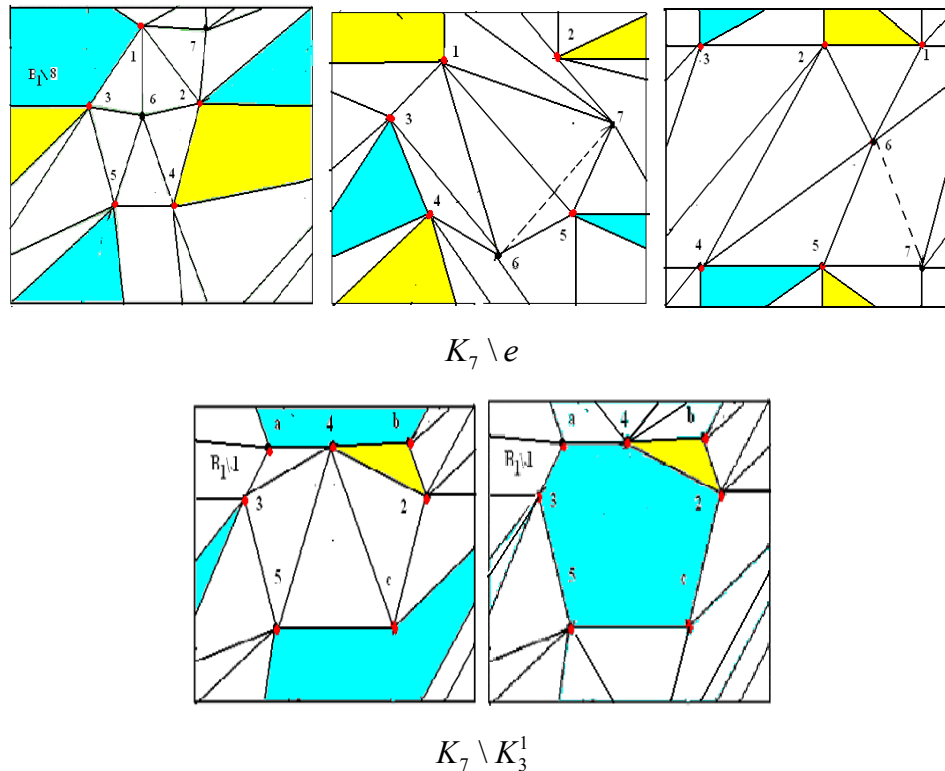


Рис. 1.1. Ілюстрації до твердження 1.1 щодо графа $B_1 \setminus v$ та його вкладень в тор, де червоні вершини належать множині M (в першому ряду три різні вкладення одного й того ж графа).

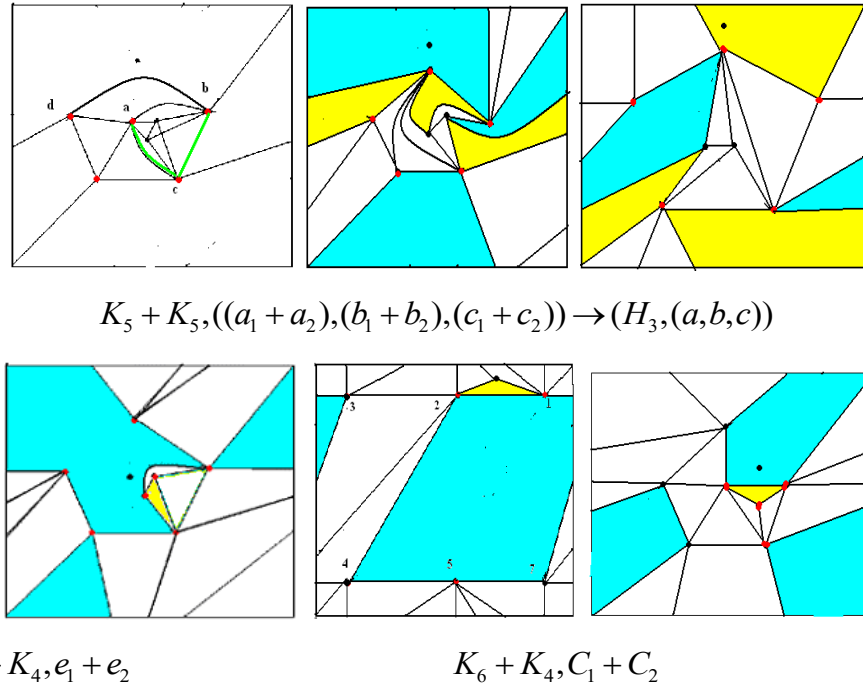


Рис. 1.2. До твердження 1.1 щодо графа $B_3 \setminus v$ та його вкладень в тор, де червоні вершини належать до множини M ; різним є вкладення одного й того графа на другій та третій тороїдальних картах нижнього ряду

Теорема 1. Видалення довільної вершини v графа $B_j, j = 1, 3, B_1 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_3^1), B_3 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1)$, призводить до одного з графів $B_j \setminus v$ у яких кожне видалене ребро, або зменшує число досяжності $t_{B_j \setminus v} M$ підмножини M , де $t_{B_j \setminus v} M = 2$, складеної з вершин інцидентних v , та розміщується на границях двох кліток s_1, s_2 так, що тільки одна з вершин приєднання не належить до границі іншої клітки, а для кожного ребра e із кінцевими вершинами, що належать до множини M графа $B_j \setminus v$ виконується або співвідношення $e \in B_j^1 \cap (\partial s_1 \cap \partial s_2)$, або зменшується на 1 рід графа $B_j \setminus v$, т.то кожне ребро графа $B_j, j = 1, 3$ є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра.

Доведення. Доведення теореми 1 впливатиме із твердження 1.1.

Твердження 1.2. Видалення довільної вершини v графа $B_2, B_2 = (K_8^0, K_8^1 \setminus (K_{1,2}^1 \cup 2K_2^1))$, призводить до одного з графів, вписаних в наступних співвідношеннях, (в залежності від $\deg v$ та структури на підмножині M , складеної з вершин інцидентних v , яка має число досяжності більше 1):

0). Множина вершин графа B_2 розбивається на 8-м класів еквівалентності відносно відношення транзитивності, тобто $B_2^0 = \bigcup_{i=1}^8 A_i$, де $A_i = \{i\}, i = 1, 2, 3, \dots, 8$, рис.1.3 і);

1). Для графа $G \setminus v$, де $G, G = B_2$, маємо із точністю до перенумерації вершин наступні вісім випадків:

а) якщо $v = 8$, $\deg v = 6$, то це склеєні по парі трикутників $\Lambda_i = (a_i, b_i, c_i)$ графі K_5 , $K_5 \setminus e$, відповідно, тобто маємо ϕ -перетворення виду $\phi(K_5 + K_5 \setminus e, (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)) \rightarrow (B_3 \setminus v, (a, b, c))$, де $M = St_G^0(v) \setminus \{v\}$ на рис.1.3 а), та рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$;

б) якщо $v = 8$, $\deg v = 7$, то це склеєні по парі простих ланцюгів довжини 2 $\Lambda_i = (a_i, b_i, c_i)$ графі K_5 , $K_5 \setminus e$, відповідно $\Lambda_1 \subset K_5$, $\Lambda_2 \subset K_5 \setminus e$, та двох несуміжних додаткових ребер із кінцевими вершинами відмінними від a_i, b_i, c_i , тобто маємо ϕ -перетворення виду: $\phi(K_5 + K_5 \setminus e, (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)) \rightarrow (B_3 \setminus v, (a, b, c))$, де $e = (2, 7)$, $M = St_G^0(v) \setminus \{v\}$ на рис.1.3 б), та рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$;

в) якщо $\deg v = 6$, то це склеєні по парі простих ланцюгів L довжини 3, де $L_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$, $i = 1, 2$, графа K_5 та колеса W_5 , відповідно $L_1 \subset K_5$, $L_2 \subset W_5$, тобто маємо ϕ -перетворення виду: $\phi(K_5 + W_5, (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)) \rightarrow (B_3 \setminus v, (a, b, c, d))$, де $v = 8$ на рис.1.3 в), причому для множини M , $M = St_G^0(v) \setminus \{v\}$, має місце рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$;

г) якщо $\deg v = 6$, то графі K_5 та колесо W склеєні по парі простих циклів z_1 , z_2 довжини 5 та 6 відповідно, де $z_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1, f_1)$, $z_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2, f_2, g_2)$, $L_1 \subset K_5$, $L_2 \subset W$, тобто маємо ϕ -перетворення виду: $\phi(K_5 + W, (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2, f_1 + f_2, x + g_2)) \rightarrow (B_3 \setminus v, (a, b, c, d, f))$, де $v = 2$ та x -внутрішня точка ребра (a_1, f_1) на рис.1.3 г), причому граф W є склеєним по трьом вершинам, дві з яких суміжні, графів $K_5 \setminus e$ та K_4 , а для множини M , $M = St_G^0(v) \setminus \{v\}$, має місце рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$;

д) якщо $\deg v = 6, v = 3$, то маємо для графів $K_6 \setminus e$ та $St_5(g_0)$ ϕ -перетворення виду: $\phi(K_6 \setminus e + St_5(g_0), \sum_{j=1}^5 (a_{1j} + g_{2j})) \rightarrow (B_3 \setminus v, \{a_{1j}\}_{j=1}^5)$, де $e = (a_{11}, a_{13})$, множина вершин $\{a_{1j}\}_{j=1}^5$ не є досяжною на торі та вершина a_{12} має двосторонній доступ, $St_5^0(v) = \{g_{2j}\}_{j=1}^5 \cup \{g_0\}$ і для множини M , $M = St_G^0(v) \setminus \{v\}$, має місце рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$ (див. рис.1.3 д);

е) якщо $\deg v = 6, v = 1$, то для графів $K_6 \setminus e$ та $St_4(g_0)$ маємо ϕ -перетворення виду: $\phi(K_6 \setminus e + St_4(g_0), \sum_{j=1}^4 (a_{1j} + g_{2j})) \rightarrow (B_3 \setminus v, \{a_{1j}\}_{j=1}^4)$, де $e = (a_{11}, a_{13})$, множина вершин $\{a_{1j}\}_{j=1}^4$ є досяжною на торі, $St_4^0(v) = \{g_{2j}\}_{j=1}^4 \cup \{g_0\}$ і для множини M , $M = St_G^0(v) \setminus \{v\}$, має місце рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$ (див. рис.1.3 е);

ж) якщо $\deg v = 6, v = 8$, то для графів $K_6 \setminus e$ та $St_4(g_0)$ маємо ϕ -перетворення виду: $\phi(K_6 \setminus e + St_4(g_0), \sum_{j=1}^4 (a_{1j} + g_{2j})) \rightarrow (B_3 \setminus v, \{a_{1j}\}_{j=1}^4)$, де $e = (a_{11}, a_{13})$, множина вершин $\{a_{1j}\}_{j=1}^4$ є досяжною на торі та до цих вершин немає двостороннього доступу, $St_4^0(v) = \{g_{2j}\}_{j=1}^4 \cup \{g_0\}$ і для множини M , $M = St_G^0(v) \setminus \{v\}$, має місце рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$ (див. рис.1.3 ж);

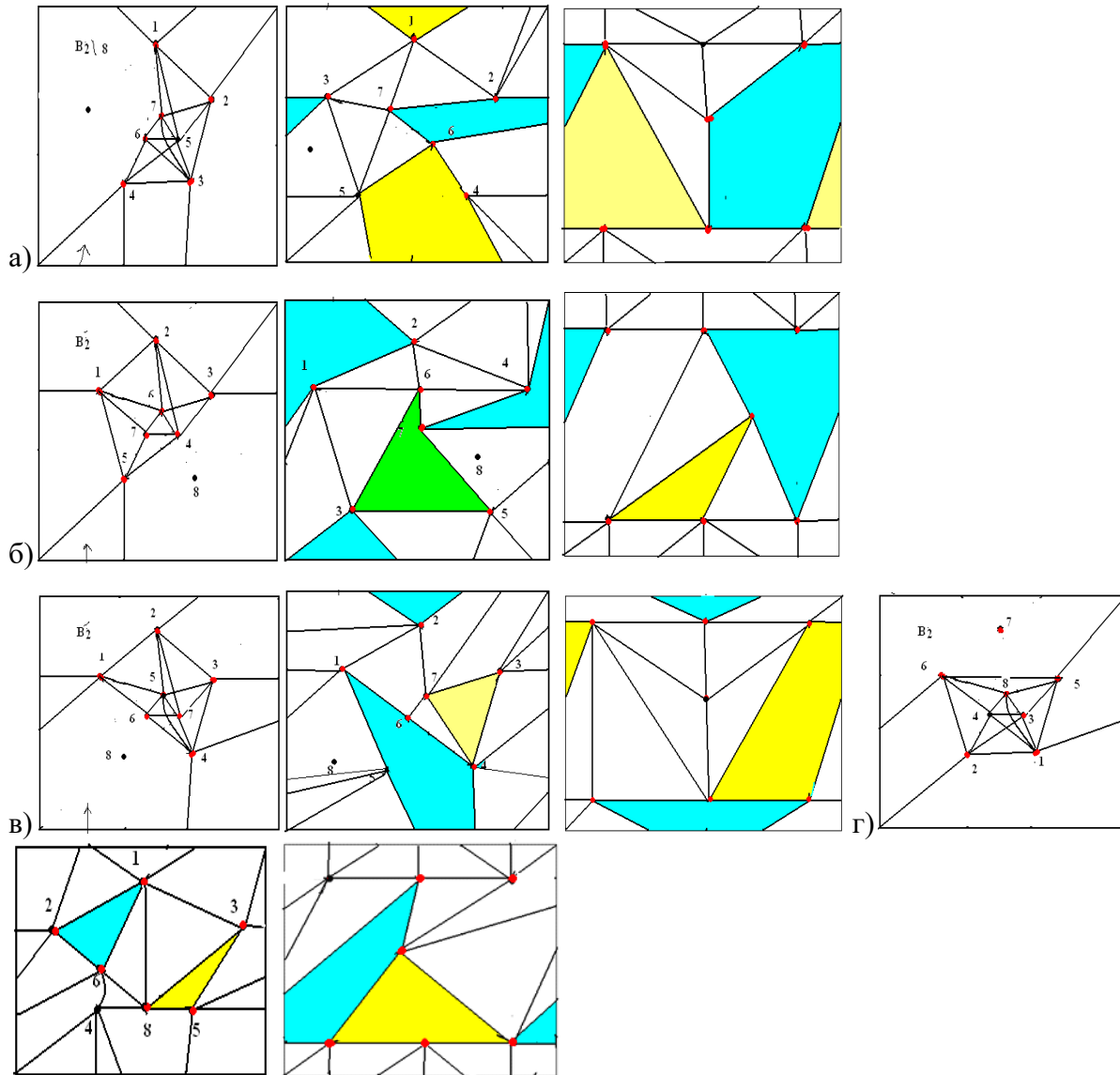
з) якщо $\deg v = 5, v = 7$, то для графів $K_6 \setminus e$ та $St_5(g_0)$ маємо ф-перетворення виду:

$$\varphi(K_6 \setminus e + St_5(g_0), \sum_{j=1}^5 (a_{1j} + g_{2j})) \rightarrow (B_3 \setminus v, \{a_{1j}^*\}_{j=1}^5),$$

де $e = (a_{11}, a_{13})$, множина вершин $\{a_{1j}^*\}_{j=1}^5 \in$ досяжною на торі

та до цих вершин немає двостороннього доступу, $St_4^0(v) = \{g_{2j}\}_{j=1}^4 \cup \{g_0\}$ і для множини M , $M = St_G^0(v) \setminus \{v\}$, має місце рівність $t_{Gv}(M) = 2$ (див. рис.1.3 з);

Доведення твердження 1.2. Множини вершин та ребер графа $B_j \setminus v$ $B_j, j = 1,3, B_1 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_3^1)$, $B_3 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1)$, розіб'ємо на класи еквівалентності та впевнимся у виконанні наведених тверджень згідно рис.1.1 та 1.2. Перестановка пари вершин призводить до того, що граф у випадку з) є ізоморфний графу з випадку д), граф з випадку е) ізоморфний графу з випадку ж), граф у випадку а) є ізоморфним графу з випадку ж), а графи у випадках б) і в) ізоморфні графу з випадку ж).



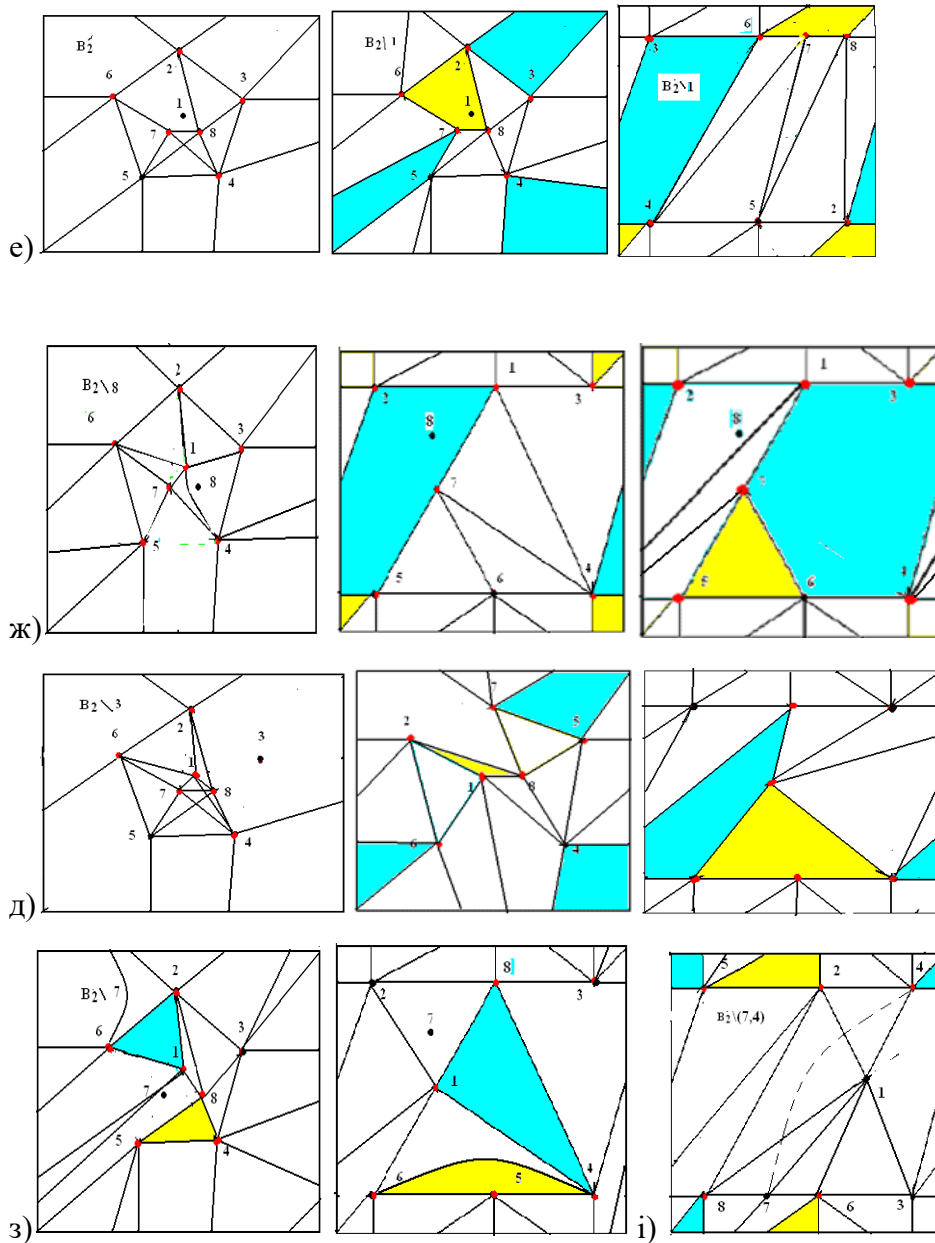
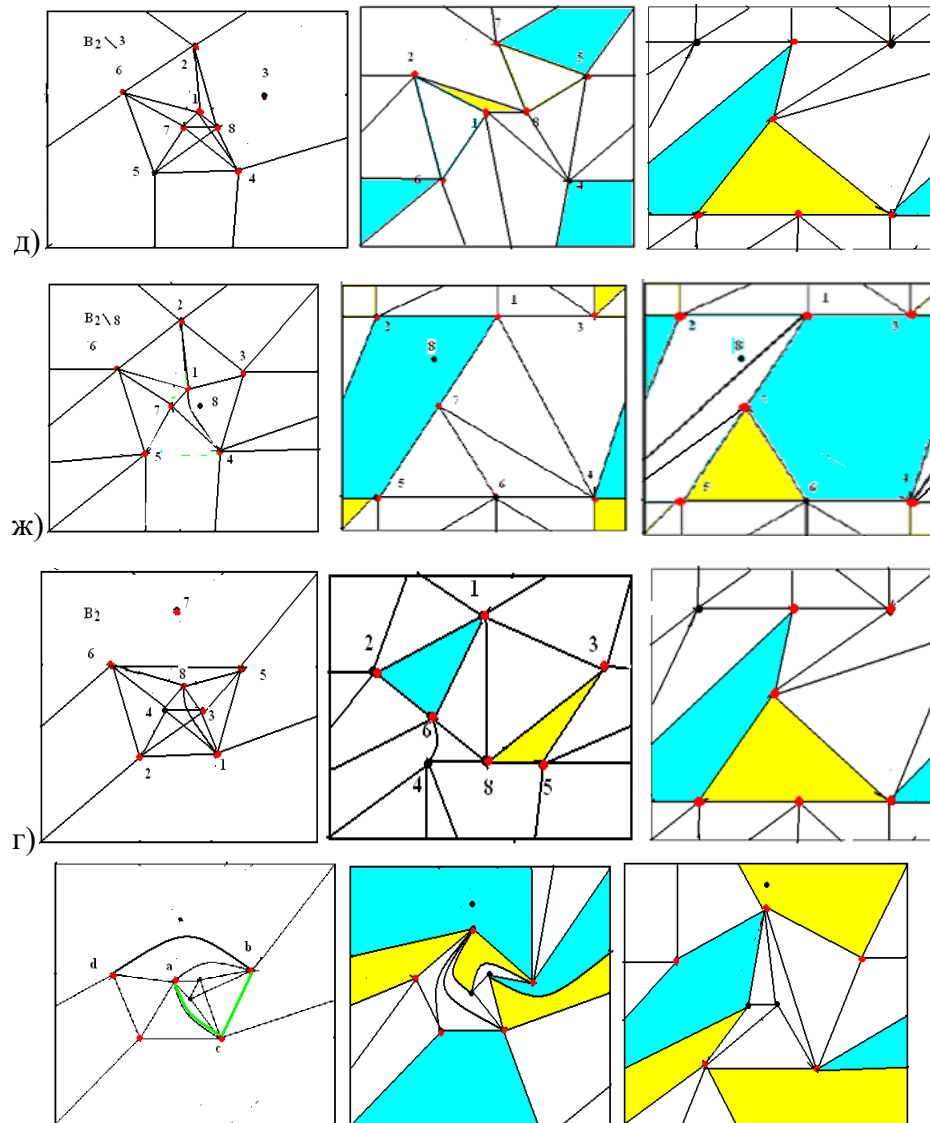


Рис. 1.3. До твердження 1.2 щодо графа $B_2 \setminus v$ та його вкладень в тор, де червоні вершини належать до множини M , наведено попарно (зліва-направо, окрім останнього ряду) граф та його вкладення в тор.

Теорема 2. Видалення довільної вершини v графа B_2 , $B_2 = (K_8^0, K_8^1 \setminus (K_{1,2}^1 \cup 2K_2^1))$, призводить до одного з графів $B_2 \setminus v$ у яких кожне видалене ребро, або зменшує число досяжності множини M , складеної з вершин інцидентних v , яка має $t_{B_2 \setminus v} M$ -число досяжності 2 та розміщується на границях двох кліток s_1, s_2 так, що тільки одна з вершин приєднання не належить до границі іншої клітки, а для кожного ребра e із кінцевими вершинами, що належать до множини M графа $B_2 \setminus v$ виконується або співвідношення $e \in B_2^1 \cap (\partial s_1 \cap \partial s_2)$, або зменшується на 1 рід графа $B_2 \setminus v$, т.то кожне ребро графа є суттєвим відносно числа досяжності множини M чи роду при операції видалення ребра.

Доведення. Доведення теореми 1 впливатиме із твердження 1.2. Перестановка пари вершин призводить до того, що граф у випадку з) є ізоморфним графу з випадку д), граф з випадку е) ізоморфний графу з випадку ж), граф у випадку а) є ізоморфним графу з випадку ж), а графі у випадках б) і в) ізоморфні графу з випадку ж). В наведених на рис. 1.3 тороїдальних картах неізоморфних графів з випадків ж), д), г) для кожного ребра простої зірки з 4-ма чи 5-ма променями які приклеєно до вершин графа K_6 чи $K_6 \setminus e$, можливо вибрати пару 2-кліток на границях яких лежатимуть всі вершини та їх перетин містить висяче ребро зірки.



$$\varphi(K_5 + K_5, ((a_1 + a_2), (b_1 + b_2), (c_1 + c_2))) \rightarrow (H_3, (a, b, c))$$

Рис. 1.4. Графи до наслідку 1.1 $K_7 \setminus 2K_2^1$, $K_7 \setminus (K_{1,2}^1 + K_2^1)$, $K_7 \setminus 3K_2^1$, H_3 (розміщені по рядкам із 3-х тороїдальних картах).

Наслідок 1.1. Мінімальні тороїдальні 7-ми вершинні графи ізоморфні наступним графам із заданими множинам точок приєднання, позначеними через M :

1. $K_7 \setminus e$, $M = K_7^0 \setminus \{a, b\}$, $e = (a, b)$;
2. $K_7 \setminus K_3^1$, $M = K_7^0$;
3. H_1 , $\varphi(K_5 + K_4, ((a_1 + a_2), (b_1 + b_2))) \rightarrow (H_1, (a, b))$, $M = H_1^0$;
4. H_2 , $H_2 = K_7 \setminus K_{1,3}^1$, $M = K_4^0$;
5. H_3 , $\varphi(K_5 + K_5, ((a_1 + a_2), (b_1 + b_2), (c_1 + c_2))) \rightarrow (H_3, (a, b, c))$, $M = K_5^0$, $\{a, b, c\} \subset M$;
6. $K_7 \setminus 2K_2^1$, $M = K_7^0 \setminus \{v, u\}$;
7. $K_7 \setminus (K_{1,2}^1 + K_2^1)$, $M = K_7^0 \setminus v$;
8. $K_7 \setminus 3K_2^1$, $M = K_7^0 \setminus v$,

де H_1 є φ -образом графів K_5, K_4 із ототоженою парою ребер $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ (склеєними по ребру), граф H_2 є φ -образом графів K_6, K_4 при ототоженні пари простих циклів довжини 3, а граф H_3 є φ -образом двох графів K_5, K_5 при ототоженні пари циклів C_1, C_2 довжини 3, (цикл C_i матиме вершини a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} , які попарно ототожуються і утворюють цикл з вершинами a, b, c , $j = 1, 2, 3, i = 1, 2$), з іншого боку граф H_3 є $K_7 \setminus C_4^1$.

Наслідок 1.2. 8-ми вершинні графи-обструкції ізоморфні φ -образу одного з наведених у наслідку 1.1 графів та простої зірки, висячі вершини якої склеєні попарно з точками із M -заданої множини приєднання.

Література

1. Хоменко М. П. φ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, 1971, 378с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ НАНУ, Киев, 1970.
3. Brown T. Duke R. An irreducible graph consisting a single block. J. Math. and Mech. 1966, 15, № 1, 129–135.
4. Joachim E. Minimale nicht in die Ringfläche einbettbare Graphen. Elem. Math. 1978, 33, № 3, 57 – 61.
5. Youngs J. W. Irreducible graphs. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 404 – 405.
6. Auslander L. Brown T. Youngs J. W. T. The embedding graphs in manifolds. J. Math. and Mech. 12, 1963, 629–634.
7. Brown T. Duke R. An irreducible graph consisting a single block. J. Math. and Mech. 1966, 15, № 1, 129 – 135.
8. Duke R. A. Haggard G. The genus subgraphs K_8 . Israel J. Math. 11 (1972) 452 – 455.
9. Huneke J. P. A genus a graph. Relations between combinatorics and other parts mathematics. Amer. Math. Soc. Providence R. I v 34 1979 357 – 364.
10. Joachim E. Minimale nicht in die Ringfläche einbettbare Graphen. Elem. Math. 1978, 33 № 3 57 – 61.
11. Joachim E. Minimale Graphen auf orientierbaren geschlossenen Flächen. Math. phis. Semesterber 1979 26 № 2 205 – 216.
12. Joachim E. Zur Theorie der nicht ebenen Graphen. Praxis Math. 22 (1980) № 7 212 – 216.
13. Joachim E. Beispiele nicht ebenen Graphen. Praxis Math. 22 (1980) № 9 279 – 281.
14. Петренко В.І. Властивості 2-незведених простих графів. Штучний інтелект №2, 2008, с.34-40
15. Huneke J.P., Johns G., A. Hlavachek 9-Vertex Irreducible Graphs on the Torus. Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Boca Raton, Florida, 2006.
16. Milgram M. Irreducible graphs. J. Combin Theory Ser B12 (1972) 6 – 31.
17. Milgram M. Irreducible graphs. J. Combin Theory 14 (1973) 7- 45.
18. Youngs J. W. Irreducible graphs. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 404 – 405.
19. Gagarin A., William K. Embedding graphs containing K_5 -subdivisions. Ars Combinatoria, 64:33– 50, 2002.
20. Gagarin A., Myrvold W., Chambers J. The obstructions for toroidal graphs with no $K_{3,3}$'s. , 1 February 2008
21. Mochar B., Kawarabayashi K. Some Recent Progress and Applications in Graph Minor Theory, July 11, 2006
22. Петренко В.І. Об оценке рода специальных графов. деп. рукоп в УкрНИИТИ №2259-Ук86 22.09.1986

23. Mohar B. Face covers and the genus problem for apex graphs. J. Combin. Theory, B 2001. v. 82 p.102-117.
24. Петренко В.І. Узагальнена оцінка роду простого графа. Искусств. интеллект. 2004. т., 4. с. 34-45.
25. Петренко В. І. Две характеристики дуального графа плоского графа. Мат. межд. конф. "Искусств. интеллект-2004", Казивели, Украина: "Наука і освіта", 2004. с. 230-231.
26. Hur Suhjin. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. PhD dissertation, Ohio State University, 2008.
27. R. Bodendiek, K. Wagner. A characterization of the minimal basis of the torus. Combinatorica 6,3, 1986 245-260
28. D. Archdeacon. A Kuratowski theorem for the projective plane. Journal of Graph Theory, 5:243-246, 1981
29. Петренко В.І. Построение графов-обструкций ограниченного ориентируемого рода. Сборник трудов XVI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» г. Нижний Новгород, 20-25 июня 2011 г., стр. 363-368

2.4. ПРО МЕТОД - φ -ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІВ ОРІЄНТОВАНОГО РОДУ

Розглянемо задачу моделювання складної системи в загальному виді та запропонуємо теоретико – графський підхід як спосіб мислення штучними образами-структурами. В [3] наведено задачі моделювання систем та математичні методи їхнього розв'язання в яких великі структури розглядаються як сукупність невеликих та простіших підструктур які можуть мати певні спільні частини, що підлягатимуть ототожненню при побудові оновленні цілої структур із скінченного числа підструктур. Основний метод - φ -перетворення графів (граф-моделей) отриманих як пара скінчених множин: множини об'єктів-вершин та множини об'єктів-ребер для визначення зв'язків між об'єктами структури. Основна ідея методу - φ -перетворення може інтерпретуватися як спосіб успадкування певної властивості підструктур всею структурою в залежності від властивостей з'єднання (ототожнення заданих частин підструктур). Наведені нижче результати можуть застосовуватися при системному аналізі граф-моделей. Прикладом використання є перетворення основних задач системного програмування на задачі теорії графів із готовим для використання математичним забезпеченням алгоритмів їхніх розв'язків.

Граф-модель математичної моделі складної системи подають у вигляді неорієнтовного графа G без кратних ребер і петель та вивчають її шляхом досліджень структурованих властивостей графа вкладеного в замкнуту поверхню S орієнтованого роду $\gamma(S)$; т.то розміщені на 2- ручках замкнутого 2-многовида S ребра графа не матимуть спільних точок крім вершин графа G роду $\gamma(G)$. Граф G зветься незведеним над S ($\gamma(S)$ - незведеним) якщо для кожного власного підграфа H графа G має місце нерівність $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Мінімальним графом над S називають такий граф G який зменшує $\gamma(G)$ після того як із нього видалено ребро чи стягнуто ребро в точку. Для сфери S такими є K_5 та $K_{3,3}$. Основний результат:

0. Для графа ζ (отриманого як φ -образ $G' + St_n(g)$ при ототожненні n вершин зірки $St_n(g)$ із вершинами множини X , що має число досяжності $t_G(X)$ та характеристики $\theta_G(X), \delta\theta_G(X)$) має місце нерівність: $\gamma(\zeta) \leq \gamma(G) - t_G(X) - \theta_G(X) - \delta\theta_G(X) + 1$

Введена характеристика $\delta\theta_G(x)$ яка є мірою циклічної зв'язності 2-клітин $S_G(X)$ на відміну від $\theta_G(X)$, що характеризує циклічність множини $S_G(X)$.

2. Описано алгоритм побудови 3-мінімальних графів.

Вони можуть застосовуватися при системному аналізі граф-моделей електричних схем чи компютерних мереж розташованих на торі.

З метою дослідження поведінки математичної моделі складної системи розміщеної на орієнтовній поверхні S розглянуто її граф-модель G без кратних ребер та петель. Тоді можливо використати метод φ -перетворень створений для графів стосовно розв'язання задач моделювання шляхом розбиття на “простіші” підмоделі із подальшим ототожненням елементів, виконаним із наперед заданими властивостями. Так розростання моделі G може визначитися наступним φ -перетворенням: $\varphi(G + St_n(g), \sum g_i + a_i) = (\zeta, \{a_i^*\}_1^n)$, де $X = \{a_i^*\}_1^n$ - множина точок графа G із числом досяжності $t_G(x)$, яка є однією множиною для ототожнення, а другою є $\{g_i\}_1^n$ - множина кінцевих вершин зірки $St_n(g)$ із центром g . Основний результат:

1. Узагальнення характеристики $\theta_G(X)$, яка стосується циклічної структури множини X точок графа G вкладеного в поверхню S .

2. Введення нової характеристики $\delta\theta_G(X)$, що вимірює ланцюгову структуру множини X точок графа G на S .

Цей результат прислужиться при системному аналізі як граф-моделей, так і їхнього топологічного аспекту, який полягатиме у наявності спільної властивості у ребер та вершин графа-моделі.

Розв'язок нашої задачі побудовано на методі φ -перетворень графів[1,2], засновником якого є М.П. Хоменко, та введених ним понять. Для повноти викладення наведемо найсуттєвіші з них.

Визначення 1.1.

φ -перетворенням простору X на X зветься відносний гомеоморфізм

$\varphi: (X, A) \rightarrow (X, A)$, який є сумою $\varphi_0 + \sum_{j=1}^q \varphi_j$ $q+1$ гомеоморфізмів;

1) $\varphi_0 = \varphi|_{X-A}: X \setminus A \cong X \setminus A$, φ_0 - гомеоморфізм.

2) $\varphi_j: A_j \rightarrow A_j$;

3) $\sum_{j=1}^q \varphi_j = \varphi|_A$; $\sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j + \sum_{j=k+1}^q \varphi_j \neq \varphi|_A$; $\forall k_i = 1(1)q$

4) $\varphi_j = \sum_{i=1}^{d_j} \varphi_{ji}$, $\varphi_{ji} = \varphi|_{A_{ji}}: A_{ji} \cong A_j$, $\bigcup_{i=1}^{d_j} A_{ji} = A_j$ причому $d_j \geq 2$, $j = 1(1)q$;

5) $-1 \leq \dim(A_{ji} \cap A_{j'i'}) \leq \dim A_{ji}$, $i \neq i''$; $i, i'' = 1(1)d_j$, $j = 1(1)q$

6) $A_{ji} \neq A_{j'i'}$ при $j \neq j'$, $i, i'' = 1(1)q$.

Важливий клас φ -перетворень складають φ -перетворення що задовольняють умові: $A_{ji} \cap A_{j'i'} = \emptyset$ при $(i \neq i') \cup (j \neq j')$. Тоді підпростір A розкладається в суму q систем підпростору A_{ji} , гомеоморфних один одному всередині кожної системи. Тим самим на підпросторі A задано

відношення R -еквівалентності, т.т. $R = \sum_{j=1}^q R_j$ причому $R_j[A_{ji}] = \sum_{i=1}^{d_j} A_{ji}$.

Графи φ -перетворення та їх властивості.

Нехай $X = \sum_{r=1}^m X_r$, $X = \sum_{l=1}^{m_0} X_l$, $p_0(X_r) = p_0(X_l) = 1$ для $l = 1(1)m_0$, $r = 1(1)m$.

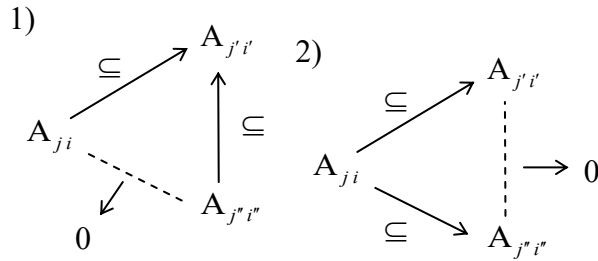
Задамо φ -перетворення $\varphi: (X, A) \rightarrow (X, A)$ у відповідності із визначенням 1.1

Введемо наступні характеристики φ -перетворення:

$$k_r^{j j'} = \left\{ A_{ji} \mid A_{ji} \subseteq A_{j'i'} \subseteq X_r, i = 1(1)d_j, i' = 1(1)d_{j'} \right\} \quad k_{r j} = \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq j}}^q k_r^{j j'} \quad k^{j j'} = \sum_{r=1}^m k_r^{j j'}$$

$$A(\varphi_j) = \left\{ k^{jj'} / (k^{jj'} \neq 0) \wedge (\forall j'', j'' \in \{1, 2, \dots, q\}) [(j'' \neq j, j') \Rightarrow ((k^{jj''} = 0) \vee (k^{j''j'} = 0))] \right\} j \neq j', j' = 1(1)q$$

Можливі випадки:



Множина $A(\varphi_j)$ визначається однозначно. Позначимо через k_r^j число k_r^{jj} .

Визначення 2.1.

φ -базою $B_j = B(\varphi_j)$ відображення $\varphi_j : A_j \rightarrow A_j$ при заданому φ -перетворенні $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$ зветься сума тих компонент підпростору X які перетинаються з підпростором A_j , тобто. $B_j = \sum_{r \in J_j} X_r$, $J_j = \{r / k_r^j > 0\}$.

Визначення 2.2.

Комплексною φ -базою $B_l = B(X_l)$ над X_l зветься прообраз цієї компоненти при заданому φ -перетворенні, тобто $B_l = \varphi^{-1}(X_l)$

Твердження 2.1.

Якщо задано φ -перетворення: $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$, $J_l = \{j / A_j \subseteq B_l\}$, $v_l = |J_l|$, $l = 1(1)m$,

- то 1) $B_l = \bigcup_{j \in J_l} B_j$, $l = 1(1)m_0$
- 2) $B_l \cap B_{l'} = 0$, $l \neq l'$, $l, l' = 1(1)m_0$
- 3) $\sum_{l=1}^{m_0} v_l = q$

Доведення цього твердження випливає із того факту, що B_l - множина компонентів просторів X «склеєних» в компоненту X_l по підсистемі A_j .

Визначення 2.3.

Графом комплексної φ -бази B_l φ -перетворення $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$ зветься граф Z_l , $Z_l = (Z_l^0, Z_l^1)$, де $Z_l^0 = \{x_r / X_r \subseteq B_l\}$ вершини з'єднані ребрами так, щоб на всіх вершинах x_r для яких $k_r^j \neq 0$ утворилося дерево з $k_r^j - 1$ -петлею в x_r для усіх j , $j = 1(1)q$.

Визначення 2.4.

Графом φ -баз φ -перетворення зветься граф $Z(X, X) = \sum_{l=1}^{m_0} Z_l$.

Твердження.

- 1) Граф $Z(X, X)$ визначенооднозначно $\Leftrightarrow p_0(B_j) \leq 2$ для $j = 1(1)q$ тобто. маємо не більше двох зв'язних компонент що перетинаються з системою A_j .
- 2) Якщо має місце умова: $(A_j = A_{j1} \cup A_{j2}) \quad d_j = 2$, для всіх $j = 1(1)q$, то граф $Z(X, X)$ задано однозначно.

Теорема 2.1.

Для кожного графа $Z(X, X) = Z$ φ -баз φ -перетворення $\varphi: (X, A) \rightarrow (X, A)$ маємо:

- 1) $p_0(Z) = p_0(X)$
- 2) $p_1(Z) = \sum_{j=1}^q d_j + p_0(X) - p_0(X) - q$

Для того, щоб упевнитися в справедливості цих властивостей достатньо обчислити $\alpha_1(Z(X, X))$,

$$\alpha_1(Z) = \sum_{j=1}^q (p_0(B_j) - 1) + \sum_{j=1}^q \sum_{r=1}^m (k_r^j - 1) + \sum_{j=1}^q \left\| \left\{ \frac{k_r^j}{k_{r'}^j} = 0 \right\} \right\|,$$

де $m = p_0(X)$ та використати формулу $p_1(Z) = \alpha_1(Z) - \alpha_0(Z) + p_0(Z)$

Теорема 2.2.

Графи φ -баз $Z(X, X)$ прості (тобто. без кратних ребер та петель) $\Leftrightarrow k_r^j \leq 1$ і $\left\| \left\{ \frac{\varphi_j}{(k_r^j \neq 0)} \wedge (k_{r'}^j \neq 0) \right\} \right\| \leq 1$, де $r \neq r'$, $r, r' = 1(1)m$, $j = 1(1)q$

Іншими словами графи $\{Z\}$ прості $\Leftrightarrow 1)$ на кожній компоненті X_r маємо тільки один підпростір A_{ji}

.2) на кожній парі таких компонент існує не більше однієї системи $\sum_{i=1}^{d_j} A_{ji}$

Визначення 2.5.

Графом φ -перетворення $\varphi|B_l: (B_l, B_l \cap A) \rightarrow (X_l, X_l \cap A)$ комплексної φ -базис B_l при заданому φ -перетворенні простору X зветься граф Λ_l , де

$$\Lambda_l^0 = \{x_r / X_r \subseteq B_l\} + \{y_j / A_j \subseteq B_l\}.$$

$$\Lambda_l^1 = \left\{ \left(\frac{k_r^j - k_{r'}}{k_r^j} \right) (x_r y_j) / (X_r \subseteq B_l) \wedge (A_j \subseteq B_l) \right\} + \left\{ \frac{y_j y_{j'}}{(k^{jj'} \in A(\varphi_j)) \wedge (A_j \subseteq B_l)} \right\}.$$

Визначення 2.6.

Графом φ -перетворення простору X зветься граф: $\Lambda(X, X) = \sum_{l=1}^{m_0} \Lambda_l$

Твердження 2.3.

Граф $\Lambda(X, X)$ довільного φ -перетворення визначено однозначно и є простим $\Leftrightarrow k_r^j - k_{rj} \leq 1$
 $j = 1(1)q, r = 1(1)m$.

Існує зв'язок між $p_1(Z)$ и $p_1(\Lambda)$.

Теорема 2.4.

Якщо для $\varphi: (X, A) \rightarrow (X, A), d_j = 2, k^{jj'} = 0$, при $j \neq j', j, j' = 1(1)q$, то $Z(X, X) \cong \Lambda(X, X)$.

Справедливість теореми слідує із твердження 2.2. та визначення графів Z и Λ .

Визначення 2.7.

Відображення $\varphi_{j'}, \varphi_{j''}, j', j'' \in \{1, 2, \dots, q\}$ зветься суміжним, якщо в $\Lambda(X, X)$ існує ланцюг виду $y_{j'}(y_{j'}x_r)x_r(x_r y_{j''})y_{j''}$ або виду $y_{j'}(y_{j'}y_{j''})y_{j''}(y_{j''}x_r)x_r$.

Говорять також, що $y_{j'}, y_{j''}$ суміжні на X_r .

Граф $\Phi(X, X)$ визначається наступним чином:

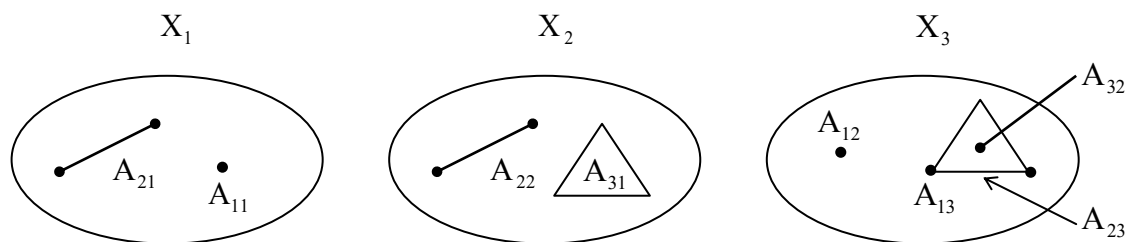
$$\Phi^0(X, X) = \{y_j\}_1^q$$

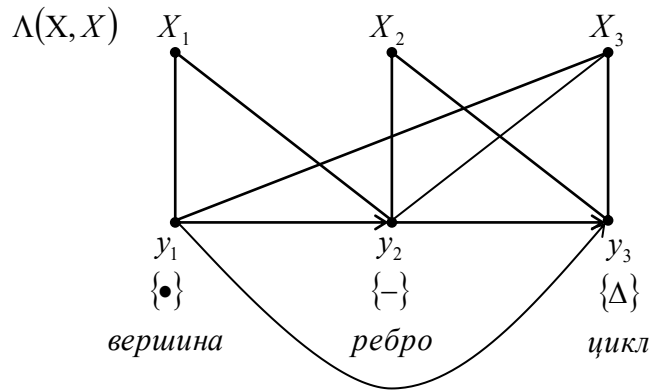
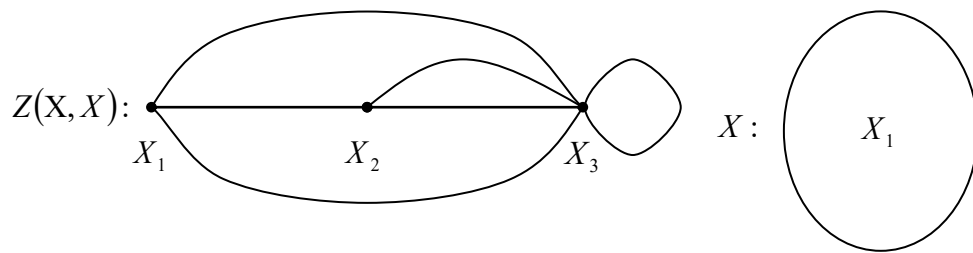
$$\Phi^1(X, X) = \{q_{jj'}(y_j y_{j'}) / j \neq j', j, j' = 1(1)q\}, \text{ де}$$

$$q_{jj'} = \{ [c_\Lambda(y_j y_{j'}) / c_\Lambda(y_j, y_{j'}) \subset \Lambda(X, X)] \wedge [c_\Lambda(y_j, y_{j'}) = y_j(y_j x_r)x_r(x_r y_{j'})y_{j'}] \vee [c_\Lambda(y_j, y_{j'}) = y_j(y_j y_{j'})y_{j'}] \}$$

тобто. $q_{jj'}$ - число різних ланцюгів вказаного выше виду.

Розглянемо наступний приклад.

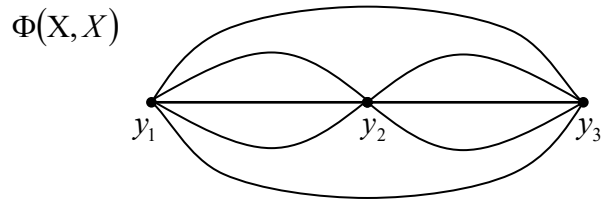




$$A_1 = \bigcup_{j=1}^4 A_{1j}$$

$$A_2 = \bigcup_{j=1}^3 A_{2j}$$

$$A_3 = \bigcup_{j=1}^2 A_{3j}$$



формулу $p_1(Z) = \alpha_1(Z) - \alpha_0(Z) + p_0(Z)$

Література

1. Хоменко М.П. Топологические аспекты теории графов, Київ 1971, АН УССР, институт математики.
2. Хоменко М.П. φ - перетворення графів, Київ 1973 институт математики АН УССР.

РОЗДІЛ 3. СТРУКТУРА ГРАФІВ НА ПРОЕКТИВНІЙ ПЛОЩИНІ ТА ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА

3.1. НОВА ВЕРХНЯ МЕЖА НЕОРІЄНТОВАНОГО РОДУ ПРОСТОГО ГРАФА.

Задача полягатиме в уточненні верхньої межі неорієнтованого роду простого графа G неорієнтованого роду $\gamma(G)$ як φ -образу двох не вироджених графів G_i неорієнтованого роду $\gamma(G_i)$ при ототождженні пар точок (x_{1j}, x_{2j}) із множин точок приєднання $X_i, j=1,2,\dots,|X_i|$, де під точкою розумітимемо, або вершину, або довільну точку ребра графа G .

Для множин точок приєднання X_i із заданим числом досяжності $t_i, t_i \geq 1$, яке дорівнює найменшій кількості кліток-граней на границях яких розміщуються всі точки множини X_i , та використовуються як відомі характеристики $\theta(X_i), \partial\theta(X_i)$, так і визначаються дві нові: 1) багатосторонність чи $st(X_{ij}, G_i)$ - доступ до точок з X_{ij} розташованих на границях кліток-граней неорієнтованої поверхні роду $\gamma(G_i)$; 2) $k4(X_{1j}, X_{2j})$ - кількість всіх різних частинних графів гомеоморфних K_4 чи $K_{2,3}$ породжених ототождненням пар точок (x_{1j}, x_{2j}) з множин точок $X_{ij}, j=1,2,\dots,|X_{ij}|, m = \sum_{j=1}^{t_i} |X_{ij}|, i=1,2$. Основний результат - теорема 1: Якщо задано φ -перетворення зв'язних графів G_1 та $St_m(G_2)$ неорієнтованого роду $\gamma(G_i)$ наступним чином:

$\varphi : (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ - квазізірка з центром G_2 та кількома ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини X_2, X_1 підмножина множини точок графа $G_i, X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, матиме число досяжності t_i та характеристики, $\theta_i, \partial\theta_i, i=1,2$, то

$$\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i) + k4 - st, \text{ де } k4 \geq st \geq 0, st = \sum_{j=1}^{t_1} st(X_{1j}, G_1), k4 = \sum_{j=1}^{t_1} k4(X_{1j}, X_{2j}), k4 - st -$$

число додаткових 2-ручок приклеєних до клітки s з множини $\sigma_{r_1} \setminus f(G_1)$ при мінімальному вкладенні $f : G_1 \rightarrow S_{r_1}, r_1 = \gamma(G_1) + t_1 - 1 - (\theta_1 + \partial\theta_1)$, із st - стороннім доступом до тих точок приєднання на границі ∂s клітці s (до якої приклеєно r_2 штук 2-ручок і вкладено граф G_2), що при ототождненні пар точок приєднання (x_{1j}, x_{2j}) породжують $k4$ різних підграфів гомеоморфних K_4 , чи $K_{2,3}$.

Основні поняття та позначення узяті із [1]-[3], всі графи - неорієнтовані без кратних ребер-дуг та петель. В [4] отримано уточнену верхню межу орієнтованого роду склейки довільного неорієнтованого простого графа G_1 та квазізірки $St_m(G_2)$ з центром - графом G_2 без кратних ребер-дуг, що містять множину точок приєднання X із числом досяжності $t, t > 0$, та чотирьох наступних характеристик множини $X : \theta, \partial\theta, k4, st$, наведених нижче. Задача полягатиме в отриманні подібного результату для неорієнтованого роду склейки графа G та квазізірки з центром - графом G_2 (всі графи без кратних ребер-дуг та петель), що містять множину точок приєднання X із числом досяжності t та θ і $\partial\theta$ - характеристиками [7]. Ця задача подібна до задачі про верхню границі $\gamma(G)$ графа $G, G = G_1 \cup_k G_2, k > 0$, отриманого в результаті ототожднення графів G_1, G_2 по $k, k > 0$, вершинам (k -amalgamation), через рід графів G_1, G_2 . В [5] є таке: 1) $\gamma(G_1 \cup_k G_2) \leq \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + 2k - 2$ для орієнтованого роду, 2) $|\bar{\gamma}(G_1 \cup_k G_2) - (\bar{\gamma}(G_1) + \bar{\gamma}(G_2))| \leq k^2 - 2$ для неорієнтованого роду $\bar{\gamma}(G)$ графа G , та

відмічено, що перша нерівність отримана при допомозі стандартної операції приєднання 2-ручок до поверхні.

Нехай 2-многовид S без країв (дірок) неорієнтованого роду $\bar{\gamma}(S)$ подано як поверхню S' орієнтованого роду $\gamma(S')$, де $\gamma(S') \geq 0$, $\bar{\gamma}(S) = 2\gamma(S') + r$, до якої приклеєно r лент Мебіуса, $r > 0$; наприклад, поверхня S є пляшкою Клейна коли $\gamma(S') = 0$ і $r = 2$, чи поверхня S роду $\bar{\gamma}(S) = 3$ матиме S' - тор із однією приклеєною лентою Мебіуса. Для заданого вкладення f , $f: G \rightarrow S$, графа G в S та заданої множини точок X , $X \subset G^0 \cup G^1$ визначимо $t_G(X, S, f)$, $t = t_G(X, S, f)$, число досяжності множини X відносно S , якщо існує підмножина $S_G(X)$, $S_G(X) = S \setminus f(G)$, $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$, що задовольняє умові: $(f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^t \partial s_i \cap X) \wedge (f(X) \not\subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^t \partial s_i \cap X)$, $j = 1, 2, \dots, t$.

Будемо говорити, що множина X має число досяжності t , $t_G(X, S) = t$, відносно S , якщо серед всіх неізоморфних вкладень f , $f: G \rightarrow S$ число t є найменшим серед чисел $t_G(X, S, f)$. Вважатимемо надалі, що $\bar{\gamma}$ позначено через γ .

Визначення 1. Нехай задано вкладення f , $f: G \rightarrow S$, графа G в S , яке реалізує t , $t_G(X, S) = t$, де $S_G(X) = S \setminus f(G)$, $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$. Будемо говорити, що відносно заданої поверхні S множина X матиме характеристику $\theta_G(X, S, f)$, $\theta_G(X, S, f) = \theta$, $\theta \geq 1$, якщо існує θ трійок кліток $\{s_i\}_1^3$ з множини $S_G(X)$, на границях яких підмножини X_i , $X_i \subseteq X$, розміщуються довільним чином і задовольняють співвідношенню: $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\} \wedge G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\} \wedge G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$, та породжує найменший по включенню підграф G' графа G , (можливо вироджений в точку), який містить точки $\{a_i\}_1^3$ попарного перетину границь кліток $\{s_i\}_1^3$; Множина X матиме відносно S характеристику $\theta_G(X, S)$, якщо $\theta_G(X, S) = \max \theta_G(X, S, f)$, де максимум береться по всім неізоморфним вкладенням f , $f: G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X, S) = t$.

Визначення 2. Нехай задано вкладення f , $f: G \rightarrow S$, графа G в S , яке реалізує t , $t_G(X, S) = t$, де $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$, $S_G(X) = S \setminus f(G)$, та виконується рівність $\theta_G(X, S) = 0$. Будемо говорити, що відносно S множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta = \partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta \geq 1$, якщо існує підмножина $\{s_i, s_j, s_k\}$, множини $S_G(X)$, яка задовольняє співвідношенням: $G^1 \cap \partial s_i \cap \partial s_j \supseteq \{(a_1, b_1)\}$ і $G^1 \cap \partial s_k \cap \partial s_j \supseteq \{(a_2, b_2)\}$, для всіх $i \neq j \neq k$, $i, j, k = 1, 2, 3$. На границях $\{\partial s_i, \partial s_j, \partial s_k\}$ множина X розміщується довільним чином, якщо не містить точок ребер (a_1, b_1) , (a_2, b_2) та особливим чином (без точок множини X на $\partial s_j \setminus L(a_1, a_2) \cup \{(a_2, a_{20}), (a_1, a_{10})\}$), якщо містить принаймні точку цих ребер. Також існуватимуть клітка s_0 та, можливо, клітка s_{00} . Клітка s_0 , $s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$, границя якої містить простий ланцюг $L(a_1, a_2)$ ненульової довжини ні із кінцевими вершинами a_1, a_2 спільно із ∂s_j і два простих ланцюги, можливо вироджених в точку, $L_1(a_1, a_{12})$, $L_1(a_2, a_{22})$ спільними з ∂s_i та ∂s_k , відповідно, та ребро (a_{12}, a_{22}) . Клітка s_{00} , $s_{00} \in (S \setminus f(G)) \setminus (S_G(X) \cup \{s_0\})$, має границю яка містить простий ланцюг $L(a_{10}, a_{20})$ ненульової довжини із кінцевими вершинами a_{10}, a_{20} спільно із ∂s_j .

Множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X,S)$, якщо $\partial\theta_G(X,S) = \max \partial\theta_G(X,S,f)$, де максимум по неізоморфним вкладенням $f, f:G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X,S)=t$ та $\theta_G(X,S)$.

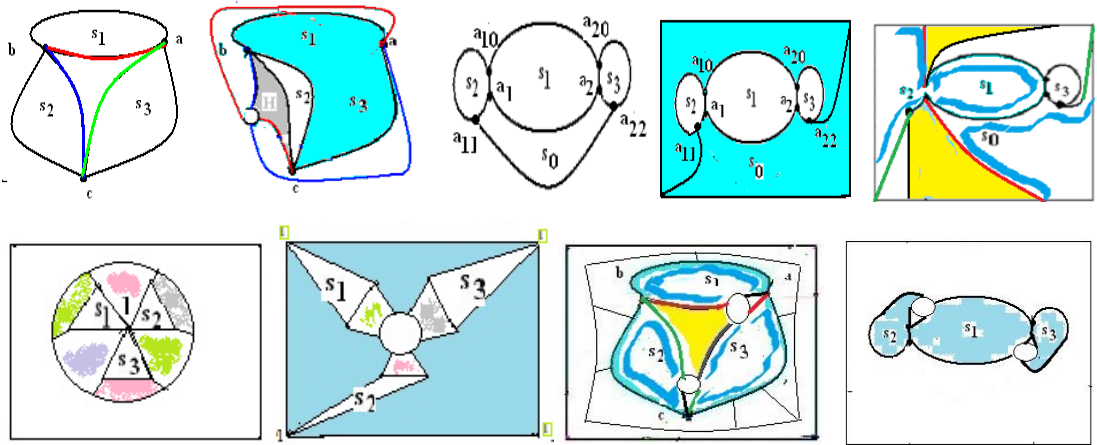


Рис. 1. На перших трьох картах другого ряду зіркова кліткова структура на проективній площині та пляшці Клейна та ланцюжкова пляшці Клейна

Твердження 1. Нехай для графа G , вкладеного в поверхню S - неорієнтованого роду, на множині $S_G(X)$ задано відношення інцидентності наявністю, принаймні, однієї спільної точки на границях двох кліток. Мають місце наступні співвідношення:

- 1.а). Якщо S - проективна площина, то визначення 1 та 2 не виконуються в загальному випадку, лише визначення 2 задовольняється тоді, коли клітка s_0 має на ∂s_0 тільки одне ребро графа G , що не належить до $\partial s_i \cap G^1, i = 1,2,3$;
- 1.б). Якщо S - пляшка Клейна, то визначення 1 та визначення 2 виконуються в загальному випадку;
2. Якщо S - неорієнтованого роду $\gamma(S), \gamma(S) > 2$, то визначення 1 та 2 виконуються в загальному випадку;
3. $\theta_G(X,S) + \partial\theta_G(X,S) \leq \lceil t_G(X,S) - 2 \rceil$.

Доведення. 2-многовид S - неорієнтованого роду $\gamma(S), \gamma(S) > 0$, являтиме собою проективну площину P із $\gamma(S) - 1$ приклеєними лентами Мебіуса. Якщо $S = P$, то співвідношення 1 впливає з наступного. Припустимо, що $\theta(X,S) = 1$, т. то на проективній площині P є зіркова структура. У виродженому виді зіркову структуру описуватиме перша карта на рис.1 тільки за умови, що навколо кліток s_1, s_3 немає інших кліток, які б мали спільні ребра із s_1, s_3 . Це суперечитиме умові, що $t_G(\bigcup_{i=1}^3 \partial s_i \cap X) = 3$. Припущення невірне для виродженої зіркової структури. На проективній площині не вироджену зіркову структуру описуватиме друга та третя карти на рис.1 за умови, що три ребра трикутника (a, b, c) не входять до $L = \bigcup_{i=1}^3 \partial s_i \cap X, s_1, s_3$. Це суперечитиме умові, що $t_G(\bigcup_{i=1,3} \partial s_i \cap X) = 2$.

Припущення невірне для не виродженої зіркової структури. Для проєктивної площини співвідношення 1.а) доведено.

Доведення співвідношення 1.а) стосовно визначення 2 впливає з того, що на проєктив -ній площині ланцюгова кліткова структура, (зображена на 4,5,6 картах рис.1) задовольняє визначенню 2 тільки тоді, коли інших внутрішніх граней графа G окрім кліток з множини $\{\partial s_i\}_{i=0}^3$ не буде, а на $\partial s_0 \in$ ребро графа G , можливо 1-підрозділене, яке не належить до $\bigcup_{i=1}^3 \partial s_i$, а на $\partial s \in$ тільки одне ребро графа

G , яке не належить до $\bigcup_{i=1}^3 \partial s_i$, та на спільних ребрах немає точок множини X . Доведення

співвідношення 1.а) закінчено. Доведемо співвідношення 1.б). Якщо S - пляшка Клейна, то визначення 1 та 2 виконуються, як це показано на перших трьох для зіркової кліткової структури та четвертій карті для ланцюгової кліткової структури в другому ряду рис.1.

Доведемо співвідношення 2. Оскільки 2-многовид S - неорієнтованого роду $\gamma(S)$, $\gamma(S) > 2$, то S являтиме собою тор із приклеєними, щонайбільше, $\left\lfloor \frac{\gamma(S)-1}{2} \right\rfloor$ 2-ручками та, принаймні, однією

лентою Мебіуса. Тому на множини кліток $S_G(X, S)$ можливе виконання тих перетворень зіркової кліткової структури (за визначенням 1), що вписані в алгоритмі_О [8] для орієнтованого 2-многовида та наведені для повноти нижче в алгоритмі_НО, т. то матимемо нерівність $\theta_G(X, S) \geq 0$. Якщо $\theta_G(X, S) = 0$, то на множини кліток $S_G(X, S)$ можливе виконання перетворень за визначенням 2, що вписані в алгоритмі_О [8] для орієнтованого 2-многовида та для повноти наведені нижче в алгоритмі_НО, т. то матимемо нерівність $\partial \theta_G(X, S) \geq 0$. Доведення співвідношення 3, т. то обчислення формальної суми, впливає із співвідношень 1,2.

Наслідок 1. Перетворення множини кліток-граней графа G , вкладеного до 2-многовида S , виконані за визначеннями 1 та 2, трансформують елементи з $S_G(X)$ за алгоритмом_НО, не змінюючи сусідні з ними клітки.

Алгоритм_НО.

Вхід. До 2-многовида S неорієнтованого роду вкладено граф G вкладенням f , $f: G \rightarrow S$, що реалізує $t_G(X, S) = t$ та $\theta_G(X, S) = \theta$. Занумеруємо перші три клітки з $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 1, як підмножину $\{s_i\}_1^3$, Вважатимемо заданими функції функція_ $\theta(M)$ та функція_ $\partial \theta(M)$, які визначають характеристики $\theta, \partial \theta$, відповідно, для M - множини кліток, впорядкованої відношенням суміжності на множині границь кліток з M .

Крок 0. Якщо $\theta = 0$, то переходимо до кроку 3,

інакше, доки $\theta > 0$ виконувати циклічно наступні дії:

початок циклу 1;

Крок 1. Для $S_G(X)$ використання характеристики θ для неорієнтованого роду означає приклеювання нової 2-ручки h на заміну трьох кліток-граней $\{s_i\}_1^3$ із границями, що мають,

принаймні, одну спільну вершину чи вони попарно мають спільні вершини, на нову клітку-грань s поверхні на 1 більшого роду, що має границею $\partial s = \bigcup_1^3 \partial s_i$, $S := S + h$;

Крок 2. $S_G(X) := (S_G(X) \setminus \{s_i\}_1^3) \cup \{s\}$; $\theta =$ функція $\theta(S_G(X))$, $\theta := \theta - 1$;

перенумеруємо всі елементи нової множини $S_G(X)$ так, щоб перші три клітки з $S_G(X)$, для яких має місце визначення 1, мали номери 1,2,3;

кінець циклу 1;

Крок 3. $\partial\theta :=$ функція $\partial\theta(S_G(X))$, де $S_G(X)$ побудована циклом 1 множини кліток. Якщо $\partial\theta > 0$, то перенумеруємо клітки з побудованої вищенаведеним циклом множини кліток $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 2, як $\{s_i\}_1^3$ та s_0 ;

Якщо $\partial\theta = 0$, то переходимо до кроку 6,

інакше, доки $\partial\theta > 0$ виконувати наступні дії:

початок циклу 2;

Крок 4. Для $S_G(X)$ використання характеристики $\partial\theta$ для неорієнтованого роду означає приклеювання нової 2-ручки h на заміну трьох клітин-граней $\{s_i\}_1^3$ із границями, де s_2 одна з трьох має два спільні ребра з двома іншими, та четвертій клітці s_0 , $s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$ на нову клітку-грань s поверхні на 1 більшого роду, що має границею $\partial s = \bigcup_1^3 \partial s_i \setminus R$, де множина R складена, або з двох попарно спільних ребер без точок з множини X , або з тієї частини границі ∂s_2 , що не належить до границь $\partial s_1 \cup \partial s_2 \cup \partial s_0$ та без точок з множини X ; $\gamma(S) := \gamma(S) + 1$.

Крок 5. $S_G(X) := (S_G(X) \setminus \{s_i\}_1^3) \cup \{s\}$; $\partial\theta =$ функція $\partial\theta(S_G(X))$ $\partial\theta := \partial\theta - 1$; Якщо $\partial\theta > 0$, то перенумеруємо всі елементи нової множини $S_G(X)$ так, щоб три клітки $\{s_i\}_1^3$ та четверта s_0 , для яких має місце визначення 2, мали номери 1,2,3.

кінець циклу 2;

Крок 6. Виводимо $S_G(X)$ та "Множина X розташована на границях кліток-граней з множини" $S_G(X)$, "перетвореної до нульових характеристик $\theta, \partial\theta$, 2-многовида неорієнтованого роду $\gamma(S)$ ", кінець алгоритму

Твердження 2. Алгоритм_НО коректно перетворює 2-многовид S та вкладення $f: G \rightarrow S$ графа G в S , де $\gamma(G) \leq \gamma(S)$, в 2-многовид S' та вкладення $f': G \rightarrow S'$ графа G в S' , де $\gamma(S') > \gamma(S)$, шляхом використання характеристик $\theta, \partial\theta$, одна з яких має бути нульовою, множини точок X графа G та має поліноміальну часову складність.

Доведення. Згідно твердження 1 неорієнтований 2-многовид S може бути або проективною площиною, або тором чи орієнтовним 2-многовидом із приклеєною, принаймні, однією лентою Мебіуса. Алгоритм перетворення неорієнтованого 2-многовида S із вкладеним графом G в

неорієнтований 2-многовид S' , де $\gamma(S') > \gamma(S)$, шляхом приклеювання до S нових 2-ручок спирається на використання характеристики θ множини точок X графа G . Вважатимемо, що ручка h приклеєна до кліток $s', s'' \in S(G, f)$ і позначати її через $h(s', s'')$, якщо задано φ - перетворення φ' в такий спосіб:

$\varphi'((s' \cup s'') \setminus (\tau' + \tau''), \partial\tau' + \partial\tau'') = (h, \tau^*)$, де τ', τ'' - такі регулярні двоклітки, що задовольняють

$\tau' \subset s', \tau'' \subset s'', \partial\tau' \cap \partial\Delta s' = \partial\tau'' \cap \partial s'' = \emptyset$. Вважатимемо заданими функцію $\theta(M)$ та функцію $\partial\theta(M)$, які визначають характеристики $\theta, \partial\theta$, відповідно, на множини кліток M , що впорядкована відношенням суміжності заданим на множині границь кліток з M , т. то якщо границі двох кліток мають принаймні спільну точку, то ці клітки суміжні.

Нехай до 2-многовиду S неорієнтованого роду $\gamma(S)$ вкладено граф G вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, що реалізує $t_G(X, S) = t$ та $\theta_G(X, S) = \theta$. Занумеруємо перші три клітки з $S_G(X)$, що задовольняють

визначенню 1, як підмножину $\{s_i\}_1^3$ та позначимо через G' найменший по включенню підграф графа

G , можливо вироджений в точку, який містить точки $\{a_i\}_1^3$ попарного перетину границь кліток $\{s_i\}_1^3$,

причому $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\}$, $G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\}$, $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$. Розглянемо плаский диск d

з центром в a_1 та нескінченно малим радіусом ε , який своєю границею перетинатиме ребра підграфа G' , що інцидентні вершині a_1 , у внутрішніх точках a_{1j} , де $j = 1, 2, \dots, k$. Розщепимо кожну вершину

a_{1j} на a'_{1j}, a''_{1j} , де $j = 1, 2, \dots, k$ степеня 2. Цим розіб'ємо підграф G' на частинні - підграфи $G'_i, i = 1, 2$

, де G'_1 містить a'_{1j} та всі ребра (a_1, a'_{1j}) , G'_2 містить a''_{1j} . Відображенням ϕ перевернемо на 180°

підграф $f(G'_1)$ як множини образів ребер на поверхні, симетрично навколо вісі симетрії, яка є простим ланцюгом $L(a_2, a_3)$, що проходить через точки a_2, a_3 та задовольняє умові:

$f(G'_2) \cap \partial s_3 = f(G') \cap \partial s_3 = L(a_2, a_3)$. В результаті отримаємо підграф $\phi f(G'_2)$ вкладений до $\overline{s_3}$, де

$\overline{s_3} = s_3 \cup \partial s_3$. Відображенням ϕ' вигнемо за часовою стрілкою на 180° всі висячі ребра інцидентні a''_{1j}

, де $j = 1, 2, \dots, k$, не змінюючи порядок слідування, і розмістимо їхні висячі вершини на лівій частині

границі регулярної підклітки τ' , де $\tau' \subset \overline{s_3} \setminus \phi f(G'_2)$. В підграфі $f(G'_2)$ вкладеному до $\overline{s_1} \cup \overline{s_2}$, де

$\overline{s_3} = s_3 \cup \partial s_3$, відображенням ϕ'' поміняємо місцями ребра в парах виду $(a'_{1j}, a_1), (a'_{1(k-j+1)}, a_1)$ для

всіх $j, j = 1, 2, \dots, k$, та за часовою стрілкою розмістимо на правій частині границі регулярної

підклітки τ'' , де $\tau'' \subset (\overline{s_1} \cup \overline{s_2}) \setminus f(G'_1)$. Ототожнимо, за часовою стрілкою, пари вершин (a'_{1j}, a''_{1j}) у

внутрішню точку a'_j деякого j -го ребра $(a'_{1j}, a'_j, a''_{1j})$, для всіх $j, j = 1, 2, \dots, k$. Приклеєна ручка h до

кліток $s' = \overline{s_3}, s'' = \overline{s_1} \cup \overline{s_2}, s', s'' \in S(G, f')$, позначена через $h(s', s'')$, матиме вкладені відображенням ϕ'''

склеєні половинки ребра $\phi'' \phi' \phi f((a'_{1j}, a'_j, a''_{1j}))$, які розрізають її на клітки, де $j = 1, 2, \dots, k$. В результаті

суперпозиції $\phi''' \phi'' \phi' \phi f$ наведених вище відображень отримаємо вкладення $f', f': G \rightarrow S'$,

$f' = \phi''' \phi'' \phi' \phi f$, графа G до 2-многовиду S' орієнтованого роду $\gamma(G) + 1$, причому $S'(G, f') =$

$(S(G, f) \setminus \{s_1, s_2, s_3\}) \cup h(s', s'') \setminus \sum_{j=1}^k f'(a'_{1j}, a'_j, a''_{1j})$, т.то тіж самі клітки, тільки замість s_1, s_2, s_3 буде клітка

$s, s \in h(s', s'') \setminus \sum_{j=1}^k f'(a'_{1j}, a'_j, a'_{2j})$, така, що $\partial s = \bigcup_{i=1}^3 \partial s_i$. Крім цього множина $f'(X)$ на S' буде

розміщуватися на границях $t_G(X, S) - 2$ та матиме характеристику $\theta_G(X, S) - 1$. Цим виконані всі дії ітерації циклу 1 алгоритма_НО.

Нехай до 2-многовиду S неорієнтованого роду $\gamma(S)$ вкладено граф G вкладенням f , $f: G \rightarrow S$, що реалізує $t_G(X, S) = t$, $\theta_G(X, S) = 0$ та $\partial \theta_G(X, S) = \partial \theta$, $\partial \theta > 0$. Перші три з чотирьох кліток з множини $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 2, утворюють підмножину $\{s_i\}_1^3$, а четверта s_0 . Для $S_G(X)$ використання характеристики $\partial \theta$ для орієнтованого роду означає приклеювання нової 2-ручки h , $h = h(s_1, s_0)$ чи $h = h(s_1, s_{00})$, на заміну чотирьох кліток-граней $\{s_i\}_1^3$, s_0 , де s_1 одна з трьох має два спільні ребра e_i з s_3, s_2 та клітки s_0 , $s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$, на нову клітку-грань s з границею

$\partial s = \bigcup_{i=1}^3 \partial s_i \setminus R$, де множина R матиме два наступні варіанти складання: 1) якщо $h = h(s_1, s_0)$, то R є тією

частиною границі ∂s_1 , що не належить до границь ∂s_0 та без точок з множини $X \setminus \{\partial e_1 \cup \partial e_2\}$; 2) якщо $h = h(s_{00}, s_0)$ (за умови існування такої клітки s_{00} , що множина точок $(\partial s_{00} \cap \partial s_1) \cup (\partial s_0 \cap \partial s_1)$ містить кінцеві вершини обох ребер e_i), то $R = e_1 \cup e_2$ і ребра e_i не містять точок з множини $X \setminus \{\partial e_1 \cup \partial e_2\}$, де $e_1 \in \partial s_2 \cap \partial s_1$, $e_2 \in \partial s_1 \cap \partial s_3$. В кожному з цих випадків на приклеєній 2-ручці розміщуються ребра e_i за допомогою вкладення f' , $f': G \rightarrow S'$, $f'|G \setminus \{e_2, e_2\} = f|G \setminus \{e_2, e_2\}$, графа G до 2-многовиду S' орієнтованого роду $\gamma(G) + 1$, причому множина $S'(G, f')$ для варіанту 2) матиме вид

$(S(G, f) \setminus \{\bigcup_{i=0}^3 s_i \cup s_{00}\}) \cup (h(s_{00}, s_0) \setminus \sum_{j=1}^k f'(e_1, e_2))$, для варіанту 1) $(S(G, f) \setminus \{\bigcup_{i=0}^3 s_i\}) \cup (h(s_1, s_0) \setminus \sum_{j=1}^k f'(e_1, e_2))$.

Тим самим всі дії однієї ітерації циклу 2 алгоритму_0 виконані. Кількість ітерацій в обох циклах дорівнюватиме $\theta_G(X, S) + \partial \theta_G(X, S)$. Оскільки $t_G(X, S)$ не перевищує числа кліток – граней графа G неорієнтованого роду, вкладеного до 2-многовиду S роду $\gamma(G)$ і $\theta_G(X, S) + \partial \theta_G(X, S) < t_G(X, S) - 2$, то алгоритм рекурсивно перетворюватиме множину кліток допоки не отримаємо перетворену множину кліток-граней із нульовими характеристиками $\theta, \partial \theta$. Число ітерацій обох циклів не перевищуватиме $2(2 - 2\gamma(G) - |G^0| + |G^1|)$, тобто матиме поліноміальну часову складність. Твердження 2 доведено.

Зауважимо, що використання $\partial \theta$ можливе тільки після використання характеристики θ для орієнтованого роду і є перетворенням трьох клітин-граней, дві пари з яких мають два спільні ребра, шляхом приклеювання до них нової 2-ручки, на нову клітку-грань поверхні більшого роду, що має границею об'єднання границь цих трьох кліток без двох спільних ребер. Доведення закінчене.

Визначення 3. Позначимо через $krt_G(M)$, $kr = krt_G(M)$, kr - кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G , як найбільшу кількість варіантів вибору різних підмножини $S_G(M, S_\gamma)$ множини клітин $S_\gamma \setminus f(G)$ на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M , узята по всіх мінімальних вкладеннях f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ . Іншими словами, це найбільша кількість зірок які приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr 2-кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Визначення 4. Позначимо через $ms_G(M, s, f)$, $k = ms_G(M, s, f)$, k - сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітки s , $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f - задане мінімальне вкладення $f: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M . Найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх клітин s заданого мінімального вкладення f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $ms_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G які приєднані кінцевими вершинами до кожного із принаймні трьох елементів множини M та вкладені до однієї клітки із множини $S_\gamma \setminus f(G)$ заданого мінімального вкладення f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ .

Визначення 5. Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), \dots, ms_G(M, f_N))$ вектором l -стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, $l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0$, $|M| > 2$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ -множина всіх неізоморфних мінімальних вкладень f_k , $f_k: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел $ms_G(M, f_k)$ узяті по всім s та всім f_k , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, називатимемо характеристикою l -стороннього доступу до множини M точок графа G .

Теорема 1. Якщо задано наступне ϕ -перетворення графів G_i та $St_m(G_2)$ неорієнтованого роду $\gamma(G_i)$: $\phi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ -квазізірка з центром G_2 та кількома ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини X_2, X_i множина точок графа G_i , $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, матиме число досяжності та характеристики t_i . $\theta_i, \partial\theta_i$, то $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i) + k4 - st$, де $st = \sum_{j=1}^{t_1} st(X_{1j}, G_1)$, $k4 = \sum_{j=1}^{t_1} k4(X_{1j}, X_{2j})$, $k4 - st$ - число 2-ручок приклеєних до клітки s з множини $\sigma_{r_1} \setminus f(G_1)$, $k4 - st \geq 0$, f - мінімальне вкладення $f: G_1 \rightarrow \sigma_{r_1}$, $r_i = \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i)$, із st -стороннім доступом до тих точок приєднання на границі ∂s клітки s (до якої приклеєно r_2 штуки 2-ручок і вкладено граф G_2), що при ототоженні всіх пар точок приєднання типу (x_{1j}, x_{2j}) породжують $k4$ різних підграфів чи частин графа G гомеоморфних K_4 , чи $K_{2,3}$.

Доведення. Нехай граф G розбито на дві частини G_1 та $St_m(G_2)$ із m спільними вершинами x_j , кожна з яких розщеплюється на вершини x_{1j}, x_{2j} , де $j = 1, 2, \dots, m$. Ототоження цих пар задаватиме наступне ϕ -перетворення зв'язних графів G_1 та $St_m(G_2)$ роду $\gamma(G_i)$:

$\phi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ -квазізірка з центром G_2 та кількома ребрами-променями із кінцевими вершинами з множини X_2 , де X_i множина точок графа G_i , $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, має число досяжності t_i та характеристики. $\theta_i, \partial\theta_i$, $i = 1, 2$. Нехай до 2-многовиду S_i неорієнтованого роду $\gamma(G_i)$ вкладено граф G_i мінімальним вкладенням f_i , $f_i: G_i \rightarrow S_i$, що реалізує $t_{G_i}(X_i) = t_i$ та $\theta_{G_i}(X_i) = \theta_i$, де $i = 1, 2$. Для графа G_i виконаємо перетворення за алгоритмом_НО та

отримаємо перетворену множину кліток-граней із нульовими характеристиками $\theta_i, \partial\theta_i$, із точною кількістю, не більше ніж $t_i - (\theta_i + \partial\theta_i)$, кліток s_{ij} на границях яких розміщуються точки приєднання із множини $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, де $i = 1, 2$.

Стандартним способом приклеїмо до 2-многовиду S_i p 2-ручок $h_{ij} = h(s_{i1}, s_{ij})$, де $p = t_i - (\theta_i + \partial\theta_i) - 1$, одним кінцем до клітки s_{i1} , а іншим до кожної клітки s_{ij} , $j = 2, \dots, m$, тим самим отримаємо клітку s_i^* на границі якої знаходяться всі точки з X_i , де $i = 1, 2$.

Відмітимо, що клітка s_i^* матиме st_i - багатосторонній доступ до вершин приєднання із множини X_i , де $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, як суму багатостороннього доступу $st_i = \sum_{j=1}^{t_i} st(X_{ij}, G_1)$ по всіх тих кліток з яких

утворилася клітка s_i^* , де $i = 1, 2$. Приклеїмо стандартним способом циліндр C до кліток s_1^*, s_2^* та отримаємо вкладення $f, f = f_1 + f_2$, графа $G_1 + G_2$ до 2-многовиду S^* орієнтованого роду $\gamma(G_i) + \gamma(G_i) + p$. Продовження f_2^* вкладення f_2 на множину всіх висячих ребер квазізірки $St_m(G_2)$ із кінцевими вершинами x_{2j} які отожднюються з x_{1j} , $j = 1, 2, \dots, m$ можливо побудувати за умови розміщення на додаткових $k4 - st_1$ 2-ручках приклеєних до циліндру C по одному із перехрещених на C ребер підграфів K_4 чи $K_{2,3}$, що породжені висячими ребрами квазізірки, т.то розведення перехрещених ребер у кількості $k4 - st_1$ штук, де st_1 - багатосторонній доступ матиме клітка s_1^* до точок із X_1 , $X_1 = \{x_{1j}\}_1^m$. В результаті отримаємо вкладення $f', f' = f_1 + f_2^*$ графа G в 2-многовид S^{**} неорієнтованого роду $\gamma(G_i) + \gamma(G_i) + p + k4 - st_1$, т. то $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i) + k4 - st$.

Доведення теореми 1 закінчено.

Наслідок 1. Нехай $\varphi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$ та виконується умова теореми 1 і рівності: $\theta_i = 0, \partial\theta_i = 0, s = 0, t_1 = t_2 = m$. Тоді $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + m^2 + m - 2$.

Доведення впливатиме із наведеної в теоремі 1 нерівності та умови $t_i = m$ за якою всі $\theta_i = 0, \partial\theta_i = 0, s = 0$, а число $k4$ є числом всіх різних пар перехрещених ребер на множині всіх висячих ребер квазізірки $St_m(G_2)$, т. то $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + 2m - 2 + m(m - 1)$.

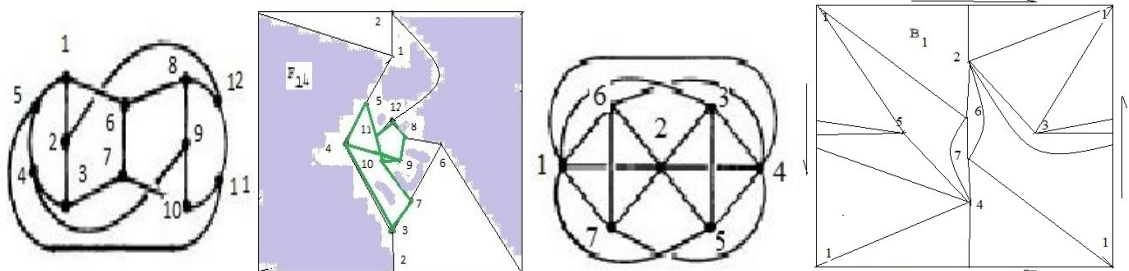


Рис.2. На першій карті непроективний граф F_{14} розміщено з перетином ребер на площині, на 2-й карті F_{14} розміщено на проективній площині P , де $G_1 = K_{2,3}$, $st_{G_1}(G_1^0, \sigma_1) = 2$, $G_2 = C_5$, $k_4 = 1$, на 4-й карті V_1 розміщено на поверхні Клейна, де $G_1 = K_4$, $st_{G_1}(G_1^0, P) = 2$, $G_2 = K_3$, $k_4 = 1$.

Наслідок 2. Нехай $\varphi : (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$ та виконується умова теореми 1, окрім умови мінімальності вкладення графа G_1 до неорієнтованої поверхні S . Якщо $\max st_{G_1}(G_1^0, S) - k_4(G_2, S)$ досягнуто на S , то верхня оцінка роду $\gamma(G)$ матиме мінімальне значення.

Доведення. Якщо граф G_1 вкладено до неорієнтованої поверхні не мінімального роду, принаймні $\gamma(G_1) + 1$, то можливе збільшення числа st та зменшення характеристики досяжності множини точок приєднання. (див. рис 3), що призводить до зменшення оцінки роду $\gamma(G)$ порівняно із мінімальним вкладенням G_1 до евклідової площини.

Приклад. На рис. 2 наведено залежність між характеристиками k_4 та st для графа F_{14} неорієнтованого роду 2.

Наслідок 3. Нехай задане перетворення $\varphi : (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$ та виконується умова теореми 1. Якщо кожне ребро є суттєвим відносно верхньої границі роду $\gamma(G)$ при його видаленні, то G є граф-обструкцією для неорієнтованої поверхні. S

Доведення. Нехай виконана умова теореми 1. Якщо кожне ребро u є суттєвим відносно верхньої границі роду $\gamma(G)$ при його видаленні, тобто зменшить на 1 верхню оцінку неорієнтованого роду $\gamma(G)$, то матимемо нерівність $\gamma(G) - \gamma(G \setminus u) \leq 1$. Оскільки видалене ребро зменшує рід щонайбільше на 1, то матимемо рівність $\gamma(G) - \gamma(G \setminus u) = 1$.

Література

1. Хоменко М. П. φ -перетворення графів. препринт ИМ АНУ, Киев, 1973, 383 с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. препринт ИМ АНУ, Киев, 1970.
3. Хоменко Н. П. Островерхий Е. Б. Существенные элементы и род графа. препринт "Минимальные вложения графов" ИМ АНУ Киев 1972.
4. Петренюк В.І. Петренюк Д.А. Нова верхня оцінка орієнтованого роду./Теорія оптимальних рішень, 2018.
5. Archdeacon D. The orientable genus is nonadditive. J. Graph theory, 11, 1986, 385-401.
6. Bodendiek R., Wagner K. A characterization of the minimalbasis of the torus. Combinatorica 6,3, 1986, 245-260.
7. Петренюк В. І. О структуре плоских графов с заданным числом достижимости некоторого множества точек. деп. рукопис в УкрНИИТИ N 2245-Ук86 22.09.1986.

3.2. ПРО СТРУКТУРУ 7-МИ ТА 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ПОВЕРХНІ НЕОРІЄНТОВАНОГО РОДУ 2.

Розглянемо *задачу* вивчення методом ϕ -перетворення графів структурних властивостей 7-ми та 8-ми вершинних графів-обструкцій для неорієнтованої поверхні N_k роду k , $k = 2$. Основні поняття та позначення узяті із [1]-[3], всі графи неорієнтовані без кратних ребер та петель. В [4], [5] отримано всі неізоморфні графи-обструкції для N_2 -поверхні Клейна на не більш ніж 9-ти вершинах, а в [6] наведено діаграми цих графів. Нехай 2-многовид S без країв (дірок) неорієнтованого роду $\bar{\gamma}(S)$ подано як поверхню S' орієнтованого роду $\gamma(S')$, де $\gamma(S') \geq 0$, $\bar{\gamma}(S) = 2\gamma(S') + r$, до якої приклеєно r лент Мебіуса, $r > 0$; наприклад, поверхня S є пляшкою Клейна коли $\gamma(S') = 0$ і $r = 2$, чи поверхня S роду $\bar{\gamma}(S) = 3$ матиме S' - тор із однією приклеєною лентою Мебіуса. Для заданого вкладення f , $f: G \rightarrow S$, графа G в S та заданої множини точок X , $X \subset G^0 \cup G^1$ визначимо $t_G(X, S, f)$, $t = t_G(X, S, f)$, число досяжно сті множини X відносно S , якщо існує підмножина $S_G(X)$, $S_G(X) = S \setminus f(G)$, $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$, що задовольняє умові: $(f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^t \partial s_i \cap X) \wedge (f(X) \not\subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^t \partial s_i \cap X)$, $j = 1, 2, \dots, t$. Будемо говорити, що множина X має число досяжності t , $t_G(X, S) = t$, відносно S , якщо серед всіх неізоморфних вкладень f , $f: G \rightarrow S$ число t є найменшим серед чисел $t_G(X, S, f)$. Вважатимемо надалі, що $\bar{\gamma}$ позначено через γ .

Визначення 1. Нехай задано вкладення f , $f: G \rightarrow S$, графа G в S , яке реалізує t , $t_G(X, S) = t$, де $S_G(X) = S \setminus f(G)$, $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$. Будемо говорити, що відносно заданої поверхні S множина X матиме характеристику $\theta_G(X, S, f)$, $\theta_G(X, S, f) = \theta$, $\theta \geq 1$, якщо існує θ трійок кліток $\{s_i\}_1^3$ з множини $S_G(X)$, на границях яких підмножини X_i , $X_i \subseteq X$, розміщуються довільним чином і задовольняють співвідношенню: $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\} \wedge G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\} \wedge G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$, та породжує найменший по включенню підграф G' графа G , (можливо вироджений в точку), який містить точки $\{a_i\}_1^3$ попарного перетину границь кліток $\{s_i\}_1^3$; Множина X матиме відносно S характеристику $\theta_G(X, S)$, якщо $\theta_G(X, S) = \max \theta_G(X, S, f)$, де максимум береться по всім неізоморфним вкладенням f , $f: G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X, S) = t$.

Визначення 2. Нехай задано вкладення f , $f: G \rightarrow S$, графа G в S , яке реалізує t , $t_G(X, S) = t$, де $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$, $S_G(X) = S \setminus f(G)$, та виконується рівність $\theta_G(X, S) = 0$. Будемо говорити, що відносно S множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta = \partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta \geq 1$, якщо існує підмножина $\{s_i, s_j, s_k\}$, множини $S_G(X)$, яка задовольняє співвідношенням: $G^1 \cap \partial s_i \cap \partial s_j \supseteq \{(a_1, b_1)\}$ і $G^1 \cap \partial s_k \cap \partial s_j \supseteq \{(a_2, b_2)\}$, для всіх $i \neq j \neq k$, $i, j, k = 1, 2, 3$. На границях $\{\partial s_i, \partial s_j, \partial s_k\}$ множина X розміщується довільним чином, якщо не містить точок ребер (a_1, b_1) , (a_2, b_2) та особливим чином (без точок множини X на $\partial s_j \setminus L(a_1, a_2) \cup \{(a_2, a_{20}), (a_1, a_{10})\}$), якщо містить принаймні точку цих ребер. Також існуватимуть клітка s_0 та, можливо, клітка s_{00} . Клітка s_0 , $s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$, границя якої містить простий ланцюг $L(a_1, a_2)$ ненульової довжини ні із кінцевими вершинами a_1, a_2 спільно із ∂s_j і два простих ланцюги, можливо вироджених в точку, $L_1(a_1, a_{12})$, $L_1(a_2, a_{22})$ спільними з ∂s_i та ∂s_k ,

відповідно, та ребро (a_{12}, a_{22}) . Клітка s_{00} , $s_{00} \in (S \setminus f(G)) \setminus (S_G(X) \cup \{s_0\})$, має границю яка містить простий ланцюг $L(a_{10}, a_{20})$ ненульової довжини із кінцевими вершинами a_{10}, a_{20} спільно із ∂s_j . Множина X матиме характеристику $\partial \theta_G(X, S)$, якщо $\partial \theta_G(X, S) = \max \partial \theta_G(X, S, f)$, де максимум по неізоморфним вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X, S) = t$ та $\theta_G(X, S)$.

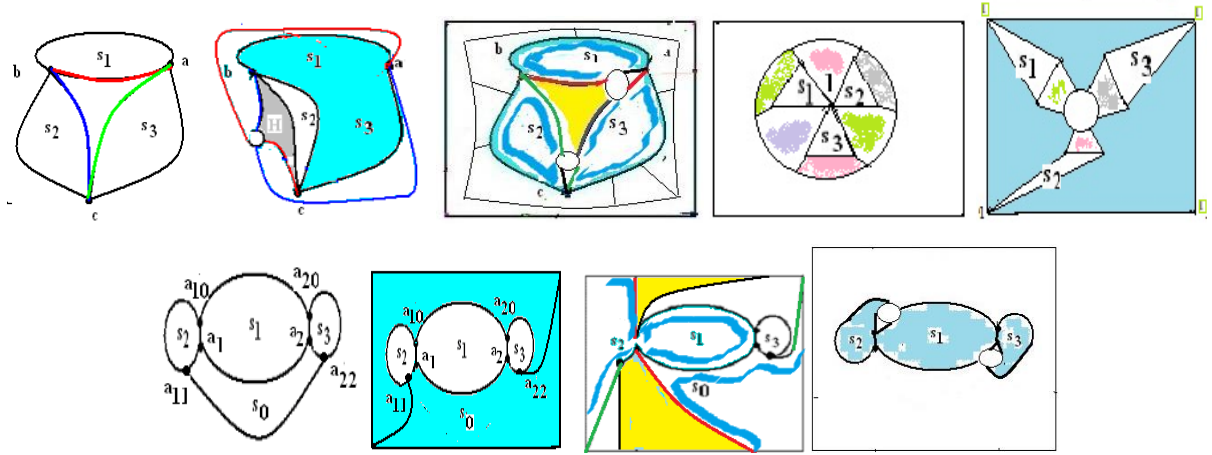


Рис. 1. В 1-му ряду на перших трьох картах циклічна кліткова структура, а інші ілюструють зіркову на проєктивній площині та плящі Клейна, на 2-му ряду перших трьох картах проілюстровано ланцюжкову кліткову структуру на проєктивній площині та плящі Клейна.

Визначення 3. Позначимо через $krt_G(M)$, $kr = krt_G(M)$, kr - кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G , як найбільшу кількість варіантів вибору різних підмножини $S_G(M, S_\gamma)$ множини клітин $S_\gamma \setminus f(G)$ на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M , узята по всіх мінімальних вкладеннях $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ . Іншими словами, це найбільша кількість зірок які приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr 2-кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Визначення 4. Позначимо через $ms_G(M, s, f)$, $k = ms_G(M, s, f)$, k - сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітки s , $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f - задане мінімальне вкладення $f: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M . Найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх клітин s заданого мінімального вкладення $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $ms_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G які приєднані кінцевими вершинами до кожного із принаймні трьох елементів множини M та вкладені до однієї клітки із множини $S_\gamma \setminus f(G)$ заданого мінімального вкладення $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ .

Визначення 5. Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), \dots, ms_G(M, f_N))$ вектором l -стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, $l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0$, $|M| > 2$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ - множина всіх

неізоморфних мінімальних вкладень $f_k, f_l : G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел $ms_G(M, f_k)$ узяті по всім s та всім $f_k, s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, називатимемо характеристикою l -стороннього доступу до множини M точок графа G та позначимо через $ms_G(M)$.

Твердження 1. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф, $G = K_6$, має на N_2 число досяжності множини вершин $t_G(K_6^0, N_2) = 2$ та не має вершини з подвійним доступом та кожне видалене ребро зменшує число $t_G(K_6^0, N_2)$;
2. Граф $G, G = K_5$, має на N_2 число досяжності множини вершин $t_G(G^0, N_2) = 1$ та дві вершини з двостороннім доступом, а граф $G, G = K_5 \setminus e$, має на N_2 три вершини з двостороннім доступом;
3. Граф $G, G = K_7$, має рід $\gamma(G) = 3$;
4. Граф $G, G = K_8 \setminus K_{1,2}$, має рід $\gamma(G) = 3$;
5. Граф $G, G = K_6 \setminus 2K_2$, має на N_2 число досяжності множини вершин $t_G(G^0, N_2) = 2$ та має вершину з подвійним доступом, а $G = K_6 \setminus 3K_2$ має на N_2 $t_G(G^0, N_2) = 2$ та має тільки одну вершину без подвійного доступу;
6. Множина вершин $K_{3,3}^0$ графа $K_{3,3}$ має кратний доступ і є досяжною відносно N_2 ;

Доведення проілюстровано на рис 2, де на перших двох картах зображено вкладення графа K_7 в N_3 , відповідно, побудовані як продовження вкладення f_6 графа K_6 в N_2 та вкладення f_5 графа K_5 в N_2 , причому синім кольором позначимо клітку з множини $N_2 \setminus f_5(K_5)$ на якій маємо подвійний доступ до вершин з під множин $\{4\}, \{1\}$. На четвертій карті зображено мінімальне вкладення графа $K_8 \setminus K_{1,2}$ в N_4 . На п'ятій карті зображено вкладення графа K_6 в N_2 яке реалізує число $t_G(G^0, N_2) = 2$ та видно зменшення цього числа при видаленні ребра (3,5).

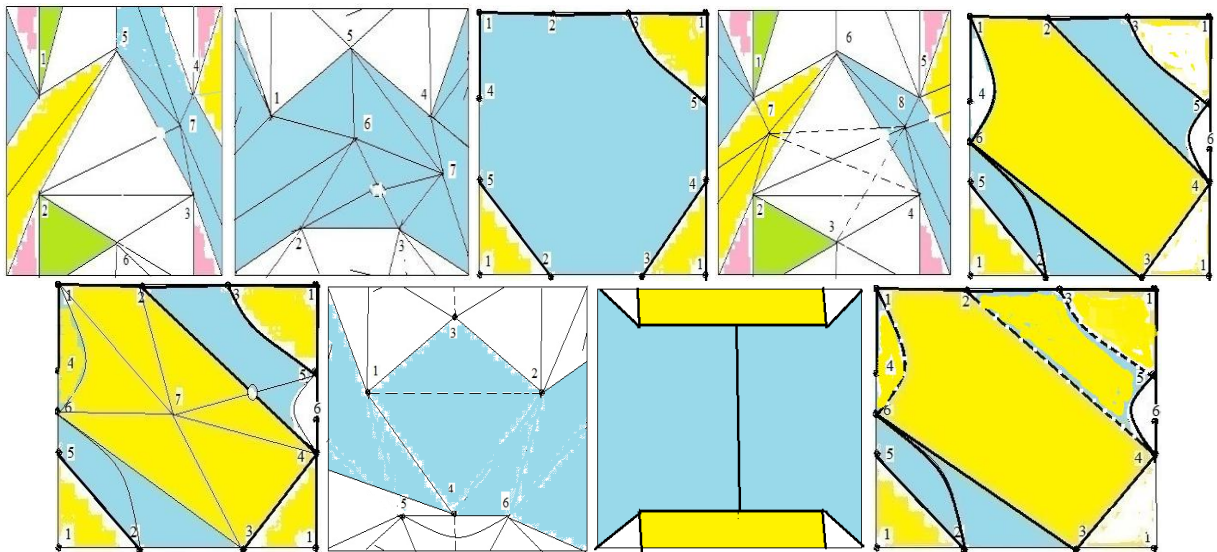


Рис. 2. На другій карті вершини 1,4 графа K_5 мають на N_2 двосторонній доступ, а на 3-й,5-й,6-й,8-й,9-й картах ребра позначені дугами та відрізками товстих ліній.

Твердження 2. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_1 , $\bar{G}_1 = K_8 \setminus 4K_2^1$, є φ -образом графа $K_7 \setminus 3K_2$ та зірки $St_6(v_7)$ з центром v_7 та 6-ти висячих ребер-променів, кінцеві вершини яких попарно приєднано до кожної верш -ини підграфа $K_7 \setminus 3K_2$, що утворюють множину з числом досяжності 2 відносно N_2 ;
2. Граф G_2 , $\bar{G}_2 = K_8 \setminus (K_4^1 \setminus K_{1,2}^1)$, є φ -образом графа $K_7 \setminus e$ та зірки $St_5(v_4)$ з центром v_4 та шістьма п'ятьма променями, кінцеві вершини яких попарно приєднано до кожної вершини підграфа K_5 , які утворюють множину з числом досяжності 1 відносно N_2 ;

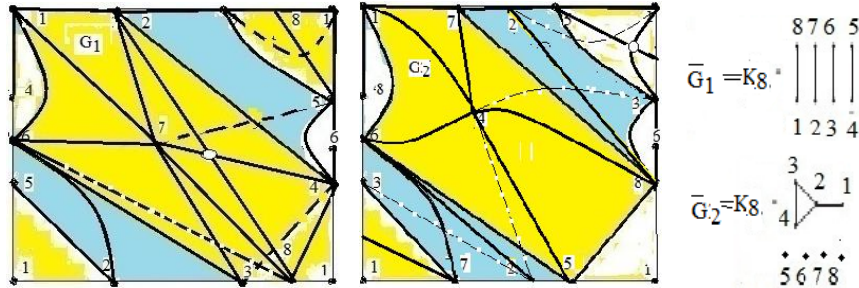
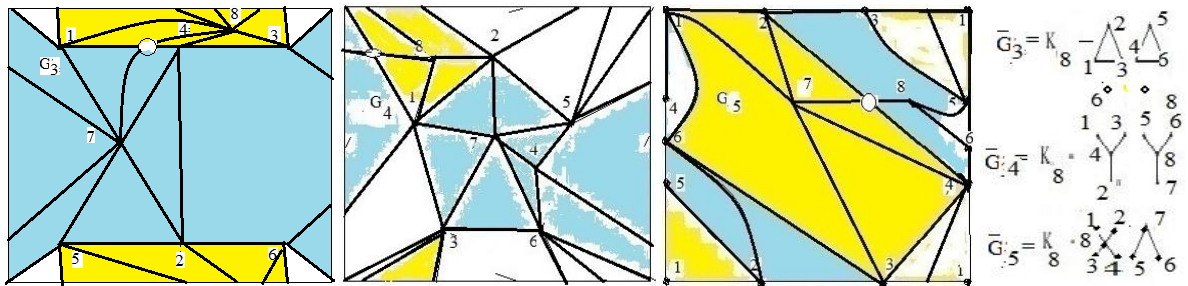


Рис. 3. На першій карті маємо вкладення графа G_1 в N_3 , а на другій карті графа G_2 в N_3 , де колом позначена лента Мебіуса, приклеєна до тора.

3. Граф G_3 , $\bar{G}_3 = K_8 \setminus 2K_3^1$, є φ -образом графа $K_{3,3}$ та квазізірки $St_{6,6}(K_2)$ з центром із ребра з вершинами v_7, v_8 , кожна з яких приєднана висячими ребрами до кожної вершини з множини $K_{3,3}^0$, яка має кратний доступ і є досяжною відносно N_2 ;
4. Граф G_4 , $\bar{G}_4 = K_8 \setminus 2St_{3,3}^1(K_2)$, є φ -образом графа K_6 та квазізірки $St_{3,3}(K_2)$ з центром із ребра з вершинами v_7, v_8 , кожна з яких приєднана висячими ребрами до кожної вершини з множини K_6^0 , які утворюють множину з числом досяжності 2 відносно N_2 ;
5. Граф G_5 , $\bar{G}_5 = K_8 \setminus (St_4^1(v_8) + St_2^1(v_7))$, є φ -образом графа K_6 та квазізірки $St_{3,4}(K_2)$ з центром із ребра з вершинами v_7, v_8, v_7, v_8 , кожна з яких приєднана висячими ребрами до кожної вершини з множини K_6^0 , які утворюють множину з числом досяжності 2 відносно N_2 .

Доведення. Схеми доведення тверджень 1,2,3,4,5 впливають з карт графів на рис. 3,4.



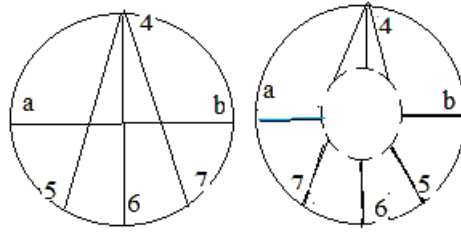


Рис. 4. На першій, другій та третій картах маємо вкладення графів G_3, G_4, G_5 в N_3 , другий ряд містить приклад підграфа K графа H з теореми 1, вкладеного до ленти Мебіуса.

Теорема 1. Кожен граф-обструкція H для N_2 - неорієнтованої поверхні рода 2 задовольняє наступним співвідношенням:

1. Довільне ребро $u, u = (a, b)$, розміщується на ленті Мебіуса деяким мінімальним вкладенням графа H в N_3 та існує локально проєктивно-площинний підграф K графа $H \setminus u$, який задовольняє умові: $(t_K(\{a, b\}, N_3) = 1) \wedge (t_{Ku}(\{a, b\}, N_2) = 2)$;
2. Існує найменша по включенню множина різних підграфів K_i 2-зв'язного графа H гомеоморфних $K + e$, де K - локально площинним підграфам графа $H \setminus e$ із доданим ребром e (принаймні $K + e \cong K_5$, чи $K + e \cong K_{3,3}$), що покриває множину ребер графа H .

Доведення. Доведемо співвідношення 1. Нехай $u, u = (a, b)$, довільне ребро графа-обструкції H для неорієнтованої поверхні N_2 рода 2 та мінімальне вкладення $f, f: H - u \rightarrow N_2$, яке розташовує кінцеві вершини ребра $u = (a, b)$ на границях двох кліток $s_1, s_2, s_i \in S_H(N_2, f), S_H(N_2, f) = N_2 \setminus f(H)$, де $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$. Оскільки $\chi(H) > 1$, то існуватиме підграф графа-обструкції H для N_2 гомеоморфний або K_5 , або $K_{3,3}$, який вкладенням f розміщується на проєктивній площині із однією приклеєною лентою Мебіуса так, що всі його вершини виходитимуть на границю однієї клітки, причому деякі з подвійним доступом. Ребро $u = (a, b)$ на проєктивній площині схрещене із принаймні одним ребром $u', u' \neq u$, та будуть розміщені на ленті Мебіуса разом з u , як показано на рис 4. Відмітимо, що $s_1 \neq s_2$, тобто матимемо рівняння $t_{Hu}(\{a, b\}, N_2) = 2$, бо у разі однієї клітки $s_1 = s_2$ було б можливо продовжити вкладення шляхом розміщення ребра $f(u)$ в середину клітки s_1 , що суперечить визначенню граф-обструкції для неорієнтованої поверхні N_2 рода 2. Тоді існуватиме найменший по включенню локально площинний на неорієнтованої поверхні N_2 підграф K графа $H \setminus u$, який містить всі вершини, що виходять на границі кліток $\partial s_1 \cup \partial s_2$, тобто задовольняє рівності $t_{Hu}(\{a, b\}, N_2) = 2$. Довизначивши вкладення f шляхом додавання відрізка $[a, b]$ до 2-зв'язного підграфа $f(K)$, матимемо перетин принаймні одного ребра $f(u')$ з $[a, b]$. Приклеїмо до N_2 ленту Мебіуса в місці перетину ребер $f(u')$, та перевизначимо вкладення $f: H - u \rightarrow N_2$ шляхом розведення на ленті Мебіуса ребра $f(u')$ з ребром $f(u)$. Тим самим отримаємо мінімальне вкладення $f', f': H \rightarrow N_3$, яке розташовує кінцеві вершини ребра $u = (a, b)$ на границі однієї клітки, та рівність $t_H(\{a, b\}, N_3) = 1$. Доведення співвідношення 1. закінчене.

Доведемо співвідношення 2 використовуючи наведені вище позначення для виділення локально площинних підграфів K_i графа $H \setminus u$, який задовольняє умові: $(t_{K_i}(\{a, b\}, N_3) = 1) \wedge (t_{K_i u}(\{a, b\}, N_2) = 2)$.

Розглянемо всі можливі випадки для графа $H \setminus u$:

- 1). Існує простий цикл $f(z)$ графа $H \setminus u$, $u = (a, b)$, який містить вершини $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$;
- 2). Не існує простого циклу $f(z)$ графа $H \setminus u$, який містив би вершини $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$;

Випадок 1). Циклом $f(z)$ буде простий цикл, який містить принаймні ребра з кінцеви ми вершинами $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$ та входить до об'єднання границь тих кліток чи псевдокліток $s_i, s_i \in N_2 \setminus f(H)$, $i = 1, 2, \dots, n$, що утворюють ланцюжок з початком в s_1 та кінцем в $s_n, s_n = s_2$, а кожна наступна клітка ланцюжка матиме принаймні одне спільне ребро із попередньою кліткою цього ланцюжка. У виродженому випадку цей ланцюжок кліток складатиметься тільки з двох трикутних кліток чи псевдокліток s_1, s_2 . В графа $H \setminus u$ має існувати найменший по включенню локально площинний підграф K , який задовольняє умові: $(t_K(\{a, b\}, N_3) = 1) \wedge (t_{K u}(\{a, b\}, N_2) = 2)$, бо інакше порушуватиметься умова про H як граф-обструкцію. Тобто мають бути, або три ланцюги ненульової довжини, що належать границям кліток ланцюжка і мають спільну кінцеву вершину, або два зхрещених на площині діагональ них відносно $f(z)$ ланцюги L_1, L_2 ненульової довжини, (один з них належатиме до границь кліток ланцюжка, а інший не матиме спільних ребер із границею жодної клітки ланцюжка), які парами своїх кінцевих вершин розділятимуть один одного та пару вершини a, b на $f(z)$. Тоді локально площинний підграф K матиме вигляд $f(z) \cup L_1 \cup L_2$ тобто $f(K) \cong K_4$, та задовольнятиме умові: $t_{K u}(\{a, b\}, N_2) = 2$ для довільного ребра $u = (a, b)$. У випадку коли вершини a, b є внутрішніми точками несуміжних ребер графа K , то граф $K + (a, b) \cong K_{3,3}$.

Випадок 2). Нехай не існує простого циклу $f(z)$ графа $H \setminus u$, який містив би вершини $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$. Це означатиме що, видалене ребро $u = (a, b)$ розірвало той простий цикл z' графа H , що за умови 2-зв'язності графа H проходив через вершини a, b . Тоді має бути 2-зв'язний підграф H' графа $H \setminus u$ який має вершину a та простий ланцюг L' , який задовольнятиме умові $H' \cup L' \cup u \supseteq z'$. Для 2-зв'язного підграфа H' виконуватиме -тсья наведений вище випадок 1). Доведення для випадку 2) закінчене. Таким чином для кожного ребра u графа 2-зв'язного графа H є підграф $K_i, K_i = K(u) + u$, де локально площинний підграф $K(u)$ із доданим ребром u (принаймні $K + e \cong K_5$, чи $K + e \cong K_{3,3}$). Тоді об'єднання всіх таких K_i покриває множину ребер графа H . Доведення співвідношення 2 закінчене. Доведення теореми закінчене.

Наслідок 1. Граф-обструкція H для неорієнтованої поверхні рода $2 \in \varphi$ - образом двох квазізірок $St_{n_1, n_2, \dots, n_{k_1}}(H_1), St_{m_1, m_2, \dots, m_{k_2}}(H_2)$ з центрами - підграфами $H_i, k_i = |H_i|, i \neq j, i, j = 1, 2$, де квазізірка може не мати висячих ребер; у висячих ребер кожна l -та висяча вершина інцидентна nl висячим вершинам тих ребер, що приєднуються кінцевими вершинами до ml' вершин підграфа H_j , де $l = 1, 2, \dots, k_1, l' = 1, 2, \dots, k_2, i \neq j, i, j = 1, 2$, саме ці кінцеві вершини утворюють множину точок приєднання з числом досяжності 2 відносно N_2 та мають наступні властивості для 2-зв'язного H :

- а). для кожна вершина центру H_i з підмножини точок приєднання приєднана, або висячим ребром до однієї вершини підграфа H_j , або двома висячими ребрами до кожної з кінцевих вершин деякого

ребра підграфа H_j , або трьома висячими ребрами до кожної вершини підграфа K_3 графа H_j , де $i \neq j, i, j = 1, 2$;

б). кожне ребро підграфа H_i чи H_j є суттєвим при операції його видалення,

або відносно неорієнтованого роду $\gamma(H_i)$ чи $\gamma(H_j)$, де $i \neq j, i, j = 1, 2$,

або відносно числа досяжності $t_{H_i}(X_{ij}, N_2)$, множини точок приєднання X_{ij} , $X_{ij} = X(H_i, H_j)$, квазізірки $St_{n_1, n_2, \dots, n_{k_1}}(H_1)$ до графа H_j , де $i \neq j, i, j = 1, 2$,

або відносно числа багатосторонності $ms_{H_i}(X_{ij}, N_2)$, множини точок приєднання X_{ij} , $X_{ij} = X(H_i, H_j)$, квазізірки $St_{n_1, n_2, \dots, n_{k_1}}(H_1)$ до графа H_j , де $i \neq j, i, j = 1, 2$.

Література

8. Хоменко М. П. φ -перетворення графів. препринт ИМ АНУ, Киев, 1973, 383 с.
2. Хоменко Н. П. Топологические аспекты теории графов. препринт ИМ АНУ, Киев, 1970.
3. Хоменко Н. П. Островерхий Е. Б. Существенные элементы и род графа. препринт "Минимальные вложения графов" ИМ АНУ, Киев, 1972, 62 с.
4. Cashy J., Irreducible graphs for the Klein bottle, Ohio State University Ph.D. Thesis, 2000.
5. Mohar B., Thomassen C., Graphs on Surfaces, Johns Hopkins University Press, 2001.
6. Suhkjin Hur. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10, Phd, Ohio State University, 2008.
7. Петренюк В.І., Петренюк Д.А., Нова верхня межа неорієнтованого роду простого графа./Питання оптимізації обчислень ІК НАНУ, Київ, 2019.

3.3. СТРУКТУРА НЕПРОЕКТИВНИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ

Задача полягатиме у поданні графів-обструкцій проєктивної площини, тобто графів неорієнтовного роду 2, у яких кожне ребро є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, як результату φ -перетворення по підмножинам множин точок (точок приєднання із заданими характеристиками – числом досяжності та двостороннім доступом) графу гомеоморфного K_5 чи $K_{3,3}$ (можливо без ребра чи вершини) та квазізірки Y із центральним графом M гомеоморфним або K_4 чи $K_{2,3}$ та можливим стисканням в точку деяких висячих ребер множини $Y^1 \setminus M^1$). Основний результат - теорема про подання довільної граф-обструкції неорієнтовного роду 2 як φ -образу двох зв'язних графів X, Y , які задовольняють одному з наступних випадків:

0) графи X, Y гомеоморфні K_5 чи $K_{3,3}$, і їхні множини точок приєднання мають число досяжності 1,

1) графи-квазізірки X, Y із центрами гомеоморфними K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо висячими ребрами, і множинами точок приєднання з числом досяжності 2,

2) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ та вкладений до проєктивної площини Σ , а інший граф X є площинним 2-мінімальним відносно множини точок приєднання до графа Y на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із нульовими характеристиками θ та $\partial\theta$ для множини точок приєднання до графа Y ,

3) графи X, Y є вкладеними до проєктивної площини графами-квазізірками з центром $K_5 \setminus e$ чи $K_{3,3} \setminus e$, можливо з висячими ребрами, і множиною точок приєднання графа X до графа Y із числом досяжності 2 та множини точок приєднання графа Y , що належать двом різним простим циклам.

Вступ. Основні позначення взяті із [1], [2]. Нехай G неорієнтований скінчений граф без петель і кратних ребер ейлерового роду $\gamma(G)$, а S - замкнутий 2-многовид роду $\gamma(S)$, де $\gamma(G) = \gamma(S) + 1$. Якщо поверхня орієнтована, то позначатимемо її через σ , а якщо це неорієнтована поверхня, то через Σ . Визначення 1,2 із [3],[4], відповідно.

Визначення 1. Граф G називається таким, що неприводиться над S , або $\gamma(G)$ -неприведеним (irreducible) для S , якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх $\gamma(G)$ -неприведених над S графів позначимо через $\zeta(S)$ та назвемо множиною перешкод (obstructions) для графів, що мають укладатися на заданій поверхні S .

Визначення 2. Граф G мінімальний (мінор) над S , якщо для будь-якого графа G' , отриманого з графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G') \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх графів мінімальних над S позначимо через Γ_S .

Множина всіх графів, що неприводяться над S містить Γ_S характеризує множину всіх графів рід яких не менше $\gamma(S) + 1$. Якщо $S = \sigma_0$ евклідова площина, то $\Gamma_S = \{K_5, K_{3,3}\}$. Якщо S проєктивна площина, то Γ_S складається із 103-х графів, діаграми яких наведені в [5], де повнота списку є доведена, а в [6] вони зображені інакше.

Розглянемо **задачу** вивчення структурних властивостей двозв'язних графів-обструкцій та двозв'язних мінорів для проєктивної площини, поданих як φ -образи деякого простого графа та квазізірки, із подальшим використанням при побудові графів-обструкцій для довільної неорієнтованої поверхні. Наведемо короткий огляд результатів робіт, пов'язаних із цією задачею. Для проєктивної площини S були наступні два напрямки робіт пов'язаних з графами, що неприводяться над S . Один з них – “метод релятивних компонент” був заснований Вагнером (Wagner K.), який визначив мінімальний базис для множини скінчених графів, що не можуть бути вкладеними до S і застосував для опису мінімальних графів над проєктивною площиною. Разом з Бодендіеком (Bodendiek R.) були

продовжені дослідження і знайдені мінімальні графи над тором, зокрема мінімальний базис з 12 графів для множини всіх скінчених графів-обструкцій проективної площини був побудований шляхом чотирьох спеціальних перетворень [7] множин вершин і ребер графів та наведений в [8], де вони описані разом із методом релятивних компонент, яким отримано клас графів-обструкцій для пляшки Клейна.

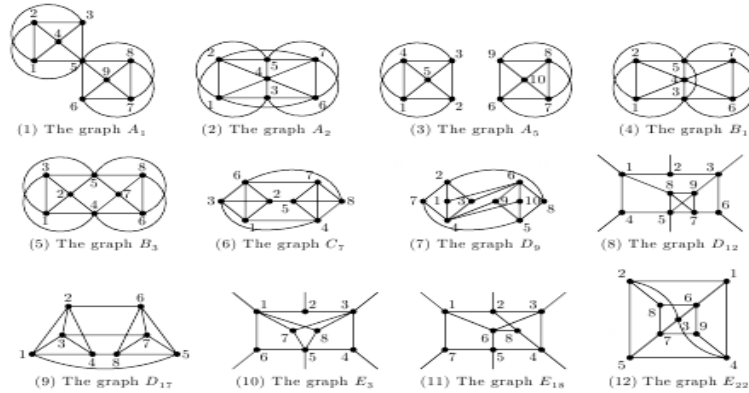


Рис. 1. Мінімальний базис множини мінорів проективної площини [8].

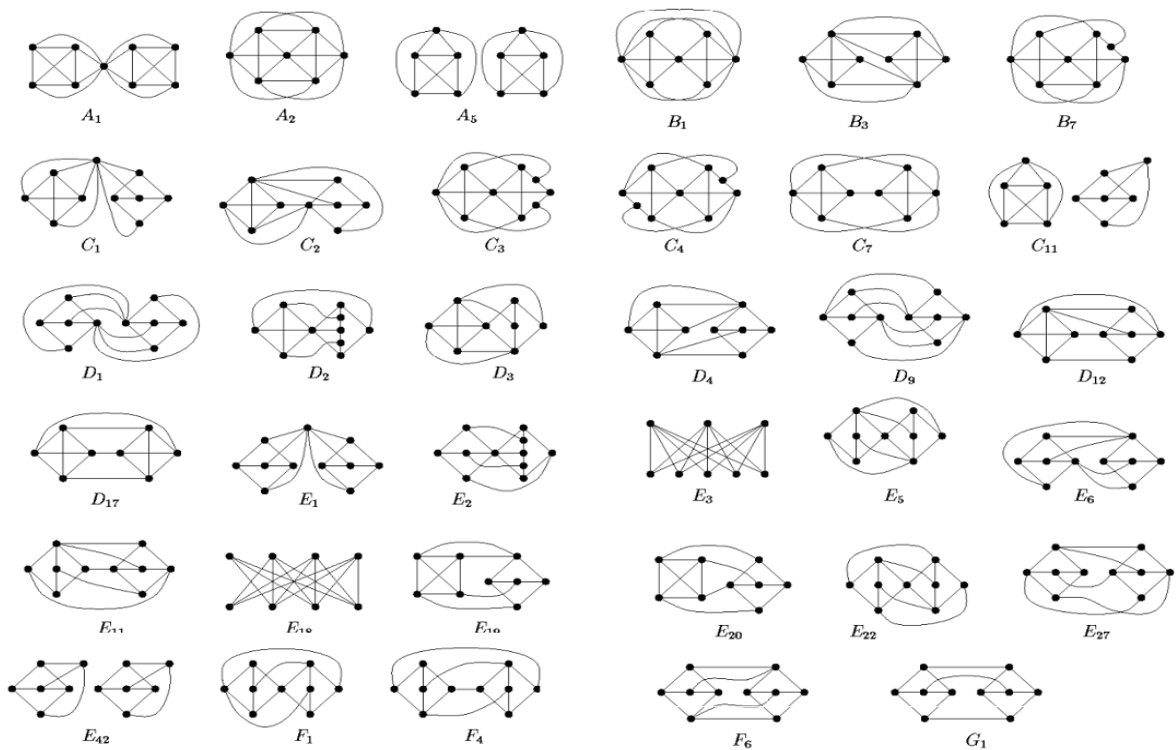


Рис. 2. Множина з 35-ти мінорів проективної площини.

Інший напрям в роботах Гловера, Ханеке та Ванга (Glover H., Huneke J. P., Wang C). Ними були вписані графи, що неприводяться над проективною площиною. В [3] поданий огляд результатів і було доведено, що є скінчена множина графів, які неприводяться над проективною площиною. Список із 103 таких графів був побудований в [4], де було виказано припущення, щодо повноти списку. В [5]

представлений план доведення того, що вказаний список є повним, а в дисертації цього автора наведено доведення повноти та він стверджує, що ним побудовано 5 графів, з яких виходять інші в результаті операції розщеплювання вершин чи видалення ребер графів. В [9] наведені структурні властивості кожного мінора (мінімального простого графа) G проєктивної площини, поданого як ϕ -образи деякого простого графа G' та простої зірки $St_G(v)$. В [14], [15] досліджувалися властивості графів мінімального базису проєктивної площини. По-іншому виглядатиме структура графа-обструкції роду g , якщо довести гіпотезу про належність його довільного ребра до об'єднання g штук підграфів чи частини, гомеоморфних K_5 чи $K_{3,3}$. В [13] підтверджено цю гіпотезу для графів неорієнтованого роду з числом вершин не більше 10, а в [16] авторитетно сказано про її справедливість для кубічних графів.

Визначимо, згідно [1], число досяжності заданої множини точок X як найменшу кількість кліток (компонент) s_i із множини компонент $S \setminus f(G)$ на границях ∂s_i , які з комбінаторної точки зору є маршрутами виду $\partial s_i \cap (G^0 \cup G^1)$ та на яких розміщено образ $f(X)$ множини X , де f - мінімальне вкладення графа G до S , а під точкою графа розумітимемо або вершину, або внутрішню точку ребра графа G . Псевдоклітку називатимемо проєктивною 2-кліткою, якщо її границя, як замкнутий ланцюг, не містить однакових вершин, інакше називатимемо проєктивною недвокліткою. Про досяжну множину точок X будемо говорити, якщо вона розміщується на границі деякої клітки s , $s \in S \setminus f(G)$. Якщо такої клітини s , $s \in S \setminus f(G)$, не існує, але є на множині кліток з розбитої вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, проєктивної площини S мінімальна по включенню підмножина з k псевдокліток (граней графа G) $s'_i, i=1..k, k \geq 0$, кожна з границь $\partial s'_i$ яких містить принаймні один

елемент із $X \setminus X \cap \bigcup_{j=1, j \neq i}^k \partial s'_j$, то матимемо проєктивну досяжність $t_S(X)$, де $t_S(X)=k$, для вказаної

множини X . Узагальнене число досяжності $t_G(X, S)$ підмножини X множини точок графа G на поверхні S роду γ , $\gamma \geq \gamma(G)$, є найменшою кількістю кліток з підмножини Δ множини $S \setminus f(G)$, де S поверхня роду γ , а $f, f: G \rightarrow S$, вкладення при якому елементи $f(X)$ розташовуються на границях кліток із підмножини Δ . Таке узагальнене число досяжності $t_G(X, S)$ потрібне для оцінки роду ϕ -образу деякого графа та простої зірки у випадку заміни зірки на квазізірку, доповнимо визначеннями, які враховують наявність на границі недвоклітки кількох копій вказаної множини точок X графа G .

Визначення 3. Позначимо через $krt_G(M)$, $kr = krt_G(M)$, kr - кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G , як найбільшу кількість різних кліток з підмножини $S_G(M, S_\gamma)$ множини клітин $S_\gamma \setminus f(G)$ на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M , узяті по всіх мінімальних вкладеннях $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ . Іншими словами, це найбільша кількість зірок які приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr 2-кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Визначення 4. Позначимо через $ms_G(M, s, f)$, $k = ms_G(M, s, f)$, k - сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої клітини \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітини s , $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f - задане мінімальне вкладення $f: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M , а найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх клітин s заданого мінімального вкладення $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $ms_G(M, f)$. Іншими

словами, це найбільша кількість зірок графа G приєднаних кінцевими вершинами до кожного з, принаймні трьох, елементів множини M та вкладені без перетину ребер у внутрішніх точках до однієї клітини s , $s \in S_\gamma \setminus f(G)$, із цикломатичним числом $p_1(\partial s)$, де $p_1(\partial s) \geq k$, та заданим мінімальним вкладенням f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ .

Визначення 5. Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), \dots, ms_G(M, f_N))$ вектором l -стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої клітини \bar{s} , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, $l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0$, $|M| > 2$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ -множина всіх неізоморфних мінімальних вкладень f_k , $f_k: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел $ms_G(M, f_k)$ узяті по всім s та всім f_k , називатимемо l -стороннім доступом до заданої множини точок M графа G . **Позначення 1.** Під квазізіркою $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ з центром графом G_1 будемо розуміти об'єднання графа G_1 , $G_1 = (\{v_i\}_{i=1}^3)$, та трьох зірок $St_{n_i}(v_i)$ із висячими вершинами $\{g_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ і ребрами в кількості n_i , але без спільних ребер та із центральними вершинами v_i , що породжують підграф G_1 графа G .

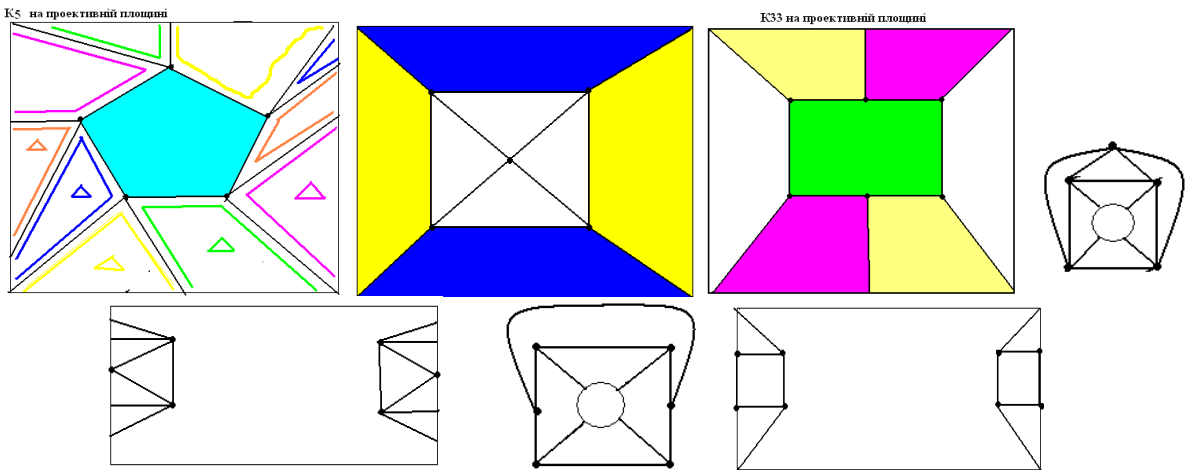


Рис.2.1. Вкладення графів K_5 , $K_{3,3}$ до проективної площини та ленти Мебіуса (нижній ряд), приклеєної до евклідової площини.

Лема 1. Нехай заданий граф G неорієнтованого роду 1 має досягну на S_1 множини точок M , $M = \{i^l\}_{i=1}^k$, $k > 1$, із l -стороннім доступом до M , $l > 1$, яка на евклідовій площині S_0 має число досяжності 2, та задано квазізірку $St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)$ із центром G_1 - площинним зв'язним графом, $G_1^0 = V \cup \{v_i\}_{i=1}^k$, із підмножиною точок $\{v_i\}_{i=1}^k$, що має число досяжності t , $t = t_{G_1}(\{v_i\}_{i=1}^k) = 2$, та k зірками $St_{n_i}(v_i)$ із висячими вершинами i'' з множини $\{i''\}_{j=1}^{n_i}$, $p \geq k$, що можуть бути спільними для кількох зірок $St_{n_i}(v_i)$, $St_{n_j}(v_j)$, $l \neq j$ як підграфів квазізірки, і висячими ребрами в кількості $\sum_{j=1}^k n_j$, $n_j \geq 1$. Задамо ϕ -перетворення графів G і $St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)$ на граф \mathfrak{Z} , наступним чином:

$$\phi(G + St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)) \rightarrow (\mathfrak{Z}, \{i^l\}_{i=1}^k).$$

Якщо має місце нерівність $l \geq k \geq 2$, то $\gamma(\mathfrak{Z}) \leq 2$, інакше $\gamma(\mathfrak{Z}) \leq k - l + 1$, де $\gamma(\mathfrak{Z})$ - неорієнтовний рід.

Доведення. Нехай виконуються умови леми 1. Тоді граф G є або площинним, або містить підграф чи частину гомеоморфну K_5 чи $K_{3,3}$; вкладення його до проєктивної площини визначають множину кліток в які має вкладатися решта ребер графа \mathfrak{Z} . Розіб'ємо граф \mathfrak{Z} на два підграфи G та $St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)$ шляхом розщеплення кожної точки i з множини $M = \{i\}_{i=1}^k$ на дві точки i', i'' до яких на загал приєднані тіж ребра, що й до точки i . Ототодження висячих вершин i' з i'' , де $M' = \{i'\}_{i=1}^k$, $M'' = \{i''\}_{i=1}^k$, не залежить від їхньої нумерації. Доведемо нерівність $\gamma(\mathfrak{Z}) \geq 1$. Якщо припустити, що граф G площинний та $\gamma(\mathfrak{Z}) = 1$, то тоді довільне мінімальне вкладення f квазізірки $St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)$ в проєктивну площину має бути таким, що $\{\{i''\}_{j=1}^{n_i}\}_{i=1}^k$ - множина точок приєднання розміщуватиметься на границі деякої клітки g . Розширення цього f на граф G вкладатиме його в середину клітки g , бо множина M складена з його точок приєднання має бути досяжною на проєктивній площині. Тоді g має бути недвокліткою, бо множина M матиме на клітині g досяжність 1, тобто є двокліткою з приклеєною мебіусовою лентою на якій вкладено один із підграфів чи частин гомеоморфних K_5 чи $K_{3,3}$. Отримаємо протиріччя умові про рід графа G . Припущення невірне, тобто якщо граф G площинний та має місце нерівність $l \geq k \geq 2$, то $\gamma(\mathfrak{Z}) = 1$.

Нехай має місце нерівність $l \geq k$. Згідно визначення l -стороннього доступу до заданої множини M точок графа G із числом досяжності 1 існуватиме таке мінімальне вкладення $f, f: G \rightarrow S_1$, що визначатиме l різних шляхів доступу до кожної точки M із довільної внутрішньої точки замкнутої клітини \bar{s} , $s \in S_1 \setminus f(G)$, де $l > 1, |M| \geq 2$. Вкладемо площинний граф G_1 до внутрішньої двоклітки s_1 замкнутої клітки \bar{s} за допомогою мінімального вкладення $f_1, f_1: G_1 \rightarrow s_1$, яке реалізує число досяжності $t, t = t_{G_1}(\{v_i\}_{i=1}^k)$, $t = 2$, так, що матиме місце включення $f_1(\{v_i\}_{i=1}^k) \subseteq G_1^0 \cap (\partial s_1' \cup \partial s_2')$, де $s_1', s_2' \in s_1 \setminus f_1(G_1)$. Покладемо, що s_2' є зовнішньою гранню, а s_1' є внутрішньою гранню. Згідно [16] граф G_1 містить множину точок $\{v_i\}_{i=1}^k$ розміщену на підграфі гомеоморфному одному з наступних графів: $K_{2,3}, K_4, K_4^* = K_{3,3} \setminus e, K_5 \setminus e, (K_5 \setminus e)^*, (K_5 \setminus e)^{**}$. Ототожнимо із збереженням напрямку дві різнонаправлені стрілки $r_i, r_i \subset \bar{s}_i \setminus \partial s_i', i = 1, 2$. Отримаємо перетворену множину $s_1 \setminus f_1(G_1)$ в якій замість s_1', s_2' є недвоклітка r на границі якої розміщуватиметься вся множина точок $f_1(\{v_i\}_{i=1}^k)$. Продовжимо вкладення f_1 на множину висячих ребер $\sum_{j=1}^k n_j$ і висячих вершин зірки $St_{n_i}(v_i)$, де $i = 1, 2, \dots, k$, розмістивши їх на s з приклеєною лентою Мебіуса без перетину у внутрішніх точках по різних l шляхам, де $l \geq k, l$ -стороннього доступу до заданої множини M точок графа G із числом досяжності 1, що реалізується на границі клітки s вкладенням $f: G \rightarrow S_1$. Принаймні одне висяче ребро деякої зірки $St_{n_i}(v_i), v_i \in \partial s_1' \setminus (\partial s_2' \cap f_1(\{v_i\}_{i=1}^k))$, вкладатиметься продовженим вкладенням f_1 на недвоклітці r , т.то приклеєній ленті до S_1 . Ототожнивши кожну кінцеву вершину висячого ребра з множини $\sum_{i=1}^k \{i''\}_{j=1}^{n_j}$ із відповідною точкою множини $M, M = \{i'\}_{i=1}^k$ точок графа G , як це задано ф-перетворенням графів G і $St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)$ на граф \mathfrak{Z} , отримаємо вкладення $f + f_1, f + f_1: G + St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1) \rightarrow S_2$, де f_1 - продовжене вкладення. Отримаємо нерівність $\gamma(\mathfrak{Z}) \leq 2$. Це означатиме, що $\gamma(\mathfrak{Z}) = 2$.

Нехай має місце нерівність $l < k$ для графа G , що містить чи не містить підграф чи частину гомеоморфну K_5 чи $K_{3,3}$. Аналогічно до наведеного вище виконаємо побудову продовженого вкладення f_1 стосовно висячих ребер тих зірок $St_{n_i}(v_i)$, для яких $i \leq l$. Всі інші зірки $St_{n_i}(v_i)$, де $l < i \leq k$, потребуватимуть для розміщення своїх висячих ребер по одній ленті Мебіуса приклеєної одним кінцем до s'_1 чи s'_2 , а іншим до клітки, яка забезпечує l -сторонній доступ до множини точок M .

Ототоживши кожную кінцеву вершину висячого ребра з множини $\sum_{i=1}^p \{i''\}_{j=1}^{n_j}$ із відповідною точкою множини M , $M = \{i''\}_{i=1}^k$ точок графа G , як це задано ϕ -перетворенням графів G і $St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)$ на граф \mathfrak{Z} , отримаємо вкладення $f + f_1, f + f_1: G + St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1) \rightarrow S_{k-l+1}$, де f_1 - про довжене вкладення. Оскільки граф G неорієнтованого роду 1, то для неорієнтованого роду $\gamma(\mathfrak{Z})$ графа \mathfrak{Z} маємо нерівність $\gamma(\mathfrak{Z}) \leq k - l + 1$. Доведення леми 1 закінчене.

Позначення 2. Будемо називати трикутним променем квазізірки $St_n(G_1)$ з центром-графом G_1 її підграф K_3 утворений з одного ребра графа G_1 та двох суміжних йому ребер із множини $St_n^1(G_1) \setminus G_1^1$ зі спільною вершиною степеня 2. Відмітимо, що такий трикутний промінь символізує приєднання довільної точки ребра як основи трикутника до його третьої вершини.

Лема 2. Нехай граф G має неорієнтований рід 1 та має досягну на проективній площині множини точок до якої приєднано квазізірку $St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)$ з центром G_1 - площинним зв'язним графом, $G_1^0 = V \cup \{v_i\}_{i=1}^k$, із підмножиною точок $\{v_i\}_{i=1}^k$, що має число досяжності $t, t = t_{G_1}(\{v_i\}_{i=1}^k) = 2$, граф G_1 має k ребер до кожного з яких приєднано n_k трикутних ребер з $\{\{i''\}_{j=1}^{n_j}\}_{i=1}^p, k > 2$, та k зірками $St_{n_i}(v_i)$ із висячими вершинами i'' з множини $\{\{i''\}_{j=1}^{n_j}\}_{i=1}^p, p \geq k$, що можуть бути спільними для кількох зірок $St_{n_i}(v_i), St_{n_j}(v_j), l \neq j$, як підграфів квазізірки. Задамо ϕ -перетворення графів G і $St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)$ на граф \mathfrak{Z} , наступним чином: $\phi(G + St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1), \sum_{i=1}^k (i'' + \{i''\}_{j=1}^{n_j})) \rightarrow (\mathfrak{Z}, \{i\}_{i=1}^k)$.

Якщо $k = 3$, то $\gamma(\mathfrak{Z}) \leq 2$, а якщо $k = 3l$, то $\gamma(\mathfrak{Z}) \leq 2l$, де $\gamma(\mathfrak{Z})$ - неорієнтований рід.

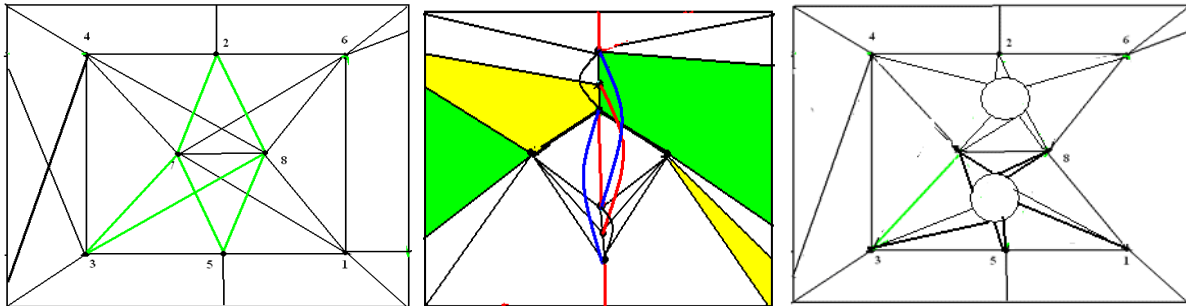


Рис.01. Вкладення графа $K_8 \setminus 2K_3^1$ в N_3 - неорієнтовану поверхню роду 3.

Твердження 1. Для проективної площини S мають місце наступні співвідношення:

- 1) Множина F_S всіх мінорів (мінімальних графів) над проективною площиною S складається із 35 графів на рис.2. 2) $F_S \cap F_{\Omega_1} \cong \{A_1, A_5, C_1, C_{11}, E_1, E_{42}\}$, де F_{Ω_1} множина всіх мінімальних графів над тором Ω_1 , частково наведена в [13].

Твердження 2. Для проєктивної площини S мають місце наступні властивості:

- 1) Граф $K_{2,3}$ вкладається трикомпонентно (три псевдоклітки) до проєктивної площини S , має множину всіх точок з числом досяжності 2 та має двосторонній доступ до множини вершин;
- 2) Граф K_4 вкладається трикомпонентно до проєктивної площини S , має досяжною множину всіх вершин, має множину всіх точок з числом досяжності 2 та має двосторонній доступ до множини вершин, яка має кратність доступу 3;
- 3) Граф $K_{3,3}$ вкладається чотирикомпонентно (2-клітка та три псевдоклітки) до проєктивної площини S та має досяжною множину всіх вершин, а множина всіх точок має число досяжності 3, причому жодна пара точок не має числа досяжності 2;
- 4) Граф K_5 вкладається шестикомпонентно (2-клітка та 5 псевдокліток) до проєктивної площини S та має досяжною множину всіх вершин, а множина всіх точок має число досяжності 4, причому жодна пара точок не має числа досяжності 2.

Доведення твердження 2 впливатиме з вкладень в проєктивну площину графів K_5 , $K_{3,3}$, K_4 , $K_{2,3}$, наведених на рис.3, де вкладення в проєктивну площину (зліва направо) наступних графів: K_5 на чотирьох перших різних за кількістю 2-кліток та єдине для $K_{3,3}$, а K_4 на першому, другому, третьому в середньому ряду, потім наведено вкладення $K_{2,3}$. Останні два вкладення графів K_5 та $K_{3,3}$ до пляшки Клейна, відповідно.

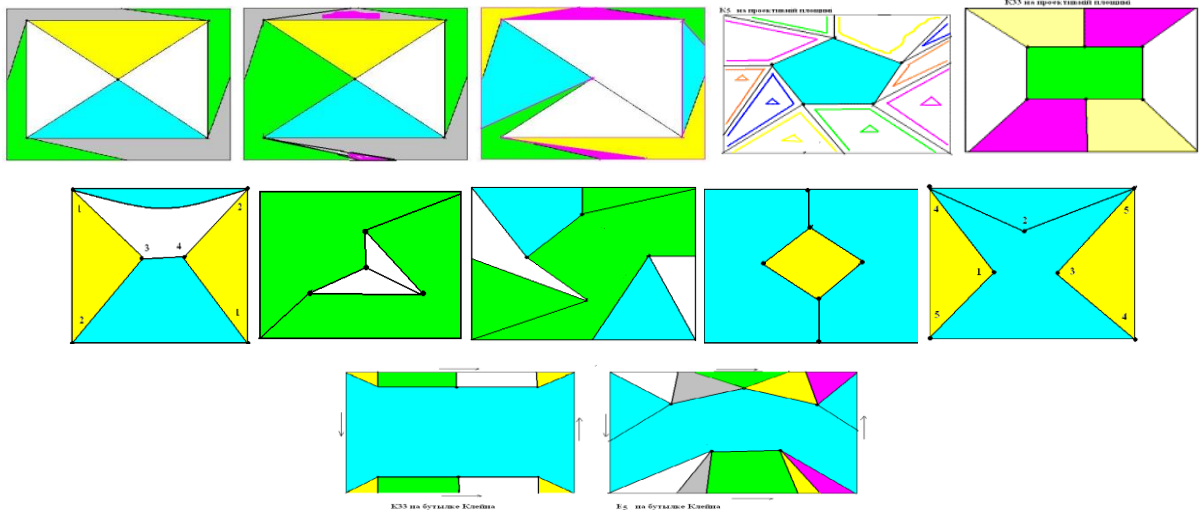


Рис 3. До співвідношень твердження 2.

Твердження 3. Для графів A_2 , B_1 , B_3 , C_7 , D_8 , D_{12} мінімального базису проєктивної площини P маємо φ -перетворення задані наступними співвідношеннями (за умови видалення одного з двох кратних ребер, які можливі у графі- φ -образі):

- 1) $\varphi(K_5 - (2', 4') + St_M(K_5 - (2'', 4'')), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (A_2, \{i\}_{i=1}^5)$, де $St_M(K_5 - (2'', 4''))$ є квазізіркою з центром-графом $K_5 - (2'', 4'')$ та двома висячими ребрами $(1'', 6)$, $(5'', 7)$, $M = \{1'', 5''\}$, як це показано на рис. 3.1;

- 2) $\varphi(K_5 + (K_5 - (2'', 4'')), \sum_{i=2}^4 (i' + i'')) \rightarrow (B_1, \{i\}_{i=2}^4)$;
- 3) $\varphi(K_5 - (2', 1') + (K_5 - (2'', 1'')), \sum_{i=1}^2 (i' + i'')) \rightarrow (B_3, \{i\}_{i=1}^2)$, як це показано на рис. 3.1;
- 4) $\varphi(St_{M_1}(K_4) + St_{M_2}(K_4), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (C_7, \{i\}_{i=1}^5)$, де $St_{M_i}(K_4)$ є квазізіркою з центром-графом K_4 та висячими ребрами з множини M_i , $i=1,2$, $M_1 = \{(3', 5)\}$, $M_2 = \{(1'', 7), (2'', 8), (3'', 6), (4'', 8)\}$, як це показано на рис. 3.2;
- 5) $\varphi(St_{M_1}(K_{2,3}) + St_{M_2}(K_{2,3}), \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_8, \{i\}_{i=1}^6)$, де $St_{M_i}(K_{2,3})$ є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та множиною M_i висячих ребер, $i=1,2$, $M_1 = \{(1', 10), (2', 10), (3', 9)\}$, $M_2 = \{(4'', 8), (5'', 8), (6'', 8)\}$, як це показано на рис. 3.2;
- 6) $\varphi(K_{3,3} + St_M(K_4), \sum_{i=1}^4 (i' + i'')) \rightarrow (D_{12}, \{i\}_{i=1}^4)$, де $St_M(K_4)$ - квазізірка з центром-графом K_4 та двома висячими ребрами із множини M , $M = \{(1'', 5), (2'', 8)\}$;

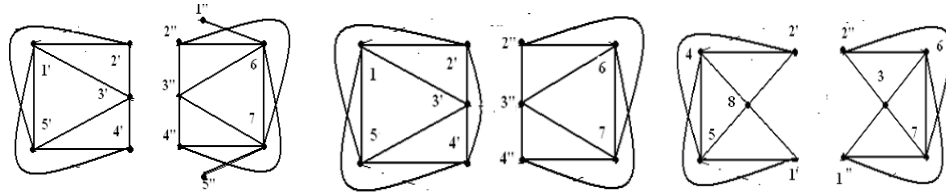


Рис. 3.1. Зліва-направо, перші два графи для φ -перетворення на граф A_2 , наступні два графи для B_1 , а останні два для B_3 .

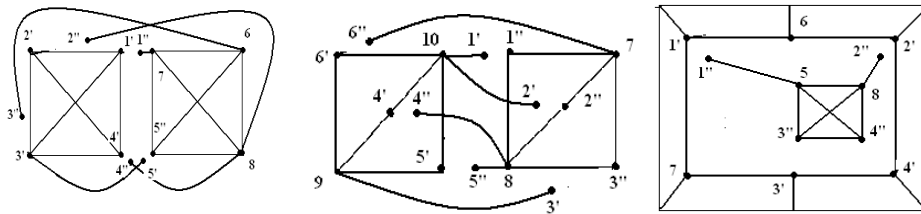


Рис. 3.2. Зліва-направо, перші два графи для φ -перетворення на граф C_7 , наступні два графи для D_8 , а останній для D_{12} .

Доведення. Доведемо співвідношення 1) твердження 3. Виконаємо φ -перетворення площинного графа $K_5 - e$, де $e = (2', 4')$, та площинного графа квазізірки $St_M(K_5 - (2'', 4''))$ із центром-графом $K_5 - (2'', 4'')$ та двома висячими ребрами $(1'', 6)$, $(5'', 7)$, $M = \{1'', 5''\}$, на граф A_2 шляхом ототождження кожної пари (i', i'') вершин графа $G_1 = K_5 - e$, та $G_2 = St_M(K_5 - (2'', 4'')) \setminus \{(1'', 6), (5'', 7)\}$ на вершину i графа A_2 , де $i = 1(1)5$, як наведено на рис. 3.1. Для цього розглянемо вкладення що наведені на рис.2. Матимемо розміщення на ∂s , $s \in P \setminus f_1(G_1)$, границі клітки (псевдоклітки) множини вершин $\{i''\}_1^5$ та кінцевих

точок ребра e , тобто $t_{G_1}(\{i'\}_1^5, P) = 1$ -досяжність на P множини. До цієї s вкладемо за допомогою f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$ граф G_2 та визначимо, що $t_{G_2}(\{2'', 4''\})$ -число досяжності на P множини $\{2'', 4''\}$ дорівнює 2. Таким же є число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^5)$ на P та всієї множини точок приєднання графа $f_2(G_2)$ до $f_1(G_1)$. Отримаємо нерівність $\gamma(A_2) \geq 2$. Визначимо ребро u графа G_2 , яке не вкладається до s , бо кінцеві вершини його мають число досяжності 2. З метою досяжності множини $f_2(\{i''\}_1^5)$ звужимо вкладення $f_2' = f_2|_{G_2 \setminus u}$ та приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, на границях яких розташована пара вершин ∂u , вважатимемо, що $\partial u = \{6, 7\}$, де $(1'', 6)$, $(5'', 7)$ висячі ребра квазізірки $f_2'(G_2 \setminus u)$. Для цього ототожнимо із збереженням напрямку пару різнонаправлених стрілок із цих кліток s', s'' та вкладемо на цю ленту ребро $f(u)$ разом із $f(1'', 6)$, а $f(5'', 7)$ розмістимо в s' . Отримаємо таким чином вкладення $f: A_2 \rightarrow S_2$ графа A_2 до пляшки Клейна, причому $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, тобто $\gamma(A_2) \leq 2$. Співвідношення 1) доведено.

Доведемо співвідношення 2) твердження 2. Позначимо через G_1 граф K_5 , а через G_2 граф $K_5 - (2'', 4'')$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як звуження одного із чотирьох неізоморфних вкладень графа K_5 , де $s \in P \setminus f_1(G_1)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{2'', 1''\}) = 2$, бо клітка $s = \overline{s \setminus \partial s}$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $\partial s \cap (\partial s' \cup \partial s'') = \emptyset$, кліток s', s'' . Тому, виконавши ф-перетворення по двом парам $(2', 1')$ та $(2'', 1'')$, матимемо нерівність $\gamma(B_1) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проєктивної площини на якій множина $f_2(\{2'', 3'', 4''\})$ є досяжною, $f_2(\{2'', 3'', 4''\}) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню цю недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=2}^4 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=2}^4$. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f: B_1 \rightarrow S_2$ графа B_1 до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(B_1) \leq 2$. Таким чином $\gamma(B_1) = 2$. Співвідношення 2) доведено.

Доведемо співвідношення 3) твердження 3. Позначимо через G_1 граф $K_5 - (2', 1')$, а через G_2 граф $K_5 - (2'', 1'')$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як звуження одного із чотирьох неізоморфних вкладень графа K_5 , де $s \in P \setminus f_1(G_1)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{2'', 1''\}) = 2$, бо клітка $s = \overline{s \setminus \partial s}$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $\partial s \cap (\partial s' \cup \partial s'') = \emptyset$, кліток s', s'' . Тому, виконавши ф-перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(B_3) \geq 2$.

Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток. В результаті

матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проєктивної площини на якій множина $f_2(\{2'', 1''\})$ є досяжною, $f_2(\{2'', 1''\}) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню цю недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=2}^4 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=2}^4$. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f: B_3 \rightarrow S_2$ графа B_3 до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(B_3) \leq 2$. Таким чином $\gamma(B_3) = 2$. Співвідношення 3) доведено.

Доведемо співвідношення 4) твердження 3. Позначимо через G_1 граф $St_{M_1}(K_4)$, а через G_2 граф $St_{M_2}(K_4)$, де $St_{M_i}(K_4)$ є квазізіркою з центром-графом K_4 та висячими ребрами з множини M_i , $i=1, 2$, $M_1 = \{(3', 5)\}$, $M_2 = \{(1'', 7), (2'', 8), (3'', 6), (4'', 8)\}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин M_1 розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як звуження одного із трьох неізоморфних вкладень графа K_4 до P , де $s \in P \setminus f_1(G_1)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(M_2) = 2$, бо клітка $s = \overline{s \partial s}$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $\partial s \cap (\partial s' \cup \partial s'') = \emptyset$, кліток s', s'' . Тому, виконавши ϕ -перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(C_7) \geq 2$.

Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проєктивної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^5)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^5) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню цю недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1}^5 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1}^5$ та вклавши всі висячі ребра з $M_2 = \{(1'', 7), (2'', 8), (3'', 6), (4'', 8)\}$. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f: C_7 \rightarrow S_2$ графа C_7 до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(C_7) \leq 2$. Таким чином $\gamma(C_7) = 2$. Співвідношення 4) доведено.

Доведемо співвідношення 5) твердження 3. Позначимо через G_1 граф $St_{M_1}(K_{2,3})$, а через G_2 граф $St_{M_2}(K_{2,3})$, де $St_{M_i}(K_{2,3})$ є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та висячими ребрами з множини M_i , $i=1, 2$, $M_1 = \{(1', 10), (2', 10), (3', 9)\}$, $M_2 = \{(4'', 8), (5'', 8), (6'', 8)\}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин $\{1', 2', 3'\}$ розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як звуження одного із трьох неізоморфних

вкладень графа $K_{2,3}$ до P , де $s \in P \setminus f_1(G_1)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{4'', 5'', 6''\}) = 2$, бо клітка $s = \overline{s \setminus \partial s}$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $\partial s \cap (\partial s' \cup \partial s'') = \emptyset$, кліток s', s'' . Тому, виконавши φ -перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(D_8) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проєктивної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^5)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^6) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню цю недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1}^6 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1}^6$ і вклавши всячі ребра з $\{(4'', 8), (1'', 10)\}$ на приклеєну ленту. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f: D_8 \rightarrow S_2$ графа C_7 до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(D_8) \leq 2$. Таким чином $\gamma(D_8) = 2$. Співвідношення 5) доведено.

Доведемо співвідношення б) твердження 3. Позначимо через G_1 граф $K_{3,3}$, а через G_2 граф $St_M(K_4)$, який є квазізіркою з центром-графом K_4 та всячими ребрами з множини M , $M = \{(2'', 8), (1'', 5)\}$.

Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як звууження одного неізоморфного вкладення графа $K_{3,3}$ до P , де $s \in P \setminus f_1(G_1)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^4) = 2$, бо клітка s , $s = \overline{s \setminus \partial s}$, є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$ кліток s', s'' , причому $\partial s \cap (\partial s' \cup \partial s'') = \emptyset$. Тому, виконавши φ -перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(D_{12}) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проєктивної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^4)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^4) \subset \partial l$.

Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню недвоклітку l та ототожнимо пари вершин

$\sum_{i=1,3,4}^4 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1,3,4}^4$ і вклавши всяче ребро $f_2'(2'', 8)$ на приклеєну ленту та ототожнимо пару

вершин $(2', 2'')$ на 2. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f: D_{12} \rightarrow S_2$ графа D_{12} до пляшки Клейна,

причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(D_{12}) \leq 2$. Таким чином $\gamma(D_{12}) = 2$. Співвідношення б) доведено.

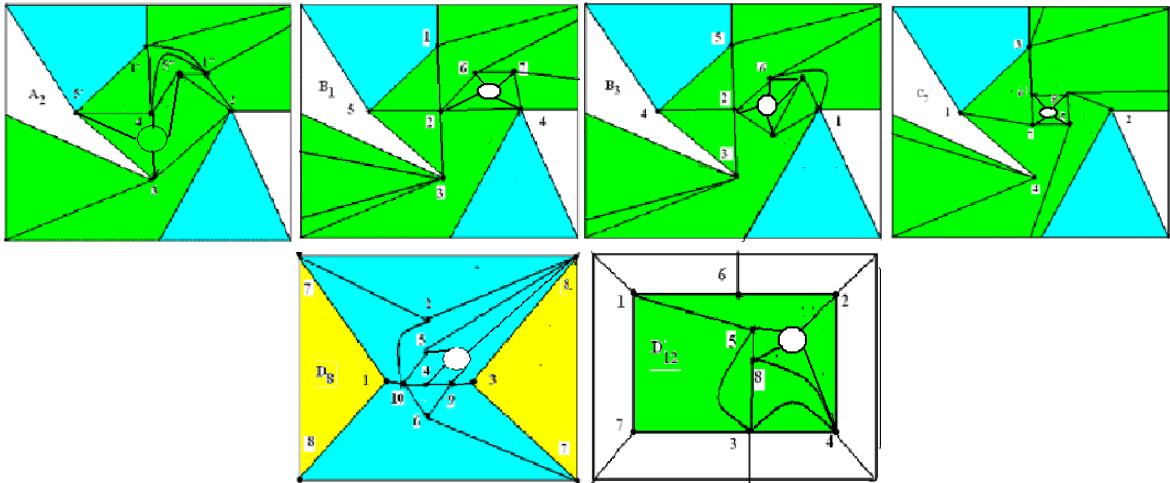


Рис.3.3. Схематичні вкладення графів A_2, B_1, B_3, C_7, D_8 та D_{12} в поверхню Клейна, за умови видалення кратних ребер.

Твердження 4. Для графів $D_{17}, E_{13}, E_{18}, E_{22}$ із мінімального базису проективної площини маємо ϕ -перетворення задані наступними формулами, за умови видалення одного з двох кратних ребер, які можливі в новоствореному графі:

- 1) $\phi(K_4 + St_M(K_4), \sum_{i=1}^4 (i' + i'')) \rightarrow (D_{17}, \{i\}_{i=1}^4)$, де $St_M(K_4)$ є квазізіркою з центром-графом K_4 та висячими ребрами з $M, M = \{(1'', 5), (2'', 8), (3'', 6), (4'', 7)\}$, як це показано на рис. 4.1;
- 2) $\phi(K_{3,3} + K_{2,3}, \sum_{i=1}^3 (i' + i'')) \rightarrow (E_{13}, \{i\}_{i=1}^3)$;
- 3) $\phi(K_{3,3} + St_M(K_{2,3}), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (E_{18}, \{i\}_{i=1}^5)$, де $St_M(K_{2,3})$ є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та множиною M висячих ребер, $M = \{(3'', 9), (5'', 7)\}$, як показано на рис. 4.1;
- 4) $\phi(St_{M_1}(K_{2,3}) + St_{M_2}(K_{2,3}), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (E_{22}, \{i\}_{i=1}^5)$, де $St_{M_i}(K_{2,3})$ є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та множиною M_i висячих ребер, $i=1, 2, M_1 = \{(3'', 9)\}, M_2 = \{(4'', 7), (3'', 6), (2'', 8)\}$, як це показано на рис. 4.1;

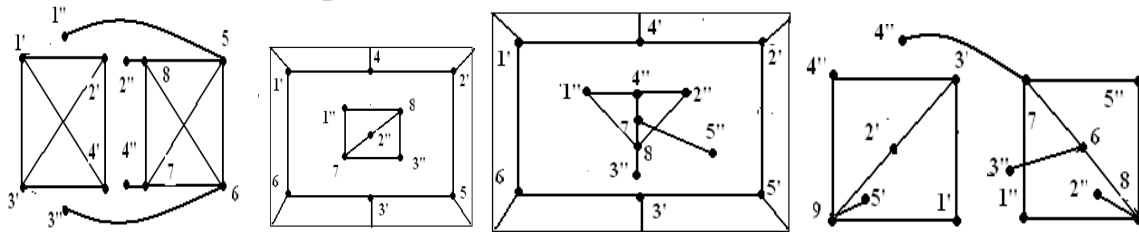


Рис. 4.1. Зліва-направо, перші два графи для ϕ -перетворення на граф D_{17} , наступні два графи для E_{13} та E_{18} , а останні два для E_{22} .

Доведення. Доведемо формулу 1) твердження 4. Позначимо через G_1 граф K_4 , а через G_2 граф $St_M(K_4)$, який є квазізіркою з центром-графом K_4 та висячими ребрами з множини M , $M = \{(1'',5), (2'',8), (3'',6), (4'',7)\}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , $s \in P \setminus f_1(G_1)$, як вкладення графа K_4 в P та трьох висячих ребер до зовнішньої грані s' , а ребро $(4'',7)$ вкладене до s'' , де $\{s', s''\} \subset s \setminus f_2(G_2)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^4) = 2$, бо клітка $s = \overline{s} \setminus \partial s$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$ кліток s', s'' . Виконавши φ -перетворення співвідношення 2) матимемо нерівність $\gamma(D_{17}) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проєктивної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^4)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^4) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1,3,4}^4 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1,3,4}^4$ і вкладемо висяче ребро $f_2'(4'',7)$ на приклесну ленту та ототожнимо пару вершин $(4', 4'')$ на 4 . Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f: D_{17} \rightarrow S_2$ графа D_{17} до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(D_{17}) \leq 2$. Таким чином $\gamma(D_{17}) = 2$. Формула 1) твердження 4 доведена.

Доведемо формулу 2) твердження 3. Позначимо через G_1 граф $K_{3,3}$, а через G_2 граф $K_{2,3}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин $\{1', 2', 3'\}$ розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як вкладення графа $K_{2,3}$ до площини, де $s \in P \setminus f_1(G_1)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^3) = 2$, бо клітка $s = \overline{s} \setminus \partial s$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $2'' \in \partial s'' \setminus \partial s'$, кліток s', s'' . Тому, виконавши φ -перетворення формули 2), матимемо нерівність $\gamma(E_3) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок, причому посередині однієї з цих стрілок розмістимо вершину $2'$, а $2''$ на середині іншої. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проєктивної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^3)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^3) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню цю недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1}^3 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1}^3$. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f: E_3 \rightarrow S_2$ графа E_3 до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(E_3) \leq 2$. Таким чином $\gamma(E_3) = 2$. Формула 2) доведена.

Доведемо формулу 3) твердження 4. Позначимо через G_1 граф $K_{3,3}$, а через G_2 граф $St_M(K_{2,3})$, який є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та висячими ребрами з множини M , $M = \{(2'',8), (5'',7)\}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як вкладення графа $K_{2,3}$ до двоклітки площини, $s \in P \setminus f_1(G_1)$, причому висяче ребро $(2'',8)$ розміщене на зовнішньої грані s' , а до s'' вкладене ребро $(5'',7)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^5) = 2$, бо

клітка $s = \bar{s} \setminus \partial s \in$ двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $5'' \in \partial s'' \setminus \partial s'$, $\{i''\}_1^4 \in \partial s'$. Тому, виконавши ϕ -перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(E_{18}) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток, так щоб вершина $5''$ була серединою одної стрілки, а $5'$ - серединою іншої стрілки. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проективної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^4)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^4) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1,3,4}^5 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1,3,4}^5$ і вклавши всяче ребро $f_2'(5'', 7)$ на приклеєну ленту та ототожнимо пару вершин $(5', 5'')$ на 5 . Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f: E_{18} \rightarrow S_2$ графа E_{18} до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(E_{18}) \leq 2$. Таким чином $\gamma(E_{18}) = 2$. Формулу 3) доведено.

Доведемо формулу 4) твердження 4. Позначимо через G_1 граф $St_{M_1}(K_{2,3})$, який є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та множиною всячих ребер M_1 , $M_1 = \{(5', 9)\}$, а через G_2 граф $St_{M_2}(K_{2,3})$, який є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та множиною всячих ребер M_2 , $M_2 = \{(4'', 7), (3'', 6), (2'', 8)\}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проективної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як вкладення графа $K_{2,3}$ до двоклітки площини, $s \in P \setminus f_1(G_1)$, причому всячі ребра $(2'', 8)$, $(4'', 7)$, $(5', 9)$ розміщені на зовнішній грані s' , а до s'' вкладене ребро $(3'', 6)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^5) = 2$, бо клітка $s = \bar{s} \setminus \partial s \in$ двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $5'' \in \partial s'' \setminus \partial s'$, $\{i''\}_1^4 \in \partial s'$. Тому, виконавши ϕ -перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(E_{22}) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток, так щоб вершина $5''$ була серединою одної стрілки, а $5'$ - серединою іншої стрілки. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проективної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^4)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^4) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1}^5 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1}^5$ і вклавши всяче ребро $f_2'(5'', 7)$ на приклеєну ленту та ототожнимо пару вершин $(5', 5'')$ на 5 . Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f: E_{22} \rightarrow S_2$ графа E_{22} до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(E_{22}) \leq 2$. Таким чином $\gamma(E_{22}) = 2$. Формулу 4) доведено. Доведення твердження 4) закінчено.

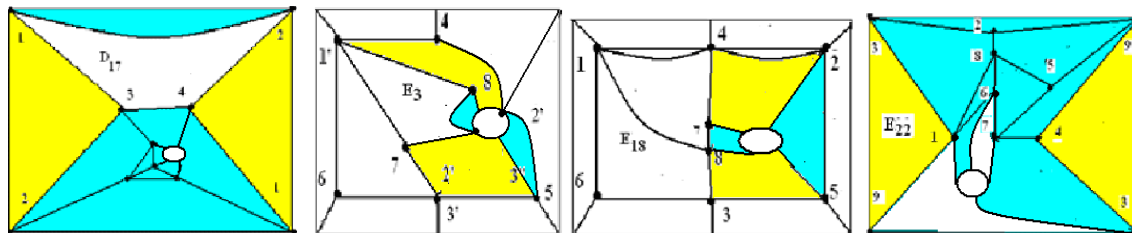


Рис.4.2. Схематичні вкладення графів D_{17} , E_3 , E_{18} та E_{22} в поверхню Клейна, за умови видалення одного з двох кратних ребер, які можливі у графі.

Теорема 1. Зв'язна граф-обструкція неорієнтованого роду 2 є результатом ϕ -перетворення не більше ніж двох зв'язних графів X, Y , які задовольняють одному з наступних випадків:

- 1) графи X, Y гомеоморфні K_5 чи $K_{3,3}$, і множини точок приєднання є досяжними;
- 2) графи-квазіірки X, Y із центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання з числом досяжності 2;
- 3) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ та вкладений до проективної площини Σ , а інший X - граф-квазіірка із центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання до графа Y із числом досяжності 2;
- 4) граф $X \in K_5 \setminus e$ чи $K_{3,3} \setminus e$ вкладеними до проективної площини, а граф Y графом-квазііркою з центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання з числом досяжності 2.

Доведення теореми 1. Нехай G довільний граф –обструкція проективної площини.

Тоді за допомогою перетворень методу компонент [8] отримаємо з графа G базисний граф G' , який може бути, або 2-зв'язним і для нього матимуть місце твердження 3 та 4, або не 2-зв'язним і для нього матимуть місце, або $G' = A_1$, або $G' = A_5$. Доведення закінчено.

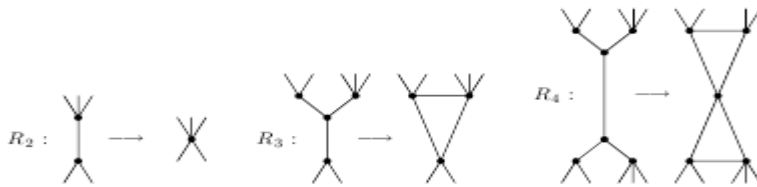


Рис 6. Перетворення R_i методу компонент, де $i=2,3,4$, R_1 -операція видалення ребра.

Теорема 2. Довільна граф-обструкція \mathfrak{Z} неорієнтованого роду $\gamma(\mathfrak{Z})$, $\gamma(\mathfrak{Z}) > 1$ є результатом ϕ -перетворення не більше ніж двох зв'язних графів X, Y , якщо $\gamma(\mathfrak{Z}) = 2$ і виконується одна з наступних умов:

- 1) граф X граф-обструкція неорієнтованого роду $\gamma(X)$, $\gamma(X) = \gamma(\mathfrak{Z}) - 1$, граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$, і множини точок приєднання є досяжними;
- 2) графи-квазіірки X, Y із центрами гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання з числом досяжності 2;
- 3) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ та вкладений до проективної площини Σ , а інший X - граф-квазіірка із центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання до графа Y із числом досяжності 2;

4) граф $X \in K_5 \setminus e$ чи $K_{3,3} \setminus e$ вкладеними до проективної площини, а граф Y графом-квазізіркою з центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання з числом досяжності 2.

Доведення. Нехай G - довільний зв'язний граф є граф-обструкцією проективної площини S_1 . Тоді довільне ребро u графа G має розміщуватися деяким мінімальним вкладенням $f, f: G \rightarrow S_2$ на ленті Мебіуса прикріпленої до S_1 , яка є результатом ототождження двох протилежно направлених стрілок, взятих із середини двох клітин s_1, s_2 з множини $S_2 \setminus f|_{G \setminus u} (G \setminus u)$ та без точок їхніх границь, а множина ребер $G^1 \setminus u$ може не мати підмножини з ребер K_5^1 чи $K_{3,3}^1$. Вкладення $f|_{G \setminus u}: G^1 \setminus u \rightarrow S_1$ розміщує $G^1 \setminus u$ на проективній площині. З іншого боку, жодна пара точок графів K_5 чи $K_{3,3}$ не має числа досяжності 2, бо інакше мали б, принаймні, один з графів на множинах ребер $K_5^1 \cup u$ чи $K_{3,3}^1 \cup u$ з неорієнтованим родом 2, що неможливо. Якщо в графі G є підграф чи частина H гомеоморфні K_5 чи $K_{3,3}$, то існуватиме підграф M графа G , якому належатиме, принаймні, одна з кінцевих вершин ребра u графа G та підмножина $G^1 \setminus H^1 \cup X$, де $X \subset H^1$, із, принаймні, одним ребром, що не належатиме підграфу H . Зауважимо на те, що підграф M має вкладатися в s -одну із клітин мінімального вкладення підграфа H в S_1 без перетину пари ребер, які належать до пари простих ланцюгів, що парами кінцевих точок розділятимуть одна одну на границі клітки до якої вкладатимуться, або завдяки двосторонньому доступу до пари цих вершин.

Якщо в $G \setminus u$ є підграф чи частина H , гомеоморфні K_5 чи $K_{3,3}$, то існуватиме площинний підграф M з числом досяжності множини вершин не менше 2, заданий на непустій підмножині множини ребер $G^1 \setminus H^1 \cup X$, де $X \subset H^1$, та, принаймні, одним ребром, яке не належатиме підграфу H , якому належатиме, принаймні, одна з кінцевих точок ребра u графа G .

Якщо в $G \setminus u$ для деякого ребра u немає підграфа чи частини H гомеоморфної K_5 чи $K_{3,3}$, то існуватиме площинний підграф M графа G із множиною вершин, що має на проективній площині число досяжності множини вершин не менше 2, бо кінцеві вершини не належать до границі однієї з клітин, т.то множина ∂u має число досяжності 2. У разі припущення, що видалення довільного ребра u приводить до відсутності в $G \setminus u$ підграфа H гомеоморфного K_5 чи $K_{3,3}$, то граф $G \setminus u$ матиме множини вершин з числом досяжності 2 та матиме площинний підграф M' гомеоморфний K_4 чи $K_{2,3}$, тому виконуючи додавання довільного ребра отримаємо $M'+u$ - єдиний підграф гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$, тобто граф G вкладатиметься до проективної площини, що є протиріччям умові теореми; припущення неправильне.

Якщо видалення деякого ребра u графа G призводить до того, що $G \setminus u$ не матиме частини чи підграфа H , гомеоморфних K_5 чи $K_{3,3}$, то існуватиме площинний підграф M з числом досяжності множини вершин не менше 2, якому належатимуть кінцеві вершини ребра u , та вкладений в проективну площину так, що множина кінцевих вершин ребра u матиме число досяжності 2.

Таким чином, для графа $G \setminus u$ маємо два наступні варіанти:

- 1) є підграф чи частина гомеоморфні K_5 чи $K_{3,3}$,
- 2) немає підграфа чи частини гомеоморфної K_5 чи $K_{3,3}$.

Розглянемо варіант 1), який має наступні два підваріанти: а) є підграф чи частина гомеоморфні $K_{3,3}$; б) є підграф чи частина гомеоморфні K_5 .

Розглянемо підваріант а). Позначимо через H , $H \cong K_{3,3}$, через f мінімальне вкладення $f: G \setminus u \rightarrow S_1$, яке є звуженням деякого мінімального вкладення f' графа G до S_2 та $f|_H$ - єдине мінімального вкладення графа H до S_1 . Тоді підграф M , що містить решту ребер графа G розміщується в середині двоклітки s , $s \in S_1 \setminus f|_H(H)$, та приєднується до H принаймні однією вершиною. Оскільки граф $K_{3,3}$ має двократний доступ до довільної пари точок на несуміжних ребрах, то підграф M має два різних простих ланцюги l_1, l_2 довжини 2, які в графі $f(G)$ на проективній площині перехрещуються між собою (у випадку продовження вкладення шляхом $f(u) \subset s$) та з'єднуються, принаймні, ребром u . Ланцюги l_1, l_2 довжини 2 містять, або обидві кінцеві вершини du та вкладенням f розміщуються в різних псевдоклітках підграфа $f(H)$, реалізуючи на проективній площині число досяжності 2 та двократний доступ для множини du , або містять тільки одну кінцеву вершину ребра u , а іншу містить підграф H . Зауважимо, що припущення про ланцюги l_1, l_2 довжини 1 означатиме вкладення графа $f(H \cup l_1 \cup l_2 \cup u)$ до S_1 , тобто суперечить тому, що граф G роду 2. Таким чином існуватиме ϕ -перетворення графів H та $St(M)$ задане так, як у вписаних в умові теореми випадках 1) чи 3). Стверджуємо, що множина кінцевих вершин довільного ребра u графа G належить до множини точок або найменшого по включенню підграфа H'' графа G гомеоморфного K_4 чи $K_{2,3}$, або найбільшого по включенню підграфа H' графа G гомеоморфного $K_5 \setminus e$ чи $K_{3,3} \setminus e$.

Розглянемо підваріант б). Нехай в графі $G \in H$ - підграф чи частина гомеоморфні K_5 . Позначимо через H , $H \cong K_5$, через f мінімальне вкладення $f: G \setminus u \rightarrow S_1$, яке є звуженням деякого мінімального вкладення f' графа G до S_2 та $f|_H$ - мінімального вкладення графа H до S_1 . Тоді підграф M , що містить решту ребер графа G розміщується в середині двоклітки s , $s \in S_1 \setminus f|_H(H)$, та приєднується до H принаймні однією вершиною. Оскільки граф K_5 не має двократного доступу до довільної пари точок на несуміжних ребрах, то підграф M має два різних простих не вироджених ланцюги l_1, l_2 , які в графі $f(G)$ на проективній площині мають довжину 2 та перехрещуються між собою (у випадку продовження вкладення шляхом $f(u) \subset s$) і з'єднуються, принаймні, ребром u , або мають довжину 1 та перехрещуються в середині двоклітки графа H , що вкладений до проективної площини. Таким чином у випадку 1) існуватиме ϕ -перетворення графа H та квазізірки $St(M)$, яка може вироджуватися в пару розділених ребер, задане так, як у вписаних в умові теореми випадках 1) чи 3).

Розглянемо варіант 2). Видалення довільного ребра u призводить до появи в $G \setminus u$ найменшого по включенню підграфа чи частини гомеоморфної $K_5 \setminus u$ або $K_{3,3} \setminus u$, позначеної через H_1 . Через H_2 позначимо підграф чи частину породжену рештою ребер $G^1 \setminus H_1^1$ та всіма тими ребрами, що з'єднують спільні кінцеві вершини ребер з H_i , $i = 1, 2$, графа $G \setminus u$. Позначимо через W підмножину спільних вершин, $W = H_1^0 \cap H_2^0$, а через $G \setminus u[W]$ породжений множиною підграф графа $G \setminus u$. Виконаємо розщеплення кожної вершини w_i на пару вершин (w_{i1}, w_{i2}) , так щоб виконувалася умова $\deg_{G \setminus u}(w_i) = \deg_{H_1}(w_{i1}) + \deg_{H_2}(w_{i2})$. Позначимо через W_i , $i = 1, 2$, підграф графа H_i породжений множиною вершин $\{w_{ij}\}_{j=1}^{k_i}$ та множиною ребер, що утворилися при розщепленні вершин спільних ребер, причому в одному з W_i можлива відсутність копії спільного ребра. Згідно варіанту 2) маємо наступне: а) не існуватиме простого ланцюга який належатиме до H_1 кінцевими вершинами, а його ребра та інші вершини належатимуть до H_2 , б) існуватиме в H_i , принаймні, пара різних простих ланцюгів $l_i(u_i, w_1)$, $i = 1, 2$, що починаються в вершині u_i та закінчуються в w_1 , $w_1 \in W$.

Наступні два підваріанти є вичерпними:

а) $f(G \setminus u)$ є однозв'язним підграфом; б) $f(G \setminus u)$ є блоком;

Розглянемо підваріант 1) варіанта 2). Позначимо через f мінімальне вкладення графа G до S_2 , а через H_1 підграф $f|_{H_1}(H_1)$ чи частину графа $f(G \setminus u)$, де $u = (u_1, u_2)$, гомеоморфну $K_5 \setminus u$ чи $K_{3,3} \setminus u$ та яка містить вершину u_1 ребра $f(u)$ разом з всіма кінцевими вершинами ребер суміжних з u_1 і вклadena до клітини s_1 , $s_1 \in S_1 \setminus f|_{G \setminus u}(G \setminus u)$. Позначимо через H_2 підграф чи частину із множиною ребер $f(G \setminus u) \setminus H_1$, яка містить вершину u_2 ребра $f(u)$ та всі кінцеві вершини ребер суміжних з u_2 та всі ребра графа $G \setminus u$, що з'єднують їх. Оскільки в $f(G \setminus u)$ існує простий ланцюг $l = l(u_1, u_2)$, що з'єднує кінцеві вершини ребра u та містить також спільну вершину v цих H_i , $i = 1, 2$, і множина $\{u_1, u_2\}$ має на проєктивній площині число досяжності 2, то стверджуємо, що $\{v, u_2\}$ матиме на проєктивній площині число досяжності 1. Якби припустили, що $\{v, u_2\}$ матиме на проєктивній площині число досяжності 2, то тоді мали б підграф $f|_{H_1}(H_1)$ який неможливо було би вкласти до клітини s_1 . Це означатиме, що H_2 є площинним графом –квазізіркою із деяким центром M , який містить вершини з $\{v, u_2\}$ графа $f(G \setminus u)$ та гомеоморфним одному з наступних графів: $K_5 \setminus u$, $K_{3,3} \setminus u$, K_4 , $K_{2,3}$.

Розглянемо підваріант 2) варіанта 2). Позначимо через f мінімальне вкладення графа G до S_2 , а через H_1 підграф чи частину графа $f(G \setminus u)$, де $u = (u_1, u_2)$, гомеоморфну $K_5 \setminus u$ чи $K_{3,3} \setminus u$ та яка містить вершину u_1 ребра $f(u)$ разом з всіма кінцевими вершинами ребер суміжних з u_1 і вклadena до S_1 . Для визначеності вважатимемо, що $f|_{H_1}(H_1)$ вклadena до проєктивної площини S_1 так, що множина $\{u_1, w_1\}$, $w_1 \in W$, розміщена на границі клітини s_1 , $s_1 \in S_1 \setminus f|_{G \setminus u}(H_1)$, тобто має на проєктивній площині число досяжності 1. Позначимо через H_2 підграф чи частину $G \setminus u$ із множиною ребер $f(G \setminus u) \setminus H_1$, вклadenих в клітини $s_1 \cup \partial s_1$, який містить вершину u_2 та всі кінцеві вершини ребер суміжних з u_2 , а також всі ребра підграфа H_1 , що з'єднують спільні вершини обох цих H_i , $i = 1, 2$, графа $G \setminus u$. Підграф H_2 буде площинним з множиною вершин, що матиме число досяжності не менше 2, та вклadenим в середину клітини s_1 , $s_1 \in S_1 \setminus f|_{G \setminus u}(H_1)$, так, що $f(\{u_1, w_{11}, w_{12}\}) \subset \partial s_1$ та $f(\{u_2, w_{21}, w_{212}\}) \not\subset s_1$, де $\{w_1, w_2\} \subset H_1 \cap H_2$. З умови двозв'язності графа $G \setminus u$ впливає існування в підграфі H_2 принаймні пари різних простих ланцюгів $l_i = l(u_1, u_2)$ довжин не менше 2, $i = 1, 2$, що з'єднують кінцеві вершини ребра u та містять принаймні дві різні вершини w_i , які є спільними для підграфів H_i , $i = 1, 2$. Доведення закінчене..

Визначення 6. Граф K є t - мінімальним роду γ , якщо число досяжності множини вершин цього графа дорівнює t та при видаленні чи стисканні в точку довільного ребра зменшується число досяжності множини вершин нового графа чи зменшується рід нового графа утвореного з K . Наприклад, граф $K_6 \setminus K_3^1$ -2-мінімальний роду 1, тобто $K_{3,3}$ з додатковими трьома ребрами на вершинах однієї з двох його долей, або це граф $K_5 \setminus e$ із додатковою вершиною степеня 3, що суміжна з трьома вершинами графа $K_5 \setminus e$ із числом досяжності 2.

Визначення 7. Граф K є t - мінімальним роду 1, $t > 0$, відносно заданої підмножини N множини точок цього графа при вклadenні до клітки s , $s \in \sigma \setminus K$, границя якої може мати цикломатичне число $p_1(\partial s)$, $p_1(\partial s) \geq 0$, якщо число досяжності $t_K(N, \sigma_1)$ підмножини точок N цього графа дорівнює t та при видаленні довільного ребра e графа K матимемо або $t_K(N, \sigma_1) > t_{K \setminus e}(N, \sigma_1)$, або $\gamma(K \setminus e) = 0$.

Лема 1. Нехай граф G є ϕ -образом графів-обструкцій G_1 та G_2 при ϕ -перетворенні визначеному наступним чином: $\phi(G_1 + G_2, \sum_{i=1}^2 (e_i + e_2)) \rightarrow (G, e)$, де $e = (a, b)$, $e \in G^1$. $e_i = (a_i, b_i)$ є ребром, або частиною ребра графа G_i , $i = 1, 2$.

Для орієнтованого роду $\gamma(G)$ мають місце наступні твердження:

- 1). Якщо принаймні одна кінцева вершина кожного з ребер e_i не матиме двостороннього доступу, то маємо рівність $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$;
- 2). Якщо жодна кінцева вершина одного з ребер e_i має двосторонній доступ, то матимемо рівність $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1$;

Доведення. Доведення лема 1 для довільних графів-обструкцій G_1 та G_2 аналогічне доведенню для двох графів K_5 , виконаному на рис. 1.2.1. Наведемо на рис. 1.2.2 доведення тверджень лема 1.3. для двох вкладених (ребра K_4 сині) в тор графів, зліва–направо, отриманих з двох пар графів $(K_4, K_{3,3})$, (K_4, K_5) шляхом ϕ -перетвореннями заданим на парі ребер цих пар. Відмітимо, що наявність двостороннього доступу до ототожнених кінцевих вершин ребра означатиме відсутність додаткової 2-ручки. Так для графа K_5 вкладеного до Σ_2 -пляшки Клейна із двостороннім доступом до двох вершин (завдяки наявності кольорової клітини в яку можливо вкласти дві зірки із суміжними центрами на 5-ти та 6-ти ребрах-променях) та отримати мінімальне вкладення графа $K_7 \setminus e$ до Σ_2 .

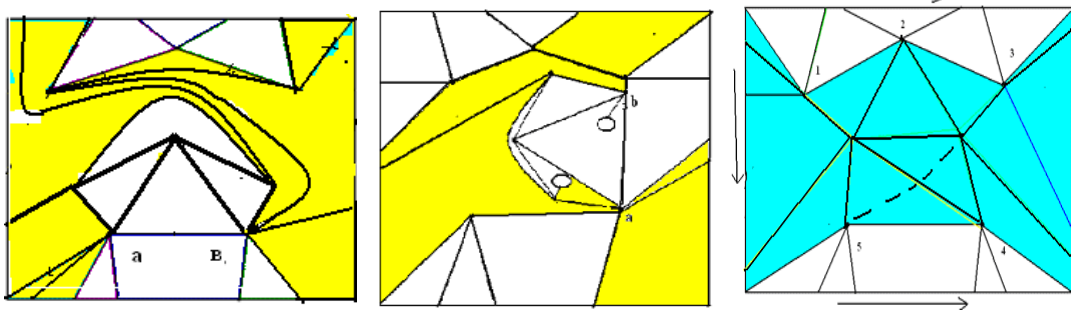


Рис.5. До тверджень лема 1 наведено два перші графи (зліва-направо), що отримані з двох графів K_5 двома наступними ϕ -перетвореннями: 1) по парі ребер, 2) по ребру $e=(a,b)$ та частині ребра u , відповідно, де кольоровою є не 2-клітка вкладення в тор графа K_5 , до якої вкладено інший K_5 та виконано склейку. 3) Наведено мінімальне вкладення графа $K_7 \setminus e$ до Σ_2 -пляшки Клейна.

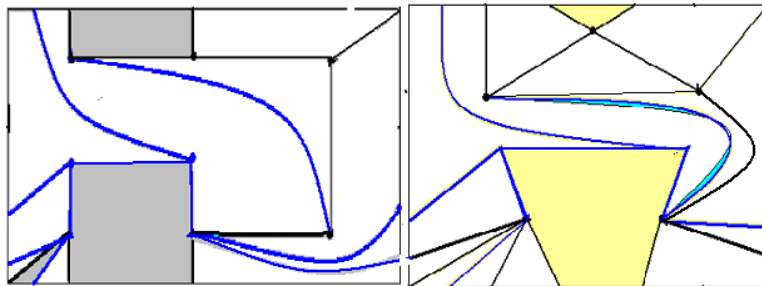


Рис. 6. Наведемо до тверджень лема 1 два вкладені в тор графи (зліва-направо) отримані з двох пар графів $(K_4, K_{3,3})$, (K_4, K_5) ϕ -перетвореннями на парах ребер.

Лема 2. Нехай граф G є ϕ -образом графів-обструкцій G_1 та G_2 при ϕ -перетворенні визначеному наступним чином: $\phi(G_1 + G_2, \sum_{i=1}^2 (e_1 + e_2)) \rightarrow (G, e)$, де $e = (a, b)$, $e \in G^1$, $e_i = (a_i, b_i) \in$ ребром, або частиною ребра графа G_i , $i = 1, 2$.

Тоді для неорієнтованого роду $\gamma(G)$ не виконуються твердження леми 1.

Доведення. Дійсно із наведених на рис. 7 вкладень до проективної площини графів K_5 та $K_{3,3}$ видно відсутність двостороннього доступу до довільної підмножини їхніх вершин. Але для $K_5 / (4, 7)$ є двосторонній доступ до пари суміжних вершин 3, 4, 7, який не впливає на рід графа A_2 .

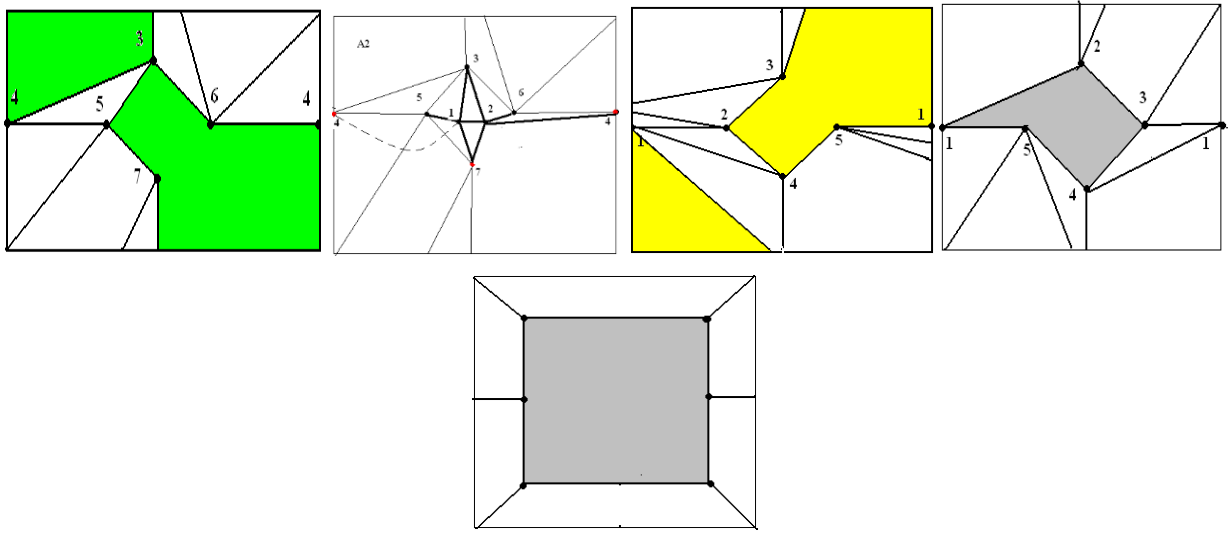


Рис.7. Мінімальні вкладення до проективної площини графів $K_5 / (4, 7)$, $A_2 / (1, 4)$, K_5 .

Твердження 5. Якщо площинний граф H із виділеною підмножиною точок X , що має число досяжності $t, t \leq 2$, та принаймні одним лишнім ребром відносно властивості 2-мінімальності при вкладенні (без перетину ребер у внутрішніх точках) до тору чи його не двоклітці, або на проективній площині чи її псевдоклітці, може за певних умов набувати властивості 2-мінімальності роду 1, то має місце наступне співвідношення:

Видалення ребра в такому площинному графі H призводить до збільшення на 1 числа двостороннього доступу до кінцевих точок видаленого ребра.

Наприклад, граф K утворений із K_4 у якого один трикутник K_3 має три пари 2-кратних ребер 1-підрозділених вершинами з множини $\{v_i\}_1^3$, які разом з вершиною $v, v \in K_4 \setminus K_3$ утворюють множини з числом досяжності 2, та при не 2-клітковому вкладенні в тор граф K є 2-мінімальним. Для проективної площини таким буде граф I утворений з K_3 у який має три пари 2-кратних ребер 1-підрозділених вершинами з $\{v_i\}_1^3$, що утворюють множини з числом досяжності 2 та при не 2-клітковому вкладенні в проективну площину граф I є 2-мінімальним.

Література

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, 1971, 378с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ НАНУ, Киев, 1970.
3. Brown T. Duke R. An irreducible graph consisting a single block. J. Math. and Mech. 1966, 15, № 1, 129–135.

4. Joachim E. Minimale nicht in die Ringfläche einbettbare Graphen. *Elem. Math.* 1978, 33, № 3, 57 – 61.
5. Archdeacon Dan. A Kuratowski theorem for the projective plane. *J. Graph Theory*, 5(3):243–246, 1981.
6. Glover Henry H., Huneke John P., Wang Chin San. 103 graphs that are irreducible for the projective plane. *J. Combin. Theory Ser. B*, 27(3):332–370, 1979.
7. Епіфанов Г. В.. Reductin of a plane graph to an edge by star-triangle transformations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 166:19–22, 1966.
8. Flóttotto Anna. Embeddability of graphs into the Klein surface. *PHDissertation. Univ. Bielefeld*, Mai 2010.
9. Петренюк В.І. Властивості мінімальних графів проєктивної площини. Матеріали міжнародного симпозиуму “Питання оптимізації обчислень (ПОО –XXXV)”, 2009 р., стр 194-197.
10. R. Bodendiek, H. Schumacher, and K. Wagner. Die Minimalbasis der Menge aller nicht in die projektive Ebene einbettbaren Graphen. *J. Reine Angew. Math.*, 327:119–142, 1981.
11. R. Bodendiek, H. Schumacher, and K. Wagner. Über Relationen auf Graphen-mengen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 51:232–243, 1981.
12. R. Bodendiek, H. Schumacher, and K. Wagner. Zur Minimalstruktur der nicht in die projektive Ebene einbettbaren Graphen. *J. Reine Angew. Math.*, 321:99–112, 1981.
13. Hur Suhjin. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. *PhD dissertation, Ohio State University*, 2008.
14. Петренюк В.І. Свойства графов минимальных базисов проективной плоскости и тора. Материалы 11-го международного семинара „ Дискретная математика и её приложения”, посвящен ного 80-летию со дня рождения академика О.Б.Лупанова, Москва, МГУ, 18-23 июня 2012, с 514-516.
15. Петренюк В.І. Про властивості мінімальних базисів тору та проєктивної площини. Матеріали 12-го міжнародного науково-практичного семінара , Кіровоград, 14-15 жовтня 2011 року с.81-84.
16. Петренюк В.І. Исследование структуры плоских графов с заданой достижимостью множества точек. *Дисертация. ИК НАНУ, Киев*, 14 января 1994 р.
17. D. Archdeacon. *The Graph theory. Survey*, 1995.
18. Brunet, Richter, Siran Covering genus reducing edges with Kuratowsky subgraphs, *Journal of graph theory*, vol. 22, 32-45, 1996

3.4. ВЛАСТИВОСТІ МІНІМАЛЬНИХ ГРАФІВ ПРОЕКТИВНОЇ ПЛОЩИНИ

Розглянемо задачу вивчення структурних властивостей мінімальних простих графів G проективної площини, поданих як ϕ -образи деякого простого графа G' та зірки $St_G(v)$. Наведемо короткий огляд результатів робіт, пов'язаних із цією задачею, а саме із описом всіх графів, що неприводяться (або мінімальних), над проективною площиною S . Більш докладний огляд наведений в [15], [30]. Граф G називається таким, що неприводиться над поверхнею S або $\gamma(G)$ – (irreducible graph) неприведеним, якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх $\gamma(G)$ –неприведених графів позначимо через $\zeta(S)$ та назвемо множиною перешкод (obstructions) для графів, що мають укладтися на заданій поверхні. Граф G мінімальний над S , якщо для будь-якого графа G' , отриманого з графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G') \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх графів мінімальних над S позначимо через F_S . Ці визначення узяті з Brown T. Duke R.A., відповідно. Множина всіх графів, що неприводяться над S містить F_S і характеризує множину всіх графів роду не менше $\gamma(S)+1$. Якщо S 2–сфера, то $F_S = \{K_5, K_{3,3}\}$. Нехай G неорієнтовний граф без петель і кратних ребер ейлерового роду $\gamma(G)$, а S замкнута неорієнтована поверхня роду $\gamma(S)$ без краю, де $\gamma(G) = \gamma(S)+1$. Для проективної площини S були наступні два напрями робіт, пов'язані з описом графів, які неприводяться над S . Одне з них було засноване Вагнером (Wagner), який ввів поняття мінімального базису для множини скінчених графів, що не можуть бути вкладеними до S і застосував для опису мінімальних графів над проективною площиною. В його з Бодендієком (Bodendiek R) були продовжені дослідження і знайдені деякі мінімальні графи над S . Мінімальний базис множини всіх скінчених графів не вкладених в S , що складається з 12 графів, був побудований. Інший напрям бере початок в роботах Гловера та Ханеке (Glover H., Huneke J. P.). Ними були описані графи, що неприводяться над проективною площиною. В [3] поданий огляд отриманих результатів і було доведено, що є скінчена множина графів, що неприводяться над проективною площиною. Список із 103 таких графів був побудований в [4], де було вказано припущення, що список повний. В [2] представлений план доведення того, що вказаний список є повним, а в дисертації цього автора наведено доведення повноти та він стверджує, що ним побудовано 5 графів, з яких інші виходять в результаті операції розщеплювання вершин і видалення ребер. Визначимо, згідно [1], число досяжності заданої множини точок X як найменшу кількість 2-кліток (компонент) s_i із множини компонент $S \setminus f(G)$ на границях ∂s_i яких розміщено $f(X)$, де f – мінімальне вкладення графа G до S , а під точкою графа розумітимемо або вершину, або внутрішню точку ребра графа G . Про досяжну множину точок X будемо говорити, якщо вона розміщується на границі деякої 2-клітки s , $s \in S \setminus f(G)$, для якої існує на проективній площині розбиття на k -псевдокліток (частин) s'_i , $i=1, \dots, k, k \geq 0$ кожна з границь $\partial s'_i$ яких містить точки із $X \setminus X \cap \bigcup_{j=1, j \neq i}^k \partial s'_j$ та матиме $t_S(X)$ проективну досяжність, де $t_S(X) = k$;

Твердження 1. Для проективної площини S мають місце наступні твердження:

- 1) Множина F_S всіх мінімальних графів над проективною площиною S складається із 35 графів. 2) $F_S \cap F_{\Omega_1} \supset \{A_1, A_5, C_1, C_{11}, E_1, E_{42}\}$, де F_{Ω_1} множина всіх мінімальних графів над тором Ω_1 , частково наведена [5].

Твердження 2. Для проективної площини S мають місце наступні твердження:

- 1) Граф $K_{2,3}$ вкладається однокомпонентно 2-клітково до проективної площини S та має досяжною

множину всіх точок; 2) Граф K_4 вкладається двокомпонентно 2-клітково до проєктивної площини S та має досяжною множину всіх точок; 3) Граф $K_{3,3}$ вкладається трикомпонентно 2-клітково до проєктивної площини S та має досяжною множину всіх вершин точок, а множина всіх точок має число досяжності 1; 4) Граф K_5 вкладається п'ятикомпонентно 2-клітково до проєктивної площини S та має досяжною множину всіх вершин, а множина всіх точок має число досяжності 2.

Твердження 3. Для графів $D_i \setminus v$, де $D_i \in F_S$, $i = 1, 2, 3, 4, 9, 12, 17$, де v - вершина графа D_i , мають місце наступні твердження:

- 1) Якщо v -вершина степеня шість графа D_1 , то граф $D_1 \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох копій графів $K_{2,3}$ по лвом вершинам степеня 3, причому множина вершин $St_{D_1 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності t , $t = t_{D_1 \setminus v}(St_{D_1 \setminus v}(v) \setminus \{v\}) = 2$, а кожне ребро суттєве відносно числа досяжності t при його видаленні;
- 2) Якщо v -вершина степеня шість графа D_2 , то граф $D_2 \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох графів $K_{2,3}$, K_4 по двом простим циклам довжини 3, причому множина вершин $St_{D_2 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2;
- 3) Якщо v -вершина степеня п'ять графа D_{12} , то граф $D_{12} \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох графів $K_{2,3}$, K_4 по простому ланцюгу довжини 2 графа $K_{2,3}$ та суміжним частинам суміжних ребер графа K_4 , причому множина вершин $St_{D_{12} \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2;
- 4) Якщо v -вершина степеня п'ять графа D_4 , то граф $D_4 \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох графів $K_{2,3}$, K_4 по двом вершинам степеня 2, 3, відповідно, причому множина вершин $St_{D_4 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2;
- 5) Якщо v -вершина степеня п'ять графа D_3 , то граф $D_3 \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох копій графів K_4 або по простим циклам довжини 3, або двох графів $K_{2,3}$, K_4 шляхом ототожнення двох ребер, відповідно, причому множина вершин $St_{D_3 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2;
- 6) Якщо v -вершина степеня п'ять графа D_9 , то граф $D_9 \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) трьох копій графів $K_{2,3}$, для двох шляхом ототожнення двох ребер, відповідно, та третього $K_{2,3}$ по простим циклам довжини 3, причому множина вершин $St_{D_9 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2;
- 7) Якщо v -вершина степеня чотири графа D_{17} , то граф $D_{17} \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох копій графів K_4 по простому ланцюгу довжини 2, та суміжним частинам суміжних ребер графа K_4 шляхом ототожнення двох ребер, відповідно, причому множина вершин $St_{D_{17} \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2;

Твердження 4. Для графів $E_i \setminus v$, де $E_i \in F_S$, $i = 1, 2, 3, 5, 6, 11, 18, 19, 20, 22, 27, 42$, де v - вершина графа E_i , мають місце наступні твердження:

- 1) Якщо вершина v степеня шість графа E_1 , то граф $E_1 \setminus v$ є об'єднанням двох копій графа $K_{2,3}$, причому множина вершин $St_{E_1 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2;

- 2) Якщо вершина v степеня шість графа E_2 , то граф $E_2 \setminus v$ є графом K_4 із всіма 1-підрозділеними ребрами, причому множина вершин $M = St_{E_2 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M) = 2$;
- 3) Якщо вершина v степеня шість графа E_3 , то граф $E_3 \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох копій графа $K_{2,3}$, задану шляхом попарного ототожнення трьох пар вершин степеня 2 взятих із копій графа $K_{2,3}$, причому множина вершин $M = St_{E_3 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M) = 2$. Існує таке 2-кліткове вкладення $f, f' : E_3 \setminus v \rightarrow S$ графа $E_3 \setminus v$ до проєктивної площини S яке допускає розширення $f', f' : E_3 \setminus v \rightarrow S$ при якому $f'(St_{E_3 \setminus v}(v) \setminus \{v, u\})$ розміщені в двох 2-клітках з множини $S \setminus f(E_3 \setminus v)$;
- 4) Якщо вершина v степеня чотири графа E_5 , то граф $E_5 \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох копій графа $K_{2,3}$, задану шляхом попарного ототожнення двох пар кінцевих вершин однакової степені двох ребер, взятих із різних копій графа $K_{2,3}$, з кінцевими вершинами степеня 2 та 3; причому множина вершин $M = St_{E_5 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M) = 2$;
- 5) Якщо вершина v степеня п'ять графа E_6 , то граф $E_6 \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох копій графа $K_{2,3}$, задану шляхом ототожнення пари вершин степеня 2 та 3 взятих із різних копій графа $K_{2,3}$, причому множина вершин $St_{E_6 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2;
- 6) Якщо v - вершина степеня п'ять графа E_{11} , то граф $E_{11} \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох графів $K_{2,3}$, K_4 , задану шляхом попарного ототожнення ребер, взятих із двох простих циклів довжини 4 та 3, відповідно, причому множина вершин $M = St_{E_{11} \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M) = 2$;
- 7) Якщо v вершина степеня три графа E_{18} , то граф $E_{18} \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох графів $K_{2,3}$, $K_{3,3}$, задану шляхом попарного ототожнення трьох пар, утворених із частин трьох суміжних ребер $K_{2,3}$ та трьох несуміжних ребер графа $K_{3,3}$, причому множина вершин $M = St_{E_{18} \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M) = 2$. Граф $K_{3,3}$ є ϕ -образом (склеюкою) двох копій графа $K_{2,3}$, задану шляхом попарного ототожнення трьох пар суміжних ребер, взятих із різних копій;
- 8) Якщо v вершина степеня чотири графа E_{19} , то граф $E_{19} \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох графів $K_{2,3}$, K_4 , задану шляхом попарного ототожнення трьох пар, утворених із трьох суміжних ребер $K_{2,3}$ та трьох частин суміжних ребер графа K_4 , причому множина вершин $M = St_{E_{19} \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M) = 2$.
- 9) Якщо v вершина степеня чотири графа E_{20} , то граф $E_{20} \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) графів $K_{2,3}$ та K_4 , задану шляхом попарного ототожнення ребер, взятих із двох простих циклів довжини 4 та 3, відповідно, причому множина вершин $M = St_{E_{20} \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2 та $t_S(M) = 2$;
- 10) Якщо v вершина степеня чотири графа E_{22} , то граф $E_{22} \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох копій графа $K_{2,3}$ та графа K_4 , задану в два кроки: а) шляхом попарного ототожнення ребер ланцюгів довжини 2 та кінцевими вершинами степеня 2, взятих із двох $K_{2,3}$, б) задану шляхом попарного ототожнення ребер, взятих із двох простих циклів довжини 4 та 3, взятих із графа утвореного кроком а), та графа K_4 , відповідно, причому множина вершин $M = St_{E_{22} \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2.

11) Якщо v вершина степеня чотири графа E_{27} , то граф $E_{27} \setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) двох графів $K_{2,3}$, K_4 , задану шляхом попарного ототожнення ребер простого ланцюга графа $K_{2,3}$ довжини 3, у якого кінцевими точками є вершина степені 3 та точка ребра, та простого ланцюга довжини 2 графа K_4 , у якого кінцевими точками є вершина степені 3 та точка ребра, відповідно, причому множина вершин $M = St_{E_{27} \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M) = 2$;

12) Якщо v вершина степеня три графа E_{42} , то граф $E_{42} \setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) чотирьох копій графа $K_{2,3}$, задану в два кроки: а) шляхом попарного ототожнення трьох ребер суміжних вершині степеня 3, взятих із одного $K_{2,3}$, б) задану аналогічно кроку а) для іншої пари графів $K_{2,3}$, причому множина вершин $M = St_{E_{42} \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2.

Твердження 5. Для графів $C_i \setminus v$, де $C_i \in F_S$, $i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 11$, де v вершина графа C_i , мають місце наступні твердження: 1) Якщо v вершина степеня сім графа C_1 , то граф $C_1 \setminus v$ є об'єднанням двох графів $K_{2,3}$, K_4 , причому множина вершин $M = St_{C_1 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2; 2) Якщо v - вершина степеня шість графа C_2 , то граф $C_2 \setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) двох графів $K_{2,3}$, K_4 , задану шляхом ототожнення пари вершин степеня 3, причому множина вершин $M = St_{C_2 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2; 3) Якщо v вершина степеня шість графа C_3 , то граф $C_3 \setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) двох копій графів K_4 , задану шляхом ототожнення двох пар (частина ребра, ребро), які інцидентні вершині u степеня 3, та пари простих ланцюгів довжини 1 та 2, що мають ту саму спільну вершину u , причому множина вершин $M = St_{C_3 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M) = 2$; 4) Якщо v вершина степеня шість графа C_4 , то граф $C_4 \setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) двох копій графів K_4 , задану шляхом ототожнення пари паростих циклів, причому множина вершин $M = St_{C_4 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M) = 2$; 5) Якщо v вершина степеня п'ять графа C_7 , то граф $C_7 \setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) двох копій графів K_4 , задану шляхом ототожнення пари (ребро, частина ребра), причому множина вершин $M = St_{C_7 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2; 6) Якщо v вершина степеня чотири графа C_{11} , то граф $C_{11} \setminus v$ є об'єднанням графів K_4 , $K_{3,3}$, причому множина вершин $M = St_{C_{11} \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2.

Твердження 6. Для графів $B_i \setminus v$, де $B_i \in F_S$, $i = 1, 3, 7$, де v вершина графа B_i , мають місце наступні твердження: 1) Якщо v вершина степеня шість графа B_1 , то граф $B_1 \setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) двох копій графів K_4 , задану шляхом ототожнення пари (ребро, ребро), причому множина вершин $M = St_{B_1 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2; 2) Якщо v вершина степеня п'ять графа B_3 , то граф $B_3 \setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) двох копій графів K_4 , задану шляхом ототожнення пари вершин, причому множина вершин $M = St_{B_3 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2; 3) Якщо v вершина степеня п'ять графа B_7 , то граф $B_7 \setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) двох копій графів K_4 , задану шляхом ототожнення пари (частина ребра, ребро) та пари простих ланцюгів довжини 1 та 2, що мають ту саму спільну вершину u з $B_7 \setminus v$, що й перша пара ребер, причому множина вершин $M = St_{B_7 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2. Доведення всіх цих тверджень 2, 3, 4, 5, 6 носять конструктивний характер.

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ИМ НАНУ, Київ, –1971.–375с.
2. Archdeacon D. A Kuratawaki theorem for projective plane.// J. Graph theory 1981, 5 № 3, 243 – 246.

3. Mochar B., Kawarabayashi K. Some Recent Progress and Applications in Graph Minor Theory, Preprint submitted to Elsevier Science. July 11, 2006.
4. Glover H., Huneke J. P. 103 graphs which are irreducible for projective plane. //J. Combin Theory Ser. B 27 (1979) № 3, 332 – 370.
5. Gagarin A., Myrvold W., Chambers J. The obstructions for toroidal graphs with no $K_{3,3}$'s. Preprint submitted to Elsevier Science, 1 February 2008

3.5. ПРО ГРАФ–МОДЕЛІ НЕОРІЄНТОВАНОГО РОДУ.

Розглянемо задачу моделювання складної системи в загальному виді та запропонуємо теоретико – графський підхід як спосіб мислення штучними образами-структурами. В літературі наведено задачі моделювання систем та математичні методи їхнього розв'язання в яких великі структури розглядаються як сукупність невеликих та простіших підструктур які можуть мати певні спільні частини, що підлягатимуть ототожненню при побудові дновленні цілої структур із скінченного числа підструктур. Основний метод - φ -перетворення графів (граф-моделей) отриманих як пара скінчених множин: множини об'єктів-вершин та множини об'єктів-ребер для визначення зв'язків між об'єктами структури. Основна ідея методу - φ -перетворення може інтерпретуватися як спосіб успадкування певної властивості підструктур всею структурою в залежності від властивостей з'єднання (ототожнення заданих частин підструктур). Наведені нижче результати можуть застосовуватися при системному аналізі граф-моделей. Прикладом використання є перетворення основних задач системного програмування на задачі теорії графів із готовим для використання математичним забезпеченням алгоритмів їхніх розв'язків.

Граф-модель математичної моделі складної системи подають у вигляді неорієнтованого графа G без кратних ребер і петель та вивчають її шляхом досліджень структурованих властивостей графа вкладеного в замкнуту поверхню S неорієнтованого роду $\gamma(S)$; т.т. розміщені на S ребра графа розташовуватимуться принаймні на проєктивній площині чи ленті Мебіуса приклеєної до орієнтованої поверхні та не матимуть спільних точок крім вершин графа G роду $\gamma(G)$ та можуть розміщуватися не тільки на ручках. Граф G зветься незведеним над S ($\gamma(S)$ - незведеним) якщо для кожного власного підграфа H графа G має місце нерівність $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Мінімальним графом над S називають такий граф G який зменшує $\gamma(G)$ після того як із нього видалено ребро чи стягнуто ребро в точку. Для сфери S такими є K_5 та $K_{3,3}$. Основний результат:

Для графа ζ (отриманого як φ -образ $G' + St_n(g)$ при ототожненні n вершин зірки $St_n(g)$ із вершинами множини X , що має число досяжності $t_G(X)$ та характеристики $\theta_G(X), \delta\theta_G(X)$) має місце нерівність:

$$\gamma(\zeta) \leq \gamma(G) - t_G(X) - \theta_G(X) - \delta\theta_G(X) + 1$$

Введена характеристика $\delta\theta_G(x)$ яка є мірою циклічної зв'язності 2-клітин $S_G(X)$ на відміну від $\theta_G(X)$, що характеризує циклічність множини $S_G(X)$.

Описано алгоритм побудови 3-мінімальних графів.

Вони можуть застосовуватися при системному аналізі граф-моделей електричних схем чи компютерних мереж розташованих на торі. З метою дослідження поведінки математичної моделі складної системи розміщеної на орієнтовній поверхні S розглянуто її граф-модель G без кратних ребер та петель. Тоді можливо використати метод φ -перетворень створений для графів стосовно розв'язання задач моделювання шляхом розбиття на "простіші" підмоделі із подальшим ототожненням елементів, виконаним із наперед заданими властивостями. Так розростання моделі G може визначитися наступним γ -перетворенням: $\varphi(G + St_n(g), \sum g_i + a_i) = (\zeta, \{a_i^*\}_1^n)$, де $X = \{a_i^*\}_1^n$ - множина точок графа G із числом досяжності $t_G(x)$, яка є однією множиною для ототожнення, а другою є $\{g_i\}_1^n$ - множина кінцевих вершин зірки $St_n(g)$ із центром g . Основний результат:

1. Узагальнення характеристики $\theta_G(X)$, яка стосується циклічної структури множини X точок графа G вкладеного в поверхню S .

2. Введення нової характеристики $\delta\theta_G(X)$, що вимірює ланцюгову структуру множини X точок графа G на S . Цей результат прислужиться при системному аналізі як граф-моделей, так і їхнього топологічного аспекту. який полягатиме у наявності спільної властивості у ребер та вершин графа-моделі. Розв'язок нашої задачі побудовано на методі φ -перетворень графів[1,2], засновником якого є М.П. Хоменко, та введених ним поняттях. Для повноти викладення наведемо найсуттєвіші з них.

Визначення 1.1.

- перетворенням простору X на X зветься відносний гомеоморфізм

$\varphi: (X, A) \rightarrow (X, A)$, який є сумою $\varphi_0 + \sum_{j=1}^q \varphi_j$ $q+1$ гомеоморфізмів;

1) $\varphi_0 = \varphi|_{X-A} : X \setminus A \cong X \setminus A$, φ_0 - гомеоморфізм.

2) $\varphi_j : A_j \rightarrow A_j$; φ

3) $\sum_{j=1}^q \varphi_j = \varphi|_A$; $\sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j + \sum_{j=k+1}^q \varphi_j \neq \varphi|_A$; $\forall k_i = 1(1)q$

4) $\varphi_j = \sum_{i=1}^{d_j} \varphi_{ji}$, $\varphi_{ji} = \varphi|_{A_{ji}} : A_{ji} \cong A_j$, $\bigcup_{i=1}^{d_j} A_{ji} = A_j$ причому $d_j \geq 2$, $j = 1(1)q$;

$$5) -1 \leq \dim(A_{ji} \cap A_{j'i'}) \leq \dim A_{ji}, \quad i \neq i''; \quad i, i'' = 1(1)d_j, \quad j = 1(1)q$$

$$6) A_{ji} \neq A_{j'i'} \quad \text{при } j \neq j', \quad i, i'' = 1(1)q.$$

Важливий клас φ - перетворень складають φ -перетворення що задовольняють умові: $A_{ji} \cap A_{j'i'} = \emptyset$ при $(i \neq i') \cup (j \neq j')$. Тоді підпростір A розкладається в суму q систем підпростору A_{ji} ,

гомеоморфних один одному всередині кожної системи. Тим самим на підпросторі A задано

$$\text{відношення } R \text{-еквівалентності, т.т. } R = \sum_{j=1}^q R_j \quad \text{причому } R_j[A_{ji}] = \sum_{i=1}^{d_j} A_{ji}.$$

Графи φ -перетворення та їх властивості.

$$\text{Нехай } X = \sum_{r=1}^m X_r, \quad X = \sum_{l=1}^{m_0} X_l, \quad p_0(X_r) = p_0(X_l) = 1 \quad \text{для } l = 1(1)m_0, \quad r = 1(1)m.$$

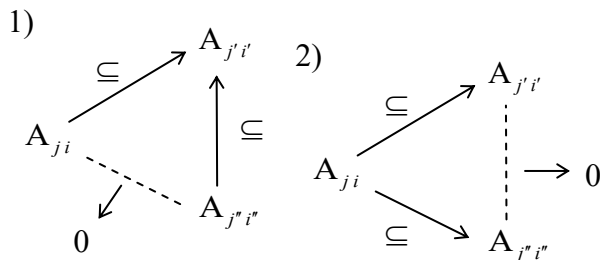
Задамо φ -перетворення $\varphi: (X, A) \rightarrow (X, A)$ у відповідності із визначенням 1.1

Введемо наступні характеристики φ -перетворення:

$$k_r^{j j'} = \left| \left\{ A_{ji} \mid A_{ji} \subseteq A_{j'i'} \subseteq X_r, \quad i = 1(1)d_j, \quad i' = 1(1)d_{j'} \right\} \right| \quad k_{r,j} = \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq j}}^q k_r^{j j'} \quad k^{j j'} = \sum_{r=1}^m k_r^{j j'}$$

$$A(\varphi_j) = \left\{ k^{j j'} / \left(k^{j j'} \neq 0 \right) \wedge \left(\forall j'', j'' \in \{1, 2, \dots, q\} \right) \left[\left(j'' \neq j, j' \right) \Rightarrow \left(\left(k^{j j''} = 0 \right) \vee \left(k^{j'' j'} = 0 \right) \right) \right] \mid j \neq j', \quad j' = 1(1)q \right\}$$

Можливі випадки:



Множина $A(\varphi_j)$ визначається однозначно. Позначимо через k_r^j число $k_r^{j j}$.

Визначення 2.1.

φ -базою $B_j = B(\varphi_j)$ відображення $\varphi_j : A_j \rightarrow A_j$ при заданому φ -перетворенні $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$ зветься сума тих компонент підпростору X які перетинаються з підпростором A_j , тобто. $B_j = \sum_{r \in J_j} X_r$, $J_j = \{r / k_r^j > 0\}$.

Визначення 2.2.

Комплексною φ -базою $B_l = B(X_l)$ над X_l зветься прообраз цієї компоненти при заданому φ -перетворенні, тобто $B_l = \varphi^{-1}(X_l)$

Твердження 2.1.

Якщо задано φ -перетворення: $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$, $J_l = \{j / A_j \subseteq B_l\}$, $v_l = |J_l|$, $l = 1(1)m$,

то 1) $B_l = \bigcup_{j \in J_l} B_j$, $l = 1(1)m_0$

2) $B_l \cap B_{l'} = 0$, $l \neq l'$, $l, l' = 1(1)m_0$

3) $\sum_{l=1}^{m_0} v_l = q$

Доведення цього твердження випливає із того факту, що B_l - множина компонентів просторів X «склеєних» в компоненту X_l по підсистемі A_j .

Визначення 2.3.

Графом комплексної φ -бази B_l φ -перетворення $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$ зветься граф Z_l , $Z_l = (Z_l^0, Z_l^1)$, де $Z_l^0 = \{x_r / X_r \subseteq B_l\}$ вершини з'єднані ребрами так, щоб на всіх вершинах x_r для яких $k_r^j \neq 0$ утворилося дерево з $k_r^j - 1$ -петлею в x_r для усіх j , $j = 1(1)q$.

Визначення 2.4.

Графом φ -баз φ -перетворення зветься граф $Z(X, X) = \sum_{l=1}^{m_0} Z_l$.

Твердження.

1) Граф $Z(X, X)$ визначенооднозначно $\Leftrightarrow p_0(B_j) \leq 2$ для $j = 1(1)q$ тобто. маємо не більше двох зв'язних компонент що перетинаються з системою A_j .

2) Якщо має місце умова: $(A_j = A_{j1} \cup A_{j2}) \quad d_j = 2$, для всіх $j = 1(1)q$, то граф $Z(X, X)$ задано однозначно.

Теорема 2.1.

Для кожного графа $Z(X, X) = Z$ φ -баз φ -перетворення $\varphi: (X, A) \rightarrow (X, A)$ маємо:

1) $p_0(Z) = p_0(X)$

2) $p_1(Z) = \sum_{j=1}^q d_j + p_0(X) - p_0(X) - q$

Для того, щоб упевнитися в справедливості цих властивостей достатньо обчислити $\alpha_1(Z(X, X))$,

$$\alpha_1(Z) = \sum_{j=1}^q (p_0(B_j) - 1) + \sum_{j=1}^q \sum_{r=1}^m (k_r^j - 1) + \sum_{j=1}^q \left\{ \left\lfloor \frac{k_r^j}{k_{r'}}^j \right\rfloor = 0 \right\},$$

де $m = p_0(X)$ та використати формулу $p_1(Z) = \alpha_1(Z) - \alpha_0(Z) + p_0(Z)$

Теорема 2.2.

Графи φ -баз $Z(X, X)$ прості (тобто. без кратних ребер та петель) $\Leftrightarrow k_r^j \leq 1$ і

$$\left\{ \left\lfloor \frac{\varphi_j}{(k_r^j \neq 0) \wedge (k_{r'}^j \neq 0)} \right\rfloor \leq 1 \right\}, \text{ де } r \neq r', \quad r, r' = 1(1)m, \quad j = 1(1)q$$

Іншими словами графи $\{Z\}$ прості \Leftrightarrow

1) на кожній компоненті X_r маємо тільки один підпростір A_{ji} .

2) на кожній парі таких компонент існує не більше однієї системи $\sum_{i=1}^{d_j} A_{ji}$

Визначення 2.5.

Графом φ -перетворення $\varphi|B_l : (B_l, B_l \cap A) \rightarrow (X_l, X_l \cap A)$ комплексної φ -бази B_l при заданому φ -перетворенні простору X зветься граф Λ_l , де

$$\Lambda_l^0 = \{x_r / X_r \subseteq B_l\} + \{y_j / A_j \subseteq B_l\}.$$

$$\Lambda_l^1 = \{(k_r^j - k_{r,j})(x_r y_j) / (X_r \subseteq B_l) \wedge (A_j \subseteq B_l)\} + \{\langle y_j y_{j'} \rangle / (k^{jj'} \in A(\varphi_j)) \wedge (A_j \subseteq B_l)\}.$$

Визначення 2.6.

Графом φ -перетворення простору X зветься граф: $\Lambda(X, X) = \sum_{l=1}^{m_0} \Lambda_l$

Твердження 2.3.

Граф $\Lambda(X, X)$ довільного φ -перетворення визначено однозначно и є простим $\Leftrightarrow k_r^j - k_{r,j} \leq 1$
 $j = 1(1)q, r = 1(1)m.$

Існує зв'язок між $p_1(Z)$ и $p_1(\Lambda)$.

Теорема 2.4.

Якщо для $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$, $d_j = 2$, $k^{jj'} = 0$, при $j \neq j'$, $j, j' = 1(1)q$, то $Z(X, X) \cong \Lambda(X, X)$.

Справедливість теореми слідує із твердження 2.2. та визначення графів Z и Λ .

Визначення 2.7.

Відотображення $\varphi_{j'}, \varphi_{j''}$ $j', j'' \in \{1, 2, \dots, q\}$ зветься суміжним, якщо в $\Lambda(X, X)$ існує ланцюг виду

$$y_{j'}(y_{j'} x_r) x_r (x_r y_{j''}) y_{j''} \text{ або виду } y_{j'} \langle y_{j'} y_{j''} \rangle y_{j''} (y_{j''} x_r) x_r.$$

Говорять також, що $y_{j''}$, $y_{j'}$ суміжні на X_r .

Граф $\Phi(X, X)$ визначається наступним чином:

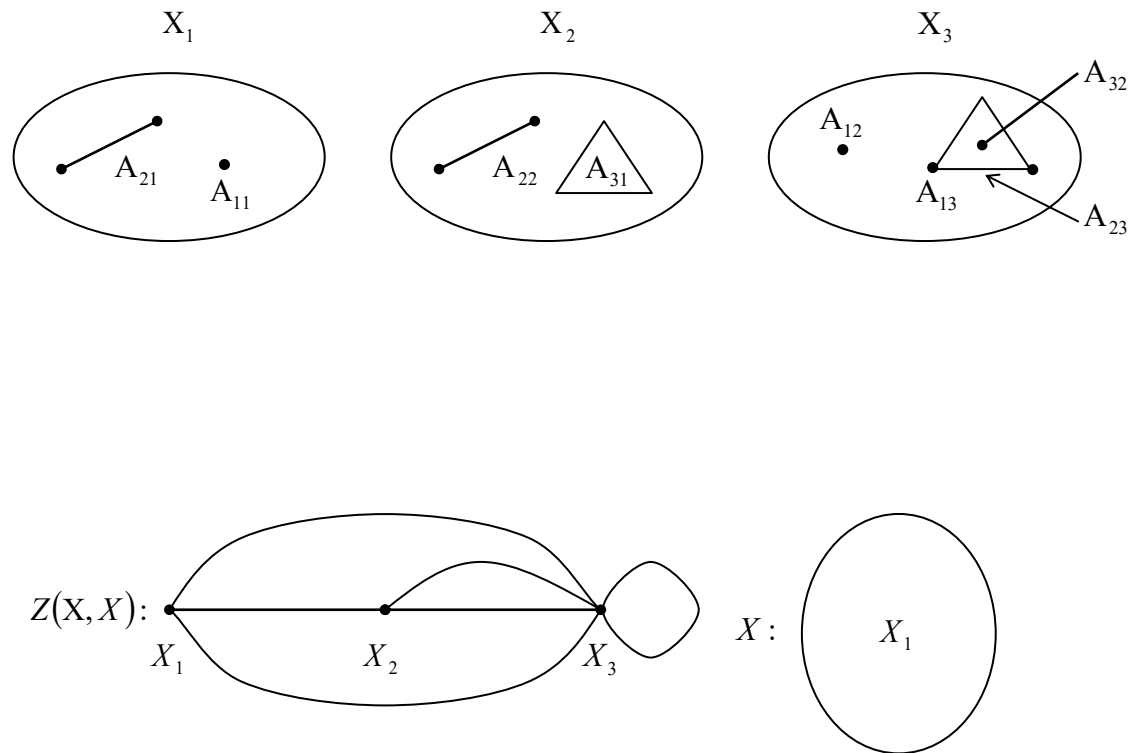
$$\Phi^0(X, X) = \{y_j\}_1^q$$

$$\Phi^1(X, X) = \{q_{j,j'}(y_j, y_{j'}) / j \neq j', j, j' = 1(1)q\}, \text{ де}$$

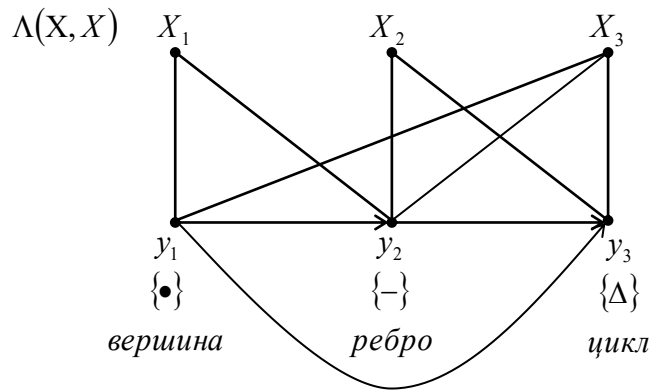
$$q_{j,j'} = |\{c_\Lambda(y_j, y_{j'}) / c_\Lambda(y_j, y_{j'}) \subset \Lambda(X, X)\} \wedge [c_\Lambda(y_j, y_{j'}) = y_j(y_j, x_r)(x_r, y_{j'})y_{j'}] \vee [c_\Lambda(y_j, y_{j'}) = y_j(y_j, y_{j'})y_{j'}]|$$

тобто. $q_{j,j'}$ - число різних ланцюгів вказаного вище виду.

Розглянемо наступний приклад.



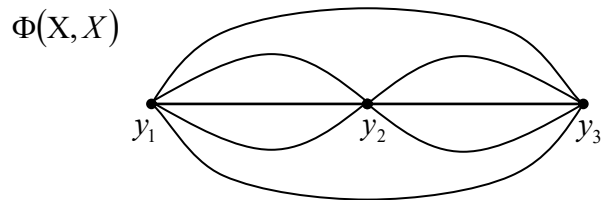
Структура графів на поверхнях. III



$$A_1 = \bigcup_{j=1}^4 A_{1j}$$

$$A_2 = \bigcup_{j=1}^3 A_{2j}$$

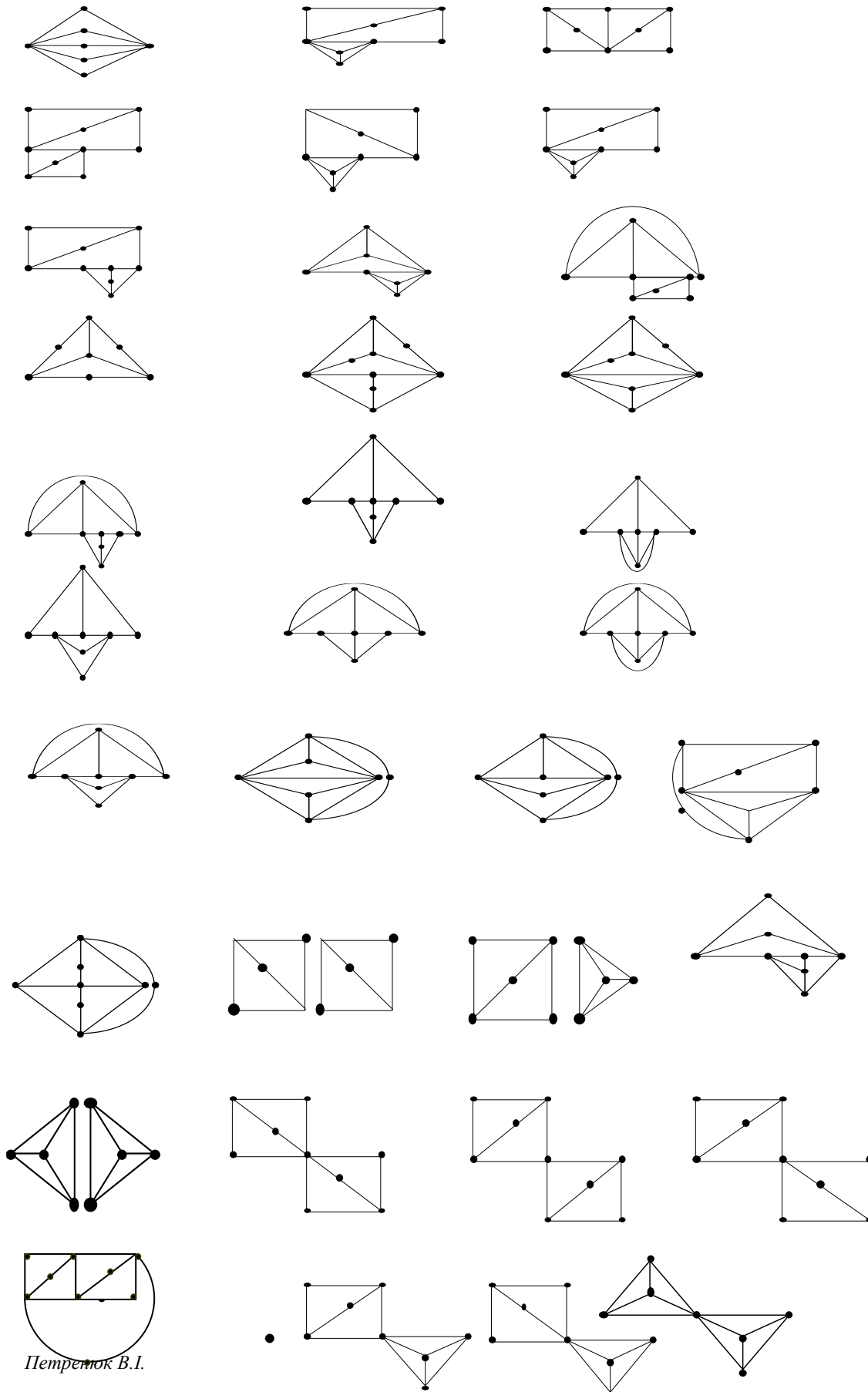
$$A_3 = \bigcup_{j=1}^2 A_{3j}$$



Література

1. Хоменко М.П. Топологические аспекты теории графов, Київ 1971, АН УССР, институт математики.
2. Хоменко М.П. φ - перетворення графів, Київ 1973 институт математики АН УССР.

ДОДАТОК 1. Список 3-мінімальних з 34-х графів



ДОДАТОК 2. СПИСОК 4-МІНІМАЛЬНИХ ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ

Цей список складається із списків вершин графа в яких вершина відділяється двокрапкою від вершин інцидентних з нею, ці списки закінчуються крапкою з комою, а один граф відділяється від іншого графа, як списку списків вершин, символом \ після порядкового номера:

1\ 1:2,4; 2:1,3,5; 3:2,4; 4:1,3,5; 5:2,4,6,7,9,10,12; 6:5,8;
 7:5,8; 8:6,7,9; 9:5,8,11; 10:5,11; 11:9,10,12; 12:5,11;
 2\ 1:2,3,4; 2:1,5; 3:1,5; 4:1,5; 5:2,3,4,6,7,9,10,12; 6:5,8;7:6,8;
 8:6,7,9; 9:5,8,11; 10:5,11; 11:9,10,12; 12:5,11;
 3\ 1:2,4; 2:1,3,4; 3:2,4; 4:1,3,5; 5:2,4,6,9,11; 6:5,7,8; 7:6,9; 8:6,9;
 9:5,7,8,10,12; 10:9,11; 11:5,10,12; 12:9,11;
 4\ 1:2,3,4; 2:1,5; 3:1,5; 4:1,5; 5:2,3,4,9,12; 6:5,7,8; 7:6,9; 8:6,9;
 9:5,7,8,9,11; 10:9,12; 11:9,12; 12:5,10,11;
 5\ 1:2,3,4; 2:1,5; 3:1,5; 4:1,5,8,11; 5:1,3,6,7; 6:5,8; 7:5,8; 8:4,6, 7,9,10;9:8,11; 10:8,11; 11:4,9, 10;
 6\ 1:2,4; 2:1,3,5; 3:2,4; 4:1,3,5,6,8,9,10; 5:2,4,7; 6:4,7; 7:5,6,8; 8:4,7,11; 9:4,11; 10:4,11; 11:8,9,10;
 7\ 1:2,7; 2:1,3,4,12; 3:2,7; 4:2,5,6,7; 5:4,8; 6:4,8; 7:1,3,4,8,11; 8:5,6,7,9,10; 9:8,11,12; 10:8,11; 11:7,9,10;
 12:2,9;
 8\ 1:2,3, 9;2:1,4; 3:1,4; 4:2,3,9,10; 5:9,11; 6:9,11,12; 7:9,12; 8:9,12; 9:1,4,5,6,7,8; 10:4,11; 11:5,6,10;
 12:6,7,8;
 9\ 1:3,8; 2:3,8; 3:1,2,4,5,6; 4:3,7,8,11,12; 5:3,7; 6:5,7; 7:4,5,6; 8:1,2,4,9; 9:8,10; 10:9,11,12; 11:4,10;
 12:4,10;
 10\ 1:2,3,4; 2:1,3,4; 3:1,2,4; 4:1,2,3,5,6,8,9; 5:4,10; 6:4,10; 7:10,11; 8:4,11; 9:4,11; 10:5,6,7; 11:7,8,9;
 11\ 1:2,3,4; 2:1,3,4,5,8,10; 3:1,2,4; 4:1,2,3; 5:2,6,7; 6:5,8; 7:5,8; 8:2,6,7,9,11; 9:8,10; 10:2,9, 11;11:2,10;
 12\ 1:2,4;2:1,3,5; 3:2,4; 4:1,3,5,6,8; 5:2,4,7; 6:4,7; 7:5,6,8,9,11; 8:4,7,10; 9:7,10; 10:8,9,11; 11:7,10;
 13\ 1:2,3,4; 2:1,5; 3:2,5; 4:1,5,7; 5:2,3,4,6,8,12; 6:5,7; 7:4, 6,8;
 8:5,7,9; 9:8,10,11; 10:9,12; 11:9,12; 12:5,10,11;
 14\ 1:2,4; 2:1,3,5,9,10; 3:2,4; 4:1,3,7;5:2,6,11; 6:5,7,8; 7:4,6,11;
 8:6,11; 9:2,11; 10:2,11; 11:5,8,9,10;
 15\ 1:2,3,4; 2:1,5,9; 3:1,9;4:1,9; 5:2,6,10; 6:5,7,9; 7:6,9,11; 8:7,9; 9:3,4,8,10,
 11;10: 5,9; 11:7,9;
 16\ 1:2,3,4; 2:1,5,8; 3:1,11; 4:1,11; 5:2,6,7,9,11; 6:5,11; 7:5,8; 8:2,7,9; 9:5,8,11; 10:5,11; 11:3,4,6,9,11;
 17\ 1:3,7; 2:3,7; 3:1,2,4; 4:3,5,7,11; 5:4,6,8; 6:5,7;
 7:1,2,6,8,9,10; 8:5,7; 9:7,11; 10:7,11; 11:4,9,10;

18\ 1:2,3,5; 2:4,7; 3:1,4; 4:2,3,6,11; 5:1,6,7,8; 6:4,5; 7:5,9; 8:5,9; 9:6,7,8,10, 11; 10:9,11; 11:4,10,12;
12:9,11;

19\ 1:3,7; 2:3,7; 3: 1,2,4; 4:3,5,10,12; 5:4,6,11; 6:5,7,9; 7:1,2,6,8; 8:7,11; 9:6,11; 10:4,11; 11:8,9,10,12;
12:7,11;

20\ 1:2,3,7; 2:1,4; 3:1,4; 4:2,3,5; 5:4,6,9,10; 6:5,7,11; 7:1,6,8,12; 8:7,11; 9:5, 11; 10:5,11; 11:6,8,9,10,12;
12:7,11;

21\ 1:3,7; 2:3,7;3:1,2,4; 4:3,5; 5:4,6,12; 6:5,7,8,9,11; 7:1,2,6,10; 8:6,10; 9:6,10,12; 10:7,8,9; 11:6,12;
12:5,9,11;

22\ 1:3 10; 2:3 10; 3:1 2 4; 4:3 5 7 9 11 12; 5:4 6; 6:5 7 11; 7:4 6 8; 8:7 10 12; 9:4 10; 10:1 2 8 9; 11:4 6;
12:4 8;

23\ 1:2,3,7; 2:1,4; 3:1,4; 4:2,3,5,11; 5:4,6,8,9,10; 6:5,7; 7:1,6,8,9; 8:5,7; 9:5,7,11; 10:5,11; 11:4,9,10;

24\ 1:3,8; 2:3,8; 3:1,2,4; 4:3,5; 5:4,6,11,12; 6:5,7; 7:6,8,9,10,11; 8:1,2,7,12; 9:7,12; 10:5,7; 11:5,7,12;
12:8,9,11;

25\ 1:3,9; 2:3,9; 3:1,2,4; 4:3,5; 5:4,6; 6:5,7,11; 7:6,8,11; 8:7,9,11; 9:1,2,8,12; 10:8,12; 11:6,12;
12:5,7,9,10,11;

26\ 1:2,3,9; 2:1,4; 3:1,4; 4:2,3,5; 5:4,6,11,12; 6:5,7; 7:6,8,10,11,12; 8:7,9; 9:1,8,10,12; 10:7,9; 11:4,7;
12:4,7,9;

27\ 1:2,3,7; 2:3,8; 3:1,2,4; 4:3,12; 5:6,12; 6:5,7,12; 7:6,8,12; 8:7,9,11; 9:1,2,8,12; 10:6,12; 11:8,12; 12:4,5
7,9,10,11;

28\ 1:3,10; 2:3,10; 3:1,2,4; 4:3,5,7, 9,11,12; 5:4,6; 6:5,7,11; 7:4,6,8; 8:7,9,12;

9:4,8,10;10:1,2,9;11:4,6;12:4,8;

29 1:2,3,8; 2:1,4; 3:1,4; 4:2,3,5; 5:4,6,8,11,12; 6:5,7,8; 7:6,8; 8:1,5,7,9,10,11;9-6,8; 9:6,8; 10:8,12; 11:8,12;

12:5,10,11; **30** 1:3,8; 2:3,8; 3:1,2,4; 4:3,5; 5:4,6,8,10,11,12; 6:5,7; 7:6,8,12; 8:1,2,5,7,9; 9:8,10,11; 10:5,9;

11:5,9; 12:5,7; **31** 1:2,3,7; 2:1,4; 3:1,4; 4:3,5,12; 5:4,6,8; 6:5,7; 7:1,6,8,0,10,12; 8:5,7; 9:7,11; 10:7,11;

11:9,10,12; 12:4,7,11; **32** 1:2,3,8; 2:1,4; 3:1,4; 4:2,3,5,12; 5:4,6,8; 6:5,7,9; 7:6,8; 8:1,5,7,9,10,11; 9:6,8;

10:8,12; 11:8,12; 12:4,10,11; **33** 1:2,3,9; 2:1,4; 3:1,4; 4:2,3,5; 5:4,6,11,12; 6:5,7,9; 7:6,8,10; 8:7,9;

9:1,6,8,10,11,12;10:7,9; 11:5,9; 12:5,9; **34** 1:2,6; 2:3,6; 3:1,2,4; 4:3,5,10,11; 5:4,6,9; 6:1,2,5,7,8,10,11; 7:6,9;

8:6,9; 9:5,7,8; 10:4,6; 11:4,6; **35** 1:2,3,6; 2:1,4; 3:1,2,4; 4:3,5,10,11; 5:4,6,8; 6:1,2,5,7,8,10,11; 7:6,9; 8:6,9;

9:5,7,8; 10:4,6; 11:4,6; **36** 1:3,6; 2:3,6; 3:1,2,4; 4:3,5,12; 5:4,6,8,9,10; 6:1,2,5,8; 7:5,8; 8:6,7,12; 9:5,11;

10:5,11; 11:9,11,12; 12:4,8,11; **37** 1:3,7; 2:3,7; 3:1,4; 4:3,5,11; 5:4,7,8,9,10; 6:5,7,12; 7:1,2,6; 8:5,12; 9:5,11;

10:5,11; 11:4,9,10; 12:4,6,8; **38** 1:3,11; 2:3,11; 3:1,2,4; 4:3,5; 5:4,6,10,11; 6:5,7,8; 7:6,12; 8:6,12; 9:10,12;

10:5,9,11; 11:1,2,10,12; 12:5,7,8,9,11;

39\ 1:3,6; 2:3,11; 3:1,2,4; 4:5,11,12; 5:4,6,8,9,10; 6:1,2,5,7; 7:6,12; 8:5,12; 9:5,11; 10:5,11; 11:4,9,10;
12:4,7,8; **40**\ 1:2,3,11; 2:1,4; 3:1,4; 4: 2,4,5,6,11; 5:4,7; 6:4,7; 7:5,6,8; 8:7,9,10,11; 9:8,10,11; 10:8,9,11;
11:1,4,8,9,10; **41**\ 1:2,8,9; 2:1,3,7; 3:2,4,5; 4:3,6; 5:3,7; 6:4,7,10,11; 7:2,5,6,8,9,10,11; 8:1,7; 9:1,7; 10:6,7,11;
11:6,7,11; **42**\ 1:2,10,11; 2:1,3,4,5,9; 3:2,4,6; 4:2,4,6; 5:2,6,7,8; 6:3,4,5; 7:5,9; 8:5,9; 9:2,7,8,10,11; 10:1,9;
43\ 1:2,5,6; 2:1,3,7; 3:2,4,8; 4:3,7; 5:1,7; 6:1,7; 7:2,4,5,6,8,10,11; 8:3,7,9; 9:8,10,11; 10:7,9,11; 11:7,9,10;
44\ 1:2,7,10; 2:1,3,4,5,9; 3:2,6,8; 4:2,5,9; 5:2,4,9; 6:3,9; 7:1,9; 8:3,9; 9:2,3,4,5,7,8,10; 10:1,9; **45**\ 1:2,7,8;
2:1,3,9,10,11; 3:2,4,5; 4:3,6; 5:3,6; 6:4,5,7,8,9; 7:1,6; 8:1,6; 9:2,6,10,11; 10:2,9,11; 11:2,9,10; **46**\ 1:2,3,7;
2:1,3; 3:1,2,4; 4:3,5,10; 5:4,6,11; 6:5,7,10; 7:1,2,6,8,9; 8:7,10; 9:7,10; 10:4,6,8,9,11; 11:5,10;
47\ 1:2,3,5; 2:1,3,5; 3:1,2,4,9,10; 4:3,5,7; 5:1,2,4,6,8; 6:5,7; 7:4,6,8,9,10; 8:5,7; 9:3,7; 19:3,7;
48\ 1:2,3,6; 2:1,3,6; 3:1,2,4; 4:3,5,8,9; 5:4,6,10; 6:1,2,5,7,11; 7:6,10; 8:4,10; 9:4,10; 10:5,7,8,9,11; 11:6,10;
49\ 1:2,3,6; 2:1,3,6; 3:1,2,5,8,9; 4:6,10; 5:3,6,10; 6:1,2,4,5,7; 7:6,10; 8:3,10; 9:3,10; 10:4,5,7,8,9; **50**\ 1:2,3,6;
2:1,3,6; 3:1,2,4,5; 4:3,5,9; 5:1,2,4,10,11; 6:3,7,8; 7:6,9; 8:6,9; 9:4,7,8,10,11; 10:5,9; 11:5,9; **51**\ 1:2,3,5;
2:1,3,5; 3:1,2,4,6; 4:3,5,7,8,9; 5:1,2,4,10; 6:3,11; 7:4,10; 8:4,11; 9:4,10,11; 10:5,7,9; 11:6,8,9; **52**\ 1:2,3,6;
2:1,3,6; 3:1,2,4,9; 4:3,5,7,8,10; 5:4,6,11; 6:1,2,5; 7:4,11; 8:4,9; 9:3,8,10; 10:4,9,11; 11:5,7,10; **53**\ 1:2,3,7;
2:1,3,7; 3:1,2,4,8; 4:3,5,6,10; 5:4,6; 6:4,5,7,8,10; 7:1,2,6,9; 8:6,9; 9:7,8,10; 10:4,6,9; **54**\ 1:2,3,7; 2:1,3,7;
3:1,2,4; 4:3,5,7,9; 5:4,6,11; 6:5,7; 7:1,2,4,6,8,10,11; 8:7,9; 9:4,8,10; 10:7,9; **55**\ 1:2,3,8; 2:1,3,8; 3:1,2,4;
4:3,5,11; 5:4,6,10; 6:5,7,11; 7:6,8,9; 8:1,2,7,11; 9:7,11; 10:5,11; 11:4,6,8,9,10; **56**\ 1:2,3,8; 2:1,3,8; 3:1,2,4;
4:3,5,10,11; 5:4,6; 6:5,7,9,10,11; 7:6,8; 8:1,2,7,9,11; 9:6,8; 10:4,6; 11:4,6,8;
57\ 1:2,3,6; 2:1,3,6; 3:1,2,4,8; 4:3,5,7; 5:4,6; 6:1,2,5,7,8,10,11; 7:4,6; 8:3,6,9; 9:8,10,11; 10:6,9; 11:6,9;
58\ 1:2,3,8; 2:1,3,8; 3:1,2,4,5; 4: 4:3,10,11; 5:3,6; 6:5,7,9,10,11; 7:6,8; 8:1,2,5,7,9,10,11; 9:5,8; 10:4,6;
11:4,6,8; **60**\ 1:2,3,8; 2:1,3,8; 3:1,2,4; 4:3,5,10,11; 5:4,6,8; 6:5,7,9; 7:6,8,9; 8:1,2,7,9,10,11; 9:6,8; 10:3,8;
11:4,8; **61**\ 1:2,3,7; 2:1,3,7; 3:1,2,10,11; 4:3,5,8; 5:4,6,9; 6:5,7; 7:1,2,6,8; 8:4,7,9,10,11; 9:5,8; 10:3,8;
11:3,8; **62**\ 1:2,3,8; 2:1,3,8; 3:1,2,4,11; 4:3,5,7; 5:4,6,9; 6:5,7; 7:6,8,9; 8:1,2,3,7; 9:5,7; 10:3,7; 11:3,7; **63**/
1:2,3,11; 2:1,3,11; 3:1,2,4,5; 4:3,7,10,11; 5:3,6; 6:5,7,9; 7:4,6,8; 8:7,10,11; 9:4,6; 10:4,8; 11:1,2,4,8; \end

Література

1. Петренюк В.І. Список 3-минимальних планарних графів, препринт, ГПНБ -31,10,86, #2450-86,~7с.
- 2, Петренюк В.І. Склеювання планарних графів по ланцюгах, Матеріали семінару "Комбінаторні конфігурації та їх застосування",19-20.04.2006р,С.36-39.

РОЗДІЛ 4. СТРУКТУРА ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ НА ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА

4.1. АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ 2-ЗВ'ЯЗНИХ МІНОРІВ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА

Розглянемо задачу побудови всіх 2-зв'язних графів-обструкцій для N_2 - поверхні Клейна із множинами ребер, кожне з яких є суттєвим відносно неорієнтованого роду 3 при операціях видалення ребра чи стискання його в точку, тобто мінорів неорієнтованого роду 3. В [4] наведено числом 668, як потужність множини всіх неізоморфних 2-зв'язних мінорів неорієнтованого роду 3, але немає їхніх діаграм. Використаємо для побудови діаграм 2-зв'язних мінорів неорієнтованого роду 3 структурні властивості таких графів, вписані в [5,8]. Список всіх неізоморфних мінорів неорієнтованого роду 2 містить 35 графів. В [6] наведено 12 базисних графів проективної площини, утворених перетвореннями методу релятивних компонент, та наведено множини з 63-х базисних графів для поверхні Клейна. Подібна задача побудови графів-обструкцій неорієнтованого роду на основі множини відомих графів-обструкцій для неорієнтованого роду k , має розв'язок для не більш ніж на 10 вершинах [7], а саме, повної множини для проективної площини та неповної для інших поверхонь, зокрема, поверхні Клейна. Використаємо метод ϕ -перетворень графів та теорему 2 [8].

Твердження 1. Нехай G_i - мінор неорієнтованого роду 2, а граф G поданий як ϕ -образ $\phi(G_i \setminus e + St_n(H), \sum_{j=1}^2 (a_{j1} + g_{j1})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_{i=1}^2)$, де $i=1(1)35$, $G_i \setminus e \in G_i$ - мінор із видаленим ребром e та заданими точками з множини M_i , $M_i = \{a_{j1}, a_{j2}\}$, досяжною на поверхні Клейна. Задано $St_n(H)$ - квазізірку з центром графом H та множиною висячих ребер як сумою підмножин $\{(a_i, g_{j1})\}_{i=1}^m$ та $\{(b_k, g_{j2})\}_{k=m+1}^n$, де $n > m \geq 1$, які висячими вершинами a_i, b_k приклеєно довільним чином до двох точок з множини X , $X = \{g_{j1}, g_{j2}\}$, причому множина точок Y , $Y = \{a_i, b_k\}_{i+k=1}^n$, на евклідовій площині має число досяжності $t_H(Y, S_0)$, де $t_H(Y, S_0) = 2$, а множина X на поверхні Клейна має число досяжності $t_{St_n(H)}(X, N_2)$, де $t_{St_n(H)}(X, N_2) = 1$.

Якщо граф H гомеоморфний одному з графів $\{K_4, K_{2,3}, K_5 \setminus e\}$ та має задану множину точок $X \cup Y$, де $X \cap Y = \emptyset$, досяжно на проективній площині, та з числом досяжності $t_G(X \cup Y, S_0)$ відносно евклідової площини S_0 , де $t_G(X \cup Y, S_0) = 2$, то граф G - мінор чи граф-обструкція неорієнтованого роду 3.

Доведення. Граф G , $G = D_{17}$, можливо подати як призму, в основах якої лежать два підграфи ізоморфних K_4 , вершини яких попарно з'єднані ребрами. Множину G^1 ребер графа G розіб'ємо на класи еквівалентності відносно групи автоморфізмів цього графа, тобто підмножини ребер графів обох основ та множина з чотирьох ребер граней. Для кожного представника класу еквівалентності проведемо стискання в точку. Результат наведено на рис.1. для ребер класу з представником (4.6), на другій карті для (7,8). Згідно цих карт кожна пара вершин цих стиснутих графів лежить або на границі 2-клітки чи псевдоклітки, тобто є досяжною на проективній площині. Тому можливо приклеїти до червоних пар квазізірки, з числа наведених на рис.2, ототожнивши з парою неінцидентних вершин графа G . Варіанти склеєних ϕ -образів графів наведені на рис.3.

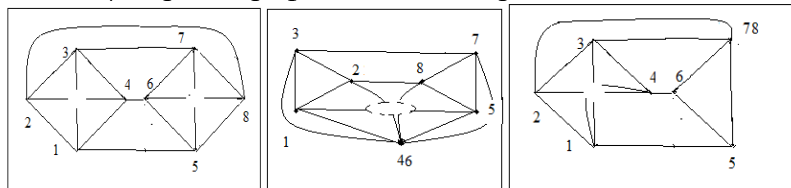


Рис.1. Вкладення D_{17} в N_2 на 1-й карті, на 2-й та на 3-й графи $G_{(4,6)}$, $G_{(7,8)}$ вкладені в N_1 .

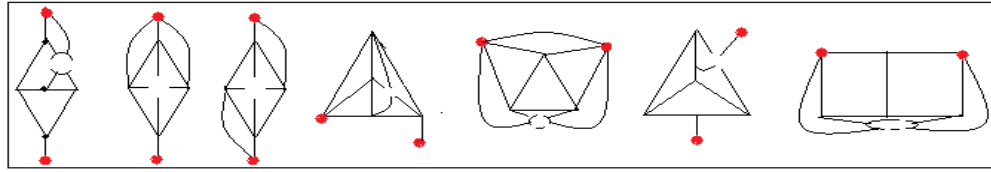
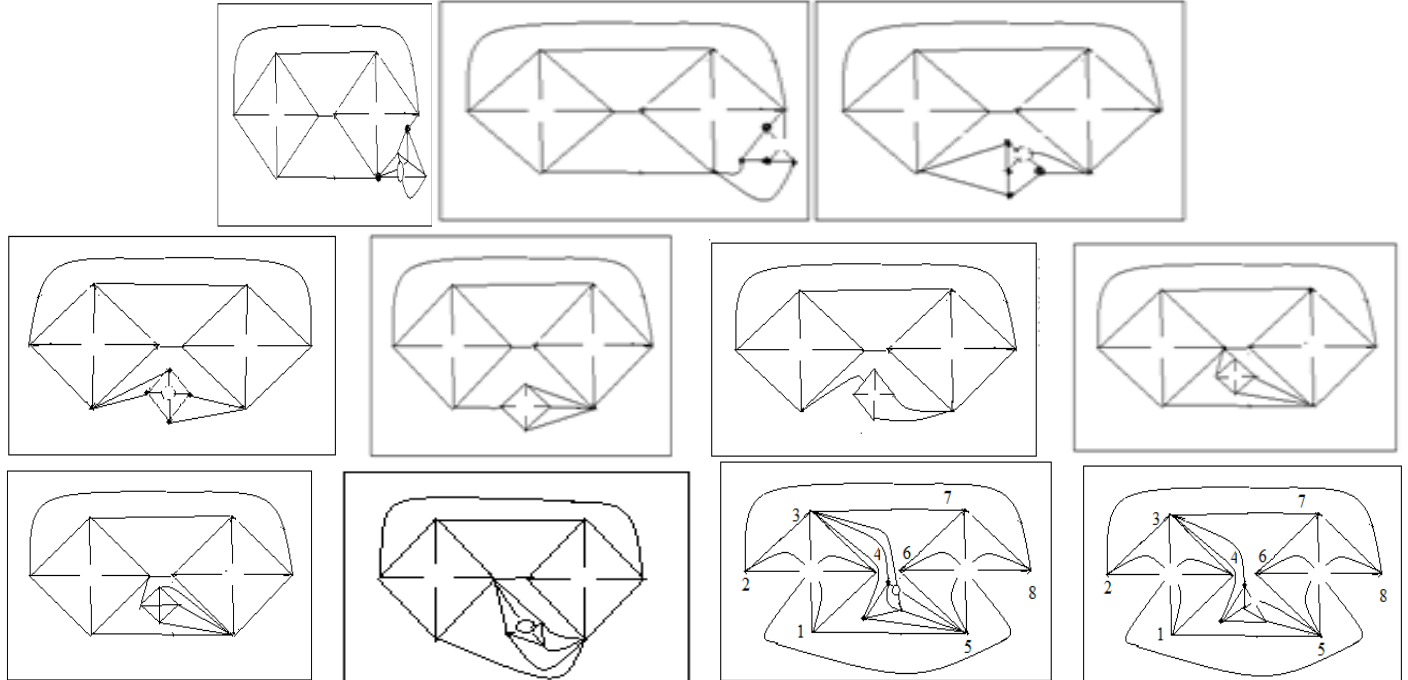


Рис.2. Квазізірки $St_n(H)$ зі склеєними в пару точок підмножинами висячих вершин.

Для побудови 2-зв'язних мінорів для N_2 використаємо множину всіх неізоморфних мінорів проективної площини. Нехай $G := D_{17}$. Перебираємо всі різні варіанти склейки по множині з двох точок графа G та пари точок квазізірки із центром H , можливим є ототожнення кількох висячих вершинами в одну чи другу точку пари склейки. Можливими будуть наступні варіанти φ -образу зображені на рис 2, де виділено пару склеєних висячих вершин, які приклеюватимемо до пари вершин графа D_{17} . Відмітимо, що деякі висячі ребра квазізірки $St_n(H)$ стягнуті в точку як несуттєві відносно неорієнтованої поверхні N_2 . Виберемо точки склейки робимо серед тих пар вершин, які є елементами досяжної множини на N_2 . Видалимо одне з ребер (a,b) та приклеїмо попарно до кінцевих вершин видаленого ребра ті вершини квазізірки із центром H та множиною висячих вершин, розбитою на дві підмножини, що утворились при ототожненні цих двох підмножин. Можливими є випадки склейок зображені на рис.2. Доведення твердження 1 закінчене.



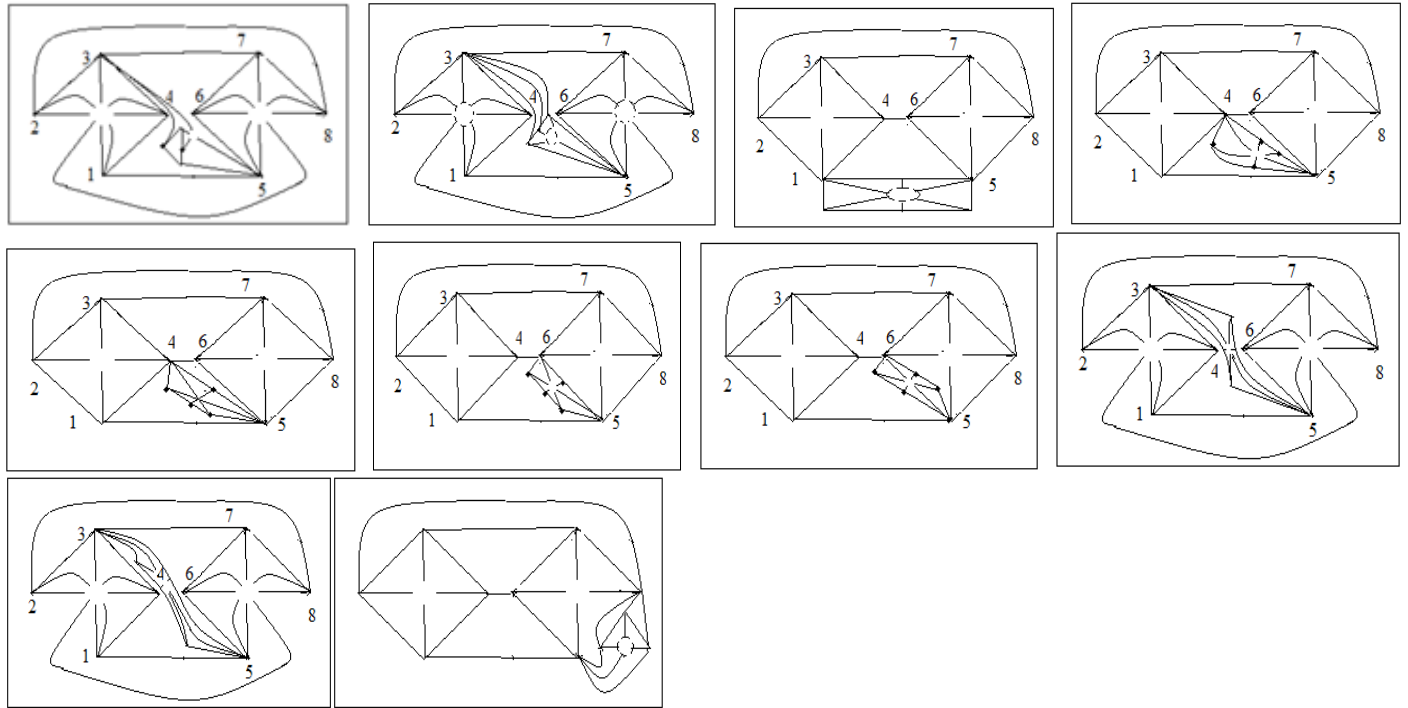


Рис. 3. Діаграми 2-зв'язних мінорів для поверхні Клейна..

Твердження 2. Приблизне число 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна - 700.

Доведення. Кількість зв'язних мінорів для проективної площини дорівнює 32. Для вибраного наосліп серед цих графів мінору D_{17} маємо множину з 21-го графа, наведену на рис. 3. Вважатимемо, що для кожного з графів-мінорів проективної площини кількість мінорів приблизно однакова. Отже матимемо число 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна приблизно 700. Схематичне доведення закінчене. Твердження 1 є основою лінійного алгоритму 1 яким можливо побудувати всі 2-зв'язні мінори поверхні Клейна.

Алгоритм 1. Вхід: Множина $\{G_i\}_{i=1}^{35}$ із 35-ти мінорів проективної площини, множина всіх неізоморфних вкладень цих графів в поверхню Клейна, $\{St_{n_j}(H_j)\}_{j=1}^7$ множина квазізірок для склеювання по двом парам виділених вершин. Вихід: Множина 2-зв'язних графів-обструкцій $\{\varphi(G_k)\}_{k=1}^R$ неорієнтованого роду 3.

Для циклу з параметром i від 1 до 35 виконати наступні дії:

1. $G := G_i$;
2. Побудуємо множину $B = \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{|B|}$ всіх пар вершин графа G , які розташовані на границі 2-клітки поверхні Клейна чи її псевдоклітки та зберігають досяжність в графах, отриманих шляхом видалення довільного ребра чи стискання ребра в точку.
3. Для циклу з параметром k від 1 до $|B|$ виконати наступні дії:
4. $(a, b) := \{a_k, b_k\}$;
5. Для циклу з параметром j від 1 до 7 виконати наступні дії:
 - a. $St_n(H) := St_{n_j}(H_j)$;
 - b. Склеїмо попарно $(G, (a, b))$ та $(St_n(H), (a', b'))$;
 - c. Отримаємо пару $\varphi(G), (a^*, b^*)$;
 - d. Виводимо $\varphi(G)$;

- е. Кінець циклу по j .
- 6. Кінець циклу по k
- 7. Кінець циклу по i .
- 8. Кінець алгоритму 1

Таким чином наведена побудова лінійного побудови діаграм 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна.

Література

- Хоменко М. П.* Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ АНУ. Киев.. – 1973. -383 с.
- Хоменко М. П.* φ -перетворення графів. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1970. -299 с.
- Mohar B., Thomassen C.* Graphs on Surfaces. Johns Hopkins University Press, 2001. – 412 p.
- P.Skoda.** **Obstructions for embedding graphs into surfaces**, Simon Frazer University, PhD dissertation, 2012.-133 p.
- Петренюк В.І.* Про структуру площинних підграфів графів-обструкцій неорієнтованої поверхні заданого роду. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021, № 33. с. 105–109.
- [Anna Flotto. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, University Bielefeld, 2010, -174 pp.](#)
- Hur S.* The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Phd, Ohio State University, 2008.
http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1209141894.
- Петренюк В.І., Петренюк Д.А., Оришака О.В. Структура проективно площинних підграфів графів - обструкцій заданої поверхні. *Кібернетика та комп'ютерні технології*, №2, Інститут кібернетики НАНУ, Київ, 2022, с.13-30.
http://cctech.org.ua/images/docs/Articles/2022/paper_22_2_2.pdf

4.2. СТРУКТУРА ПРОЕКТИВНО ПЛОЩИННИХ ПІДГРАФІВ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ЗАДАНОЇ ПОВЕРХНІ

Розглянемо *задачу* вивчення метричних властивостей підграфа $G \setminus v$, де v довільна вершина графа-обструкцій G неорієнтованого роду k , $k \geq 1$, які визначатимуть множини точок приєднання одного підграфа до іншого і дозволятиме будувати прототипи графів-обструкцій із числом вершин більшим 10 неорієнтованого роду більшого ніж k . Певним чином з цією задачею пов'язана гіпотеза Ердьоша [3] про покриття графів-обструкцій неорієнтованої поверхні роду k , де $k \geq 1$, найменшою за включенням множиною із $k+1$ -го графа гомеоморфного $K_{3,3}$, або K_5 . В [4] гіпотеза конструктивно доведена для 35-ти мінорів графів-обструкцій проективної площини N_1 , множини 62-х із не більшим ніж 10-ма вершинами графів-обструкцій та їхніх розщеплень для поверхні Клейна N_2 , а також деяких графів-обструкцій для поверхонь N_3 та N_4 . В роботі [5] доведено існування скінченної множини графів-обструкцій для неорієнтованої поверхні. Подібна задача розглядалася в [6], де розглядалися моделі-прототипи графів-обструкцій. Прототипом графа-обструкції неорієнтованого роду k , будемо називати граф, що має власним підграфом граф-обструкцію неорієнтованого роду k , $k \geq 1$. В роботах [7, 8] розглядалась дотична задача покриття множини вершин найменшою кількістю циклів-границь 2-кліток, поняття кліткової відстані наведено в [9, 10]. Тут досліджено граничні межі орієнтованого роду графів, утворених з площинних графів і простої зірки, приклеєної до деяких його вершин. Гіпотетично можливо їх отримати шляхом рекурсивного ϕ -перетворення графа-обструкції проективної площини та копії його площинного підграфа, заданого на вершинах, ребрах чи частинах ребер, або простих ланцюгах, тобто досяжним частинам так званого графа-основи (графа гомеоморфного графу Куратовського і вкладеного в проективну площину). Вважатимемо, що замість одного підграфа може бути кілька копій підграфів графів-обструкцій проективної площини. Нехай задано мінімальне вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$, тобто це найменша по включенню підмножина $\{s_i\}_{i=1}^t$ множини $S_G(N, f)$, $S_G(N, f) = N \setminus f(G)$, складена з кліток на границях яких розташовано точки з множини M . Кожен граф G неорієнтованого роду k , $k \geq 1$, може бути поданим наступним перетворенням:

$\phi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, як ϕ -образ графа H та зірки $St_n(g_0)$, приєднаної висячими

вершинами g_i до точок a_i , де задана множина M точок графа H , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, $M \subseteq (\partial s_1 \cup \partial s_2) \cap H^0$, яка розміщується на границях кліток s_1, s_2, \dots, s_t множини $N \setminus f'(H)$, де $t \geq 2, m \geq 2, i = 1, 2, \dots, m$, мінімальним вкладенням $f', f': H \rightarrow N'$.

Аналогічно характеристикам вкладення графа до орієнтованої поверхні на підмножині $\{s_i, s_j, s_k\}$ множині $S_G(N, f)$, визначимо характеристику θ , $\theta = 1$, множини M коли виконується умова $\partial s_i \cap \partial s_j \cap \partial s_k \neq \emptyset$, тобто є, щонайменше, одна спільна точка на їхніх границях, яка є центром кліткової зірки, утвореної із трьох кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$, або визначено характеристику $\partial\theta$, $\partial\theta = 1$, якщо довільні пари цих кліток мають на границях, мінімум, одну спільну точку, тобто утворюють клітковий цикл довжини 3, утворених із трьох кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$.

Позначення 1. Позначатимемо $\angle(s_i, s_j)$ та називатимемо кутом між клітками чи псевдоклітками s_i, s_j множини $S_G(N, f)$ найменшу по включенню зірку графа G з центром в a , $a \in G^0 \cap (\partial s_i \cap \partial s_j)$, із множиною ребер-променів, розташованих з одного боку щодо точки перетину границь кліток s_i, s_j . Саме ці ребра чи їхні частини вкладатимемо до ленти Мебіуса, приклеєної до площини, для утворення псевдоклітки, на границі якої розміщуються об'єднані границь s_i, s_j . На 4-й та 5-й

картах рис. 1 показано кут між пофарбованими 2-клітками та вкладення його на ленту Мебіуса, приклеєну до елементарного диска поверхні N .

Позначення 2. Нехай задане мінімальне вкладення f графа H до неорієнтованої поверхні N . Позначатимемо $\alpha(\angle(s_1, s_2))$ операцію перетворення ребер $e_1, e_2, f(e_1) \subset \partial s_1, f(e_2) \subset \partial s_2$, зі спільною вершиною a кліток s_1, s_{12}, s_2 , де $f(e_1) \cup f(e_2) \subseteq \partial s_{12}$, причому вкладення f графа H в N розміщує на границях кліток s_1, s_2 множину $f(M), f(M) = f(\{a_i\}_{i=1}^m)$.

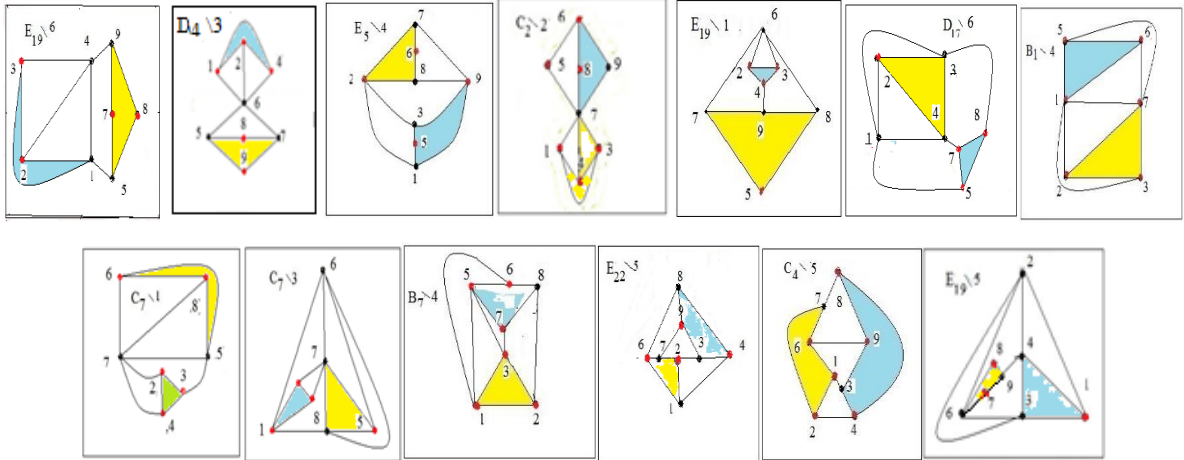


Рис. 1. Площинні підграфи проєктивних мінорів із множиною M з червоних вершин на границях зафарбованих кліток з числом досяжності 2 та клітковою відстанню 2 між двома виділеними кольором клітками-гранями на границях яких розташовані підмножини множини M

Наведемо алгоритм 1 який за поліноміальний час видає вкладення f вхідного графа G до поверхні N' неорієнтованого роду $\gamma(N')$, де має місце нерівність $\gamma(N') \geq \gamma(G) + 1$, а множина $N' \setminus f(G)$ містить тільки 2-клітки та псевдоклітки.

Алгоритм 1

Вхід: подано скінчений граф G неорієнтованого роду $k, k \geq 1$, як φ -образ графа H та зірки $St_n(g_0)$, наступним перетворенням: $\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, тобто висячі вершини g_i зірки

$St_n(g_0)$ приєднано до точок a_i з множини точок M графа H , де $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, яка мінімальним вкладенням $f', f': H \rightarrow N'$ розміщується на границях кліток s_1, s_2, \dots, s_t множини $N' \setminus f'(H)$, де $t \geq 2, i = 1, 2, \dots, t, t \geq 2$. Нехай задане мінімальне вкладення f графа H до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності $t, t_H(M, N) = t$, множини точок M .

Функція A (вхідні клітки s_1, s_2 ; вихідна клітка s). Виконується операція $\alpha(\angle(s_1, s_2))$ перетворення ребер $e_1, e_2, f(e_1) \subset \partial s_1, f(e_2) \subset \partial s_2$, зі спільною вершиною a кліток s_1, s_{12}, s_2 , де $f(e_1) \cup f(e_2) \subseteq \partial s_{12}$, причому вкладення f графа H в N розміщує на границях кліток s_1, s_2 множину $f(M)$,

$f(M) = f(\{a_i\}_{i=1}^m)$. Приклеїмо до клітки s_{12} ленту Мебіуса наступним чином. Розщепимо довільну внутрішню точку $f(x_i)$ ребра $e_i, e_i = (a_i, b_i)$ на точки x_i', x_i'' , де $i = 1, 2$. Виріжемо в середині s_{12} елементарний диск з центром в x_i та розташуємо на його границі діаметрально протилежні пари точок $(x_1', x_2''), (x_1'', x_2')$ як кінцеві точки частин перехрещених ребер на площині елементарного

диска. Отримаємо таким чином псевдоклітку s неорієнтованої поверхні N' , де $\gamma(N') = \gamma(N) + 1$, $\partial s = \partial s_1 \cup \partial s_2$, в яку можливо вкласти ту частину зірки $f'(St_n(g_0))$, яка приклеєна до точок множини $f(M) \cap \partial s$ і таким чином матимемо вкладення графа G в поверхню N' .

Вихід: Множина R кліток чи псевдокліток неорієнтованої поверхні N' , $\gamma(N') \geq \gamma(G) + 1$, границі яких не перетинаються, а на їхніх границях розташовані всі точки множин M .

Початкові значення: $S := \{s_i\}_{i=1}^t$; $\partial S := \{\partial s_i\}_{i=1}^t$; $R := \emptyset$.

Для параметра i , що міняється від 1 до $|S|$ кроком 1 виконати циклічні дії.

Виберемо клітку s_1 , $s_1 \in S$.

Для параметра j , що міняється від $i+1$ до $|S|$ кроком 1 виконати циклічні дії.

Виберемо клітку s_j , $s_j \in S$;

Якщо $\partial s_j \cap \partial s_1 \neq \emptyset$ то виконати:

початок дій;

$s := A(s_1, s_j)$.

Перенумеруємо елементи множини $S := S \setminus \{s_1, s_j\} \cup s$;

$R := R \cup \{s\}$.

Перейти на мітку Крок_1.

кінець дій;

Крок_2: Кінець циклу по j .

Крок_1: Кінець циклу по i .

Кінець алгоритма 1.

Твердження 1. Алгоритм 1 для зв'язного графа G неорієнтованого роду $\gamma(G)$ на n вершинах та q ребрах із заданою множиною точок з числом досяжності t за поліноміальний час $O(|S|^2)$, $|S| = 2 - \gamma(G) - n + q$, коректно будує множину ізольованих кліток вкладення графа до неорієнтованої поверхні, де $1 \leq t \leq |S|$.

Шляхом застосування наведеного алгоритму можливо довести наступні леми 1 та 2.

Лема 1. Мають місце наступні твердження.

1. Дві зірки, що перетинаються по внутрішнім точкам висячих ребер на площині елементарного диску, можливо вкласти без перетину у внутрішніх точках до елементарного диску площини із приклеєною до нього лентою Мебіуса.
2. Якщо ребро e перетинає ребра трикутника K_3 , розташованого на площині елементарного диска, то *справедливі* наступні твердження:

а) ребра графа K_4 можливо вкласти на ленті Мебіуса, приклеєній до елементарного диска так, щоб вкладалися без перетину на ленті Мебіуса пара ребер, схрещених на евклідовій площині, та одне з двох паралельних ребер;

б) якщо ребро e перетинає ребро, що є основою трикутника, то на приклеєну ленту Мебіуса можливо, або вкласти ребро e чи всі ребра трикутника;

в) якщо ребро e не перетинає інше ребро, що є основою трикутника, то можливо вкласти на приклеєну ленту Мебіуса ребро e та два суміжних з ним ребра трикутника, а ребро, що є основою трикутника – не вкладається на ленту Мебіуса.

Лема 2. Нехай на множині $S_G(N, f)$ задано множину з кліткових зірок із, мінімум, двома клітками-променями із спільною точкою – центром зірки та кліткових циклів довжиною не менше 3. Мають місце наступні співвідношення.

1. Нехай задано кліткову зірку чи клітковий цикл довжини 3. Для утворення однієї кітки, яка б містила на своїй границі об'єднання границь кліток зірки чи клітковий цикл довжини 3, необхідно приклеїти дві ленти Мебіуса до поверхні N .
2. Пара кліток зі спільною вершиною на границях перетворюється на одну псевдоклітку, яка містить на границі об'єднання двох границь шляхом приклеювання ленти Мебіуса;
3. Шляхом приклеювання ленти Мебіуса до місця вкладення спільної вершини кожної пари кліток з множини $S_G(N, f)$ неорієнтованої поверхні N можливо утворити поверхню N' роду $\gamma(N')$, де $\gamma(N') = \gamma(N) + \kappa$, на якій множина M є досяжною, тобто виконується рівність $t_G(M, N') = 1$, де κ – число всіх можливих кутів, які утворені під час перетворень кожної пари кліток з множини $S_G(N, f)$ чи множини новоутворених псевдокліток, що мають спільні точки на своїх границях.

Визначення 1. Нехай задано мінімальне вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$. Будемо називати клітковою довжиною $d_G(s_i, s_j, f)$ між границями кліток s_i, s_j із заданими на них підмножинами L_i, L_j вершин зв'язного графа G , де $L_i \subseteq G^0 \cap \partial s_i$, $L_j \subseteq G^0 \cap \partial s_j$, $\{s_i, s_j\} \subseteq S_G(N, f)$, потужність $|J|$ найменшої по включенню впорядкованої множини J , $J = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+k}, s_j\}$, $J \subseteq S_G(N, f)$, де послідовні пари кліток мають на своїх границях, мінімум одне, спільне ребро. Причому підмножину множини J , складену із не менше ніж двох послідовних кліток зі спільною вершиною на границях, будемо рахувати як одну клітку. Також будемо вважати, що на множині J задано особливий простий клітковий ланцюг L_{ij} , $L_{ij} = L(s_i, s_j)$, який з'єднує клітки s_i, s_j кліткового графа для графа G . У випадку незв'язного графа G одна з кліток множини J буде не 2-кліткою і не псевдокліткою.

Визначення 2. Будемо позначати T , $T = T_G(M, N)$, та називати деревом досяжності множини точок M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, зв'язного графа G , при заданому мініальному вкладенні f графа G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$, пару множин $(\{s_i\}_1^t, \{L_{ij}\})$, де $\{L_{ij}\}$ – найменша по включенню множина особливих кліткових ланцюгів $L(s_i, s_j)$ що, або безпосередньо, або як об'єднання кількох послідовних ланцюгів зі спільним кінцем одного та початком іншого, що з'єднують всі пари кліток s_i, s_j та мають найменшу суму довжин взяту по всім L_{ij} із множини $\{L_{ij}\}$.

Визначення 3. Для множини точок M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, площинного графа G з числом досяжності $t_G(M, \Sigma_0)$, де $t_G(M, \Sigma_0) = t$, $t \geq 2$, будемо називати клітковою довжиною $d_G(M, t)$, де $d_G(M, t) = \min_{\forall f \in fGN \forall s_i, s_j \in T} \sum d_G(s_i, s_j, f)$, між підмножинами L_i, L_j множини M , $M = L_i \cup L_j$, $L_i \cap L_j = \emptyset$,

розташованими на границях довільних кліток s_i, s_j , $\{s_i, s_j\} \subset S_G(\Sigma_0, f)$, що реалізують число досяжності $t_G(M, \Sigma_0)$, де fGN – множина всіх неізоморфних вкладень графа G до Σ_0 , що реалізують число досяжності $t_G(M, \Sigma_0)$ множини точок M .

Визначення 4. Будемо називати множини M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, точок графа G з числом досяжності t , де $t_G(M, \Sigma_0) = t$, критичною відносно кліткової довжини $d_G(M)$ при операції видалення довільного елемента a_i , якщо має місце нерівність $d_G(M \setminus a_i) < d_G(M)$, чи відносно операції стискання ребра $u = (ab)$ в точку a' (якщо $\{a, b\} \subset M$, то замість M розглядатимемо множину $M' = (M \setminus \{a, b\}) \cup \{a'\}$), якщо має місце нерівність $d_{Gu}(M') < d_G(M)$.

Визначення 5. Будемо називати граф G мінімальним відносно $d_G(M)$ при операції видалення або стискання у точку довільного ребра u , якщо, або $d_{Gu}(M) + 1 = d_G(M)$, $d_{Gu}(M') < d_G(M)$, де Gu - граф зі стиснутим у точку a' ребром $u = (a, b)$ та $M' = (M \setminus \{a, b\}) \cup \{a'\}$.

Твердження 2. Кожен граф G неорієнтованого роду k , $k \geq 1$, поданий перетворенням:

$\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, як φ -образ площинного графа H та зірки $St_n(g_0)$, приєднаної

вісячими вершинами g_i до точок a_i , де M – задана множина точок графа H , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$,

$M \subseteq (\partial s_1 \cup \partial s_2) \cap H^0$, яка розміщується на границях кліток s_1, s_2, \dots, s_t множини $\Sigma_0 \setminus f(H)$, де $t \geq 2$, $m \geq 2$, $i = 1, 2, \dots, m$, мінімальним вкладенням f , $f: H \rightarrow \Sigma_0$, та задовольняє наступним співвідношенням.

1. Якщо $t_H(M, \Sigma_0) = 2$, $k \geq 2$, то $d_H(M) = k - 1$.

2. Якщо $t_H(M, \Sigma_0) = 3$, $\theta_H(M, \Sigma_0) = 1$, $k = 2$, то $d_H(M) = 1$.

3. Серед ребер підграфа H можуть бути несуттєві відносно числа досяжності заданої множини точок чи кліткової відстані цієї ж множини при видаленні ребра, чи стисканні ребра у точку.

Доведемо співвідношення 1. Нехай граф G неорієнтованого роду k , $k = 2$, – φ -образ наступного перетворення: $\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, тобто до площинного графа H приєднано зірку

$St_n(g_0)$ шляхом отожднення пар (a_i, g_i) , утворених точками a_i графа H , та вісячими вершинами g_i , де $i = 1, 2, \dots, m$. Будемо вважати, що M – задана множина точок графа H має число досяжності 2, де $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, тобто мінімальним вкладенням f графа H до евклідової площини Σ_0 розміщується на границях двох кліток s_1, s_2 , де $\{s_i\}_1^2 \subseteq \Sigma_0 \setminus f(H)$. Оскільки $t_H(M, \Sigma_0) = 2$, то існує клітковий ланцюг між клітками s_1, s_2 довжиною d , $d \geq 1$. Розглянемо два вичерпні випадки.

1. Припустимо, що існують ребра e_1, e_2 , такі, що $f(e_1) \subset \partial s_1, f(e_2) \subset \partial s_2$, зі спільною вершиною a .

Видалимо з цих ребер частини e_1', e_2' , де $e_1' \cap e_2' \cap G^0 = a$, та розщепимо вершину a на дві вершини a' , a'' , які є центрами двох зірок $St_G(a')$, $St_G(a'')$, одна з яких містить $f(e_1' \cup e_2' \setminus \{a\}) \cup \{a'\}$ та розглянемо нову клітку s , яка утворилася з двох кліток s_1, s_2 при розщепленні вершини a та має границю ∂s , де

$\partial s = \partial s_1 \cup \partial s_2$. До клітки s приклеїмо ленту Мебіуса L на яку розмістимо вкладенням f' зірку $St_G(a')$, $f'(St_G(a')) \subset L$, тобто перехрестимо висячі ребра зірки e_1', e_2' , e_1, e_2 та ототожнимо вершини a', a'' у вершину a . Побудуємо вкладення f' , $f': H \rightarrow N_1$, де $f'|_{H \setminus St_H^1(a'')} = f|_{H \setminus St_H^1(a'')}$, $f'|_{St_H^1(a'')} = f|_{St_H^1(a'')}$, яке робить множину M досяжною на проективній площині, що дозволяє продовжити f' до вкладення у клітку s образу зірки $f'(St_n(g_0))$. Тим самим отримуємо, що неорієнтовний рід $\gamma(G) = 1$. Припущення неправильне. Випадок 1 неможливий.

2. Вважатимемо, що немає ребер $e_1, e_2, f(e_1) \subset \partial s_1, f(e_2) \subset \partial s_2$, зі спільною вершиною a , але є клітковий ланцюг $L, L = L_{f(G)}(s_1, s_2)$ довжиною не менше 1, який містить щонайменше три клітки s_1, s_{12}, s_2 , де $f(e_1) \cup f(e_2) \subseteq \partial s_{12}$, причому вкладення f графа H в Σ_0 , розміщує на границях кліток s_1, s_2 множину $f(M), f(M) = f(\{a_i\}_{i=1}^m)$. Приклеїмо до кліток s_1, s_{12}, s_2 евклідової площини дві ленти Мебіуса наступним чином. Розщепимо внутрішню точку $f(x_i)$ ребра $e_i, e_i = (a_i, b_i)$ на точки x_i', x_i'' , де $i = 1, 2$. Виріжемо на Σ_0 елементарний диск з центром в x_i та розташуємо на його границі діаметрально протилежні точки x_i', x_i'' як кінцеві точки частин ребра e_i . Отримаємо клітку s поверхні N_2 , де $\partial s = \partial s_1 \cup \partial s_{12} \cup \partial s_2$, в яку можливо вкласти зірку $f'(St_n(g_0))$ і таким чином отримати мінімальне вкладення графа G у поверхню N_2 , тобто $\gamma(G) = 2$. Тоді матимемо рівність $d_H(M) = k - 1$, що й треба довести. Доведення співвідношення 1 закінчене.

Доведення співвідношення 2 для $k > 2$ аналогічне наведеному для співвідношення 1.

Співвідношення 3 матиме схематичне доведення. На рис.2 наведені всі неізоморфні площинні підграфи непроективних мінорів, що є мінімальним відносно видалення ребер чи стискання їх у точку, як відносно кліткової відстані 2, так і числа досяжності 2 заданих множин червоних вершин, які приєднуються попарно до кінцевих точок ребер простих зірок.

Доведення твердження 2 закінчено.

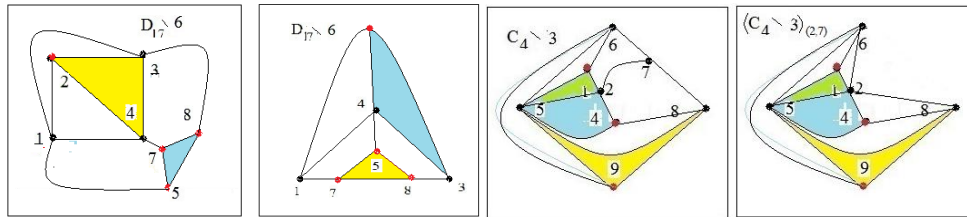


Рис. 2. Підграфи мінорів проективної площини D_{17} та C_4 як приклад до твердження 2, де ребро $(1,3)$ є несуттєвим при видаленні відносно числа досяжності 2 та клітковою відстанню $d_H(M) = 2$, де $M = \{2, 5, 7, 8\}$ підграф $C_4 \setminus 3$ має несуттєве ребро $(2,7)$ при операції стискання у точку відносно відстані між двома довільними клітками множини кліток, яка реалізує число досяжності множини $\{1, 4, 8, 9\}$ точок графа $C_4 \setminus 3$

Теорема 1. Нехай граф G має площинний підграф $H, H = G \setminus v, v$ – вершина графа G подано -го як φ -образ $\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, де $v := g_0$, а підграф H – мінімальний відносно $d_H(M)$, $d_H(M) = k$, при операціях видалення чи стискання у точку довільного його ребра, а множина M мінімальна щодо $d_H(M), M = \{a_i\}_{i=1}^m, t_H(M, \Sigma_0) = t, \theta_H(M, \Sigma_0) = \theta, \partial \theta_H(M, \Sigma_0) = \partial \theta, \theta \geq 0, \partial \theta \geq 0, m \geq k \geq 1$. Граф G або його підграф є граф-обструкцією неорієнтованого роду $\gamma(G)$, де $\gamma(G) \leq k + 1$, якщо має місце одна з наступних умов:

- 1) $t = 2$;
- 2) $((t=3) \wedge ((\theta=1) \vee (\partial\theta=1)))$.

Доведення при умові 1 випливає з твердження 2 та полягає в побудові вкладення графа G в евклідову площину із приклеєними $k+1$ лентами Мебіуса, на яких розміщено по одному спільному ребру сусідніх границь кліткового ланцюга. Нехай граф G неорієнтованого роду подано як ϕ -образ $\phi(H + St_n(g_0), \sum_{i=1}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$ та виконуються умови теореми 1. Оскільки за визначенням граф G є граф-обструкцією неорієнтованого роду $\gamma(G)$ тоді й тільки тоді, коли кожне ребро u графа G є суттєвим відносно роду як при операції видалення, так і при стисканні в точку. Якщо ребро u , $u \in G^1$, матиме прообраз u' , де $u' \in H^1$, то видалення чи стискання у точку ребра u призводить до таких самих дій над u' . Оскільки площинний граф H мінімальний відносно $d_H(M)$ при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра, то існуватиме клітковий ланцюг $L(s_1, s_2)$, що з'єднуватиме клітки s_1 та s_2 , на границях яких розташовується множина M , та матиме довжину d , $d = d_H(M) - 1$. Стискання у точку ребра u призводить до таких самих дій над u' . Якщо ребро u , $u \in G^1$, матиме прообраз u' , де $u' = (a_1, g_0)$, $u' \in St_n(g_0)^1$, то видалення ребра u означитиме видалення з множини M кінцевої вершини a_1 , що за умови критичності множини M відносно $d_H(M)$, матимемо нерівність $d_G(M \setminus a_1) < d_G(M)$. Стискання у точку ребра u призводить до стискання у точку a_0 ребра u' і означитиме подання графа G_u як ϕ -образу графа H' та $St_m(a_0)$, де $H' \subset H$.

Використаємо метод індукції по d . База індукції $d = 1$. Побудуємо, згідно леми 1, вкладення f графа H в поверхню N_2 , тоді має місце нерівність $\gamma(G \setminus u) \leq 2$ та при цьому вкладенні f множина M буде досяжною на поверхні N_2 . Аналогічно для бази індукції $d = 2$ матимемо доведену теорему 1. Зробимо індукційний крок від $d = k - 1$ до $d = k$, $k > 2$. У випадку, коли $d = k$, де $d_H(M) = k + 1$, матимемо, щонайбільше, $k+1$ ленту Мебіуса приклеєну до кліток ланцюга $L(s_1, s_2)$ так, щоб на кожній розмістити $k+1$ ребро графа H , які належать границям послідовних пар кліток ланцюга $L(s_1, s_2)$. Тоді матимемо нерівність $\gamma(G) \leq k + 1$. Доведемо методом від протилежного, що граф G – граф-обструкція неорієнтованого роду $\gamma(G)$. Припустимо, що ребро u , $u \in G^1$, є несуттєвим відносно $d_H(M) = k + 1$ при операції видалення. Оскільки підграф H є мінімальним відносно $d_H(M)$ при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра, то $u \in H^1$. Із визначення 3 випливатиме, що кожне ребро графа H є спільним для границь двох послідовних кліток деякого кліткового ланцюга $L(s_1, s_2)$ довжини k , тому підграф $H \setminus u$ матиме клітковий ланцюг L' довжини $k - 1$, утворений з ланцюга $L(s_1, s_2)$ довжини k шляхом видалення ребра u на спільній границі двох кліток. Видалимо у графі $H \setminus u$ всі несуттєві ребра відносно $d_{H \setminus u}(M)$, де $d_{H \setminus u}(M) = k - 1$, при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра. Отримаємо підграф H' із заданою множиною вершин M з числом досяжності 2 та відстанню $k - 1$ між двома підмножинами M , є мінімальним відносно $d_H(M)$ при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра. Тоді за індукційним припущенням матимемо граф-обструкцію G' , неорієнтованого роду $\gamma(G')$, де $\gamma(G') \leq k$, якщо виконаємо ϕ -перетворення графа H' та $St_m(g_0)$, задане наступним чином:

$$\phi : (H' + St_m(g_0), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G', \{a_j^*\}_{j=1}^m),$$

де $St_m(g_0)$ – квазізірка з центром у вершині g_0 та m ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини X_2 , X_1 підмножина множини точок графа H , $X_1 = \{x_{1j}\}_1^m$, матиме число досяжності t_1 та характеристики $\theta_1, \partial\theta_1$, то $\gamma(G) \leq 0 + 2 - 1 - (\theta_1 + \partial\theta_2) + k4 - st$. Зауважимо, що в нашому випадку $\theta_1 + \partial\theta_2 = 0$ і $k4 - st = 0$, де $k4 - st$ – число додаткових 2-ручок приклеєних до клітки s з множини $N_r \setminus f(H)$ при вкладенні $f: H \rightarrow N_r$, $r = 2 - 1 - (\theta_1 + \partial\theta_1)$, із st – стороннім доступом до тих точок приєднання на границі ∂s клітки s (до якої приклеєно r штук 2-ручок і вкладено квазізірку), що при ототожненні пар точок приєднання (x_{1j}, x_{2j}) породжують $k4$ різних підграфів гомеоморфних K_4 , чи $K_{2,3}$. Доведення для умови 1 завершено.

Доведення Теорема 1 для умови 2. Доведення випливає з твердження 2 та побудови вкладення графа G в евклідову площину із приклеєними, мінімально, двома лентами Мебіуса, на яких розміщено, щонайменше, по одному спільному ребру з тих двох, що мають спільну точку та належать границям суміжних кліток трьохкліткової зірки для випадку $\theta = 1$, чи по два суміжних ребра, що належать границям суміжних кліток кліткового простого циклу довжини 3 для випадку $\partial\theta = 1$.

Нехай $k = 2$ і виконується умова $((t = 3) \wedge ((\theta = 1) \vee (\partial\theta = 1)))$. Це означатиме, є три клітки s_1, s_2, s_3 з множини $\Sigma_0 \setminus f(H)$, які на своїх границях містять множину заданих точок M , де $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, та з яких утворено, або зірку, або трикутник. Розглянемо випадок, коли границі кліток s_1, s_2, s_3 містять мінімум одну спільну вершину a графа G . Позначимо $St_{n_{ij}}(a)$ зірку, що розміщена між границями кліток s_i, s_j , де $n_{ij} = n_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$, та розглянемо дві з них $St_{n_{12}}(a)$, $St_{n_{23}}(a)$ та вважатимемо, що $n_{12} \geq n_{23} \geq 1$. На кожному ребрі (a, g_r) зірки $St_{n_{12}}(a)$ чи $St_{n_{23}}(a)$ виберемо внутрішню точку x та розщепимо її на дві вершини x', x'' , утворюючи два нових ребра, (a, x') , (x'', g_r) з одного висячого ребра (a, g_r) . Переставимо кінцеві вершини висячих ребер (a, x') з спільною вершиною a в оберненому порядку слідування (перше з останнім, друге з передостаннім, і так далі) та розмістимо ці переставлені вершини на границі елементарного диску D_1 , вирізаному в площині біля розщеплених точок ребер, утворюючи пари (x', x'') діаметрально протилежних точок на границі елементарного диску D_1 , які попарно ототожнимо в точку x ребра (a, g_r) зірки $St_{n_{12}}(a)$. Виконавши такі операції для кожного ребра (a, g_r) , побудуємо вкладення $f', f': H \rightarrow N_1$, шляхом розміщення всіх ребер (a, g_r) зірки $St_{n_{12}}(a)$ на ленті Мебіуса, як продовження вкладення f , причому замість кліток s_1, s_2 буде клітка s_{12} , де $\partial s_{12} = \partial s_2 \cup \partial s_1$. Для зірки $St_{n_{23}}(a)$ аналогічні дії потрібні для побудови вкладення f'' , де $f'': H \rightarrow N_2$, як продовження вкладення f' , тільки замість s_1, s_2 буде s_{12} , а замість кліток s_{12}, s_3 буде клітка s_{123} , де $\partial s_{123} = \partial s_{12} \cup \partial s_3$, $f''(M) \subset \partial s_{123}$. Продовжимо вкладення f'' до вкладення f''' , де $f''': G \rightarrow N_2$, шляхом вкладення зірки $St_n(g_0)$ до клітки s_{123} . Тоді матиме місце нерівність $\gamma(G) \leq 2$. Доведення при умові 2 закінчено. Приклади площинні підграфи проективних мінорів із заданими трьома підмножинами множини наведені на рис. 3. Доведення теорема 1 закінчено.

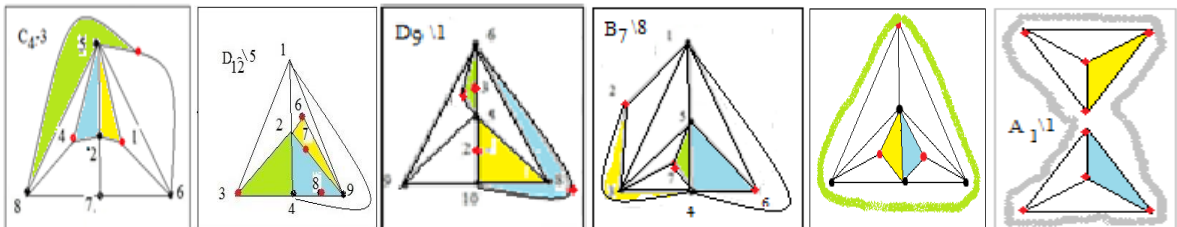


Рис. 3. Площинні підграфи проєктивних мінорів із заданими трьома підмножинами множини M червоних вершин (розташованою на границях трьох зафарбованих кліток) з числом досяжності 3 та клітковою відстанню 1 чи 0 між парами довільних підмножин множини M . На першій, другій та четвертій картах три зафарбовані клітки утворюють кліткову зірку, на третій клітковий цикл довжини 3, а на п'ятій карті є граф $S_4 \setminus 3$ із стиснутим у точку ребром $(2,7)$, на шостій карті показано клітковий ланцюг довжини 1

Наслідок 1. Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді матимуть місце твердження.

1. Видалення довільного ребра e графа $H = G \setminus v$ не змінюватиме число досяжності t множини M точок приєднання до графа $H \setminus e$ всячих точок зірки $St_n(g_0)$, де $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, $t_{H \setminus e}(M, \Sigma_0) = t$, $m \geq t$, $t = 2$;

2. Якщо граф G є граф-обструкцією неорієнтованого роду $\gamma(G)$, де $\gamma(G) \leq k + 1$, $\theta = 1$, то видалення довільного ребра e , $e = (a, b)$, підграфа $H = G \setminus v$, або зменшує на 1 обидві характеристики $t_H(M, \Sigma_0)$ і $\theta_H(M, \Sigma_0)$, або існує вкладення частини H' підграфа H із однією з кінцевих вершин ребра $e = (a, b)$, нехай a , до середини клітки s' , $s' \in S_H(M, \Sigma_0)$, (наприклад, це симетричне відображення відносно простого ланцюга на границі з іншою кліткою s' , що є суміжною через спільну вершину b), де множини кліток $S_H(M, \Sigma_0)$ реалізує характеристику $t_H(M, \Sigma_0)$.

Структура площинних графів H із клітковими відстанями 2 та 3 проілюстрована на рис 4.

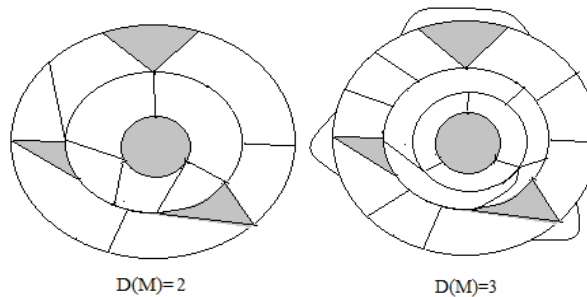


Рис. 4. Приклад площинного графа H із клітковими відстанями 2 та 3 для множини точок M , розміщеної на границях чотирьох сірих кліток, відповідно зліва-направо

Твердження 4. Нехай граф G має площинний підграф H та $d_H(M) = k$, де множина M мінімальна стосовно $d_H(M)$, $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, $t_H(M, \Sigma_0) = t$, підграф H мінімальний стосовно $d_H(M)$ при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра і граф G подано як φ -образ

$\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$. Якщо мають місце умови теореми 1, $t = 2$, $k > 2$, то матимемо наступні співвідношення.

1. Існує вкладення площинного графа H в N_3 при якому довільний найкоротший клітковий ланцюг, що з'єднує клітки, на границях яких розташована задана множина точок, замінимо на інший неклітковий ланцюг у якого одна з кліток є 2-ручкою, приклеєною до початкової та передостанньої кліток ланцюга; також є псевдоклітка утворена з кінцевої клітки та приклеєної до неї ленти Мебіуса.

2. Площинний граф H складається з k концентричних кілець, утворених із замкнутих кліткових ланцюгів (де початкова та кінцева клітки мають границі із мінімально одним спільним ребром), із

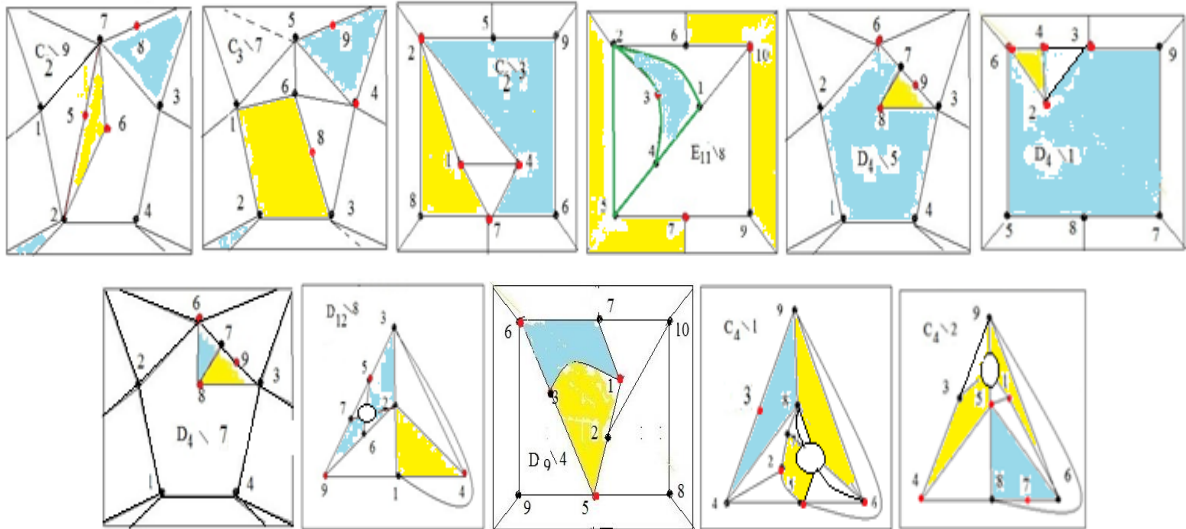
границями кліток досяжності множини M як центральний та зовнішній цикли k концентричних кілець.

Твердження 5. Нехай граф G поданий як ϕ -образ $\phi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$ має проєктивно площинний підграф H , $H = G \setminus v$ – мінімальний відносно $d_H(M)$ при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра e , $e \in H^1$, де $d_H(M) = k$, M множина точок мінімальна відносно $d_H(M)$, $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, $t_H(M, \Sigma_0) = t$, $m \geq t \geq 2$.

Якщо $t = 2$, $k > 2$ та виконуються умови теореми 1, то матимемо співвідношення.

1. Не існуватиме вкладення проєктивно площинного графа H в N_3 при якому довільний найкоротший клітковий ланцюг, (що з'єднує клітки, на границях яких розташована задана множина точок), замінено на інший неклітковий ланцюг, у якого одна з кліток є 2-ручкою, приклеєною до початкової та передостанньої кліток найкоротшого кліткового ланцюга, та є псевдоклітка, утворена з кінцевої клітки найкоротшого кліткового ланцюга та приклеєною до неї ленти Мебіуса.
2. Проєктивно площинний граф H має підграфи – кліткові зірки, які складаються з вершин та ребер на границях кліток із мінімально однією спільною точкою та мають попарно щонайменше одне спільне ребро на границі цих кліток, серед яких має бути одна з двох кліток, що реалізують на проєктивній площині число досяжності 2 множини точок M .
3. Видалення довільного ребра u графа G , або зменшуватиме рід $\gamma(H)$ проєктивно площинного підграфа H , або зменшуватиме на 1 число досяжності t , $t_H(M, N_1) = t$, відносно проєктивної площини, множини $M = \{a_i\}_{i=1}^m$ точок приєднання до графа H висячих точок зірки $St_n(g_0)$, або одночасно зменшить на 1 рід $\gamma(H)$ та матиме місце рівність $t_{H \setminus u}(M, \Sigma_0) = t + 1$.

На рис. 5 наведено приклади проєктивних підграфів H мінорів проєктивної площини із заданими двома непустими підмножинами множини виділених точок цих графів.



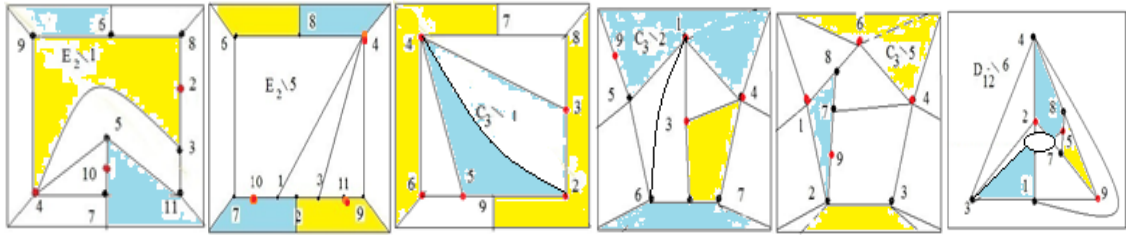


Рис. 5. Проективні підграфи мінорів проективної площини із заданими двома непустими підмножинами множини M , складеної з червоних вершин і розташованої на границях зафарбованих кліток, з числом досяжності 2 та клітковою відстанню 1 (між двома підмножинами M).

Твердження 6. Нехай граф G неорієнтованого роду 2 має проективно площинний підграф H , $H = St_m(H') \cup H''$, мінімальний відносно $d_H(M)$ при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра, де $d_H(M) = k$, множина M - мінімальна відносно $d_H(M)$, $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, $t_H(M, N_1) = t$, причому граф G подано як φ -образ $\varphi: (K + St_m(H'), \sum_{i=1}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, де $m \geq 1$, H', H'' - не вироджені підграфи чи частини графа H , а граф K гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$. Матимемо наступні співвідношення.

1. Видалення довільного ребра e , $e \in H'$, призводить до одного з трьох наступних випадків:

а) зменшує рід графа H відносно K ;

б) породжує вкладення графа $G \setminus e$ в N_1 та ребер $St_m(H') \setminus e$ до основної 2-клітки s_0 та псевдоклітки s_1 , $\{s_0, s_1\} \subseteq N_1 \setminus f(K)$, графа K , (подібне розпаданню $St_m(H') \setminus e$ на дві непусті частини, вкладені до псевдоклітки s_1 та до 2-клітки s_0 , тобто в різні клітки відносно графа K ;

в) зменшує на 1 рід $\gamma(G)$ і граф $G \setminus e$ не матиме підграфа ізоморфного K .

2. Підграф H має наступні властивості:

а) є пара ребер (e_0, e_1) , що належать простим реберним ланцюгам (L_0, L_1) , відповідно, вкладені з перетином до евклідової площини основної клітки s_0 , а пара кінцевих точок пари ланцюгів (L_0, L_1) , які належить підграфу H , розташовані на границі ∂s_0 , розділять одна другу та не розділяють кінцеві точки третього реберного ланцюга L_2 , який, можливо, містить таке ребро графа K , що входить до числа перехрещених на площині пар ребер графа K .

На рис. 6 проілюстровано структуру проективних підграфів H мінорів проективної площини із співвідношення 1. Приклади проективних підграфів H мінорів проективної площини із множинами множини виділених точок цих графів наведено на рис.7.

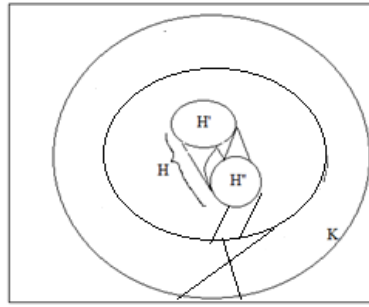


Рис. 6. Структура графа G із твердження 6

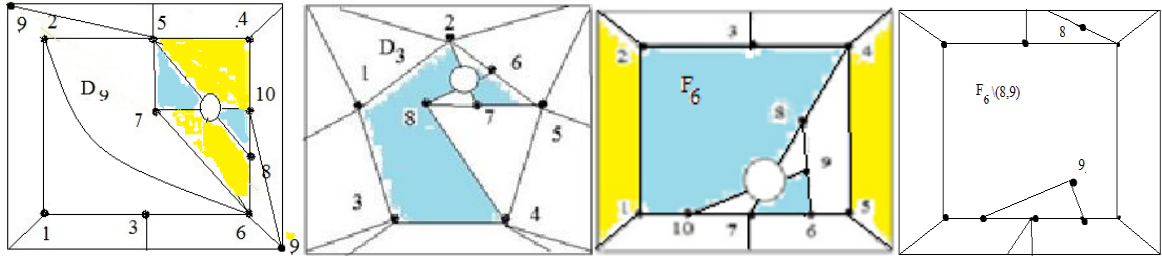


Рис. 7. Графи D_9 , D_3 , F_6 ілюструють співвідношення 1 та 2 твердження 6, граф D_9 матиме підграф K гомеоморфний $K_{3,3}$ на множині вершин $\{1,2,3,4,5,6, 8,10\}$ та підграфи H' , H'' на кінцевих вершинах наступних ребер $\{(7,5), (9,5), (9,6), (9,10), (7,10), (7,6)\}$, $\{(8,5), (4,5), (8,6), (8,10), (4,10)\}$, відповідно.

Теорема 2. Кожен граф-обструкція G із n вершинами, $n \geq 10$, неорієнтованого роду k , $k > 0$, можливо подати одним із варіантів:

1) об'єднання k копії графів гомеоморфних $K_{3,3}, K_5, K_4$ чи $K_5 \setminus e$;

2) φ -образ двох графів-обструкцій G_i неорієнтованого роду k_i заданого наступним чином

$\varphi: (\sum_{i=1}^2 G_i, \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^m (L_{1j} + L_{2j})) \rightarrow (G, \{L_i^*\}_{i=1}^m)$, де L_{1i}, L_{2i} – прості ланцюги чи підланцюги довжини $l_{ij} \geq 0$ графів G_i , причому можливим є отождошення пари, нехай це $L_{1j'}, L_{1j''}$ графа G_1 , із парою $L_{2j'}, L_{2j''}$ які належать одному простому циклу графа G_2 , де $k \leq \sum_{i=1}^2 k_i$, $k_i \geq 1$.

Доведення варіанту 1. Нехай G -довільний граф-обструкція із n вершинами, $n \geq 10$, неорієнтованого роду k . Для $k = 2$ в [4] конструктивно доведена справедливості гіпотези про подання графа G як об'єднання двох графів гомеоморфних одному з графів Куратовського для 35-ти мінорів графів-обструкцій проективної площини N_1 .

Матиме місце допоміжна лема: якщо граф $G \setminus u$ є блоком, то існуватиме простий цикл на якому розташовані вершини $\{a, b\}$, який належатиме мінімальному по включенню підграфу чи частині гомеоморфному K_4 чи $K_5 \setminus u$. Доведемо це допоміжну лему. Кожне довільне ребро $e = (a, b)$ графа-обструкції G неорієнтованого роду k , $k \geq 1$, можливо розмістити на ленті Мебіуса разом із, щонайменше, одним ребром $e' = (a', b')$, що схрещуються на поверхні меншого неорієнтованого роду, та кінцеві вершини яких розміщені на простому циклі мінімальної довжини 4. Видалення довільного ребра $e = (a, b)$ графа-обструкції G неорієнтованого роду k призводить до того, що довільний

підграф $G \setminus e$ неорієнтованого роду $k - 1$ містить множину $M = \{a, b\}$ із числом досяжності 2 та розміщену на границях двох кліток із, як мінімум, одною спільною точкою. Згідно визначення кліткової відстані $D_{G \setminus e}(M)$ матимемо, що $D_{G \setminus e}(M) = 0$. Позначимо через M' найменший по включенню локальний площинний підграф чи частину графа G з вершинами a, b . Для нього можливими є чотири випадки, із яких тільки два випадки є різними з точністю до гомеоморфізму, наведені на рис. 8. У випадку 1 є спільне ребро для границь кліток з точками a, b , то існує локальний площинний підграф M' ізоморфний K_4 із двома виділеними точками a, b як кінцевими вершинами видаленого ребра. Додане ребро $e = (a, b)$ породжує підграф $M' \cup (a, b)$ гомеоморфний графу $K_{3,3}$. У випадку 2 є клітковий кут в спільній точці границь обох кліток з точками a, b . Тобто є локальний площинний підграф M' ізоморфний $K_5 \setminus u$ із двома виділеними точками a, b як кінцевими вершинами ребра $e = (a, b)$. Додавання ребра (a, b) до M' породжуватиме граф, що стягуватиметься до K_5 . Таким чином, кожне ребро належатиме підграфу гомеоморфному одному із графів Куратовського чи тому, що стискається до одного з них.

З іншого боку, якщо рід більше 1, то окрім ребер підграфа Куратовського є принаймні декілька ребер графа-обструкції роду 2, які не належать до виділеного підграфа $M' \cup (a, b)$, але мають належати до іншого, щонайменше, одного підграфа, гомеоморфного $K_{3,3}$ чи K_5 , відмінного від виділеного підграфа, тобто серед графів покриття ребер різними є, принаймні, два. Доведення допоміжної лєми закінчене. Аналогічним буде доведення для випадку, коли граф $G \setminus u$ не є блоком.

Використаємо метод індукції по $\gamma(G)$ - неорієнтованому роду графа G із n вершинами, де $k = \gamma(G)$. База індукції: для $k = 2$ в [4] конструктивно доведена справедливість гіпотези про подання графа G , як об'єднання двох графів гомеоморфних одному з графів Куратовського для 35-ти мінорів графів-обструкцій проективної площини N_1 .

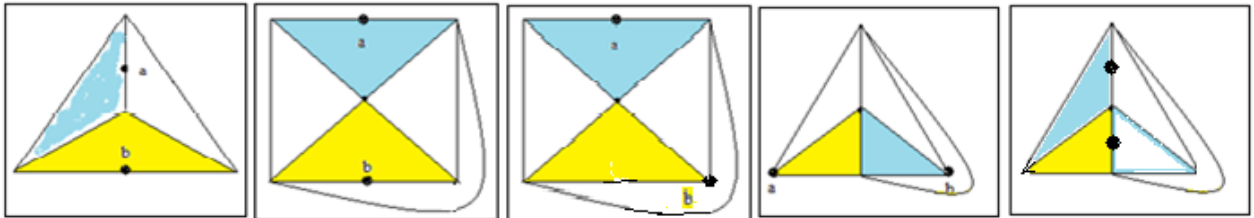


Рис.8. На 1-й та 2-й картах варіанти 1 та 2 для підграфа M' , відповідно, на 3-й, 4-й і 5-й картах підграф M' , можливо привести до одного з перших двох варіантів.

Виконаємо індукційний крок: $k - 1 \Rightarrow k$, де $k = \gamma(G)$. Для довільного ребра u , $u = (a, b)$, графа G існує пара (u, u') ребер розміщених на ленті Мебіуса. Множина ребер графа $G \setminus u$, який матиме рід $\gamma(G \setminus u)$, де $k = \gamma(G \setminus u) + 1$, та містить підграф H - граф-обструкцію яка, за припущенням, покриватиметься множиною підграфів G_i , де $i = 1(1)k - 1$, графа G чи його частин гомеоморфних $K_{3,3}, K_5, K_4, K_5 \setminus e$. Розглянемо підграф на множині ребер $G^1 \setminus H^1$. З умови, що G - граф-обструкція впливатиме наявність іншого ребра u' , яке разом з $u = (a, b)$, належить підграфу чи його частині розташовані на ленті Мебіуса. Оскільки граф $G \setminus u'$ є блоком, то згідно допоміжної лєми існуватиме простий цикл z на якому розташовані кінцеві вершини ребер u, u' , які на площині розділяють одна другу, утворюючи підграф чи частину гомеоморфну K_4 або $K_5 \setminus e$. Множину ребер циклу z об'єднаємо із множиною

$W \cup \{u, u'\}$, де W - множина всіх тих ребер з $G^1 \setminus H^1$, що мають, щонайменше одну спільну кінцеву вершину із циклом z . Позначимо підграф графа G з множиною ребер $z^1 \cup W \cup \{u, u'\}$ через G_k . Тоді маємо вкладення графа G в неорієнтовану поверхню N_k як суму вкладень підграфів G в N_k , а саме підграфа G_k в N_1 та підграфа H до N_{k-1} зі спільною множиною точок приєднання цих підграфів. Припустимо, що є непокрите ребро $u'' = (a'', b'')$, яке не належить до G_k . Оскільки граф $G \setminus u''$ міститиме підграф $G_k \cup H$, то застосовуючи наведені вище міркувань для ребра u'' матимемо нерівність $\gamma(G \setminus u'') \geq k$, яка суперечить визначенню графа G як графа-обструкції. Припущення невірне. Таким чином, кожне непокрите ребро в графі $G \setminus u$ покриватиметься в G підграфом G_k гомеоморфними $K_{3,3}, K_5, K_4$ або $K_5 \setminus e$. Доведення варіанту 1 закінчене.

Доведення варіанту 2. Використаємо наведені вище аргументи та вважатимемо, що кілька зірок подібних $St_G(a')$ може бути. Позначимо через G_1 підграф графа G породжений парою непокрытих ребер та ребер графа G , що мають кінцевими вершинами пари точок приєднання, а через G_2 - підграф графа G породжений множиною всіх покритих ребер та тих ребер графа G , що мають кінцевими вершинами пари точок приєднання. Тоді спільними для цих є L_{1i}, L_{2i} - прості ланцюги чи підланцюги довжини $l_{ij} \geq 0$ графів G_i , причому можливим є ототожнення пари, нехай це $L_{1j'}, L_{1j''}$, із парою $L_{2j'}, L_{2j''}$ які належать одному простому циклу графа G_2 . Доведення теореми 2 закінчене.

Частина 2. Розглянемо задачу побудови графів-обструкцій неорієнтованого роду на основі множини відомих графів-обструкцій, але не більш ніж на 10 вершинах для неорієнтованого роду k , а саме, повної для проективної площини чи неповної для інших поверхонь, зокрема, поверхні Клейна. Моделлю чи прототипом граф-обструкції G неорієнтованого роду 2 будемо називати граф більшого неорієнтованого роду, отриманий шляхом приклеювання у доступних частинах частини чи підграфа, гомеоморфного K_5 чи $K_{3,3}$, щонайменше однієї копії площинного підграфа H граф-обструкції G , чи побудований, до певної міри, на зразок цього підграфа H .

Існує інший спосіб побудови графів обструкцій заданого неорієнтованого роду шляхом розділення кінцевих точок приєднання до границі основної клітки графа-основи схрещених пар графів меншого роду як аналога схрещених ребер, що розділятимуть пари кінцевих вершин на колі евклідової площини. Для цього використаємо метод φ -перетворень та метод рекурсивних аналогій, або їх комбінацію. Приклади використання метода аналогій та методу φ -перетворень наведено на рис. 9, 10 і 11 відповідно.

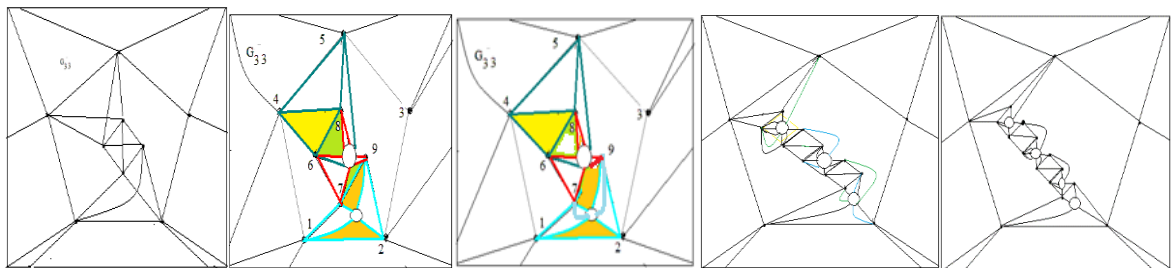


Рис. 9. На перших трьох картах граф-обструкція G_{33} мінімально вкладається на N_3 , де клітки з границями (1, 7, 9, 2) та (4, 6, 8) мають кліткову відстань 1, а його аналогії на 4-й та 5-й картах

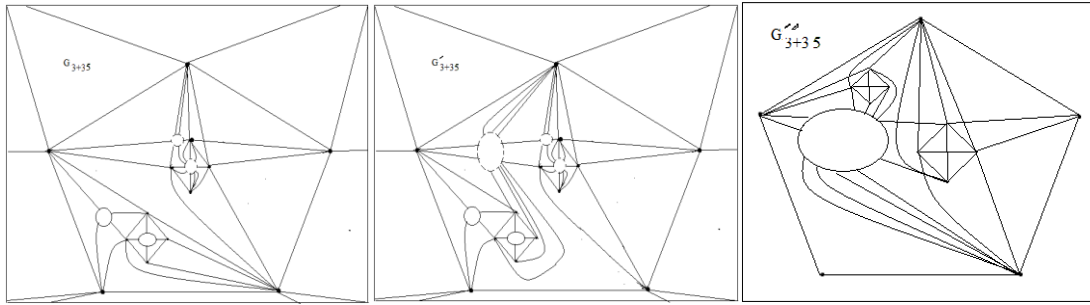


Рис. 10. Графи неорієнтованого роду не більше 6, отримані шляхом склейки графів G_3 та G_{35} по підграфу K_5

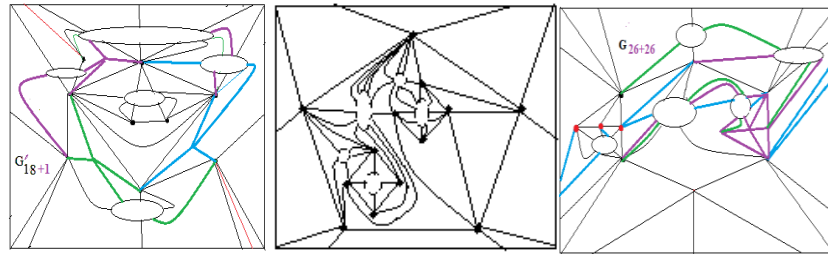


Рис. 11. Графи неорієнтованого роду не більше 6, отримані шляхом склейки графів G_1 та G_{18} по підграфу K_5 (перша карта), графів G_3 та G_{33} по підграфу K_5 (друга карта), двох копій графа G_{26} по підграфу K_6 , (третя карта) зліва направо

Визначення 6. Будемо називати $L_2(H_1, H_2)$ простим ланцюгом довжини 2 із двох графів H_1, H_2 , гомеоморфних K_4 , таке об'єднання $H_1 \cup H_2$, коли $H_1^1 \cap H_2^1 \in$ або K_2^1 , або K_3^1 . Називатимемо об'єднання $\bigcup_{i=1}^n H_i$ графів $H_1, H_3, \dots, H_{n-1}, H_2$, гомеоморфних K_4 , простим ланцюгом $L_n(H_1, H_2)$ – довжини n , $n > 2$, якщо перетини $H_i^1 \cap H_{i+1}^1$ кожної пари (H_i, H_{i+1}) , де $i = 3, 4, \dots, n-1$, та перетини $H_1^1 \cap H_3^1, H_4^1 \cap H_3^1, \dots, H_{n-1}^1 \cap H_2^1$ пар $(H_1, H_3), (H_4, H_3), (H_{n-1}, H_2)$ відповідно, матимуть множину спільних ребер K_2^1 , або K_3^1 .

Лема 3. Нехай є простий ланцюг $L_n(H_1, H_2)$ із n графів $H_1, H_3, \dots, H_{n-1}, H_2$, гомеоморфних K_4 , приєднаний до графа H , гомеоморфного K_5 чи $K_{3,3}$ та вкладеного до проективної площини, наступним φ -перетворенням: $\varphi(H + L_2(H_1, H_2), \sum_{i=s}^2 (h_i + e_i)) \rightarrow (G, \{h_i^*\}_{i=1}^2)$, де пара несуміжних ребер $e_1, e_2, e_i \in H_i^1$, ототожнюється з парою ребер h_i , що належить до границі найбільшої клітки s графа H з ребрами $h_i, i = 1, 2$. Мають місце твердження:

1. Якщо перетини $H_1^1 \cap H_3^1, H_4^1 \cap H_3^1, \dots, H_{n-1}^1 \cap H_2^1$ пар $(H_1, H_3), (H_4, H_3), (H_{n-1}, H_2)$ відповідно, матимуть множину спільних ребер K_2^1 , то матимемо наступні співвідношення:

а) якщо $n = 2$ та ребра h_i несуміжні, то граф G – граф-обструкція роду 2 та при видаленні спільного ребра графів H_1, H_2 одна з двох зірок зі схрещеними ребрами вкладається до псевдоклітки s' із спільним ребром з s ;

б) якщо $n = 2$ та ребра h_i суміжні, то при видаленні спільного ребра графів H_1, H_2 одна з двох зірок зі схрещеними ребрами вкладається до псевдоклітки s' із спільним ребром з 2-кліткою s та граф G – граф-обструкція роду 2;

в) якщо ланцюг $L_n(H_1, H_2)$ має, щонайменше, три графи, то несуттєвими ребрами графа G відносно роду при видаленні будуть ребра із H_3^1 .

2. Якщо перетини $H_1^1 \cap H_3^1, H_4^1 \cap H_3^1, \dots, H_{n-1}^1 \cap H_2^1$ пар $(H_1, H_3), (H_4, H_3), (H_{n-1}, H_2)$, відповідно, матимуть множину спільних ребер K_3^1 , то матимемо наступні співвідношення:

а) якщо до графа H приклеїти по простим реберним ланцюгам L_1, L_2 два різні ланцюги $L_2(H_1, H_2), L_2(H_1', H_2')$, де L_1, L_2 без спільних ребер графа H , або $L_1 = L_2$, то граф G – граф-обструкція роду 3.

Приклади графів, побудованих за твердженнями леми 3, наведені на рис 12

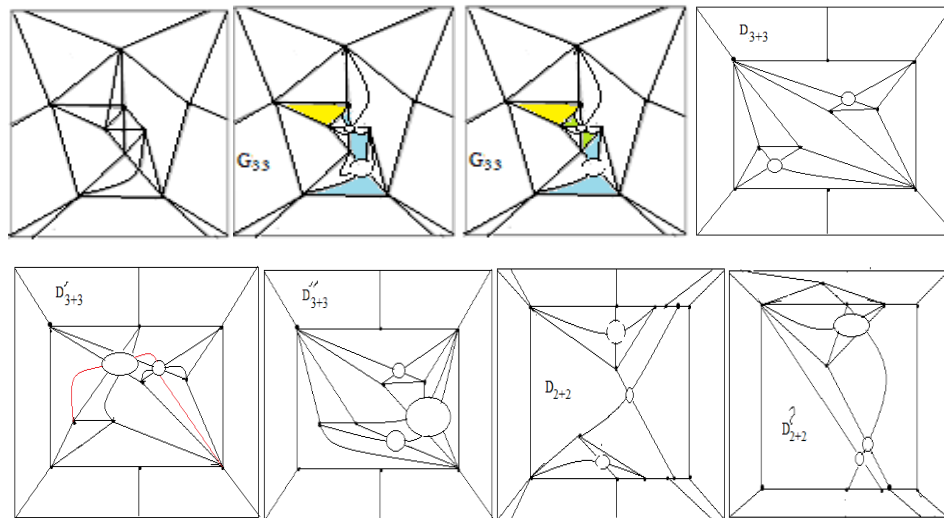


Рис. 12. Графи та граф-обструкції неорієнтованого роду 3 та 4, отримані шляхом склейки по підграфу $K_{3,3}$ двох графів G_3 та склейки графів G_2 по підграфу $K_{3,3}$

Список літератури

1. Хоменко М. П. φ -перетворення графів. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1973. 383 с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1970. 299 с.
3. Mohar B., Thomassen C. Graphs on Surfaces. Johns Hopkins University Press, 2001. 412 p. <https://www.sfu.ca/~mohar/Book.html>
4. Hur S. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Phd, Ohio State University, 2008. http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1209141894
5. Archdeacon D., Huneke P. A Kuratowski Theorem for Nonorientable Surfaces. *Journal of combinatorial theory, Series B.* 1989. **46**. P. 173–231.
6. Петренко В.І. Про структуру площинних підграфів графів-обструкцій неорієнтованої поверхні заданого роду. *Фізико математичне моделювання та інформаційні технології.* 2021. № 33. С. 105–109. [Google Scholar](https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=uk&user=VIApetrenko)
7. Bienstock D., Dean N. On obstructions to small face covers in planar graphs, *J. Combin. Theory Ser. B.* 1992. **55**. P. 163–189. <https://doi.org/10.1016/0095-8956%2892%2990040-5>
8. Bienstock D., Monma C.L. On the complexity of covering vertices by faces in a planar graph. *SIAM J. Comput.* 1988. **17**. P. 53–76. <https://doi.org/10.1137/0217004>
9. Mohar B. Face Covers and the Genus Problem for Apex Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B.* 2001. **82**. P. 102–117. <https://doi.org/10.1006/jctb.2000.2026>
10. Mohar B. Apex graphs with embeddings of face-width three. *Discrete Mathematics.* 1997. **176**. P. 203–210. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(96\)00363-9](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00363-9)

4.3. ПРО СТРУКТУРУ 9-ТИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ПОВЕРХНІ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА.

Розглянемо *задачу* вивчення методом φ -перетворення графів структурних властивостей 9-ти вершинних графів-обструкцій для неорієнтованої поверхні N_k роду k , $k = 2$. Основні поняття та позначення узяті із [1]-[3], всі графи неорієнтовані без кратних ребер та петель. В [4], [5] отримано всі неізоморфні графи-обструкції для N_2 -поверхні Клейна на не більш ніж 9-ти вершинах, а в [6] наведено діаграми цих графів та 36-ти графів-обструкцій на 9-ти, окрім цього наведено 27 нових графів-обструкцій утворених шляхом розщеплення вершин 8-ми вершинних графів-обструкцій для неорієнтованої поверхні N_2 . Нехай 2-многовид S без країв неорієнтованого роду $\bar{\gamma}(S)$ подано як поверхню S' орієнтованого роду $\gamma(S')$, де $\gamma(S') \geq 0$, $\bar{\gamma}(S) = 2\gamma(S') + r$, до якої приклеєно r лент Мебіуса, $r > 0$; наприклад, поверхня S є пляшкою Клейна коли $\gamma(S') = 0$ і $r = 2$, чи поверхня S роду $\bar{\gamma}(S) = 3$ матиме S' - тор із однією приклеєною лентою Мебіуса. Для заданого вкладення f , $f: G \rightarrow S$, графа G в S та заданої множини точок $X, X \subset G^0 \cup G^1$ визначимо $t_G(X, S, f)$, $t = t_G(X, S, f)$, число досяжності множини X відносно S , якщо існує підмножина $S_G(X)$, $S_G(X) = S \setminus f(G)$, $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$, що задовольняє умові: $(f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^t \partial s_i \cap X) \wedge (f(X) \not\subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^t \partial s_i \cap X)$, $j = 1, 2, \dots, t$. Будемо говорити, що множина X має число досяжності t , $t_G(X, S) = t$, відносно S , якщо серед всіх неізоморфних вкладень f , $f: G \rightarrow S$ число t є найменшим серед чисел $t_G(X, S, f)$. Вважатимемо надалі, що $\bar{\gamma}$ позначено через γ .

Визначення 1. Нехай задано вкладення f , $f: G \rightarrow S$, графа G в S , яке реалізує t , $t_G(X, S) = t$, де $S_G(X) = S \setminus f(G)$, $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$. Будемо говорити, що відносно заданої поверхні S множина X матиме характеристику $\theta_G(X, S, f)$, $\theta_G(X, S, f) = \theta$, $\theta \geq 1$, якщо існує θ трійок кліток $\{s_i\}_1^3$ з множини $S_G(X)$, на границях яких підмножини X_i , $X_i \subseteq X$, розміщуються довільним чином і задовольняють співвідношенню: $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\} \wedge G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\} \wedge G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$, та породжує найменший по включенню підграф G' графа G , (можливо вироджений в точку), який містить точки $\{a_i\}_1^3$ попарного перетину границь кліток $\{s_i\}_1^3$; Множина X матиме відносно S характеристику $\theta_G(X, S)$, якщо $\theta_G(X, S) = \max \theta_G(X, S, f)$, де максимум береться по всім неізоморфним вкладенням f , $f: G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X, S) = t$.

Визначення 2. Нехай задано вкладення f , $f: G \rightarrow S$, графа G в S , яке реалізує t , $t_G(X, S) = t$, де $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$, $S_G(X) = S \setminus f(G)$, та виконується рівність $\theta_G(X, S) = 0$. Будемо говорити, що відносно S множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta = \partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta \geq 1$, якщо існує підмножина $\{s_i, s_j, s_k\}$, множини $S_G(X)$, яка задовольняє співвідношенням: $G^1 \cap \partial s_i \cap \partial s_j \supseteq \{(a_1, b_1)\}$ і $G^1 \cap \partial s_k \cap \partial s_j \supseteq \{(a_2, b_2)\}$, для всіх $i \neq j \neq k$, $i, j, k = 1, 2, 3$. На границях $\{\partial s_i, \partial s_j, \partial s_k\}$ множина X розміщується довільним чином, якщо не містить точок ребер (a_1, b_1) , (a_2, b_2) та особливим чином (без точок множини X на $\partial s_j \setminus L(a_1, a_2) \cup \{(a_2, a_{20}), (a_1, a_{10})\}$), якщо містить принаймні точку цих ребер. Також існуватимуть клітка s_0 та, можливо, клітка s_{00} . Клітка s_0 , $s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$, границя

якої містить простий ланцюг $L(a_1, a_2)$ ненульової довжи ни із кінцевими вершинами a_1, a_2 спільно із ∂s_j і два простих ланцюги, можливо вирод жених в точку, $L_1(a_1, a_{12}), L_1(a_2, a_{22})$ спільними з ∂s_i та ∂s_k , відповідно, та ребро (a_{12}, a_{22}) . Клітка $s_{00}, s_{00} \in (S \setminus f(G)) \setminus (S_G(X) \cup \{s_0\})$, має границю яка містить простий ланцюг $L(a_{10}, a_{20})$ ненульової довжини із кінцевими вершинами a_{10}, a_{20} спільно із ∂s_j . Множина X матиме характеристику $\partial \theta_G(X, S)$, якщо $\partial \theta_G(X, S) = \max \partial \theta_G(X, S, f)$, де максимум по неізоморфним вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X, S) = t$ та $\theta_G(X, S)$.

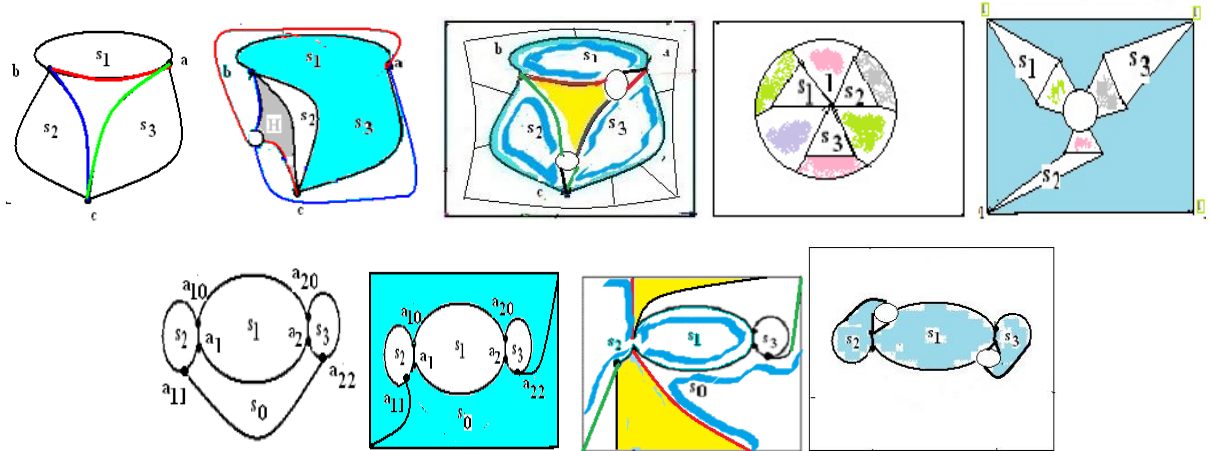


Рис. 1. В 1-му ряду на перших трьох картах циклічна кліткова структура, а інші ілюструють зіркову на проективній площині та плящі Клейна, на 2-му ряду перших трьох картах проілюстровано ланцюжкову кліткову структуру на проективній площині та плящі Клейна.

Визначення 3. Позначимо через $krt_G(M), kr = krt_G(M)$, kr - кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G , як найбільшу кількість варіантів вибору різних підмножини $S_G(M, S_\gamma)$ множини клітин $S_\gamma \setminus f(G)$ на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M , узята по всіх мінімальних вкладеннях $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ . Іншими словами, це найбільша кількість зірок які приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr 2-кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Визначення 4. Позначимо через $ms_G(M, s, f), k = ms_G(M, s, f)$, k - сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітки $s, s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f - задане мінімальне вкладення $f: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M . Найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх клітин s заданого мінімального вкладення $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $ms_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G які приєднані кінцевими вершинами до кожного із принаймні трьох елементів множини M та вкладені до однієї клітки із множини $S_\gamma \setminus f(G)$ заданого мінімального вкладення $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ .

Визначення 5. Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), \dots, ms_G(M, f_N))$ вектором l -стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, $l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0$, $|M| > 2$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ - множина всіх неізоморфних мінімальних вкладень $f_k, f_k : G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел $ms_G(M, f_k)$ узяті по всім s та всім $f_k, s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, називатимемо характеристикою l -стороннього доступу до множини M точок графа G та позначимо через $ms_G(M)$.

Визначення 6. Будемо називати множину підграфів $M, M = \{H_k\}_{k=1}^N$ графа-обструкції H для N_2 , вкладеної до евклідової площини, такою, що мінімально покриває множину ребер графа, якщо матиме місце співвідношення $(H^1 \subseteq \{H_k^1\}_{k=1}^N) \& ((\forall j, j = 1, 2, \dots, k)(H^1 \not\subseteq \{H_k^1\}_{k=1}^N \setminus H_j^1))$.

Визначення 7. Будемо називати підграф K графа-обструкції H для N_2 локально проєктивно-площинним, якщо $f|_K(K) \subset D$, де $f : H \rightarrow N_2$ - мінімальне вкладення графа H в N_2 , D - елементарний диск поверхні N_2 .

Позначення 1. Будемо позначати через $St_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_m}(K)$ граф K із i -тої вершини якого виходять $n_i, n_i \geq 0$, висячих ребер, що приєднані до різних вершин, де $i = 1, 2, 3, \dots, m$.

Частина 1.

Твердження 1.1. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф, $G = K_6$, має на N_2 число досяжності множини вершин $t_G(K_6^0, N_2) = 2$ і не має вершини з подвійним доступом та кожне видалене ребро зменшує число $t_G(K_6^0, N_2)$;
2. Граф $G, G = K_5$, має на N_2 число досяжності множини вершин $t_G(G^0, N_2) = 1$ та дві вершини з двостороннім доступом, а граф $G, G = K_5 \setminus e$, має на N_2 три вершини з двостороннім доступом;
3. Граф $G, G = K_7$, має рід $\gamma(G) = 3$;
4. Граф $G, G = K_8 \setminus K_{1,2}$, має рід $\gamma(G) = 3$;
5. Граф $G, G = K_6 \setminus 2K_2$, має на N_2 число досяжності множини вершин $t_G(G^0, N_2) = 2$ та має вершину з подвійним доступом, а $G = K_6 \setminus 3K_2$ має на N_2 $t_G(G^0, N_2) = 2$ та має тільки одну вершину без подвійного доступу;
6. Множина вершин $K_{3,3}^0$ графа $K_{3,3}$ має кратний доступ і є досяжною відносно N_2 ;
7. Три графи K_4 , що утворюють дві пари із одним спільним ребром, для кожної своїм, мають три пари ребер, зхрещених на площині, вкладаються на дві ленти Мебіуса.

Доведення цих тверджень наведено на рис 1.2, де на перших двох картах зображено вкладення графа K_7 в N_3 , відповідно, побудовані як продовження вкладення f_6 графа K_6 в N_2 та вкладення f_5 графа K_5 в N_2 , причому синім кольором позначимо клітку з множини $N_2 \setminus f_5(K_5)$ на якій маємо подвійний доступ до вершин з під множин $\{4\}, \{1\}$. На четвертій карті зображено мінімальне

вкладення графа $K_8 \setminus K_{1,2}$ в N_4 . На п'ятій карті зображено вкладення графа K_6 в N_2 яке реалізує число $t_G(G^0, N_2) = 2$ та видно зменшення цього числа при видаленні ребра (3,5).

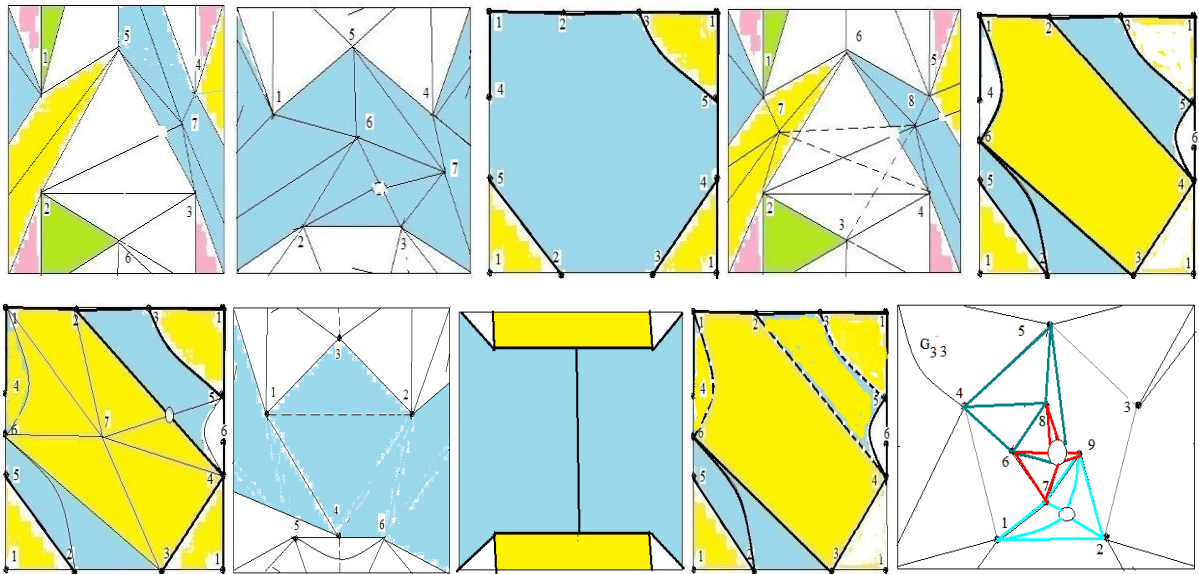


Рис. 1.2. На другій карті вершини 1,4 графа K_5 мають на N_2 двосторонній доступ, а на 3-й,5-й,6-й,8-й,9-й картах ребра позначені дугами та відрізками товстих ліній. Три підграфи графа G_{33} ізоморфні K_4 утворюють пару із одним спільним ребром (6,8) та пару із одним спільним ребром (7,9), вкладаються на N_1 із двома лентами Мебіуса

Лема 1.1. Нехай граф G є φ -образом графів-обструкцій G_1 та G_2 при φ -перетворенні визначеному наступним чином: $\varphi(G_1 + G_2, \sum_{i=1}^2 (e_1 + e_2)) \rightarrow (G, e)$, де $e = (a, b)$, $e \in G^1$. $e_i = (a_i, b_i) \in$ ребром, або частиною ребра графа G_i , $i = 1, 2$. Для орієнтованого роду $\gamma(G)$ мають місце наступні твердження:

- 1). Якщо принаймні одна кінцева вершина кожного з ребер e_i не матиме двостороннього доступу, то маємо рівність $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$;
- 2). Якщо кожна кінцева вершина одного з ребер e_i має двосторонній доступ, то матимемо рівність $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1$;

Доведення. Доведення леми 1.1 для довільних графів-обструкцій G_1 та G_2 аналогічне доведенню для двох графів K_5 , виконаному на рис. 1.3. Наведемо на рис. 1.4. доведення тверджень леми 1.1. для двох вкладених (ребра K_4 сині) в тор графів, зліва–направо, отриманих з двох пар графів $(K_4, K_{3,3})$, (K_4, K_5) шляхом φ -перетвореннями заданим на парі ребер цих пар. Відмітимо, що наявність двостороннього доступу до ототожнених кінцевих вершин ребра означатиме відсутність додаткової 2-ручки. Так для графа K_5 вкладеного до Σ_2 - пляшки Клейна із двостороннім доступом до двох вершин (завдяки наявності кольорової клітини в яку можливо вкласти дві зірки із суміжними центрами на 5-ти та 6-ти ребрах-променях) та отримати мінімальне вкладення графа $K_7 \setminus e$ до Σ_2 .

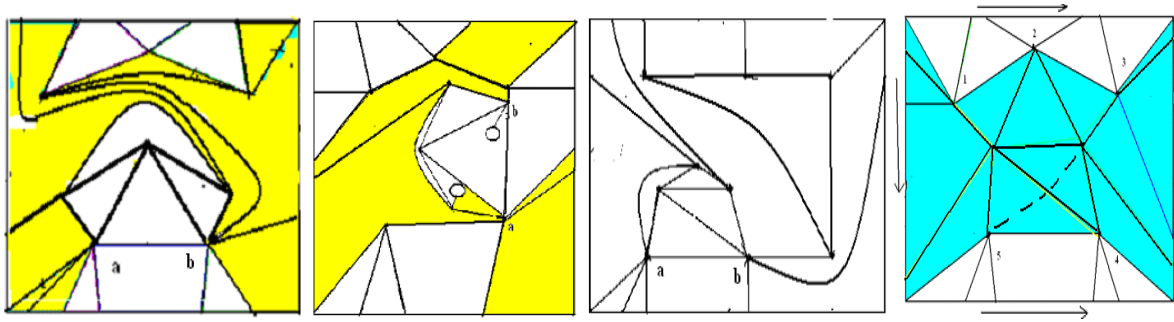


Рис. 1.3. До тверджень леми 1.1. наведено два перші графи (зліва-направо), що отримані з двох графів K_5 двома наступними φ -перетвореннями: 1) по парі ребер, 2) по ребру $e=(a,b)$ та частині ребра u , відповідно, де кольоровою є клітка вкладення в тор графа K_5 , до якої вкладено інший K_5 та виконано склейку; 3) Наведено склейку по ребру $e, e=(a,b)$, графів $K_5, K_{3,3}$; 4) Наведено мінімальне вкладення графа $K_7 \setminus e$ до Σ_2 -пляшки Клейна.

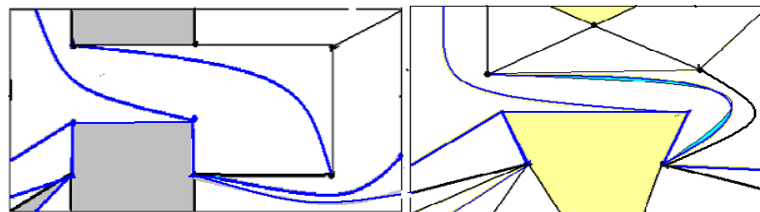


Рис. 1.4. Наведемо до тверджень леми 1.1. два вкладені в тор графи (зліва-направо) отримані з двох пар графів $(K_4, K_{3,3}), (K_4, K_5)$ φ -перетвореннями на парах ребер.

Лема 1.2. Нехай граф G є φ -образом графів G_1 та G_2 - обструкцій для проективної площини при φ -перетворенні визначеному наступним чином: $\varphi(G_1 + G_2, \sum_{i=1}^2 (e_i + e_2)) \rightarrow (G, e)$, де $e=(a,b)$, $e \in G^1$, $e_i=(a_i, b_i)$ є ребром, або частиною ребра графа G_i , $i=1,2$. Тоді для неорієнтованого роду $\gamma(G)$ не виконуються твердження леми 1.1.

Доведення. Дійсно із наведених на рис. 1.5. вкладень до проективної площини графів K_5 та $K_{3,3}$ видно відсутність двостороннього доступу до довільної підмножини їхніх вершин. Але для $K_5/(4,7)$ є двосторонній доступ до пари суміжних вершин 3, 4, 7, який не впливає на рід графа A_2 зі списку графів-обструкцій для проективної площини.

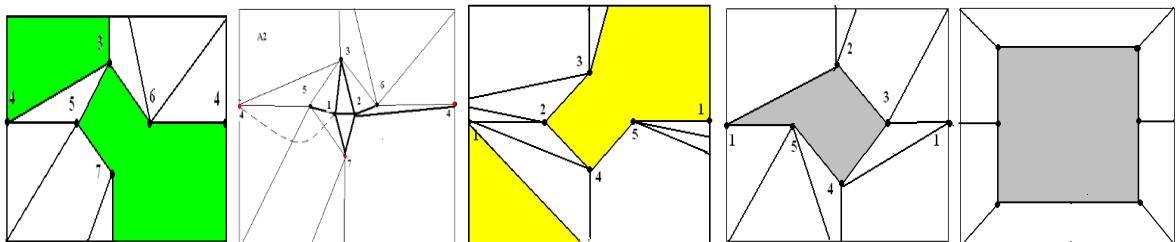


Рис.1.5. Мінімальні вкладення графів $K_5/(4,7), A_2/(1,4), K_5, K_{3,3}$ до проективної площини.

Частина 2.

Твердження 2.1. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_1 є φ -образом графа K_6 та квазізірки $St_{4,4,4}(\overline{K_3})$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_6 + St_{4,4,4}(\overline{K_3}), \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 (a_{ij} + x_{ij})) \rightarrow (G_1, \{\{a_{ij}^*\}_{j=1}^4\}_{i=1}^4)$, де x_{ij} - кінцеві вершини квазізірки ототожнюють з вершинами a_{ij} трьох підграфів K_4 графа K_6 , які попарно мають одне спільне ребро, а множина ребер графа G_1 мінімально покрита трьома графами K_4 .

2. Граф G_2 є φ -образом графа K_6 та квазізірки $St_{4,4,4}(\overline{K_3 \setminus K_2})$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_6 + St_{4,4,4}(\overline{K_3 \setminus K_2}), \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 (a_{ij} + x_{ij})) \rightarrow (G_2, \{\{a_{ij}^*\}_{j=1}^4\}_{i=1}^4)$, де ототожнюються x_{ij} - кінцеві вершини квазізірки з вершинами a_{ij} трьох підграфів K_4 графа K_6 , три з яких утворюють послідовність, бо мають по одному спільному ребру, причому множина ребер графа G_2 мінімально покрита трьома графами K_5 і одним K_6 . Доведення цих тверджень наведено на рис 2.1.

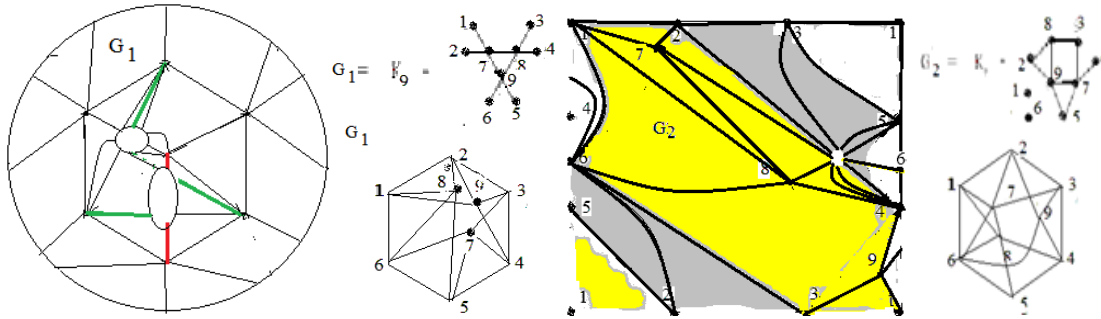


Рис. 2.1. Граф G_1 вкладений до проективної площини N_1 із приклеєними двома лентами Мебіуса, граф G_2 вкладено на N_3 , утвореної з пляшки Клейна та однієї ленти Мебіуса.

Твердження 2.2. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_3 є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,6,6,6}(K_4)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{4,6,6,6}(K_4), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_3, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , де $\deg_{St_{4,6,6,6}(K_4)}(x_4) = 4$, $\deg_{St_{4,6,6,6}(K_4)}(x_i) = 2, i=1,2,3$, причому множина ребер графа G_3 мінімально покрита двома графами K_5 із спільною вершиною, трьома графами K_4 (один з яких містить K_3 , який унеможливує двосторонній доступ до точок з $\{a_i\}_{i=1}^4$ - множини приєднання).

2. Граф G_4 є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_4, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , де $\deg_{St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2)}(x_i) = 2, i=1,2,3,4$, причому множина ребер графа G_4 мінімально покрита одним графом K_5 , чотирма графами K_4 .

3. Граф G_5 є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазізірки $St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus K_2)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus K_2), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_5, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються

із вершинами a_i графа $K_5 \setminus e$, де $\deg_{St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus K_2)}(x_i) = 3, i = 1, 2, 3, 4$, причому множина ребер графа G_3 мінімально покрита одним графом $K_5 \setminus (4,5)$, одним колесом W_4 з чотирма спицями (частинним $K_{2,3}$ на вершинах 4,5,6,7,8,9 із ребрами (6,7), (6,9)) та двома графами K_4 .

4. Граф G_6 є ϕ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{2,2,3,4}(K_4 \setminus K_2)$ при наступному ϕ -перетворенні $\phi(K_5 + St_{2,2,3,4}(K_4 \setminus K_2), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_6, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазі зірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , де $\deg_{St_{2,2,3,4}(K_4 \setminus K_2)}(x_i) = 3, i = 1, 2, 3, 4$, причому множина ребер графа G_6 мінімально покрита одним графом K_5 , одним $K_5 \setminus (7,5)$ і трьома графами K_4 . Доведення цих тверджень наведено на рис 2.2.

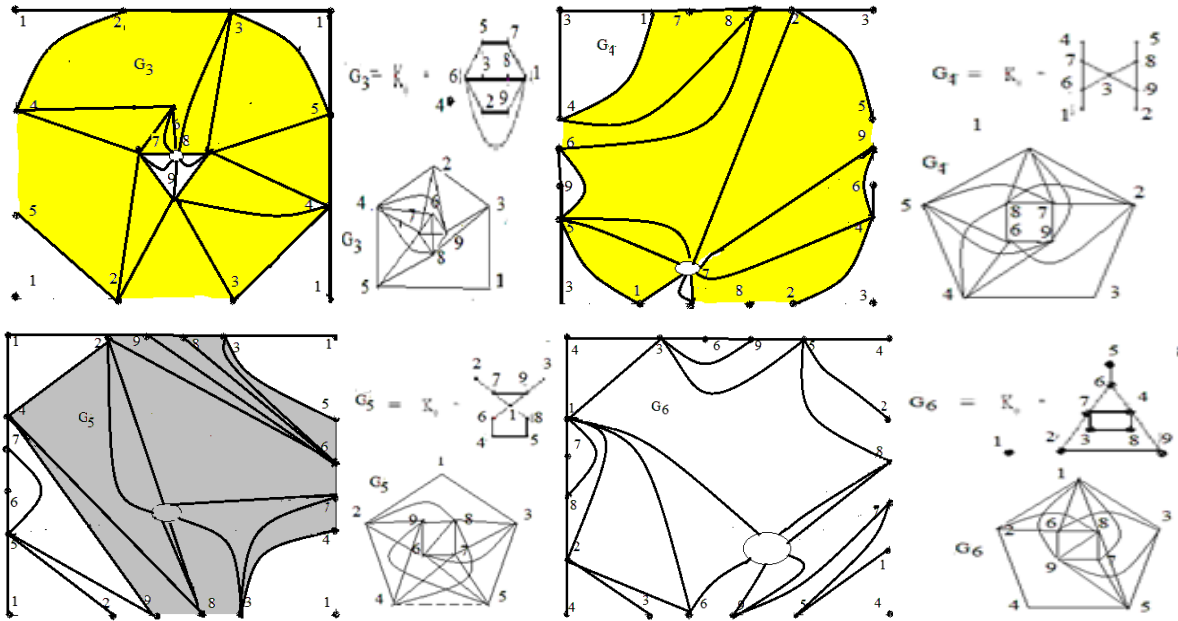


Рис. 2.2. Графи G_3, G_4, G_5, G_6 вкладені мінімально на N_2 з приклеєною лентою Мебіуса.

Твердження 2.3. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_7 є ϕ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{2,2,3,3,4}(K_4 \setminus K_3^1)$ при наступному ϕ -перетворенні $\phi(K_5 + St_{2,2,3,3,4}(K_4 \setminus K_3^1), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_7, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 2, x_3, x_4 мають степінь 3, $\deg_{St_{2,2,3,3,4}(K_4 \setminus K_3^1)}(x_4) = 4$, причому множина ребер графа G_7 мінімально покрита одним графом K_5 , одним $K_{2,3}$, одним $K_5 \setminus (4,5)$ і двома графами K_4 .

2. Граф G_8 є ϕ -образом графа $K_5 \setminus e$, де $e = (a_3, a_4)$, та квазізірки $St_{3,3,4,4}(C_4 \setminus e)$ при наступному ϕ -перетворенні $\phi(K_5 \setminus e + St_{3,3,4,4}(C_4 \setminus e), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_8, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа $K_5 \setminus e$, x_1, x_2 мають степінь 3, x_3, x_4 мають степінь 4, де

$C_4 \setminus e$ - простий ланцюг довжини 3, причому множина ребер графа G_8 мінімально покрита одним графом $K_5 \setminus e$ і п'ятьма графами K_4 .

Доведення цих тверджень наведено на рис 2.3.

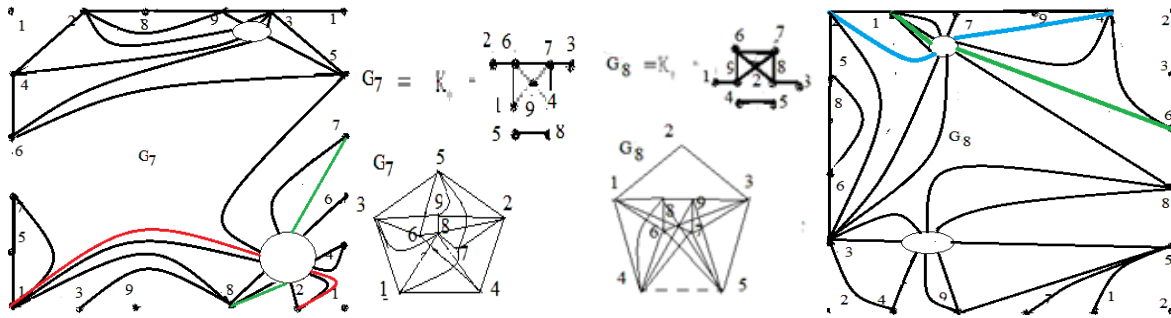


Рис. 2.3. Графи G_7 , G_8 вкладено до проективної площини N_1 із двома лентами Мебіуса.

Твердження 2.3. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_9 є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{2,2,2,2,2}(K_4)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{2,2,2,2,2}(K_4), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_9, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_i мають степінь 2, $i=1,2,3,4,5$, причому множина ребер графа G_9 мінімально покрита одним K_5 і чотирма K_4 .
2. Граф G_{10} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{1,1,2,4,4}(K_4 \setminus K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{1,1,2,4,4}(K_4 \setminus K_2^1), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{10}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 1, x_3, x_4 мають степінь 4, $\deg_{St_{1,1,2,4,4}(K_4 \setminus K_2^1)}(x_5) = 2$, причому множина ребер графа G_{10} мінімально покрита множинами ребер графів K_5 і трьох графів K_4 .

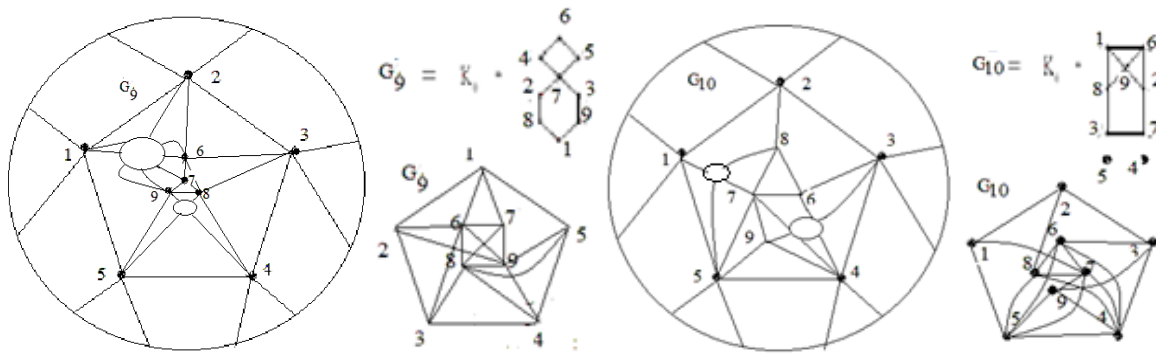


Рис. 2.4. Графи G_9 , G_{10} вкладені в проективну площину N_1 із двома лентами Мебіуса.

Твердження 2.4. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{11} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2^1), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{11}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із

вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 2, x_3, x_4 мають степінь 4, причому множина ребер графа G_{11} мінімально покрита множинами ребер графів K_5 , двох графів K_4 та одного $K_6 \setminus 2K_2$.

2. Граф G_{12} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{3,4,4,5}(K_4 \setminus K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{3,4,4,5}(K_4 \setminus K_2^1), \sum_{i=1}^5(a_i + x_i)) \rightarrow (G_{12}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 2, x_3, x_4 мають степінь 1, $\deg_{St_{3,4,4,5}(K_4 \setminus K_2^1)} x_5 = 3$, причому множина ребер графа G_{12} мінімально покрита множинами ребер графів K_5 та чотирьох графів K_4 .

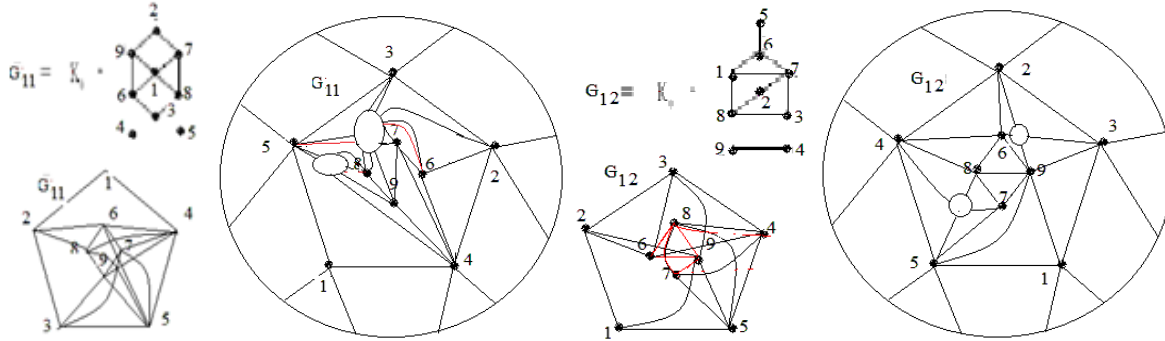


Рис. 2.5. Графи G_{11} , G_{12} вкладені в проективну площину N_1 із двома лентами Мебіуса.

Твердження 2.5. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{13} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,5,5,6}(K_4 \setminus K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{4,5,5,6}(K_4 \setminus K_2^1), \sum_{i=1}^5(a_i + x_i)) \rightarrow (G_{13}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 2, x_3, x_4 мають степінь 3, $\deg_{St_{4,5,5,6}(K_4 \setminus K_2^1)} x_5 = 3$, причому множина ребер графа G_{13} мінімально покрита множинами ребер графів K_5 , п'ятьох графів K_4 .

2. Граф G_{14} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,5,5,6}(K_4 \setminus K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{4,5,5,6}(K_4 \setminus K_2^1), \sum_{i=1}^4(a_i + x_i)) \rightarrow (G_{14}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_3, x_2 мають степінь 2, x_4 мають степінь 4, причому множина ребер графа G_{14} мінімально покрита множинами ребер графів K_5 , одного графа $K_5 \setminus (7,8)$ та двох графів K_4 .

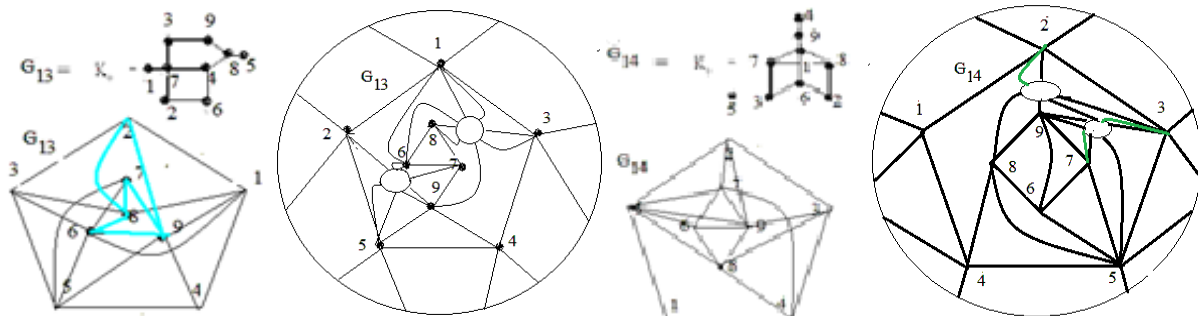


Рис. 2.6. Графи G_{13} , G_{14} вкладені мінімально в проективну площину N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса.

Твердження 2.6. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{14} є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазізірки $St_{5,5,5,6}(K_4 \setminus K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{5,5,5,6}(K_4 \setminus K_2^1), \sum_{i=1}^4(a_i + x_i)) \rightarrow (G_{14}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 2, x_3, x_4 мають степінь 4, причому множина ребер графа G_{14} мінімально покрита множинами ребер трьох графів $K_5 \setminus e$ та двох графів K_4 .

2. Граф G_{16} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,5,6,6}(K_4 \setminus K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{4,5,6,6}(K_4 \setminus K_2^1), \sum_{i=1}^3(a_i + x_i)) \rightarrow (G_{16}, \{a_i^*\}_{i=1}^3)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 4, x_3 має степінь 3, причому множина ребер графа G_{14} мінімально покрита множинами ребер графів K_5 , двох графів $K_5 \setminus (9,8)$ та одного графа K_4 .

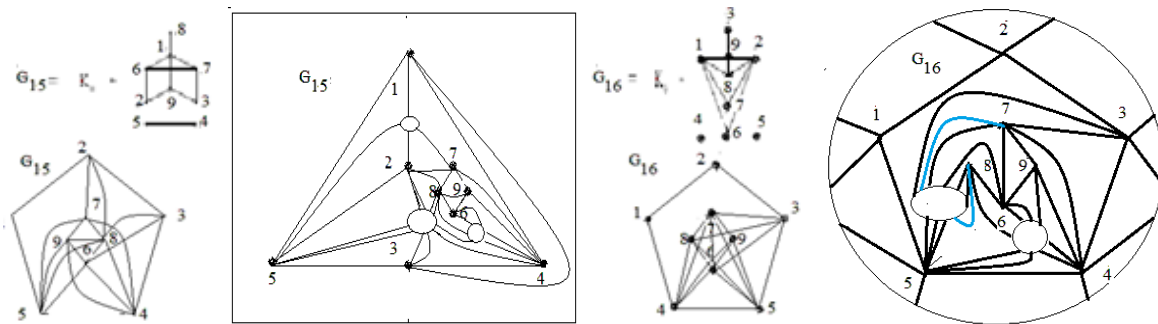


Рис. 2.7. Графи G_{15} , G_{16} вкладені в евклідову площину із трьома приклеєними лентами Мебіуса та в проективну площину N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса, відповідно.

1. Частина 3.

Твердження 3.1. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{17} є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазізірки $St_{4,5,6,6}(K_4 \setminus K_{1,2}^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{4,5,6,6}(K_4 \setminus K_{1,2}^1), \sum_{i=1}^5(a_i + x_i)) \rightarrow (G_{17}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 3, x_3 має степінь 6, x_4 має степінь 1, x_5 має степінь 2, причому множина ребер графа G_{17} мінімально покрита множинами ребер двох графів $K_5 \setminus (1,2)$ та п'ятьох графів K_4 .

2. Граф G_{18} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,4,4,5}(K_2 + \overline{K_2})$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{4,4,4,5}(K_2 + \overline{K_2}), \sum_{i=1}^5(a_i + x_i)) \rightarrow (G_{18}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2, x_3 мають степінь 4, x_4 має степінь 2, x_5 має степінь 1, причому множина ребер графа G_{18} мінімально покрита множинами ребер графів $K_7 \setminus K_2^1$ та двох графів K_4 .

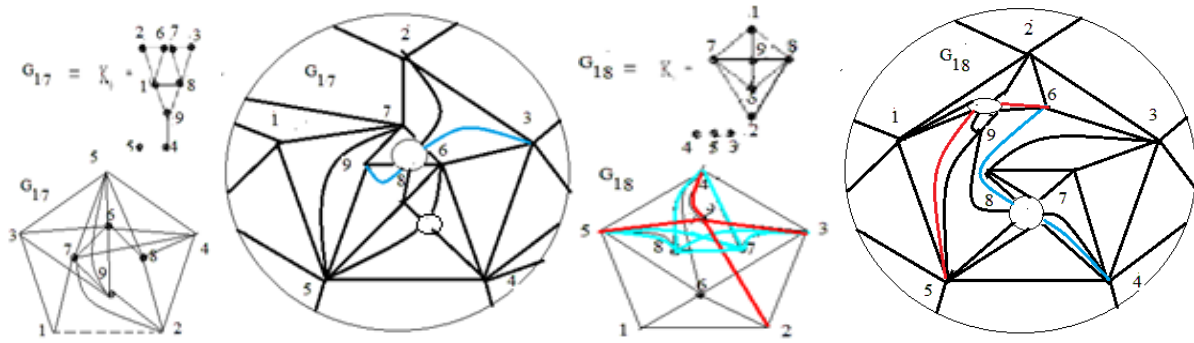


Рис. 3.1. Графи G_{17} , G_{18} вкладені мінімально в N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса.

Твердження 3.2. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{19} є φ -образом графа K_5 та квазісфери $St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2^1), \sum_{i=1}^3 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{19}, \{a_i^*\}_{i=1}^3)$, де x_i - кінцеві вершини квазісфери ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2, x_3, x_4 мають степінь 4, причому множина ребер графа G_{19} мінімально покрита множинами ребер одного графа K_4 та 2-х графів $K_5 \setminus K_2^1$.
2. Граф G_{20} є φ -образом графа K_5 та квазісфери $St_{4,5,5,5}(z_4 \setminus K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{4,5,5,5}(z_4 \setminus K_2^1), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{20}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де z_4 - простий цикл довжини 4, x_i - кінцеві вершини квазісфери ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 1, x_3, x_4, x_5 мають степінь 4, причому множина ребер графа G_{20} мінімально покрита множинами ребер графів K_5 та шістьма графами K_4 .

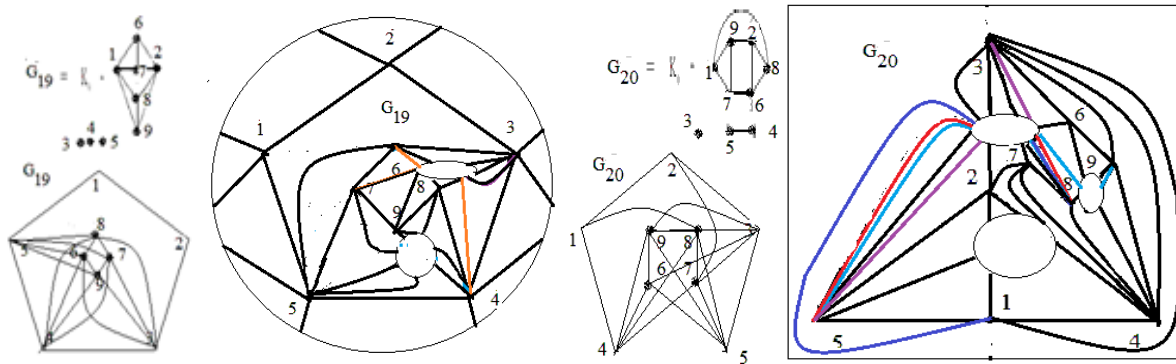


Рис. 3.2. Графи G_{19} , G_{20} вкладені мінімально в N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса та в евклідову площину із трьома приклеєними лентами Мебіуса, відповідно.

Твердження 3.3. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{21} є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазісфери $St_{5,5,6,7}(K_4)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{5,5,6,7}(K_4), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{21}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазісфери ототожнюються із

вершинами a_i графа $K_5 \setminus e$, x_1 має степінь 1, x_2, x_3 мають степінь 2, x_4, x_5 мають степінь 3, причому множина ребер графа G_{21} мінімально покрита множинами ребер графа $K_5 \setminus e$, чотирьох графів K_4 .

2. Граф G_{22} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2^1)$ при наступному φ -пере творенні $\varphi(K_5 + St_{5,5,5,5}(K_4 \setminus 2K_2^1), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{22}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 1, x_3 має степінь 2, x_4, x_5 має степінь 4, причому множина ребер графа G_{22} мінімально покрита множинами ребер графа K_5 та чотирьох графів K_4 .

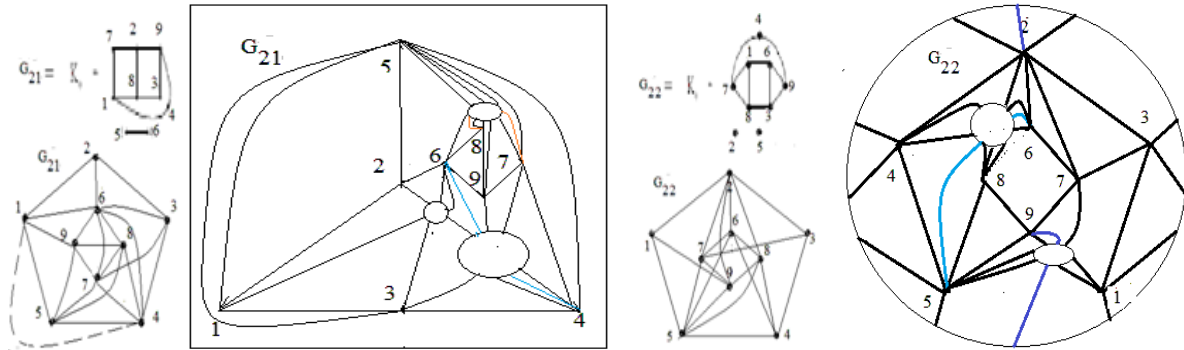


Рис. 3.4. Графи G_{21} , G_{22} вкладені в евклідову площину із трьома приклеєними лентами Мебіуса та в N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса, відповідно.

Твердження 3.4. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{23} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,5,5,6}(K_4)$ при наступному φ -пере творенні $\varphi(K_5 + St_{4,5,5,6}(K_4), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{23}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2, x_3 мають степінь 2, x_4 має степінь 3, причому множина ребер графа G_{23} мінімально покрита множинами ребер графа K_5 та чотирьох графів K_4 .

2. Граф G_{24} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,5,6,6}(K_4)$ при наступному φ -пере творенні $\varphi(K_5 + St_{4,5,6,6}(K_4), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{24}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1 має степінь 1, x_2 має степінь 2, x_4, x_3 мають степінь 3, причому множина ребер графа G_{24} мінімально покрита множинами ребер графа K_5 та чотирьох графів K_4 .

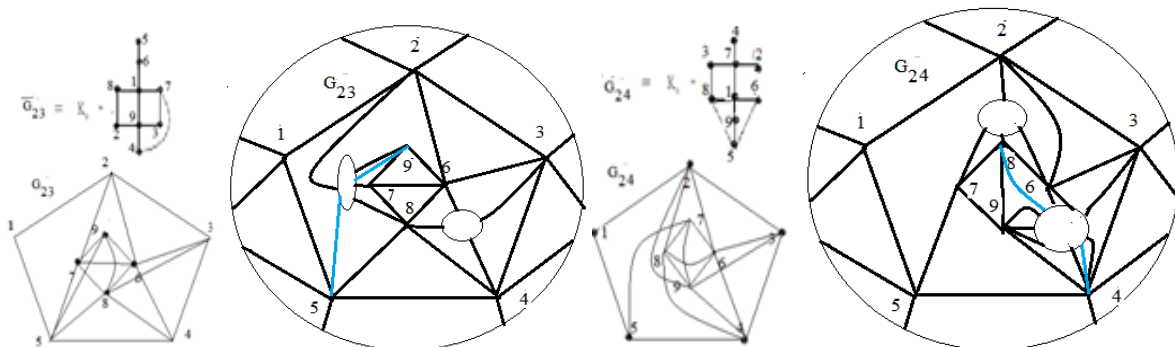


Рис. 3.5. Графи G_{23} , G_{24} вкладені мінімально в N_1 із двома приклесними лентами Мебіуса.

Твердження 3.5. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{25} є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазізірки $St_{5,5,5,6}(K_4 \setminus e)$ при наступному φ -пере творенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{5,5,5,6}(K_4 \setminus e), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{25}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа $K_5 \setminus e$, x_1, x_2, x_3 мають степінь 2, x_4 має степінь 4, x_5 має степінь 1, причому множина ребер графа G_{25} мінімально покрита множинами ребер двох графів $K_5 \setminus e$ та чотирьох графів K_4 .
2. Граф G_{26} є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазізірки $St_{5,5,5,6}(K_4 \setminus e)$ при наступному φ -пере творенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{5,5,5,6}(K_4 \setminus e), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{26}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа $K_5 \setminus e$, x_1, x_2 мають степінь 1, x_4 має степінь 2, x_3, x_5 мають степінь 4, причому множина ребер графа G_{26} мінімально покрита множинами ребер трьох графів $K_5 \setminus e$ та двох графів K_4 .

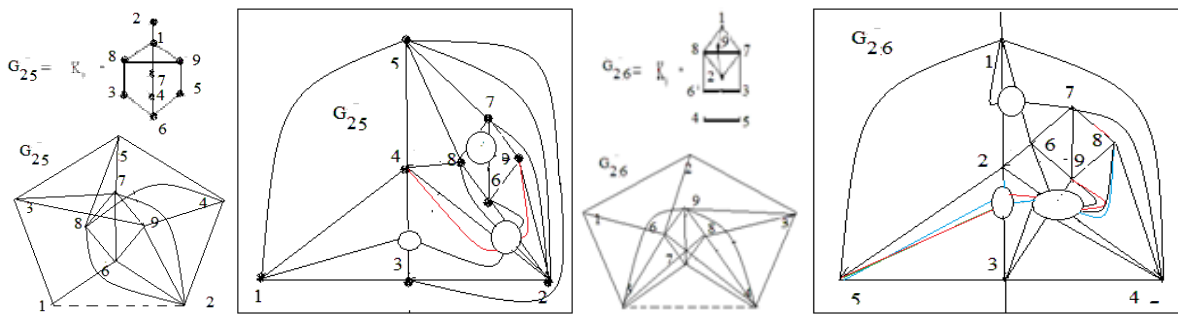


Рис. 3.6. Графи G_{25} , G_{26} вкладені в евклідову площину із трьома лентами Мебіуса.

Твердження 3.6. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{27} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{5,5,5,6}(K_4)$ при наступному φ -пере творенні $\varphi(K_5 + St_{5,5,5,6}(K_4), \sum_{i=1}^3 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{27}, \{a_i^*\}_{i=1}^3)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2, x_3 мають степінь 3, причому множина ребер графа G_{27} мінімально покрита множинами ребер графа K_5 та трьох графів K_4 .
2. Граф G_{28} є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазізірки $St_{4,4,5,7}(K_4 \setminus K_{1,2}^1)$ при наступному φ -пере творенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{4,4,5,7}(K_4 \setminus K_{1,2}^1), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{28}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа $K_5 \setminus e$, x_1, x_2, x_3 мають степінь 2, x_4, x_5 мають степінь 2, причому множина ребер графа G_{28} мінімально покрита множинами ребер графа $K_5 \setminus e$ та чотирьох графів K_4 .

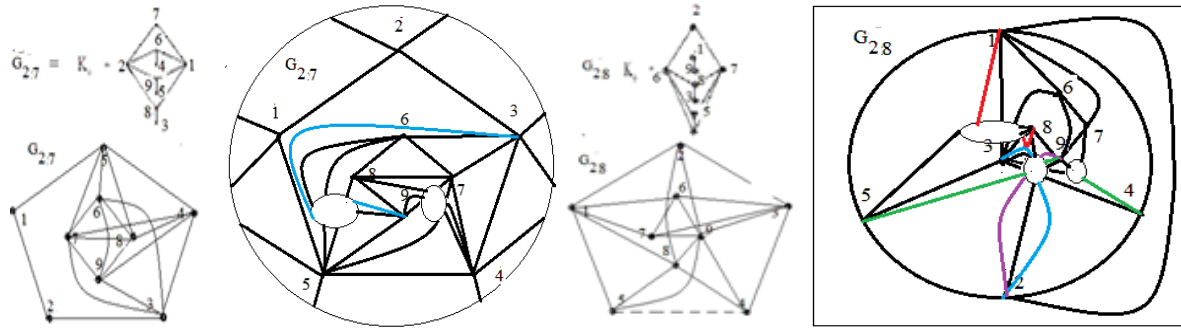


Рис. 3.7. Графи G_{27} вкладено в N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса, G_{28} вкладено в евклідову площину із трьома лентами Мебіуса.

2. Частина 4.

Твердження 4.1. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{29} є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазізірки $St_{5,5,5,5}(K_4)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{5,5,5,5}(K_4), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{29}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа $K_5 \setminus e$, x_1, x_2, x_3 мають степінь 2, x_4 має степінь 3, причому множина ребер графа G_{29} мінімально покрита множинами ребер двох графів $K_5 \setminus e$ та трьох графів K_4 .

2. Граф G_{30} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,4,6,6}(K_4 \setminus K_2^1)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{4,4,6,6}(K_4 \setminus K_2^1), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{30}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 1, x_3 має степінь 2, x_4, x_5 мають степінь 3, причому множина ребер графа G_{30} мінімально покрита множинами ребер графа K_5 та трьох графів K_4 .

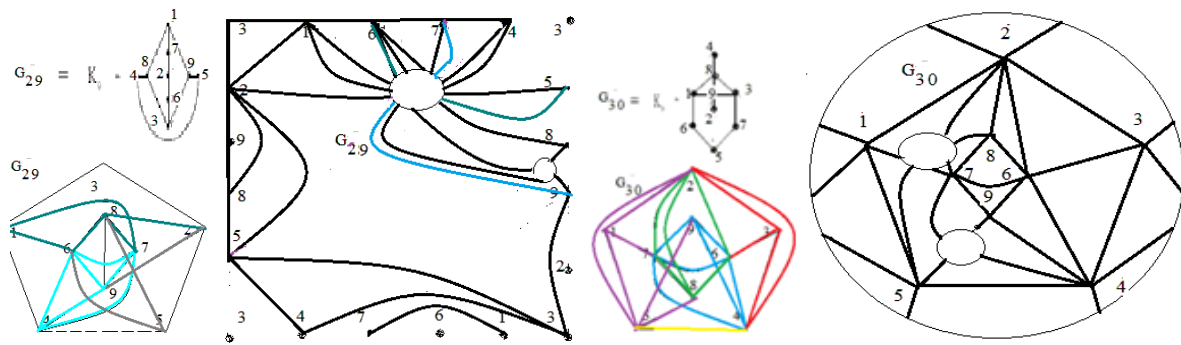


Рис. 4.1. Графи G_{29} , G_{30} вкладені в N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса.

Твердження 4.2. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{31} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,4,6,6}(K_4)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{4,4,6,6}(K_4), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{31}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2, x_3, x_4 мають степінь 2, причому множина ребер графа G_{31} мінімально покрита множинами ребер графа K_5 та чотирьох графів K_4 .

2. Граф G_{32} є φ -образом графа $K_5 \setminus e$ та квазізірки $St_{3,5,5,6}(z_4 \setminus e)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 \setminus e + St_{3,5,5,6}(z_4 \setminus e), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{32}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де $z_4 \setminus e$ простий ланцюг довжини 3, x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа $K_5 \setminus e$, x_1 має степінь 1, x_3, x_2, x_4 мають степінь 3, x_5 має степінь 2, причому множина ребер графа G_{32} мінімально покрита множинами ребер графа $K_5 \setminus e$ та чотирьох графів K_4 .

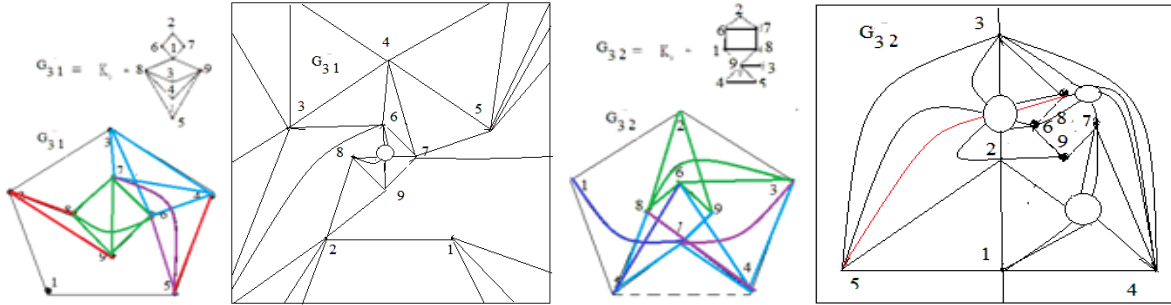


Рис. 4.2. Графи G_{31} , G_{32} вкладені мінімально в N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса.

Твердження 4.3. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{33} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{5,5,5,5}(K_4)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{5,5,5,5}(K_4), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{33}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2, x_3, x_4 мають степінь 2, причому множина ребер графа G_{33} мінімально покрита множинами ребер графа K_5 та трьох графів K_4 .
2. Граф G_{34} є φ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{3,3,5,6}(K_4)$ при наступному φ -перетворенні $\varphi(K_5 + St_{3,3,5,6}(K_4), \sum_{i=1}^5 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{34}, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2, x_3, x_4 мають степінь 2, x_5 має степінь 1, причому множина ребер графа G_{34} мінімально покрита множинами ребер графа K_5 та трьох графів K_4 .

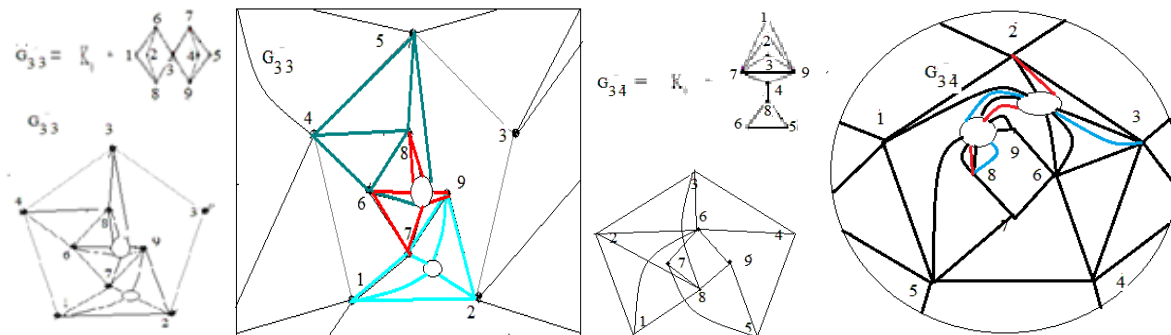


Рис. 4.3. Графи G_{33} , G_{34} вкладені мінімально в N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса.

Твердження 4.4. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф G_{35} є ϕ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{4,4,6,6}(K_4)$ при наступному ϕ -перетворенні $\phi(K_5 + St_{4,4,6,6}(K_4), \sum_{i=1}^3 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{35}, \{a_i^*\}_{i=1}^3)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2 мають степінь 2, x_3 має степінь 4, причому множина ребер графа G_{35} мінімально покрита множинами ребер двох графів K_5 та графа K_4 .

2. Граф G_{36} є ϕ -образом графа K_5 та квазізірки $St_{5,5,5,6}(K_4)$ при наступному ϕ -перетворенні $\phi(K_5 + St_{5,5,5,6}(K_4), \sum_{i=1}^4 (a_i + x_i)) \rightarrow (G_{36}, \{a_i^*\}_{i=1}^4)$, де x_i - кінцеві вершини квазізірки ототожнюються із вершинами a_i графа K_5 , x_1, x_2, x_3 мають степінь 2, x_4 має степінь 3, причому множина ребер графа G_{36} мінімально покрита множинами ребер графів K_5 , $K_5 \setminus (8,5)$ та графа K_4 .

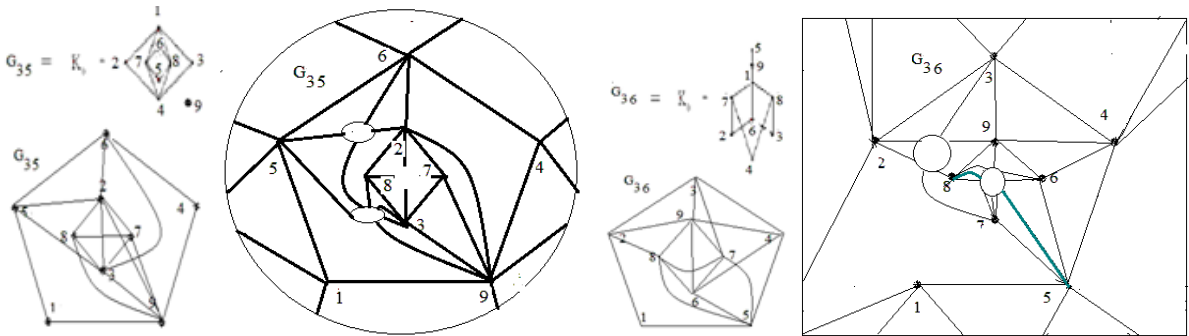


Рис.4.4. Графи G_{35} , G_{36} вкладено в N_1 із двома приклеєними лентами Мебіуса.

Частина 5.

Твердження 5.1. Для довільного мінімального вкладення f простого графа G до неорієнтованої поверхні N мають місце наступні співвідношення:

1. Немає ребер $e, e', e = (a, b), e' = (b, a)$ на границі довільної клітки s , $s \in S_G(N, f)$, але можуть мати місце повторення деяких вершин;
2. Немає повторення двох пар вершин чи двох пар частин ребер $e, e = (a, b), e', e' = (c, d)$, які попарно розділяють одна одну та лежать на границі довільної клітки s , $s \in S_G(N, f)$;
3. Немає двох 2-кліток s_1, s_2 , де $s_1, s_2 \in S_G(N, f)$, на границях яких розташовані повторення трьох виділених ребра із різним порядком слідування.

Доведення. Доведемо співвідношення 1. Припустимо, методом від протилежного, що для деякого мінімального вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N границі клітки $s, s \in S_G(N, f)$ є два ребра $e, e', e = (a, b), e' = (b, a)$, як протилежно направлені копії ребра $\phi(e) = (\phi(a), \phi(b))$, розташовані на границі ∂s , т. то, на поверхні N одна лента Мебіуса містить одне ребро $\phi(e)$, де операція ϕ -ототождження точок на границях кліток є оберненою до операції розбиття на клітки поверхні N . Оскільки кожне з цих ребер належить перетину однієї з двох пар кліток $(s, s_1), (s, s_2)$ то, видаливши ребро e , ми, тим самим, видаляємо й ребро e' , утворюючи простий цикл Z , який містить всі ті ребра простого графа $G \setminus e$, що належали границям кліток s, s_1, s_2 , та стане границею нової клітки $s_0, s_0 \in S_{G \setminus e}(N, f)$. Побудуємо вкладення $f', f': G \rightarrow N$, де $f'|_{G \setminus e} = f|_{G \setminus e}$, $f'(e) \subset \overline{s_0}$, причому вершинами нового ребра стане кінцева вершина ребра (a, b) та початкова вершина ребра (b, a) . Отримаємо розбиття клітки s_0 на дві клітки, причому одна з яких буде утворена шляхом ототождження

двох пар діаметрально протилежних вершин, т.то лентою Мебіуса без ребра, яку замінимо 2-кліткою зменшивши рід $\gamma(N)$ на 1. Тим самим отримуємо суперечність умові про рід графа G , припущення невірне. Доведення співвідношення 1 закінчене.

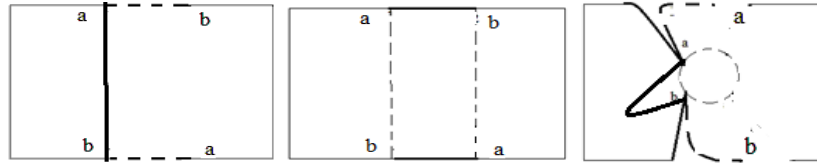


Рис. 5.1. Ряд з трьох карт ілюструє співвідношення 1 твердження 5.1.

Доведемо співвідношення 2. Припустимо, методом від протилежного, що деяким мінімальним вкладенням f графа G до неорієнтованої поверхні N із, принаймні, двома 2-ручками та однією лентою Мебіуса, розташовані на границі деякої клітки $s, s \in S_G(N, f)$, повторення або двох пар вершин, або двох пар частин ребер e, e' , де $e = (a, b), e' = (c, d)$, які розміщені на границі ∂s як копії ребер $\phi(e), \phi(e')$, де $\phi(e) = (\phi(a), \phi(b)), \phi(e') = (\phi(c), \phi(d))$, т. то, на поверхні N дві ручки містять по одному ребру $\phi(e)$ чи $\phi(e')$, де операція ϕ - ототождження вершин та ребер на границях кліток є оберненою до операції розбиття на клітки поверхні N мінімальним вкладенням f графа G . Розглянемо простий шлях L , що лежить в середині клітки s і з'єднує середні точки копій ребра e чи його частини, та який стане негомоторним нулю простим циклом $\phi(L)$ на поверхні N після операції ϕ - ототождження копій ребер (частин) та вершин графа G . Видалимо цикл $\phi(L)$ і ребро $\phi(e)$ тим самим відріжемо звільнену ручку поверхні та розглянемо вкладення $f', f' = f|_{G \setminus e}$, як звуження вкладення f на підграф $G \setminus e$ до неорієнтованої поверхні N' роду $\gamma(N'), \gamma(N') = \gamma(N) - 2$, причому ребро $\phi(e') = (\phi(c), \phi(d))$ буде вкладене на ручці h' , так, що з одного боку якого розташовано клітку s' з вершиною $\phi(a)$ на границі $\partial s'$, а з другого боку розташовано клітку s'' з вершиною $\phi(b)$ на $\partial s''$, де $\phi(e') \subset \partial s' \cap \partial s''$. Приклеїмо до цих кліток $\overline{s'} \cup \overline{s''}$ ленту Мебіуса та вкладемо ребро $f'(\phi(a), \phi(b))$ до $\overline{s'} \cup \overline{s''}$ не перетинаючи $f'(\phi(e'))$. Тим самим отримуємо вкладення графа G до поверхні N'' роду $\gamma(N''), \gamma(N'') = (\gamma(N) - 2) + 1$, яке суперечить умові співвідношення 2, т. то припущення невірне. Доведення співвідношення 2 закінчене.

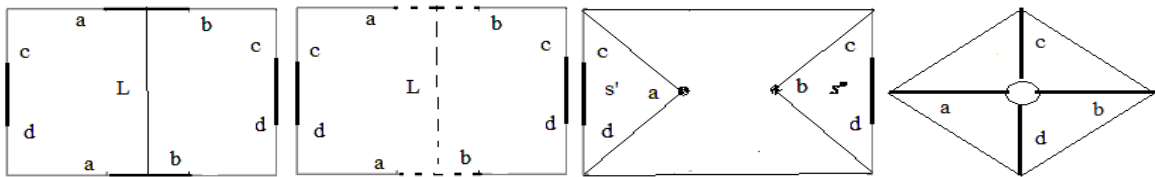


Рис. 5.2. Ілюструємо співвідношення 2 твердження 20,

Доведемо твердження 3. Припустимо, методом від протилежного, що деяким мінімальним вкладенням f графа G до неорієнтованої поверхні N із, принаймні, 2-ручкою R та лентою Мебіуса M , розташовані на границях деяких 2-кліток s_1, s_2 , де $s_1, s_2 \in S_G(N, f)$, три ребра e, e', e'' , де $e = (a, b), e' = (c, d), e'' = (g, h)$, які розміщені на границі ∂s_1 в порядку $\phi(e), \phi(e'), \phi(e'')$, а на границі ∂s_2 в порядку $\phi(e), \phi(e''), \phi(e')$, де $\phi(e) = (\phi(a), \phi(b)), \phi(e') = (\phi(c), \phi(d)), \phi(e'') = (\phi(g), \phi(h))$, де ϕ - операція ототождження вершин та ребер на границях кліток, яка є оберненою до операції розбиття на клітки поверхні N мінімальним вкладенням f графа G . Тоді ребра $\phi(e), \phi(e')$ з $G^1 \cap (\partial s_1 \cup \partial s_2)$ мають розміщуватися на 2-ручці R , та на M ленті Мебіуса, на якій переставимо місцями кінцеві вершини

(перевернемо ребро) $\phi(e)$. Розглянемо прості ланцюги L_1, L_2 , які з'єднують середини ребер e, e' на клітках s_1, s_2 , відповідно, та утворюють простий цикл Z в результаті операції ототождження вершин та ребер на границях кліток s_1, s_2 . Видалимо ребра $\phi(e)$ та $\phi(e')$ та отримаємо вільну від ребер 2-ручку R . Видалимо простий цикл Z , т. то розріжемо 2-ручку R , причому не розділяємо поверхню N на дві частини. Отримаємо вкладення f' , $f' = f|_{G \setminus \{e, e'\}}$, графа $G \setminus \{e, e'\}$ до неорієнтованої поверхні N' , утвореної з N шляхом видалення ручки R , де $\gamma(N') \leq \gamma(N) - 2$. Оскільки таке вкладення 2-клітковим, то розмістимо на ленті M ребро $f'(e'')$, яке, разом з вершинами видаленого ребра e' належатиме двом псевдокліткам на границях яких розділятимуть одна одну пари кінцевих вершин ребер e, e' . Продовжимо вкладення f' на ребра e, e' , які перехрещені на площинному диску, уникаючи перетину шляхом розташування їх на ленті M , де вже вклено вершини ребра e'' . Тим самим отримаємо суперечність умові про мінімальність вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N , т. то припущення невірне. Доведення співвідношення 3 закінчене. Доведення твердження 5.1 закінчене.

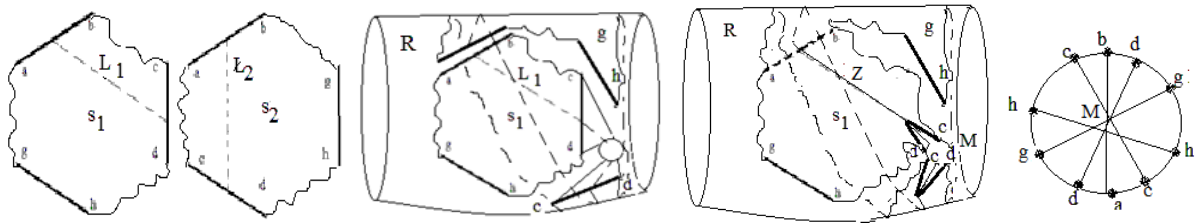


Рис. 5.3. Ілюструє співвідношення 3 твердження 5.1.

Твердження 5.2. Для довільного мінімального вкладення f простого графа G до орієнтованої поверхні N не мають місця співвідношення твердження 5.1.

Доведення. В кожному із співвідношень твердження 5.1 є лента Мебіуса, тому для орієнтованої поверхні N кожне з цих співвідношень не матиме місця.

Теорема 5.1. Кожен граф-обструкція H для N_2 -неорієнтованої поверхні рода 2 задовольняє наступним співвідношенням:

1. Довільне ребро $u, u = (a, b)$, розміщується на ленті Мебіуса деяким мінімальним вкладенням графа H в N_3 та існує мінімальний по включенню проєктивно-площинний підграф K графа $H \setminus u$ чи його частина, що задовольняє умові: $(t_K(\{a, b\}, N_3) = 1) \wedge (t_{K \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2)$;
2. Існує найменша по включенню множина різних підграфів K_i яка покриває множину ребер 2-зв'язного графа H , де, K - локальний проєктивно-площинний підграф чи частинний підграф графа $H \setminus e$, гомеоморфний $K_5 \setminus e$ чи $K_{3,3} \setminus e$.

Доведення. Доведемо співвідношення 1. Нехай $u, u = (a, b)$, довільне ребро графа-обструкції H для неорієнтованої поверхні N_2 рода 2 та мінімальне вкладення $f, f: H - u \rightarrow N_2$, яке розташовує кінцеві вершини ребра $u = (a, b)$ на границях двох кліток $s_1, s_2, s_i \in S_H(N_2, f), S_H(N_2, f) = N_2 \setminus f(H)$, де $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$. Тоді це ребро не може з'єднувати два підграфи графа-обструкції H та існуватиме підграф K_5 графа-обструкції H гомеоморфний або K_5 , або $K_{3,3}$, який вкладенням f розміщується на проєктивній площині із однією приклеєною лентою Мебіуса так, що всі його вершини виходитимуть на границю однієї клітки, причому деякі з подвійним доступом. Тоді

ребро $u = (a, b)$ буде розміщено на ленті Мебіуса разом з, принаймні одним ребром, яке на проективній площині зхрещене із u . Відмітимо, що $s_1 \neq s_2$, тобто матимемо рівняння $t_{H_u}(\{a, b\}, N_2) = 2$, бо у разі однієї клітки $s_1 = s_2$ було б можливо продовжити вкладення шляхом розміщення ребра $f(u)$ в середину клітки s_1 , що суперечить визначенню граф-обструкції для неорієнтованої поверхні N_2 рода 2. Тоді існуватиме найменший по включенню локально площинний на неорієнтованої поверхні N_2 підграф K графа $H \setminus u$, який містить всі вершини, що виходять на границі кліток $\partial s_1 \cup \partial s_2$, тобто задовольняє рівності $t_{H_u}(\{a, b\}, N_2) = 2$. Довизначивши вкладення f шляхом додавання відрізка $[a, b]$ до 2-зв'язного підграфа $f(K)$, матимемо перетин принаймні одного ребра $f(u')$ з $[a, b]$. Приклеїмо до N_2 ленту Мебіуса в місці перетину ребер $f(u')$, та перевизначимо вкладення $f: H - u \rightarrow N_2$ шляхом розведення на ленті Мебіуса ребра $f(u')$ з ребром $f'(u)$. Тим самим отримаємо мінімальне вкладення f' , $f': H \rightarrow N_3$, яке розташовує кінцеві вершини ребра $u = (a, b)$ на границі однієї клітки, та рівність $t_H(\{a, b\}, N_3) = 1$. Доведення співвідношення 1. закінчене.

Доведемо співвідношення 2 використовуючи наведені вище позначення для виділення локально площинних підграфів K_i графа $H \setminus u$, який задовольняє умові: $(t_{K_i}(\{a, b\}, N_3) = 1) \wedge (t_{K_i \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2)$. Розглянемо всі можливі випадки для графа $H \setminus u$:

- 1). Існує простий цикл $f(z)$ графа $H \setminus u$, $u = (a, b)$, який містить вершини $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$;
- 2). Не існує простого циклу $f(z)$ графа $H \setminus u$, який містив би вершини $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$;

Випадок 1). Циклом $f(z)$ буде простий цикл, який містить принаймні ребра з кінцевими вершинами $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$ та входить до об'єднання границь тих кліток чи псевдокліток s_i , $s_i \in N_2 \setminus f(H)$, $i = 1, 2, \dots, n$, що утворюють ланцюжок з початком в s_1 та кінцем в s_n , $s_n = s_2$, а кожна наступна клітка ланцюжка матиме принаймні одне спільне ребро із попередньою кліткою цього ланцюжка. У виродженому випадку цей ланцюжок кліток складатиметься тільки з двох трикутних кліток чи псевдокліток s_1, s_2 . В графа $H \setminus u$ має існувати найменший по включенню локально площинний підграф K , який задовольняє умові: $(t_K(\{a, b\}, N_3) = 1) \wedge (t_{K \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2)$, бо інакше порушуватиметься умова про H як граф-обструкцію. Тобто мають бути, або три ланцюги ненульової довжини, що належать границям кліток ланцюжка і мають спільну кінцеву вершину, або два зхрещених на площині діагональ них відносно $f(z)$ ланцюги L_1, L_2 ненульової довжини, (один з них належатиме до границь кліток ланцюжка, а інший не матиме спільних ребер із границею жодної клітки ланцюжка), які парами своїх кінцевих вершин розділятимуть один одного та пару вершини a, b на $f(z)$. Тоді локально площинний підграф K матиме вигляд $f(z) \cup L_1 \cup L_2$ тобто $f(K) \cong K_4$, та задовольнятиме умові: $t_{K \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2$ для довільного ребра $u = (a, b)$. У випадку коли вершини a, b є внутрішніми точками несуміжних ребер графа K , то граф $K + (a, b) \cong K_{3,3}$.

Випадок 2). Нехай не існує простого циклу $f(z)$ графа $H \setminus u$, який містив би вершини $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$. Це означатиме що, видалене ребро $u = (a, b)$ розірвало той простий цикл z' графа H , що за умови 2- зв'язності графа H проходив через вершини a, b . Тоді має бути 2-зв'язний підграф H' графа $H \setminus u$ який має вершину a та простий ланцюг L' , який задовольнятиме умові $H' \cup L' \cup u \supseteq z'$. Для 2-зв'язного підграфа H' виконуватиметься наведений вище випадок 1). Доведення для випадку 2) закінчене. Таким чином для кожного ребра u графа 2-зв'язного графа H є підграф K_i ,

$K_i = K(u) + u$, де локально площинний підграф $K(u)$ із доданим ребром u (принаймні $K + e \cong K_5$, чи $K + e \cong K_{3,3}$). Тоді об'єднання всіх таких K_i покриває множину ребер графа H . Доведення співвідношення 2 закінчене. Доведення теореми 5.1 закінчене.

Наслідок 1. Граф-обструкція H для неорієнтованої поверхні рода $2 \in \varphi$ - образом двох квазізірок $St_{n_1, n_2, \dots, n_{k_1}}(H_1), St_{m_1, m_2, \dots, m_{k_2}}(H_2)$ з центрами - підграфами $H_i, k_i = |H_i|, i \neq j, j=1,2$, де квазізірка може не мати висячих ребер, а у випадку наявності висячих ребер, кожна l -та висяча вершина інцидентна nl висячим вершинам тих ребер, що приєднуються кінцевими вершинами до ml' вершин підграфа H_j , де $l=1,2, \dots, k_1, l'=1,2, \dots, k_2, i \neq j, j=1,2$, саме ці кінцеві вершини утворюють множину точок приєднання з числом досяжності 2 відносно N_2 та мають наступні властивості для 2-зв'язного H :

а). для кожна вершина центру H_i з підмножини точок приєднання приєднана, або висячим ребром до однієї вершини підграфа H_j , або двома висячими ребрами до кожної з кінцевих вершин деякого ребра підграфа H_j , або трьома висячими ребрами до кожної вершини підграфа K_3 графа H_j , де $i \neq j, i, j=1,2$;

б). кожне ребро підграфа H_i чи H_j є суттєвим при операції його видалення, або відносно неорієнтованого роду $\gamma(H_i)$ чи $\gamma(H_j)$, де $i \neq j, i, j=1,2$, або відносно числа досяжності $t_{H_i}(X_{ij}, N_2)$, множини точок приєднання $X_{ij}, X_{ij} = X(H_i, H_j)$, квазізірки $St_{n_1, n_2, \dots, n_{k_1}}(H_1)$ до графа H_j , де $i \neq j, i, j=1,2$, або, як бокове ребро підграфа K_3 , відносно числа багатосторонності $ms_{H_i}(X_{ij}, N_2)$, множини точок приєднання $X_{ij}, X_{ij} = X(H_i, H_j)$, квазізірки $St_{n_1, n_2, \dots, n_{k_1}}(H_1)$ до графа H_j , де $i \neq j, i, j=1,2$.

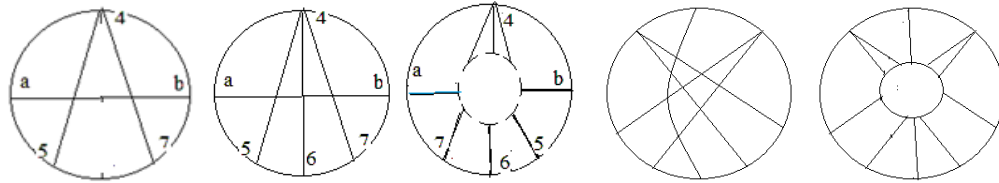


Рис. 5.3. На картах наведено приклад підграфа K графа H з теореми 5.1, вкладеного до елементарного диска проективної площини

Список літератури

9. Хоменко М. П. φ -перетворення графів. препринт ИМ АНУ, Киев, 1973, 383 с.
10. Хоменко Н. П. Топологические аспекты теории графов. препринт ИМ АНУ, Киев, 1970.
11. Хоменко Н. П. Островерхий Е. Б. Существенные элементы и род графа. препринт "Минимальные вложения графов" ИМ АНУ, Киев, 1972, 62 с.
12. Cashy J., Irreducible graphs for the Klein bottle, Ohio State University Ph.D. Thesis, 2000.
13. Mohar B., Thomassen C., Graphs on Surfaces, Johns Hopkins University Press, 2001.
14. Suhkjin Hur. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10, Phd, Ohio State University, 2008.
15. Петренюк В.І., Петренюк Д.А., Нова верхня межа неорієнтованого роду простого графа. Комп'ютерна математика, №1, ІК НАНУ, Київ, 2019, с.10-19.

РОЗДІЛ 5. СТРУКТУРИ НА ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА

5.1. МОДЕЛІ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА.

Основні поняття та позначення взяті з [1],[2],[3]. Розглянуто задачу дослідження структури графів-обструкцій для поверхні Клейна та побудовані їхні граф-моделі як основу з якої, шляхом видалення чи стискання деякої множини ребер, утворюються графи-обструкцій для заданої поверхні неорієнтованого роду. Задача дослідження структури графів неорієнтованого роду розглядалася [4,5,6]. В [7] методом релятивних компонент була стиснута множина мінорів для проєктивної площини до 12-ти базисних мінорів та побудовано множину з 62-х мінорів поверхні Клейна. Для цього розглядали всі неізоморфні мінімальні вкладення кожного з базисних мінорів та знаходили множину всіх різні пари вершин, які є досяжними на проєктивній площині при операціях видалення чи стискання в точку довільного ребра цього графа, потім до обраної пари точок приєднували пару несуміжних вершин графа $K_5 \setminus e$. В [8] обчислена кількість 2-зв'язних графів-обструкцій для поверхні Клейна, частина діаграм цих графів наведена в [10].

Наш підхід, як продовження [9], полягатиме в знаходженні реберного покриття графа-обструкції G заданого роду мінімальним числом підграфів покриття з числа квазізірок з центрами - графами з суттєвими ребрами відносно числа досяжності чи неорієнтованого роду при операціях стискання в точку чи видалення ребра відносно заданої множини точок з числом досяжності 2 відносно евклідової площини та досяжними на проєктивній площині чи поверхні Клейна, наприклад, це підмножини множини точок графів $K_4, K_{2,3}, K_5 \setminus e, \overline{K_r}, r \geq 2$, чи граф-обструкцій проєктивної площини. Також знайдено необхідні умови для побудови графів-обструкцій для поверхні Клейна шляхом ототождження пар точок центрів та всяких вершин трьох квазізірок, тим самим маємо основу алгоритма побудови більшого числа графів-обструкцій для поверхні Клейна. Гіпотетично граф-обструкція заданого неорієнтованого роду $n, n \geq 2$, має вигляд циліндричної поверхні з n дисками-основами та бічною частиною, які можуть мати спільні множини точок на границях та на яких вкладені, принаймні частиною, графи-центри квазізірок, що мають задану множину точок досяжності 2 на евклідовій площині, а на бічній поверхні розміщуються всячі ребра, що перетинаються на площині та вкладаються без перетину за допомогою приклеєних до бічної поверхні лент Мебіуса. При цьому ребра матимуть, принаймні, два варіанти вкладення в бічну частину циліндричної поверхні, але не більше кількості приклеєних лент Мебіуса, завдяки цьому кожне всяче ребро вклатиметься на ленті Мебіуса, або тільки з одним ребром, або з двома суміжними ребрами. Відмітимо, що наведене нижче визначення 3 має аналогічне в [11].

Частина 1.

Нехай задано мінімальне вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$, тобто це найменша по включенню підмножина $\{s_i\}_{i=1}^t$ множини $S_G(N, f)$, $S_G(N, f) = N \setminus f(G)$, складена з кліток на границях яких розташовано точки з множини M . Кожен граф G неорієнтованого роду $k, k \geq 1$, може бути поданим наступним перетворенням:

$\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=1}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, як φ -образ графа H та зірки $St_n(g_0)$, приєднаної всячими вершинами g_i до точок a_i , де задана множина точок графа H , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, $M \subseteq (\partial s_1 \cup \partial s_2) \cap H^0$ яка розміщується на границях кліток s_1, s_2, \dots, s_t множини $N \setminus f'(H)$, де $t \geq 2, m \geq 2, i = 1, 2, \dots, m$, мінімальним вкладенням $f', f': H \rightarrow N'$.

Аналогічно характеристикам вкладення графа G до орієнтованої поверхні на підмножині $\{s_i, s_j, s_k\}$ множині $S_G(N, f)$, визначимо характеристику $\theta, \theta = 1$, множини M коли виконується умова

$\partial s_i \cap \partial s_j \cap \partial s_k \neq \emptyset$, тобто є, хоча б одна, спільна точка на їхніх границях, яка є центром кліткової зірки, утвореної із трьох кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$, або визначено характеристику $\partial\theta$, $\partial\theta=1$, якщо довільні пари цих кліток мають на границях, мінімально, одну спільну точку, тобто утворюють клітковий цикл довжини 3, утворених із трьох кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$.

Позначення 1. Позначатимемо через $\angle(s_i, s_j)$ та називатимемо кутом між клітками чи псевдоклітками s_i, s_j множини $S_G(N, f)$ найменшу по включенню зірку графа G з центром в a , $a \in G^0 \cap (\partial s_i \cap \partial s_j)$, із множиною ребер - променів, розташованих з одного боку відносно точки перетину границь кліток s_i, s_j . Саме ці ребра чи їхні частини вкладатимемо до ленти Мебіуса, приклеєної до площини, для утворення псевдоклітки, на границі якої розміщуються об'єднання границь s_i, s_j .

Позначення 2. Нехай задане мінімальне вкладення f графа H до неорієнтованої поверхні N . Будемо позначати через $\alpha(\angle(s_1, s_2))$ операцію перетворення ребер e_1, e_2 , $f(e_1) \subset \partial s_1$, $f(e_2) \subset \partial s_2$, зі спільною вершиною a кліток s_1, s_{12}, s_2 , де $f(e_1) \cup f(e_2) \subseteq \partial s_{12}$, причому вкладення f графа H в N розміщує на границях кліток s_1, s_2 множину $f(M)$, $f(M) = f(\{a_i\}_{i=1}^m)$. Приклеїмо до клітки s_{12} ленту Мебіуса наступним чином. Розщепимо довільну внутрішню точку $f(x_i)$ ребра e_i , $e_i = (a_i, b_i)$ на точки x_i', x_i'' , де $i=1,2$. Виріжимо в середині s_{12} елементарний диск з центром в x_i та розташуємо на його границі діаметрально протилежні пари точок (x_1', x_2'') , (x_1'', x_2') як кінцеві точки частин схрещених ребер на площині елементарного диска. Отримаємо таким чином псевдоклітку s неорієнтованої поверхні N' , де $\gamma(N') = \gamma(N) + 1$, $\partial s = \partial s_1 \cup \partial s_2$, в яку можливо вкласти ту частину зірки $f'(St_n(g_0))$, яка приклеєна до точок множини $f(M) \cap \partial s$ і таким чином отримати вкладення графа G в поверхню N' .

Позначення 3. Під квазізіркою $St_G(H)$ з центром H будемо розуміти підграф чи частину H графа G з множиною висячих ребер прикріплених однією кінцевою точкою до вершини чи точки ребра підграф H , а інші кінцеві точки належать множині приєднання M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$.

Визначення 1. Нехай задано мінімальне вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$. Будемо називати клітковою довжиною $d_G(s_i, s_j, f)$ між границями кліток s_i, s_j із заданими на них підмножинами L_i, L_j вершин зв'язного графа G , де $L_i \subseteq G^0 \cap \partial s_i$, $L_j \subseteq G^0 \cap \partial s_j$, $\{s_i, s_j\} \subset S_G(N, f)$, потужність $|J|$ найменшої по включенню впорядкованої множини J , $J = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+k}, s_j\}$, $J \subseteq S_G(N, f)$, де послідовні пари кліток мають на своїх границях, принаймні одне, спільне ребро. Причому підмножину множини J , складену із не менше ніж двох послідовних кліток зі спільною вершиною на границях, будемо рахувати як одну клітку. Також будемо говорити, що на множині J задано особливий простий клітковий ланцюг L_{ij} , $L_{ij} = L(s_i, s_j)$, який з'єднує клітки s_i, s_j кліткового графа для графа G . У випадку незв'язного графа G одна з кліток множини J буде не 2-кліткою і не псевдокліткою.

Визначення 2. Будемо називати деревом T досяжності множини точок M , та позначати через $T = T_G(M, N)$, зв'язного графа G , при заданому мінімальному вкладенні f графа G до неорієнтованої поверхні N , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$, пару множин

$(\{s_i\}_1^t, \{L_{ij}\})$, де $\{L_{ij}\}$ - найменша по включенню множина особливих кліткових ланцюгів $L(s_i, s_j)$ які, або безпосередньо, або як об'єднання кількох послідовних кліткових ланцюгів зі спільним кінцем одного та початком іншого, що з'єднують всі пари кліток s_i, s_j та мають найменшу суму довжин всіх L_{ij} із множини $\{L_{ij}\}$.

Визначення 3. Для множини точок M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, зв'язного графа G роду $\gamma = \gamma(G)$ з числом досяжності $t_G(M, N_\gamma)$, де $t_G(M, N_\gamma) = t$, $t \geq 2$, будемо називати клітковою довжиною $d_G(M, t)$, де $d_G(M, t) = \min_{\forall f \in fGN \forall s_i, s_j \in T} \sum d_G(s_i, s_j, f)$, між підмножинами L_i, L_j множини M , $M = L_i \cup L_j$, $L_i \cap L_j = \emptyset$,

розташованими на границях довільних кліток $s_i, s_j, \{s_i, s_j\} \subset S_G(N_\gamma, f)$, що реалізують число досяжності $t_G(M, N_\gamma)$, де fGN - множина всіх неізоморфних вкладень графа G до N_γ , що реалізують число досяжності $t_G(M, N_\gamma)$ множини точок M .

Визначення 4. Будемо називати множини M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, точок графа G з числом досяжності t , де $t_G(M, \Sigma_0) = t$, критичною відносно кліткової довжини $d_G(M)$ при операції видалення довільного елемента a_i , якщо має місце нерівність $d_G(M \setminus a_i) < d_G(M)$, чи відносно операції стискання ребра $u = (ab)$ в точку a' (якщо $\{a, b\} \subset M$, то замість M розглядатимемо множину $M' = (M \setminus (a, b)) \cup \{a'\}$), якщо має місце нерівність $d_{Gu}(M') < d_G(M)$.

Визначення 5. Будемо називати граф G мінімальним відносно $d_G(M)$ при операції видалення або стискання в точку довільного ребра u , якщо, або $d_{Gu}(M) + 1 = d_G(M)$, або $d_{Gu}(M') < d_G(M)$, де Gu - граф з стиснутим в точку a' ребром $u = (a, b)$ та $M' = (M \setminus \{a, b\}) \cup \{a'\}$.

Визначення 6. Будемо говорити, що 2-зв'язний граф-обструкція G неорієнтованого роду $\gamma(G)$, $\gamma(G) > 1$, покривається множиною з $k, k = 2$, квазізірок $St_G(H_i)$ з центром H_i (коли центр є

виродженим графом з множиною вершин $H_i^0 = \{v_j\}_{j=1}^{r_i}$ матимемо множину $\sum_{j=1}^{r_i} St_G(v_j)$ зірок), якщо має

місце $G^1 = \sum_{j=1}^k St_G^1(H_j)$, (тобто кожне ребро графа належить, принаймні, одній з двох квазізірок), де H_1

- площинний граф із заданою множиною точок M_1 з числом досяжності 2 відносно евклідової площини, граф H_2 роду $\gamma(H_2) \geq 0$ із заданою множиною точок M_2 з числом досяжності t , $t = 1$, (якщо $\gamma(H_2) = 0$, то $t = 2$) відносно поверхні роду $\gamma(H_2)$, причому всі висячі ребра-промені мають бути суттєвими відносно числа досяжності при операції видалення ребра, а деякі висячі ребра-промені можуть належати різним квазізіркам, або бути відсутніми взагалі, де $M_i = \{m_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ та n_i висячими ребрами (m_{ij}, b_{ij}) , де $i = 1, 2, \dots, n$, $j \neq j'$, $j, j' = 1(1) |G|$.

Лема 1. Мають місце наступні твердження:

1. Кліткова відстань між заданою парою кліток мінімального неорієнтованого вкладення заданого зв'язного графа є збільшеною на 1 найменшою метричною відстанню між довільними парами точок на границях цих кліток.

2. Якщо множина M має більш ніж дві клітки мінімального неорієнтованого вкладення зв'язного графа та визначено дерево $T(M)$ (в якому вершинами будуть елементи множини M , а ребром буде наявність

спільної точки для границь кліток множини M), то кліткова відстань між її елементами є сумою збільшених на 1 довжин найкоротших ланцюгів між парами довільних вершин дерева $T(M)$.

3. Ребро u графа G суттєве відносно числа досяжності заданої множини точок M , $M = \{a, b\}$, графа G при операції його видалення, якщо належить квазізірці $St_G(K_4 \setminus (a, b))$.

4. Граф $K_5 \setminus (a, b)$ ізоморфний $St(K_4)$ з чотирма висячими ребрами, з яких три мають висячі вершини ототоженні в точку a , а четверте ребро стягнуте в точку b .

5. Зірка $St(K_4)$ 2-зв'язного графа-обструкції G заданого неорієнтованого роду 3 має, щонайменше, по одному висячому ребру-променю з кожної вершини графа K_4 чи, принаймні, чотирьох внутрішніх точок його ребер, причому деякі з них можуть бути стягнутими в точку.

6. Для кожного графа-обструкції є реберне покриття підграфами чи частинами гомеоморфними K_4 .

Доведення. Твердження 1,2,3 леми 1 впливатиме з поняття метрики графа та наведених вище визначень 3, 4, 5. Твердження 4 є очевидним. Довести твердження 5 можливо методом від протилежного, припустивши, що є вершина v графа K_4 , як центра квазізірки, що має степінь 3 та не належить ребру-променю квазізірки $St(K_4)$. Можливі два випадки для пари внутрішніх ребер графа K_4 :

Випадок 1. Ребра розміщені на ленті Мебіуса;

Випадок 2. Ребра розміщені на різних лентях Мебіуса.

Розглянемо випадок 1. Тоді можливо звільнити від одного зі схрещених ребер ленту Мебіуса, розташовану в середині 2-клітки S з границею ∂S – циклом z довжини 4 центра квазізірки, шляхом розміщення назовні циклу одного зі схрещених ребер, яке не матиме кінцевої вершини v . Тим самим зменшимо рід графа-обструкції G заданого неорієнтованого роду, що суперечить визначенню графа-обструкції. Припущення неможливе, твердження 5 для випадку 1 доведене. Розглянемо випадок 2. Якщо обидва внутрішні ребра графа K_4 не розміщені на ленті Мебіуса, то одне з них схрещується на площині із ребром–променем квазізірки $St(K_4)$ та розміщується на ленті Мебіуса, яка приклеєна до зовнішньої, відносно циклу z , клітки. Виконаємо симетричне відображення по вертикальній осі графа K_4 . Для цього переставимо місцями тільки пару протилежних вершин в циклі z одна з яких має степінь 3 та суміжні ребра. Тоді на зовнішній клітці, відносно повернутого циклу z , вкладемо без перетину ті висячі ребра-промені квазізірки, що вкладалися на ленті Мебіуса. Матимемо в результаті такого вкладення квазізірки, що, принаймні, лента Мебіуса h звільниться від одного з двох схрещених ребер. Схематично показано це на картах 6 та 7 рис. 1. Тим самим зменшимо рід графа-обструкції G заданого неорієнтованого роду, що суперечить поняттю графа-обструкції. Припущення неможливе, твердження 5 для випадку 2. доведене

Доведення твердження 6. Оскільки кожне ребро графа-обструкції неорієнтованого роду графа G на евклідовій площині перетинається у внутрішній точці z , принаймні з одним ребром, розміщується певним мінімальним вкладенням на ленті Мебіуса неорієнтованої поверхні разом із, принаймні, одним ребром. Тоді довільне ребро є ребром підграфа гомеоморфного K_4 , який в свою чергу є підграфом чи частиною підграфа гомеоморфного графу Куратовського. З іншого боку, обидва графи Куратовського мають реберне покриття парою чи трійкою підграфів гомеоморфних K_4 . Таким чином граф-обструкція G матиме реберне покриття скінченною множиною з графів чи частин гомеоморфних K_4 . На 8-й карті рис. 1 наведено реберне покриття $K_{3,3}$ з двома частинами гомеоморфними графу K_4 , один без наведеного ребра, а друга частина отримана видаленням одного з трьох несуміжних ребер, окрім наведеного ребра. На 9-й карті рис. 1 наведено реберне покриття K_5 трьома гомеоморфними графу K_4 , один без чотирьох ребер з спільною вершиною v , із них два виділені ребра, а два інших утворені з колеса O_4 з чотирма ребрами-шпицями почерговим видаленням одного з наведених ребер. Доведення леми 1 закінчене.

Твердження 1. Нехай 2-зв'язний граф G є графом-обструкцією неорієнтованого роду 3, всі ребра якого є суттєвими відносно роду при операції видалення ребра чи його стискання в точку, має підграф $St_G(H_i)$ - квазізірка з центром H_i (коли центр є виродженим графом з множиною вершин

$H_i^0 = \{v_j\}_{j=1}^{r_i}$ матимемо замість квазізірки множини $\sum_{j=1}^{r_i} St_G(v_j)$ зірок), гомеоморфним площинному графу

із заданою множиною точок M_i з числом досяжності 2, де $M_i = \{m_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$, та n_i висячими ребрами $(m_{ij}, b_{ij'})$, де $i=1,2,3$, $j \neq j'$, $j, j'=1(1) | G |$. Існує покриття множини ребер графа G трьома квазізірками $St_G(H_i)$, можливо із, однією спільною вершиною чи частиною ребра графів H_i, H_j .

Доведення. Нехай для 2-зв'язного графа G виконуються умови твердження 1. Тоді граф G має підграф чи частину Θ гомеоморфний одному із 104 графів-обструкцій для проективної площини, який в свою чергу можливо подати як об'єднання двох підграфів гомеоморфних одному з графів Куратовського [4]. Тобто множина ребер графа Θ покривається двома квазізірками виду $St_G(H_i)$, бо містить два різних підграфи чи частини H_i , кожен з яких гомеоморфний квазізіркам з центром $K_4, K_{2,3}, K_{3,3} \setminus e, K_5 \setminus e$, чи $K_5, K_{3,3}$. Відмітимо, що у випадку центру $K_{2,3}$ частина висячих ребер квазізірки матимуть кінцеву вершину, а сама зірка міститиме підграф чи частину гомеоморфну K_5 . Граф G є графом-обструкцією роду 3, то множина ребер $G^1 \setminus \Theta^1$ непушта і кожне ребро u , $u \in G^1$, належатиме графу K_5 , чи $K_{3,3}$ тобто, або до ребер з множини K_4^1 та додаткового ребра, яке з'єднує пару точок несуміжних ребер з K_4 , або до ребер-променів простої зірки, які попарно ототожені з кожною вершиною графа K_4 . Таким чином граф G покривається, принаймні, трьома підграфами чи частинами гомеоморфними одному з графів Куратовського, які є квазізірками з центрами гомеоморфними K_4 . Доведемо достатність такого покриття. Видалимо ребро u , $u = (a, b)$, та розглянемо підграф чи частину K гомеоморфну графу $K_4 \setminus u$. Тоді в графі $G \setminus u$ матимемо квазізірку $St_{G \setminus u}(K)$, якій належать всі ребра з множини $G^1 \setminus \Theta^1$, що інцидентні вершинам підграфа чи частини K та є суттєвими відносно $t_{G \setminus u}(\{a, b\})$ - числа досяжності множини $\{a, b\}$ при операції видалення ребер графа $G \setminus u$. Стверджуємо, що інших ребер немає. Припустимо зворотне, що $x \in G^1 \setminus (\{u\} \cup St^1(K) \cup \Theta^1)$. Видаливши ребро x отримаємо його несуттєвість відносно неорієнтованого роду графа $G \setminus u$, бо $x \notin \Theta^1$, або несуттєвість відносно числа $t_{G \setminus u}(\{a, b\})$, бо $x \notin St(K)$. Приєднаємо ребро u до $G \setminus u$ та отримаємо граф $G \setminus x$ роду 3, тобто з ребром x несуттєвим відносно неорієнтованого роду графа G при операції видалення. Це суперечить умові, що G - граф-обструкція неорієнтованого роду 3. Припущення невірне. Достатність доведена. Доведення твердження 1 закінчене.

Наслідок 1. Існує мінімальне вкладення f' графа-обструкції G для поверхні Клейна як продовження мінімального вкладення підграфа Θ графа-обструкції G гомеоморфного графу-обструкції для проективної площини.

Доведення. Нехай мають місце позначення вище позначення і задане мінімальне вкладення f_0 , $f_0 : \Theta \rightarrow N_2$. Продовжимо його до вкладення f , $f : G \setminus u \rightarrow N_2$, в якому вершини a, b належить границям різних 2-кліток чи псевдокліток s_1, s_2 з множини $N_2 \setminus f(G \setminus u)$ та мають число досяжності $t_{G \setminus u}(\{a, b\}, N_2)$, де $t_{G \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2$, $L \subseteq G^1 \cap (\partial s_1 \cap \partial s_2)$. Тепер продовжимо вкладення f до f' , де $f' : G \rightarrow N_3$, шляхом розміщення ребра u на ленту Мебіуса, яку приклеєно до зовнішньої грані циклу

$z, z = G^1 \cap (\partial s_1 \cup \partial s_2) \setminus L$ на поверхні Клейна. Таким вкладенням f' множина ребер графа-обструкції для поверхні Клейна покриватиметься трьома квазізірками з центрами гомеоморфними K_4 .

Наслідок 2. Для 2-зв'язного графа-обструкції G неорієнтованого роду 3 та площинного графа H_2 мають місце наступні співвідношення:

1. $2 \leq t \leq 4$;
2. $(d_{H_2}(M)=3) \wedge (t_{H_2}(M, \Sigma_0)=2)$, або $(d_{H_2}(M)=2) \wedge (t_{H_2}(M, \Sigma_0)=3)$, або $(d_{H_2}(M)=1) \wedge (t_{H_2}(M, \Sigma_0)=4)$.

Доведення. Нехай для 2-зв'язного графа G виконуються умови твердження 1. Оскільки $\gamma(G)=3$, то графа G має підграф H гомеоморфний одному з графів Куратовського, який в свою чергу містить підграф чи частину H_1 гомеоморфну K_4 чи $K_{2,3}$. Розглянемо в H просту зірку $St_G(v)$, де $v \in G^0 \setminus H_1^0$, приєднану висячими ребрами до кожної з вершин графа K_4 чи вершинами степені 2 графа $K_{2,3}$, та шляхом 1-розбиття всіх висячих ребер зірки $St_G(v)$. Тим самим перетворимо граф G на G' . Виділимо таким чином квазізірку $St_G(H_1)$ з центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та частинами ребер $\{(a_i, v)\}_{i=1}^m$ простої зірки $St_G(v)$ як висячими ребрами квазізірки.. Тоді граф H_2 , де $H_2 = G' \setminus St_G(H_1)$, матиме неорієнтований рід $\gamma(H_2)$ не більше 2 та міститиме частини висячих ребер з кінцевими вершинами, можливо ототожнених в вершину v . За умови невиродженості графа H_1 (вироджений граф H_1 із k вершинами є центром квазізірки $St_G(H_1)$ яка є об'єднанням k простих зірок) можливі наступні варіанти:

1. $\gamma(H_2)=0$; 2. $\gamma(H_2)=1$; 3. $\gamma(H_2)=2$. Розглянемо варіант 1. Позначимо через $M, M = \{a_i\}_{i=1}^m$, множину точок площинного графа H_2 з числом досяжності t , де $t_{H_2}(M, \Sigma_0) = t$, до яких приєднуються кінцевими вершинами висячі ребра квазізірки $St_G(H_1)$, граф G ϕ -образ

$\phi: (H_2 + St_m(H_1), \sum_{i=1}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, де $m \geq 1$. Доведемо наступні співвідношення 1 та 2:

1. $2 \leq t \leq 4$;
2. $((d_{H_2}(M)=3) \wedge (t_{H_2}(M, \Sigma_0)=2)) \vee ((d_{H_2}(M)=2) \wedge (t_{H_2}(M, \Sigma_0)=3)) \vee ((d_{H_2}(M)=1) \wedge (t_{H_2}(M, \Sigma_0)=4))$.

Доведення співвідношення 1. Дійсно, якщо припустити, що має місце нерівність $t < 2$, то тоді множина M буде досяжною на евклідовій площині. В такому разі граф G' , як результат склейки H_2 та $St_G(H_1)$ по парам $(a_i, b_i)_{i=1}^m$ точок 1-підрозділених висячих ребер, матиме рід $\gamma(G')=1$. Матимемо рівність $\gamma(G') = \gamma(G) = 1$, яка суперечить умові, що граф є граф-обструкцією для поверхні Клейна. Припущення невірне, нерівність $t \geq 2$ має місце. На рис.1 наведений приклад для $t = 4$.

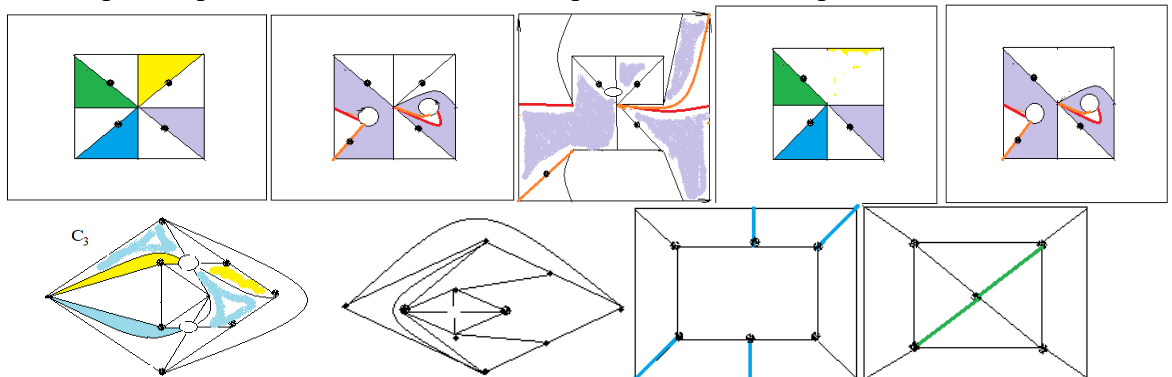


Рис.1. На перших трьох картах приєднання 2-ручки та ленти Мебіуса до евклідової площини призведе до вкладення графа H в поверхню Клейна з множиною M з чотирьох наведених вершин із числом досяжності 4 і тета характеристикою $\theta_H(M, \Sigma_0)$, $\theta_H(M, \Sigma_0) = 1$. На 4-й та 5-й картах приєднання 2-ручки до евклідової площини з множиною з трьох заданих (наведених жирно) вершин із числом досяжності 3 і тета характеристик ою 1. На 6-й і 7-й картах проілюстровано твердження 5, на 8-й та 9-й приклади до твердження 6 леми 1.

Доведемо нерівність $t \leq 4$ методом від протилежного. Припустимо, що $t > 4$. Тоді для досяжності множини M має бути вкладення f графа H_2 в N , де поверхня N утворена з евклідової площини Σ_0 шляхом приклеювання до неї двох лент Мебіуса, яке розміщує множини M на границях кліток S_i , , принаймні п'ять з яких мають спільну точку, тобто $\theta_{H_2}(M, \Sigma_0) \geq 2$. На рис.1 на другій та третій карті наведено приклад перетворення трьох 2-кліток на одну клітку S_0 шляхом розміщення границь трьох 2-кліток, принаймні, з однією спільною точкою, на 2-ручку приклеєну до Σ_0 . Довизначимо вкладення квазізірки $St_G(H_1)$ в $\overline{s_0} \setminus \partial s_0$ - середину побудованої 2- клітки із приклеєною лентою Мебіуса, то отримаємо продовження f вкладення графа G в неорієнтовану поверхню N , де $\gamma(N) \geq 4$, яка є, принаймні, тором з двома приклеєними лентами Мебіуса. Оскільки графи G' , G гомеоморфні, то матимемо нерівність $\gamma(G) > 3$, яка суперечить умові, що граф G є граф-обструкцією для поверхні Клейна. Припущення, що $t > 4$ невірне. Доведення співвідношення 1 закінчене.

Доведення співвідношення 2. Граф H_2 містить квазізірку гомеоморфну графу Куратовського. Якщо множина M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, точок графа H_2 , є критичною відносно кліткової довжини $d_{H_2}(M)$ при операції видалення довільного елемента a_i , то має місце нерівність $d_{H_2}(M \setminus a_i) < d_{H_2}(M)$, чи відносно операції стискання ребра $u = (ab)$ в точку a' (якщо $\{a, b\} \subset M$, то замість M розглядатимемо множину $M' = (M \setminus \{a, b\}) \cup \{a'\}$), якщо має місце нерівність $d_{Gu}(M') < d_G(M)$. Згідно визначення 5 граф G є мінімальним відносно $d_G(M)$ при операції видалення або стискання в точку довільного ребра u , тобто, або $d_{Gu}(M) + 1 = d_G(M)$, або $d_{Gu}(M') < d_G(M)$, де Gu - граф зі стисну тим в точку a' ребром $u = (a, b)$ та $M' = (M \setminus \{a, b\}) \cup \{a'\}$. З умови $\gamma(G) = 3$ впливатиме, що довжина d найкоротших 2-кліткових ланцюгів, які з'єднують t кліток, $t_{H_2}(M, \Sigma_0) = t$, має задовольняти умові: якщо $t = 2$, то $d = 3$, інакше, якщо $t = 3$, то $d = 2$, інакше, якщо $t = 4$, то $d = 1$. Ці випадки проілюстровано на рис.1, 2. Доведення наслідку 2 закінчене.

Наслідок 3. Для 2-зв'язного графа-обструкції G неорієнтованого роду 3 та проективно-площинного графа H_2 мають місце наступні співвідношення:

1. $2 \leq t \leq 3$;
2. $((d_{H_2}(M) = 2) \wedge (t_{H_2}(M, N_1) = 2)) \vee ((d_{H_2}(M) = 1) \wedge (t_{H_2}(M, N_1) = 3))$.

Доведення. Вважатимемо, що граф H_2 має неорієнтований рід 1, тобто містить підграф гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$, кожен з яких можливо подати як квазізірку з центром K_4 чи $K_{2,3}$, відповідно. Позначимо через M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, множину точок проективного графа H_2 з числом досяжності t , де $t_{H_2}(M, N_1) = t$, де кожна точка a_i ототожнюється з кінцевими вершинами g_i висячих

ребер квазізірки $St_G(H_1)$, а граф G отримано наступним φ -перетворенням:

$\varphi : (H_2 + St_m(H_1), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, де $m \geq 1$. Мають місце наступні співвідношення:

- $2 \leq t \leq 3$;
- $((d_{H_2}(M)=2) \wedge (t_{H_2}(M, N_1)=2)) \vee ((d_{H_2}(M)=1) \wedge (t_{H_2}(M, N_1)=3))$.

Доведення цих співвідношень аналогічне доведенню для наслідка 2.

Наслідок 4. Для 2-зв'язного графа-обструкції G неорієнтованого роду 3 та непроективно-площинного графа H_2 мають місце наступні співвідношення:

- $(t=2) \wedge (d_{H_2}(M)=1) \wedge (t_{H_2}(M, N_1)=2)$:

2. Якщо $t=1$ і задано досягну на поверхні Клейна множину M точок графа H_2 , то квазізірка $St_G(K_4)$ матиме, як мінімум, дві точки та, як максимум, $|M|$ точок приєднання висячих вершин до H_2 , з яких, принаймні, $|M|-4$ точки мають бути суттєвими відносно роду при операції видалення цих точок.

Доведення наслідка 4. Доведемо співвідношення 1. Вважатимемо, що граф H_2 має неорієнтований рід 2, тобто містить підграф гомеоморфний одному з 104-х графів-обструкцій проективної площини [5]. Позначимо через M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, множину точок непроективного графа H_2 з числом досяжності t , де $t_{H_2}(M, N_2) = t$, де кожна точка a_i ототожнюється з кінцевою вершиною g_i висячих ребер квазізірки

$St_G(H_1)$. Нехай граф G отримано наступним φ -перетворенням: $\varphi : (H_2 + St_m(H_1), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$,

де $m \geq 1$. Довести рівняння $t=2$ та відношення $(d_{H_2}(M)=1) \wedge (t_{H_2}(M, N_1)=2)$ можливо по аналогії

доведення наслідку 2. Доведемо співвідношення 2. За нашими позначеннями матимемо, що $H_1 = K_4$.

Як в проективну площину, вкладемо квазізірку $St_m(K_4)$ із m променями, із схрещеними на площині несуміжними ребрами K_4 , тобто розмістимо її в середину 2-клітки s із приклеєною лентою Мебіуса, де $s \in N_2 \setminus f(H_2)$, на ∂s якої розміщена досяжна множина M складена з точок приєднання. Якщо припустити, що одна з вершин K_4 не інцидентна ребру-променю, то тоді можливо звільнити ленту Мебіуса від одного з схрещених ребер. Тим самим отримати суперечність умові щодо графа G роду 3. Якщо несуміжних один з одним ребер-променів більше 4, то тоді їхні кінцеві точки ототожнюються попарно з точками, які мають бути суттєвими відносно роду при операції видалення. Інакше матимемо ці всі $|M|-4$ ребер несуттєвими відносно роду при операції видалення ребра графа G , що суперечить визначенню графа-обструкції роду 3. Доведення закінчене.

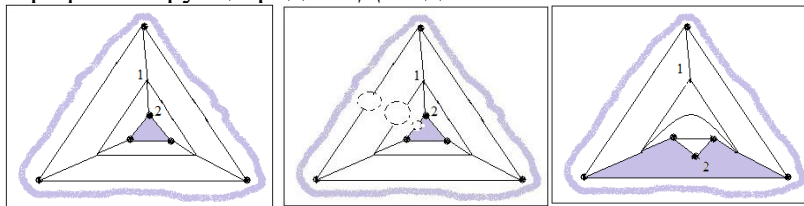


Рис.2. При видаленні ребра (1,2) графа, наведеного на 1-й карті, не змінилося число досяжності 2 множини з 6-х вершин (наведені точки), а мінімальна відстань цієї множини зменшилася з 3 до 1.

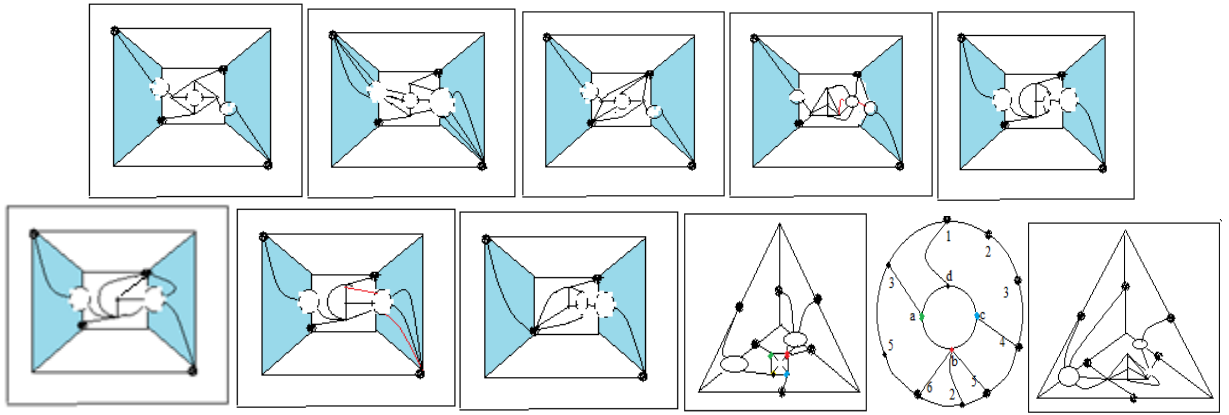


Рис.3. Моделі графів-обструкцій для поверхні Клейна.

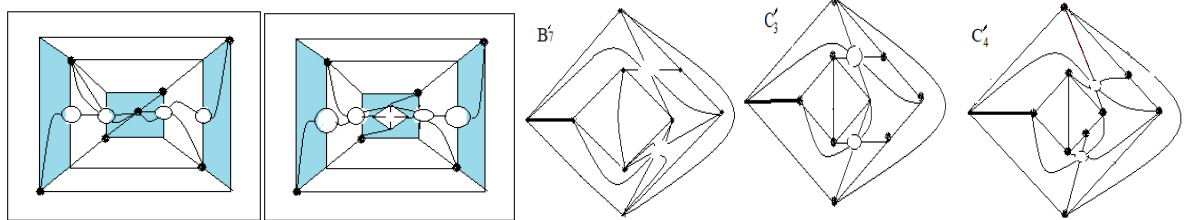


Рис.4. Моделі графів-обструкції: на 1-й та 2-й карті графи з кількома ребрами, які як несуттєві можливо стягнути в точку для поверхні неорієнтованого роду 3; на 3-й, 4-й, 5-й картах графи роду 2, утворені шляхом додавання ребра замість спільної вершини у пари графів гомеоморфних K_4 у однойменних (без штриха) мінорів роду 2.

Твердження 2. Нехай граф G неорієнтованого роду $\gamma(G)$ має реберне покриття множиною з n квазізірок $St_G(H_i)$, , кожна пара $(St_G(H_j), St_G(H_j))$ з яких породжує підграфи H_{ij} гомеоморфні мінорам неорієнтованого роду 2, де $H_i, H_j, i \neq j, 1 \leq i < j \leq n-1, n \geq 2$, гомеоморфні площинному графу із заданою множиною точок з числом досяжності 2 та задане наступне ϕ -перетворення:

$\phi: (H_{12} + St_m(H_n), \sum_{i=3}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, де квазізірка $St_m(H_3)$ з центром H_3 та ребрами-променями з досяжною на проєктивній площині множиною $\{g_i\}_{i=1}^m$ кінцевих вершин всячих ребер $\{(b_l, g_i)\}_{i=1}^m \}_{l=1}^{m'}$, $m \geq 2$, а на евклідовій площині має число досяжності 2, та попарно ототожнюється з точками множини $\{a_i\}_{i=1}^m$ графа H_{12} , яка є досяжною на поверхні Клейна. Якщо граф G має k перетинів у внутрішніх точках всячих ребер з множини $\{(b_l, a_{i_i})\}_{i=1}^m \}_{l=1}^{m'}$, то мають місце наступні співвідношення:

1. Якщо $n = 3$ та для кожної пари (H_i, H_j) виконується умова $H_i \cap H_j = \emptyset$, то $3 \leq \gamma(G) \leq k + 3$;
2. Якщо $n = 3$ та для кожної пари (H_i, H_j) виконується умова $H_i \cap H_j = \{v\}$, то $4 \leq \gamma(G) \leq k + 3$;
3. Якщо $n = 2$ та для пари (H_i, H_j) виконується умова $H_i^1 \cap H_j^1 = \{(u, v)\}$, де (u, v) - спільна частина двох ребер чи ребро, то $\gamma(G) = 2$, а коли це спільне ребро, то $\gamma(G) = 3$;
4. Якщо дві пари з трьох квазізірок з центрами гомеоморфними K_4 мають спільні частини двох пар простих ланцюгів, то $\gamma(G) \leq 4$.
5. Граф G , побудований згідно співвідношень 1, 2, 3, 4, може мати несуттєві ребра відносно роду при операції видалення чи стискання в точку ребра;

Доведення. Нехай граф G задовольняє умові твердження 2, тоді згідно [4] матимемо $\gamma(G) \geq 2$. Зауважимо, що приєднання до зв'язного графа H_{12} висячих вершин ребер-променів квазізірки $St_G(H_3)$, де H_3 гомеоморфний K_4 , $K_{2,3}$, $K_5 \setminus e$ чи $\overline{K_r}$, $r \geq 2$, до точок досяжної на поверхні Клейна підмножини точок підграфа H_{12} є гомеоморфним $K_{3,3}$ чи K_5 .

Доведемо співвідношення 1. Розглянемо множину всіх різних мінімальних вкладень графа H_{12} в поверхню Клейна та для кожного побудуємо множину з різних підмножин точок досяжних на поверхні Клейна. Виберемо одне з таких вкладень та приклеїмо ленту Мебіуса до однієї з тих кліток s , на границі якої розташовано досяжну підмножину точок, та вкладемо на ленту центр H_3 квазізірки $St_G(H_3)$, щоб отримати на отриманій псевдоклітці s' проективної площини досяжну множину вершин графа H_3 . Вкладемо висячі ребра в середину цієї псевдоклітки s' висячі ребра квазізірки та ототожнимо пари точок приєднання до підграфа H_{12} . Можливими є такий порядок слідування копій точок на границі $\partial s'$ з числа пар точок приєднання, коли є k перетинів у внутрішніх точках висячих ребер з множини $\{(b_l, a_{i_l}^*)\}_{l=1}^m\}_{i=1}^{m'}$, можливо розташувати на приклеєних k лентах до поверхні Клейна висячі ребра квазізірки без перетину у внутрішній точці. Тоді для неорієнтованого роду $\gamma(G)$ матимемо нерівність $3 \leq \gamma(G) \leq k + 3$. Коли перетину у внутрішніх точках висячих ребер $\{(b_l, a_{i_l}^*)\}_{l=1}^m\}_{i=1}^{m'}$ немає, то $\gamma(G) = 3$. Найнижче значення роду досягнуте для графів на 3-й, 4-й, 5-й картах рис. 7. Доведення співвідношення 1 закінчене.

Доведення співвідношення 2 аналогічне наведеному для співвідношення 1 тільки одне з ребер-променів, яке з'єднує центри двох зірок є несуттєвим відносно роду та підлягатиме стисканню в точку. Центрами квазізірок мають бути графи з суттєвими ребрами при операціях стискання в точку чи видалення ребра відносно заданої множини точок з числом досяжності 2 відносно евклідової площини, наприклад K_4 , $K_{2,3}$, $K_5 \setminus e$ чи $\overline{K_r}$, $r \geq 2$.

Доведення співвідношень 3,4 аналогічне наведеному для співвідношення 1

Доведемо співвідношення 5. Нехай граф G неорієнтованого роду $\gamma(G)$ побудований згідно співвідношень 1, 2, 3, 4. Маємо два наступні випадки. 1. Якщо ребро суттєве відносно роду графа G при операції видалення, то воно належатиме до числа ребер графа K_4 чи $K_{3,3}$ та мінімальним вкладенням графа в поверхню Клейна має розташовуватися на ленті Мебіуса. Дійсно, якщо видалити довільне висяче ребро квазізірки $St_G(H_3)$, то тим самим зменшуємо число досяжності множини точок приєднання цієї $St_G(H_3)$ до інших. Тоді матимемо, що рід графа G має зменшитися на 1, що суперечить умові щодо роду.

2. Якщо ребро суттєве відносно роду графа G при операції стискання, то воно не належатиме до центру квазізірки. Нехай суттєве ребро e , $e = (a, b)$, належить до числа висячих ребер, яке належить квазізірці. Тоді жодна пара ребер суміжних даному ребру e , що належать до центрів різних квазізірок не вклатиметься на різних лентах Мебіуса. Дійсно, якщо стиснути ребро e в точку ab , то пари суміжних ребер зі спільною вершиною ab утворюватимуть кут з цих ребер, який може розташовуватися на одній ленті. Тим самим отримаємо суперечність умові щодо роду графа G . Припущення невірне. Доведення співвідношення 5 закінчене.

На рисунках 5,6,7,8 наведені приклади графів G , які задовольняють граничним значенням, вказаним у співвідношеннях 1,2,4,5 нерівностям для випадку наявності підграфів графа G , породжених парами $St_G(H_i)$, $St_G(H_j)$, однакових мінорів проективної площини, склеєних шляхом ототождження пар точок з заданою парою множин точок приєднання.

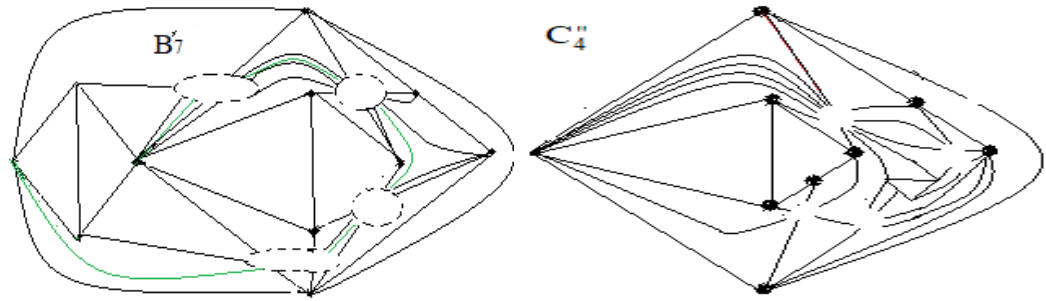


Рис 5. Графи B_7'' , C_4'' роду 4 склеєні, із B_7 , C_4 - графів-обструкцій роду 2 та квазізірок із центром K_4 та ребрами, що приєднані так само, як ребра такої ж квазізірки, як підграфа, в графах B_7 , C_4 , відповідно.

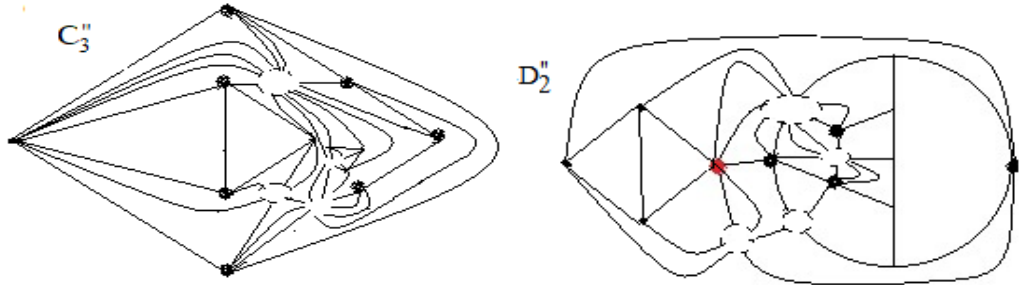


Рис 6. Графи D_2'' , C_3'' роду не більше 4 склеєні з D_2 , C_3 - графів-обструкцій роду 2 та пари квазізірок із центром K_4 та ребрами, що приєднані так, як ребра такої ж квазізірки-підграфа, в графах D_2 , C_3 , відповідно.

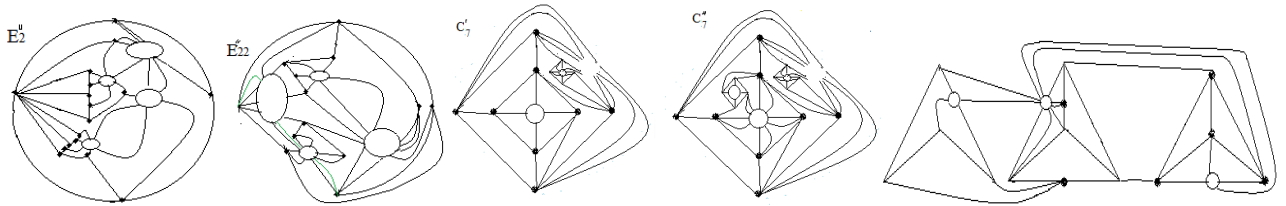


Рис 7. Графи E_2'' , E_{22}'' , C_7' роду не більше 4 утворені як φ -образи пари графів із E_2, E_{22}, C_7 - графів-обструкцій роду 2 та двох чи однієї квазізірок із центром K_4 , відповідно, та променями - ребрами, що приєднані так само, як висячі ребра такої ж квазізірки-підграфа, в графах E_2 , E_{22} , C_7 , відповідно.

П'ятий та третій графи є графами-обструкціями роду 3, де C_7' склеєний з C_7 та квазізірки $St_4(K_4)$.

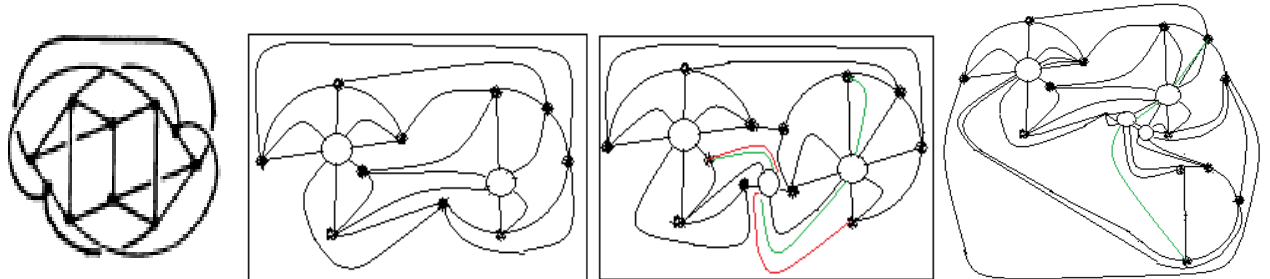


Рис 8. До співвідношень 1 та 4 твердження 2. Граф V_{11} та його вкладення в поверхню Клейна, де V_{11} -граф-обструкція для проєктивної площини як об'єднання двох квазізірок з центрами графами K_4 , що мають спільне ребро. На третій карті наведено модифікований V_{11} без спільного ребра у центрів цих квазізірок з двома додатковими висячими ребрами вкладений мінімально в поверхню неорієнтованого роду 3. На четвертій карті наведено граф для ілюстрації співвідношення 5 твердження 2.

Твердження 3. Нехай граф G неорієнтованого роду $\gamma(G)$ має покриття із n квазізірок $St_G(H_i)$, $St_G(H_j)$, з яких одна пара $(St_G(H_1), St_G(H_2))$ породжує підграф H_{12} гомеоморфний мінору неорієнтованого роду 2, а інші квазізірки приєднуються кінцевими вершинами до множини точок M графа H_{12} , яка є досяжною на поверхні Клейна та містить точки центрів H_1 і H_2 квазізірок $St_G(H_1), St_G(H_2)$, де H_i, H_j - гомеоморфні $K_4, K_{2,3}$ чи вироджений граф на кількох вершинах, де $i \neq j, 1 \leq i < j \leq n, n \geq 2$.

Мають місце наступні співвідношення:

1. Якщо $n = 3$ і для кожної пари (H_1, H_2) виконується умова $H_i \cap H_j = \emptyset$ та $St_G(H_3)$ приєднується до, принаймні, двох точок заданої множини точок графа H , досяжною на поверхні Клейна, то $\gamma(G) = 3$;
2. Якщо для кожної пари (H_i, H_j) виконується умова $H_i \cap H_j = \{v\}$, $n = 3$, та $St_G(H_3)$ приєднується до, принаймні, двох точок заданої множини точок графа H , досяжною на поверхні Клейна, то $\gamma(G) = 3$;
3. Якщо $n = 2$ та для пари (H_i, H_j) виконується умова $H_i^1 \cap H_j^1 = \{(u, v)\}$, де (u, v) - спільна частина двох ребер чи ребро, то $\gamma(G) = 2$, а коли це спільне ребро та $St_G(H_3)$ приєднується до, принаймні, двох точок заданої множини точок графа H , досяжною на поверхні Клейна, то $\gamma(G) = 3$;
4. Якщо дві пари з трьох квазізірок з центрами гомеоморфними K_4 мають спільні частини двох пар простих ланцюгів, то $\gamma(G) \leq 4$.
5. Граф G , побудований згідно співвідношень 1,2,3,4, може мати несуттєві ребра відносно роду при операції видалення чи стискання в точку ребра;

Алгоритм побудови моделей 3-зв'язних графів-обструкцій поверхні Клейна.

Початок алгоритму A (вхідні: G , вихідні: D).

Вхідні дані:

1. Вхідний граф-обструкція G проективної площини, n -число зв'язності вихідного графа D ;
2. Множину $F(G) = \{f_i\}_{i=1}^{|F|}$ всіх неізоморфних вкладень графа G в S - поверхню Клейна;
3. Для кожного вкладення f_i побудовані наступні множини:

а) $R_i = \{\{a_{i'k'}\}_{k'=1}^n\}_{i'=1}^{m_i}$ мінімальну за включенням і складену із підмножин неізоморфних (при автоморфних відображеннях графа G) точок $\{a_{ik'}\}_{k'=1}^n$ заданої потужності множини R_i розташованих на границях кожної із наступних кліток s_j, s_j', s_j'' , де $s_j' \in S \setminus f'(G_u)$, $s_j'' \in S \setminus f''(G \setminus u)$, та мінімальну при операціях видалення чи стискання в точку довільного ребра u графа G , де f', f'' - мінімальні вкладення графів $G_u, G \setminus u$ в неорієнтовані поверхні S', S'' меншого роду ніж S , відповідно,

б) $M = M(f_i, R_i) = \{s_j\}_{j=1}^{|M|}$, складеної з кліток s_j , де $s_j \in S \setminus f_i(G)$, які містять на своїх границях всю множину вершин графа;

4. Множина квазізірок з центром K , де $K \in \{K_4, K_{2,3}\}$ та, із принаймні, чотирма (для K_4) чи трьома (для $K_{2,3}$) висячими ребрами, яких може бути не більше $|G^0|$;

5. Множини $st(K_4) = \{g_k\}_{k=1}^{|ie(K_4)|}$, $st(K_{2,3}) = \{h_k\}_{k=1}^{|ie(K_{2,3})|}$ всіх вкладень квазізірок з центрами $K_4, K_{2,3}$, відповідно, в клітку s , як в локальну проєктивну площину з розташуванням на ленті Мебіуса ребер центру та висячих ребер квазізірки.

6. Функція Function Π (вхід: R, n ; вихід: R^n, NG) видає при кожному звертанні елемент з множини R^n - множини всіх перестановок вершин $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ за час пропорційний $n!$ та множину NG - всіх розбиттів множини висячих вершин $g_1, g_2, g_3, \dots, g_m$ квазізірки на n непустих підмножин G_1, G_2, \dots, G_n , кожен з елементів підмножини G_i ототожнюється в одну точку ng_i , яка попарно ототожнюється з a_i , число розбиттів які видаватиме функція за час пропорційний NN , де $NN = (m(m-1)(m-2) \dots (m-(n-1)))$, де $m > n$.

Вихідні дані: Граф D – модель n -зв'язного графа-обструкції для поверхні Клейна.

Ввести G, n ;

Для i від 1 до $|F(G)|$ кроком 1 виконати: // початок циклу з параметром i

початок дій;

$f := f_i$;

$R := R_i$;

Для j від 1 до $|M|$ кроком 1 виконати:

початок дій;

$s := s_j + h$; // приклеїмо до площинного диску s ленту Мебіуса h ;

$R := \partial s \cap R$; // до n точок a_i границі клітки s приклеюватимемо g_j висячі вершин зірки;

Якщо $|\partial s \cap R| < n$ то перехід на кінець циклу з параметром j ;

Вкладемо K в $\bar{s} \setminus \partial s$; // центр квазізірки зірки вкладемо в середину клітки s
// так, щоб одне з ребер лежало на ленті Мебіуса h ;

Function Π (вхід: R, n ; вихід: R^n); //при кожному звертанні на виході нова перестановка

// з множини R^n - всіх перестановок вершин $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$;

// з якими ототожнюється множина висячих вершин $ng_1, ng_2, ng_3, \dots, ng_n$.

// матимемо ототожені вершини $a_1ng_1, a_2ng_2, \dots, a_nng_n$.

Для k від 1 до n кроком 1 виконати:

початок дій;

$g := a_kng_k$; // маємо вершину приєднання з тими ж ребрами графа G та;
// висячими ребрами квазізірки з центром K вкладемо

$D^0 = G^0 \setminus \{a_k\} \cup K^0 \setminus \{g_k\} \cup \{a_kng_k\}$;

$D^1 := G^1 \cup K^1 \cup (St^1(K) \setminus K^1)$;

кінець дій циклу з параметром k ;

Виводимо (“Граф $D = ”, (D^0, D^1)$);

кінець дій циклу з параметром j ;

кінець дій циклу з параметром i ;

кінець алгоритму A .

Твердження 4. Мають місце наступні співвідношення для алгоритма A :

а). Алгоритм A коректний та має часову складність $O(b|G^0| \text{time}(\text{Function } \Pi(R, n)))$, де $b = b(G)$ – добуток числа неізоморфних мінімальних вкладень заданого графа G неорієнтованого роду γ та найбільшого числа $2 - \gamma - |G^0| + |G^1|$ кліток в них, яке для невеликого роду пропорційне $|G^0|^2/2$;

б). Функція (Function $\Pi(R, n)$) для $n=3$ має часову складність пропорційну $O(|G^0|^n)$, де $|G| \leq 12$;

с). Вихідний граф D може мати серед образів висячих ребер квазізірки несуттєві ребра відносно роду при операції стискання ребра в точку. Виконавши стискання в точку всіх таких ребер графа D отримуємо мінор поверхні Клейна.

Отримано математичне забезпечення для алгоритмів побудови моделей мінорів заданої зв'язності для поверхні Клейна.

Література

11. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1973. 383 с.
12. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1970. 299 с.
13. Mohar B., Thomassen C. *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins University Press, 2001. 412 p. <https://www.sfu.ca/~mohar/Book.html>
14. Hur S. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Phd, Ohio State University, 2008. http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1209141894
15. Archdeacon D., Huneke P. A Kuratowski Theorem for Nonorientable Surfaces. *Journal of combinatorial theory*, Series B. 1989. **46**. P. 173–231.
16. Петренюк В.І. Про структуру площинних підграфів графів-обструкцій неорієнтованої поверхні заданого роду. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021. № 33. С. 105–109. [Google Scholar](#).
17. Anna Flötto. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, University Bielefeld, 2010, -174 pp.
18. P. Skoda. Obstructions for embedding graphs into surfaces, Simon Frazer University, PhD dissertation, 2012.-133 p.
9. В.І. Петренюк, Д.А. Петренюк, О.В. Оришака. Структура проєктивно площинних підграфів графів-обструкцій заданої поверхні. *Кібернетика та комп'ютерні технології*. 2022, № 2. С. 1-20 DOI:10.34229/2707-451X.22.2.0
10. В.І. Петренюк, Д.А. Петренюк. Про алгоритм побудови 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*, № 37 (2023): 72-74. <http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit/article/view/308>
11. Edwin R. van Dam, Jack H. Koolen, Hajime Tanaka. Distance-regular graphs, E-JC, DS22: Apr 15, 2016, <https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/issue/view/Surveys>.

5.2. ПЛОЩИННІ ПІДГРАФИ ІЗ ЗАДАНИМИ МЕТРИЧНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА.

Вступ. Основні поняття та позначення взяті з [1],[2],[3]. В багатьох статтях досліджувалися структурні властивості графів-обструкцій заданої неорієнтованої поверхні як неорієнтованого 2-многовиду без країв та побудовані їхні прототипи як основу з якої, шляхом видалення чи стискання деякої множини ребер та, можливо, додавання нових ребер без зміни роду, утворюються графи-обструкцій заданої поверхні. Такі дослідження структури графів неорієнтованого роду виконувалися в [4,5,6]. Супутні питання розглядалися в [7,8,9]. В [10,11] досліджено структурні властивості графів як ϕ -образ площинного графа та простої зірки та графа-обструкції неорієнтованої поверхні, відповідно.

Розглянемо **задачу** побудови графа-обструкції неорієнтованого роду 3 як ϕ -образа площинного 3-мінімального графа із заданою клітковою довжиною множини вершин та квазізірки з центром 2-мінімальним площинним графом. Для 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна є разв'язок в [12,13].

Частина 1.

Нехай задано мінімальне вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$, тобто це найменша по включенню підмножина $\{s_i\}_{i=1}^t$ множини $S_G(N, f)$, $S_G(N, f) = N \setminus f(G)$, складена з кліток на границях яких розташовано точки з множини M . Кожен граф G неорієнтованого роду k , $k \geq 1$, може бути поданим наступним перетворенням:

$\phi(H + St_n(g_0), \sum_{i=1}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, як ϕ -образ графа H та зірки $St_n(g_0)$, приєднаної висячними вершинами g_i до точок a_i , де задана множина M точок графа H , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, $M \subseteq (\partial s_1 \cup \partial s_2) \cap H^0$, яка розміщується на границях кліток s_1, s_2, \dots, s_t множини $N \setminus f'(H)$, де $t \geq 2$, $m \geq 2$, $i = 1, 2, \dots, m$, мінімальним вкладенням f' , $f': H \rightarrow N'$.

Аналогічно характеристикам вкладення графа до орієнтованої поверхні на підмножині $\{s_i, s_j, s_k\}$ множині $S_G(N, f)$, визначимо характеристику θ , $\theta = 1$, множини M коли виконується умова $\partial s_i \cap \partial s_j \cap \partial s_k \neq \emptyset$, тобто є, хоча б, одна спільна точка на їхніх границях, яка є центром кліткової зірки, утвореної із трьох кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$, або визначено характеристику $\partial\theta$, $\partial\theta = 1$, якщо довільні пари цих кліток мають на границях, мінімально, одну спільну точку, тобто утворюють клітковий цикл довжини 3, утворених із трьох кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$.

Позначення 1. Позначатимемо через $\angle(s_i, s_j)$ та називатимемо кутом між клітками чи псевдоклітками s_i, s_j множини $S_G(N, f)$ найменшу по включенню зірку графа G з центром в a , $a \in G^0 \cap (\partial s_i \cap \partial s_j)$, із множиною ребер-променів, розташованих з одного боку відносно точки перетину границь кліток s_i, s_j . Саме ці ребра чи їхні частини вкладатимемо до ленти Мебіуса, приклеєної до площини, для утворення псевдоклітки, на границі якої розміщуються об'єднання границь s_i, s_j .

Позначення 2. Нехай задане мінімальне вкладення f графа H до неорієнтованої поверхні N . Будемо позначати через $\alpha(\angle(s_1, s_2))$ операцію перетворення ребер e_1, e_2 , $f(e_1) \subset \partial s_1$, $f(e_2) \subset \partial s_2$, зі спільною вершиною a кліток s_1, s_2, s_3 , де $f(e_1) \cup f(e_2) \subseteq \partial s_3$, причому вкладення f графа H в

N розміщує на границях кліток s_1, s_2 множину $f(M), f(M) = f(\{a_i\}_{i=1}^m)$. Приклеїмо до клітки s_{12} ленту Мебіуса наступним чином. Розщепимо довільну внутрішню точку $f(x_i)$ ребра $e_i, e_i = (a_i, b_i)$ на точки x_i', x_i'' , де $i = 1, 2$. Виріжимо в середині s_{12} елементарний диск з центром в x_i та розташуємо на його границі діаметрально протилежні пари точок (x_1', x_2'') , (x_1'', x_2') як кінцеві точки частин схрещених ребер на площині елементарного диска. Отримаємо таким чином псевдоклітку s неорієнтованої поверхні N' , де $\gamma(N') = \gamma(N) + 1, \partial s = \partial s_1 \cup \partial s_2$, в яку можливо вкласти ту частину зірки $f'(St_n(g_0))$, яка приклеєна до точок множини $f(M) \cap \partial s$ і таким чином отримати вкладення графа G в поверхню N' .

Позначення 3. Під квазізіркою $St_G(H)$ з центром H будемо розуміти підграф чи частину H графа G з множиною висячих ребер прикріплених однією кінцевою точкою до вершини чи точки ребра підграф H , а інші кінцеві точки належать множині приєднання $M, M = \{a_i\}_{i=1}^m$.

Визначення 1. Нехай задано мінімальне вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності $t, t_G(M, N) = t$, Будемо називати клітковою довжиною $d_G(s_i, s_j, f)$ між границями кліток s_i, s_j із заданими на них підмножинами L_i, L_j вершин зв'язного графа G , де $L_i \subseteq G^0 \cap \partial s_i, L_j \subseteq G^0 \cap \partial s_j, \{s_i, s_j\} \subseteq S_G(N, f)$, потужність $|J|$ найменшої по включенню впорядкованої множини $J, J = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+k}, s_j\}, J \subseteq S_G(N, f)$, де послідовні пари кліток мають на своїх границях, принаймні одне, спільне ребро. Причому підмножину множини J , складену із не менше ніж двох послідовних кліток зі спільною вершиною на границях, будемо рахувати як одну клітку. Також будемо говорити, що на множині J задано особливий простий клітковий ланцюг $L_{ij}, L_{ij} = L(s_i, s_j)$, який з'єднує клітки s_i, s_j кліткового графа для графа G . У випадку незв'язного графа G одна з кліток множини J буде не 2-кліткою і не псевдокліткою.

Визначення 2. Будемо називати деревом T досяжності множини точок M , та позначати через $T = T_G(M, N)$, зв'язного графа G , при заданому мінімальному вкладенні f графа G до неорієнтованої поверхні $N, M = \{a_i\}_{i=1}^m$, яке реалізує число досяжності $t, t_G(M, N) = t$, пару множин $(\{s_i\}_1^t, \{L_{ij}\})$, де $\{L_{ij}\}$ - найменша по включенню множина особливих кліткових ланцюгів $L(s_i, s_j)$ які, або безпосередньо, або як об'єднання кількох послідовних кліткових ланцюгів зі спільним кінцем одного та початком іншого, що з'єднують всі пари кліток s_i, s_j та мають найменшу суму довжин всіх L_{ij} із множини $\{L_{ij}\}$.

Визначення 3. Для множини точок $M, M = \{a_i\}_{i=1}^m$, площинного графа G з числом досяжності $t_G(M, \Sigma_0)$, де $t_G(M, \Sigma_0) = t, t \geq 2$, будемо називати клітковою довжиною $D_G(M, t)$, де $D_G(M, t) = \min_{\forall f \in fGN \forall s_i, s_j \in T} \sum d_G(s_i, s_j, f)$, між підмножинами L_i, L_j множини $M, M = L_i \cup L_j, L_i \cap L_j = \emptyset$, розташованими на границях довільних кліток $s_i, s_j, \{s_i, s_j\} \subseteq S_G(\Sigma_0, f)$, що реалізують число досяжності $t_G(M, \Sigma_0)$, де fGN - множина всіх неізоморфних вкладень графа G до Σ_0 , що реалізують число досяжності $t_G(M, \Sigma_0)$ множини точок M .

Визначення 4. Будемо називати множину M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, точок графа G з числом досяжності t , де $t_G(M, \Sigma_0) = t$, критичною відносно кліткової довжини $D_G(M)$ при операції видалення довільного елемента a_i , якщо має місце нерівність $D_G(M \setminus a_i) < D_G(M)$, чи відносно операції стискання ребра $u = (ab)$ в точку a' (якщо $\{a, b\} \subset M$, то замість M розглядатимемо множину $M' = (M \setminus (a, b)) \cup \{a'\}$), якщо має місце нерівність $D_{G_u}(M') < D_G(M)$.

Визначення 5. Будемо називати граф G мінімальним відносно $D_G(M)$ при операції видалення або стискання в точку довільного ребра u , якщо, або $D_{G_u}(M) + 1 = D_G(M)$, або $D_{G_u}(M') < D_G(M)$, де G_u - граф зі стиснутим в точку a' ребром $u = (a, b)$ та $M' = (M \setminus \{a, b\}) \cup a'$.

Лема 1. Мають місце наступні твердження:

1. Кліткова відстань між заданою парою кліток мінімального неорієнтованого вкладення заданого зв'язного графа є збільшеною на 1 найменшою метричною відстанню між довільними парами точок на границях цих кліток.
2. Якщо множина M має більш ніж дві клітки мінімального неорієнтованого вкладення зв'язного графа та визначено дерево $T(M)$ (в якому вершинами будуть елементи множини M , а ребром буде наявність спільної точки для границь кліток множини M), то кліткова відстань між її елементами є сумою збільшених на 1 довжин найкоротших простих ланцюгів між парами довільних вершин дерева $T(M)$.
3. Ребро u графа G суттєве відносно числа досяжності заданої множини точок M , $M = \{a, b\}$, графа G при операції його видалення, якщо належить квазізірці $St_G(K_4 \setminus (a, b))$.
4. Граф $K_5 \setminus (a, b)$ ізоморфний $St(K_4)$ з чотирма висячими ребрами, з яких три мають висячі вершини ототожені в точку a , а четверте ребро стягнуте в точку b .
5. Зірка $St(K_4)$ 2-зв'язного графа-обструкції G заданого неорієнтованого роду 3 має, щонайменше, по одному висячому ребру-променю з кожної вершини графа K_4 чи, принаймні, чотирьох внутрішніх точок його ребер, причому деякі з них можуть бути стягнутими в точку.
6. Для кожного графа-обструкції є реберне покриття підграфами чи частинами гомеоморфними K_4 .
7. Для площинного графа G має місце співвідношення; якщо $(t=3) \wedge (\theta=1)$, то $D_G(M) = 2$, а якщо $(t>3) \wedge (\theta = \lfloor (t-1)/2 \rfloor)$, то $D_G(M) = \theta + 1$;

Доведення. Твердження 1, 2, 3, 7 леми 1 впливатимуть з наведених вище визначень 3, 4, 5. Твердження 4 є очевидним. Довести твердження 5 можливо методом від протилежного, припустивши, що є вершина v графа K_4 , як центра квазізірки, що має степінь 3 та не належить ребру-променю квазізірки $St(K_4)$. Можливі два випадки для пари ребер - діагоналей простого циклу довжини 4 графа K_4 : випадок 1. Обидва розміщені на ленті Мебіуса, випадок 2. Вони розміщені не на одній ленті Мебіуса. Розглянемо випадок 1. Тоді можливо звільнити від одного зі схрещених ребер ленту Мебіуса, розташовану в середині 2-клітки s з границею ∂s - циклом z довжини 4 центра квазізірки, шляхом розміщення назовні циклу одного зі схрещених ребер, яке не матиме кінцевої вершини v . Тим самим зменшимо рід графа-обструкції G заданого неорієнтованого роду, що суперечить поняттю графа-обструкції. Припущення неможливе, твердження 5 для випадку 1 доведене. Розглянемо випадок 2. Якщо обидва внутрішні ребра графа K_4 не розміщені на ленті Мебіуса, то одне з них схрещується на площині із ребром-променем квазізірки $St(K_4)$ та розміщується на ленті Мебіуса, яка приклеєна до зовнішньої, відносно циклу z , клітки. Виконаємо симетричне відображення по вертикальній осі графа K_4 . Для цього переставимо місцями тільки пару протилежних вершин в циклі z одна з яких має степінь 3 та суміжні ребра. Тоді на зовнішній клітці, відносно повернутого циклу

z , вкладаємо без перетину ті висячі ребра-промені квазізірки, що вкладалися на ленті Мебіуса. Матимемо в результаті такого вкладення квазізірки, що, принаймні, лента Мебіуса h звільниться від одного з двох схрещених ребер. Схематично показано це на картах 6 та 7 рис. 1. Тим самим зменшимо рід графа-обструкції G заданого неорієнтованого роду, що суперечить поняттю графа-обструкції. Припущення неможливе, твердження 5 для випадку 2. доведене

Доведення твердження 6. Оскільки кожне ребро графа-обструкції неорієнтованого роду графа G на евклідовій площині перетинається у внутрішній точці z , принаймні з одним ребром, розміщується певним мінімальним вкладенням на ленті Мебіуса неорієнтованої поверхні разом із, принаймні, одним ребром. Тоді довільне ребро є ребром підграфа гомеоморфного K_4 , який в свою чергу є підграфом чи частиною підграфа гомеоморфного графу Куратовського. З іншого боку, обидва графи Куратовського мають реберне покриття парою чи трійкою підграфів гомеоморфних K_4 . Таким чином граф-обструкція G матиме реберне покриття скінченною множиною з графів чи частин гомеоморфних K_4 . На 8-й карті рис. 1 наведено реберне покриття $K_{3,3}$ з двома частинами гомеоморфними графу K_4 , один без наведеного ребра, а друга частина отримана видаленням одного з трьох несуміжних ребер, окрім наведеного ребра. На 9-й карті рис. 1 наведено реберне покриття K_5 трьома гомеоморфними графу K_4 , один без чотирьох ребер з спільною вершиною v , із них два виділені ребра, а два інших утворені з колеса O_4 з чотирма ребрами-шпицями почерговим видаленням одного з наведених ребер. З іншого боку це квазізірка з центром K_4 чи $K_{3,3}$ з кожної вершини якого виходить промінь-ребро, висячі вершини яких мають вершини на простому циклі. Доведення леми 1 закінчене.

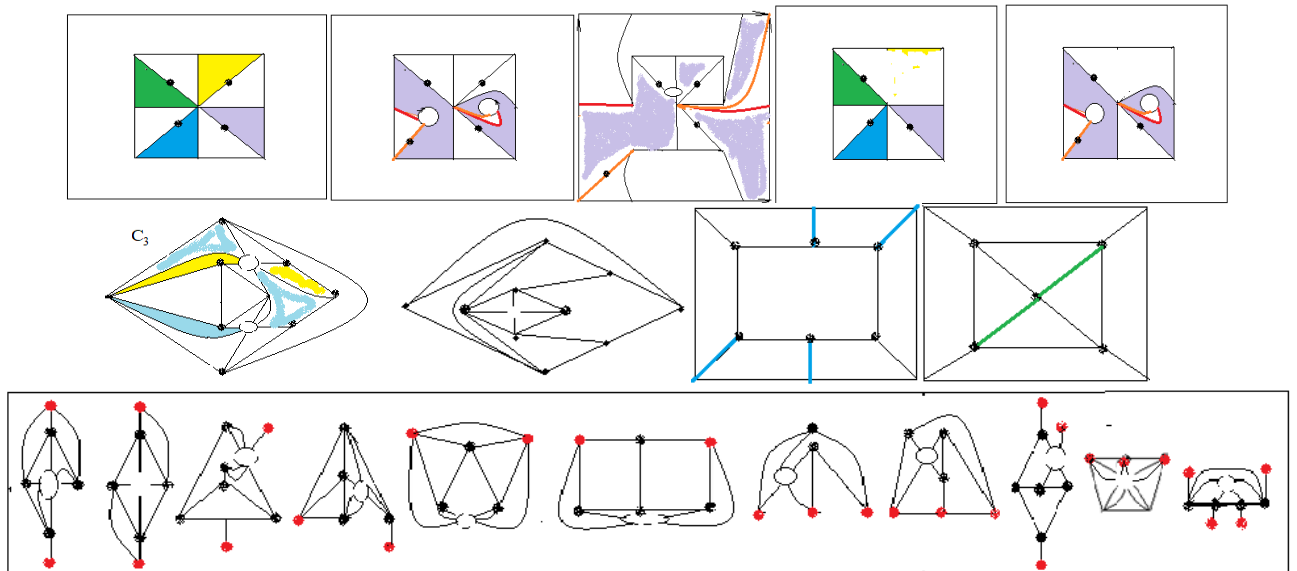


Рис. 1. На перших трьох картах приєднання 2-ручки та ленти Мебіуса до евклідової площини призведе до вкладення графа H в поверхню Клейна з множиною M з чотирьох наведених вершин із числом досяжності 4 і тета характеристикою $\theta_H(M, \Sigma_0)$, $\theta_H(M, \Sigma_0) = 1$. На 4-й та 5-й картах приєднання 2-ручки до евклідової площини з множиною з трьох заданих (наведених жирно) вершин із числом досяжності 3 і тета характеристик ою 1. На 6-й і 7-й картах проілюстровано твердження 5, на 8-й та 9-й приклади до твердження 6 леми 1.

В третьому ряду наведені квазізірки з множинами виділених жирно вершин та висячих ребер-променів

Твердження 1. Нехай задано площинні графи G, H , які є 3-мінімальним та 2-мінімальним, відповідно, із заданими множинами M та N суттєвих відносно видалення з множини точок z

числом досяжності $t_G(M) = t$, клітковою відстанню $D_G(M)$ множини M та характеристикою $\theta_G(M) = \theta$, де $t \geq 3$, $\theta \geq 1$. Якщо граф D задано ϕ -перетворенням графа G та квазіірки $St(H)$ з множиною M висячих вершин $\{g_i\}_{i=1}^{|M|}$ наступним чином: $\phi: (G + St(H), \sum_{i=1}^{|M|} (a_i + g_i)) \rightarrow (D, \{a_i^*\}_{i=1}^{|M|})$, де H - центр квазіірки гомеоморфний одному з графів множини $\{K_{2,3}, K_4, K_5 \setminus e\}$, із заданою множиною M висячих вершин чи точок з характеристиками $t_G(M) = 1$ та $\theta_G(M) = 1$, то граф D матиме підграф-обструкцію для поверхні Клейна, причому пари висячих ребер квазіірки можуть породжувати щонайбільше три підграфи гомеоморфні K_4 , та, може бути, принаймні, одне висяче ребро квазіірки несуттєвим відносно неорієнтованого роду при стисканні в точку.

Доведення твердження 1. Нехай виконуються умови співвідношення 3, де $H = K_4$. Розглянемо вкладення $f: G \rightarrow \Sigma_0$ 3-мінімального графа G із заданою множиною M з суттєвих (відносно характеристик t, θ при операції видалення з множини) точок з числом досяжності $t_G(M) = 3$ та $\theta_G(M) = 1$. Розширимо це вкладення до $f': G \rightarrow N_2$, де N_2 - пляшка Клейна, так, щоб отримати недвоклітку s , $s \in N_2 \setminus f'(G)$, на границі якої розташована вся множина точок M . Для цього приєднаємо до евклідової площини дві ленти Мебіуса на яких вкладемо два суміжних ребра e_1, e_2 з числа ребер, які розташованих на границях кліток досяжності множини точок M , та які є спільними для границь двох суміжних кліток. Решта ребер та вершин графа G вклатиметься таким же чином, як вкладенням f . Відмітимо, що границя ∂s_1 містить стільки копій заданої точки множини M , $M = \{a_i\}_{i=1}^{|M|}$, графа, скільки зустрічається точка при обході границі ∂s_1 по колу за напрямком часової стрілки. Для 2-мінімального графа H є один варіант-ізоморфізм одному з графів множини $\{K_{2,3}, K_4, K_5 \setminus e\}$, описаної в [10], а задана множина точок N графа H матиме число досяжності 2. Для графа H матимемо наступні випадки:

Випадок 1. $H \approx K_4$; Випадок 2. $H \approx K_{2,3}$; Випадок 3. $H \approx K_{3,3} \setminus e$; Випадок 4. $H \approx K_5 \setminus e$.

Розглянемо випадок 1. Для множини N матимемо тільки два підвипадки:

- а). Множина N містить тільки вершини графа H ;
- б). Множина N містить принаймні одну внутрішню точку ребра;

Нехай має місце підвипадок а). Позначимо через H центр квазіірки $St(H)$ із заданою множиною N висячих вершин, де $N = \{g_i\}_{i=1}^{|M|}$, $|N| = |M|$, та вкладемо $H \setminus e$ в середину клітки $\overline{s_1}$, а ребро e розмістимо на ленті Мебіуса, приклеєній до зовнішньої грані графа $H \setminus e$, на яку вкладена одна пара схрещених ребер-променів квазіірки, що суміжні вершинам графа H . Тобто побудуємо мінімальне вкладення f'' , де $f'': St(H) \rightarrow N_1$, де N_1 отримано шляхом приклеювання ленти Мебіуса до замкнутої клітки $\overline{s_1}$, що задовольняє умові досяжності множини N на проєктивній площині, тобто $f''(N) \subset \partial s_2$, де $s_2 \in N_1 \setminus f''(St(H))$. Відмітимо, що за наявності другої пари e_1, e_2 схрещених на евклідовій площині ребер-променів квазіірки $St(H)$, потрібно приклеїти до $\overline{s_1}$ другу ленту h_2 Мебіуса та вкласти на неї зазначену пару ребер. За визначенням ϕ -перетворення склеїмо пару вершин (a_i, g_i) в точку a_i^* , де $i = 1(1)|M|$ та отримаємо граф D і вкладення $f''': D \rightarrow N_3$. У випадку відсутності серед множини підграфів кільцевого графа K , породженого множиною всіх тих ребер графа D , гомеоморфних K_4 та які мають ребрами ϕ -образи приклеєних висячих ребер квазіірки та тих, що розташовані на

$\partial s_1 \cup \partial s_2$ вкладенням f''' , то матимемо вкладення графа D в неорієнтовану поверхню N_3 . Припустимо, що існує мінімальне вкладення графа D в неорієнтовану поверхню роду 2. Тоді на одній ленті Мебіуса мають бути розміщені, принаймні, частини двох ребер підграфів G , H графа D . Це означатиме, що на площині елементарного диска ці ребра чи їх частини мають перетинатися, тобто належатимуть найменшому по включенню підграфу чи частині K_4 , який буде підграфом графа D , що стягуватиметься до K_5 чи буде гомеоморфним $K_{3,3}$. Тобто є спільна вершина у цих ребер чи їх частин, а отже і графів G та H . Згідно заданого ϕ -перетворення графів G , $St(H)$ на D це неможливо. Припущення неможливе, тобто граф D має неорієнтований род 3. Таким чином доведення у підвипадок а) завершено.

Розглянемо підвипадок б). Наявність внутрішніх точок ребер графа G серед елементів множини точок приєднання означатиме, що граф G можливо подати як квазізірку з центром H' , можливо виродженого, з множиною висячих вершин M' графа $St(H')$, $M' = \{a'_i\}_{i=1}^{|M'|}$, яка матиме таке ж число досяжності, що і множина M графа G та деякі елементи-вершини є несуттєвими відносно числа досяжності стосовно H' при видаленні з множини.

Випадок 2. $H \approx K_{2,3}$.

Розглянемо випадок 2. Тоді множина N складатиметься принаймні з трьох точок степені 2 та, згідно умови числа досяжності 2 множини N містить тільки три вершини графа H . Вкладення в клітку з приклеєною лентою Мебіуса з розміщенням на ленті ребер, які виходять від однієї з вершин множини N , є єдиним з можливих. Подальші кроки доведення аналогічні випадку 1.

Випадок 3. $H \approx K_{3,3} \setminus e$. Оскільки граф H ізоморфний K_4 з виділеними точками приєднання на несуміжних ребрах, то випадок 3 зводиться до випадку 1.

Випадок 4. $H \approx K_5 \setminus e$. Тоді подамо H як квазізірку з центром K_4 з кожної вершини якого виходять висячі ребра, три з них матимуть висячі кінцеві вершини ототоженені в одну. Тобто зводимо цей випадок до випадку 1.

Зауважимо, що кілька висячих ребер-променів квазізірки можуть мати спільну некінцеву вершину. Тоді розіб'ємо множини висячих ребер на три підмножини $St_i = \{e_{ij}\}_{j=1}^{m_i}$, де St_1 , St_2 складені з ребер, що матимуть кінцевими точками вершину та внутрішню точку деякого ребра підграфів H чи H' , а підмножина St_3 , що складена з ребер, які матимуть кінцевими точками тільки внутрішні точки ребер підграфів H чи H' можливо є пустою.

Доведення суттєвості кожного ребра впливатиме із визначень числа досяжності множини точок та кліткової довжини.

Відмітимо наступне: 1) центр квазізірки може бути виродженим з принаймні однією вершиною та квазізірка стане простою зіркою; 2) можливість стискання в точку v висячого ребра-променя квазізірки $St(H)$ як несуттєвого відносно роду. Тоді одне ребро з числа двох схрещених на площині ребер графа H буде вкладеним на поверхні роду 2 так, як було наведено в припущеному вище випадку. Тоді квазізірка буде іншою, бо всі ребра графа H , суміжні стиснутому ребру та утворюють множини S , будуть висячими променями квазізірки $St(H')$, де множина вершин графа H' буде такою $(H^0 \setminus \{v\}, H^1 \setminus L)$. Доведення закінчене.

Наслідок 1. Нехай виконуються умови твердження 1. Якщо маємо вкладення $f: D \rightarrow N_2$ для графа D , як для ϕ -образа графів G та $St(H)$, заданого як наведено вище у доведенні співвідношення 1 твердження 1, то серед ребер з $f(St(H))$ може бути, принаймні, одне несуттєве ребро відносно роду при операції видалення.

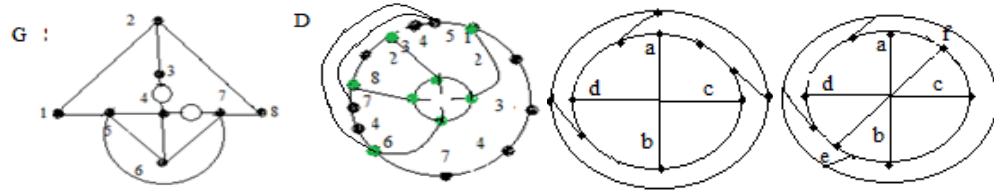


Рис. 2. Ілюструємо твердження 1 (за умови ототодження однакових вершин на границі недвоклітки), де $St(H)$ вкладає в середину недвоклітки є квазізірка з центром K_4 , з кожної зеленої вершини якого виходить промінь-ребро із зеленою кінцевою вершиною, яка попарно ототожнюється із однією з вершин підмножини M , $M = \{1,3,8,6\}$, графа G . Третій та четвертий граfi O_2 та O_3 містять ребра чи прості ланцюги, які кінцевими вершинами розділяють на площині пари кінцевих вершин кожного зі схрещених ребер.

Наслідок 2. Нехай виконуються умови твердження 1. Матимуть місце співвідношення:

1. Якщо ребро e графа D є суттєвим відносно роду при операції видалення, то воно належить підграфу гомеоморфному $K_{3,3}$, K_5 , чи тому, що стягується до них.

2. Якщо ребро e графа D є несуттєвим відносно роду при операції видалення, то належить підграфу гомеоморфному O_3 (на рис.2) чи не належить квазізірці з центром K_4 у кожній з вершин якого є висячі ребра промінь, висячі вершини яких ототожнюються з вершинами одного спільного циклу.

3. Якщо ребро e графа D є несуттєвим відносно роду при операції стягування в точку, то воно належить до висячих ребер квазізірки цього графа.

Твердження 2. Нехай задано площинні граfi G та H які є t -мінімальним із заданими множиною точок M та N , відповідно, суттєвими відносно числа досяжності при операції видалення довільного елемента з множини) з числом досяжності $t_G(M) = t_G(N) = t$, $\theta_G(M) = \theta_G(N) = \theta$, де $t \geq 2$, $\theta \geq 0$. Якщо $t = 2$, $\theta = 0$ і зафіксовано квазізірку $St(H)$ із множиною висячих вершин $\{g_i\}_{i=1}^{|M|}$ ребер, які матимуть другу кінцеву вершину серед елементів множини N , та задано φ -перетворення

наступним чином: $\varphi : (G + St(H), \sum_{i=1}^{|M|} (a_i + g_i)) \rightarrow (D, \{a_i^*\}_{i=1}^{|M|})$, де H - центр квазізірки гомеоморфний

одному з графів множини $\{K_{2,3}, K_4, K_5 \setminus e\}$, то граф D містить підграф-обструкцію для проективної площини та можливі несуттєві висячі ребра у квазізірки відносно роду при стисканні його в точку, де образи висячих ребер квазізірки породжують не більше двох підграфів гомеоморфних K_4 .

Доведення твердження 2. Нехай виконуються умови твердження 2. Розглянемо вкладення f ,

$f : G \rightarrow \Sigma_0$ 2-мінімального графа G із заданою множиною M з суттєвих (відносно характеристик t , θ при операції видалення з множини) точок з числом досяжності $t_G(M) = 2$ та $\theta_G(M) = 0$.

Розширимо це вкладення до $f' : G \rightarrow N_2$, де N_2 - поверхня Клейна, так, щоб отримати недвоклітку s , $s \in N_1 \setminus f'(G)$, на границі якої розташована вся множина точок M . Для цього приєднаємо до евклідової площини дві ленти Мебіуса на яких вкладаємо два суміжних ребра e_1, e_2 з числа ребер, розташованих на границях кліток досяжності множини точок M , та які є спільними для границь двох суміжних кліток. Решта ребер та вершин графа G укладатиметься так само як вкладенням f . Відмітимо, що границя ∂s_1 містить стільки копій заданої точки множини M , $M = \{a_i\}_{i=1}^{|M|}$, графа G , скільки зустрічається точка при обході за часовою стрілкою границі ∂s_1 . Кожен 2-

мінімального графа H ізоморфний одному з графів множини $\{K_{2,3}, K_4, K_5 \setminus e\}$, описаної в [10], а задана множина точок N графа H матиме число досяжності 2. Якщо H є центром квазізірки $St(H)$ із заданою множиною N висячих вершин чи точок, де $N = \{g_i\}_{i=1}^{|N|}$, то можливо побудувати мінімальне вкладення f'' , де $f'': St(H) \rightarrow N_1$, де N_1 отримано шляхом приклеювання ленти Мебіуса до замкнутої клітки $\overline{s_1}$, що задовольняє умові досяжності множини N на проєктивній площині, тобто $f''(N) \subset \partial s_2$, де $s_2 \in N_1 \setminus f''(St(H))$. За визначенням ϕ -перетворення склеїмо пару вершин (a_i, g_i) в точку a_i^* , де $i = 1(1)|M|$ та отримаємо граф D і вкладення $f''': D \rightarrow N_2$, де $f''' = f' + f''$. Розглянемо множину K' підграфів кільцевого графа K , породженого множиною всіх тих ребер графа D , які є образом приклеєних висячих ребер квазізірки, які розташовані на $\partial s_1 \cup \partial s_2$ вкладенням f''' . За умови наявності підграфа K'' гомеоморфного K_4 в графі K' потрібно розмістити на ленті Мебіуса одне ребро графа K'' з тих, що вкладалися на евклідовій площині із перетином у внутрішній точці (схрещених) та одного ребра з графів G чи H . Оскільки є дві ленти Мебіуса, то матимемо не більше двох таких підграфів K'' . Таким чином отримаємо вкладення графа D в неорієнтовану поверхню роду 2, то $\gamma(D) \leq 2$.

Відмітимо, що граф G можливо подати як квазізірку з центром підграфом H' з множиною висячих вершин M' , $M' = \{a'_i\}_{i=1}^{|M'|}$, яка матиме ті ж властивості, що і множина N графа H . Наявність в M принаймні однієї внутрішньої точки ребра графа G суттєво впливатиме на рід графа D , якщо інша кінцева вершини висячого ребра квазізірки буде суттєвою вершиною відносно числа досяжності при операції її видалення з множини точок приєднання.

Доведемо, що $\gamma(D) = 2$. Припустимо, що існує мінімальне вкладення графа D в неорієнтовану поверхню роду 1. Тоді на одній ленті Мебіуса мають бути розміщені, принаймні, частини двох ребер підграфів G , H графа D . Це означатиме, що на площині елементарного диска ці ребра чи їх частини мають перетинатися, тобто належатимуть найменшому по включенню підграфу чи частині K_4 , який належатиме підграфу графа D , що стягуватиметься до K_5 чи буде гомеоморфним $K_{3,3}$. Тобто має бути спільна вершина у цих ребер чи їх частин, а отже і графів G , H . Це неможливо згідно заданого в умові ϕ -перетворення графів G та $St(H)$ на граф D . Припущення неможливе, тобто граф D неорієнтованого роду 2.

Твердження щодо несуттєвості деякого ребра графа D відносно неорієнтованого роду при операції видалення впливатиме із визначень числа досяжності множини точок. Згідно умови t -мінімальності графів матимемо, що видалення довільного ребра графа G чи H змінюватиме число досяжності множини приєднання, а це призведе до досяжності на евклідовій площині множини точок приєднання та зменшить рід одного із наведених вище вкладень. Якщо видалити довільне висяче ребро квазізірки $St(H)$, то тим самим зменшимо потужність множини точок приєднання, що за умовою мінімальності також зменшить число досяжності на 1 та, як наголошено вище, призведе до зменшення роду. Останній варіант, коли тільки два ребра розташовані на одній ленті Мебіуса, то це означатиме, що видалення одного з них вивільнить ленту і тим самим зменшить рід на 1.

Відмітимо про можливість стискання в точку v висячого ребра-променя квазізірки $St(H)$ як несуттєвого відносно роду. Якщо одне ребро з числа двох схрещених на площині ребер графа H буде вкладеним на поверхні роду 2 так як було наведено в вище наведеному випадку. Тоді квазізірка буде іншою, бо всі ребра графа H , суміжні стиснутому ребру та утворюють множину S , стануть променя-ми квазізірки $St(H')$, де $H' = (H^0 \setminus \{v\}), H^1 \setminus L$. Доведення твердження 2 закінчене.

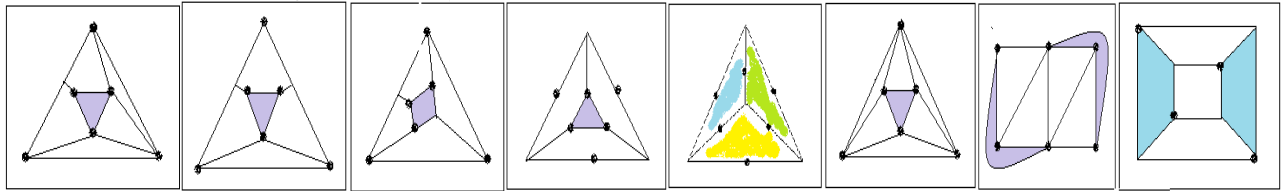


Рис 2. Проілюструємо твердження 3: площинні підграфи графів B_7 , C_3 , C_4 , D_2 , E_2 , $K_{1,2,2,2}$, $K_7 \setminus C_4$, $K_{4,5} \setminus 4K_2$, відповідно, з виділеними жирним вершинами із множин приєднання висячих вершин простої зірки. На п'ятій карті граф K_4 із 1-підрозділеними ребрами, де множина точок 1-підрозділення матиме $(t=3) \wedge (\theta=1)$.

Твердження 3. Нехай площинний граф G не є t -мінімальним, але є φ -образом трьох копій графів ізоморфних $K_{2,3}$, чи K_4 , чи $K_5 \setminus e$ при φ -перетворенні, заданому на двох парах простих ланцюгів чи підланцюгів цих графів та задано множину M суттєвих точок (відносно операції видалення) $t_G(M) = t$, $\theta_G(M) = \theta$, $D_G(M) \geq 1$. Мають місце наступні твердження:

1. Якщо $(t=3) \wedge (\theta=0)$, то $D_G(M) \geq 3$;

2. Якщо задано φ -перетворення наступним чином: $\varphi : (G + St(H), \sum_{i=1}^{|M|} (a_i + g_i)) \rightarrow (D, \{a_i^*\}_{i=1}^{|M|})$, де H - центр квазізірки гомеоморфний одному з графів множини $\{K_{2,3}, K_4, K_5 \setminus e\}$, де множина M , $M = \{a_i\}_{i=1}^{|M|}$, точок має характеристики $t = 2$, $\theta = 0$, квазізірка $St(H)$ із множиною висячих вершин $\{g_i\}_{i=1}^{|M|}$, тоді граф D є прототипом графа-обструкції для проективної площини (із можливо несуттєвими висячими ребрами квазізірки відносно роду при стисканні його в точку), причому образи пари висячих ребер квазізірки породжують не більше двох підграфів гомеоморфних K_4 ;

3. Якщо змінити в співвідношенні 2 тільки $t = 3$, то граф D є прототипом графа-обструкції для поверхні Клейна, причому образи пари висячих ребер квазізірки породжують не більше трьох підграфів гомеоморфних K_4 .

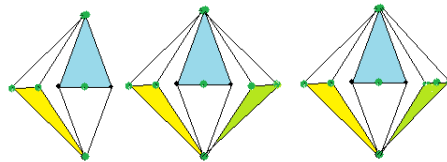


Рис 3. Приклад до твердження 3, де підграф G графа D_3 (перший зліва-направо) та його аналоги з множинами із наведених точок приєднання, які попарно ототожнюються з кінцевими вершинами простої зірки

Алгоритм побудови n -зв'язних графів-обструкцій поверхні Клейна.

Початок алгоритму A (вхідні: G , вихідні: D);

Вхідні дані:

1. Вхідний площинний граф G є 3-мінімальним чи мінімальний відносно кліткової відстані 2 підграф графа-обструкції проективної площини та в ньому задано множину вершин із числом досяжності 2, n -число зв'язності вихідного графа D ;
2. Множина $F(G) = \{f_i\}_{i=1}^{|F|}$ всіх неізоморфних вкладень графа G в S -поверхню Клейна;
3. Для кожного вкладення f_i побудовані наступні множини:

а) $R_i = \{\{a_{i'k'}\}_{k'=1}^n\}_{i'=1}^{m_i}$ мінімальну за включенням і складену із підмножин неізоморфних (при автоморфних відображеннях графа G) точок $\{a_{ik'}\}_{k'=1}^n$ заданої потужності множини R_i

розташованих на границях кожної із наступних кліток s_j, s'_j, s''_j , де $s'_j \in S \setminus f'(G_u)$, $s''_j \in S \setminus f''(G \setminus u)$, та мінімальну при операціях видалення чи стискання в точку довільного ребра u графа G , де f', f'' - мінімальні вкладення графів $G_u, G \setminus u$ в неорієнтовані поверхні S', S'' меншого роду ніж S , відповідно,

б) $M = M(f_i, R_i) = \{s_j\}_{j=1}^{|M|}$, складеної з кліток s_j , де $s_j \in S \setminus f_i(G)$, які містять на своїх

границях всю множину вершин графа;

4. Множина квазізірок з центром K , де $K \in \{K_4, K_{2,3}\}$ та, із принаймні, чотирма (для K_4) чи трьома (для $K_{2,3}$) висячими ребрами, яких може бути не більше $|G^0|$;

5. Множини $st(K_4) = \{g_k\}_{k=1}^{|\text{ie}(K_4)|}$, $st(K_{2,3}) = \{h_k\}_{k=1}^{|\text{ie}(K_{2,3})|}$ всіх вкладень квазізірок з центрами $K_4, K_{2,3}$, відповідно, в клітку s , як в локальну проєктивну площину з розташуванням на ленті Мебіуса ребер центру та висячих ребер квазізірки.

6. Function Π (вхід: R, n ; вихід: R^n, NG), яка при кожному звертанні видає елемент з R^n -множини всіх перестановок вершин $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ за час пропорційний $n!$ та множину NG - всіх розбиттів множини висячих вершин $g_1, g_2, g_3, \dots, g_m$ квазізірки на n непустих підмножин G_1, G_2, \dots, G_n , кожен з елементів підмножини G_i ототожнюється в одну точку ng_i , яка попарно ототожнюється з a_i , число розбиттів які видаватиме функція за час пропорційний NN , де $NN = (m(m-1)(m-2) \dots (m-(n-1)))$, $m > n$.

Вихідні дані: Граф D – прототип n -зв'язного графа-обструкції для поверхні Клейна.

Ввести G, n ;

Для i від 1 до $|F(G)|$ кроком 1 виконати: // початок циклу з параметром i

початок дій;

$f := f_i$;

$R := R_i$;

Для j від 1 до $|M|$ кроком 1 виконати:

початок дій;

$s := s_j + h$; // приклеїмо до площинного диску s ленту Мебіуса h ;

$R := \partial s \cap R$; // до n точок a_i границі клітки s приклеюватимемо g_j висячі вершин зірки;

Якщо $|\partial s \cap R| < n$ то перехід на кінець циклу з параметром j ;

Вкладемо K в $\bar{s} \setminus \partial s$; // центр квазізірки зірки вкладаємо в середину клітки s
// так, щоб одне з ребер лежало на ленті Мебіуса h ;

Function Π (вхід: R, n ; вихід: R^n); //при кожному звертанні на виході нова перестановка
// з множини R^n - всіх перестановок вершин $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$;

// з якими ототожнюється множина висячих вершин $ng_1, ng_2, ng_3, \dots, ng_n$.

// матимемо ототожені вершини $a_1 ng_1, a_2 ng_2, \dots, a_n ng_n$.

Для k від 1 до n кроком 1 виконати:

початок дій;

$g := a_k ng_k$; // маємо вершину приєднання з тими ж ребрами графа G та;
// висячими ребрами квазізірки з центром K вкладаємо

$D^0 = G^0 \setminus \{a_k\} \cup K^0 \setminus \{g_k\} \cup \{a_k ng_k\}$;

$D^1 := G^1 \cup K^1 \cup (St^1(K) \setminus K^1)$;

кінець дій циклу з параметром k ;

Виводимо (“Граф $D = ”, (D^0, D^1)$;

кінець дій циклу з параметром j ;

кінець дій циклу з параметром i ;

Кінець алгоритму А.

Твердження 4. Мають місце співвідношення:

- Алгоритм А коректний та має часову складність $O(b|G^0|\text{time}(\text{Function } \Pi(\mathbb{R}, n)))$, де $b=b(G)$ – добуток числа неізоморфних мінімальних вкладень заданого 3-мінімального площинного графа G та найбільшого числа кліток в них пропорційне $|G|^2$.
- Функція $(\text{Function } \Pi(\mathbb{R}, n))$ для $n=3$ та деяких квазізірок має часову складність пропорційну $O(|G^{0|n})$, де $|G| \leq 10$.
- Вихідний граф D може мати серед образів всячих ребер квазізірки несуттєві ребра відносно роду при операції стискання ребра в точку. Виконавши стискання в точку всіх таких ребер графа D отримаємо мінор поверхні Клейна.

Твердження 5. Нехай площинний граф G є мінімальним відносно кліткової довжини 2 підграфом графа обструкції проєктивної площини (одним з графів на рис. 3) та задано його підмножину точок M з суттєвих вершин відносно чисел $D_G(M)$ і $t_G(M) = t$, де $t=2$, $D_G(M)=2$, при операції видалення точки з множини M . Якщо задано φ -перетворення графа G та квазізірки $S_G(H)$ з

центром-графом H наступним чином: $\varphi : (G + St(H), \sum_{i=1}^{|M|} (a_i + g_i)) \rightarrow (DH, \{a_i^*\}_{i=1}^{|M|})$,

де H - центр квазізірки гомеоморфний одному з графів множини $\{K_{2,3}, K_4, K_5 \setminus e, \bar{K}_r\}$, $r \geq 1$, де множина M , $M = \{a_i\}_{i=1}^{|M|}$, точок має характеристики $t=2$, $\theta=0$, квазізірка $St(H)$ із множиною всячих вершин $\{g_i\}_{i=1}^{|M|}$, тоді мають місце наступні співвідношення:

- Якщо $r=1$, ($t=2$, $\theta=0$) чи ($t=3$, $\theta=1$), то граф DH є графом-обструкцією для проєктивної площини, причому образи пари всячих ребер квазізірки не породжують підграфів гомеоморфних графу K_4 з двома видаленими несуміжними ребрами;
- Якщо граф DH є графом-обструкцією для поверхні Клейна, то образи пар всячих ребер квазізірки породжують не більше двох різних підграфів гомеоморфних K_4 та можуть бути несуттєвими відносно роду при операції стягування всячих ребер в точку;
- Якщо замінити в співвідношенні 1 рівність для t на $t=3$, то граф DH стане прототипом графа-обструкції для поверхні Клейна, причому образи пари всячих ребер квазізірки породжують не більше трьох підграфів гомеоморфних K_4 .

Доведення. Нехай виконуються умови твердження 5 та співвідношення 1. Покажемо виконання умови суттєвості кожного ребра графа DH відносно неорієнтованого роду 2 при операції видалення. Для прообраза u довільного ребра можливі наступні випадки:

Випадок 1 u належить графу G ;

Випадок 2 u належить графу H ;

Випадок 3 u належить до множини всячих ребер-променів квазізірки $St(H)$

Нехай має місце випадок 1. Видаливши ребро матимемо згідно умови суттєвості множини M відносно числа кліткової відстані $D_G(M)$ матимемо зменшення на 1 цього числа. Тоді матимемо можливість такого вкладення графа G в площину з меншим на 1 числом приклеєних лент Мебіуса яке розміщуватиме множину M на границі однієї псевдоклітки в яку вкладемо квазізірку $St(H)$.

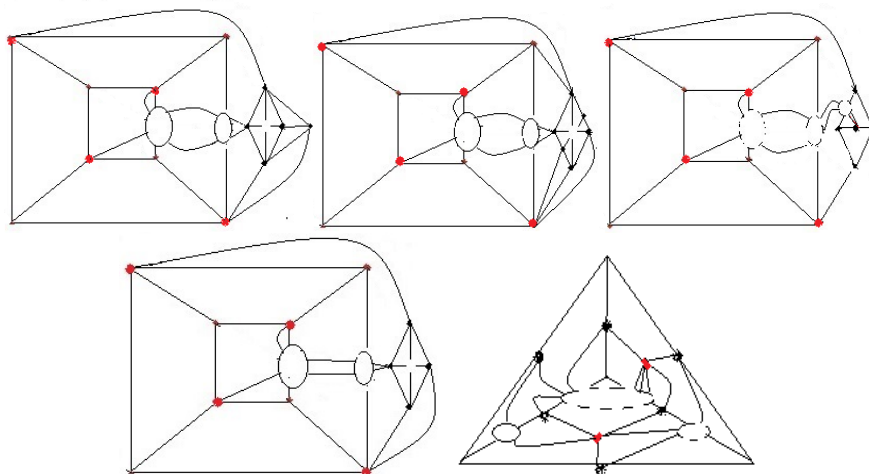


Рис.4. Приклади ручного виконання алгоритму побудови 3-зв'язних графів обструкцій неорієнтованого роду 3 на перших чотирьох картах, на 5-й карті граф не 3-зв'язний.

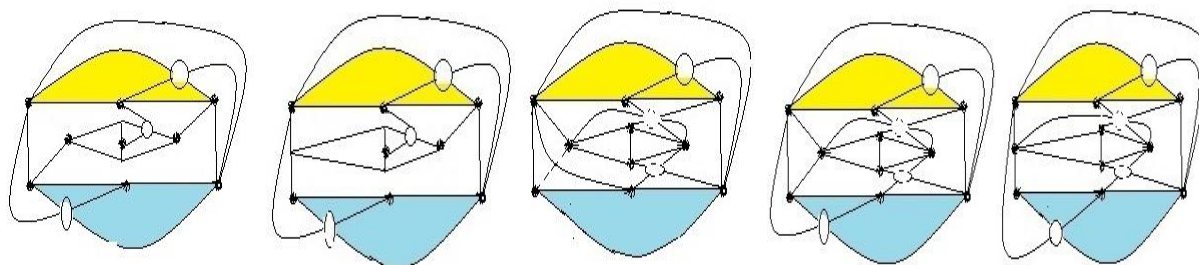


Рис.5. Приклади ручного виконання алгоритму побудови 3-зв'язних графів обструкцій неорієнтованого роду 3 на перших двох картах, на 5-й та 4-й картах графи роду 4.

Отримано математичне забезпечення для алгоритмів побудови мінорів заданої зв'язності для поверхні Клейна шляхом ϕ -перетворення 3-мінімальних площинних графів та квазізірок з центром K_4 чи $K_{2,3}$.

Література

19. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ИМ АНУ. Київ. 1973. 383 с.
20. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ АНУ. Київ. 1970. 299 с.
21. Mohar B., Thomassen C. *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins University Press, 2001. 412 p. <https://www.sfu.ca/~mohar/Book.html>
22. Hur S. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Phd, Ohio State University, 2008. http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1209141894
23. Archdeacon D., Huneke P. A Kuratowski Theorem for Nonorientable Surfaces. *Journal of combinatorial theory, Series B*. 1989. **46**. P. 173–231.
24. Петренко В.І. Про структуру площинних підграфів графів-обструкцій неорієнтованої поверхні заданого роду. *Фізико математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021. № 33. С. 105–109. [Google Scholar](https://scholar.google.com/citations?user=...).
25. Anna Flötotto. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, University Bielefeld, 2010, -174 pp.
26. P.Skoda. Obstructions for embedding graphs into surfaces, Simon Fraser University, PhD dissertation, 2012.-133 p.
27. Bienstock D., Dean N. On obstructions to small face covers in planar graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*. 1992. **55**. P. 163–189. <https://doi.org/10.1016/0095-8956%2892%2990040-5>
28. Bienstock D., Monma C.L. On the complexity of covering vertices by faces in a planar graph. *SIAM J. Comput.* 1988. **17**. P. 53–76. <https://doi.org/10.1137/0217004>
29. Mohar B. Face Covers and the Genus Problem for Apex Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 2001. **82**. P. 102–117. <https://doi.org/10.1006/jctb.2000.2026>
30. Mohar B. Apex graphs with embeddings of face-width three. *Discrete Mathematics*. 1997. **176**. P. 203–210. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(96\)00363-9](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00363-9)
13. В.І. Петренко, Д.А. Петренко, О.В. Оришака. Структура проективно площинних підграфів графів-обструкцій заданої поверхні. *Кібернетика та комп'ютерні технології*. 2022, № 2. С. 1-20 DOI:10.34229/2707-451X.22.2.0

14. В.І. Петренюк, Д.А. Петренюк. Про алгоритм побудови 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, № 37 (2023): 72-74. <http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit/article/view/308>
15. Edwin R. van Dam, Jack H. Koolen, Hajime Tanaka. Distance-regular graphs, E-JC, DS22: Apr 15, 2016, <https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/issue/view/Surveys>.
16. Bojan Mohar, Petr Škoda Excluded minors for the Klein bottle I. Low connectivity case, Journal of Combinatoria Theory, Series B, Volume 164, January 2024, Pages 299-320. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2023.10.002>
17. Bojan Mohar, Petr Škoda Excluded minors for the Klein bottle II. Low connectivity case, Journal of Combinatoria Theory, Series B, Volume 166, May 2024, Pages 80-108. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2023.12.006>

РОЗДІЛ 6. ДЕЯКІ ТЕНДЕНЦІЇ ЗАСТОСУВАННЯ

6.1. ABOUT Φ -TRANSFORMATION GRAPHS AS A TOOL FOR INVESTIGATIONS

Let's dissolve the problem of modeling a complex system in general form and propose a theoretical and graphical approach as a way of thinking with artificial images-structures. In systems modeling theory, there are mathematical methods in which large structures are regarded as a set of small and simple substructures, which may have some common parts that can be identified when constructing or reconstructing an entire structure from a finite number of substructures. The main object of φ -method is creating graph (graph model) obtained as a pair of finite sets: sets of vertices and sets of edges to determine the relationships between structure of vertices as objects. The basic idea of the method φ -transformation can be interpreted as a way to inherit a particular property of substructures throughout the structure, depending on the properties of the connection (identification of given parts of substructures). An example of this is the transformation of basic system programming problems into graph theory problems, with mathematical support for their solution algorithms.

The graph model of a mathematical model of a complex system is presented in the form of an undirected graph G without multiple edges and loops and is studied by studying the structured properties of a graph embedded in a closed surface S of an undirected genus $\gamma(S)$; the graph edges placed on the S will be located at least on the projective plane or the Mobius band glued to the oriented surface and will have no common points except the vertices of the graph G with genus $\gamma(G)$ and may not be located only on the handles. A graph G is said to be minimal over S ($\gamma(S)$ -no irreducible) if for each proper subgraph H of graph G there is an inequality $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. A minimal graph over S is called a graph G that decreases $\gamma(G)$ after the edge is removed or the edge is reduced to a point. For sphere S such are K_5 and $K_{3,3}$. The following results can be used for systematic analysis of graph models.

Main definitions and results

For a graph \mathfrak{Z} (obtained as a φ -image $G + St_n(g_0)$ with n vertices of the star $St_n(g_0)$ amalgamate with vertices of the set X having the number of reachability $t_G(X)$ and characteristics $\theta_G(X), \partial\theta_G(X)$, [3-4] the following inequality holds:

$$\gamma(\mathfrak{Z}) \leq \gamma(G) + t_G(X) - \theta_G(X) - \partial\theta_G(X) - 1.$$

Was introduced a characteristic at $\theta_G(X)$ is a measure of the cyclic connectivity of 2-cells of set $S_G(X)$ as opposed to $\partial\theta_G(X)$ which characterizes the cyclicity of the set $S_G(X)$. They can be used in the analysis of graph models of linguistic circuits which know that vertex and vertex links have some common property-context and some pairs of vertexes may conflict or contradict each other. To resolve these conflicts, we suggest placing graph models on the surface of another kind without crossing the edges at the inner points. In order to investigate the behavior of a mathematical model of a complex system placed on the orienting surface S , its graph model G without multiple edges and loops is considered. Then it is possible to use the transform method created for graphs to solve modeling problems by splitting into "simpler" submodels with

further identification of elements made with predefined properties. So the expansion of model G can be determined by the following transformation:

$$\varphi : (G, St_n(g_0), \sum_{i=1}^n (g_i + a_i)) \rightarrow (\mathfrak{A}, \{a_i^*\}_{i=1}^n)$$

where $\{a_i\}_{i=1}^n$ is the set X of points of graph G with the number of reachability $t_G(X)$, which is one set for identification and amalgamation, and the other $\{g_i\}_{i=1}^n$ is the set of end vertices of the star $St_n(g_0)$ with center g_0 . Generalization of the characteristic relating to the cyclic structure of the set X points of the graph G embedded in the surface S. Introduction of a new characteristic that measures the chain structure of the set X of points of graph G on S. This result will be useful in the systematic analysis of both graph models and their topological aspect. which will have common properties at the edges and vertices of the graph model. The solution to our problem is based on the method of graph transformations [1-2], whose founder is M.P. Khomenko, and the concepts he introduced. For the take of completeness, we present the most important part of them.

Definition 1.1. A φ -transformation of space X into X relative homeomorphism $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$ which is the sum $\varphi_0 + \sum_{i=1}^q \varphi_i$ of $q+1$ homeomorphisms:

1. $\varphi_0 = \varphi|_{X \setminus A} : X \setminus A \cong X \setminus A$, φ_0 is a homeomorphism;
2. $\varphi_j : A_j \rightarrow A_j$;
3. $\sum_{j=1}^q \varphi_j = \varphi|_A$, $\sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j + \sum_{j=k+1}^q \varphi_j \neq \varphi|_A$, $k_j = 1(1)q$;
4. $\varphi_j = \sum_{i=1}^{d_j} \varphi_{ji}$; $\varphi_{ji} = \varphi|_{A_{ji}} : A_{ji} \rightarrow \bigcup_{i=1}^{d_j} A_{ji}$; $d_j \geq 2$; $j = 1(1)q$;
5. $-1 \leq \dim(A_{ji} \cap A_{j'i'}) \leq \dim(A_j)$, $i \neq i'$, $i, i' = 1(1)q$;
6. $A_{ji} \neq A_{ij}$, $j \neq i$, $j = 1(1)q$.

An important class φ -transformations are φ -transformations satisfying the condition: $A_{ji} \cap A_{j'i'} = \emptyset$ at $(i \neq i') \cup (j \neq j')$. Then the subspace A is decomposed into the sum q of the subspace systems A_{ji} homeomorphic to each other within each system. Thus, on the subspace A, the relation R - equivalence is given, i.e. $R = \sum_{j=1}^q R_j$, moreover $R_j[A_{ji}] = \sum_{i=1}^{d_j} A_{ji}$. Let $X = \sum_{r=1}^m X_r$, $X = \sum_{l=1}^{m_0} X_l$, $p_0(X_r) = p_0(X_l) = 1$ for $l = 1(1)m_0$, $r = 1(1)m$.

Define φ -transformation $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$ in accordance with definition 1.1. We introduce the following characteristics φ -transformation:

$$k_r^{j j'} = \left| \left\{ A_{ji} \mid A_{ji} \subseteq A_{j'i'} \subseteq X_r, i=1(1)d_j, i'=1(1)d_{j'} \right\} \right| k_{r,j} = \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq j}}^q k_r^{j j'}$$

$$A(\phi_j) = \left\{ k^{j j'} / (k^{j j'} \neq 0) \wedge (\forall j'', j'' \in \{1, 2, \dots, q\}) [(j'' \neq j, j') \Rightarrow ((k^{j j''} = 0) \vee (k^{j'' j'} = 0))] \right\} k^{j j'} = \sum_{r=1}^m k_r^{j j'}, j \neq j', j' = 1(1)q.$$

Possible causes are shown in figure 1.

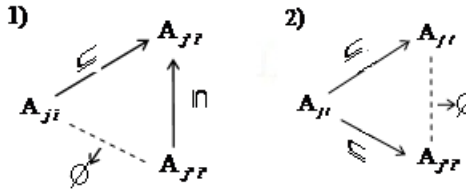


Fig. 1

The set $A(\phi_j)$ is uniquely defined. We denote k_r^j by a number $k_r^{j j}$.

1. Main three graphs

Definition 2.1. The φ -base $B_j = B(\varphi_j)$ of reflection $\varphi_j : A_j \rightarrow A_j$ with given φ -transformation $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$ is the sum of those components of the subspace X that intersect with the subspace A_j , that is $B_j = \sum_{r \in J_j} X_r, J_j = \{r / k_r^j > 0\}$.

Definition 2.2. The complex φ -base $B_l = B(X_l)$ over X_l is called the prototype of this component at a given φ -transformation, i.e. $B_l = \varphi^{-1}(X_l)$.

Statement 2.1. If fixed φ -transformation $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A), J_l = \{j / A_j \subseteq B_l\}, v_l = |J_l|, l = 1(1)m$, then

- 1) $B_l = \bigcup_{j \in J_l} B_j, l = 1(1)m_0,$
- 2) $B_l \cap B_{l'} = \emptyset, l \neq l', l, l' = 1(1)m_0,$
- 3) $\sum_{l=1}^{m_0} v_l = q.$

Proof of this statement follows from the fact that B_l - the set of components of spaces X "glued" into a component X_l on the subsystem A_j .

Definition 2.3. The graph of the complex φ -base $B_l \varphi$ -transformation $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$ is called a graph $Z_l, Z_l = (Z_l^0, Z_l^1)$, where $Z_l^0 = \{x_r / X_r \subseteq B_l\}$ the vertices x_r are joined by edges so that $k_r^j \neq 0$ a tree with a $k_r^j - 1$ -loop in x_r for all $j, j = 1(1)q$ is formed on all vertices.

Definition 2.4. The graph φ -base φ -transformation is called a graph $Z(X, X) = \sum_{l=1}^{m_0} Z_l$.

Statement 2.2. The graph $Z(X, X)$ is defined uniquely if and only if, when $p_0(B_j) \leq 2$ for $j = 1(1)q$, i.e. we have no more than two connected components that intersect with the system A_j . If $(A_j = A_{j1} \cup A_{j2}) \wedge (d_j = 2)$ for all $j = 1(1)q$, then the graph $Z(X, X)$ is uniquely defined.

Theorem 2.1. For each graph $Z(X, X) = Z$ φ -bases φ -transformations $\varphi: (X, A) \rightarrow (X, A)$ we have:

- 1) $p_0(Z) = p_0(X)$;
- 2) $p_1(Z) = \sum_{j=1}^q d_j + p_0(X) - p_0(X) - q$;

In order to ensure that these properties are valid, it is sufficient to calculate $\alpha_1(Z(X, X))$,

$$\alpha_1(Z) = \sum_{j=1}^q (p_0(B_j) - 1) + \sum_{j=1}^q \sum_{r=1}^m (k_r^j - 1) + \sum_{j=1}^q \left\{ \frac{k_r^j}{k_{r'}^j} = 0 \right\},$$

where $m = p_0(X)$ and use the formula $p_1(Z) = \alpha_1(Z) - \alpha_0(Z) + p_0(Z)$.

Theorem 2.2. The graphs of the φ -bases $Z(X, X)$ are simple (i.e. without multiple edges and loops) if and only if, when $k_r^j \leq 1$ and $\left\{ \frac{k_r^j}{k_{r'}^j} \neq 0 \right\} \wedge \left\{ \frac{k_{r'}^j}{k_r^j} \neq 0 \right\} \leq 1$, where $r \neq r'$, $r, r' = 1(1)m$, $j = 1(1)q$. In other words, the graphs $\{Z\}$ are simple if and only if, when:

- 1) we have only one subspace A_{j_i} on each component X_r ;
- 2) there no more than one system $\sum_{i=1}^{d_j} A_{j_i}$ for each pair of such components.

Definition 2.5. The graph φ -transformation $\varphi|_{B_l}: (B_l, B_l \cap A) \rightarrow (X_l, X_l \cap A)$

of a complex φ -base B_l at a given φ -transformation of space X is called a graph Λ_l , where

$$\Lambda_l^0 = \{x_r / X_r \subseteq B_l\} \cup \{y_j / A_j \subseteq B_l\},$$

$$\Lambda_l^1 = \{(k_r^j - k_{r'}^j)(x_r, y_j) / (X_r \subseteq B_l) \wedge (A_j \subseteq B_l)\} \cup \{(y_j, y_j) / (k_r^j - k_{r'}^j \in A(\varphi_j)) \wedge (A_j \subseteq B_l)\}$$

Definition 2.6. Graph φ -transformation of space X is the graph

$$\Lambda(X, X) = \sum_{l=1}^m \Lambda_l$$

Statement 2.3.

1. The arbitrary φ -transform graph $\Lambda(X, X)$ is uniquely defined and is simple if and only if, when:

$$k_r^j - k_{r'}^j \leq 1, j = 1(1)q, r = 1(1)m;$$

2. There is a connection between $p_1(Z)$ and $p_1(\Lambda)$.

Consider the following example in figures 2,3, where:

$$A_1 = \bigcup_{j=1}^3 A_{1j}, \quad A_2 = \bigcup_{j=1}^3 A_{2j}, \quad A_3 = \bigcup_{j=1}^2 A_{3j}.$$

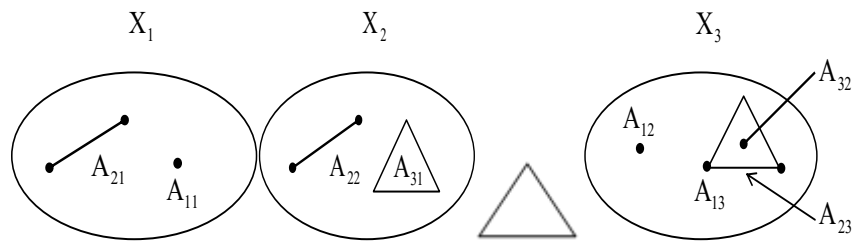


Fig. 2.

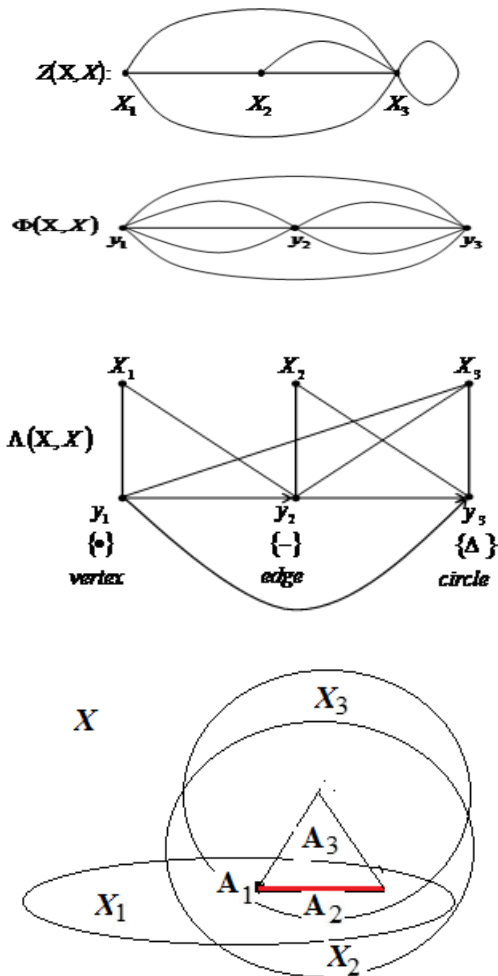


Fig. 3.

3 φ -transformations for graphs on some surfaces

1. Projective plane.

The problem of studying the structure of all minimal non-planar projective graphs is solved by sorting through all the different variants of removing one of the vertices of one of the 35 minors of the projective plane and selecting non isomorphic graphs of nonorientable genus 1. Since [5] does not show the diagrams of these graphs, the construction of all minimal non-planar projective graphs, and in the study of the properties of these subgraphs of the minors of the projective plane relative to the number of reachability of the set of points and the genus of graph.

The solution of this problem is to construct all minimal non-outer projective-planar graphs by sorting out all the different variants of removing one of the vertices of a graph - minor of a projective plane and selecting non isomorphic graphs of nonorientable genus 1. Constructing similarly to how minimally projective non-planar graphs K_5 or $K_{3,3}$ are formed from minimal non-outer planar graphs K_4 or $K_{2,3}$ by gluing a simple star $St(v)$ to the minimum power subset of points of graphs K_4 or $K_{2,3}$ with number reachability equals 2.

Main results: theorem 3.1 and diagrams of 118 non-outer projective-planar graphs are given and the numbers of reachability of sets of vertices of minors of a projective plane and sets with points of attachment of a star to subgraphs of these minors are calculated. The full list of these non-outer projective-planar graphs will be published as soon as possible.

Theorem 3.1. For an arbitrary graph - obstruction G of the projective plane N_1 and each of its vertices v with the set $M(v)$ of all vertices of the incident occur the following statements:

1. For the subgraph $G \setminus v$ of the nonorientable genus, the following relations will take place:

a) If $\gamma(G \setminus v) = 1$, then we have the following relations a1) and one of a2) or a3):

a1) $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 2$, wherein the set $M(v)$ belongs to the boundaries $\partial s_1, \partial s_2$ of two cells s_1, s_2 of the projective plane having at least one common vertex;

a2) each edge of the subgraph $G \setminus v$ is significant in relation genus $\gamma(G \setminus v)$ with respect to the removing the edge or compressing it in point;

a3) each edge of a subgraph $G \setminus v$ is significant with respect to the removal or compression operations of an edge;

b) If $\gamma(G \setminus v) = 0$ then, one of the following two relationships will occur:

b1) $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 3$ and the set $M(v)$ is located on the boundaries of three cells s_1, s_2, s_3 of the projective plane satisfying the relation $\partial s_3 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \neq \emptyset$, each edge of the subgraph $G \setminus v$ being significant relative $t_{G \setminus v}(M(v), N_1)$ to the operations of removing the edge or compressing it to a point, and each point w of the set $M(v)$ satisfies equality $t_{G \setminus v}(M(v) \setminus \{w\}, N_1) = t_{G \setminus v}(M(v), N_1) - 1$;

b2) $t_{G \setminus v}(M(v), \Sigma_0) = 2$, where $t_{G \setminus v}(M(v), \Sigma_0)$ is the number of reachability of the set $M(v)$ relative to the euclidean plane Σ_0 , is realized by minimal embedding $f: (G \setminus v) \rightarrow \Sigma_0$ at the boundaries $\partial s_1, \partial s_2$ of the cells s_1, s_2 , where $\{s_1, s_2\} \subset \Sigma_0 \setminus f(G \setminus v)$, which satisfies equality $\partial s_1 \cap \partial s_2 = \emptyset$, that is, separated by a ring from the cells, then relative to the projective plane, the set $M(v)$ will have a number of reachability $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 2$, with each

point w of the set $M(v)$ satisfies equality $t_{G \setminus v}(M(v) \setminus \{w\}, N_1) = t_{G \setminus v}(M(v), N_1)$ and the set $f(M(v) \setminus \{w\})$ by some embedding $f': G \setminus v \rightarrow N_1$ is placed at the boundaries $\partial s'_1, \partial s'_2$ of two cells s'_1, s'_2 having at least one common point where $\{s'_1, s'_2\} \subset \Sigma_0 \setminus f'(G \setminus v)$, and equality $\partial s'_1 \cap \partial s'_2 \neq \emptyset$ is satisfied.

2. Each minor G of the nonorientable genus 2 (except G_3, E_1, G_4) is covered by a maximum of 4 (eg, graphs A_2, G_1) subgraphs or parts homeomorphic to one of the following graphs: $K_{2,3}, K_4, K_5 \setminus e, K_{3,3} \setminus e, K_5, K_{3,3}$ and relatively Klein surface N_2 the number of reachability 2 for the set of vertices (for $G \in \{G_3, E_1, G_4\}$ we have), and for each removed edge e the graph $G \setminus e$ will have at N_1 the number of reachability equals 2 for the set of vertices;

3. The presence of the coating specified in the statement 2 is not sufficient to make the graph an obstruction of nonorientable genus 2.

4. If $\gamma(G \setminus v) = 0$ and on the Euclidean plane Σ_0 made up a set $M(v)$ of points of a graph G formed from the obstruction graph of a projective plane N_1 by removal of a vertex v and adjacent edges is given by an arbitrary minimal embedding $f: G \setminus v \rightarrow \Sigma_0$ on the boundaries of two cells that have no common points and have end points that does not belong to their borders. Removing an arbitrary point from the set M leads to the failure of relation 4.

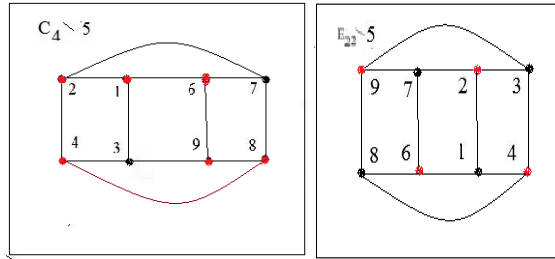


Fig. 4. Illustrates the relation b) of statement 1 of theorem 3.1, where sets $\{1,2,4,5,8,9\}$ for graph $C_4 \setminus 5$, $\{2,4,6,9\}$ for graph $E_{22} \setminus 5$.

Proof. We prove statements 1 of Theorem 3.1. Suppose that for each vertex v of the graph - obstruction G for a projective plane N_1 with the set $M(v)$ of all vertices incident v , there is a subgraph $G \setminus v$ of a nonorientable genus $\gamma(G \setminus v)$. Then we will either $\gamma(G \setminus v) = 1$ have and $G \setminus v$ contain a subgraph or part homeomorphic K_5 , or $K_{3,3}$, or $G \setminus v$ that subgraph does not contain these partial subgraph, where K_5 has two non-isomorphic embeddings in N_1 and $K_{3,3}$ has one non isomorphic embedding in N_1 . Prove the relation a1) relation a) statement 1, namely $\gamma(G \setminus v) = 1$, if, then inequality $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 2$ holds. Using the opposite method, suppose that $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) > 2$, that is, the set $M(v)$ is placed by some minimal embedding f of a graph $G \setminus v$ in N_1 the boundaries of at least three cells of the projective plane, namely s_1, s_2, s_3 . Let the graph G be the ϕ -image of the graph $G \setminus v$ and $St_G(v)$, if the pairs of vertices (v_{1i}, v_{2i}) are identified, where $v_{1i} \in M(v)$, $v_{2i} \in St_G^0(v) \setminus \{v\}$, $i = 1(l) \deg_G(v)$. To continue embedding $f: G \setminus v \rightarrow N_1$ on the graph G , it is necessary and sufficient to attach all the edges of the star and its center to one cell formed of two cells s_1, s_2 , where $\{s_1, s_2\} \subset N_1 \setminus f(G \setminus v)$ whose boundaries have at least one, the common vertex w , where $w \in G^0 \setminus \{v\} \cap \partial s_1 \cap \partial s_2$, and contain the set $M(v)$. To form a single surface cell from these cells s_1, s_2 , we attach on N_1 a Mobius strip L on which we place $f'(N(w))$ by

new embedding $f': G \setminus v \rightarrow N_2$, where $f'(N(w)) \subset L$, $f'|_{G \setminus St^1(v) \setminus N(w)} = f|_{G \setminus St^1(v) \setminus N(w)}$, $N(w)$ is the smallest subset of the set of adjacent edges belonging to the boundary of one or to the boundaries of several cells, which on N_1 at least one side separate the cell s_1 from cells s_2 , $N(w) = N_1(w, s_1, s_2)$. Note that the insertion of an edge adjacent w to the Mobius strip will be to separate some of the inner points of the edge, which it splits into two parts, and to place its copies on diametrically opposite parts of the circle, and the edges will have endpoints of these copies and the boundary of that edge. As a result, we get a cell s_0 where $\partial s_0 = \partial s_1 \cup \partial s_2$, $\{s_0\} \subseteq N_2 \setminus f'(G \setminus St^1(v))$ in which we put vertex v the center of the star and the subset $St^1(v)$ of its rays of edges that terminate as a bundle of straight segments finished on ∂s_0 . Then we will have at least one edge (v, u) , where $u \in \partial s_3 \setminus (\partial s_1 \cup \partial s_2)$ there is no investment $f'(v, u)$ in N_2 , that is $\gamma(G \setminus (v, u)) = 2$. This contradicts the condition that the graph is an obstruction graph of type 2, the assumption is incorrect. Then the assumption is wrong, we will have equality $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 2$.

We prove the relation a2) of the statement 1. We give the graph $G \setminus e$ as an φ -image of the graph $(G \setminus v) \setminus e$ and in the identification of pairs of vertices (v_{1i}, v_{2i}) , where $v_{1i} \in M(v)$, $v_{2i} \in St_G^0(v) \setminus \{v\}$, $i = 1(1) \deg_G(v)$, which satisfies the equality $\gamma(G \setminus e) = 1$, since the graph is an obstruction of nonorientable genus 2. Since $(G \setminus v) \setminus e = (G \setminus e) \setminus v$ and by Theorem 1[5] $\gamma(G \setminus e) \leq \gamma((G \setminus v) \setminus e) + t_{(G \setminus v) \setminus e}(M(v), N_1) - 1$, then we will have inequality $\gamma((G \setminus e) \setminus v) + t_{(G \setminus e) \setminus v}(M(v), N_1) \geq 2$, so deleting an arbitrary edge leads either to a decrease of 1 genus of subgraph $(G \setminus e) \setminus v$ and then $\gamma((G \setminus e) \setminus v) = 0$, or to a decrease in the number $t_{(G \setminus e) \setminus v}(M(v), N_1)$ of reachability by 1 and then $t_{(G \setminus e) \setminus v}(M(v), N_1) = 1$. The materiality of the edges of the subgraph relative to the genus upon removal is proved. We will prove other statements similarly and presented proofs as soon as possible.

2. Klein surface.

Another problem is constructing all non-outer Klein-planar graphs. In [8] a solution to a similar problem of constructing non-Klein surface graphs by the method of relativistic components was presented.

Theorem 3.2. Each graph obstruction H for N_2 -surface of the nonorientable genus 2 satisfies the following statements:

1. An arbitrary edge $u, u = (a, b)$ is placed on the Mobius strip by some minimal embedding of the graph H in N_3 and there is a minimum on inclusion projective-planar subgraph K of the graph or a part of it satisfying the condition: $(t_K(\{a, b\}, N_3) = 1) \wedge (t_{K \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2)$;
2. There is a finite smallest inclusion set of different subgraphs K_i covering the set of edges of a 2-connected graph H , where K is a local projective-planar subgraph or partial subgraph $H \setminus e$ of a graph, homeomorphic $K_5 \setminus e$ or $K_{3,3} \setminus e$;
3. Every 8-vertex graph - obstruction of non-oriented genus 3 is covered by a minimum of 5 or a maximum of 6 subgraphs or parts of a homeomorphic planar graph with sets of points with reachability 2, or projective-planar, or non-projective-planar graphs (possibly without an edge) from the list of 118 non outer projective planar graphs or set of 103 graphs - obstructions of the projective plane [4].

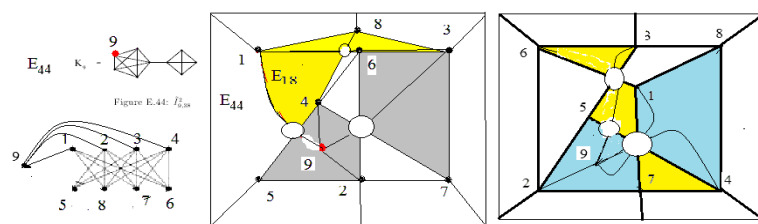


Fig. 4. φ - transformation of the non-outer projective planar graph E_{18} and $St_4(9)$ give non-outer Klein planar graph E_{44}

The use of the φ -transformation of graphs method for the above problems for the projective plane and Klein surface can be generalized to an arbitrary nonorientable surface.

1. Khomenko, M.P.: Topological aspects of graph theory. Institute of Mathematics, Kiev (1971)
2. Khomenko, M.P.: φ - transformation of graphs. Institute of Mathematics, Kiev (1973)
3. Petrenjuk, V.I., Petrenjuk, D.A., Shulenok, I.B.: Upper bound of the orientable genus of amalgamation simple graphs, Theory optimal designs, .69-79, Kyjv (2018)
4. Petrenjuk, V.I., Petrenjuk, D.A.: Upper bound of the nonorientable genus of amalgamation simple graphs. Computer mathematic 1, 10-19. Kyjv (2019)
5. D. Archdeacon, N. Hartsfield, C. H. C. Little, B. Mohar. Obstructions sets for outer-projective -planar graphs. Ars Combinatoria 49, 113-128; (1998)
6. Hur Surkhjin. The kuratowski covering conjecture for graphs of the order less than 10. Dissertation, The Ohio State University (2008).
7. Bojan Mohar, Carsten Thomassen. Graphs on surfaces, Johns Hopkins University Press, (2001)
8. Anna Flutotto. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, Universitat Bielefeldvorgeleg (2010)

6.2. LIST OF NON-OUTER PROJECTIVE PLANAR GRAPHS

The main notations and definitions are taken from [1]. The problem of search all non-outer projective planar graphs has the following two subtasks.

1. Investigate the structure of projective plane graphs, minimal concerning the operation of removal or contraction to a point of an arbitrary edge, with a given set of points, having the number of reachability t , $t = 2$, and is itself or has a subset projective planar graphs and give their graph diagrams indicating the specified subsets of points;
2. Investigate the structure of the glueing graph and the algorithm for constructing no projective planar or non-Klein surface graphs as φ -images of a small number of special graphs. Their special graphs are elements of the set of minimums relative to the number of reachability 2 for a given Klein surface or projective plane, having a reachability number of 2 and are minimal relative to the reachability number in the operation of removing an arbitrary point.

The solution of subtask 1 is to construct all minimal non-outer projective planar graphs solved in [2] by searching all different options for deleting one of the vertices of the projective planar minor graph and selecting no isomorphic graphs of nonorientable genus 1. The idea of construction is similar to how minimally non-planar projective graphs K_5 or $K_{3,3}$ are formed from minimal non-outer planar graphs K_4 or $K_{2,3}$ by glueing a simple star $St(v)$ to the minimum power subsets of points of graphs K_4 or $K_{2,3}$ with the number reachability 2. According to subtask 1, the obtained theoretical results are presented in part 1, and in part 2 the algorithm and diagrams of graphs constructed by it are given.

Subtask 2 is to identify the minimum subset of points in the minimum non-projective planar or minimal non-Klein planar graphs with a given number of reachability 2 and the nature of their bonding for another construction of non-projective planar or construction of all non-Klein surface minor graphs. A similar problem was solved in [3], where the coverage of non-projective planar or non-Klein surface graphs G with the number of vertices not more than 10 as obstructions of the nonorientable genus $\gamma(G)$ by subgraphs homeomorphic to K_5 or $K_{3,3}$. Pairs of which inform subgraphs homeomorphic to obstructions of the nonorientable genus is associated in [3] for nonorientable surfaces of the genus not more than 5, and for the torus also has the specified coating. However, in [4, p. 203] a counterexample is given. In [5] the solution of a similar problem of construction of non-projective plane graphs by the method of relative components is given. Some results on the analogue of this task were given in [8]. The list of non-outer projective planar graphs has presented here.

Definition 1. For a given embedding f , $f:G \rightarrow S$, a graph G in S and a given set of points X , $X \subset G^0 \cup G^1$ determine $t_G(X, S, f)$, $t = t_G(X, S, f)$, the number of reachability of the set X relative to S , if there is a set $S_G(X)$, $S_G(X) = S \setminus f(G)$, which satisfies the condition: $(f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^t \partial s_i \cap X) \wedge (f(X) \not\subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^t \partial s_i \cap X), j=1, 2, \dots, t$. We say that the set X has a reachability number t , $t_G(X, S) = t$, relative to S , if among all no isomorphic embedding's f , $f:G \rightarrow S$, the number t is the smallest among the numbers $t_G(X, S, f)$. We consider further the set X of points of the graph G t -non-planar concerning the surface S , or (t, S) -non-planar, if $t \geq 2$, where

$t_G(X, S) = t$. If $t = 2$, S is a projective plane, and the set X is the set of vertices of the graph G , $X = G^0$, then we will call the graph G non-outer projective planar. **A graph G is outer-projective-planar if embeds on the projective-plane with all vertices on the boundary of one distinguished cell.**

Definition 2. Suppose the embedding f , $f: G \rightarrow S$, of the graph G in the surface S , which implements t , $t_G(X, S) = t$, where $S_G(X) = S \setminus f(G)$ $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$. We will say that concerning a given surface S the set X will have the characteristic $\theta_G(X, S, f)$, $\theta_G(X, S, f) = \theta$, $\theta \geq 1$, if there are θ three cells $\{s_i\}_1^3$ from the set $S_G(X)$, on the boundaries of which the subsets X_i , $X_i \subseteq X$, are placed arbitrarily and satisfy the relation:

$G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\} \wedge G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\} \wedge G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$, and generates the smallest subgraph G' of the graph G , (possibly degenerate), contains the points $\{a_i\}_1^3$ of pairwise intersection of cell boundaries $\{s_i\}_1^3$. The set X will have the θ -characteristic $\theta_G(X)$ if $\theta_G(X) = \max \theta_G(X, f)$, where the maximum is taken for all embedding's $f: G \rightarrow S$, realizing $t_G(X, f) = t$ and $\theta = \theta_G(X, f)$.

Main results

The mathematical base for the algorithm

Theorem 2.1. The graph G is non-outer projective planar if and only if then $G = H \setminus v$, where v is a vertex of graph-obstruction H of the projective plane N_1 .

Theorem 2.2.[9]. For an arbitrary graph - obstruction G of the projective plane N_1 and each of its vertices v with the set $M(v)$ of all vertices of the incident occurred the following statements:

1. For the subgraph $G \setminus v$ of the nonorientable genus, the following relations will take place:

a) If $\gamma(G \setminus v) = 1$, then we have the following relations a1) and one of a2) or a3):

a1) $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 2$, wherein the set $M(v)$ belongs to the boundaries $\partial s_1, \partial s_2$ of two cells s_1, s_2 of the projective plane having at least one common vertex;

a2) each edge of the subgraph $G \setminus v$ is significant in relation to a genus $\gamma(G \setminus v)$ with respect to removing the edge or compressing it in point;

a3) each edge of a subgraph $G \setminus v$ is significant with respect to the removal or compression operations of an edge;

b) If $\gamma(G \setminus v) = 0$ then, one of the following two relationships will occur:

b1) $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 3$ and the set $M(v)$ is located on the boundaries of three cells s_1, s_2, s_3 of the projective plane satisfying the relation $\partial s_3 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \neq \emptyset$, each edge of the subgraph $G \setminus v$ being significant relative $t_{G \setminus v}(M(v), N_1)$ to the operations of removing the edge or compressing it to a point, and each point w of the set $M(v)$ satisfies equality $t_{G \setminus v}(M(v) \setminus \{w\}, N_1) = t_{G \setminus v}(M(v), N_1) - 1$;

b2) $t_{G \setminus v}(M(v), \Sigma_0) = 2$, where $t_{G \setminus v}(M(v), \Sigma_0)$ is the number of reachability of the set $M(v)$ relative to the Euclidean plane Σ_0 , is realized by minimal embedding $f: (G \setminus v) \rightarrow \Sigma_0$ at the boundaries $\partial s_1, \partial s_2$ of the cells s_1, s_2 , where $\{s_1, s_2\} \subset \Sigma_0 \setminus f(G \setminus v)$. Satisfies equality $\partial s_1 \cap \partial s_2 = \emptyset$, which is, separated by a ring from the cells, then

relative to the projective plane. The set $M(v)$ will have a number of reachability $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 2$, with each point w of the set $M(v)$ satisfies equality $t_{G \setminus v}(M(v) \setminus \{w\}, N_1) = t_{G \setminus v}(M(v), N_1)$ and the set $f(M(v) \setminus \{w\})$ by some embedding $f': G \setminus v \rightarrow N_1$ is placed at the boundaries $\partial s'_1, \partial s'_2$ of two cells s'_1, s'_2 having at least one common point where $\{s'_1, s'_2\} \subset \Sigma_0 \setminus f'(G \setminus v)$, and equality $\partial s'_1 \cap \partial s'_2 \neq \emptyset$ is satisfied.

2. Each minor G of the nonorientable genus 2 (except G_3, E_1, G_4) is covered by a maximum of 4 (e.g., graphs A_2, G_1) subgraphs or parts homeomorphic to one of the following graphs: $K_{2,3}, K_4, K_5 \setminus e, K_{3,3} \setminus e, K_5, K_{3,3}$. The number of reachability 2 relatively Klein surface N_2 for the set of vertices (for $G \in \{G_3, E_1, G_4\}$ we have), and for each removed edge e the graph $G \setminus e$ will have at N_1 the number of reachability equals 2 for the set of vertices;

3. The presence of the coating specified in statement 2 is not sufficient to make the graph an obstruction of nonorientable genus 2.

4. If $\gamma(G \setminus v) = 0$ and on the Euclidean plane Σ_0 made up a set $M(v)$ of points of a graph G formed from the obstruction graph of a projective plane N_1 by removal of a vertex v and adjacent edges. If is given by an arbitrary minimal embedding $f: G \setminus v \rightarrow \Sigma_0$ on the boundaries of two cells that have no common points and have endpoints that do not belong to their borders. Removing an arbitrary point from the set M leads to the failure of relation 4.

Algorithm

The construction of all no isomorphic non-outer projective plane graphs based on the results of the following polynomial algorithm 1:

Begin of Algorithm 1.

Input: The set P of 35 minors P_i of the projective plane N_1 with the sets of numbered vertices, which for each graph P_i is divided into equivalence classes l_{ij} with respect to the transitivity of its vertices,

where $P_i^0 = \sum_{j=1}^{n_i} l_{ij}, n_i \leq |P_i^0|$.

Output: List X of all no isomorphic graphs.

$X := \emptyset;$

$v := 0;$

// where P_0 is the current graph of the order $|P_0|$ with the selected vertex, which is a representative of the transitivity class l_{0j} of its vertices.//

For $i=1$ step 1 to 35, do these steps:

begin //cycle action on i .

$P_0 := P_i;$

$v := v_{i1};$

procedure $A(P_0, \Pi_0, P_0^0, N_2)$;

// Procedure $A(P_0, \Pi_0, P_0^0, N_2)$; Construct the embedding of the graph G in the surface S (projective plane N_1 or Klein bottle N_2) and determine the cells of the graph at the boundaries of which is a given subset M of the set of vertices of the graph G with which the incident vertex v //;

Output $(P_0, \sum_{j=1}^{n_i} l_{ij})$ in X ;

For $k = 2$ step 1 to $|P_0|$, do these steps:

begin

If $v \approx v_{ik}$ then go to the end of the cycle by k ;

// that is, the vertices belong to the same class of transitivity; /

else $P_0 := P_i \setminus v$; // remove the vertex v and all adjacent edges; /

$\Pi_0 := \Pi_i$;

$L := \text{Function } B(P_0, X)$;

If $L == \text{true}$ // graph $P_i \setminus v$ no isomorphic to any of the graphs in the list X //

then do:

begin;

$M := \{\forall u | (u, v) \in P_0^1\}$;

If $K(G) == 1$ // the graph $P_i \setminus v$ contains a subgraph of Kuratowsky //

then do

begin;

procedure $A(P_0, \Pi_0, M, N_1)$;

output (Π_0, M) in X ;

end;

else do

begin;

procedure $A(P_0, \Pi_0, M, \Sigma_0)$;

output (Π_0, M) in X ;

end;

end; // of cycle by k ;

end; // of cycle on i ;

End of Algorithm 1.

Procedure $A(G, \Pi, M, S)$ do the following:

// Must construct the embedding Π of a graph G (without vertices of degree 2) with a given number of vertices in the surface S (Euclidean plane, projective plane or Klein surface) and determine the cells on the boundaries of which are the set of vertices M //.

If a graph G has a subgraph or part of the graph H is homeomorphic K_5 or $K_{3,3}$, then we construct embedding's of these graphs in the projective plane, otherwise, we attach a graph to the Euclidean plane Σ_0 . In nested graphs K_5 or $K_{3,3}$ a projective plane, there are cells $s_5, s_{3,3}$ with the following boundaries: ∂s_5 - a cycle of length 5 and 5 triangles for K_5 , or $\partial s_{3,3}$ - a cycle of length 6 and 4 quadrilaterals for $K_{3,3}$, in which we will embed stars with centres taken from a subset $G^0 \setminus H^0$.

First of all, we will put all these stars in cells with either cycle boundaries of length 5 for or length 6 for and try to use no more than one additional Mobius strip glued to the cells ∂s_5 or $\partial s_{3,3}$. The number of vertices $|G^0|$ of the obstruction graph of the projective plane is at least 12. The number of options for the location of the centres and edges of stars, not more than 7 stars, is equal r^7 because each centre of the star does not belong to two cells, where r the number of cells of the graph embedded in the projective plane $r = 6$ for K_5 , $r = 5$ for $K_{3,3}$.

The time complexity of procedure $A(G, \Pi, M, S)$ is proportional $O(r^7)$.

The function $K(G)$ will determine the presence or absence of a graph G of a subgraph or part of a homeomorphic K_5 or $K_{3,3}$ and will give it out. To do this, we need to examine the complement of the \bar{G} graph G for the presence of a subgraph of five isolated vertices, i.e. \bar{K}_5 , or two triangles without common vertices, i.e. $2K_3$. If such subgraphs of the graph are detected, the function $K(G)$ will give 1 and return to algorithm 1 the found vertices as vertices of the graph K_5 or $K_{3,3}$. In the absence case $\bar{K}_5, 2K_3$ the function $K(G)$ will give 0.

The function $B(P_0, X,)$ checks for the presence of an isomorphism of a graph P_0 with another element of the set of graphs X and will have polynomial complexity [7].

Data analysis of work of algorithm

The output data of algorithm 1 is described in figures 1, 2, 3, 4, 5, 6. The analysis of output data of algorithm 1 in the next corollaries.

Corollary 2.1. The correctness of algorithm 1 will follow from Theorem 2.1 and Theorem 2.2. [9] .

Corollary 2.2. The next 78 non-outer projective planar graphs have number reachability of their set of vertices equal 2:

1. There are 16 graphs with genus 0: $E_{20} \setminus 8, E_{22} \setminus 5; F_1 \setminus 1, F_1 \setminus 2, F_1 \setminus 3, E_2 \setminus 6, D_{17} \setminus 6, C_4 \setminus 5$ (has another set of glueing red vertexes to endpoints of $St_6(5)$ then $E_{22} \setminus 5$), $D_3 \setminus 2, D_3 \setminus 4, D_2 \setminus 4, A_2 \setminus 4, B_1 \setminus 4, B_3 \setminus 1, B_7 \setminus 4, C_3 \setminus 4$.

2. There are 62 graphs with nonorientable genus 1 as:

$F_6 \setminus 2, F_6 \setminus 3, G_1 \setminus 5, E_{19} \setminus 2, E_{20} \setminus 9, E_{22} \setminus 1, E_{22} \setminus 2, E_{27} \setminus 3, E_{27} \setminus 7, F_1 \setminus 9, E_2 \setminus 1, E_2 \setminus 5, F_1 \setminus 8, E_2 \setminus 8, A_1 \setminus 2, E_5 \setminus 1, E_5 \setminus 2, E_6 \setminus 1, E_6 \setminus 2, E_6 \setminus 7, E_{11} \setminus 1, E_{11} \setminus 5, E_{11} \setminus 6, E_{11} \setminus 8, E_{18} \setminus 2, E_{18} \setminus 1$ (is subgraph of $E_{18} \setminus 2$), $D_4 \setminus 1, D_4 \setminus 5, D_4 \setminus 7, D_9 \setminus 4, D_{12} \setminus 6, D_{12} \setminus 8, C_4 \setminus 1, C_4 \setminus 2, C_7 \setminus 2, D_3 \setminus 1, D_3 \setminus 6, D_3 \setminus 8, D_2 \setminus 1, D_2 \setminus 2, D_2 \setminus 5, A_2 \setminus 6, E_1 \setminus 8, E_1 \setminus 1, E_2 \setminus 1, B_1 \setminus 6, B_3 \setminus 5, B_7 \setminus 1, B_7 \setminus 2, B_7 \setminus 6, B_7 \setminus 3, B_7 \setminus 5, B_7 \setminus 7, C_1 \setminus 8, C_1 \setminus 5, C_1 \setminus 1, C_2 \setminus 3, C_3 \setminus 5, C_3 \setminus 1, C_3 \setminus 2, C_3 \setminus 5, C_3 \setminus 7$.

Corollary 2.3. The next 41 non-outer projective planar graphs with genus 0 have number reachability of their set of vertices equal 3 and:

a) θ - characteristic equal 1: $F_6 \setminus 1, F_6 \setminus 4, G_1 \setminus 3, E_{19} \setminus 1, E_{19} \setminus 5, E_{19} \setminus 6, E_{20} \setminus 7, E_{20} \setminus 1, E_{20} \setminus 8, E_{22} \setminus 2$ (for red vertexes only), $E_{27} \setminus 2, E_{27} \setminus 6, F_1 \setminus 5, E_2 \setminus 2, E_2 \setminus 4, E_2 \setminus 6, E_2 \setminus 10, E_3 \setminus 1, E_5 \setminus 2, E_6 \setminus 5, E_{11} \setminus 2, E_{11} \setminus 7, D_4 \setminus 3, D_4 \setminus 6, D_9 \setminus 1, D_9 \setminus 5, D_{12} \setminus 2, D_{12} \setminus 5, C_7 \setminus 1, C_7 \setminus 3, D_4 \setminus 5, D_2 \setminus 8, D_{17} \setminus 6, E_2 \setminus 4, E_2 \setminus 2, B_7 \setminus 8, C_2 \setminus 2, C_3 \setminus 9$.

b) θ - characteristic equal 0: $A_1 \setminus 1, C_4 \setminus 3, E_1 \setminus 6$.

Corollary 2.4. The next 11 non-outer projective planar graphs with genus 1 have number reachability of their set of vertices equal 3 and θ -characteristic equal 1: $E_{27} \setminus 5, E_{27} \setminus 9, F_6 \setminus 3, E_3 \setminus 7, E_{11} \setminus 3, E_{11} \setminus 4, D_9 \setminus 2, D_{12} \setminus 3, D_4 \setminus 10, D_4 \setminus 6, C_2 \setminus 9$.

Graphs.

On the following figures 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 is presented the result of algorithm 1.

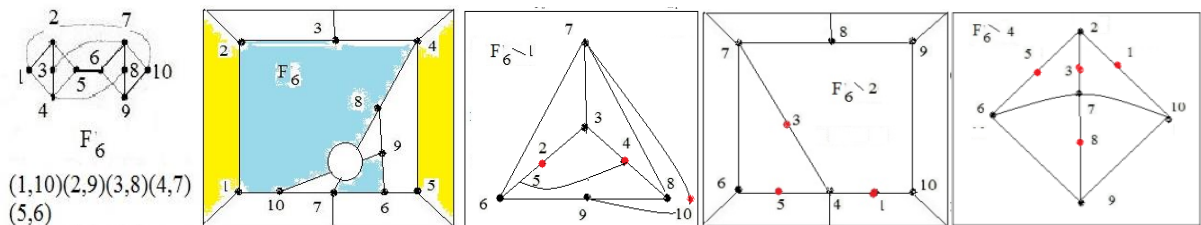


Fig. 4

Структура графів на поверхнях. III

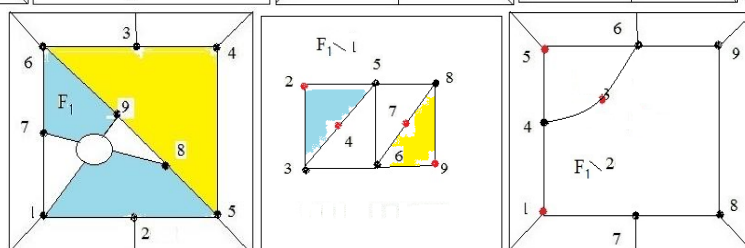
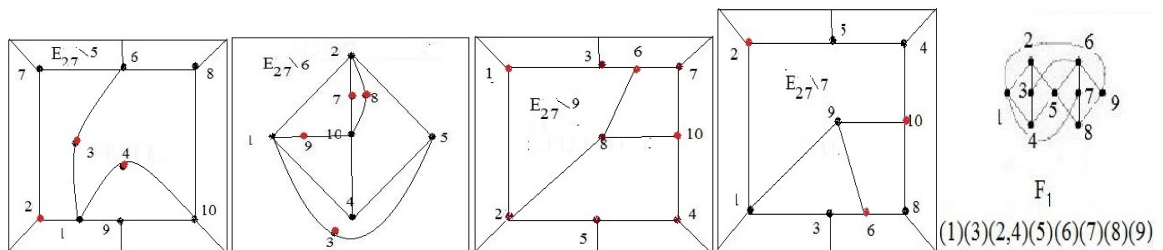
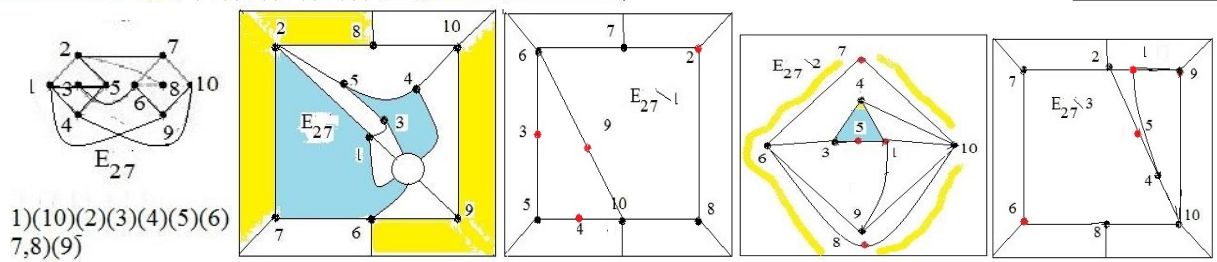
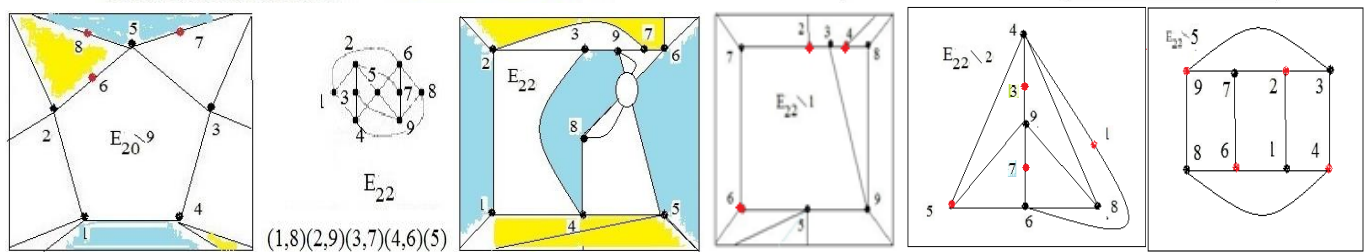
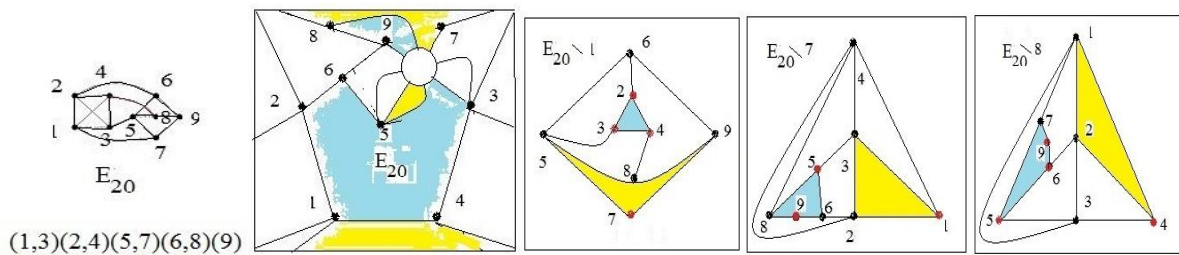
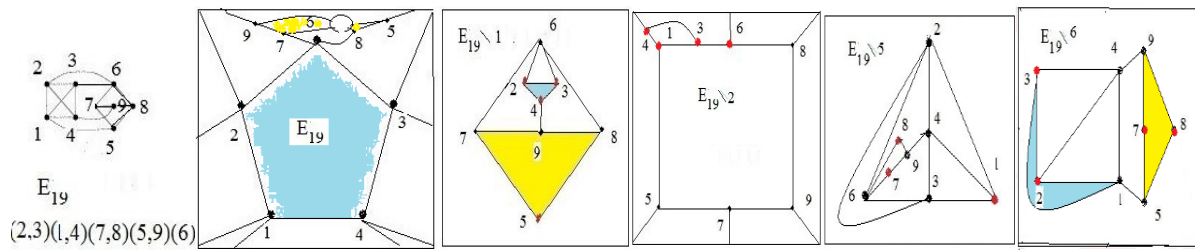
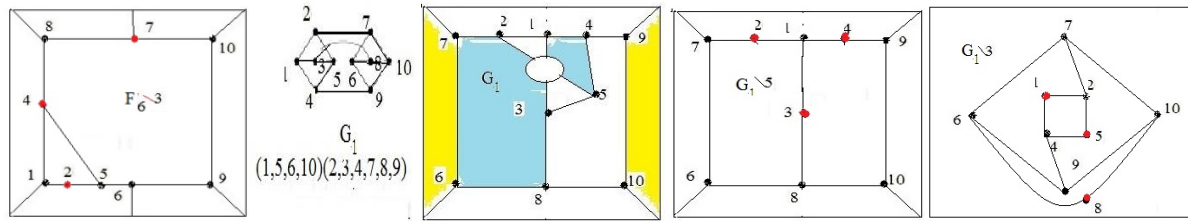
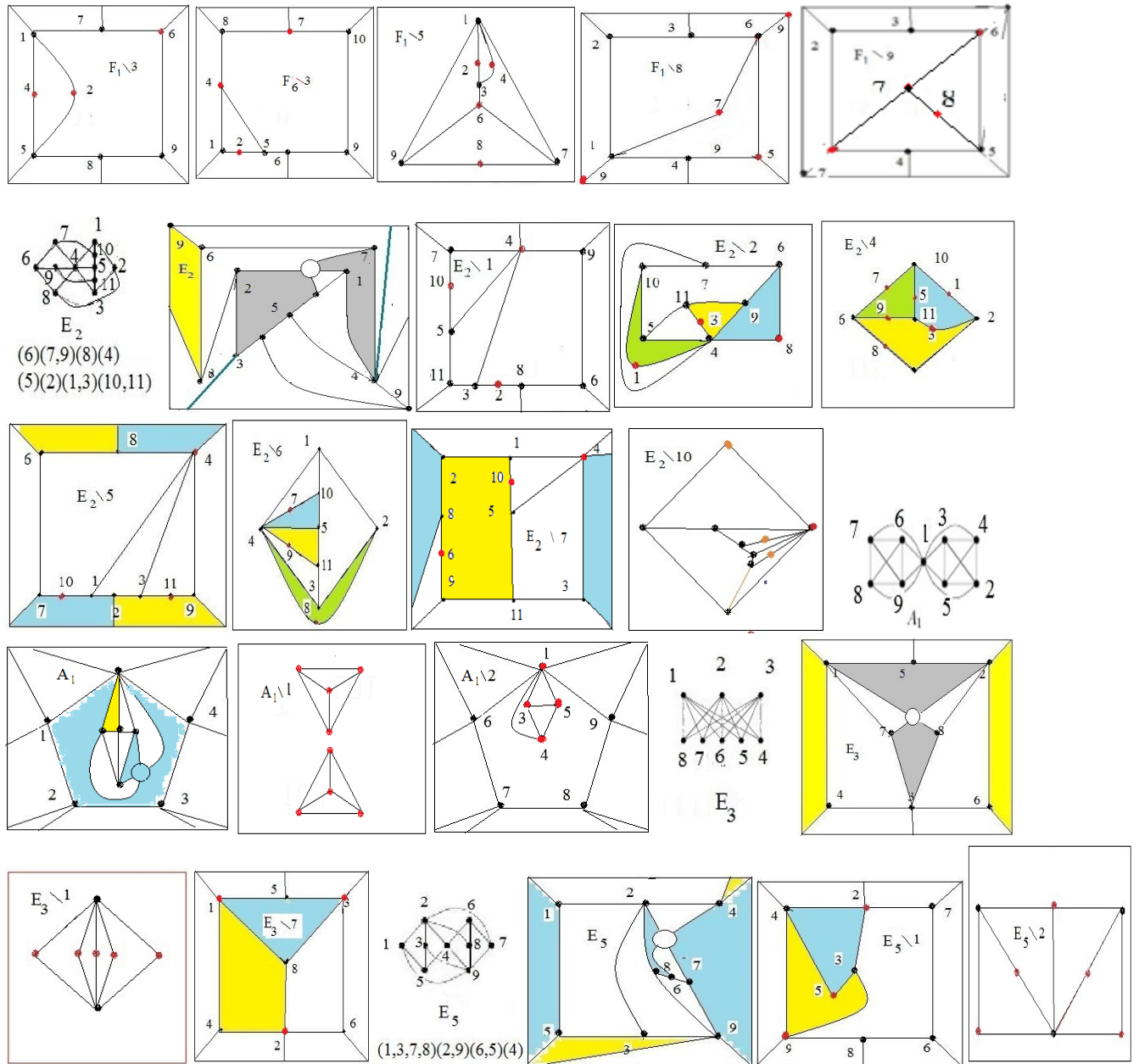


Fig. 2



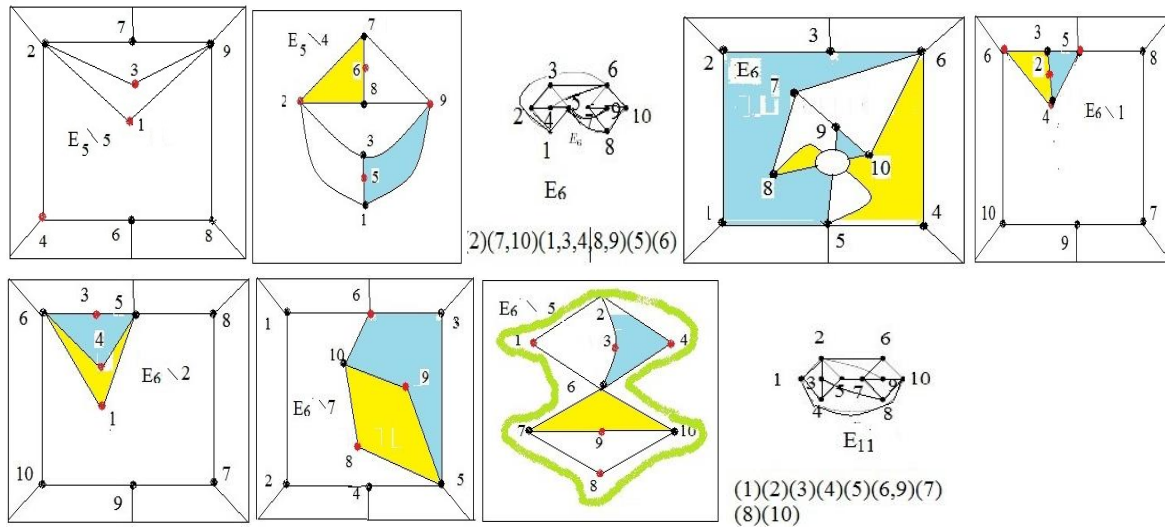
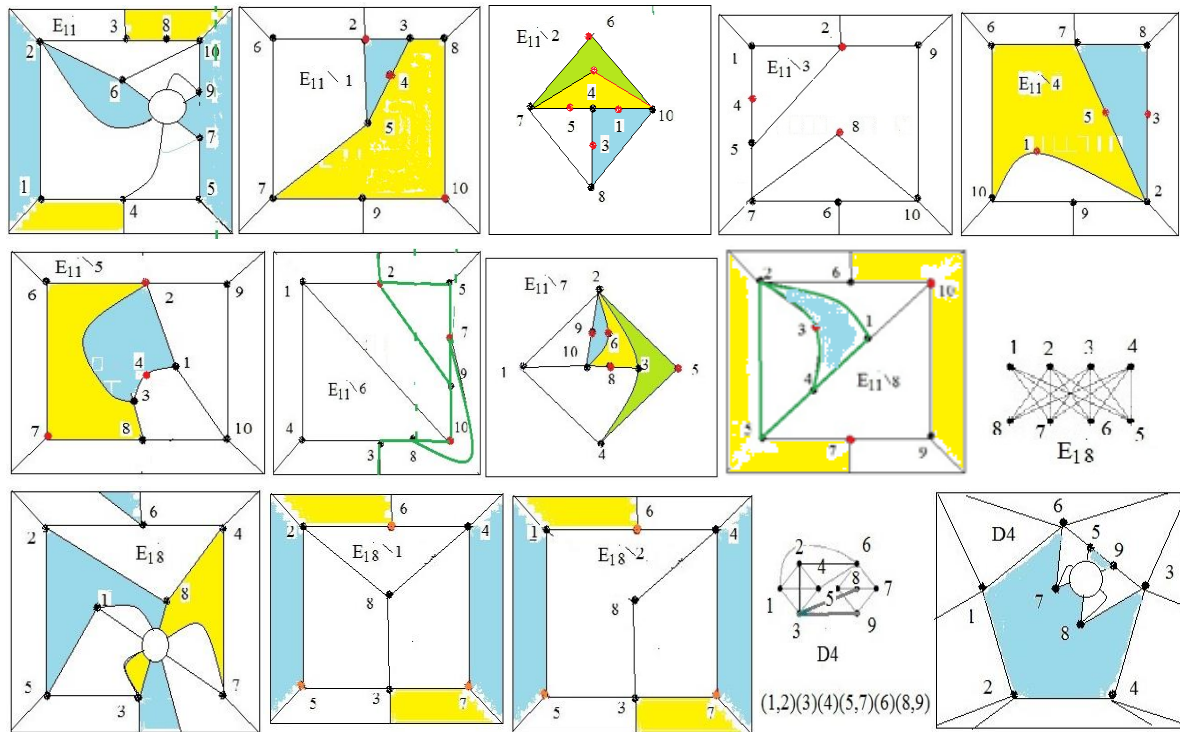


Fig. 3



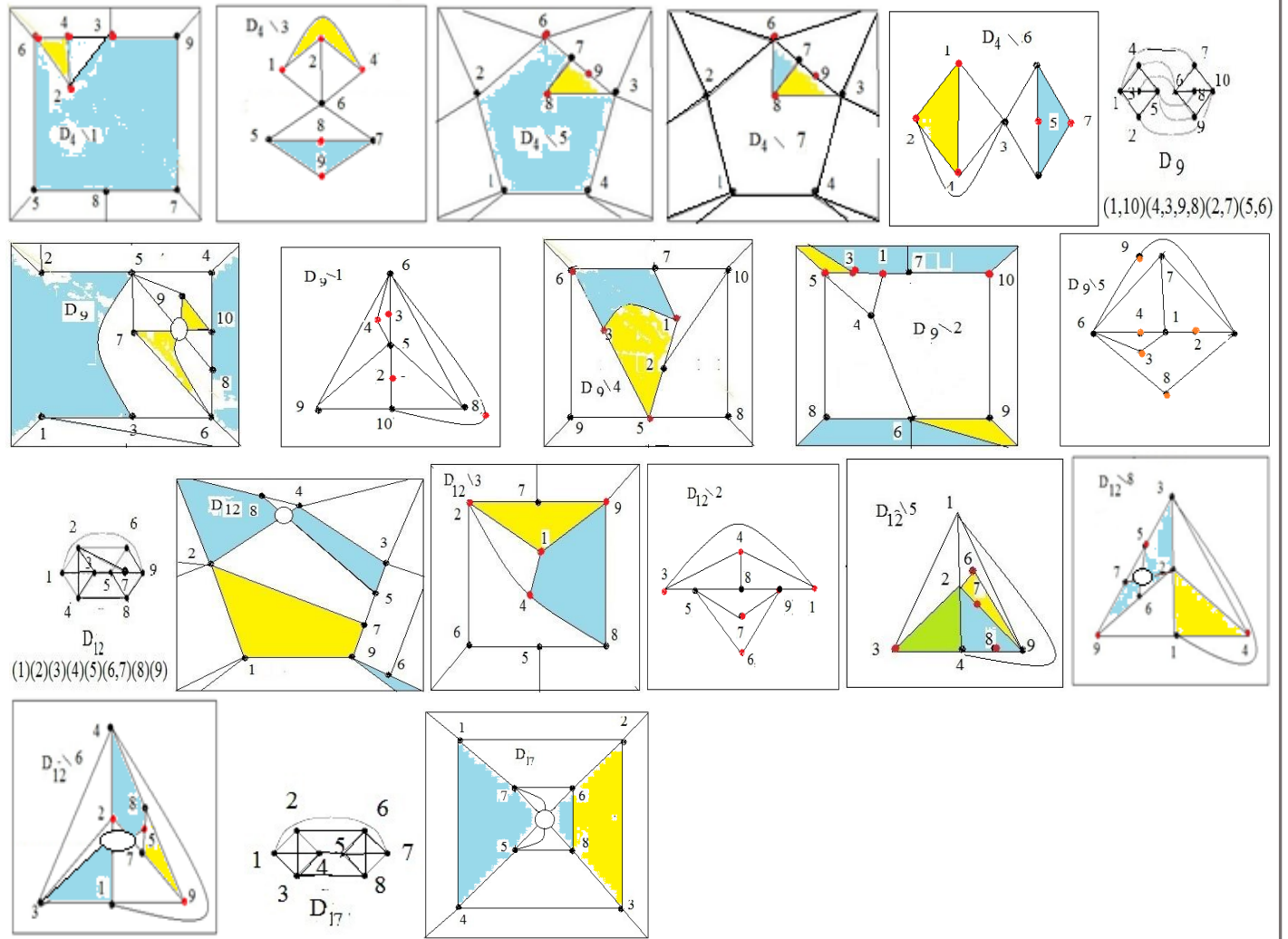
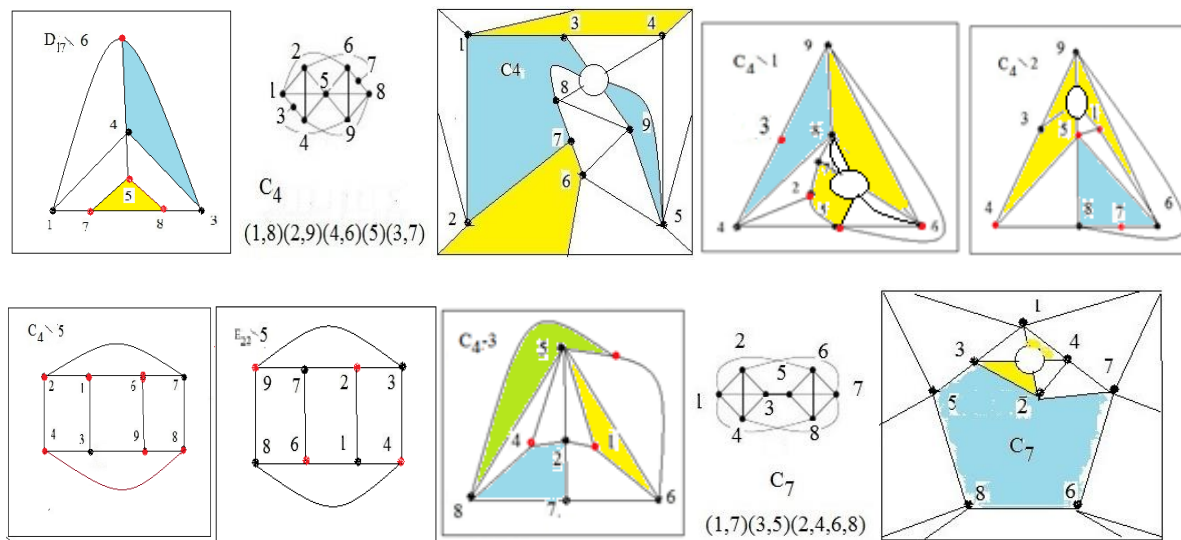


Fig. 4



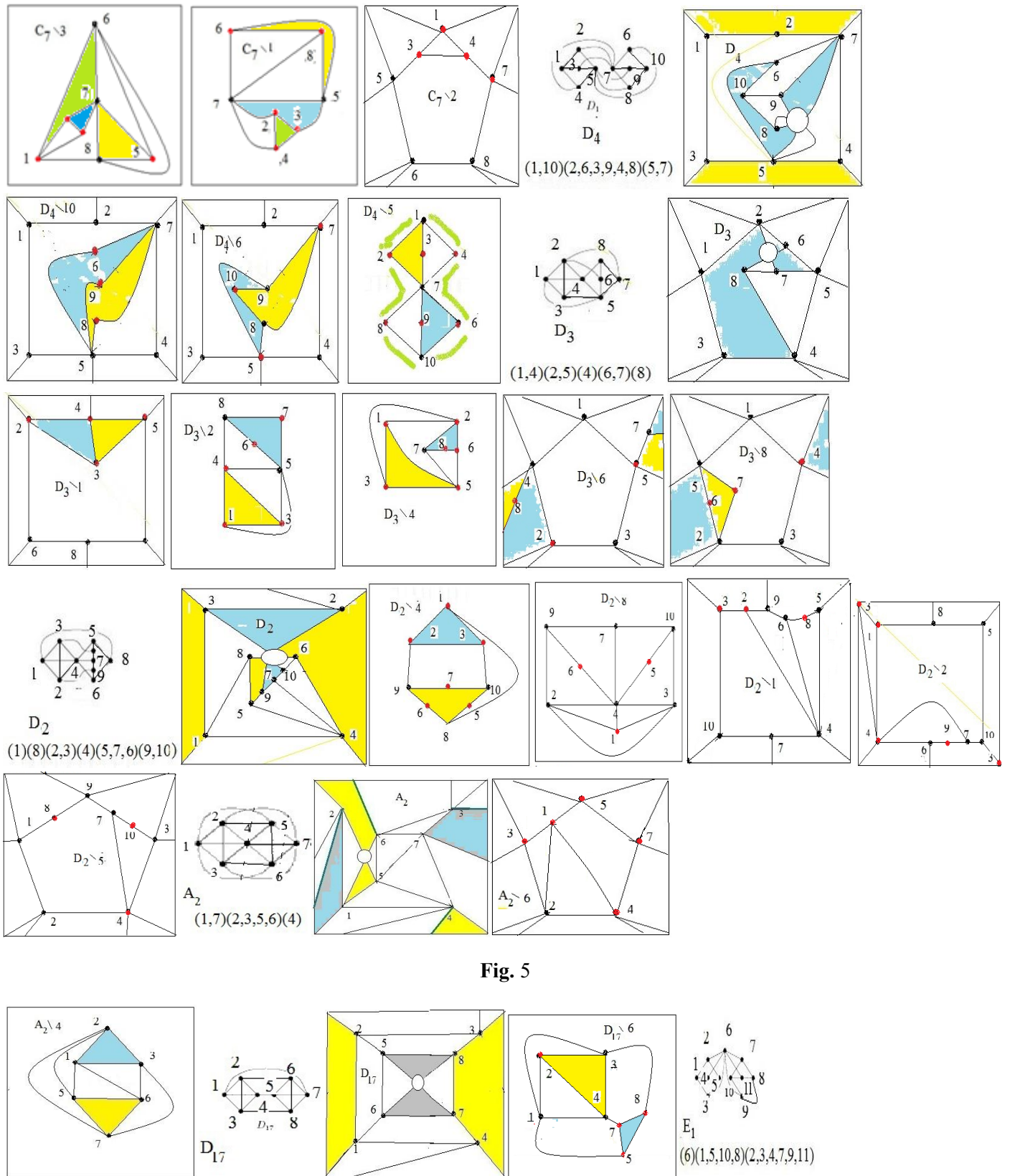


Fig. 5

Структура графів на поверхнях. III

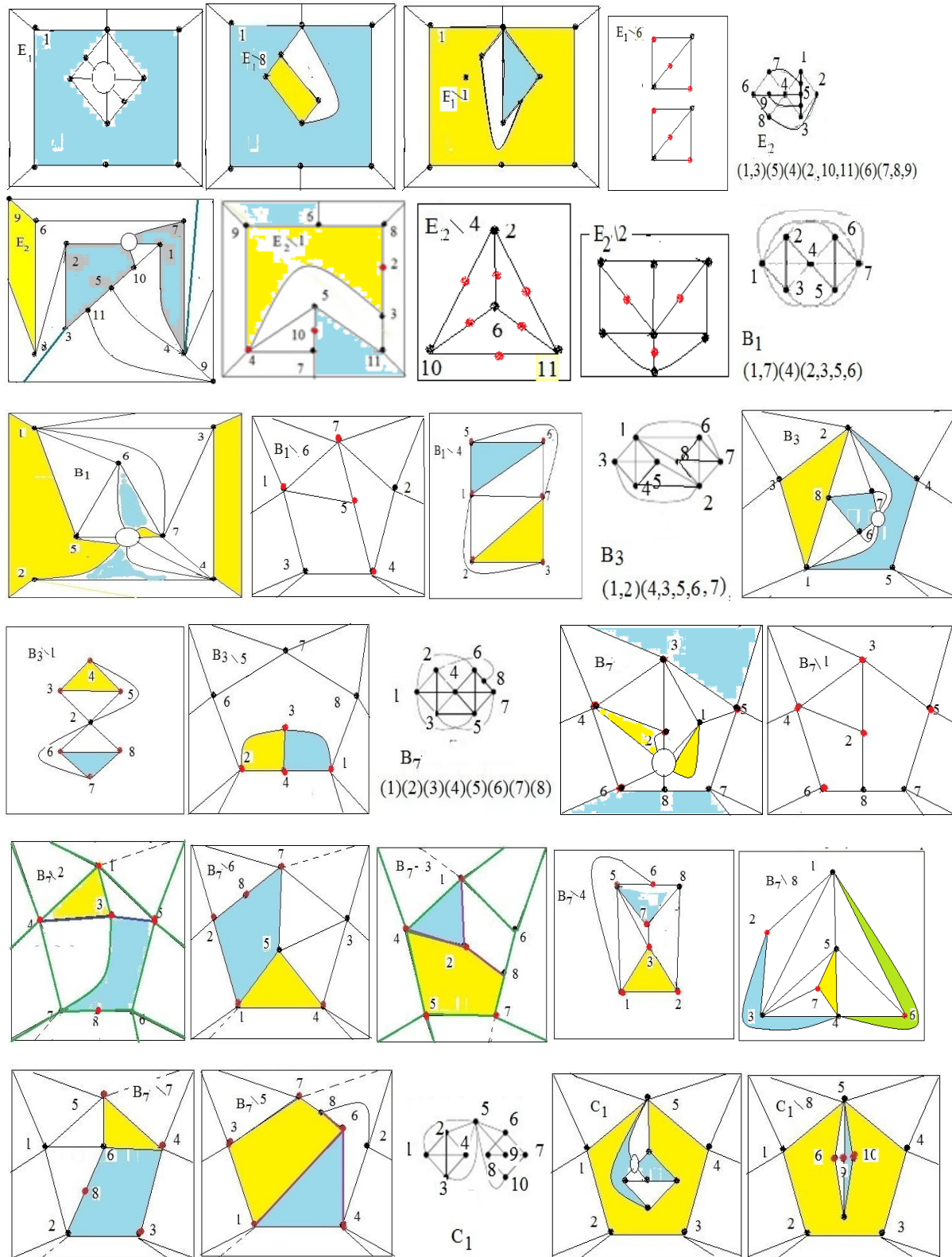


Fig. 6

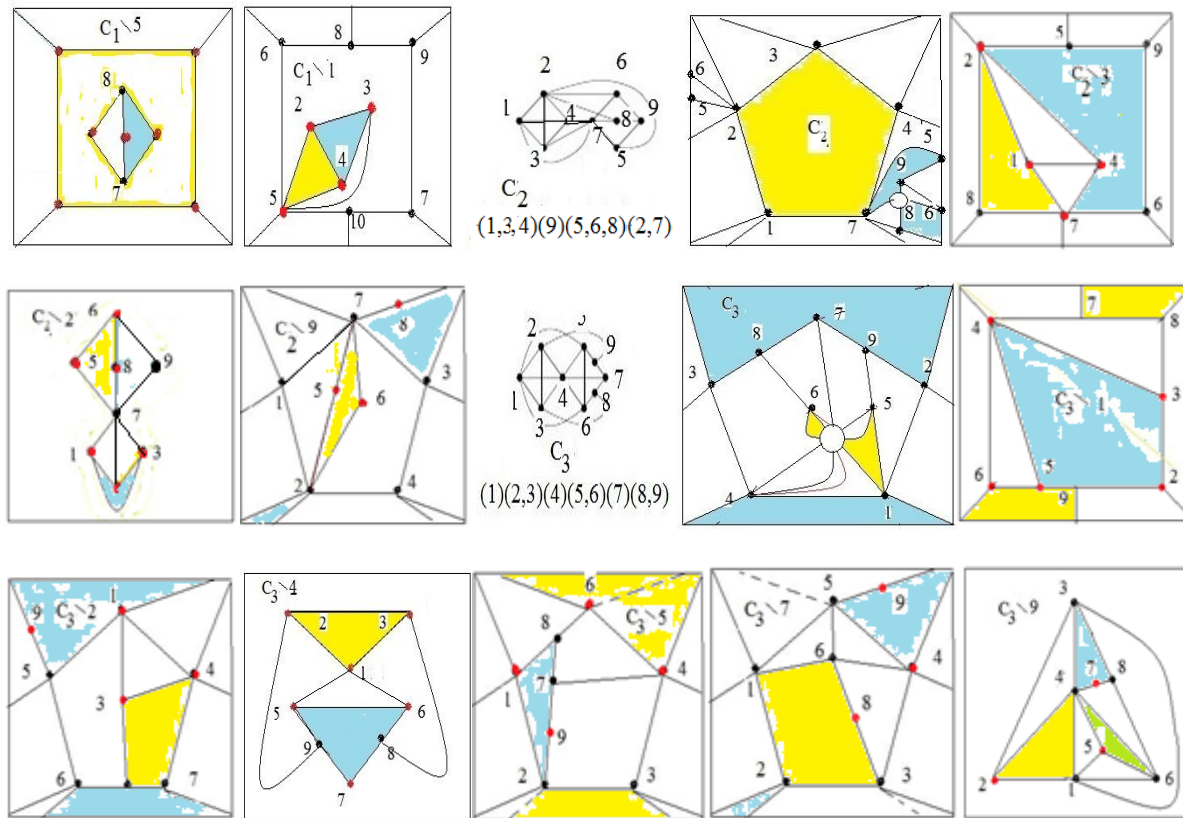


Fig. 7

References

- [1] Khomenko. M.P. φ - transformation of graphs. Institute of Mathematics, Kyiv (1973)
- [2] D. Archdeacon, N. Hartsfield, C. H. C. Little, B. Mohar. Obstructions sets for outer-projective -planar graphs. *Ars Combinatoria* 49, 113-128; (1998)
- [3] Hur Surkhjin. The Kuratowski covering conjecture for graphs of the order less than 10. Dissertation, The Ohio State University (2008)
https://etd.ohiolink.edu/rws_etd/send_file/send?accession=osu1209141894&disposition=inline
- [4] Bojan Mohar, Carsten Thomassen. *Graphs on surfaces*, Johns Hopkins University Press, (2001)
- [5] Anna Flütotto. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, Universität Bielefeldvorgeleg (2010)
- [6] V.Petrenjuk. About Transformation graphs as a tool for investigation. Proceedings of the 4th International Conference on Computational Linguistics and Intelligent Systems (COLINS 2020). Volume I: Main Conference Lviv, Ukraine, April 23-24, 2020,1309-1319
<http://ceur-ws.org/Vol-2604/>
- [7] LEDA: A library of efficient data types and algorithms, Max Planck Institute for Computer Science. <http://www.mpi-sb.mpg.de/LEDA/>
- [8] K. Scott. Outermobius and cylindrical graphs. Senior Thesis, Princeton University, 1997.

6.3. APPLICATION TREND THROUGH PLANAR 3-MINIMAL & PROJECTIVE PLANAR 2-MINIMAL GRAPHS

Let's solve the problem of analysis of a complex system synthesized from the studied simpler substructures in general and their application in computer sciences. We offer a theoretical-graph approach as a way of machine thinking or operating with artificial images-structures. It is known that there are mathematical methods by which large systems as structures are considered through a set of small and simple substructures, which may have some common parts that can be identified in the construction or reconstruction of the whole structure from a finite number of substructures.

The main tool is the φ -method of creating a graph model obtained in the form of a pair of finite sets: sets of vertices and sets of edges to determine the relationships between the structure of vertices as objects. An example of this is the transformation of the main problems of system programming into problems of graph theory with the mathematical support of algorithms.

The main idea of the method of φ -transformation can be interpreted as a way of inheriting a certain property of substructures in the whole structure depending on the properties of the connection (identification of given parts of pair of substructures).

Task. To demonstrate the possibilities of this method for the constructing of the set of all nonisomorphic 3-minimal plane graphs in which the set of all vertices is located on the boundaries of three 2-cells and constructing the set of all nonisomorphic 2-minimal projective-planar graphs in which the fixed set of points is located on the two boundaries 2-cell or pseudosells.

The solution to our task was based on the method of graph transformations, whose founder is M.P. Khomenko, and the concepts he introduced. The recognition of φ -transformations of graphs was taken from [1].

The structural properties of a complex system model presented in the form of a graph model can be studied using a simple graph G with a fixed set of points embedded in the surface on which the edges of the graph will be located, where S is the Euclidean plane or projective plane. The point is either vertex G , or the inner point of the graph of edges G . Let us consider the connected simple graph G , $G = (G^0, G^1)$, where G^0 is the set of vertices and G^1 is the set of edges without multiple edges and without loops as its 2-cell minimal embedding in the surface S . The property of minimality of the model graph over S will be that the graph G with the edge removed or the edge compressed into a point will have changed the specified numerical measure of the fixed set of points of the graph G . For example, model G such a property outer-planarity of the set of all vertices which located on the boundary of one cell is the presence of subgraphs homeomorphic to K_4 or $K_{2,3}$.

This result will be useful in the systematic analysis of both graph models and their topological aspect which will have common properties at the edges and vertices of the graph model.

The cylindrical graphs were introduced in [2]. There was investigated from the point of view of their external-planarity and a complete list of 38 graphs characterized by non-cylindrical graphs as minor ones were obtained.

Results: 1) The algorithm and the list of 3-minimal graphs, namely their characterization by the method of φ -transformation of graphs, was given in [3], the list of 32 3-minimal graphs is given in [4]. 2) The algorithm and the list of 34 2-minimal projective planar graphs with a fixed set of points of this graph's nonorientable genera 0 or 1 are presented here.

Application trend. An example of a possible application is the set of points placement problems or automatic control with subsequent access to its points. If we talk about the surface as an almost infinite set of values of the function of several variables on a given finite subset as a set of vertices whose relationship between pairs of elements as a set of edges, we have an almost embedded graph in the surface. If it is possible to set edges as an almost infinite subset of points and in the absence of intersection of edges in infinite vertices of edges, we will have an almost exact embedding of the graph in the surface. If the surface is spherical or resembles some extent a plane without holes, then use the following list of 3-minimal graphs to place on the boundaries of three cells of all vertices of the graph. If the surface is a sphere with a hole or to some extent resembles a plane of holes, then we use the following list of 2-minimal projective planar graphs to place on the boundaries of two cells of a given set of vertices of the graph.

3-Minimal planar graphs and non-cylindrical graphs.

According to [3] we will consider a simple graph G to be a planar graph having the following properties: 1) three 2-cells at the borders of which all vertices of the graph G are located, 2) removal of any edge or its pinching into the point of this edge leads to the destruction of property 1).

According to [2] we define a non-cylindrical graph NCG as a flat-integrated graph NCG having more than two 2-cells of the cylindrical graph on their boundaries where all the vertices of NCG are located. Whereas removal of any edge of graph NCG or squeezing the point of this edge leads to the distribution of all the graph vertices on the boundaries of two 2-cells of the cylindrical graph.

Problem. Let us study the identity of non-cylindrical and 3-minimal dense graphs and compare the graphs from the given lists in figure 1 with the list [2] and the modified algorithm of building all 3-minimal planar graphs.

History of the problem. In [7] there is a short review of works on this problem and the similar problems of shunting of the lists of graphs which would play a role of non-conserved (with the accuracy to homeomorphism) subgraphs for the input graphs, which are checked for the presence of an analogous "external planarity" property for some surfaces.

We have the following relation for the planar graphs:

Proposition 1. All graphs from the list [4] are in the list [2], non-cylindrical and 3-minimal graphs are equivalent, and graphs θ_6 , θ_7 , K_5 , $K_{3,3}$ from the list [2], are absent in the list [4].

We consider the modification of algorithm [4] for constructing three-minimal planar graphs, which was based on the inexact result of characterization of planar graphs with all significant edges with respect to the number of an auxiliary multiplicity of vertices equal to 3 at the operation of removing the remaining edge. The main idea is that such graphs have at least one homeomorphic graph subgraph and at most three such graphs; it is necessary to define the nature and possible variants of combining them.

The mathematical base for constructing 3-minimal planar graphs.

Theorem 1. If the connected planar graph G has the following condition $(\forall u)(u \in G^1)(t_{G^u}(G^0) = t_G(G^0) - 1 = 2)$, then one of the following propositions holds:

1) $G = K_4'$. The graph K_4' is a graph K_4 in which each edge is 1-divisible;

2) There is a graph φ -transformation $\sum_{i=1}^2 G_i$ into a graph G defined as follows

$\varphi(\sum_{i=1}^2 G_i, \sum_{j=1}^n (y_{1j} + y_{2j})) \rightarrow (G, \{y_j\}_{j=1}^n)$ and which satisfies the following conditions:

a) $(\forall i, i=1,2)[(G_i \neq K_4') \wedge ((G_i \cong K_{2,3}) \vee (G_i \approx K_4))]$;

b) $G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n) = C_{G_i}^{n-1}(y_{i1}, y_{in})$ - the simple path of the length $n-1$ of the graph G_i , where $y_{i1} \neq y_{in}$, $\{y_{ij}\}_{j=1}^n \subset G_i^0 \cup G_i^1$, where $i=1,2$, (if $n=0$ then the simple path is formed into a point y_{i1});

c) $G(\{y_j\}_{j=1}^n)$ - the simple path of the graph G of length $n-1$ ($n=0$ the simple path is generated to a point y_1);

3) Existence of φ -transformation of the graph $G_0 + G_3$ in the graph G by the following:

$\varphi(G_0 + G_3, \sum_{j=1}^n (Z_{0j} + Z_{3j})) \rightarrow (G, \{Z_j\}_{j=1}^n)$, where graph image satisfies the following conditions:

a) The G_0 is an φ - image of graph $\sum_{i=1}^2 G_i$ written as in statement 2) of this theorem;

b) $G_3 \approx K_{2,3}$; $G_0(\{Z_{0j}\}_{j=1}^n)$ is a cycle of the length n (possibly with diagonals) of the graph (possibly the boundary of the outer boundary of the graph $f(G_0)$), where $f|G_0: G_0 \rightarrow \sigma$ is the contribution that realizes $t_G(G_0^0)$, $\{Z_j\}_{j=1}^n \subset G_0^0 \cup G_0^1$;

c) $G_3(\{Z_{3j}\}_{j=1}^n)$ is a simple cycle of graph G_3 , possibly with diagonals.

4) There is a φ -transformation of the graph $\sum_{i=1}^2 G_i$ into a graph G defined as follows:

$\varphi(\sum_{i=1}^2 G_i, \sum_{j=1}^n (y_{1j} + y_{2j}) + (y_{1j}^* + y_{2j}^*)) \rightarrow (G, \{y_j\}_{j=1}^n \cup \{y_j^*\})$ and satisfies the following conditions:

a) $(\forall i, i=1,2)[(G_i \neq K_4') \wedge ((G_i \cong K_{2,3}) \vee (G_i \approx K_4))]$;

b) $G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n) = C_{G_i}^{n-1}(y_{i1}, y_{in}) + y_{i1}$ - simple path length $n - 1$ graph G_i is connected with y_{i1} -the isolated graph G_i point which does not belong to the subgraph $G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n) = C_{G_i}^{n-1}(y_{i1}, y_{in})$ of $y_{i1} \neq y_{in}$, $\{y_{ij}\}_{j=1}^n \subset G_i^0 \cup G_i^1$, $i = 1, 2$, ($n = 0$ the simple path is generated in the point y_{i1} of , at that $y_{i1} = y_{i1}$);

c) $G(\{y_{ij}\}_{j=1}^n)$ - simple path of graph G with length $n - 1$ which no include in subgraph $G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n)$.

Proof. Let simple graph G is the connected planar with all significant edges with respect to the number of reachability of the set of vertices equal $t = 3$, in the operation of removing an arbitrary edge and embedding $f, f : G \rightarrow \sigma$ set the attachment that implements $t_G(G^0), t_G(G^0) = t = 3$, $S_G(G^0) = \{s_i\}_{i=1}^3$ -set of 2-cells on the border of which all vertices of the graph G . We denote by the $M(G)$ set of all the different subgraphs H of the graph G constructed for each pair (s_i, s_j) , where $i \neq j$, of 2-cells from the set $S_G(G^0)$ as the smallest part of the graph G that satisfies the ratio:

$$\left[\left((G^0 \cap ds_i \subset H_{ij}^0) \wedge (H_{ij}^0 \cap (ds_j - ds_i) \neq \emptyset) \right) \vee \left[\left((G^0 \cap ds_j \subset H_{ij}^0) \wedge (H_{ij}^0 \cap (ds_i - ds_j) \neq \emptyset) \right) \wedge (H_{ij} \cong K_4) \vee (H_{ij} \cong K_{2,3}) \right] \right] \quad (*)$$

Denote by $M'(G)$ - the least included a subset of the set $M(G)$, consisting of the smallest included subgraphs H_{ij} of the graph G , or parts of these subgraphs that satisfy the following conditions:

a) $G^0 \subseteq \bigcup_{\forall H' \in M(G)} (H')^0$;

b) If the subgraph H_{ij} (or its part) is homeomorphic to the graph K_4 which, or all the edges of the graph are 1-subdivided or no edge of the graph K_4 is 1-subdivided. In the future, if no reservations are made, we will assume that, with respect to the elements of the set M' and the term "subgraph" of the graph G , does not preclude the fact that this element may be part of the graph.

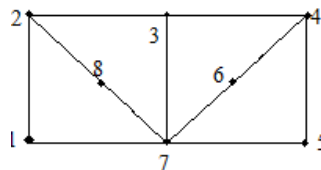


Figure 1. The graph G for constructing the set M.

For example, consider the following embedding of a graph G in an Euclidean plane (fig. 1) and distinguish two sets $S_i = \{s_{ij}\}_{j=1}^3$, $i = 1, 2$, namely a) $ds_{11} = \{1, 2, 7, 8\}$, $ds_{12} = \{2, 3, 7, 8\}$, $ds_{13} = \{4, 5, 6, 7\}$; б) $ds_{21} = \{1, 2, 7, 8\}$, $ds_{22} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $ds_{23} = ds_{13}$. For each of them we construct a set M_i , $M_i = M(G)$, $H_{12}^0 = \{1, 2, 3, 7, 8\}$, $H_{21} = \{1, 2, 7, 8\}$, $H_{23}^0 = H_{32}^0$; $(H_{13}^0)' = \{1, 2, 6, 7, 8\}$, $(H_{13}^0)'' = \{1, 2, 4, 7, 8\}$, $(H_{13}^0)''' = \{1, 2, 5, 7, 8\}$,

$H_{13}^0 \in \{(H_{13}^0)', (H_{13}^0)'' , (H_{13}^0)'''\}$, $H_{32}^0 = \{3,4,5,6,7\}$, $H_{31}^0 = \{1,4,5,6,7\}$, $H_{12}^0 = \{1,2,7,8,3\}$, $H_{13}^0 = \{1,2,8,7,6,4,3\}$, $H_{21}^0 = H_{12}^0$, $H_{23}^0 = \{1,2,3,4,5,7,6\}$, $H_{32}^0 = \{4,5,6,7,3\}$, $M(G) = \{H_{12}, H_{13}, H_{23}, H_{32}\}$. It is easy to see that the above sets a) and b) exhaust all nonisomorphic sets $S_G(G^0)$, and as a result $M'(G) = \{H_{12}, H_{32}\}$.

We prove Proposition 1). Since the graph K_4' is a graph K_4 with all 1-subdivisions edges and will have the property: $(\forall u)(u \in (K_4')^1)[(t_{K_4' \setminus u}((K_4')^0) = 2) \wedge (t_{K_4}((K_4')^0) = 3)]$, then we will have the inclusion $K_4' \subset G$. On the other hand, if $K_4' \subset G$, then there is an edge u , $u \in G \setminus K_4'$. Proposition 1) is proved.

Let the graph G be nonisomorphic to the graph K_4' . The following two cases are possible: m), $|M| = m$, where $m = 2, 3$. Let there be a case 2). Suppose there is equality $M = \{H_i\}_{i=1}^2$. Due to the flatness of the graph G , we have three options φ -transformation of two graphs from the set M defined by one of three options: 1) for two simple chains, 2) for two different pairs of simple chains, 3) for two simple cycles. The first option is called linear in a simple chain, the second nonlinear in two simple chains, the third in a simple cycle. We prove Proposition 2). We have the following two options of the φ -transformation of two subgraphs from the set M : 1) two simple chains, 2) two different pairs of simple chains. That is, we have the following relationship:

$$G[\bigcap_{i=1}^2 H_i] = \sum_{j=1}^n C_G^{n_j}(a_j, b_j) \quad (b1),$$

where $n \geq 0$, (possibly $n_j = 0$, then a simple chain degenerates into a point a_j). Since, $G \neq K_4'$ the relation

b1) implies the existence the φ -transformation of a graph $\sum_{i=1}^2 H_i$ into a graph G , given as follows:

$$\varphi(\sum_{i=1}^2 H_i, \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^{n_i+1} C_{1ij} + C_{2ij})) \rightarrow (G, \{\{a^*_{ij}\}_{j=1}^{n_i}\}_{i=1}^n), \quad (A)$$

where $C_{H_k}^{n_i}(a_{k1}, a_{k(n_i+1)})$ is a simple chain of a subgraph H_k of length n_i with finite vertices a_{ki1} , $a_{ki(n_i+1)}$, where $i = 1(1)n$, $k = 1, 2$. Note that the set $\{a_{kij}\}_{j=1}^{n_i+1}$ consists of the vertices of the graph H_k and the inner points of its edges, $\{a^*_{ij}\}_{j=1}^{n_i+1}$ - the set of vertices of a simple chain $C_G^{n_i}(a^*_{i1}, a^*_{i(n_i+1)})$ of graphs G with finite set of vertices a^*_{i1} , $a^*_{i(n_i+1)}$, such that $\varphi(a_{1ij} + a_{2ij}) = a^*_{ij}$, $j = 1(1)n_i$, $i = 1(1)n$. For $n = 1$ option 1) and statement 2) in this case is proved. For $n = 2$ we have option 2). We prove the right-hand side of the next double inequality $0 \leq p_1(L(\sum_{i=1}^2 H_i, G)) \leq 1$, because the left-hand side is trivial. To do this, use the method of proving the opposite.

Assume that for a graph L - the φ -transformation of a graph $\sum_{i=1}^2 H_i$ into a graph G given in (A), where $L = L(\sum_{i=1}^2 H_i, G)$ and the inequality holds: $p_1(L) > 1$. Then the graph L will have at least two simple circles. Each of this circles will mean the execution of the 2) φ - transformations at points on at least three different pairs of simple chains without common points. The first elements of each pair will belong to a simple cycle z of graph H_1 . The second elements of each pair will belong to a simple cycle z' of the graph H_2 . As a result, at least three new 2-cells s with boundaries simple cycles, which cannot all together be the boundaries of two 2-cells s_j , where $S_G(G^0) = \{s_j\}_{j=1}^3$, $j = 2,3$. This means that at least one edge of the graph G belonging to z_i one of the loops will not belong to the intersection of two 2-cells s_j, s_i , which belong to the set $S_G(G^0)$ will be insignificant relative $t_G(G^0)$ to the operation of its removal. Thus we will have a contradiction to the condition of 3-minimality of the graph G . Since our assumption is incorrect, we have inequality $p_1(L) \leq 1$, which proves the double inequality. Since in Proposition 2) we have a transformation on one pair of simple chains, the proof is complete.

We prove Proposition 3). Let's put $M = \{H_i\}_{i=1}^3$. For φ -transformation of a graph $\sum_{i=1}^3 H_i$ into the graph G , only the following two types are possible:

a) the φ -transformation of type (A), given in the same way as the φ -transformation of a graph $\sum_{i=1}^3 H_i$ into a graph G , ie on the edges (or parts of edges) of graphs $H_i, i = 1(1)3$, has the property that - the image of the graph $\sum_{i=1}^2 H_i$ has at least one edge insignificant relative $t_G(G^0)$. And this property will be regardless of whether or not the graph $L(\sum_{i=1}^3 H_i, G)$ has cycles;

b) φ - transformation of non-type (A) graph $\sum_{i=1}^3 H_i$ into a graph G , ie it is given so that some φ -images of graphs have common simple cycles. Each pair of φ -images of the graphs H_i, H_j of the set $M'(G)$ can have no more than one common simple cycle. Then the following statements are made with precision to the renumbering of the elements of the set $M'(G)$:

- 1) There are elements $\varphi(H_i), i = 1,2$, of the set $M'(G)$ with a common cycle and homeomorphic graphs $K_{2,3}$ that do not have common simple loops with the element $\varphi(H_3)$;
- 2) There are elements $\varphi(H_i), i = 1,2$, that do not have common simple cycles, and an element homeomorphic $K_{2,3}$ has a common simple cycle with an element $\varphi(\bigcup_{i=1}^2 H_i)$.

Proposition 3) is proved. We prove Proposition 4). The proof will follow as a partial case from the above proof of statement 2) and will differ in that part concerning the necessary condition of degeneracy at the point of simple chains of the second pair.

The proof of theorem 1 is complete.

Algorithm for constructing 3-minimal planar graphs.

The modification of the algorithm for constructing all 3-minimal plane graphs is based on Theorem 1 and will have the following form:

Input data: The set L_1 of all nonisomorphic chains of graphs for each of the graphs $K_4, K_{2,3}$, ordered by their length and marked for which pair of graphs the chain is taken;

Output: the set of all 3-minimal graphs G ;

1. Construct a set L_2 from all different pairs of chains of the set L_1 and a set L_3 from all different two pairs of chains from L_1 , as well as a set L_4 composed of different pairs of elements of the set L_1 that generate simple loops without diagonals in columns K_4 or $K_{2,3}$;

2. While the set L_1 is not empty to perform the following actions:

2.0. Take the element x from L_1 , enter the element x in the list B_1 ;

2.1. $L_1 := L_1 \setminus x$;

2.2. While the set $L_1 \setminus B_1$ is not empty to perform the following actions:

2.2.1. Take the element u from $L_1 \setminus (B_1 + B_2)$, enter the element u in the list B_2 ;

2.2.2. We perform the identification of pairs of vertices or points of pairs of graphs (K_4, K_4) , or $(K_4, K_{2,3})$, or $(K_{2,3}, K_4)$, or $(K_{2,3}, K_{2,3})$, indicated as vertices or points of chains pairs (x, u) , for all types of possible φ -transformations of the selected pair of graphs and we obtain a graph G ;

2.2.3. Procedure (G): Define the reachability number t of the set of all vertices of graph G as the minimum number of simple cycles covering the set of all vertices of graph G .

2.2.4. If $t = 3$ then perform:

for each edge e of the graph G perform in the loop the contraction edge e to a point

$G := G_e$,

perform the procedure 2.2.3;

If $t = 3$ then perform the end of the cycle on the edges of the graph G ,

else we derive the graph G ;

end of the cycle on the edges e ;

2.3. end of the internal cycle;

3. end of the external cycle;
4. While the set L_2 is not empty to perform the following actions:
 - 4.0. Take the element x from L_2 , enter the element x in the list B_3 ;
 - 4.1. $L_2 := L_2 \setminus x$;
 - 4.2. While the set $L_2 \setminus B_2$ is not empty to perform the following actions:
 - 4.2.1. Take the element u from $L_2 \setminus (B_3 + B_4)$, enter the element u in the list B_4 ;
 - 4.2.2. We perform the identification of pairs of vertices or points of pairs of graphs (K_4, K_4) or $(K_4, K_{2,3})$ or $(K_{2,3}, K_4)$ or $(K_{2,3}, K_{2,3})$. They are indicated as vertices or points of two different pairs of chains x and u performed on all types of possible φ -transformations for the selected pair of graphs and we obtain the graph G ;
 - 4.2.3. Procedure (G): Define the reachability number t of the set of all vertices of the graph G as the minimum number of simple cycles covering the set of all vertices of the graph G ;
 - 4.2.4. If $t = 3$, then perform:
 - for each edge e of the graph G perform the operation of contraction to a point ;
 - $G := G_e$, perform the procedure 4.2.3;
 - If $t = 3$, then perform the end of the cycle on the edges of the graph G ,
 - else derive the graph G ;
 - else the end of the cycle on the edges;
 - 4.3. end of the internal cycle;
5. end of the external cycle;
6. While the set L_4 is not empty to perform the following actions:
 - 6.0. Take the element z from L_4 , enter the element x in the list B_4 ;
 - 6.1. $L_4 := L_4 \setminus z$;
 - 6.2. While the set $L_4 \setminus B_4$ is not empty to perform the following actions:
 - 6.2.1. Take the element u from $L_2 \setminus (B_5 + B_4)$, enter the element u in the list B_5 ;
 - 6.2.2. We identify pairs of vertices or points of pairs of graphs (K_4, K_4) or $(K_4, K_{2,3})$ or $(K_{2,3}, K_4)$ or $(K_{2,3}, K_{2,3})$ indicated as vertices of different pairs of cycles , performed on all possible φ -transformations for the selected pair of graphs and get the graph G ;
 - 6.2.3. Procedure (G): Determine the minimum number t of simple cycles covering the set of all vertices of the graph G ;
 - 6.2.4. If $t = 3$ then perform:

For each edge e of the graph G perform the contraction operation to a point;

$G := G_e$, perform the procedure 6.2.3;

If $t = 3$ then perform the end of the cycle on the edges of the graph G ,

else derive the graph G ;

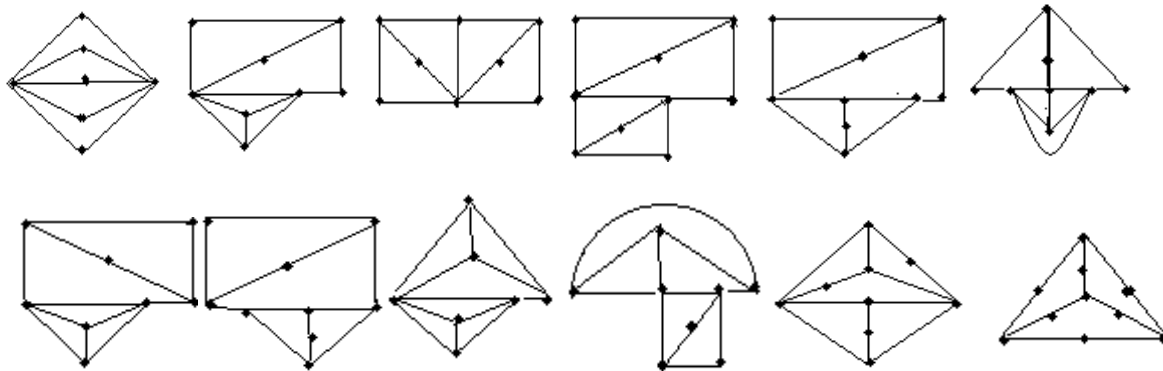
end of the cycle on the edges;

6.3. end of the internal cycle;

7. end of the external cycle;

8. end of the algorithm.

Result: Identity of non-cylindrical graphs to 3-minimal graphs with the proof of equivalence of non-cylindrical and 3-minimal planar graphs, theorem 1 on the characterization of 3-minimal planar graphs, and a modified algorithm for constructing all 3-minimal planar graphs. The 38 diagrams of 3-minimal planar graphs as result presented in the figure 2.



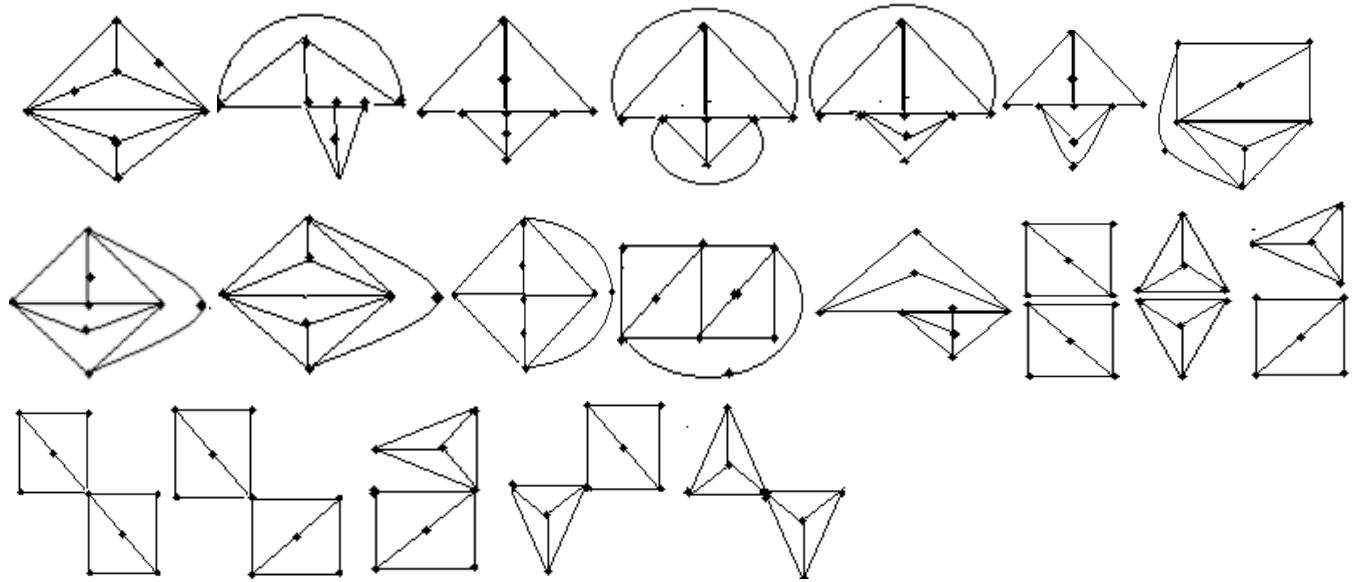


Figure 2. The list of 3-minimal planar graphs.

2-Minimal projective planar graphs.

Task: To construct the set of all nonisomorphic 2-minimal projective-planar graphs in which the fixed set of points is located on the two boundaries of 2-cells or pseudocells. Similarly of this task was the tasks for graphs with number of vertexes less then 10 on various genus which solved in [6], [7], [8].

Introduce a new characteristic that measures the some structure of the set X of points of graph G on S .

Definition 1. For a given embedding $f, f:G \rightarrow S$, a graph G in S and a given set of points $X, X \subset G^0 \cup G^1$ determine $t_G(X,S,f), t=t_G(X,S,f)$, the number of reachability of the set X relative to S , if there is a set $S_G(X), S_G(X)=S \setminus f(G)$, which satisfies the condition: $(f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^t \partial s_i \cap X) \wedge (f(X) \not\subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^t \partial s_i \cap X), j=1,2,\dots,t$. We say that the set X

has a reachability number $t, t_G(X,S)=t$, relative to S , if among all no isomorphic embedding's $f, f:G \rightarrow S$, the number t is the smallest among the numbers $t_G(X,S,f)$. We consider further the set X of points of the graph G t -non-planar concerning the surface S , or (t,S) -non-planar, if $t \geq 2$, where $t_G(X,S)=t$. If $t=2, S$ is a projective plane, and the set X is the set of vertices of the graph $G, X=G^0$, then we will call the graph G non-outer projective planar. **A graph G is outer-projective-planar if embeds on the projective-plane with all vertices on the boundary of one distinguished cell.**

Definition 2. Suppose the embedding $f, f:G \rightarrow S$, of the graph G in surface S , which implements $t, t_G(X,S)=t$, where $S_G(X)=S \setminus f(G) S_G(X)=\{s_i\}_1^t$. We will say that concerning a given surface S the set X will have the characteristic $\theta_G(X,S,f), \theta_G(X,S,f)=\theta, \theta \geq 1$, if there are θ three cells $\{s_i\}_1^3$ from the set $S_G(X)$, on the boundaries of which the subsets $X_i, X_i \subseteq X$, are placed arbitrarily and satisfy the relation:

$G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\} \wedge G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\} \wedge G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$, and generates the smallest subgraph G' of the graph G , (possibly degenerate), contains the points $\{a_i\}_1^3$ of pairwise intersection of cell boundaries $\{s_i\}_1^3$. The set X will have the θ -characteristic $\theta_G(X)$ if $\theta_G(X) = \max \theta_G(X, f)$, where the maximum is taken for all embedding's $f: G \rightarrow S$, realizing $t_G(X, f) = t$ and $\theta = \theta_G(X, f)$.

Proposition 3.1. Each non-outer projective planar subgraph with a given set of points that are not located on the boundary of one 2-cell or pseudocell of an arbitrary graph-obstruction of the projective plane can be represented as 1-subdivision graph K_4 , or a φ -image of a pair of graphs homeomorphic to graphs from the set $\{K_5, K_{3,3}, K_4, K_{2,3}, K_5 \setminus e\}$ when identifying pairs of points from the connection sets both in a path and in a cycle.

The algorithm 1 and his mathematical base

Theorem 3.1. [5]. The graph G is non-outer projective planar if and only if then $G = H \setminus v$, where v is a vertex of graph-obstruction H of the projective plane N_1 .

Theorem 3.2. [9] is the mathematical base for the algorithm 1 for the construction of all no isomorphic non-outer projective plane graphs. The list of minimal projective planar graphs with genus 0 or 1 and fixed subsets of vertices witch has reachability number 2 or 3 is the results of the following modified polynomial algorithm 1.

Begin of Algorithm 1.

Input: The set P of 35 minors P_i of the projective plane N_1 with equivalence classes l_{ij} where $P_i^0 = \sum_{j=1}^{n_i} l_{ij}$,

$n_i \leq |P_i^0|$.

Output: List X of graphs.

$X := \emptyset$; $v := 0$;

For $i=1$ step 1 to 35, do these steps:

begin

$P_0 := P_i$;

$v := v_{i1}$;

procedure $A(P_0, \Pi_0, P_0^0, N_2)$;

Output $(P_0, \sum_{j=1}^{n_i} l_{ij})$ in X ;

For $k=2$ step 1 to $|P_0|$, do these steps:

begin

If $v \approx v_{ik}$ then go to the end of the cycle by k ;

else $P_0 := P_i \setminus v$;

$\Pi_0 := \Pi_i$;

$L := \text{Function B} (P_0, X)$;

If $L == \text{true}$ then do:

begin;

$M := \{\forall u \mid (u, v) \in P_0^1\}$;

If $K(G) == 1$ then do

begin;

procedure $A(P_0, \Pi_0, M, N_1)$;

output (Π_0, M) in X ;

end;

else do

begin;

procedure $A(P_0, \Pi_0, M, \Sigma_0)$;

output (Π_0, M) in X ;

end;

end;

end;

End of Algorithm 1.

Procedure $A(G, \Pi, M, S)$ do the following:

// Must construct the embedding Π of a graph G (without vertices of degree 2) with a given number of vertices in the surface S (Euclidean plane, projective plane or Klein surface) and determine the cells on the boundaries of which are the set of vertices M //.

If a graph G has a subgraph or part of the graph H is homeomorphic K_5 or $K_{3,3}$, then we construct the embedding of these graphs in the projective plane, otherwise, we attach a graph to the Euclidean plane Σ_0 . In nested graphs K_5 or $K_{3,3}$ a projective plane, there are cells $s_5, s_{3,3}$ with the following boundaries: ∂s_5 - a

cycle of length 5 and 5 triangles for K_5 , or $\partial_{S_{33}}$ - a cycle of length 6 and 4 quadrilaterals for $K_{3,3}$, in which we will embed stars with centers taken from the subset $G^0 \setminus H^0$.

First of all, we will put all these stars in cells with either cycle boundaries of length 5 for or length 6 for and try to use no more than one additional Mobius strip glued to the cells ∂_{S_5} or $\partial_{S_{33}}$. The number of vertices $|G^0|$ of the obstruction graph of the projective plane is at least 12. The number of options for the location of the centers and edges of stars, not more than 7 stars, is equal r^7 because each center of the star does not belong to two cells, where r the number of cells of the graph embedded in the projective plane $r = 6$ for K_5 , $r = 5$ for $K_{3,3}$.

The time complexity of procedure A (G, Π, M, S) is proportional $O(r^7)$.

The function $K(G)$ will determine the presence or absence of a graph G of a subgraph or part of a homeomorphic K_5 or $K_{3,3}$ and will give it out. To do this, we need to examine the complement of the \bar{G} graph G for the presence of a subgraph of five isolated vertices, \bar{K}_5 , or two triangles without common vertices, i.e. $2K_3$. If such subgraphs of the graph are detected, the function $K(G)$ will give 1 and return to algorithm 1 the found vertices as vertices of the graph K_5 or $K_{3,3}$. In the absence case $\bar{K}_5, 2K_3$ the function $K(G)$ will give 0. The function $B(P_0, X)$ checks for the presence of an isomorphism of a graph P_0 with another element of the set of graphs X and will have polynomial complexity [10], [11] herein hand checking evidence identity of amalgamating sets of isomorphic graphs.

The part of the output result of algorithm 1 is on figures 3, 4.

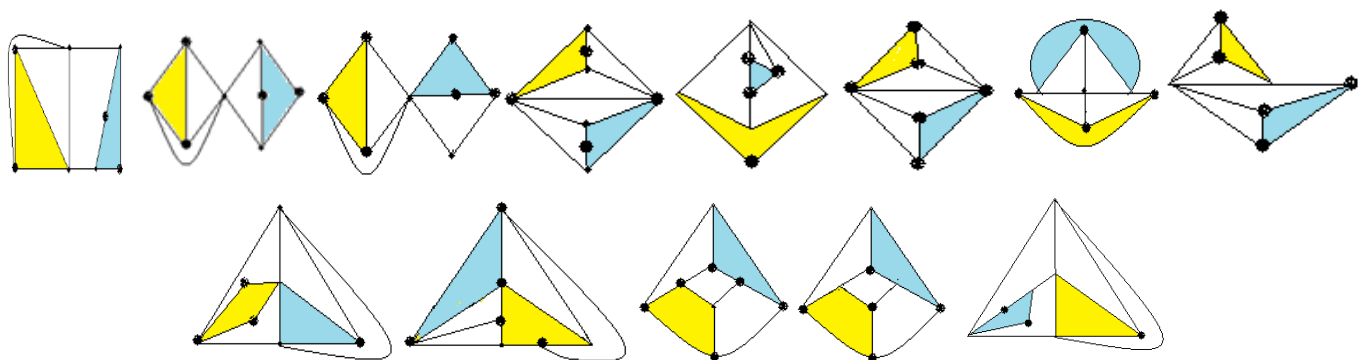


Fig. 3. Planar subgraphs of the projective minors with set M from push vertices at the boundaries of colored cells with the number of reachability 2 between two highlighted color 2-cells or 2-cell and pseudocell on the boundaries of which are subsets of the set M.

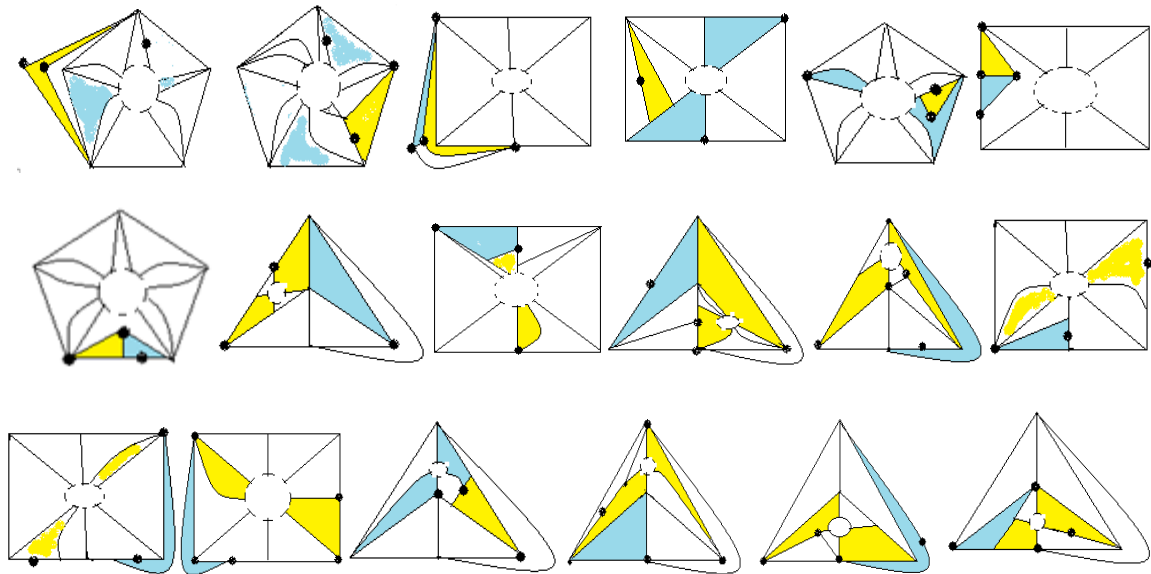


Fig. 4. The projective subgraphs of minors of the projective plane with two non-empty subsets of the set M , consisting of the push vertices and located on the boundaries of the colored 2-cells or 2-cell and pseudocell).

References

- [9] M.P. Khomenko. φ -Transformation of Graphs. Institute of Mathematics, Kyiv (1973)
- [10] D. Archdeacon, C.P. Bonnington, N. Dean, N.Hartsfield. Obstructions Sets for Outer-Cylindrical Graphs. 2000, 29pp.
- [11] V. Petrenjuk. Characterization of the 3-minimal Planar Graph. Collection of the proceedings of a seminar of discrete mathematics and applications. Moscow, MGU 1993, p.217.
- [12] V. Petrenjuk. List of 3-minimal Planar Graphs. Preprint DNTB 31.10.86 #2450-86. 7p.
- [13] D. Archdeacon, N. Hartsfield, C. H. C. Little, B. Mohar. Obstructions sets for outer-projective-planar graphs. *Ars Combinatoria* 49, 1998, 113-128.
- [14] Hur Surkhjin. The Kuratowski covering conjecture for graphs of the order less than 10. Dissertation, the Ohio State University (2008). https://etd.ohiolink.edu/rws_etd/send_file/send?accession=osu1209141894&disposition=inline
- [15] Bojan Mohar, Carsten Thomassen. *Graphs on surfaces*, Johns Hopkins University Press, 2001.
- [16] Anna Flötotto. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, Universität Bielefeldvorgeleg , 2010.
- [17] V. Petrenjuk. About Transformation graphs as a tool for investigation. Proceedings of the 4-th International Conference on Computational Linguistics and Intelligent Systems (COLINS 2020). Volume I: Main Conference, Lviv, Ukraine, April 23-24, 2020, 1309-1319. <http://ceur-ws.org/Vol-2604/>
- [18] **LEDA: A library of efficient data types and algorithms, Max Planck Institute for Computer Science.** <http://www.mpi-sb.mpg.de/LEDA/>.
- [19] K. Scott. Outermobius and cylindrical graphs. Senior Thesis, Princeton University, 1997.
- [20] V. Petrenjuk, D. Petrenjuk. List of Non-Outer Projective Planar Graphs. Proceedings of the Workshop Conference of COLINS-2021 the fifth edition of the International Conference on Computational Linguistics and Intelligent Systems, Kharkiv, Ukraine on April 22-23, 2021, Volume II, ISSN 2523-4013, 38-50, <http://colins.in.ua>, online.

6.3. APPLICATION TREND THROUGH PLANAR 3-MINIMAL & PROJECTIVE PLANAR 2-MINIMAL GRAPHS

Result: Identity of non-cylindrical graphs to 3-minimal graphs with the proof of equivalence of noncylindrical and 3-minimal planar graphs, theorem 1 on the characterization of 3-minimal planar graphs, and a modified algorithm for constructing all 3-minimal planar graphs. The 38 diagrams of 3-minimal planar graphs as result presented in the figure 2.

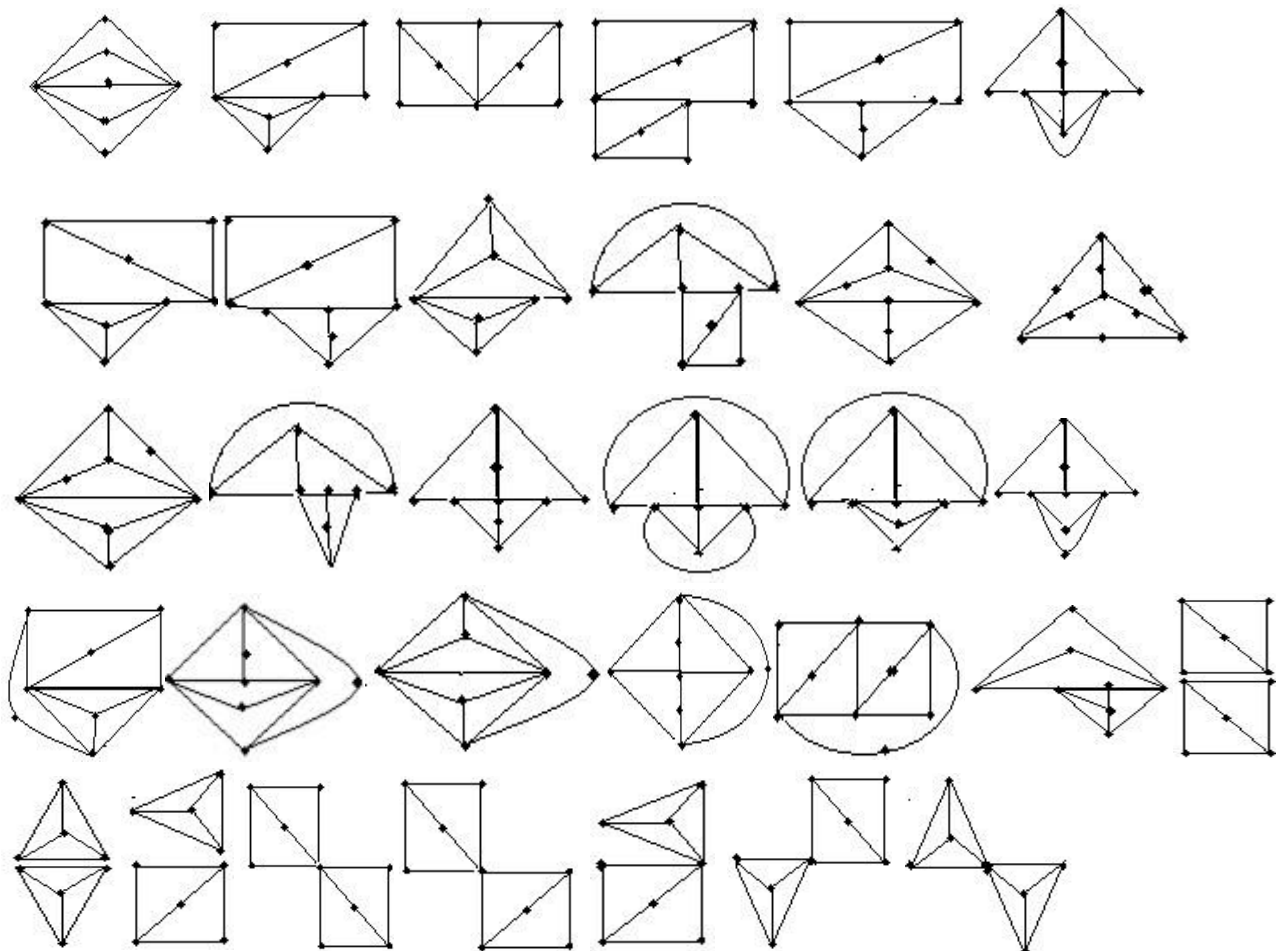


Figure 2. The list of 3-minimal planar graphs.

2-Minimal projective planar graphs.

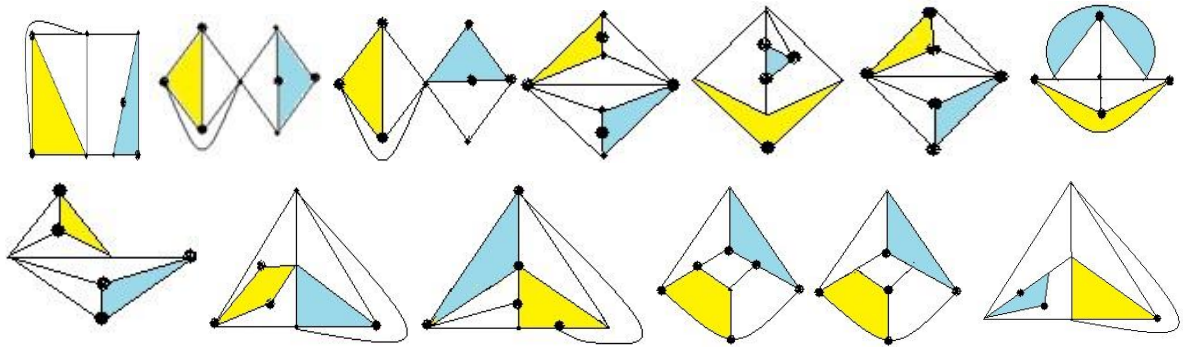


Fig. 3. Planar subgraphs of the projective minors with set M from push vertices at the boundaries of colored cells with the number of reachability 2 between two highlighted color 2-cells or 2-cell and pseudocell on the boundaries of which are subsets of the set M .

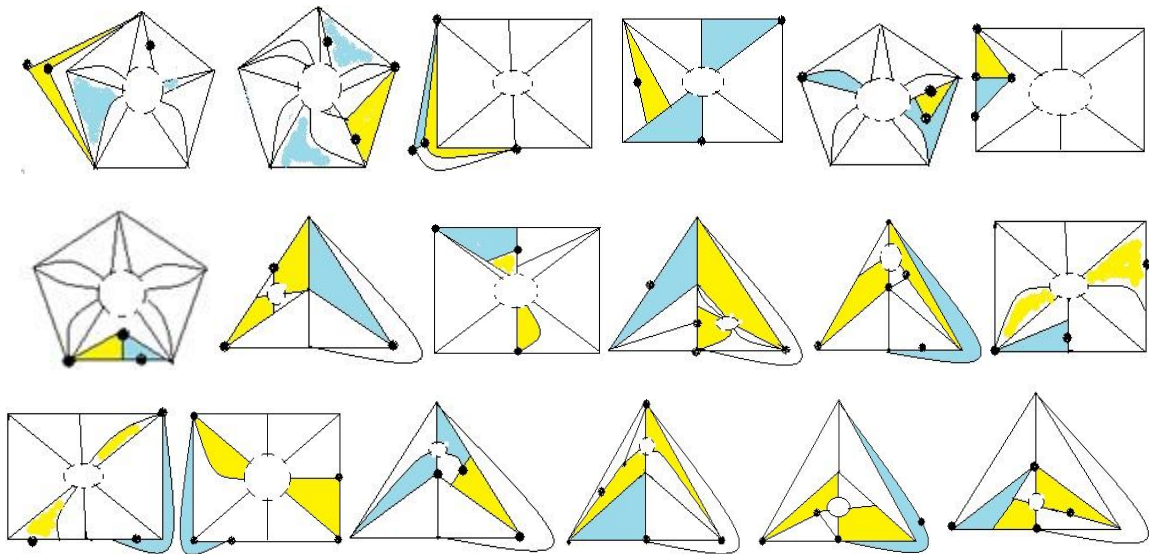


Fig. 4. The projective subgraphs of minors of the projective plane with two non-empty subsets of the set M , consisting of the push vertices and located on the boundaries of the colored 2-cells or 2-cell and pseudocell).

References

- [9] M.P. Khomenko. φ -Transformation of Graphs. Institute of Mathematics, Kyiv (1973)
- [10] D. Archdeacon, C.P. Bonnington, N. Dean, N.Hartsfield. Obstructions Sets for Outer-Cylindrical Graphs. 2000, 29pp.
- [11] V. Petrenjuk. Characterization of the 3-minimal Planar Graph. Collection of the proceedings of a seminar of discrete mathematics and applications. Moscow, MGU 1993, p.217.
- [12] V. Petrenjuk. List of 3-minimal Planar Graphs. Preprint DNTB 31.10.86 #2450-86. 7p.
- [13] D. Archdeacon, N. Hartsfield, C. H. C. Little, B. Mohar. Obstructions sets for outer-projective-planar graphs. Ars Combinatoria 49, 1998, 113-128.
- [14] Hur Surkhjin. The Kuratowski covering conjecture for graphs of the order less than 10. Dissertation, the Ohio State University (2008).
https://etd.ohiolink.edu/rws_etd/send_file/send?accession=osu1209141894&disposition=inline
- [15] Bojan Mohar, Carsten Thomassen. Graphs on surfaces, Johns Hopkins University Press, 2001.
- [16] Anna Flötotto. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, Universitat Bielefeldvorgeleg , 2010.

- [17] V. Petrenjuk. About Transformation graphs as a tool for investigation. Proceedings of the 4-th International Conference on Computational Linguistics and Intelligent Systems (COLINS 2020). Volume I: Main Conference, Lviv, Ukraine, April 23-24, 2020, 1309-1319. <http://ceur-ws.org/Vol-2604/>
- [18] LEDA: A library of efficient data types and algorithms, Max Planck Institute for Computer Science. <http://www.mpi-sb.mpg.de/LEDA/>.
- [19] K. Scott. Outermobius and cylindrical graphs. Senior Thesis, Princeton University, 1997.
- [20] V. Petrenjuk, D. Petrenjuk. List of Non-Outer Projective Planar Graphs. Proceedings of the Workshop Conference of COLINS-2021 the fifth edition of the International Conference on Computational Linguistics and Intelligent Systems, Kharkiv, Ukraine on April 22-23, 2021, Volume II, ISSN 2523-4013, 38-50, <http://colins.in.ua>, online.

РОЗДІЛ 7. ЗАСТОСУВАННЯ ДО ПРОЕКТИВНИХ ТА ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ

7.1 SOME PROPERTIES OF THE NON-OUTER-PROJECTIVE PLANAR GRAPHS

The graph G is outer-projective-planar, if it embeds on the projective plane with all vertices on the boundary of one distinguished cell, and non-outer-projective-planar in otherwise. The main result: planar or projective graphs as a result of the algorithm are given and the of reachability numbers for sets of points that belong to the minors of the projective plane and sets with points of connection of a star to subgraphs of these minors are calculated. The list of non-outer-projective planar graphs is also presented here.

The main notations and definitions are taken from [1, 2, 3]. The problem of search all outer-projective planar graphs was solved [9]. Here we have the following two subtasks for graphs with given set of points:

1. Investigate the structure of projective plane graphs, minimal concerning the operation of removal or contraction to a point of an arbitrary edge, with a given set of points, having the number of reachability t , $t = 2$, and is itself or has a subset projective planar graphs and give their graph diagrams indicating the specified subsets of points;
2. Investigate the properties of the gluing graph and the algorithm for constructing no projective planar or non-Klein surface graphs as φ -images of a small number of special graphs. Their special graphs are elements of the set of minimums relative to the number of reachability 2 for a given Klein surface or projective plane, having a reachability number of 2 and are minimal relative to the reachability number in the operation of removing an arbitrary point.

The solution of subtask 1 is to construct all minimal non-outer-projective planar graphs solved in [5] by searching all different options for deleting one of the vertices of the projective planar minor graph and selecting no isomorphic graphs of nonorientable genus 1. The idea of construction is similar to [12] how minimally non-planar projective graphs K_5 or $K_{3,3}$ are formed from minimal non-outer-planar graphs K_4 or $K_{2,3}$ by glueing a simple star $St(v)$ to the minimum power subsets of points of graphs K_4 or $K_{2,3}$ with the number reachability 2. According to subtask 1, the obtained here and theoretical results are presented [10] and the algorithm and graphs constructed by it are given.

Subtask 2 is to identify the minimum subset of points in the minimum non-projective planar or minimal non-Klein planar graphs with a given number of reachability 2 and the nature of their bonding for another construction of non-projective planar or construction of all non-Klein surface minor graphs.

In [19], [20] was presented some non-Klein surface minors. A similar problem was solved in [13]. The coverage of non-projective planar or non-Klein surface graphs G with the number of vertices not more than 10 as obstructions of the nonorientable genus $\gamma(G)$ by subgraphs homeomorphic to Kuratowski graphs K_5 or $K_{3,3}$ are presented in [4]. However, in [3] on page 203 a counterexample was presented. In [6] the solution of a similar problem of construction of non-projective planar graphs as an obstructions for Klein surface, by the method of relative components is given. Some results on the analogue of this task were

given in cite [8], [7], [16]. The list of non-outer-projective planar graphs has presented here.

Definition 1. For a given embedding $f, f: G \rightarrow S$, a graph G in S and a given set of points $X, X \subset G^0 \cup G^1$ determine $t_G(X, S, f)$, $t = t_G(X, S, f)$, the number of reachability of the set X relative to S , if there is a set $S_G(X)$, $S_G(X) = Sf(G)$, which satisfies the condition: $(f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^t \partial s_i \cap X) \wedge (f(X) \not\subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^t \partial s_i \cap X), j = 1, 2, \dots, t$. We say that the

set X has a reachability number t , $t_G(X, S) = t$, relative to S , if among all noisomorphic embedding $f, f: G \rightarrow S$, the number t is the smallest among the numbers $t_G(X, S, f)$. We consider further the set X of points of the graph G is t -non-planar, concerning the surface S , or t, S -non-planar if $t > 2$, where $t_G(X, S) = t$. If $t = 2$ and S is a projective plane, and X is the set of vertices of the graph $G, X = G^0$, then we will call the graph G nonouter-projective-planar. A graph G is outer-projective-planar, if embeds on the projective-plane with all vertices on the boundary of one distinguished cell.

Definition 2. Suppose the embedding $f, f: G \rightarrow S$, of the graph G in the surface S , which implements $t, t_G(X, S) = t$, where $S_G(X) = S \setminus f(G)$ $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$. We will

say that concerning a given surface S the set X will have the characteristic $\theta_G(X, S, f)$, $\theta_G(X, S, f) = \theta$ $\theta > 1$, if there are only θ three cells $\{s_i\}_1^3$ from the set $S_G(X)$, on the boundaries of which the subsets $X_i, X_i \subseteq X$, are placed arbitrarily and satisfy the relation: $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\} \wedge G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\} \wedge G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$, and generates the smallest subgraph G' of the graph G , (possibly degenerate), contains the points $\{a_i\}_1^3$ of pairwise intersection of cell boundaries $\{s_i\}_1^3$. The set X will have the θ -characteristic $\theta_G(X)$ if $\theta_G(X) = \max \theta_G(X, f)$, where the maximum is taken for all embeddings $f: G \rightarrow S$, realizing $t_G(X, f) = t$ and $\theta = \theta_G(X, f)$.

Main results

The mathematical base for the algorithm

Theorem 3. The graph G is non-outer projective planar if and only if then $G = H \setminus v$, where v is a vertex of graph-obstruction H of the projective plane N_1 .

Theorem 4. For an arbitrary graph-obstruction G of the projective plane N_1 and each of its vertices v with the set $M(v)$ of all vertices of the incident occurred the following statements:

- 1. For the subgraph $G \setminus v$ of the nonorientable genus, the following relations will take place:
 - a). If $\gamma(G \setminus v) = 1$, then we have the following relations 1) and one of 2) or 3):

* a1). $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 2$, wherein the set $M(v)$ belongs to the boundaries $\partial s_1, \partial s_2$ of two cells s_1, s_2 of the projective plane having at least one common vertex;

* a2). Each edge of the subgraph $G \setminus v$ is significant in relation to a genus $\gamma(G \setminus v)$ with respect to removing the edge or compressing it in point;

* a3). Each edge of a subgraph $G \setminus v$ is significant with respect to the removal or compression operations of an edge;

– b). If $\gamma(G \setminus v) = 0$ then, one of the following two relationships will occur:

* b1). $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 3$ and the set $M(v)$ is located on the boundaries of three cells s_1, s_2, s_3 satisfying the relation $\partial s_3 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \neq \emptyset$, each edge of the subgraph $G \setminus v$ being significant relative $t_{G \setminus v}(M(v), N_1)$ to the operations of removing the edge or compressing it to a point, and each point w of the set $M(v)$ satisfies equality $t_{G \setminus v}(M(v) \setminus w)$;

* b2). $t_{G \setminus v}(M(v), \Sigma_0) = 2$, where $t_{G \setminus v}(M(v), \Sigma_0)$ is the number of reachability of the set $M(v)$ relative to the Euclidean plane Σ_0 , is realized by minimal embedding $f: (G \setminus v) \rightarrow \Sigma_0$ at the boundaries $\partial s_1, \partial s_2$ of the cells s_1, s_2 , where $\{s_1, s_2 \subset \Sigma_0 \setminus f(G \setminus v)$.

* b3). Satisfies equality $\partial s_1 \cap \partial s_2 = \emptyset$, which is, separated by a ring from the cells, then relative to the projective plane.

* b4). The set $M(v)$ will have a number of reachability $t_{G \setminus v}(M(v), N_1) = 2$, with each point w of the set $M(v)$ satisfies equality $t_{G \setminus v}(M(v) \setminus w)$ and the set $f(M(v) \setminus w)$ by some embedding $f: G \setminus v \rightarrow N_1$ is placed at the boundaries $\partial s'_1, \partial s'_2$ of two cells s'_1, s'_2 having at least one common point, where $\{s'_1, s'_2 \subset \Sigma_0 \setminus f'(G \setminus v)$, and equality $\partial s'_1 \cap \partial s'_2 \neq \emptyset$ is satisfied.

- 2. Each minor G of the nonorientable genus 2, except G_3, E_1, G_4 , is covered by a maximum of 4 subgraphs A_2, G_1 subgraphs or parts homeomorphic to one of the following graphs: $K_{2,3}, K_4, K_5 \setminus e, K_{3,3} \setminus e, K_5, K_{3,3}$. The number of reachability 2 relatively Klein surface N_2 for the set of vertices (for $G \in \{G_3, E_1, G_4\}$ we have), and for each removed edge e the graph Ge will have at N_1 the number of reachability equals 2 for the set of vertices;
- 3. The presence of the coating specified in statement 2 is not sufficient to make the graph an obstruction of nonorientable genus 2.
- 4. If $\gamma(G \setminus v) = 0$ and on the Euclidean plane Σ_0 made up a set $M(v)$ of points of a graph G formed from the obstruction graph of a projective plane N_1 by removal of a vertex v

and adjacent edges. When is given by an arbitrary minimal embedding $f: G \setminus v \rightarrow \sigma_0$ on the boundaries of two cells that have no common points and have endpoints that do not belong to their borders, then removing an arbitrary point from the set M leads to the failure this relation 4.

Proof. The proofs of this statements are in [16]. □

Main algorithm

The construction of all non isomorphic non-outer-projective plane graphs based on the results of the following algorithm 1. Begin of Algorithm 1 Input:

1. The set P of 35 minors P_i of the projective plane N_1 with the sets of numbered vertices,
2. which for each graph P_i is divided into equivalence classes l_{ij} with respect to the transitivity of its vertices, where
$$P_i^0 = \sum_{j=1}^{n_i} l_{ij}, \quad n_i \leq |P_i^0|;$$
3. Procedure $A(P_0, \Pi_0, P_0^0, N)$ construct the embedding of the graph G in the surface S as projective plane N_1 , if $N = N_1$, or Klein bottle N_2 , if $N = N_2$, and determine the cells of the graph at the boundaries of which is a given subset M of the set of vertices of the graph G with which the incident vertex $v//$;
4. Function $B(P_0, X)$ determine the presence or absence of a graph G of a subgraph or part of a homeomorphic to K_5 or $K_{3,3}$ and will give it out.

Output: List X of all non isomorphic graphs.

Initialise: $X := \emptyset, v := 0$;

"where P_0 is the current graph of the order $|P_0|$ with the selected vertex, which is representative of the 1:

For i from 1 to 35 by step 1 do:

2: begin

3: $P_0 := P_i$;

4: $v := v_{i1}$;

5: procedure $A(P_0, \Pi_0, P_0^0, N_2)$;
 n_i

6: Output $(P_0, \sum l_{ij})$ in X ;

$j=1$

7: For $k = 2$ step 1 to $|P_0|$ do : 8: begin

9: If $v \approx v_{ik}$ then go to the end of the cycle;

10: "that is, the vertices belong to the same class of transitivity";

11: else $P_0 := P_i \setminus v$;

```

12:          remove the vertex  $v$  and all adjacent edges;
13:           $\Pi_0 := \Pi_i$ ;
14:  $L := \text{FunctionB}(P_0, X)$ ; 15: If  $L = \text{true}$  then
do:
16:          "the graph  $P_i \setminus v$  noisomorphic to any of the graphs in the list  $X$ ";
17:          begin;
18:           $M := \forall u | (u, v) \in P_0^1$ ;
19:          If  $K(G) = 1$  then do: the graph  $P_i \setminus v$  has a Kuratowsky subgraph
20:          begin;
21:          procedure  $A(P_0, \Pi_0, M, N_1)$ ;
22:          output  $(\Pi_0, M)$  in  $X$ ;
23:          end;
24:          else do: 25:          begin;
26:          procedure  $A(P_0, \Pi_0, M, \Sigma_0)$ ;
27:          output  $(\Pi_0, M)$  in  $X$ ;
28:          end;
29:          end;
30:          end;
End of Algorithm 1.

```

Theorem 5. *Algorithm 1 has correctness and time-complexity $O(r^7)$, where r the number of cells of the planar or projective planar graph.*

Proof. Procedure $A(G, \Pi, M, S)$ do the following: construct the embedding Π of a graph G (without vertices of degree 2) with a given number of vertices in the surface S (Euclidean plane, projective plane or Klein surface) and determine the cells on the boundaries of which are the set of vertices M . If a graph G has a subgraph or part of the graph H is homeomorphic K_5 or $K_{3,3}$, then we construct embedding's of these graphs in the projective plane, otherwise, we attach a graph to the Euclidean plane Σ_0 . In nested graphs K_5 or $K_{3,3}$ a projective plane, there are cells s_5, s_{33} with the following boundaries: ∂s_5 – a cycle of length 5 and 5 triangles for K_5 , or ∂s_{33} – a cycle of length 6 and 4 quadrilaterals for $K_{3,3}$, in which we will embed stars with centres taken from a subset $G^0 \setminus H^0$. First of all, we will put all these stars in cells with either cycle boundaries of length 5 for or length 6 for and try to use no more than one additional Mo'bius strip glued to the cells ∂s_5 or ∂s_{33} . The number of vertices $|G^0|$ of the obstruction graph G of the projective plane is at least 12. The number of options for the location of the centres and edges of stars, not more than 7 stars, is equal r^7 because each centre of the star does not belong to two cells, where r the number of cells of the graph embedded in the projective plane. For K_5 $r = 6$, $r = 5$ for $K_{3,3}$ and from formula Euler–Poincare follow that $r = 2 - 1 - n + n_e$ for projective-planar graph with $n \geq 12$ vertices and $n_e \geq n(n - 1)/2 = 66$ and $r \geq 55$. Then time complexity of procedure $A(G, \Pi, M, N_1)$ is $O(r^7)$.

The correctness of algorithm 1 will follow from Theorems 1 and 2. The function $K(G)$ will determine the presence or absence of a graph G of a subgraph or part of a homeomorphic to K_5 or $K_{3,3}$ and will give it out. To do this, we need to examine the complement of

the G graph G for the presence of a subgraph of five isolated vertices, i.e. K_5 , or two triangles without common vertices, i.e. $2K_3$. If such subgraphs of the graph are detected, the function $K(G)$ will give 1 and return to algorithm 1 the found vertices as vertices of

the graph K_5 or $K_{3,3}$. In the absence case K_5 , $2K_3$ the function $K(G)$ will give 0. The function $B(P_0, X)$ checks for the presence of an isomorphism of a graph P_0 with another element of the set of graphs X and will have polynomial complexity [21]. The analysis of output data of algorithm 1 in the next corollaries. \square

Corollary 6. *The next 78 non-outer-projective planar graphs have number reachability of their set of vertices equal 2:*

1. *There are 16 graphs with genus 0: $E_{20} \setminus 8$, $E_{22} \setminus 5$, $F_1 \setminus 1$, $F_1 \setminus 2$, $F_1 \setminus 3$, $E_2 \setminus 6$, $D_{17} \setminus 6$, $D_3 \setminus 2$, $D_3 \setminus 4$, $D_2 \setminus 4$, $A_2 \setminus 4$, $B_1 \setminus 4$, $B_3 \setminus 1$, $B_7 \setminus 4$, $C_3 \setminus 4$;*
2. *The graph $C_4 \setminus 5$ has set of vertexes gluing endpoints of St_6 another them $E_{22} \setminus 5$;*
3. *There are 62 graphs with nonorientable genus 1 as: $F_6 \setminus 2$, $F_6 \setminus 3$, $G_1 \setminus 5$, $E_{19} \setminus 2$, $E_{20} \setminus 9$, $E_{22} \setminus 1$, $E_{22} \setminus 2$, $E_{27} \setminus 3$, $E_{27} \setminus 7$, $F_1 \setminus 9$, $E_2 \setminus 1$, $E_2 \setminus 5$, $F_1 \setminus 8$, $E_2 \setminus 8$, $A_1 \setminus 2$, $E_5 \setminus 1$, $E_5 \setminus 2$, $E_6 \setminus 1$, $E_6 \setminus 2$, $E_6 \setminus 7$, $E_{11} \setminus 1$, $E_{11} \setminus 5$, $E_{11} \setminus 6$, $E_{11} \setminus 8$, $E_{18} \setminus 2$, $D_4 \setminus 1$, $D_4 \setminus 5$, $D_4 \setminus 7$, $D_9 \setminus 4$, $D_{12} \setminus 6$, $D_{12} \setminus 8$, $C_4 \setminus 1$, $C_4 \setminus 2$, $C_7 \setminus 2$, $D_3 \setminus 1$, $D_3 \setminus 6$, $D_3 \setminus 8$, $D_2 \setminus 1$, $D_2 \setminus 2$, $D_2 \setminus 5$, $A_2 \setminus 6$, $E_1 \setminus 8$, $E_1 \setminus 1$, $E_2 \setminus 1$, $B_1 \setminus 6$, $B_3 \setminus 5$, $B_7 \setminus 1$, $B_7 \setminus 2$, $B_7 \setminus 6$, $B_7 \setminus 3$, $B_7 \setminus 5$, $B_7 \setminus 7$, $C_1 \setminus 8$, $C_1 \setminus 5$, $C_1 \setminus 1$, $C_2 \setminus 3$, $C_3 \setminus 5$, $C_3 \setminus 1$, $C_3 \setminus 2$, $C_3 \setminus 7$;*
4. *The graph $E_{18} \setminus 1$ is subgraph of $E_{18} \setminus 2$.*

Corollary 7. *The 41 non-outer-projective planar graphs with genus 0 have number reachability of their set of vertices equal 3 and following value of θ -characteristic:*

1. $\theta = 1$ for next graphs: $F_6 \setminus 1$, $F_6 \setminus 4$, $G_1 \setminus 3$, $E_{19} \setminus 1$, $E_{19} \setminus 5$, $E_{19} \setminus 6$, $E_{20} \setminus 7$, $E_{20} \setminus 1$, $E_{20} \setminus 8$, $E_{22} \setminus 2$ for red vertices only, $E_{27} \setminus 2$, $E_{27} \setminus 6$, $F_1 \setminus 5$, $E_2 \setminus 2$, $E_2 \setminus 4$, $E_2 \setminus 6$, $E_2 \setminus 10$, $E_3 \setminus 1$, $E_5 \setminus 2$, $E_6 \setminus 5$, $E_{11} \setminus 2$, $E_{11} \setminus 7$, $D_4 \setminus 3$, $D_4 \setminus 6$, $D_9 \setminus 1$, $D_9 \setminus 5$, $D_{12} \setminus 2$, $D_{12} \setminus 5$, $C_7 \setminus 1$, $C_7 \setminus 3$, $D_4 \setminus 5$, $D_2 \setminus 8$, $D_{17} \setminus 6$, $E_2 \setminus 4$, $E_2 \setminus 2$, $B_7 \setminus 8$, $C_2 \setminus 2$, $C_3 \setminus 9$.
2. $\theta = 0$ for next graphs: $A_1 \setminus 1$, $C_4 \setminus 3$, $E_1 \setminus 6$.

Corollary 8. *The next 11 non-outer-projective planar graphs with genus 1 have number reachability of their set of vertices equal 3 and $\theta = 1$: $E_{27} \setminus 5$, $E_{27} \setminus 9$, $F_6 \setminus 3$, $E_3 \setminus 7$, $E_{11} \setminus 3$, $E_{11} \setminus 4$, $D_9 \setminus 2$, $D_{12} \setminus 3$, $D_4 \setminus 10$, $D_4 \setminus 6$, $C_2 \setminus 9$.*

Thanks to ours teachers and soldiers of Ukraine.

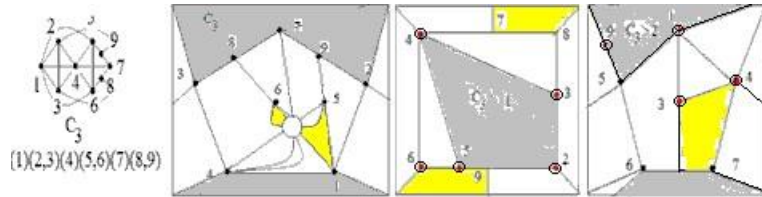


Figure 1: The illustrations for coloralles.

References

- [1] M.P. Khomenko. The φ -transformations of graphs. Preprint of the IM AHU. Kyiv. 383, 1973.
- [2] M.P. Khomenko. Topological aspects of graph theory. Preprint of the IM AHU. Kyiv. 299, 1970.
- [3] B.Mohar, C. Thomassen. Graphs on Surfaces. *Johns Hopkins University Press*, 412, 2001.
- [4] S. Hur. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Ohio State University, Phd dissertation, 237, 2008.
- [5] D.Archdeacon, N.Hartsfield, C.H.Little, B.Mohar. Obstructions sets for outer-projective-planar graphs. *Ars Combinatoria* 49,113–128; 1998.
- [6] Anna Flototto. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, Universitat Bielefeldvorgeleg, 2010.
- [7] V. Petrenjuk. About φ -transformation graphs as a tool for investigation. *Proceedings of the fourth International Conference on Computational Linguistics and Intelligent Systems, COLINS 2020. Volume I: Main Conference Lviv, Ukraine, April 23-24,2020*,1309-1319.
- [8] K. Scott. Outermobius and cylindrical graphs. Senior Thesis, Princeton University, 1997.
- [9] D. Archdeacon, P. Huneke A Kuratowski Theorem for Nonorientable Surfaces. *Journal of combinatorial theory, Series B.* 46: 173–231, 1989.
- [10] V.I. Petrenjuk. On the structure of planar subgraphs of obstruction graphs of a nonoriented surface of a given genus. *Physico-mathematical modeling and information technologies* 33: 105–109, 2021.
- [11] P.Skoda. Obstructions for embedding graphs into surfaces. Simon Frazer University, PhD dissertation, 133, 2012.
- [12] D.Bienstock, Dean N. On obstructions to small face covers in planar graphs. *J. Combin. Theory Ser. B.* 55: 163–189, 1992.
- [13] D. Bienstock, C.L. Monma. On the complexity of covering vertices by faces in a planar graph. *SIAM J. Comput.* 17: 53–76, 1988. doi:10.1137/0217004.
- [14] B. Mohar. Face Covers and the Genus Problem for Apex Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 82: 102–117, 2001. doi:10.1006/jctb.2000.2026.

- [15] B. Mohar. Apex graphs with embeddings of face-width three. *Discrete Mathematics*, 176: 203–210, 1997. doi:10.1016/S0012-365X(96)00363-9.
- [16] V.I. Petrenjuk, D.A. Petreniuk, O.V. Orishaka. The structure of projective planar subgraphs of obstruction graphs of a given surface. *Cybernetics and computer technologies*, 2: 1–20, 2022. doi:10.34229/2707-451X.22.2.0.
- [17] V.I. Petrenjuk, D. A. Petreniuk. On the algorithm for constructing 2-connected minors of the Klein surface. *Physico-mathematical modeling and information technologies*, 37: 72–74, 2023.
- [18] R. van Dam Edwin, Jack H. Koolen, Hajime Tanaka. Distance-regular graphs. Survey. *E-JC*, DS22: 2016.
- [19] B. Mohar, P. Skoda. Excluded minors for the Klein bottle I. Low connectivity case. *Journal of Combinatorica, Series B*, 164: 80–108, 2024. doi:10.1016/j.jctb.2023.10.002.
- [20] B. Mohar, P. Skoda. Excluded minors for the Klein bottle II. Low connectivity case. *Journal of Combinatorica, Series B*, 166: 80–108, 2024. doi:10.1016/j.jctb.2023.12.006.
- [21] LeDa. A library of efficient data types and algorithms, Max Planck Institute for Computer Science.

7.2. QUASIMETRICAL PROPERTIES OF PLANAR SUBGRAPHS OF THE NONPROJECTIVE GRAPHS.

The task is constructing connected nonplanar graphs with a given nonorientable genus on base simple planar graphs G with a given set of points M , where the point is vertex or interior point of edge, $M = \{m_i\}_{i=1}^k$, which has a given cell's– distance length $D_G(M)$ and a fixed number of reachability $t_G(M) > 1$, $\theta_G(M) > 0$, as different parameters of a set of cells, and minimum relative to a given cell's– distance length in the operation of removing an edge of a graph G or a point of a set M .

The main tool is the method φ –transformation of graphs by M.P. Khomenko.

The main results:

–the quasimetrical properties of planar subgraphs of obstruction graphs, in particular, the Klein surface and the structure of minimal planar graphs relative to a fixed cell's–distance length of a given set of points are investigated,

–an algorithm for calculating the cell's–distance length of a given set of points of a planar graph,

–the estimation of the genus of the φ –transformation of a pair $(G, St_{|M|}(v))$ on graph Q , where a graph G with a set of points M , which has a reduced cell's–distance of length $D_G(M)$, and a star $St_{|M|}(v)$ with a set of hanging vertices of power $|M|$, by amalgamation each pair of species (every point of M , an every hanging vertex of a star) with a vertex of the graph Q , is given, then we have the inequality: $0 \leq \gamma(Q) - D_G(M) \leq 2(t_G(M) - \theta_G(M) - 1)$, where $1 \leq D_G(M) \leq 3$, $t_G(M) > 1$, $\theta_G(M) > 0$.

If replace star on quasistar $St_{|M|}(H)$ with planar centre H and do similar φ –transformation of a pair $(G, St_{|M|}(H))$ on the graph Q then have an analogous estimation of nonorientable genus $\gamma(Q)$.

The main concepts and designations are taken from [1-3]. The authors of many articles studied the structural properties of graph–obstructions of a given nonoriented surface as a nonoriented 2-manifold without holes and their prototypes were built as a basis from which, by removing or compressing some set of edges and possibly adding new edges without changing the genus, graph–obstructions of a given surface are formed. Thus, studies of the wide questions of the structure of graphs of the nonorientable genus were carried out in [?, ?, ?]. Similar issues were considered in [?, ?, ?]. In [?, ?] the structural properties of graphs as the φ –image of a planar graph and either a simple star or an obstruction graph of a projective plane were investigated. In order to construct an obstruction graph of a given the nonorientable genus as a φ –image of a graph and a simple star, or a quasistar with a center a 2–minimal planar graph, consider the problem of studying the properties of planar graphs that are minimal with respect to a given set of vertices with fixed characteristics as those length of chain of the cells and by the reachability number of a given subset of the set of points. Similar metrical and pseudometrical properties of graphs and investigation results may be found in [?]. In [?, ?, ?] was presented original techniques and results, for example, the method of constructing all 2–connected minors of the Klein surface was given [?, ?]. We will assume that the minimal embedding f of the graph G to the nonoriented surface N has a combinatorial representation through the finite set of the closed paths formed by traversing along the time arrow the edges and vertices on the border of each cell from the set $N_f(G)$. The main tool of authors is the method φ –transformation in which large graphs are regarded as a set of small and simple subgraphs. For this, they may have some common parts, that can be identified and amalgamated when constructing or reconstructing an entire structure from a finite number of substructures.

The article has an introduction and three parts. In part 1 where the metric properties of planar subgraphs of obstruction graphs, in particular the Klein surface, are investigated. Part of the solution to our task is the

construction of nonisomorphic minimal planar graphs G with a given set of points M with a given cell–distance length D , which is critical with respect to the given cell–distance length. The graphs from the given set, partially from the list in Figure 2, In theorem 9 was built a set $L(D)$ of graphs G on the basis of which it is possible to build prototypes of graphs–obstructions Q , so–called apex graphs, of bounded nonoriented genus $\gamma(Q)$, by φ –transformation of the graph G and a simple star by identifying different pairs of points, composed of the points of a given set M and hanging vertices of a star into separate vertices of the φ –image is graph Q .

Let the minimal embedding f of the graph G to the nonoriented surface N be given, which realizes the reachability number $t_G(M, N)$, $t_G(M, N) = t$, that is, it is the smallest subset $\{s_i\}_{i=1}^t$ of the set $S_G(N, f)$, $S_G(N, f) = \mathcal{N}f(G)$, composed of the cells on the borders of which there are points from the set M .

In each graph G the following transformation can be presented: $\varphi : (H + St_n(g_0) \sum_{i=1}^n (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^n)$, as the φ –image of the graph H and the star $St_n(g_0)$ with hanging vertexes g_i amalgamated with the points a_i to the points a_i^* for all i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Analogously to the famous characteristics of the embedding of a graph to an oriented surface on the subset $\{s_i, s_j, s_k\}$ of the set $S_G(N, f)$, where $f(M) \subset \partial s_i \cap \partial s_j \cap \partial s_k$, was introduced some new. Denote the characteristic $\theta_G(M)$, $\theta_G(M) = \theta = 1$, of set M , when the conditions $\partial s_i \cup \partial s_j \cup \partial s_k$ is fulfilled, i.e. at least, one common point on their borders, which is the centre of a cell star formed from three cells $\{s_i, s_j, s_k\}$. Denote the characteristic $\partial\theta_G(M)$, $\partial\theta_G(M) = \partial\theta = 1$, if arbitrary pairs of these cells have at least one common point on their borders, that is, they form a cell–cycle of length 3 from three cells $\{s_i, s_j, s_k\}$.

Note 1. Let us denote by $\angle(s_i, s_j)$ and call the angle between cells or pseudo cells s_i, s_j of the set $S_G(N, f)$ where N is nonoriented surface, the smallest star of the graph G centered on a , $a \in G^0 \cap (\partial s_i \cap \partial s_j)$, with a set of edge–rays located on one side relative to the point of intersection of the boundaries of cells s_i, s_j . These edges or their parts will be inserted into the Mo'bius strip glued to the plane to form a pseudocell, on the border of which the union of the boundaries s_i, s_j are placed.

Note 2. Let f be the given minimal embedding of the graph H in the nonoriented surface N . Will be denoted by $\beta(\angle(s_1, s_2))$ the operation of transforming the edges $e_1, e_2, f(e_1) \subset \partial s_1, f(e_2) \subset \partial s_2$, with a common vertex a of cells s_1, s_2 , where $f(e_1) \cup f(e_2) \subseteq \partial s_{12}$, and $f(M) \subset \partial s_1 \cup \partial s_2$, where $f(M) = f(\{a_i\}_{i=1}^m)$. Gluing the Mo'bius strip to the cell s_{12} do it as follows: split an arbitrary internal point $f(x_i)$ of the edge $e_i, e_i = (a_i, b_i)$ to the points x_i', x_i'' , where $i = 1, 2$. Let's cut out in the middle of s_{12} an elementary disc centered at x_i and place on his border diametrically opposite pairs of points $(x_1', x_2'') (x_1'', x_2')$, as the endpoints of the parts of crossed edges on the plane of the elementary disk. In this way, we obtain a pseudo cell s of an nonoriented surface N' , where $\gamma(N') = \gamma(N) + 1$, $\partial s = \partial s_1 \cup \partial s_2$, in which it is possible to embed by embedding f the graph G in the surface N' , that part of the star $f'(St_n(g_0))$ which is glued to the points of the set $f(M) \cap \partial s$ and thus obtain a new embedding.

Note 3. By the quasistar $St_G(H)$ with the center H we mean a subgraph or a part H of the graph G with a set of hanging edges attached by one endpoint to a vertex or an edge point of the subgraph H , and other endpoints belong to the set of joins M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$.

Definition 4. By the cell's-distance let's name the cell's chain $L_G(s_i, s_j, f)$ between the boundaries of cells s_i, s_j with subsets L_i, L_j of the points of the connected graph G specified on them, where $L_i \subseteq G^0 \cap \partial s_i, L_j \subseteq G^0 \cap \partial s_j$, with the smallest ordered set $J, J = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+k}, s_j\}, J \subset Nf(G)$, of cells which have common points on the boundaries of consecutive cells, with the length $d_G(s_i, s_j, f)$, where $d_G(s_i, s_j, f) = k + 1$.

The number $k + 1, k > 0$, we will call the length of the cell's path or simply cell-distance length if consecutive pairs of cells of path have, at least, one common edge, point or vertex of the graph G on their bounders.

If $k = 0$, then a subset of the set J consisting of, at least, two consecutive cells with one common vertex on the boundaries will be counted as one cell and we will say that a simple cell's chain L_{ij} is defined on the set $J, L_{ij} = L(s_i, s_j)$, length 1.

If the set M is located on the boundaries of cells from the set $\{s_i\}_{i=1}^n$, where $n > t > 2$, then will be called the cell's tree $T(M, f)$ with the central cell s_1 the union of all cell's

Chains $L_G(s_1, s_i, f)$ with lengths $d_G(s_1, s_i, f), d_G(s_1, s_i, f) = k_i + 1$, for all pairs of cells (s_1, s_i) .

Will be called the cell-distance length of the set M and cell-distance length of the cell's tree $T(M, f)$ the number $\min_{\forall f \in F} \sum_{i=1}^n (k_i + 1)$ calculated for each central cell s_1 and all nonisomorphic embedding $f, f: G \rightarrow \Sigma_0$, from the set F .

The set $L_G(s_1, s_i, f)$ (if $t = n = 2$ then the set J describe here), will be called the lattice covering or cell-covering of the set M .

Note 5. For a minimal embedding f of a connected planar graph G , which realised the number of reachability $t_G(M)$ of a given set of points $M, f(M) \subseteq \cup \partial s_j$, where $j=1, \dots, k, k = \kappa + \kappa_1 + \kappa_2$, we have the following procedure $Ps(inputdata : T(M, G), outputdata : N, N', D_G(M))$ for the transformation of the set of cell's paths $\{L_G(s_1, s_j, f)\}_{j=1}^k, k > 0$, of the Euclidean plane to one cell of a nonoriented surface N' by connecting 2-handles and, at least, one Mo'bius strip. The procedure $Ps(inputdata : T(M, G), outputdata : N, N', D_G(M))$ written below in lemma 1 Section 3 also calculates the value $\kappa_1 + 2\kappa_2$, where is the number of cell's chains of length 1 or 2 and with the initial cell s_0 , which we will call the abbreviated cell length of the set M and denote by $D_G(M)$, because in this way the number of Mo'bius strips is taken into account, without the number of 2-handles, required to construct the embedding of the planar graph to the nonorientable surface on which the given set M of points of the graph G will be reachable.

Note 6. The number $\kappa_1 + 2\kappa_2$ calculated in this way will be called the reduced cell-distance length of the set M and denoted by $D_G(M)$ when calculating the cell-distance length of a given set M of the planar

graph G of the points of the graph, for each nonisomorphic embedding of the planar graph G , it is necessary to construct an extension of the embedding of the planar graph G to the embedding in the nonoriented surface N' (the Euclidean plane with, at least, one the Mo'bius strip), on which the set of points M is reachable. A cell–distance length of 1 or 2 between a pair of cells with given subsets of graph points is necessary, and a set of 2–handles and one Mo'bius strip glued to the Euclidean plane is sufficient. We note the expediency of considering the cell–distance length modulo 3, because this distance becomes insignificant in view of the connection of the 2–handle, which increasing the nonoriented genus by 2, to the first and last cell of the chain.

Definition 7. Let a connected planar graph G with a given $M = \{a_i\}_{i=1}^m$ and minimal embedding f , which on the boundaries of cells from the set $\{s_i\}_1^t$, realizes the reachability number t and on the set $\{s'_j\}_1^d$ realizes the cell–distance length d of the set M , where $d = D_G(M)$, $\{s'_j\}_1^d, \{s_i\}_1^t$ are subsets of set $\Sigma_0 \setminus f(G)$.

Will be called the double coverage of the set of points M , and denote by $TC_G(M, t, d)$, a pair of subsets $(\{s_i\}_1^t, \{s'_j\}_{j=1}^d)$, where $\{s_i\}_1^t \cap \{s'_j\}_{j=1}^d = \emptyset$. Denote as $TC_G(M)$ the smallest inclusive set $\{s'_j\}_1^d$ which realised cell–distance length $D_G(M)$ and is the smallest inclusive set of cells in cell's chains $L(s_i, s_j)$ that connect the central cell s_i with other cells s_j for $j = 1, 2, \dots, d$, where $d > t, t > 0$.

Definition 8. For a given set of points $M, M = \{a_i\}_{i=1}^m$, let the planar graph G with the reachability number $t_G(M, \Sigma_0)$, where $t_G(M, \Sigma_0) = t, t > 2$, have the $Ps()$ procedure give the number $D_G(M, t, f) = 2\kappa + \kappa_1 + 2\kappa_2$ for each nonisomorphic minimal embedding $f: G \rightarrow \Sigma_0$ of the graph G in Σ_0 . Denote the number $\kappa_1 + 2\kappa_2$ by the $D_G(M, t, f)$.

We will call the reduced cell–length between the subsets L_i, L_j of the set M the number $D_G(M, t)$, where $D_G(M, t) = \min_{f \in fGN} D_G(M, t, f)$, where $M = L_i \cup L_j, L_i \cap L_j = \emptyset$, and which are located on the borders of cells $s_i, s_j, \{s_i, s_j\} \subset \Sigma_0 \setminus f(G)$, where fGN is the set of all nonisomorphic embeddings of the graph G to Σ_0 that realize the reachability number $t_G(M, \Sigma_0)$ and the cell–distance length $D_G(M, t)$ of the set of points M .

Definition 9. We will call the set $M, M = \{a_i\}_{i=1}^m$, the points of the graph G the reachability number t , where $t_G(M, \Sigma_0) = t$, critical relative to the reduced cell–length $D_G(M)$ in the operation of removing an arbitrary element a_i , if the inequality holds $D_G(M \setminus a_i) < D_G(M)$, or relative to the operation of compressing the edge $u = (ab)$ to the point a' (if $\{a, b\} \subset M$, then instead of M we will consider the set $M' = (M \setminus \{a, b\}) \cup \{a'\}$) if the inequality $D_{G_u}(M') < D_G(M)$ holds.

Definition 10. We will call the graph G , with a given set of points M , where critical with respect to the shortened cell length $d_G(M)$ in the operation of removing an arbitrary point of the set, minimal concerning to $d_G(M)$ in the operation of removal or compression to a point of an arbitrary edge u , if $d_{G \setminus u}(M) + 1 = d_G(M)$, or $d_{G_u}(M') < d_G(M)$, where G_u is a graph with an edge $u = (a, b)$ compressed to a point a' and $M' = (M \setminus \{a, b\}) \cup a'$. Note the following:

1. An example of a minimal graph with a cell–distance of length 1 is the graph K_4 , where M is the set of all vertices, or $K_{2,3}$ with a subset of vertices of degree 2, respectively, the graph $K_{3,3}(a,b)$ with the set of points $M = \{a,b\}$, and the 1– partitioned graph K_4 is the set M consisting of all vertices of degree 2, has a cell– distance length 2.
2. In the future, if we are talking about the genus of the graph Q as the φ –image of the planar graph G and the quasistar, when amalgamating pairs of points of the set M with hanging vertices of the quasistar, then we will understand the cell’s–distance length as the reduced length of the cell chain, which covers a given set of points of the planar graph.

MAIN PART 1

The quasimetrical properties of planar subgraphs of obstruction graphs, particularly the Klein surface and the structure of minimal planar graphs relative to a fixed cell–distance length of a given set of points are investigated in lemmas 11, 12, 13.

In theorem 14 was build a set $L(D)$ of graphs G based on which it is possible to build prototypes of graphs–obstructions Q , so–called apex graphs, of bounded nonoriented genus $\gamma(Q)$, by φ –transformation of the graph G and a simple star by identifying different pairs of points, composed of the points of a given set M and hanging vertices of a star or quasistar, into separate vertices of the φ –image is graph Q .

The main result is following: If the φ –transformation of a pair $(G, St_{|M|}(v))$ of a graph G with a set of points M , which has a reduced cell–distance of length $D_G(M)$, and a star $St_{|M|}(v)$ with a set of hanging vertices of power $|M|$, by identifying each pair of species (points of M , a hanging vertex of a star) with a vertex of the graph Q , is given, then we have the inequality: $D_G(M) \leq \gamma(Q) \leq 2(t_G(M) - \theta_G(M) - 1) + D_G(M)$, where $1 \leq D_G(M) \leq 3$

Lemma 11. *Let for a connected planar graph G a partition of the set M into non-empty sets be given and a cell’s tree $T_G(M)$ be defined in which the vertices will be subsets of the set M located on the boundaries of the cells of the minimal nonorientable embedding $f: G \rightarrow \Sigma_0$, and the edge will be the presence of a common point for the boundaries of the cells of the set M .*

The following statements hold for a connected planar graph G :

1. *Cell–distance length $d_G(M)$, $f(M) \subset \partial s_i \cap \partial s_j$, between a given pair of cells of the minimal nonoriented embedding $f: G \rightarrow \Sigma_0$, satisfies the inequality $d_G(M) \leq \rho(M_i, M_j) + 1$, where $\rho(M_i, M_j)$ is the smallest metric distance between pairs of arbitrary points of subsets M_i, M_j of the set $M = \bigcup_{i=1}^k M_i$, where $M_i \cap M_j = \emptyset, M_i \subset \partial s_i, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, |\Sigma_0 \setminus f(G)|$.*

2. Let a lattice tree $T_G(M)$ be defined, in which the vertices are subsets of the set M located on the boundaries of the cells of the minimal embedding $f: G \rightarrow \Sigma_0$, and the edge is the presence of a common point for the boundaries of the cells of the set M . If the set M is placed on the boundaries of more than two cells, then the cell-distance length between its subsets is no more than 1 of the sum of the lengths of the shortest simple chains between pairs of arbitrary vertices of the tree $T(M)$.
3. If for a planar graph G and a given set of points $M: (t_G(M) = 3) \wedge (\theta_G(M) = 1)$, then $d_G(M) = 2$, and if $(t_G(M) > 3) \wedge (\theta_G(M) = \lfloor (t_G(M) - 1)/2 \rfloor)$, then $d_G(M) = \theta_G(M) + 1$;
4. Every obstruction graph of a nonorientable surface has edges covered by subgraphs homeomorphic to $K_{2,3}$ or K_4 ;
5. The 1-connected planar graphs minimal to cell-distance length d consist of k copies of graphs $K_{2,3}$ or K_4 : for $d = 2$ are $k = 3$ and the sets of points without a common vertex, for $d = 3$ are $k = 2$ and the sets of all their vertexes.

Proof. Statements 1, 2, 3 of Lemma 6 follow from the above notations and definitions. Proof of statement 4. Since each edge of the obstruction graph of the nonoriented genus of the graph G on the Euclidean plane intersects at an interior point with at least one edge, it is placed by a certain minimal embedding on the Mo'bius strip of the nonoriented surface together with at least one edge. Then an arbitrary edge is an edge of the homeomorphic subgraph K_4 , which in turn is a subgraph or part of a subgraph of the homeomorphic Kuratowsky graph. On the other hand, both Kuratowsky graphs have edge coverage by a pair or triple of homeomorphic K_4 subgraphs. The graph-obstruction C_4 will have an edge covered by a finite set of graphs or parts of homeomorphic K_4 . The eighth map shows the edge covering $K_{3,3}$ by two parts homeomorphic to the graph K_4 , one without the given edge, and the second part obtained by complete. □

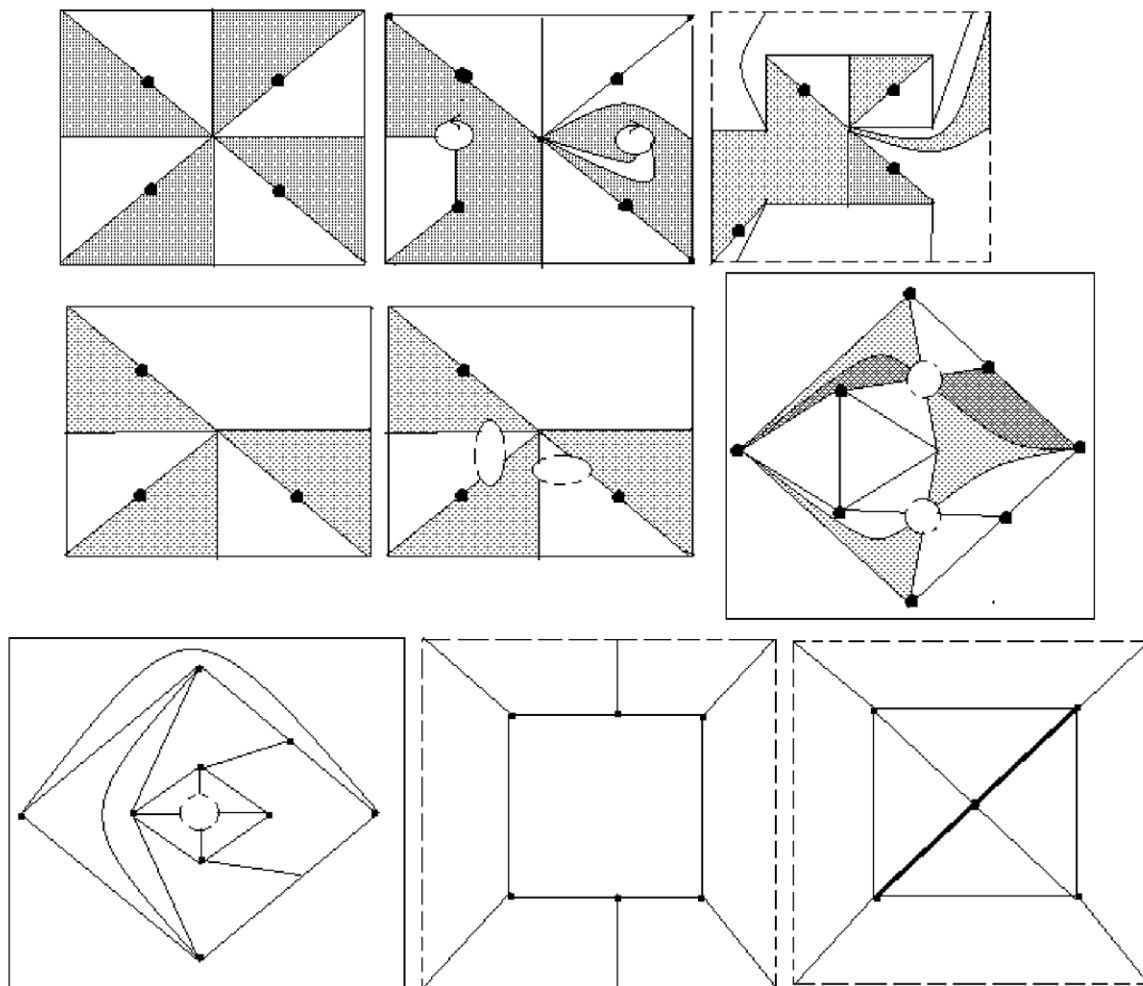


Figure1: The illustrations for lemma 11. removing one of the three nonadjacent edges, except for the given edge. On the ninth map Figure 1, by three homeomorphic wheel graphs W_4 as K_5 without two non-adjacent edges, one without four edges with a common vertex v , two of them are selected edges, and the other two are formed from the wheel

O_4 by four pointed edges by alternate removal of one of the indicated edges. Of the other side is a quasistar with center K_4 or $K_{2,3}$ from each vertex of which a ray–edge emerges, the hanging vertices of which have vertices on a simple cycle. Proof of statement 5 follows from the list of graph-obstructions for projective plane. The proof of Lemma is follows. Let’s explain Figure 1. In the first three maps on Figure 1, joining the 2–handle and the Mo’bius strip to the Euclidean plane will lead to embedding the graph H in the Klein surface with the set M of the four given vertices with the reachability number 4 and the theta characteristic $\theta_H(M, \Sigma_0) = 1$. On the fourth and fifth maps of the connection of the 2–handle to the Euclidean plane with by the set of three specified (in bold) vertices with a reachability number of 3 and a theta characteristic of 1. The sixth and seventh maps illustrate examples of gluing on the terminal vertices of a pair of K_4 graphs, the 8th and 9th maps illustrate examples of statement 3 of Lemma 1.

Lemma 12. *The following relations hold:*

1. *The following graphs are minimal with respect to the cell–distance length equated 1: $K_{2,3}$ with a set of three vertices of degree 2, K_4 with a selected pair of points of nonadjacent edges, $K_5 \setminus e$ with the set of vertices of the removed edge, K_4 with all vertexes;*
2. *2–connected graphs G_i , $i = 1, 2, 3, \dots, 8$, shown on the maps of first two rows of Fig. 2, as planar connected subgraphs of graph–obstructions of the following nonprojective planar graphs: B_7 , C_3 , D_3 , C_4 , D_2 , $K_{1,2,2,2}$, E_{22} which is $(K_7 \setminus C_4^1)$, E_2 , B_3 , together with the bold vertices of their set M are minimal with respect to the cell–distance length 2; Another 1–connected graphs G_i , $i = 9, 10, 11, 12, 13$, are shown on the maps of first map of third row, last map in the fourth row and all maps on the fifth row of Fig. 2, accordingly, are connected planar subgraphs of graph–obstructions of the some nonprojective planar graphs and they are the φ –image of a pair of graphs with relation 1 and are minimal with respect to the cell’s distance length 2.*
3. *For a given set M of points on the borders of the cells, the sets realising the cell– distance length $d_G(M)$ may not have common elements with the set of cells on their boundaries which the number $t_G(M)$ is realised.*
4. *The graphs G_i , from the set: E_{19-1} , D_2 , E_{27} , G_1 , E_5 , F_{1-1} , F_{1-2} , C_4 , D_{12} , C_{7-1} , C_{7-2} , F_{6-1} , given in Fig. 4 are minimal with respect to the cell distance length of 2 given sets, composed of the given bold points, and are the φ –images of the pairs of graphs K_4 , $K_{2,3}$, $K_5 \setminus e$, by identifying the points of the corresponding pairs of simple chains and a simple chain or simple cycles into a simple cycle of the graph G_i , $i = 1, 2, 3, \dots, 12$.*

Proof. The diagrams of 2–connected graphs from G_1 until G_8 are presented in Figure 2 in the first eight cards. The next ninth and two latest cards of the last row are 1–connected graphs from G_9 until G_{11} . The proof of Lemma 7 has a constructive character, which follows from Figure 2, regarding relations 10. The graph G_1 is a φ –image of the graph K_4 (with two pairs of selected points on two 1–subjoined adjacent edges) and stars $St_4(v)$ for pairwise identification of one pair of hanging vertices of a star with points of 1–subdivision of a pair of adjacent edges e_1 , e_2 of graph K_4 , and the second pair with terminal vertices of the edge adjacent to e_1 , e_2 ; The graph G_2 is a φ –image of the graph K_4 (with three selected points of 1– and 2– subdivision of adjacent edges e_1, e_2) and the star $St_3(v)$ with the pairwise identification of two hanging vertices of the star with points 1–subdivision of edge e_1 , e_2 and the terminal

vertex of the third e_3 of these adjacent edges of the graph K_4 ; The graph G_3 is a φ -image of a pair of graphs $(K_4, K_{2,3})$ with the identified a pair of chains of length 2; The graph G_4 is a φ -image of a pair of graphs $(K_4, K_{2,3})$ with an identified pair cycles (z_1, z_2) , where z_1 is of length 3 with two adjacent 2-split edges, z_2 of length 4; The graph G_5 is a φ -image of a pair of graphs K_5 with a pair of nonadjacent edges e_i removed when identified pairs of cycles located at the terminal vertices of removed edges; Graph G_6 is a φ -image of a pair of graphs K_4 when the points of a pair of edges are identified; The graph G_7 is a φ -image of a pair of graphs K_4 with 1-divided edges of a cycle of length 3, when identifying points of cycles of length 4 and parts of edges, which adjacent to the edges of these cycles; The graph G_8 is a graph K_4 with all 1-partitioned edges; The graph G_9 is a φ -image of a pair of graphs K_4 , when the pair of vertices is identified; The graphs G_{10}, G_{11} are a φ -image of a pair of graphs $K_4, K_{2,3}$, according, when the pair of vertexes are amalgamated and have the cell-distance length 2 set of all vertexes without common vertex; As can be seen on the penultimate map of first series of Figure 2, where the vertices of the graph shown in bold make up the given set of M points, and the set of three cells that implements the reachability number $t_G(M) = 3$ is highlighted in blue, and the yellow is marked a set of four cells, on which the cell distance $d_G(M) = 3$ is realized. On the last map Figure 2, the vertices of the graph shown in black and red make up the critical set M with respect to the cell-distance length 3. \square

Let's explain to Figure 2. The first eight maps show 2-connected planar subgraphs of the obstruction graphs of the projective plane: $B_7, C_3, D_3, C_4, D_2, K_{1,2,2,2}, E_{22}$ or $(K_7 \setminus C_4^1), E_2, B_3$ with vertices highlighted in bold from sets M_3 with a cell distance of 2. After connecting the hanging vertices of a simple star to them, we get the graphs mentioned above. In the eighth map, the graph K_4 with 1-subdivision edges is a subgraph of the graph E_2 , and has a set M composed of the points of 1-subdivision of edges, where $(t_G(M) = 3) \wedge (\theta_G(M) = 1)$.

The ninth, tenth and eleventh maps are 1-connected graphs have a cell-distance length 2 for their sets M of bold vertexes. The next two graphs $(K_5 \setminus 2e)^*$ is nonminimal and $K_5 \setminus e$ is minimal cell-distance length 1 for their set M , from left to right. The two extreme graphs are subgraphs of the obstruction graphs of the nonprojective planar C_2, D_1 , with bold vertices from sets M with a cell-distance of 2, where $(t_G(M) = 3)$ and $(\theta_G(M) = 1)$.

Lemma 13. *A planar connected graph G with a given minimal subset of points M with a reachability number of 2 is minimal with respect to the cell distance 1 during the operations of removing an edge or contracting it to a point, and also when removing an arbitrary point from M is isomorphic to one of the following graphs:*

1. $K_{2,3}$ with a set M of three vertices of degree 2;
2. K_4 , where a set M is a pair of points of nonadjacent edges;
3. K_5 with a set M consisting of the terminal vertices of the removed edge;
4. K_4 , where a set M of all vertexes;

5. If $t_G(M) = 3$, $\theta_G(M) = 1$, $d_G(M) = 2$, then graph G is isomorphic to one of following graph : C2-1, D9-1, D9-2, D9-3, E27-1, F6-2, E2-1, E11-1, E11-2, E3-1, E5-1, D2-1, D12-1, C3-1, C4-1, which are presented on Figure 4.

Proof. Let the graph G be the minimal planar graph with respect to $d_G(M) = 1$ – the cell–distance length 1 of the given minimal set of points M_3 with reachability number 2. Suppose that it is not isomorphic to the graphs specified in the condition. Then the graph is either minimal with respect to the reachability number 2 and isomorphic to one of the graphs first row in Figure 3. According to the above definitions, on each of these graphs we will have an embedding of the graph in the plane, which realizes the reachability number 2 and the cell–distance length 1 for the set of given vertices. Minimal graphs with a set of given points of cell–distance length 1 and reachability number 2. \square

Let's explain some cards on the first row of Figure 3, from left to right. There are four minimal graphs on the first, second, fourth and fifth cards with the set of given points of cell distance length 1 and reachability number 2. In the sixth graph, it is possible to delete an edge and get the third graph, which has a subgraph from the second card.

MAIN PART 2

The estimation of the genus of the φ –transformation of a pair $(G, St_{|M|}(v))$ on graph

Q , where a graph G with a set of points M , which has a reduced cell–distance of length $D_G(M)$, and a star $St_{|M|}(v)$ with a set of hanging vertices of power $|M|$, by amalgamation each pair of species (every point of M , an every hanging vertex of a star) with a vertex of the graph Q , is given, then we have the inequality: $0 \leq \gamma(Q) - D_G(M) \leq 2(t_G(M) - \theta_G(M) - 1)$, where $1 \leq D_G(M) \leq 3$, $t_G(M) > 1$, $\theta_G(M) > 0$, is here. If replace star on quasistar $St_{|M|}(H)$ with planar centre H and do φ –transformation of a pair $(G, St_{|M|}(H))$ on the graph Q then have analogous estimation of nonorientable genus $\gamma(Q)$.

Theorem 14. *Let the connected planar graph G contain a subset M of the set of points with the cell–distance length $d_G(M) > 0$ and number of reachability $t_G(M) > 1$. The following relations take place:*

1. *If the graph Q is a φ –image of the pair $(G, St_m(v))$, where G is minimal for the cell–distance length $d_G(M)$ of the set M , $d_G(M) \in \{1, 2\}$ and a simple star $St_m(v)$, with the φ –transformation given by identifying each pair of points, one point from M and the other is a hanging vertex from set $St_{|M|}^0(v) \setminus v$ are amalgamated on the corresponding vertexes of graph Q .*

Then the nonoriented genus $\gamma(Q)$ satisfies the equality $\gamma(Q) = d_G(M)$;

2. *If the graph G is presented as a φ –image of a pair of graphs (G_i, G_j) when identifying a pair of vertices reachable on the plane or simple nonclosed nondegenerate chains or subchains of the graphs G_1, G_2 written out in lemmas 2, 1, respectively, with given sets of points M_{G_i}, M_{G_j} which are critical with respect to the cell–distance $d_{G_i}(M_i), d_{G_j}(M_j)$, respectively, then the graph G will contain a subgraph critical*

with respect to the cell-distance length $d_G(M)$, where $M = M_{G_i} \cup M_{G_j}$, and has place is a double inequality:

$$d_{G_i}(M_i) + d_{G_j}(M_j) - 1 \leq d_G(M) \leq d_{G_i}(M_i) + d_{G_j}(M_j) \\ j = 1, 2, 3, 4 ; \quad , \text{ where } i = 1, 2, \dots, 9, 10, 11,$$

3. If the graph G is presented as a φ -image of one of the given pairs of graphs (G_i, G_j) when identifying a pair of graphs reachable on the plane of simple cycles G_1, G_2 written in lemmas 7, 6, respectively, and with given sets of points M_{G_i}, M_{G_j} , which are critical with respect to the cell-distance $d_{G_i}(M_i), d_{G_j}(M_j)$, respectively, then the graph G will contain the subgraph is critical with respect to the cell's distance $d_G(M)$, where $M = M_{G_i} \cup M_{G_j}$, and the inequality $d_G(M) \leq d_{G_i}(M_i) + d_{G_j}(M_j)$, where $i = 1, 2, \dots, 11, j = 1, 2, 3, 4$.
4. If a graph edge is significant relative to the cell-distance length of a given set of points, then when removing this edge, the cell-distance length of a given set of points will decrease, at least by 1, and the reachability number of this set may not change.
5. If the φ -transformation of a pair $(G, St_{|M|}(v))$ of a graph G with a set of points M , which has a reduced cell-distance of length $D_G(M)$, and a star $St_{|M|}(v)$ with a set of hanging vertices of power $|M|$, by identifying each pair of species (points of M , a hanging vertex of a star) with a vertex of the graph Q , is given, then we have the inequality: $D_G(M) < \gamma(Q) < 2(t_G(M) - \theta_G(M) - 1) + D_G(M)$, where $1 < D_G(M) < 3$.

Proof. Let the planar graph G satisfy the conditions of this theorem as minimal with respect to a given set M with cell distance length 2. Let us prove relation 1. According to Definition 10, there exists an embedding f of the graph G in N_2 an nonoriented surface of genus 2 in which the given set M is located on the cell boundary s_0 . Let us continue the embedding of f by placing in the middle of s_0 the edges and vertices of the simple star $St_{|M|}(v)$. Let's identify pairs of points composed of elements multiples and hanging vertexes of the star. We obtain the graph Q as the φ -image of the pair $G + St_{|M|}(v)$, when identifying all pairs of points from the set M and from the hanging vertices of the star $St_{|M|}(v)$, to the corresponding vertexes of graph Q that is, $\gamma(Q) < 2$ and we has the embedding of the graph Q in N_2 . Let's prove the equality by the inverse method. Assume that $0 < \gamma(Q) < 2$ because a subset M of the set of points with the cell-distance length $d_G(M) > 0$ and number of reachability $t_G(M) > 1$. Then the graph Q contains a subgraph H homeomorphic to the Kuratowsky graph and has no subgraph homeomorphic to the obstruction graph for the projective plane. Let us show that in this case the graph Q has genus 1 and does not have a planar subgraph G of the set M , where M consists of points of the graph G that are critical with respect to the cell distance 2 and has reachability number 2. Note that according to statement 4 of Lemma 6, the graph $Q \setminus H$ contains a subgraph or part homeomorphic to K_4 or $K_{2,3}$. Let's use Euler's formula: $2|Q| - \gamma(Q) = v(Q) - e(Q) + s(Q)$, where $v(Q) = v(G) + 1$, $e(Q) = e(G) + |M|$, $s(Q) = s(G) + |M| + 1$. Since we have the condition $1 < d < 3$, then the cell star of the set M has three cells on the boundaries of which lie the points of the set M : the central cell and two cells adjacent to it, or a chain of three cells. That is the equality holds $2 - \gamma(Q) = v(G) + 1 - e(G) - |M| + s(G) + |M| - d + 1$, where $2 = v(G) - e(G) + s(G)$. When $d = 1$

then $2 - \gamma(Q) = 2 + 1 - 1 + 1$, will have $\gamma(Q) = -1$. and when $d = 2$ then $2 - \gamma(Q) = 2 + 1 - 2 + 1$, we will have $\gamma(Q) = 0$ a contradiction to the condition of theorem. The assumption is incorrect. The proof of relation 1 is finished. Note that according to [?], the obstruction graphs of the projective plane with less or equal ten vertexes are covered by two copies of Kuratowsky graphs. Therefore, the subgraph $Q \setminus H$ does not contain a subgraph or part of the homeomorphic K_4 or $K_{2,3}$ and is planar. Let's delete an arbitrary vertex v , $\deg(v) = n, n > 2$, of the graph H and consider the subgraph $H \setminus v$ containing a plane subgraph homeomorphic to K_4 or $K_{2,3}$ and denote by $N(v)$ the set of all vertices of this subgraph incident to the vertex v . The set $N(v)$ will have a reachability number of 2 and a cell distance of 1. Thus, subgraphs of the form $H \setminus v$ generate an exhaustive nonempty set of planar subgraphs on which it is possible to define a set M composed of points by the reachability number 2 and the cell distance length 2, which contradicts the assumption made.

Proving the relation 2. The inequality $d_G(M) \leq d_{G_i}(M_i) + d_{G_j}(M_j)$ will result of embedding of the graph G_j in the middle of the cell coverages of the sets M_i of the graph G_i , which is not included in the set of the cells covering the set M_j of the points of the graph G_j . Without identifying pairs of points or chains, we will have a coverage of the set M with cells of the union of sets of cell coverages of the sets M_i, M_j .

That is, we will have the upper bound for $d_G(M)$. Since an arbitrary cell of a graph embedded in a plane can be considered an external face, we will assume that the embedding of minimal graphs G_i, G_j with predefined sets of points M_{G_i}, M_{G_j} critical with respect to the cell-distance $d_{G_i}(M_i), d_{G_j}(M_j)$, respectively, have exactly the following one of the cells of the subset of cells that realizes the cell length $d_{G_i}(M_i), d_{G_j}(M_j)$ and its boundary contains parts of graphs to be identified. When identifying by points or simple chains, instead of two cells, there will be one external face with a border glued from the borders of two external faces without identified pairs of vertices or chains, and all other elements of the sets of realizations of the cell-distance will enter the combined set of cells, which will realize the cell-distance length $d_G(M)$ for which the inequality $d_G(M) > d_{G_i}(M_i) + d_{G_j}(M_j) - 1$, where $i = 1, 2, \dots, 9, j = 1, 2, 3, 4$. This proof is partially illustrated in Figure 3.

The proof of relation 3 is similar to the proof of relation 2. The relation 4 is illustrated on the thirteenth and fourteenth maps of Fig. 2.

Proof of relation 5. Let us prove the upper bound of the estimate of the genus of the graph Q . Due to the characteristics $t_G(M), \theta_G(M)$ of the set M , the set of cells, on the boundaries of which non-empty subsets of the given set M are located.

It is possible to stick to the Euclidean plane the number $t_G(M) - \theta_G(M) - 1$ of 2-handles in such a way that one end of each 2-handle is connected to s_1 of one is the first cell, on the boundary of which the subset M_1 is placed, and the other end of the handle is glued to another cell of the coverage of the set M . with the exception of one 2-cell $s_{|M|}$, which has a subset M' on the boundary. We will assume that from s_1 to this cell $s_{|M|}$, we will lay a cell chain with the smallest cell-distance length among all cell chains from s_1 to other cells of the coverage. If $d_G(M_1, M') > 3$, then we glue 2-handle one end to s_1 , and the other end of the additional $t_G(M) - \theta_G(M)$ -th 2-handle to s'' - the neighboring

adjacent cell relative to edge or parts of the edges of the angle between the cells $s_{|M|}$ and glue the Moebius strip so that a part of the common, s'' . In this way, we will construct a nonoriented surface of the genus $2(t_G(M) - \theta_G(M) + 1)$ with a non-2-cell on the boundary of which the set M will be placed.

If $d_G(M_1, M') = 3$, then we glue two Mo'bius strips to the cell chain and place on them parts of common edges or corner edges between the borders of neighboring cages of the chain. If $d_G(M_1, M') = 2$, then we glue one Mo'bius strip to the cell chain and place on them a part of the common edges or edges of the corner between the borders of the neighboring cells of the chain. Inequality $\gamma(Q) \geq 2(t_G(M) - \theta_G(M) - 1) + d_G(M)$, where $1 \leq d \leq 2$ is proved. Note that in this case $D_G(M) = d$, where reduced cell-distance length. To prove the lower bound of the genus of the graph Q , we use Euler's formula for the genus of a nonoriented surface $2 - \gamma(Q) = v(Q) - e(Q) + s(Q)$ and small values of

$D_G(M)$, where $D_G(M) = D = \kappa_1 + 2\kappa_2$, κ_i is the number of cells chains of the length i of the set M , where $\kappa_1 + 2\kappa_2 > 0$, $i = 1, 2$. For embedding a simple star $St(v)$ with central vertex v and $|M|$ hanging edges in the middle of a non-2-cell s_0 , it is necessary to turn into this cell a cells star of the set of points M of the graph G by connecting D Mo'bius strips to the cells of the chains of the Euclidean plane in such a way as to place on them the common edge of the neighboring cells of the chain, or part of this edge or parts of the edges of the angle between the neighboring cells. We obtain that $v(Q) = v(G) + 1$, $e(Q) = e(G) + |M|$, $s(Q) = s(G) + |M| - (2\kappa_1 + 3\kappa_2) + 1$, $2\kappa_1 + 3\kappa_2 = 2D - \kappa_2$, where $v(G)$ - the number of vertices, $e(G)$ - the number of edges, $s(G)$ - the number of $) + s(G) = 2$. For $D = 2$ we will have $\kappa_2 = 1$ and $\gamma(Q) = 2$.

That is $\gamma(Q) > D$, where $D_G(M) = D$, $D = 1, 2$. We have that for a simple star there is a double inequality: $6 \leq D_G(M) \leq \gamma(Q) \leq 2(t_G(M) - \theta_G(M) - 1) + D_G(M)$, where $1 \leq D_G(M) \leq 2$.

It is possible to prove the minimality of this embedding of the graph Q in a nonorientable surface N of genus $\gamma(Q)$ by the method of inverse. Suppose that there exists another embedding of the graph Q in a nonorientable surface N' of genus less than $\gamma(Q)$, Then we will have a Mo'bius strip h free from the edges of the graph Q , i.e. a crossed pair of edges on the plane is embedded, by at least one edge, in another external relative to the edges of the graph G , the strip h' , on which both the edge of the graph G and the hanging edge of the star are embedded. We remove all hanging edges and obtain a narrowing of this embedding that will place on a nonorientable surface N' of a lesser genus than $\gamma(Q)$ the set of points M on the boundary of one cell, which is a 2-cell with glued $\gamma(N')$, $\gamma(N') < D$, Mo'bius strips on which only the edges of the graph G are embedded. Thus, we will have that the set M will have a cell distance of less length than D , which contradicts the condition of relation 5. The assumption is incorrect. The proof of theorem is complete.

Let's explain the next rows of cards in Figure 3. On the second row are examples of linear synthesis of three copies of the K_4 graph (on the first map, identification by a pair of edges, on the second map by an edge and half of an edge, the fifth graph is glued by an edge and the length chain of two graphs K_4 and $K_{2,3}$) of minimal graphs with cell distance length 3 and nonlinear synthesis (third graph in the second row and first graph in third row) of minimal graphs for sets with bold vertices of cell-distance length 2 and 4, corresponding. The redundant edge of the graph is shown dotted on the fifth map of the third row. The set M of bold black vertices has the cell-distance length specified here. On the sixth map in the third row is the graph without an edge, shown as a dotted line, has a reachability number of 4 of the set M , and the cell-distance length of the set M is 3.

Theorem 15. Let a φ -transformation of a pair $(G, St_{M_1}(H))$ be given by associating

each pair of the following form: (points from M_G , hanging vertices from the set M_H of quasi-star $St_{|M|}(H)$) to a vertex of the graph Q , where is a planar graph G with a set of points M_G , of power $|M|$, which has a reduced cell-distance of length $D_G(M_G)$, and quasi-star with center H – a planar graph with a given subset M_H of vertices belonging to the terminal vertices of hanging edges, and has a cell-distance length $D_H(M_H)$, where the set of hanging vertices has a power M_H , where $|M_H| \leq |M|$ for certainty. If the following conditions are given:

1. An embedding f of a planar graph G in an Euclidean plane Σ_0 which realizes $t_G(M_G) > 2$, $\theta_G(M_G) > 0$ and a cell-distance length $D_G(M_G)$ of the set M_G of points on the boundary of the cell – s , $s \in \Sigma_0 \setminus f(G)$, $f(M_G) \subset \partial s$, $D_G(M_G) =$

$$2(t_G(M_G) - \theta_G(M_G) - 1) + \kappa_1(M_G) + 2\kappa_2(M_G), \text{ where } 0 \leq \kappa_1(M_G) + 2\kappa_2(M_G)$$

3; Extend embedding f of a planar graph G to nonorientable surface N of genus $D_G(M_G)$, which was formed from the Euclidean plane Σ_0 by glued $D_G(M_G)$ Mo'bius strips;

2. An embedding of f , $f : H \rightarrow N_H$ an embedding of a planar graph H in Σ_0 , which realizes $t_G(M_G) > 2$, $\theta_G(M_G) = 0$, and a cell-distance length $D_H(M_H)$ of set M_H and is placed on the boundary of the cell – s' , $s' \in \Sigma_0 \setminus f(H)$, $f(M_H) \subset \partial s'$, $D_H(M_H) =$

$2(t_H(M_H) - \theta_H(M_H) - 1) + \kappa_1(M_H) + 2\kappa_2(M_H)$, where $0 \leq \kappa_1(M_H) + 2\kappa_2(M_H) \leq 3$; Extend embedding of f to the nonorientable surface N_H of genus $D_H(M_H)$ which was formed from the Euclidean plane Σ_0 by glued $D_H(M_H)$ Mo'bius strips;

3. The set $St_{|M|}(H) \setminus H^0$ of hanging edges of a quasi-star $St_{|M|}(H)$ is partitioned into non-empty subsets M_i , so that one subset includes only those edges and edges of corners that intersect each other at internal points. Denote by $r(G, H)$, $r(G, H) = r > 0$, the minimum number of the Mo'bius strips which necessary for the embedding without intersections at internal points of all hanging edges of the quasi-star (together with those of its edges that form a cell corner), taken over all non-isomorphic embeddings of the quasi-star $St_{|M|}(H)$ into a cell s from the set $\Sigma_0 \setminus f(G)$, on the boundary of which is placed the set M , where the Euclidean plane Σ_0 has glued Mo'bius strips.

Then the nonorientable genus $\gamma(Q)$ of the graph Q satisfies the double inequality: $\min(D_G(M_G) + D_H(M_H)) \leq \gamma(Q) \leq \max(D_G(M_G) + D_H(M_H)) + r(G, H)$, where $\max(D_G(M_G) + D_H(M_H))$, $\min(D_G(M_G) + D_H(M_H))$ are the largest or, respectively, the smallest sum of the possible values of the reduced cell-distance length of given set of points, that is, the number of 2-handles and two positive non-zero numbers $\kappa_1(M_G) + 2\kappa_2(M_G)$, $\kappa_1(M_H) + 2\kappa_2(M_H)$, each of which is not more than 3.

Proof. Let all conditions of the theorem 15 be fulfilled. Denote by f , $f : H \rightarrow N_H$ the embedding of a planar graph H which realizes the cell-distance length $D_H(M_H)$, $D_H(M_H) > 3$ of set M_H and is placed on the boundary of the cell s' , $s' \in \Sigma_0 \setminus f(H)$. in an nonoriented surface N_H of genus $\gamma(N_H)$, $\gamma(N_H) = D_H(M_H)$,

Cut in the middle of the cells s, s' , along a regular subcell τ, τ' , and identify the boundaries of these regular cells while preserving the orientation of boundaries. Thus, we glue two cells into a tube $h(s, s')$ and nonoriented surfaces N, N_H , into one nonoriented surface Π of genus $\gamma(\Pi)$, $\gamma(\Pi) = D_G(M_G) + D_H(M_H)$ into which, by embedding $f', f' = f + f'$, the graphs G, H are embedded. Let's continue f' to all hanging edges of the quasi-star $St_{M_1}(H)$, allowing the placement on r Mo'bius strips of all those edges or edges of corners that intersect each other at internal points. If there are r intersections of hanging edges, then we need to glue the Mo'bius strips to the tube $h(s, s')$ of nonoriented surface Π and obtain an nonoriented surface Π' of genus $\gamma(\Pi') = D_G(M_G) + D_H(M_H) + r(G, H)$. Then $f'(Q)$ is embed in the nonoriented surface Π' and the graph Q has the nonoriented genus $\gamma(Q)$ satisfies the inequality: $\gamma(Q) \leq \max(D_G(M_G) + D_H(M_H) + r(G, H))$, where $\max(D_G(M_G) + D_H(M_H) + r(G, H))$ is the largest of the possible values of the reduced cell-distance length sets M_G, M_H . If the numbers h of 2-handles in both cases of $D_H(M_G), D_H(M_H)$ are nonzero, then take place inequality: $0 \leq \kappa_1(M_G) + 2\kappa_2(M_G) + \kappa_1(M_H) + 2\kappa_2(M_H) \leq 6$, where nonnegative numbers $\kappa_1(M_G) + 2\kappa_2(M_G), \kappa_1(M_H) + 2\kappa_2(M_H)$ less or equal 3. Let us prove the inequality: $\min(D_G(M_G) + D_H(M_H)) \leq \gamma(Q)$, where is the smallest sum of possible values of the reduced cell-distance length of the sets M_G and M_H , i.e. there are no 2-handles and $r = 0$ without intersections of hanging edges in interior points. We have to calculate the smallest number of two positive nonzero sums $\kappa_1(M_G) + 2\kappa_2(M_G), \kappa_1(M_H) + 2\kappa_2(M_H)$, each of which is at most 3. Let us consider f_G, f_H - minimal embeddings of graphs G, H in the Euclidean plane. Let us assume that the s_H -external face of the graph $f_H(H)$ is embedded in the middle of the cell s from condition 1, where $\partial s_H \cap \partial s = \emptyset$. Let us continue the embedding f_G, f_H to embeddings f'_G, f'_H , in nonoriented surfaces formed from Σ_0 by joining, at least, pairs of Mo'bius strips on which was realize $D_G(M_G), D_H(M_H)$, accordingly. This embeddings f'_G, f'_H placing parts of common edges on the strips and thus the sets M_G, M_H of points and will be on the boundaries of the cells s' and s'_H , derived from the cells s and s_H , where $f'_G(M_G) \subset \partial s', f'_H(M_H) \subset \partial s'_H$, respectively. We will place the hanging edges of the quasi-star $St_{M_G}(H)$ by embedding them in a ring $s' \setminus s'_H$, with minimal numbers of the intersection at the internal points of the edges and which coincides with f'_H , on the other edges of the graph H . Let us show that the embedding $f'_G + f'_H$ is minimal. By Euler's formula nonorientable genus of graph Q is $2 - \gamma(Q) = v(Q) - e(Q) + s(Q)$. Then amount of vertexes, edges, cells of graph Q are follow from the numbers of vertexes, edges, cells of graphs, $s(Q) = s(G)$, respectively. The number of cells is calculated by choosing two cells that are central when determining the reduced cell-distance length and forming a ring from them into which hanging edges are embedded without intersection at internal points.

Then this quantity is reduced by the numbers of the reduced cell-distance length transformations of cells into the one cell for each graphs G, H formed by embedding common edges or their parts on glued strips. Substitute these values into formula of Euler have the nonorientable genus $\gamma(Q)$ of graph Q $\gamma(Q) = D_G(M_G) + D_H(M_H) + 1$. Since there is an embedding of both graphs on an nonorientable surface, there must be at least one Mo'bius strip, or $D_G(M_G) > 1$, or $D_H(M_H) > 1$. Then the smallest sum of the possible values of the reduced cell-distance length of the sets and satisfies the equality $D_G(M_G) + D_H(M_H) = 1$. Then the equality holds $\gamma(Q) = 2$. The inequality $\gamma(Q) > D_G(M_G) + D_H(M_H)$ is proved. It is possible to prove the minimality of this embedding of a graph Q in an nonorientable surface of genus $\gamma(Q)$ by the method of inverse. Suppose that there exists another embedding of a graph in an nonorientable surface N' of genus less than $\gamma(Q)$, i.e. $\gamma(Q) < D$, where $D = D_G(M_G) + D_H(M_H)$. Then we will have h - a Mo'bius strip free from the edges of the graph Q , i.e. a pair of edges crossed on the plane is embedded, by at least one edge, in

another external relative to the images of the edges of graphs G and H , the strip h' , on which, at least, both the edge of the graph G , or the hanging edge of the quasistar $St_M(H)$, and the edge of the graph H are embedded. We remove all hanging edges of the quasistar $St_M(H)$ and obtain a restriction of this embedding which places on a nonorientable surface N' of genus less than $\gamma(Q)$ the set of points M on the boundary of one cell, which is a 2-cell with glued Mo'bius strips in the number $\gamma(N')$, where $\gamma(N') < D$, on which only the edges of the graphs G and H are embedded. Since these graphs do not have common edges, one of the common Mo'bius strips will be free from crossed edges of the graphs G and H . Thus, we have the following: either the set M will have a cell's distance of length less than $D_G(M)$, or the set M_H will have a cell's distance of length less than $D_H(M_H)$, which contradicts the condition of the theorem. The assumption is incorrect. The proof of the theorem is complete. \square

MAIN PART 3

A polynomial algorithm **A** for calculating the cells-distance length of a given set M with fixed partition on nonempty subsets of points of a planar graph and an approach by a linear syntheses to describe prototypes of minimal graphs with a given cell-distance length of a given set of points and procedure $Ps(inputdata : T(M,G), outputdata : N, N', D_G(M))$ for the transformation of the set of cell's paths $\{L_G(s_1, s_j, f)\}_{j=1}^k, k > 0$, of the Euclidean plane to one cell of a nonoriented surfaces N' or N'' by connecting 2-handles and, at least, one Mo'bius strip are presented here.

Algorithm A.

Enter a subset M of the set points of a connected planar graph G and their partitioning into nonempty subsets.

Print a spanning cell's tree of minimal cell-distance length D between given subsets of the set M as a union of cell's chains between some central cell with a subset on his boundary and all other subsets on the boundaries of other subsets of a given partition. *Input :*

1. The planar connected graph G with a given set M of points with reachability number k ;
2. The set $F(G) = \{f_i\}_{i=1}^{|F|}$ of all nonisomorphic embeddings of the graph G in the Euclidean plane Σ_0 ;
3. For each embedding f_i , which will be replaced later by closed chains (without changing the designations), formed by going around all points of the cell border of the 2-cell according to the time arrow; the subset of these combinatorial analogues of 2-cells contains all points from the subset M_i of the set M of the graph G ; boundaries, the set of 2-cells $S_G(\Sigma_0, f_i) = \{s_{ij}\}_{j=1}^{|N_j|}$, where $s_j \in \Sigma_0 \setminus f_i(G)$;
4. Function $PTG(inputdata: G \text{ is a connected graph; } outputdata: TG\text{-spanning tree of graph } G)$, which produces a spanning tree with time complexity $|G|^2$ at each call;
5. Function $Minpath(input: TG\text{-spanning tree of graph } G; v, u\text{-vertices of graph } G, d\text{min-length of the shortest path between input vertices})$ with the time complexity $|G|^2$ at each access gives the length

the shortest path between the input vertices of both the spanning tree and those not included in the spanning tree along the edges.

Output : D is the cell–distance length of the given partition of the set of points M of the graph G .

1: For i from 1 to $|F(G)|$ by step 1 do:

2: {

3: $f := f_i$; $T := PTG(G)$; $D := 0$; $MinD = 0$; 4: For j from 1 to $|M|$ by step 1 do:

5: {

6: $M_1 := M_j$; where $M_i = \{m_{ik'}\}_{k'=1}^{|M_i|}$;

7: }

8: For k from 2 to M by step 1 do:

9: { $M_k = \{m_{ik}\}_{k=1}^{|M_k|}$

10: $M_2 := M_k$; where;

11: $dl := 0$;

12: For l from 1 to $|M_1|$ by step 1 do :

13: {

14: $v := m_{11}$;

15: For r from 1 to $16 |M_2|$ by step 1 do :

17: {

18: $u := m_{22}$;

19: If $Dl > Minpath(T,v,u)$ then $dl := Minpath(T,v,u)$;

20: where Dl - cell distance between subsets M_1, M_2 ;

21: }

22: Print "The cell length between a pair of subsets", $M_j, M_k := Dl$;

23: $D := D + Dl$;

24: }

25: }

26: Print ("For the i -th embedding the cell distance of the set $M =$ ", D);

27: If $MinD > D$ then $MinD := D$;

28: }

29: Print ("The cell–distance length of the set $M =$ ", $MinD$); 30: End of Algorithm A.

Lemma 16. *Algorithm A correctly finds the cell-distance length D between the given subsets of the set M , which is a given subset of the set of points of the planar connected graph G with $|F(G)|$ – the number of all nonisomorphic embeddings in the Euclidean plane in polynomial time $O(|F(G)| * |G|^5)$.*

Proof. The mathematical support of algorithm A is statement 1 of lemma 11. If there is a set $F = F(G)$ of all nonisomorphic embeddings of the graph G in the Euclidean plane, then for each we calculate the cell distance of a given finite set of points with a fixed partition into nonempty subsets as the sum of the cell-distances of each pair of subsets of this partition. For a 3-connected graph, we have that $|F(G)| = 1$. The given standard functions perform the following in following time:

1. *PTG* (inputdata: G is a connected graph; outputdata: TG is the spanning tree of the graph G), with a time complexity of $O(|G|^2)$ at each call it produces the spanning tree of the graph G ;
2. *Minpath* (inputdata: TG –spanning tree of the graph G ; v, u – vertices of the graph G ; outputdata: d_{min} – length of the shortest path between the input vertices) with time complexity $|G|^2$ at each call gives the length of the shortest of the path between the input vertices of both the spanning tree drawn along the edges and those not included in the spanning tree of the graph G .

The upper estimate of the time work of algorithm A is $O(|F(G)| * |G|^5)$. The proof is finished. \square

Theorem 17. *Let there be a connected planar graph G with a given set M of essential points with respect to the cell-distance length $d_G(M)$ during the operation of removal from the set, $d_G(M) = d$, $3 > d > 2$ by the reachability number $t_G(M)$, $t_G(M) = t > 2$, and essential relative to the cell-distance by the set of edges during the operation of removal or compression to a point. The following interrelations apply:*

1. If $d_G(M) = 2$ and $t_G(M) = 2$, then the graph G is isomorphic to one of the first 7 graphs whose diagrams are shown in Figure 2, i.e. is the preimage of a ring with two nondegenerate simple cycles z_1 , length $l(z_1)$, where $z_1 \cap z_2 = \emptyset$, $l(z_1) > l(z_2) > 3$, which satisfy the condition e) and one of the following conditions a), b), c), d): a). $l(z_1) = 6, l(z_2) = 3$;
 b). $l(z_1) = 5, l(z_2) = 3$;
 c). $l(z_1) = 4, (l(z_2) = 4) \vee (l(z_2) = 3)$;
 d). $l(z_1) = 3, (l(z_2) = 4) \vee (l(z_2) = 3)$;
 e). The vertices of cycles z_1, z_2 make up the set M and pairs of vertices (v_1, v_2) of cycles z_1, z_2 , respectively, which are connected by an edge, belong to simple cycles of length no more than 5.
2. If the set M is divided into t nonempty parts $M_1, \dots, M_i, \dots, M_j, \dots, M_t$, where $M_i \cap M_j = \emptyset$, $D_G(M_1 \cup M_i) = 2$ for all M_i , $t_G(M) = t, t > 2$, then the graph G can be represented as φ -image of k copies of, at least, two graphs H_{1i}, H_{1j} by the way of amalgamation of the given's pairs of simple chains $L_{H_{1i}}, L_{H_{1j}}$ graphs H_{1i}, H_{1j} , which are isomorphic to one of the graphs $H_i, H_i = G(M_1, M_i)$, as shown above in lemmas or Figure 4, where $i < j, i, j = 2, \dots, t, 2 \leq k \leq t$

Proof. Let the conditions of the theorem be satisfied for the graph G . Let us prove relation 1. If $t_G(M) = 2$, then according to the definition of the reachability number of the set M , we will have an embedding of the graph in the Euclidean plane, which divides the set into two nonempty subsets located on the boundary cycles of two cells. According to the definition of cell-distance length $d_G(M) = 2$, each pair of edges (e_i, e_j) lies on the boundaries of a pair of cells (s_i, s_j) must belong to the boundary of at least one other cell s_0 , and this edges must be non-adjacent. Indeed, if we assume that the edges (e_i, e_j) are adjacent, that is, belong to the cells that form the corner, then this will mean that the $d_G(M) = 1$. Assumption is incorrect. Since the graph is relatively $d_G(M) = 2$ critical when any edge of graph G deleted or compressed to a point, then between the pair (e_i, e_j) there must be either a cell corner without a pair (s_i, s_j) , or a non-corner 2-cell s_0 , where $e_i \cup e_j \subset \partial s_0$. That is, the graph G is either a ring with two outer and inner cycles, between which lie the boundaries cycles of corner cells or non-corner cells, or a cell chain with two finite nondegenerate two simple cycles z_1, z_2 , where $z_1 \cap z_2 = \emptyset$, with lengths $l(z_1), l(z_2)$, where $l(z_1) l(z_2) \geq 3$, between which there must be two corners with cells (s_i, s_j) . that satisfy one of the conditions a, b, c, d. A 1-connected graph is isomorphic to the ninth graph in Figure 2, where there are examples of a cell chain and a ring.

If $t_G(M) = 3$, then according to the definition of the reachability number of the set M , we will have an embedding of the graph G in the Euclidean plane, which divides the set M into three nonempty subsets M_i , located on the boundary cycles of the cells $s_i, i = 1, 2, 3$. By defining the cell distance length, we will have at least three cells that contain nonempty subsets of the set M on their boundaries. Two cases are possible for $\theta_G(M)$: a) $\theta_G(M) = 1$, b) $\theta_G(M) = 0$. In case a), we will have, according to the definition of the cell distance length of set M , that the boundaries of the cells s_1, s_2, s_3 , will have at least one common point. Then the given cells form two cell corners that pass through two glued Mo'bius strips. Given the minimality of the graph G relatively of the cell distance length of set M , we will have an isomorphism of the graph K_4 with all 1-divided edges. In case b), we will have that two pairs of cells covering the set M will have at least one point in common. Then the 2-connected graph will have a structure similar to the one shown on the last map on first row in Figure 3, and the 1-connected graph is isomorphic to the graph on the tenth card, or last three graphs of the second row in Figure 2. The proof of relation 1 is complete. The relation 2 is following from the above lemmas. \square

Figure 3 has the explanations for this theorem 17. A graph with a given set of vertices highlighted in bold on the first map in the fourth row and the third map in the third row without an insignificant edge relative to the cell distance length 4 during the removal operation and the significance of the bold edge on the second and third map in the fourth row is established relative to of cell distance 4 during the removal operation. On the first and second maps in the fifth row, planar minimal graphs with respect to the cell distance length equal 3 sets of selected vertices are shown. The sixth map in the fifth row shows a graph with a set of given points of cell distance length 3 and the minimum when the point is removed.

Lemma 18. *For a minimal embedding f of a connected planar graph G of a given set of points M located on the boundaries of the smallest inclusive set $s_{j=1}^k, k > 0$, of cells covered by cell's chains with $T(M, G), T(M, G) = L_G(s_0, s_j)_{j=1}^k$ starting at central cell s_0 an equidistant cell from the others in the set $\{s_j\}_{j=1}^k$, which may not belong to this set. The procedure for transforming an embedding of a graph G in the Euclidean plane Σ_0 into an embedding in an nonoriented surface N' by joining 2-handles and, at least, one*

Mo`bius strip and assumes the presence of functions for calculating the reachability number and theta-characteristic of a given set of points of a planar graph.

That is, instead of converting a cell's chain with glued Mo`bius strips into a single cell, we need to attach a 2-handle to the initial cell and the final cell of a given cellular chain of length $d_G(s_1, s_i, f) > 2$, or to the last cell of the chain, if we have only one cellular chain, in the following steps:

1. Start of procedure $Ps(inputdata : T(M, G), outputdata : N', N'', D_G(M))$.
2. Let's choose the cell s_0 central from among those cells that do not belong to $T(M, G)$.
3. Let's calculate $t_G(M) = t$, $\theta_G(M) = \theta$;
4. Let the characteristic $\theta_G(M) = 0$. Let us collect into the set P_2 , $P_2 = \{(s_0, s_j)\}_{j=1}^{t_2}$ all pairs of cells (s_0, s_j) , having a cell's distance length $d_G(s_0, s_j, f) > 2$, and a subset M_2 of the set of points M located on the boundaries of cells ∂s_j for all $j = 1, 2, \dots, k$. Using t_2 pieces of 2-handles $h(s_0, s_j)$, glued to those pairs of regular subcells that do not intersect their boundary with the boundary of the cells to which they belong, and attach to the cell s_0 all t_2 cells from the set P_2 and denote the created cell by s_{00} . We obtain an embedding of f graph G in the nonoriented surface N' with genus $2t_2$, which implements reachability on ∂s_{00} set M_2 .

If not the entire set M is located on the boundaries of cells of the set, then we glue $k - t_2$ Mo`bius strips to the surface N' on which we place parts of the common edges of the cells from the cell chains. Then we will have an embedding f' of the graph G in the nonoriented surface N'' of genus $2t_2 + k - t_2$, which implements reachability on the ∂s_{00} of the set M .

5. Let the characteristic be the $\theta_G(M) = \theta$, where $\theta > 0$. Consider the set $P_2 = (s_0, s_j)_{j=1}^k$ that satisfy the condition for the cell's distance length $d_G(s_0, s_j, f) > 2$ and a subset M_2 of the set of points M located on the cell boundaries ∂s_j , for all $j, j = 1, 2, \dots, k, k > 0$.

Let's calculate the number of those pairs $(s_0, s_{j_1}), (s_0, s_{j_2})$ from those triples of cells $(s_0, s_{j_1}, s_{j_2}), j_1 < j_2, j_1, j_2 = 1, 2, \dots, k$, which have, at least, one common point on the boundaries. Using the 2-handle, we transform this triple of cells into a cell s_{00} . Let us denote by $\theta_G(M_2) = \theta_2$. the number of 2-handle glued to these triples of cells in the manner defined here or in [6]. Converting a triple (s_0, s_{j_1}, s_{j_2}) into a single cell s_{00} will consist in embedding on the 2-handle the smallest subgraph H of the graph G , generated by the angle from a pair of edges or their parts on the boundaries $\partial s_{j_1} \cup \partial s_{j_2}$ and incident vertex common to these three cells, with the 2-handle glued with first end to the cell s_0 , and the second end to cells with boundary $\partial s_{j_1} \cup \partial s_{j_2}$. Then the number of cells for attaching the second end of the 2-handle will decrease by $2\theta_2$ and using 2-handles in the amount of $t_2 - 2\theta_2 + \theta_2$. The set of all such cells and triples of cells from among those satisfying the condition are transformed into a single cell s_{00} , which is formed from the cell s_0 .

Thus, the embedding f is built $f: G \rightarrow N', \gamma(N') = 2(t_2 - \theta_2)$, and the subset M_2 of set M reachable on ∂s_{00} . In case, when all elements of the set M lied on the $\partial s_0 \cup \partial s_j$, then instead of the cell s_j we take in one cell's chain $L_G(s_0, s_j, f)$ the previous cell s'_j and paste the 2-handle $h(s_0, s'_j)$ instead of the 2-handle $h(s_0, s_j)$.

Then glue the Mo`bius strip and put on it a common edge or part of an edge with $G \cap (\partial s_j \cap \partial s'_j)$. Thus, the continuation of the embedding f to the embedding $f, f: G \rightarrow N$, in nonoriented surface N genus $\gamma(N)$, where $\gamma(N) = 2(t_2 - \theta_2) + 1$, for which the set M_2 is reachable on ∂s_{00} .

6. Let $\theta_G(M) = 0$. Denote by $P_1, P_1 = \{(s_0, s_j)\}_{j=1}^{t_1}$, the set of all pairs of the cells (s_0, s_j) , satisfying the condition for the cell's distance length $d_G(s_0, s_j, f) = 1$ and a subset $M \setminus M_2$ located on the boundaries of the cells ∂s_j for all $j, j = 1, 2, \dots, t_1, t_1 > 0$. Let's glue Mo`bius strips in the amount t_1 pieces to N – nonorientable surface, which was construct above from point 4) and has the genus $\gamma(N)$, where $\gamma(N) = 2t_2$. Put on each Mo`bius strips parts of the edges of the common angle between the cells of the pair (s_0, s_j) , or part of an edge from $G^1 \cap (\partial s_0 \cap \partial s_j)$. Thus, the continuation of the embedding f to the embedding $f', f': G \rightarrow N''$, in nonorientable surface N'' genus $\gamma(N'')$, where $\gamma(N'' = 2t_2 + t_1$, for which the set $M \setminus M_2$ is reachable on ∂s_{00} .

7. Let $\theta_G(M) > 0$. Let us denote by $\theta_G(M \setminus M_2) = \theta_1$, where $\theta_1 > 0$.

Denote by $P_1, P_1 = \{(s_0, s_j)\}_{j=1}^{t_1}$, the set of all pairs of the cells (s_0, s_j) , satisfying the condition for the cell's distance length $d_G(s_0, s_j, f) \leq 2$ and a subset $M \setminus M_2$ located on the boundaries of the cells ∂s_j for all $j, j = 1, 2, \dots, t_1, t_1 > 0$. A chain of cell length 2 can have three cells and start with a cell s_1 and apart from it there should be no other cell chains, because, otherwise, from these two there will be one chain of length greater than 2, which will be subject to reduction by the 2– handle glued as indicated above. A chain of cell length 1 can have two cells, one of which is central, or more provided that, at least, all cells of the chain have a common point on the boundaries. Since each 2–handle has an equivalent of two Mo`bius strips, for each pair of consecutive cells we glue Mo`bius strips in the number of pieces to the N – nonoriented surface from item 4) of genus $\gamma(N), \gamma N = 2(t_2 - \theta_2)$, and embed on each strip either parts of the edges of the common angle between the cells of the pair (s_0, s_j) , or part of the edge from $G^1 \cap (\partial s_0 \cap \partial s_j)$. If there are $\kappa_1 + \kappa_2$ pairs of cells (s_0, s_j) , where κ_i , that form cell chains of length $d_G(s_0, s_j, f), d_G(s_0, s_j, f) = i$, where $i = 1, 2$ and $j = 1, 2, \dots, t_1$, then they are transformed into one cell of the surface by gluing to them one or two Mo`bius strips, respectively, for each cell s_j . Thus obtain a continuation of the embedding f to the embedding $f', f': G \rightarrow N''$, in the nonoriented surface N'' of genus $\gamma(N''), \gamma(N'' = 2t_2 + t_1 + \theta_1$, for which the set $M \setminus M_2$ is reachable on ∂s_{00} .

8. If the central cell belongs to the set of the cell covering of a given set of points of a planar graph, then add -2 to all formulas of points 4), 5) regarding the genus of the constructed surface.

9. The procedure $Ps(inputdata : T(M, G), outputdata : N, N'', D_G(M))$ is complete.

Thanks to ours teachers and soldiers of Ukraine.

REFERENCES

- [1] M.P. Khomenko. φ -transformations of graphs. Preprint of the IM AHU. Kyiv. 383, 1973.
- [2] M.P. Khomenko. Topological aspects of graph theory. Preprint of the IM AHU. Kyiv. 299, 1970.
- [3] B.Mohar, C. Thomassen. Graphs on Surfaces. *Johns Hopkins University Press*, 412, 2001.
- [4] S. Hur. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Ohio State University, Phd dissertation, 237, 2008.
- [5] D. Archdeacon, P. Huneke A Kuratowski Theorem for Nonorientable Surfaces. *Journal of combinatorial theory, Series B*. 46: 173-231, 1989.
- [6] V.I. Petrenjuk. On the structure of planar subgraphs of obstruction graphs of a nonoriented surface of a given genus. *Physico-mathematical modeling and information technologies* 33: 105-109, 2021.
- [7] Anna Fl'ototto. Embeddability of graphs into the Klein surface. University Bielefeld, PhD dissertation, 174, 2010.
- [8] P.Skoda. Obstructions for embedding graphs into surfaces. Simon Frazer University, PhD dissertation, 133, 2012.
- [9] D.Bienstock, Dean N. On obstructions to small face covers in planar graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*. 55: 163–189, 1992.
- [10] D. Bienstock, C.L. Monma. On the complexity of covering vertices by faces in a planar graph. *SIAM J. Comput.* 17: 53-76, 1988. doi:10.1137/0217004.
- [11] B. Mohar. Face Covers and the Genus Problem for Apex Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 82: 102–117, 2001. doi:10.1006/jctb.2000.2026.
- [12] B. Mohar. Apex graphs with embeddings of face-width three. *Discrete Mathematics*, 176: 203–210, 1997. doi:10.1016/S0012-365X(96)00363-9.
- [13] V.I. Petrenjuk, D.A. Petreniuk, O.V. Orishaka. The structure of projective planar subgraphs of obstruction graphs of a given surface. *Cybernetics and computer technologies*, 2: 1–20, 2022. doi:10.34229/2707-451X.22.2.0.
- [14] V.I. Petrenjuk, D. A. Petreniuk. On the algorithm for constructing 2-connected minors of the Klein surface. *Physico-mathematical modeling and information technologies*, 37: 72–74, 2023.
- [15] R.van Dam Edwin, Jack H. Koolen, Hajime Tanaka. Distance-regular graphs. Survey. *E-JC*, DS22: 2016.
- [16] B. Mohar P. Skoda. Excluded minors for the Klein bottle I. Low connectivity case. *Journal of Combinatoria, Series B*, 164: 80–108, 2024. doi:10.1016/j.jctb.2023.10.002.
- [17] B. Mohar P. Skoda. Excluded minors for the Klein bottle II. Low connectivity case. *Journal of Combinatoria, Series B*, 166: 80–108, 2024. doi:10.1016/j.jctb.2023.12.006.

Figure 2: The illustrations for lemma 12.

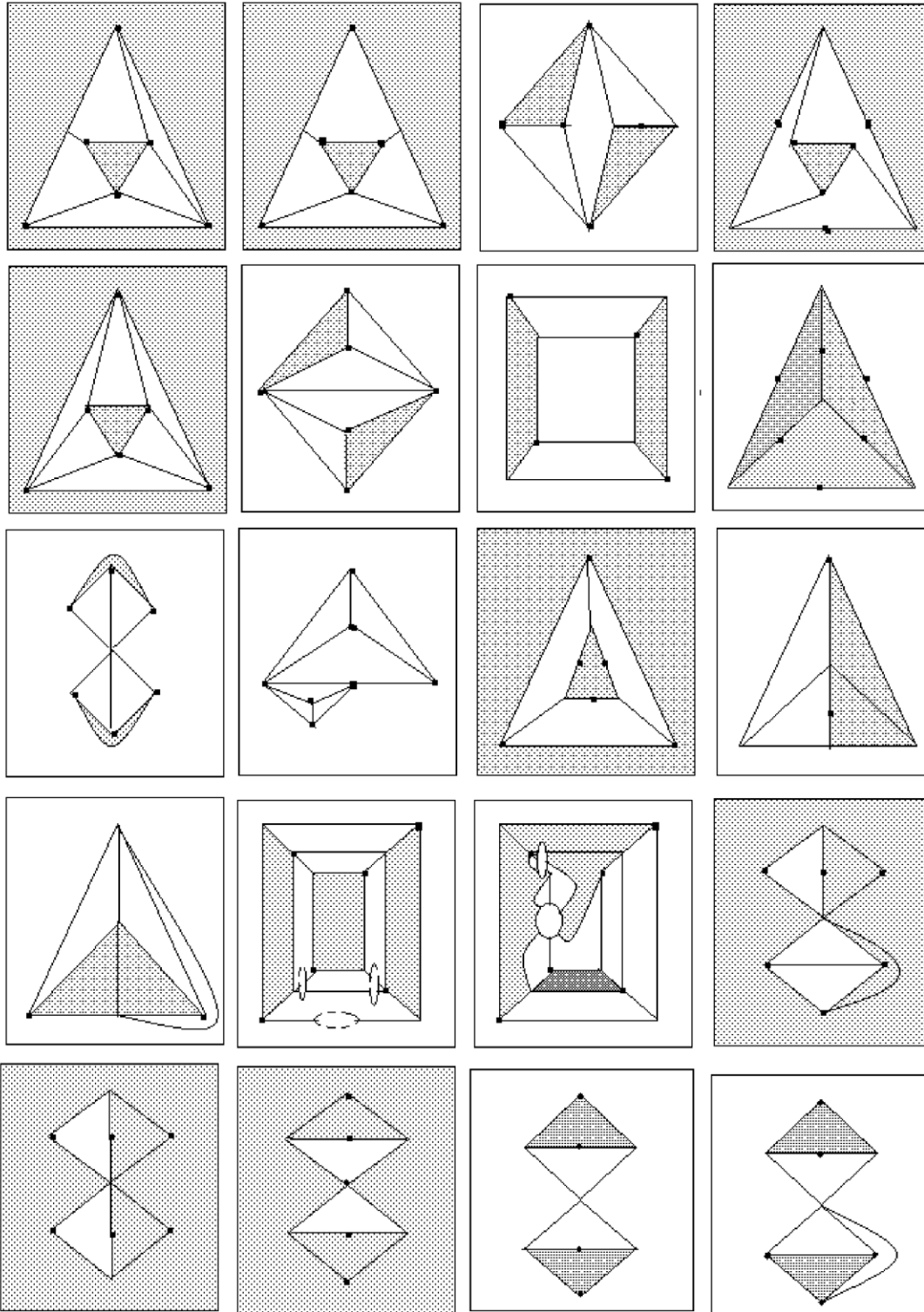
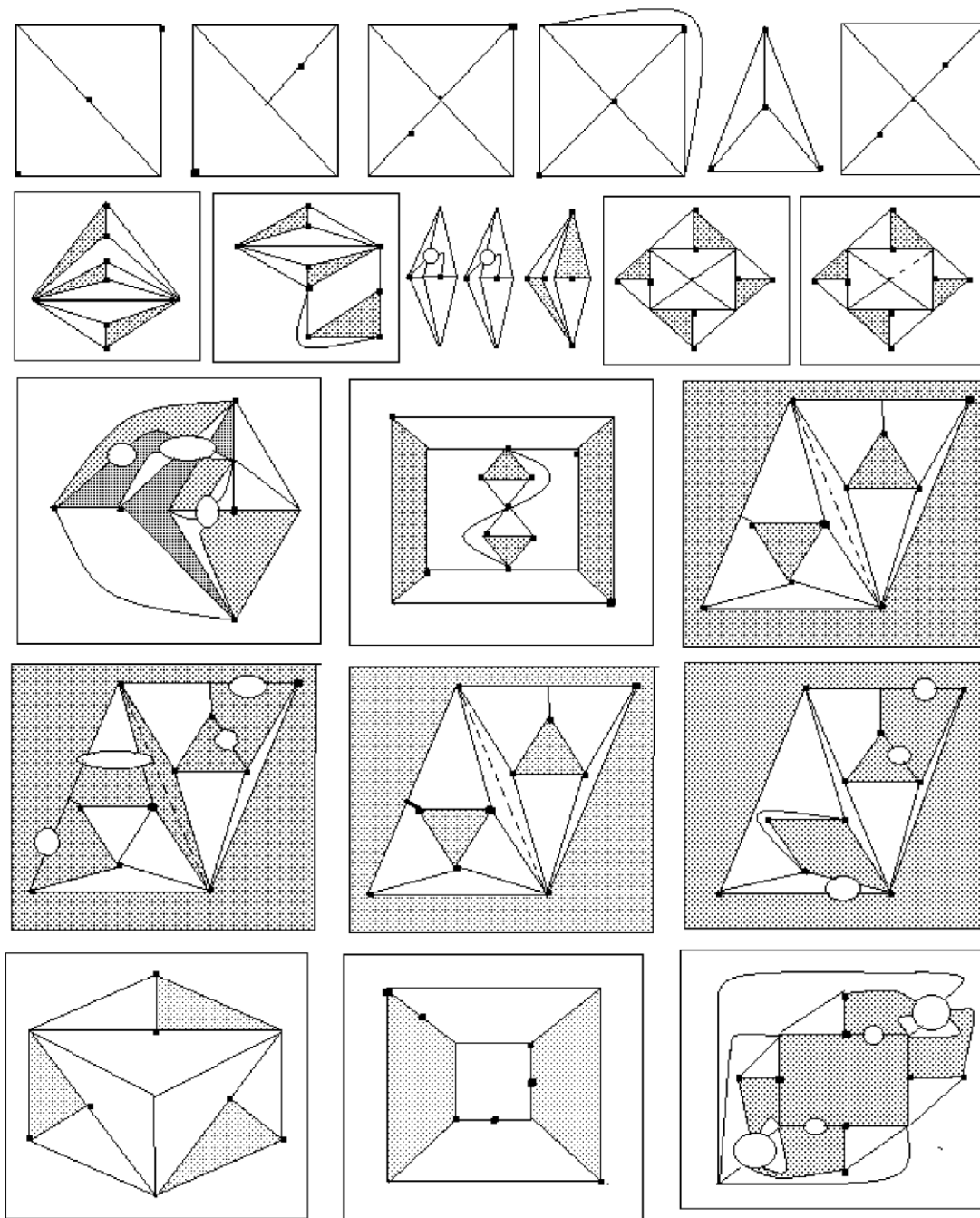


Figure 3: The illustrations for lemma 13 and theorems 14,15.



List of the minimal planar graphs with cell's distance length 2

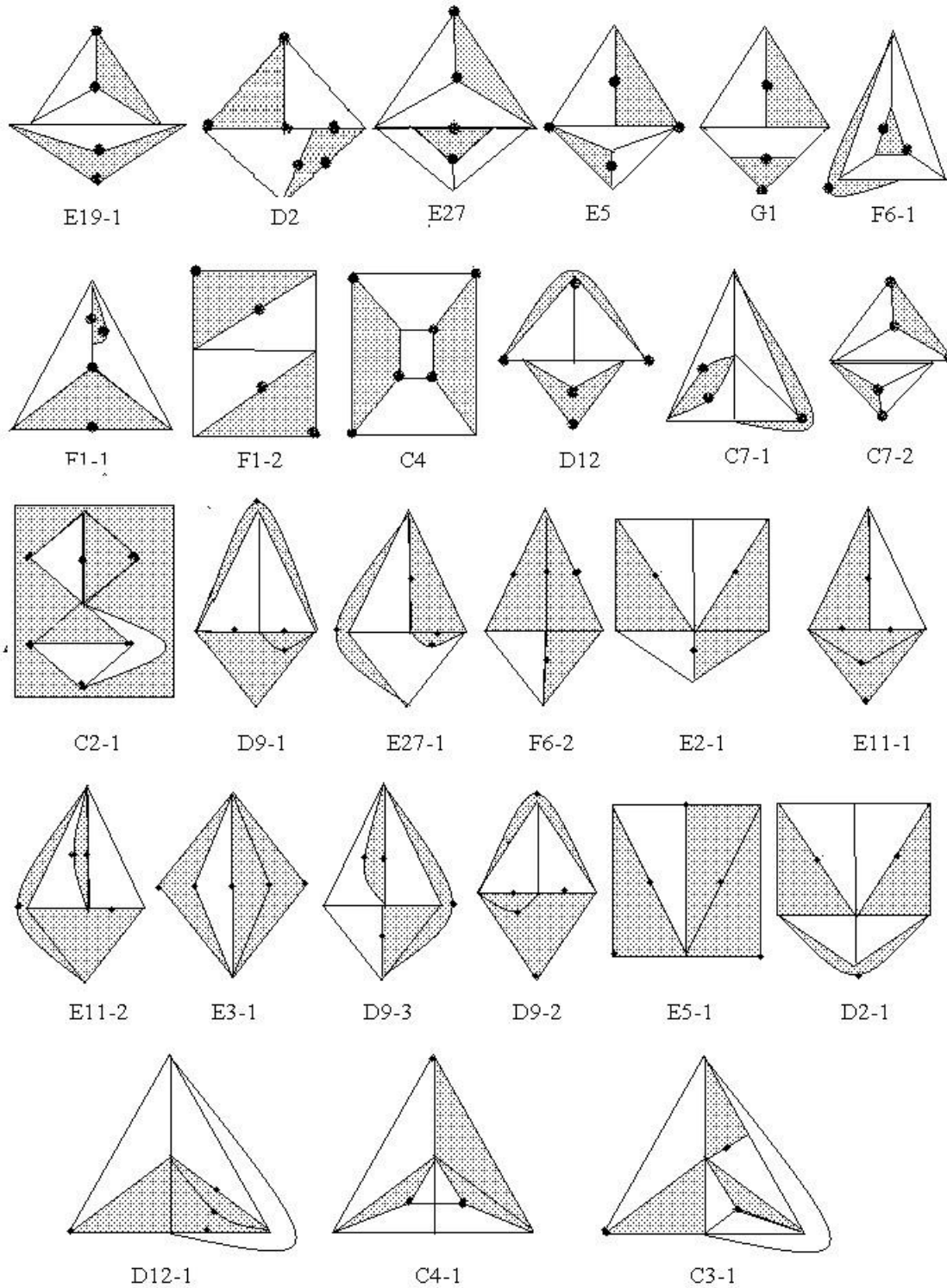


Figure 4: The list of minimal graphs with cell's distance length 2.

РОЗДІЛ 8. СИНТЕЗ МІНОРІВ ПРОЕКТИВНОЇ ПЛОЩИНИ ПО ЗАДАНОМУ ПІДГРАФУ ГОМЕОМОРФНОМУ ГРАФУ КУРАТОВСЬКОГО

8.1 ПРО СИНТЕЗ МІНОРІВ ПРОЕКТИВНОЇ ПЛОЩИНИ З ПІДГРАФОМ ЧИ ЧАСТИНОЮ ГОМЕОМОРФНОЮ $K_{3,3}$

Розглянуто задачу побудови моделей графів-обструкцій та мінорів поверхні Клейна, зокрема 3-зв'язних, шляхом синтезу пари мінорів проективної площини, які мають частинні чи породжені підграфи гомеоморфні $K_{3,3}$, або такі що стягуються до них при стисканні в точку, принаймні, одного ребра. Задача є наразі актуальною та має розв'язок на основі направлено синтезу та методу φ -перетворення пар мінорів проективної площини з підграфом гомеоморфним $K_{3,3}$.

Направленість синтезу означає використання сумісних пар мінорів та ототожнення пар відповідних вершин підграфів гомеоморфних $K_{3,3}$, яка означає можливість розширення мінімального вкладення першого графа в поверхню Клейна до вкладення другого мінора в одну з кліток поверхні Клейна з приклеєною лентою Мебіуса.

Побудова моделей мінорів поверхні Клейна полягає у вивчення структурних властивостей проективних підграфів $G \setminus v$, де v - задана вершина інцидентна вершинам множини M мінора G проективної площини та, згідно теореми 1, має використовувати множину всіх неізоморфних вкладень підграфа $G \setminus v$ які розташовують кожну точку w з множини M на границі однієї клітки, а решту точок з множини $M \setminus w$ на границі другої клітки.

Іншими словами, будемо для цих вкладень особливі кліткові ланцюги довжини 1, які з'єднують граничні цикли із точками заданої множини M точок графа $G \setminus v$. Список всіх різних зв'язних підграфів $G \setminus v$ мінорів G проективної площини з породженим підграфом $K_{3,3}$ в додатку А, де червоними є точки з множини M відповідної вершини v .

Додаток 1 має 109 2- та 3-зв'язних моделей мінорів поверхні Клейна синтезованих як φ -образи $C_3 \setminus 1$ та допустимих мінорів проективної площини.

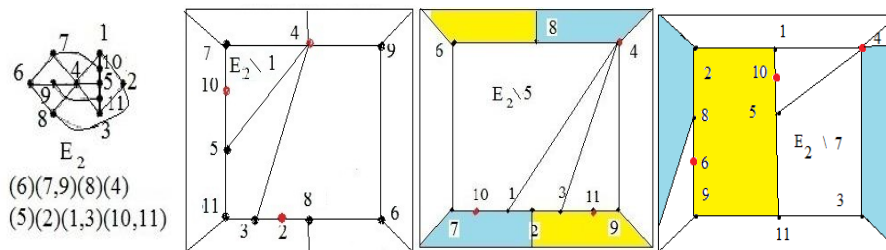
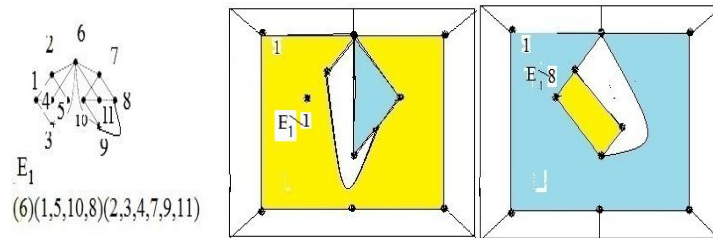
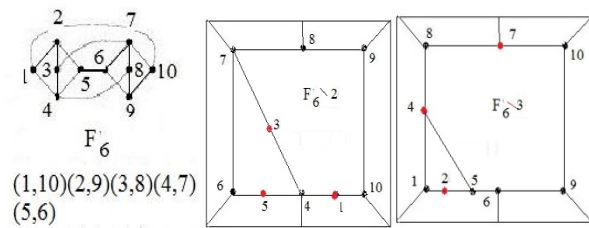
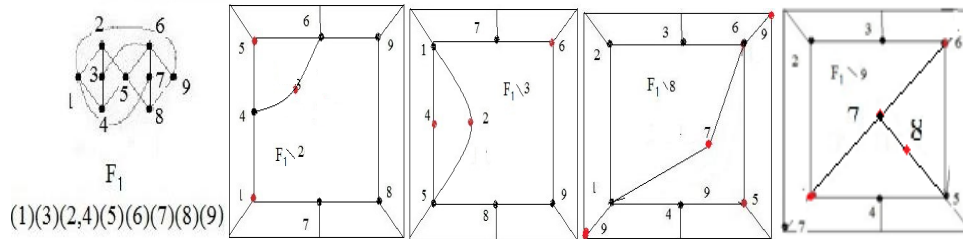
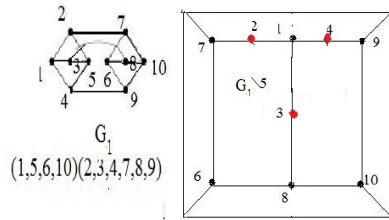
Додаток 2 містить список з 247 моделей мінорів поверхні Клейна синтезованих по $K_{3,3}$ з пари $(F_6 \setminus 2, G)$, де G -довільний 2-зв'язний мінор проективної площини йде першим, потім його підграфи виду $G \setminus v$. Для побудови 3-зв'язних мінорів шляхом рекурсивного φ -перетворення 2-зв'язного мінора та простої зірки шляхом ототожненні пар точок 2-зв'язного з клітковою відстанню 1 та висячих вершин зірки.

Основні результати: - 1) теорема 1, де досліджено синтез графів із заданим обмеженням на неорієнтований род утвореного графа, з пар мінорів проективної площини через φ -перетворення пар підграфів - мінорів проективної площини з видаленою вершиною 2)- наведено алгоритм побудови моделей мінорів поверхні Клейна, яким отримано неповний список цих графів, наведений в додатках 1 та 2..

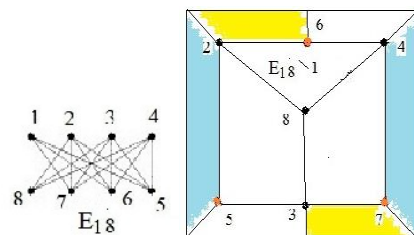
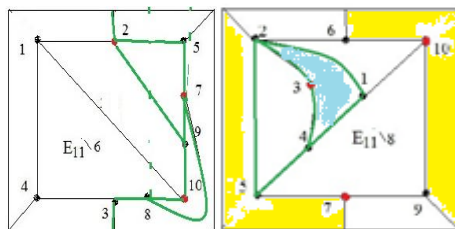
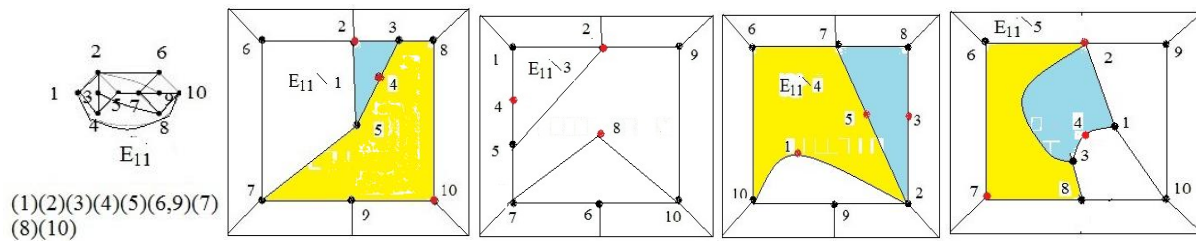
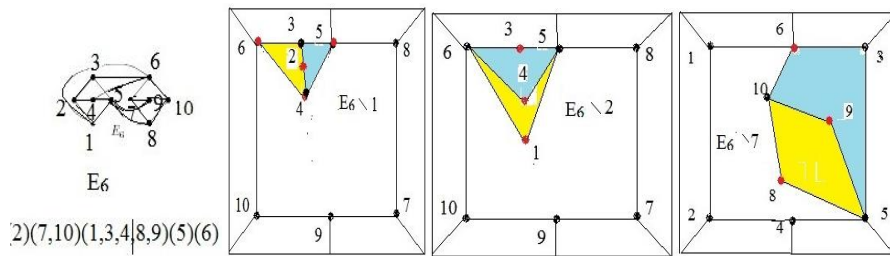
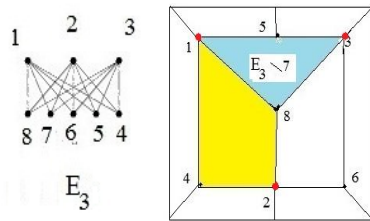
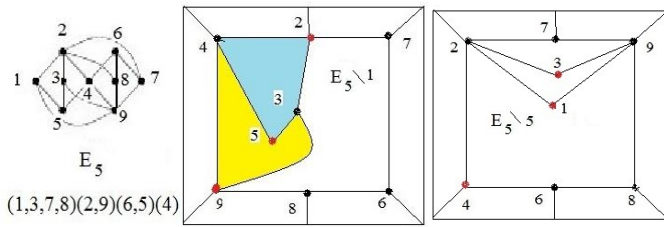
Алгоритмом А побудовано два класи зв'язних моделей мінорів поверхні Клейна, наведено їхні мінімальні вкладення без нумерації вершин. Перший клас з 109-ти карт на поверхні неорієнтованого роду 3 в додатку 1 отримано шляхом ϕ -перетворення пар графів (C_3, Γ_i) по підграфам $K_{3,3}$. Другий клас з 247 в додатку 2 отримано тим же ϕ -перетворенням пар графів (F_6, Γ_i) по підграфам $K_{3,3}$. Вершини графів Γ_i мінорів проєктивної площини пронумеровані як в додатку А та кожен з них має підграф гомеоморфний графу $K_{3,3}$. Цим фактом підтверджено твердження про суттєву різницю кількості синтезованих моделей 3-зв'язних мінорів поверхні Клейна для різних пар графів з числа 40 графів додатку А.

31. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1973. 383 с.
32. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1970. 299 с.
33. Mohar B., Thomassen C. *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins University Press, 2001. 412 p. <https://www.sfu.ca/~mohar/Book.html>
34. Hur S. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Phd, Ohio State University, 2008. http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1209141894
35. Archdeacon D., Huneke P. A Kuratowski Theorem for Nonorientable Surfaces. *Journal of combinatorial theory, Series B*. 1989. **46**. P. 173–231.
36. Петренко В.І. Про структуру площинних підграфів графів-обструкцій неорієнтованої поверхні заданого роду. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021. № 33. С. 105–109. [Google Scholar](#).
37. [Anna Flötotto. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, University Bielefeld, 2010, -174 pp.](#)
38. **P.Skoda. Obstructions for embedding graphs into surfaces**, Simon Frazer University, PhD dissertation, 2012.-133 p.
39. Bienstock D., Dean N. On obstructions to small face covers in planar graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*. 1992. **55**. P. 163–189. <https://doi.org/10.1016/0095-8956%2892%2990040-5>
40. Bienstock D., Monma C.L. On the complexity of covering vertices by faces in a planar graph. *SIAM J. Comput.* 1988. **17**. P. 53–76. <https://doi.org/10.1137/0217004>
41. Mohar B. Face Covers and the Genus Problem for Apex Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 2001. **82**. P. 102–117. <https://doi.org/10.1006/jctb.2000.2026>
42. Mohar B. Apex graphs with embeddings of face-width three. *Discrete Mathematics*. 1997. **176**. P. 203–210. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(96\)00363-9](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00363-9)
13. В.І. Петренко, Д.А. Петренко, О.В. Оришака. Структура проєктивно площинних підграфів графів-обструкцій заданої поверхні. *Кібернетика та комп'ютерні технології*. 2022, № 2. С. 1-20 [DOI:10.34229/2707-451X.22.2.0](https://doi.org/10.34229/2707-451X.22.2.0)
14. В.І. Петренко, Д.А. Петренко. Про алгоритм побудови 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*, № 37 (2023): 72-74. <http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit/article/view/308>
15. Edwin R. van Dam, Jack H. Koolen, Hajime Tanaka. Distance-regular graphs, E-JC, DS22: Apr 15, 2016, <https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/issue/view/Surveys>.
16. Bojan Mohar, Petr Škoda. Excluded minors for the Klein bottle I. Low connectivity case, *Journal of Combinatorial Theory, Series B, Volume 164*, January 2024, Pages 299-320. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2023.10.002>
17. Bojan Mohar, Petr Škoda. Excluded minors for the Klein bottle II. Low connectivity case, *Journal of Combinatorial Theory, Series B, Volume 166*, May 2024, Pages 80-108. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2023.12.006>
18. D. Bienstock, C. C. Monma, On the complexity of embedding planar graphs to minimize certain distance measures, *Algorithmica*, 5 (1990), 93–109 <https://doi.org/10.1007/BF0184037>
19. В.І. Петренко, Д.А. Петренко. Про синтез площинних графів із заданими властивостями. *Кібернетика та комп'ютерні технології*, №2, Інститут кібернетики НАНУ, Київ, 2025, С. 17-36. Режим доступу: http://cctech.org.ua/ua/index.php?option=com_content&view=article&id=718:abstract-25-2-2-artu&catid=11:vertikalnoe-menyu-ua&Itemid=101

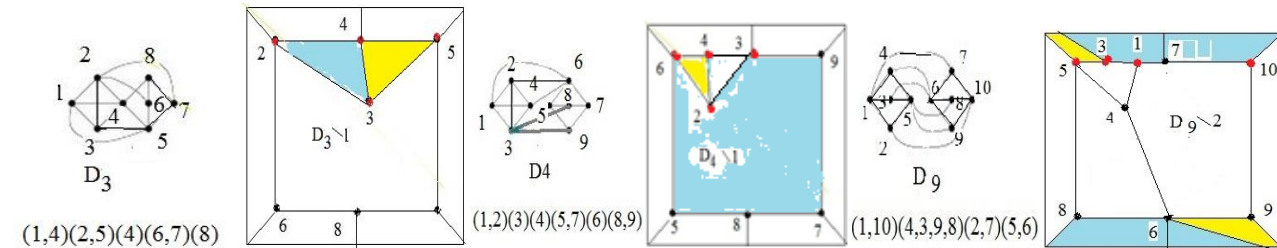
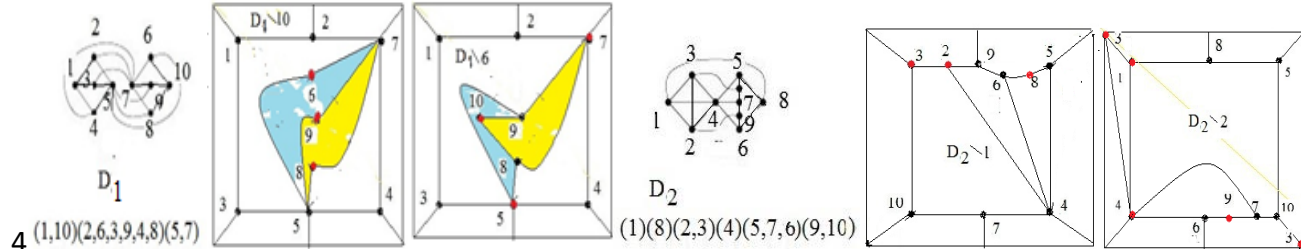
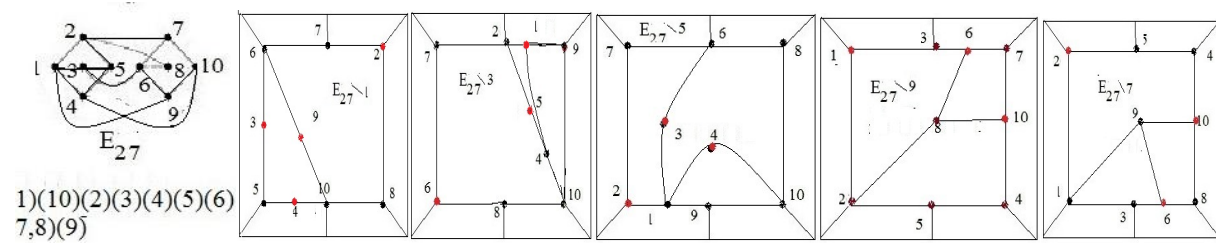
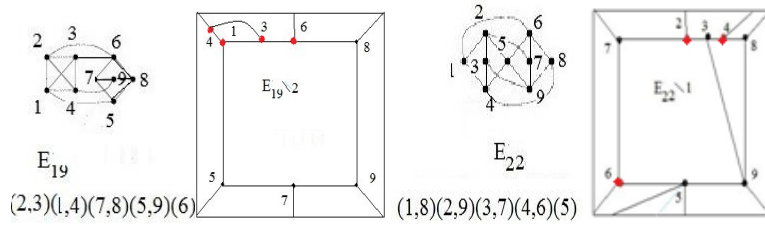
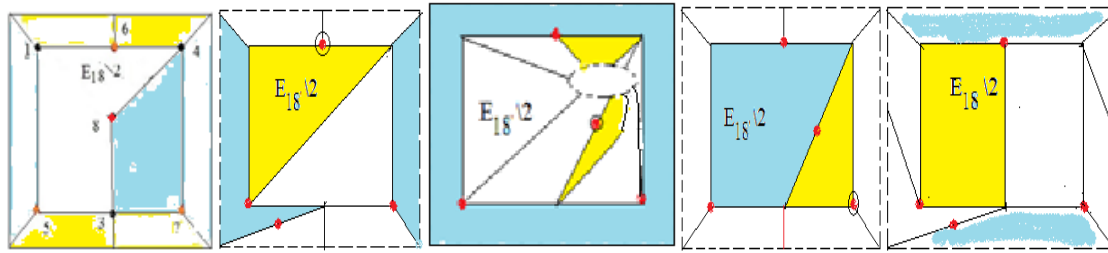
ДОДАТОК А. Всі різні 2-зв'язні підграфи $G \setminus v$ мінорів G проєктивної площини з породженим чи частинним підграфом $K_{3,3}$:



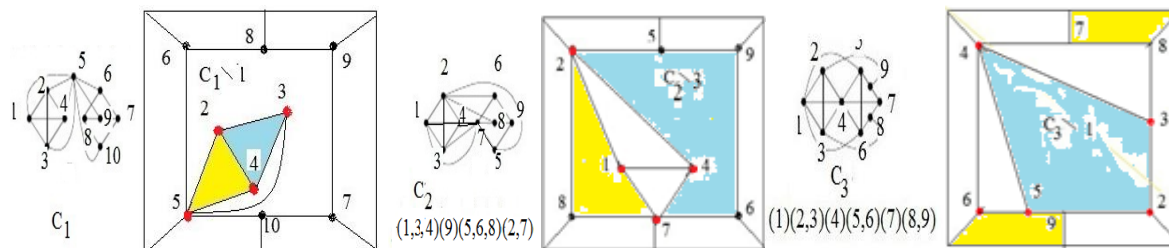
Структура графів на поверхнях. III



Структура графів на поверхнях. III

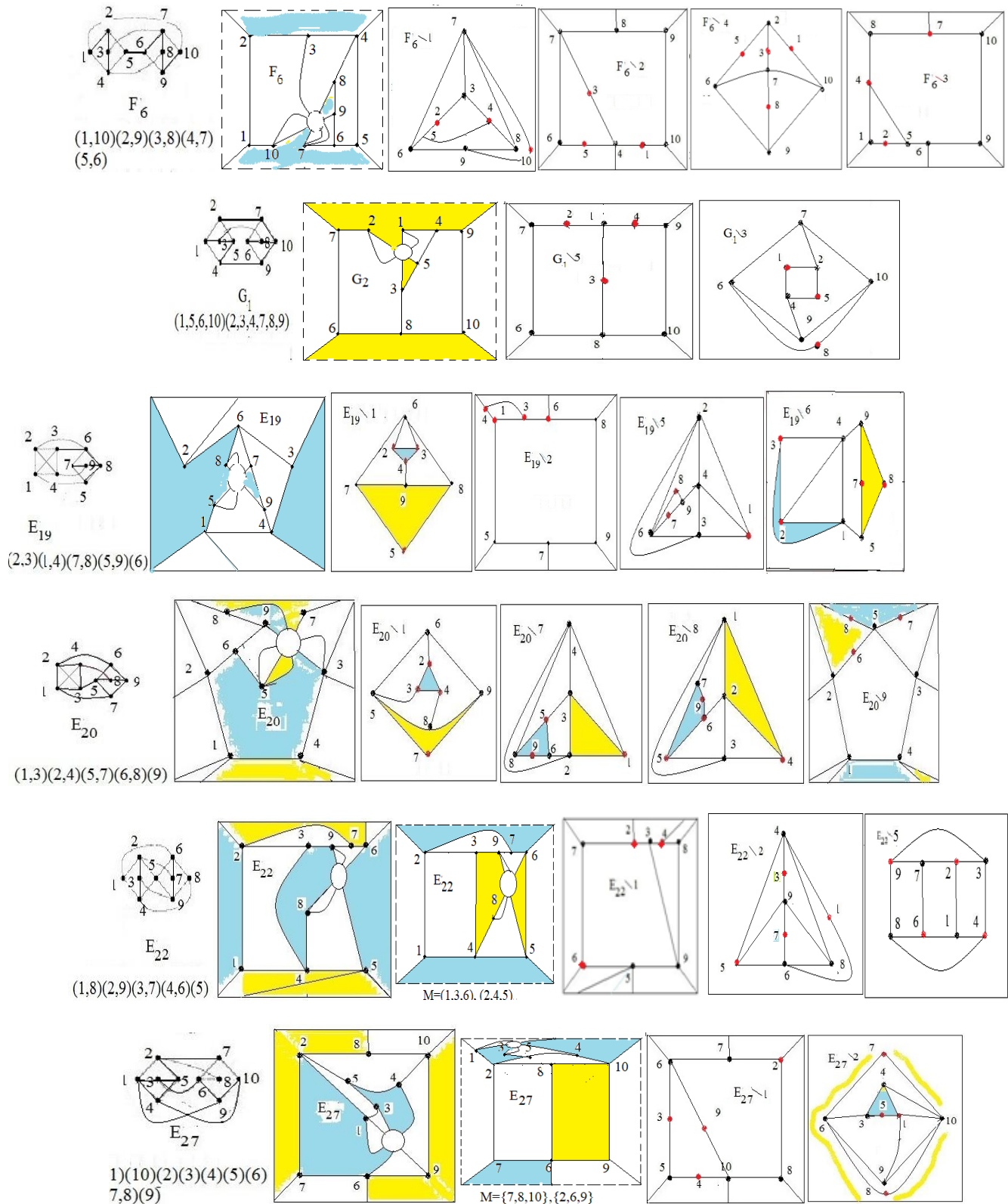


Структура графів на поверхнях. III

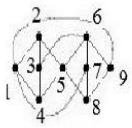
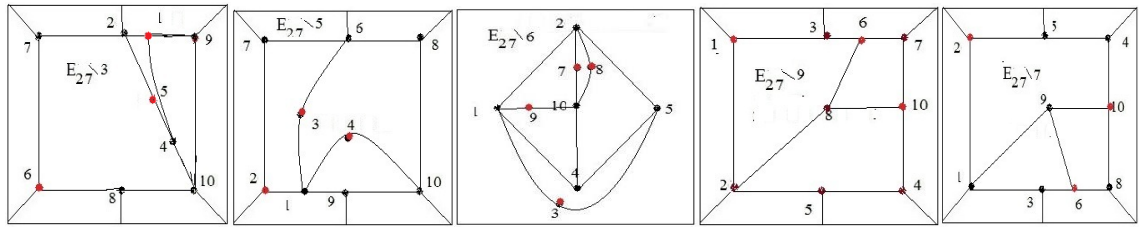


ДОДАТОК Б.

Список мінімальних незовнішньо планарних графів, де зовнішній прямокутник є границею проективної площини:

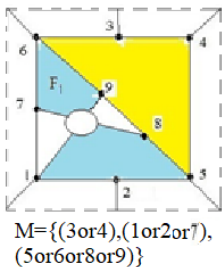
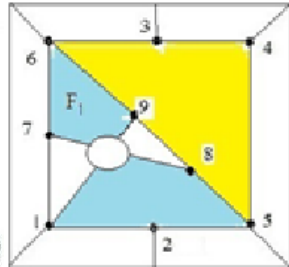


Структура графів на поверхнях. III

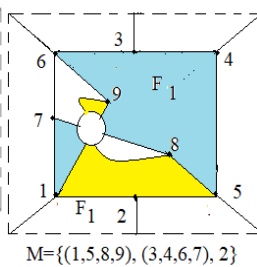


F_1

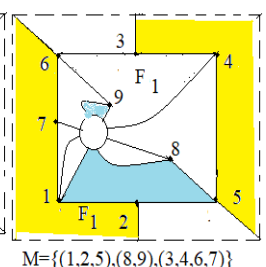
$(1)(3)(2,4)(5)(6)(7)(8)(9)$



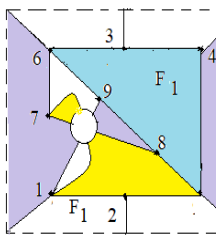
$M = \{(3 \text{ or } 4), (1 \text{ or } 2 \text{ or } 7), (5 \text{ or } 6 \text{ or } 8 \text{ or } 9)\}$



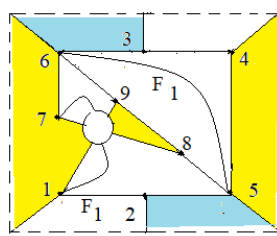
$M = \{(1,5,8,9), (3,4,6,7), 2\}$



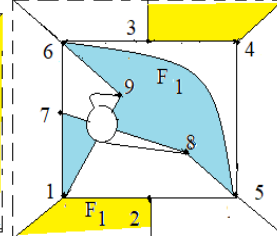
$M = \{(1,2,5), (8,9), (3,4,6,7)\}$



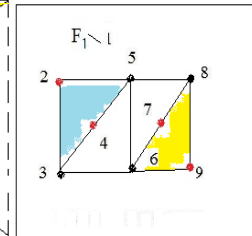
$M = \{3,2, (8 \text{ or } 5)\}$



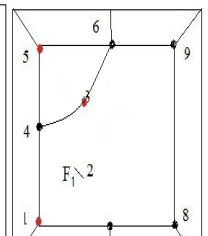
$M = \{(2 \text{ or } 3), (1,4,7,8,9), (5 \text{ or } 6)\}$



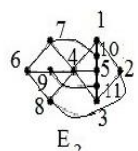
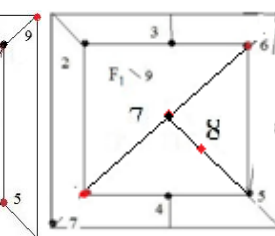
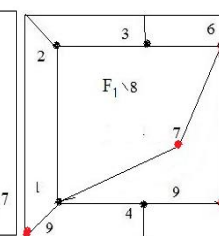
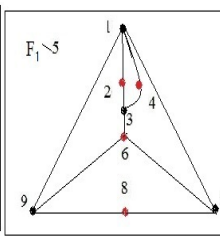
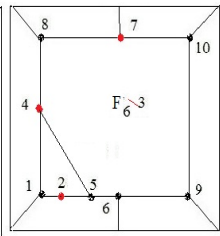
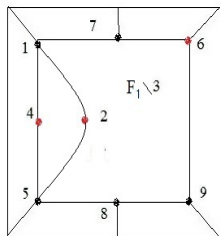
$M = \{1, (2 \text{ or } 3) \text{ or } (5,6,7,8,9)\}$



$F_1 \setminus 1$

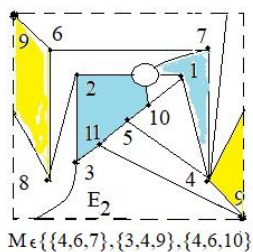


$F_1 \setminus 2$

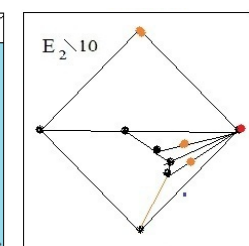
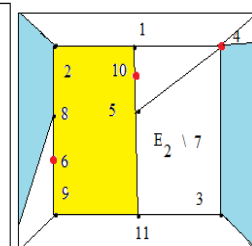
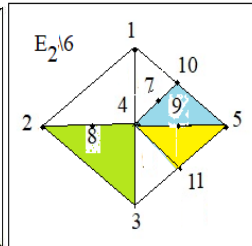
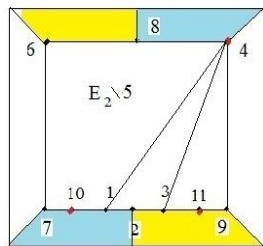
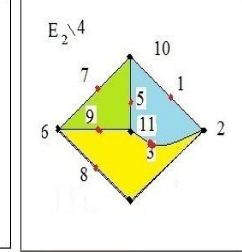
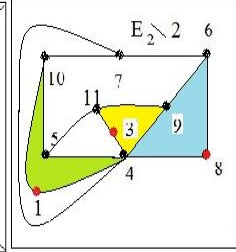
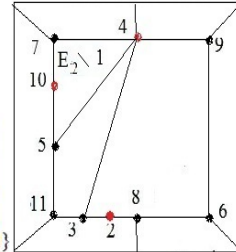


E_2

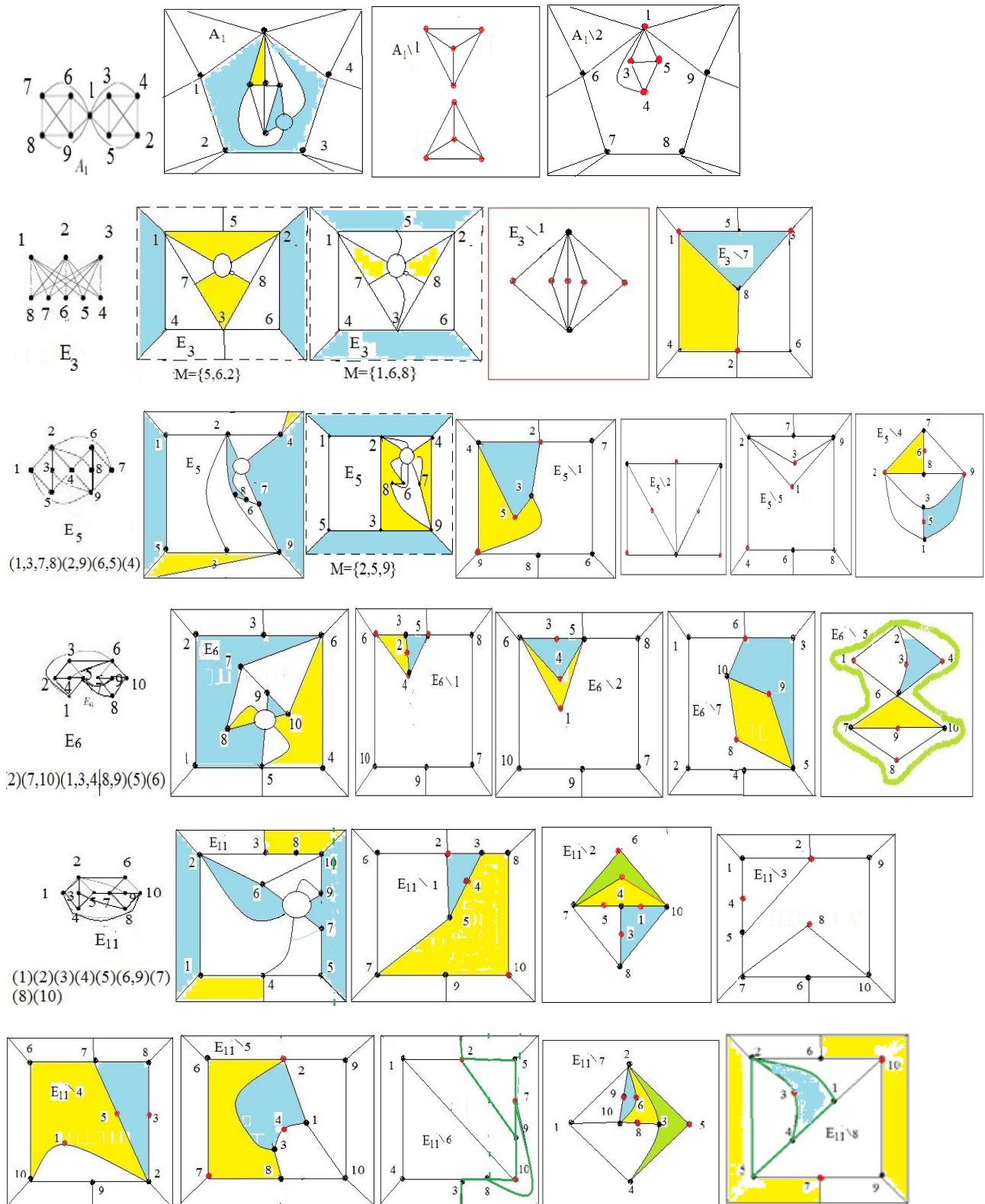
$(6)(7,9)(8)(4)$
 $(5)(2)(1,3)(10,11)$



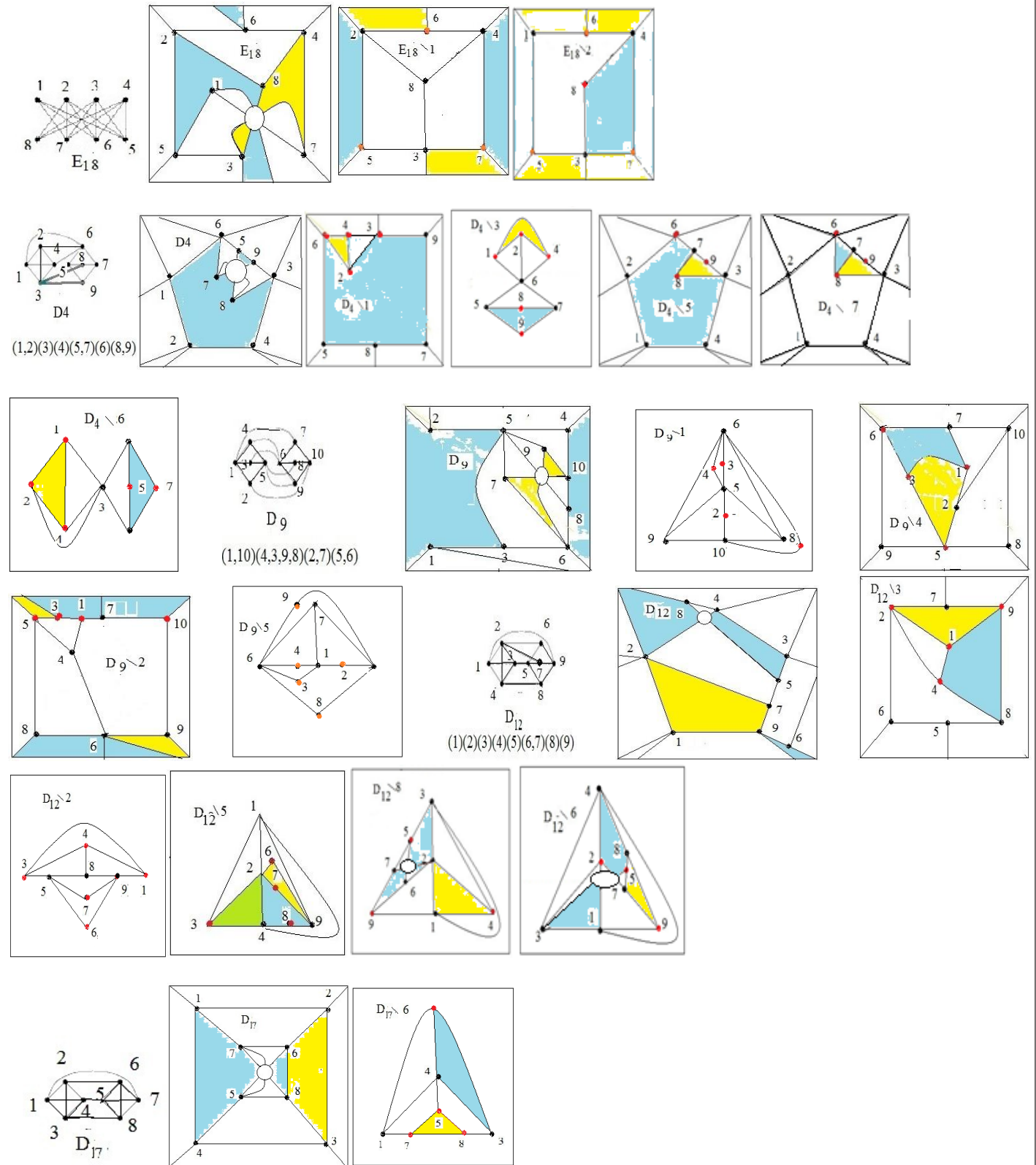
$M \in \{\{4,6,7\}, \{3,4,9\}, \{4,6,10\}\}$



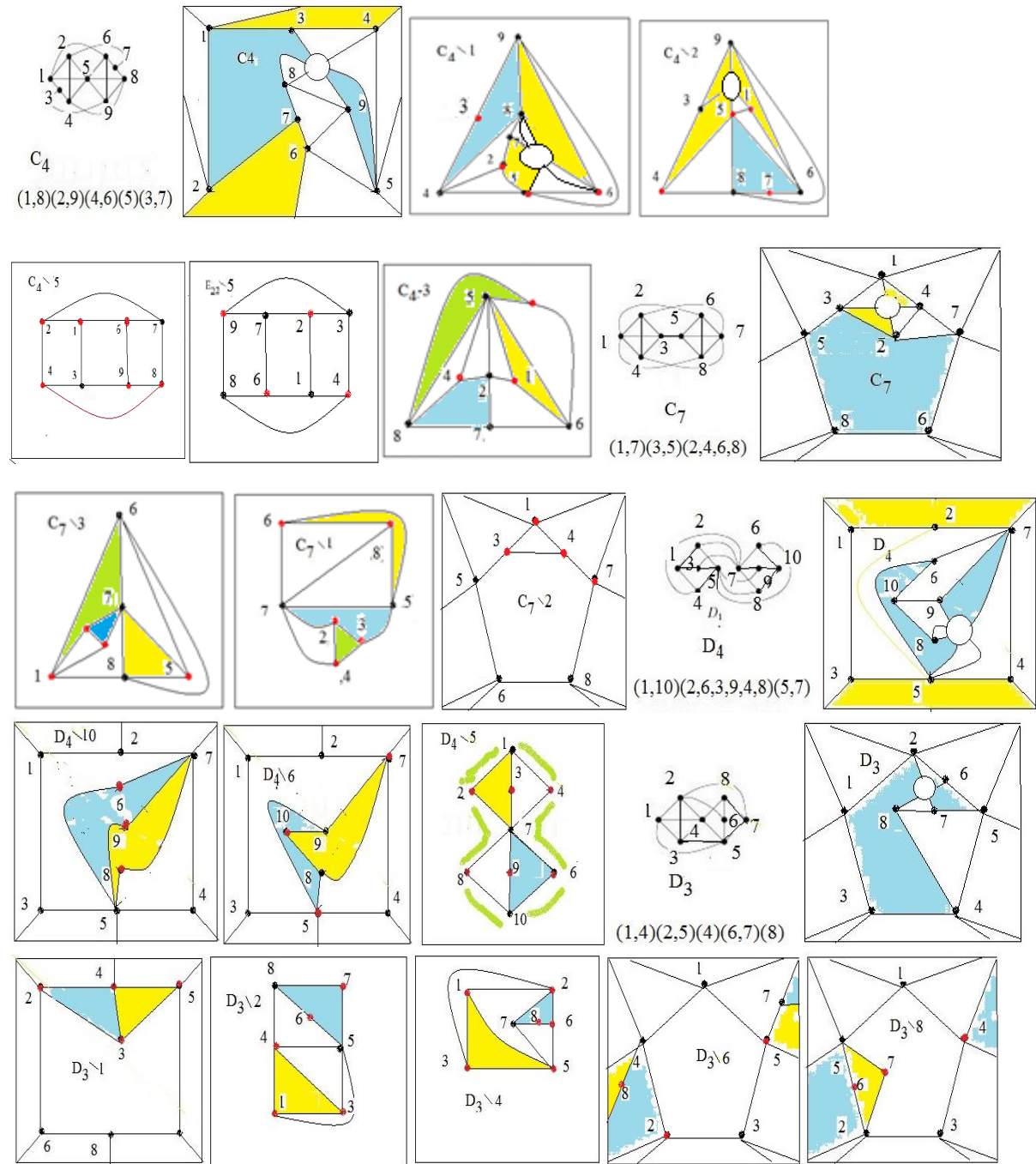
Структура графів на поверхнях. III



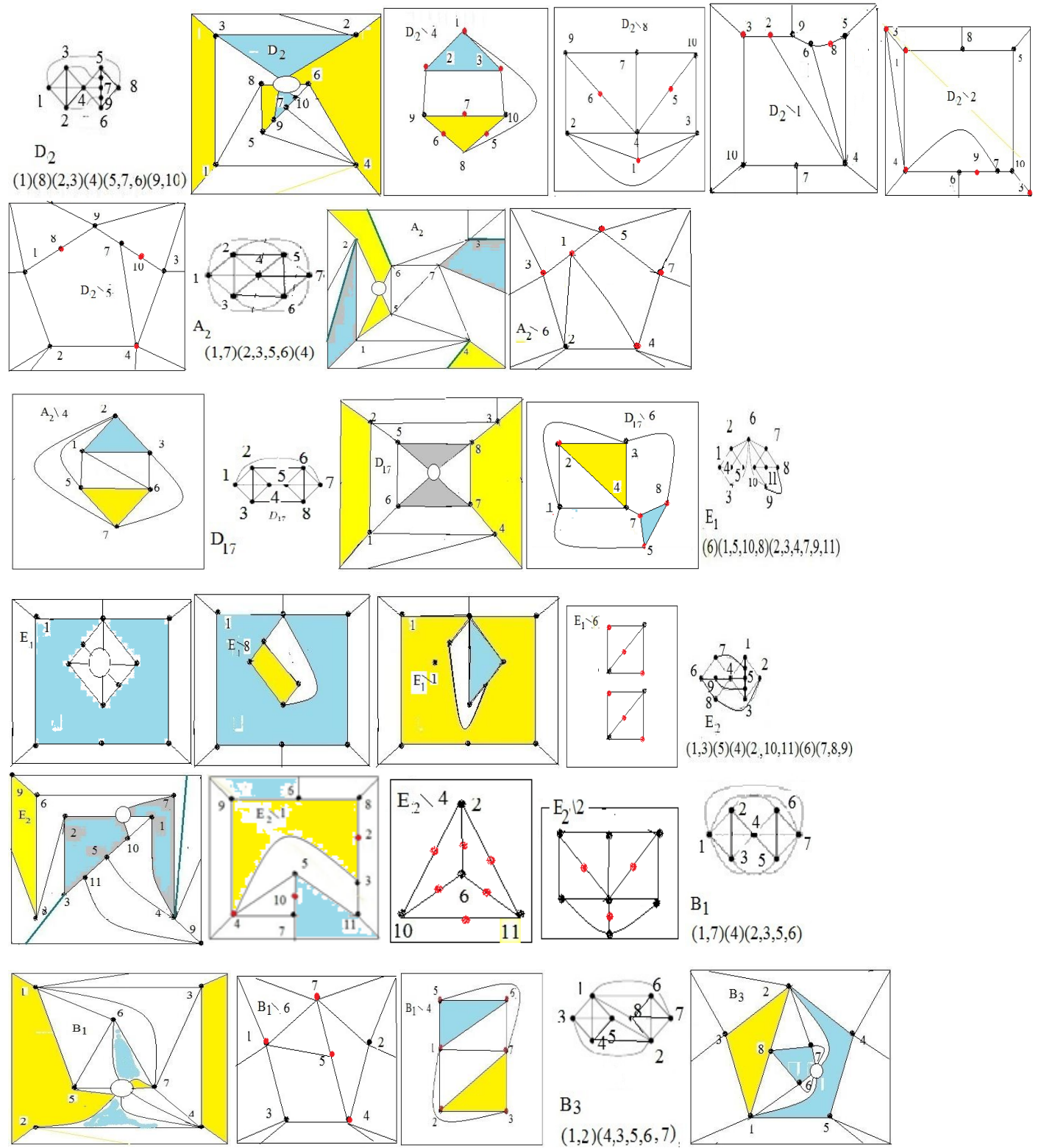
Структура графів на поверхнях. III



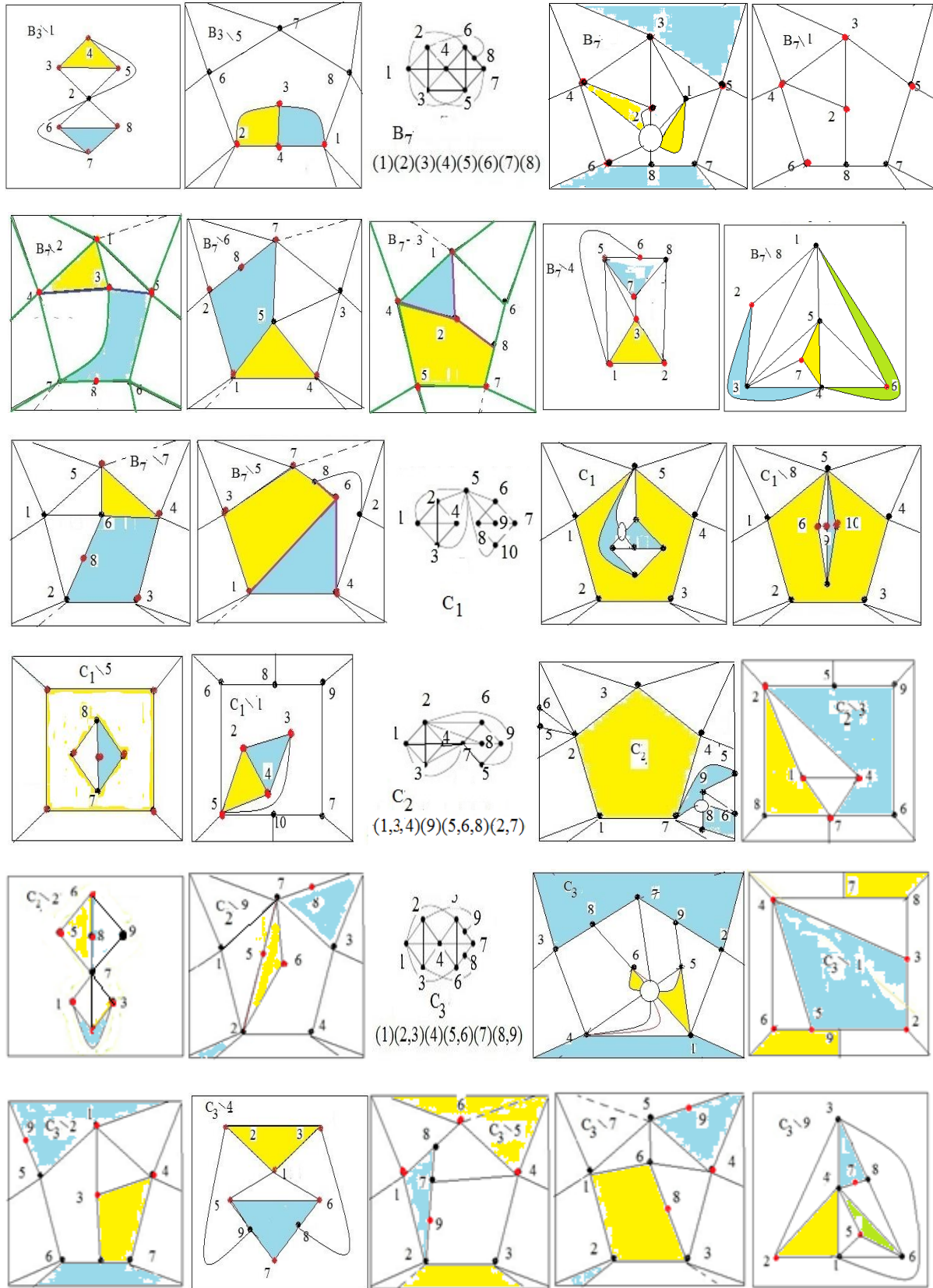
Структура графів на поверхнях. III



Структура графів на поверхнях. III

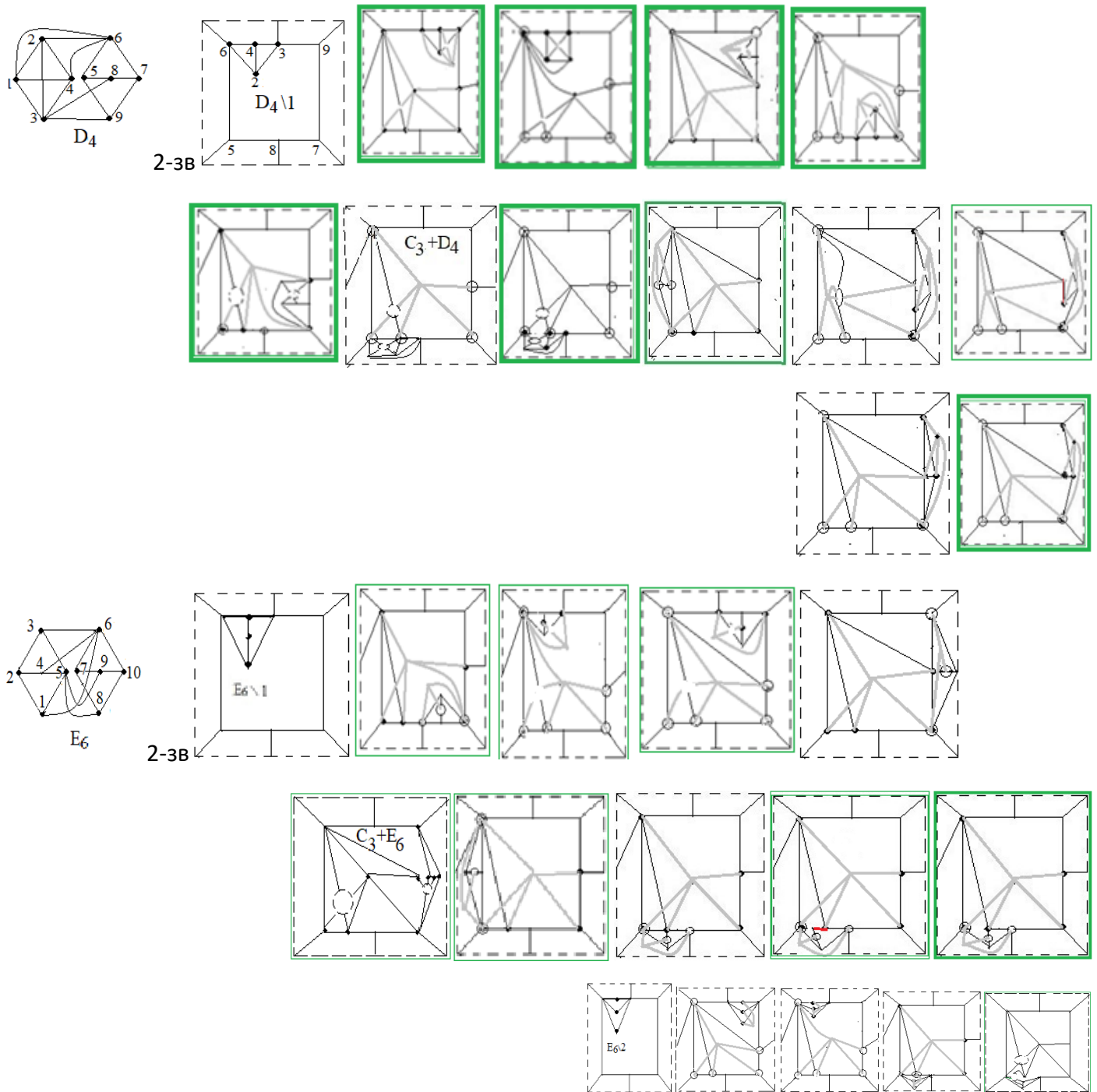


Структура графів на поверхнях. III

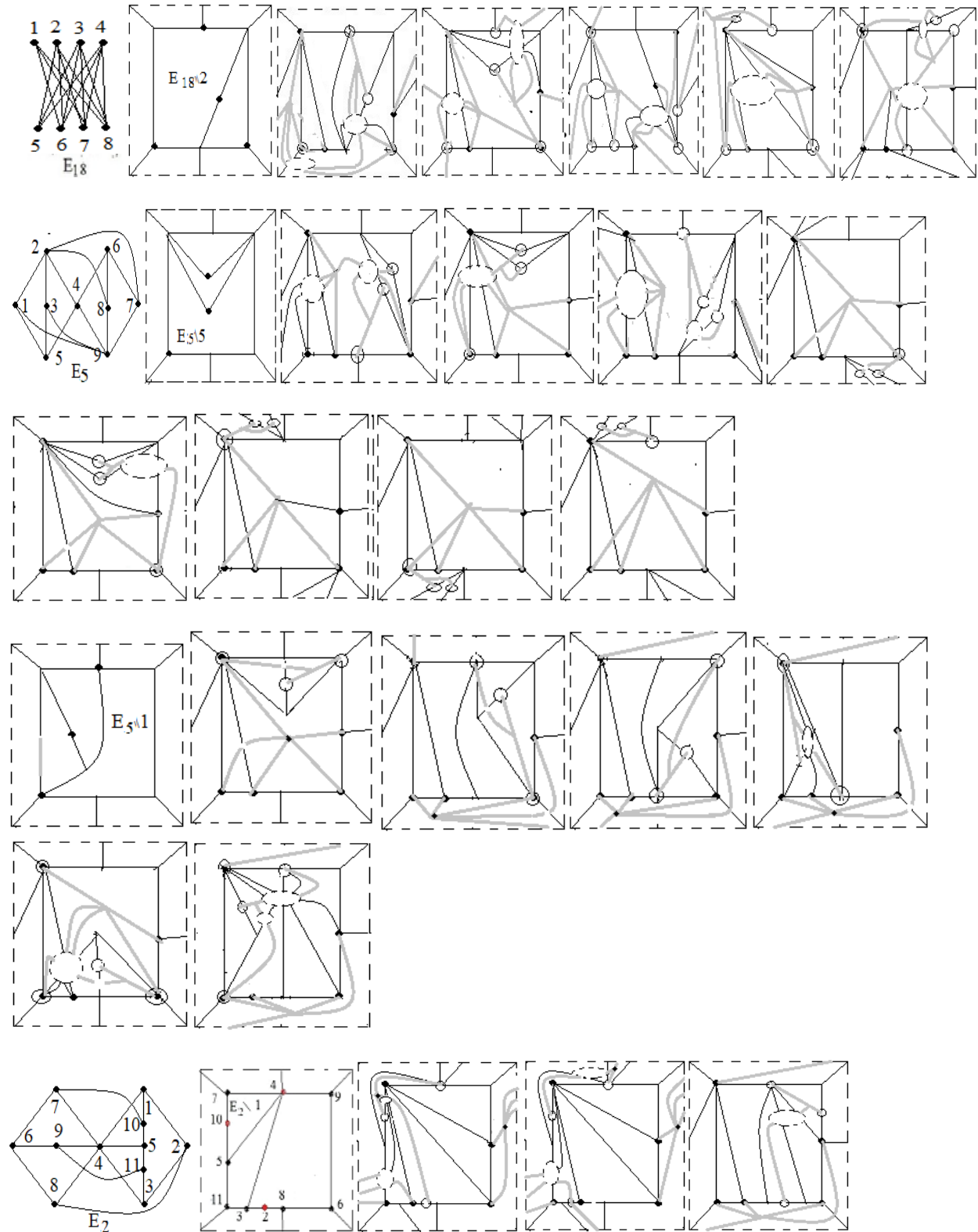


ДОДАТОК 1.

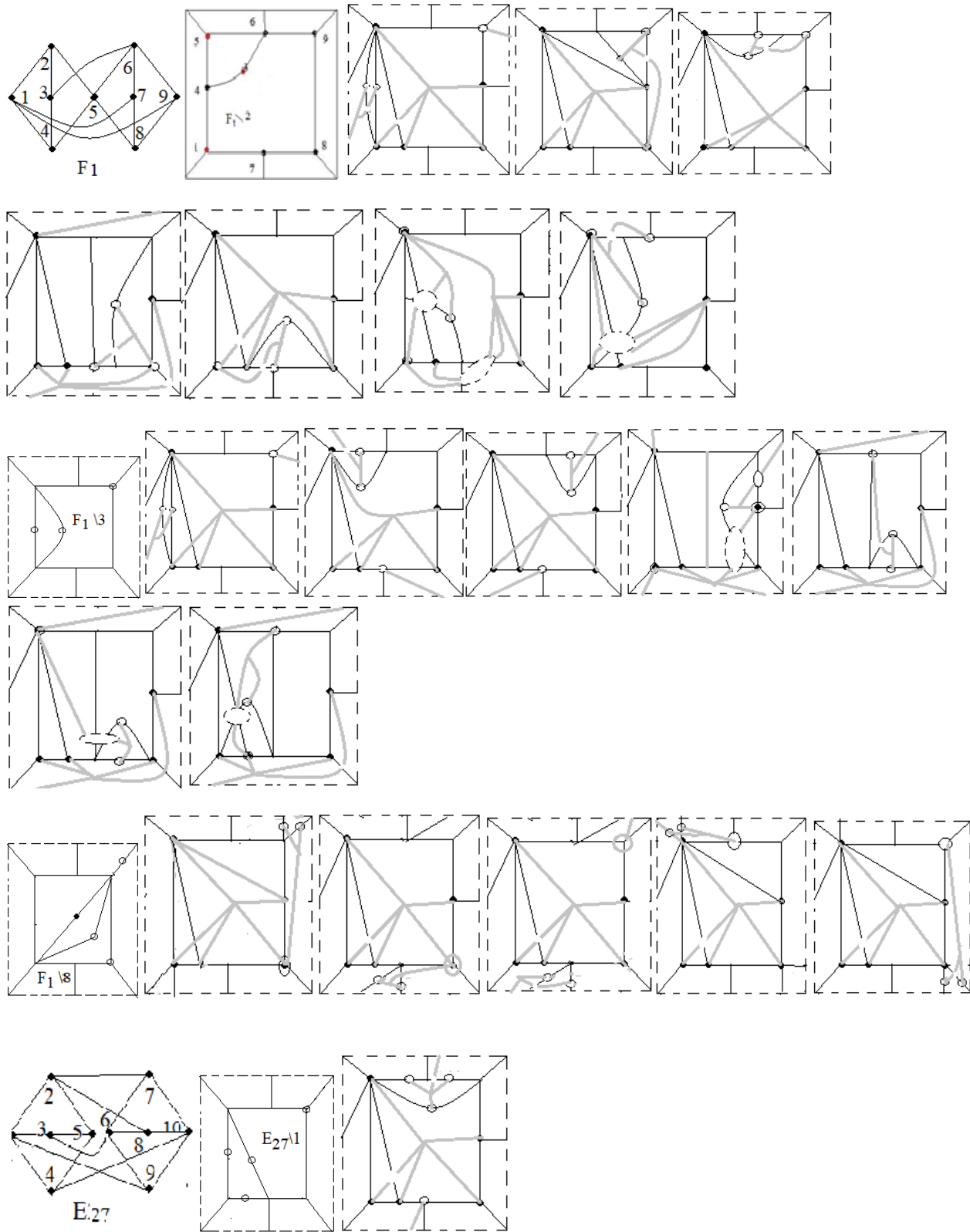
109 3-зв'язних та два 2-зв'язних моделей мінорів поверхні Клейна синтезованих як ϕ -образи пари графів $(C_3 \setminus 1, G)$, G - допустимий мінор проективної площини. В місці перетину ребер у внутрішній точці розуміємо приклеєну до проективної площини ленту Мебіуса, зображену, як правило, пунктирним колом. Товстий прямокутник виділяє мінор поверхні Клейна, тонкий – граф обструкцію поверхні Клейна.

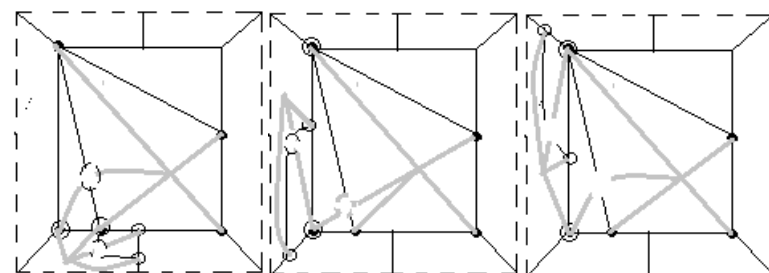
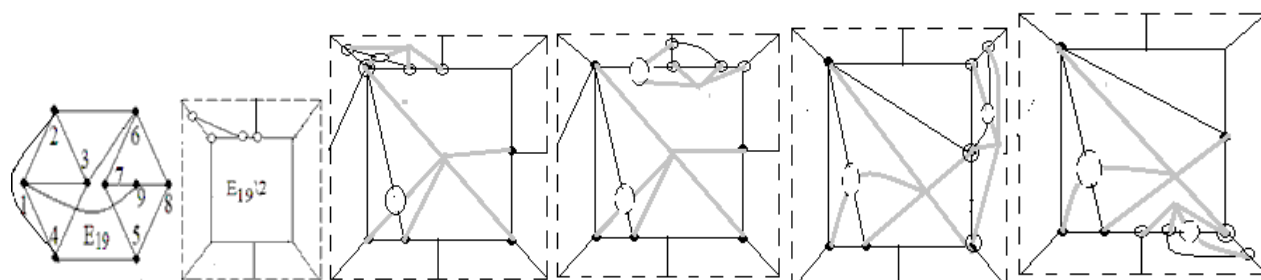
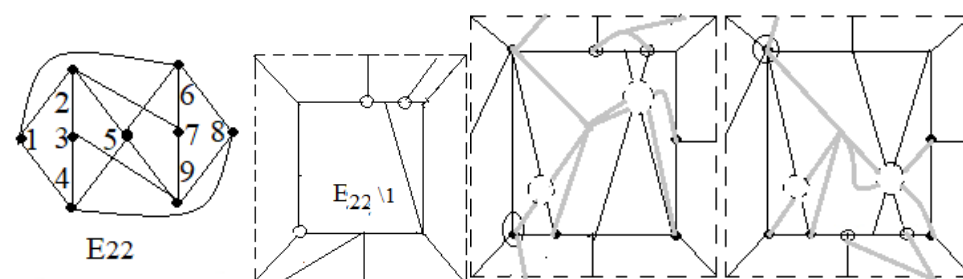
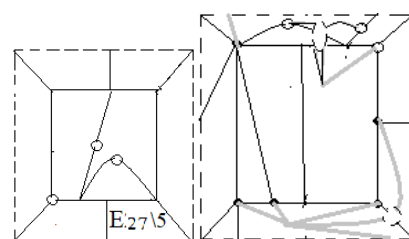
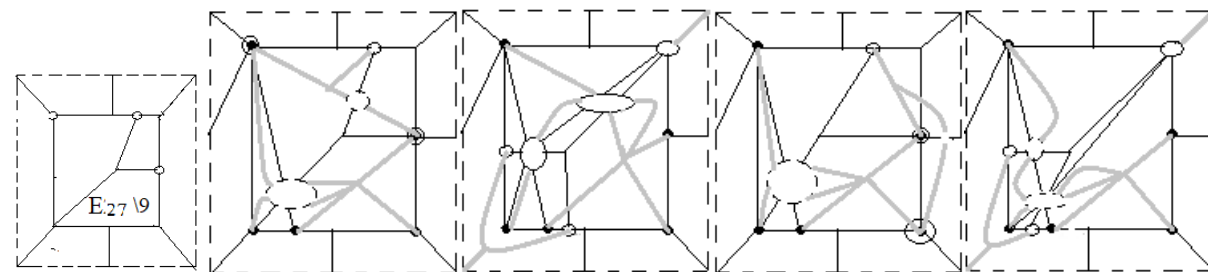
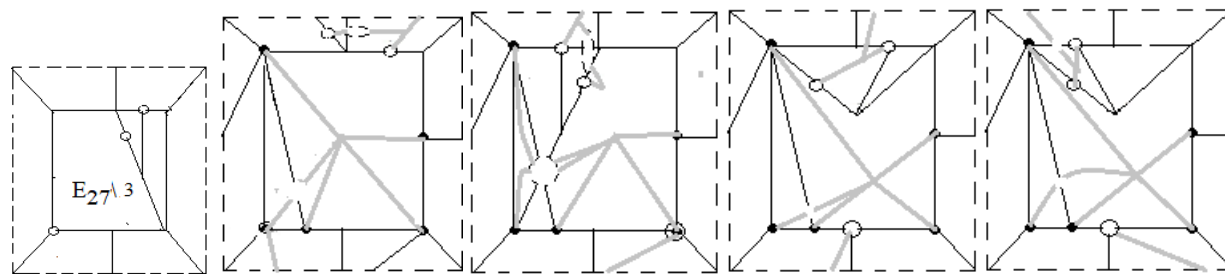


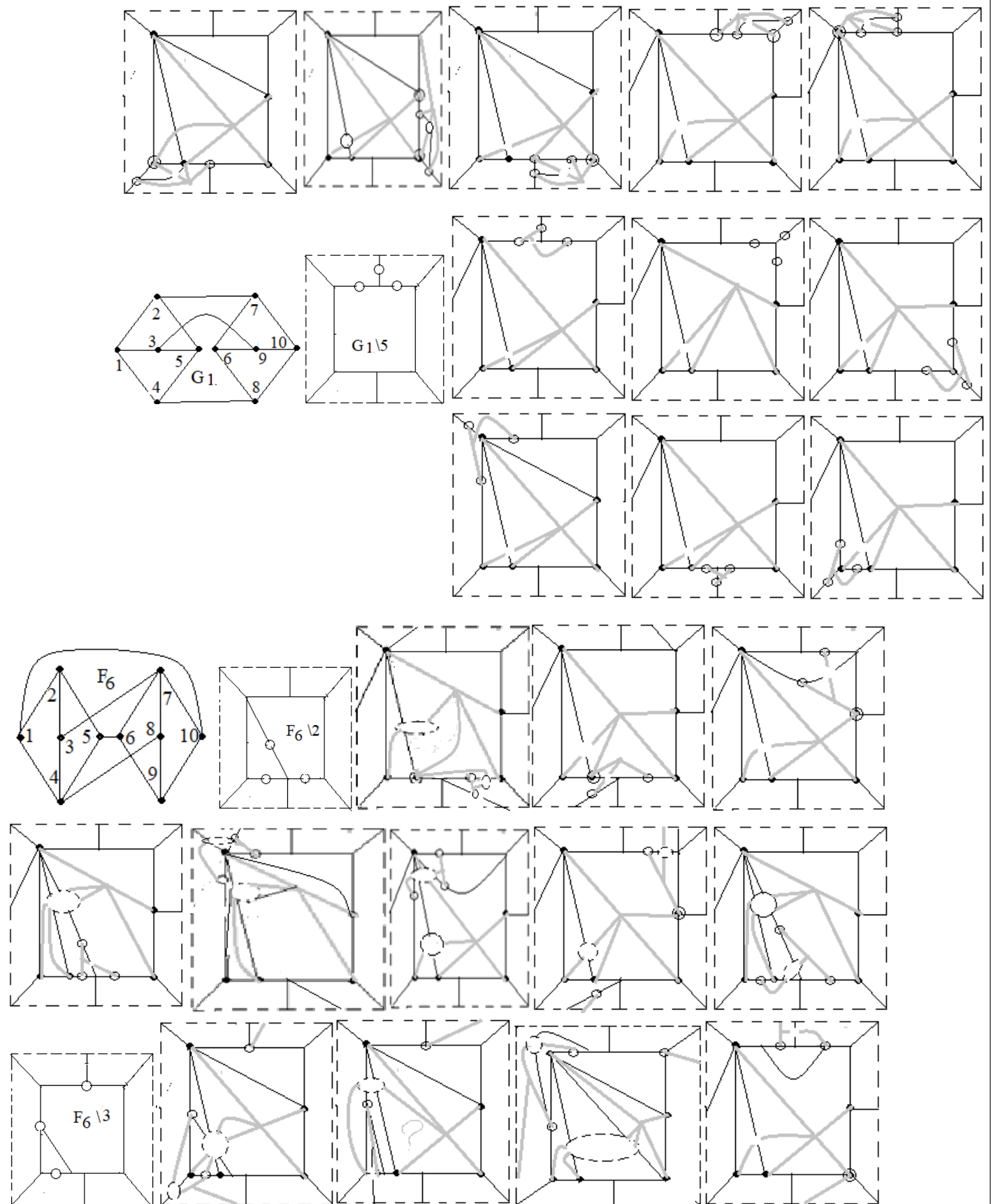
Структура графів на поверхнях. III

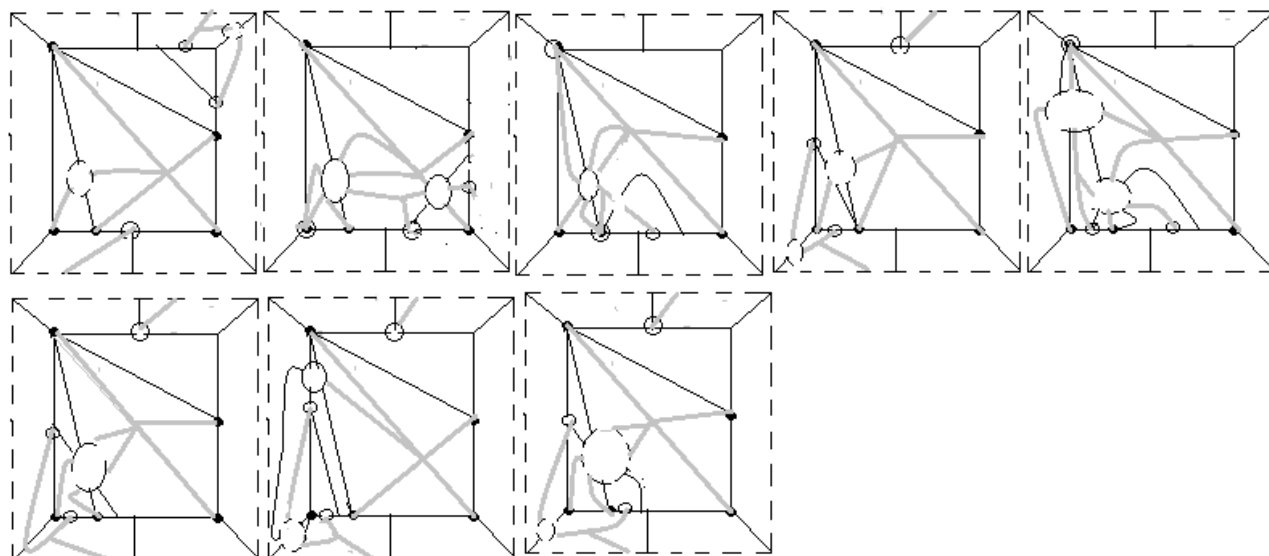


Структура графів на поверхнях. III



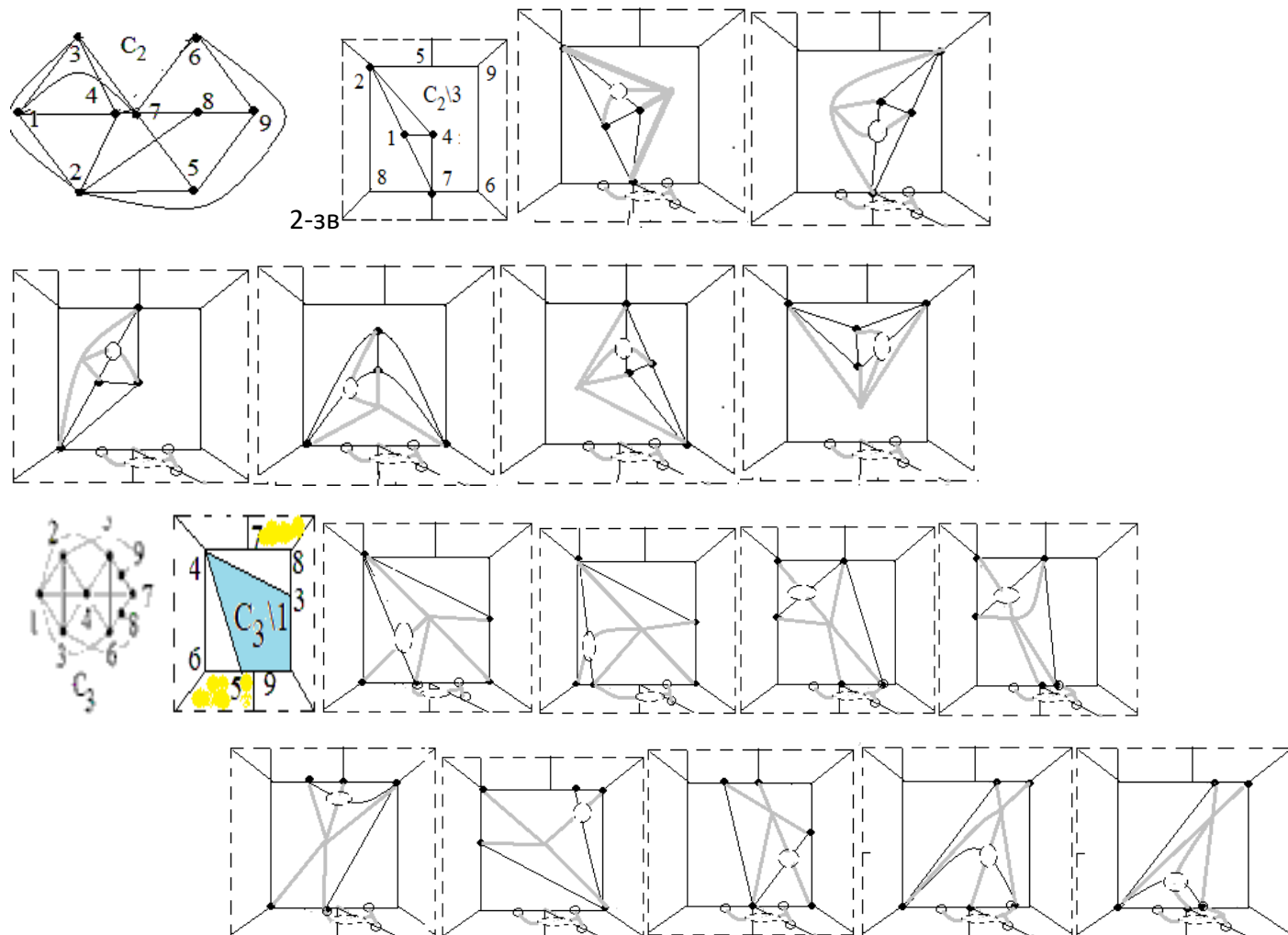


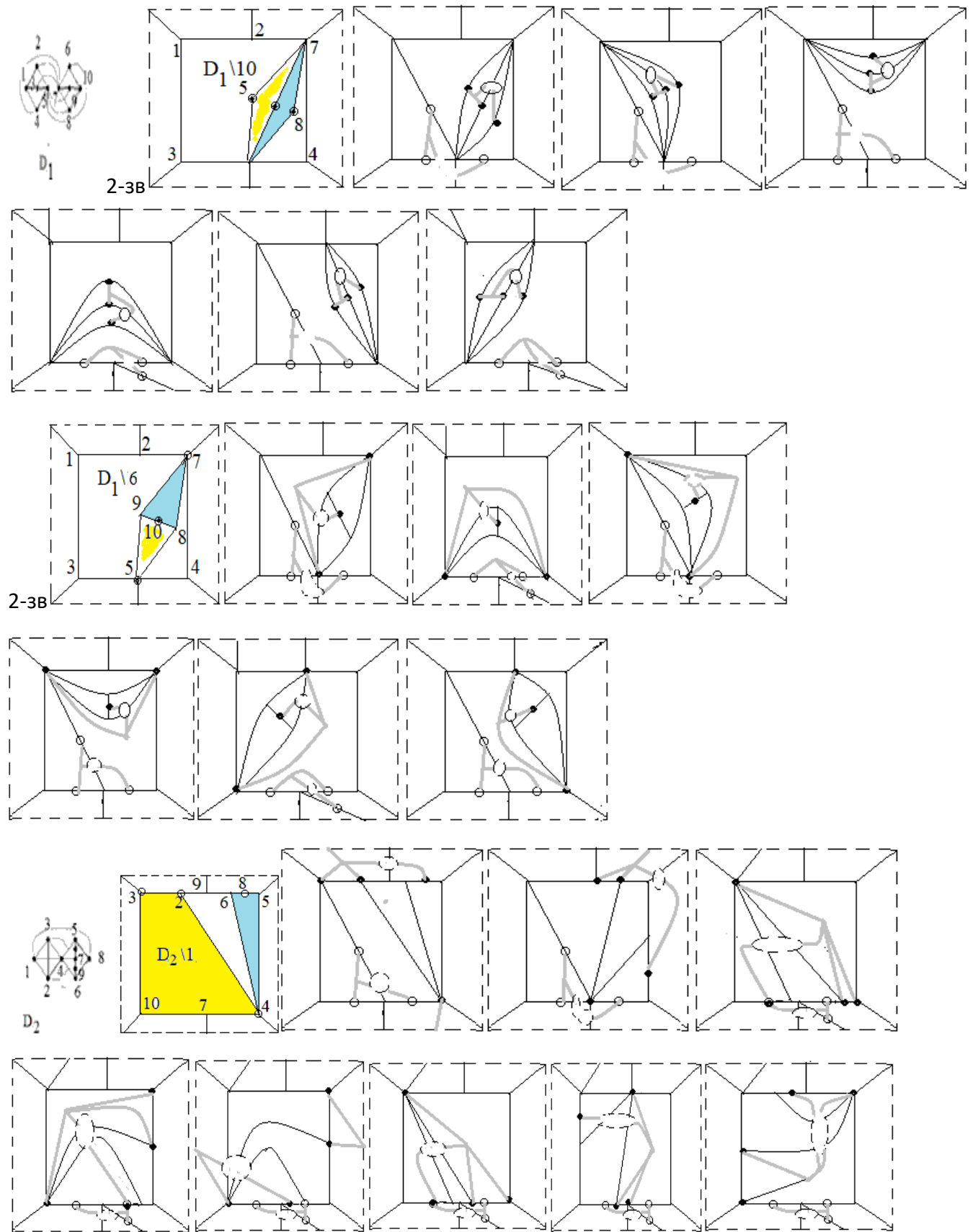


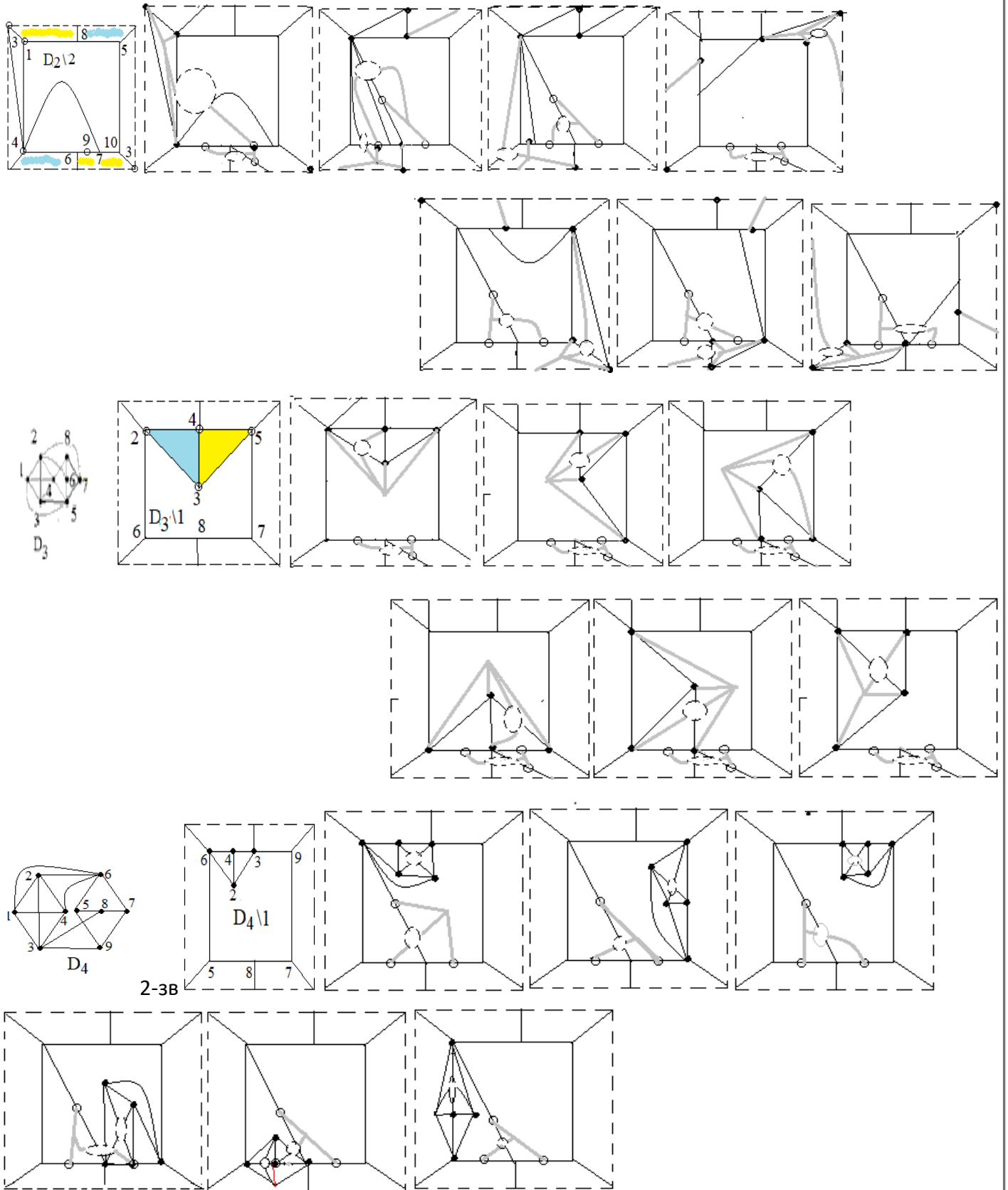


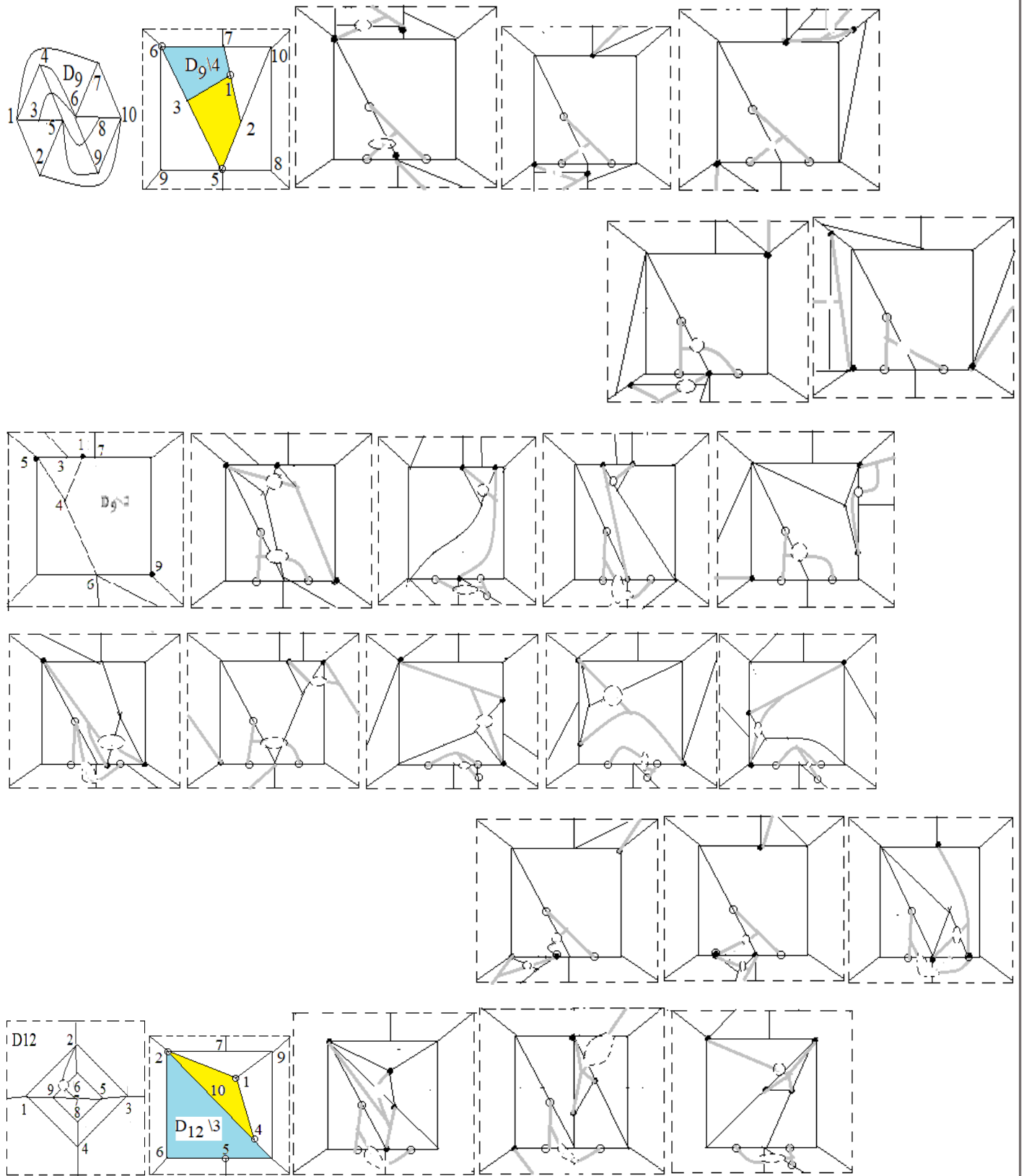
ДОДАТОК 2.

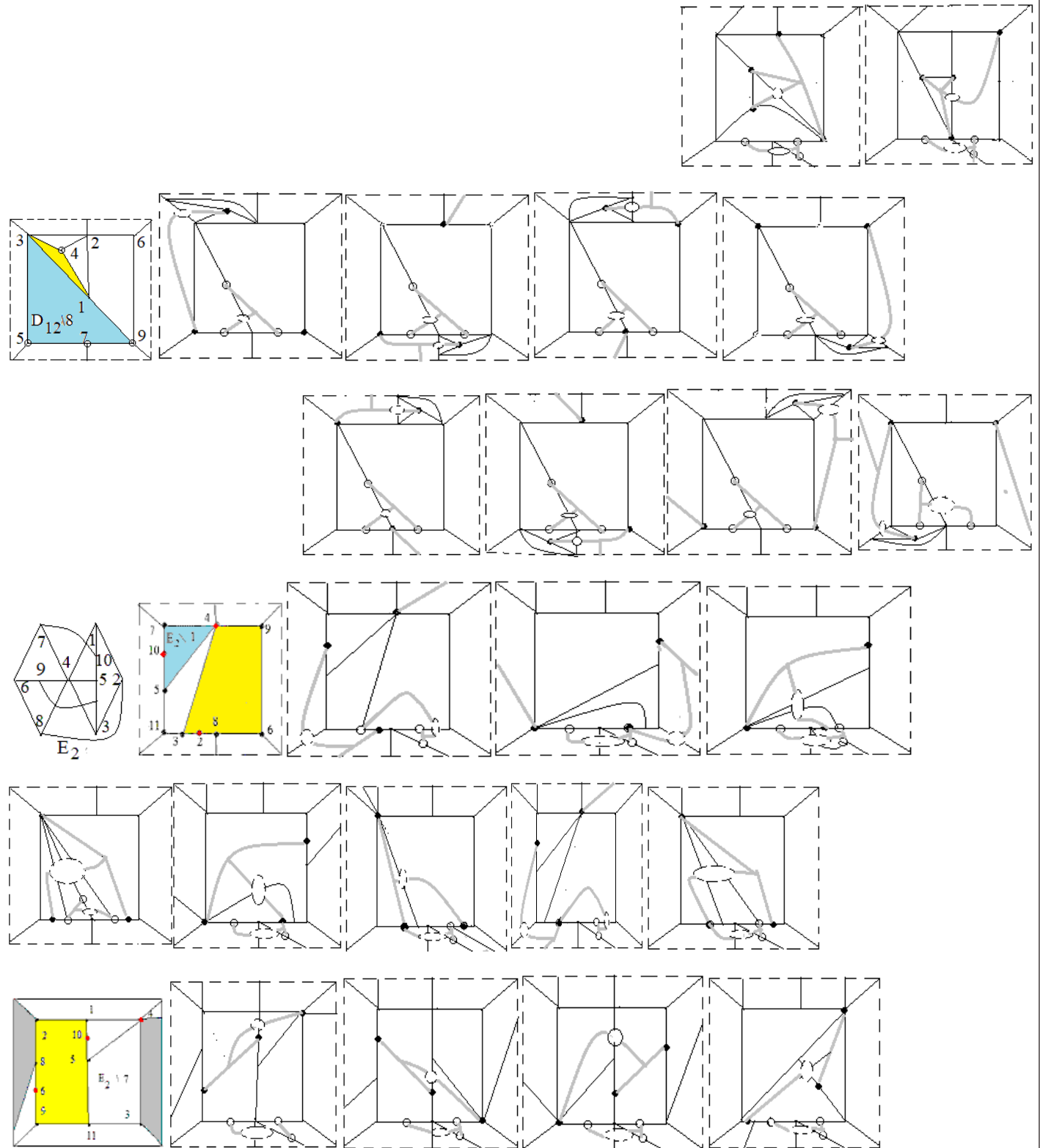
Список з 219 3-зв'язних та 28 2-зв'язних моделей мінорів поверхні Клейна синтезованих по $K_{3,3}$ з пари $(F_6 \setminus 2, G)$, де $n > 1$, G -довільний 2-зв'язний мінор проєктивної площини йде першим, потім його підграфи $G \setminus v$:

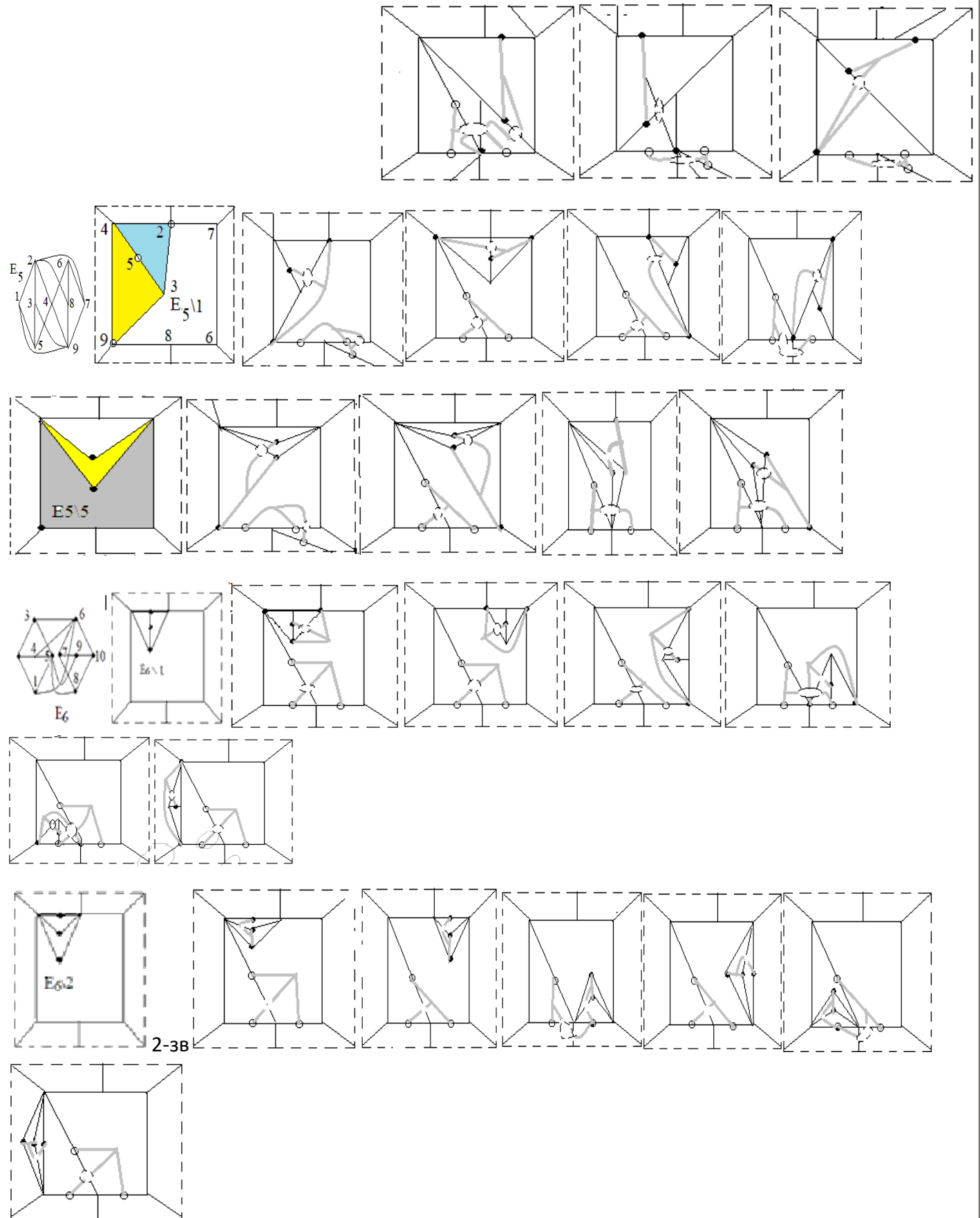


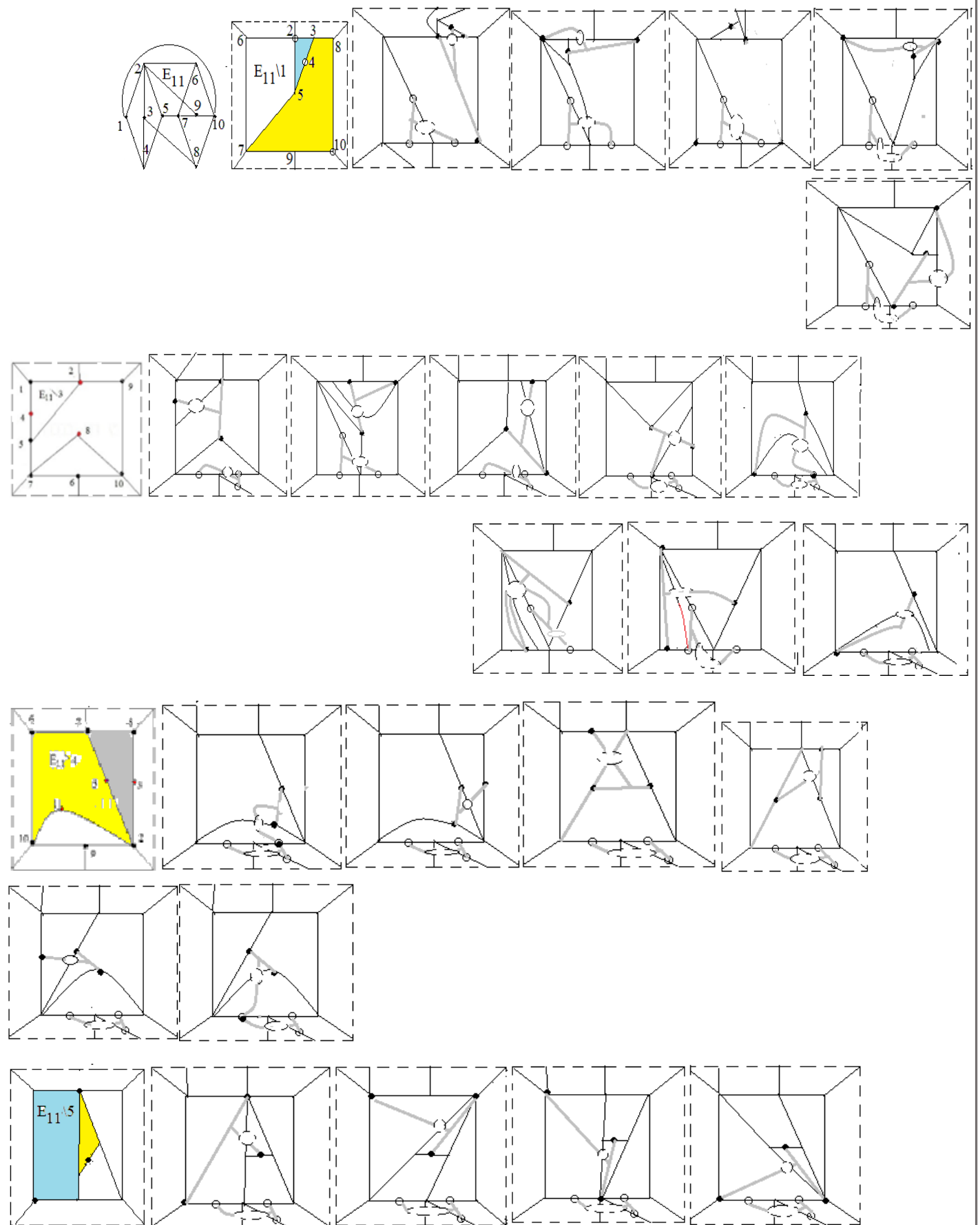


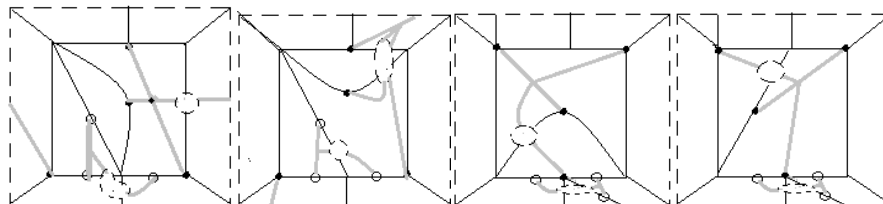
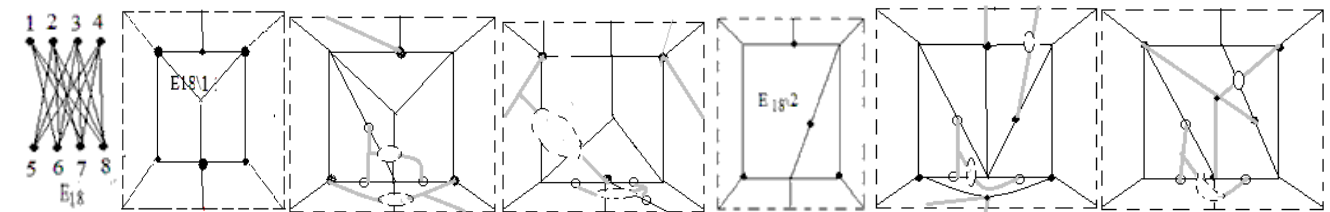
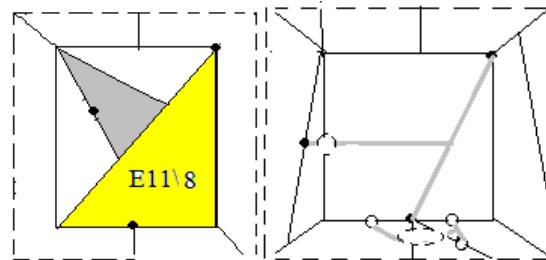
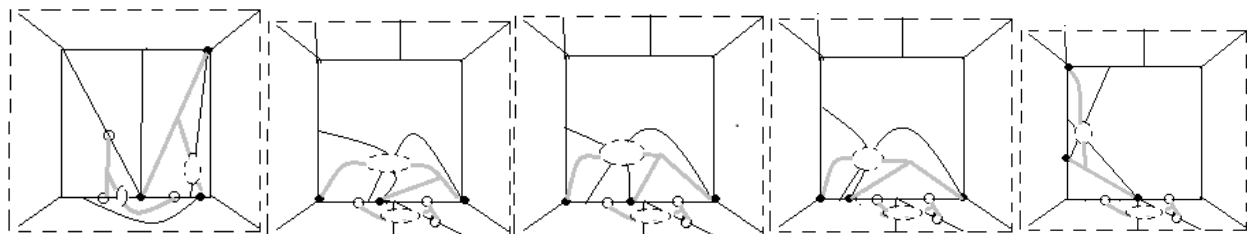
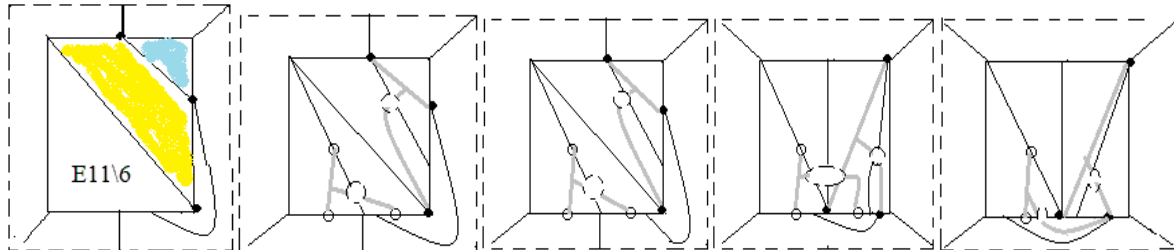
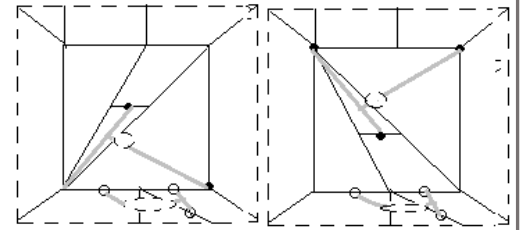


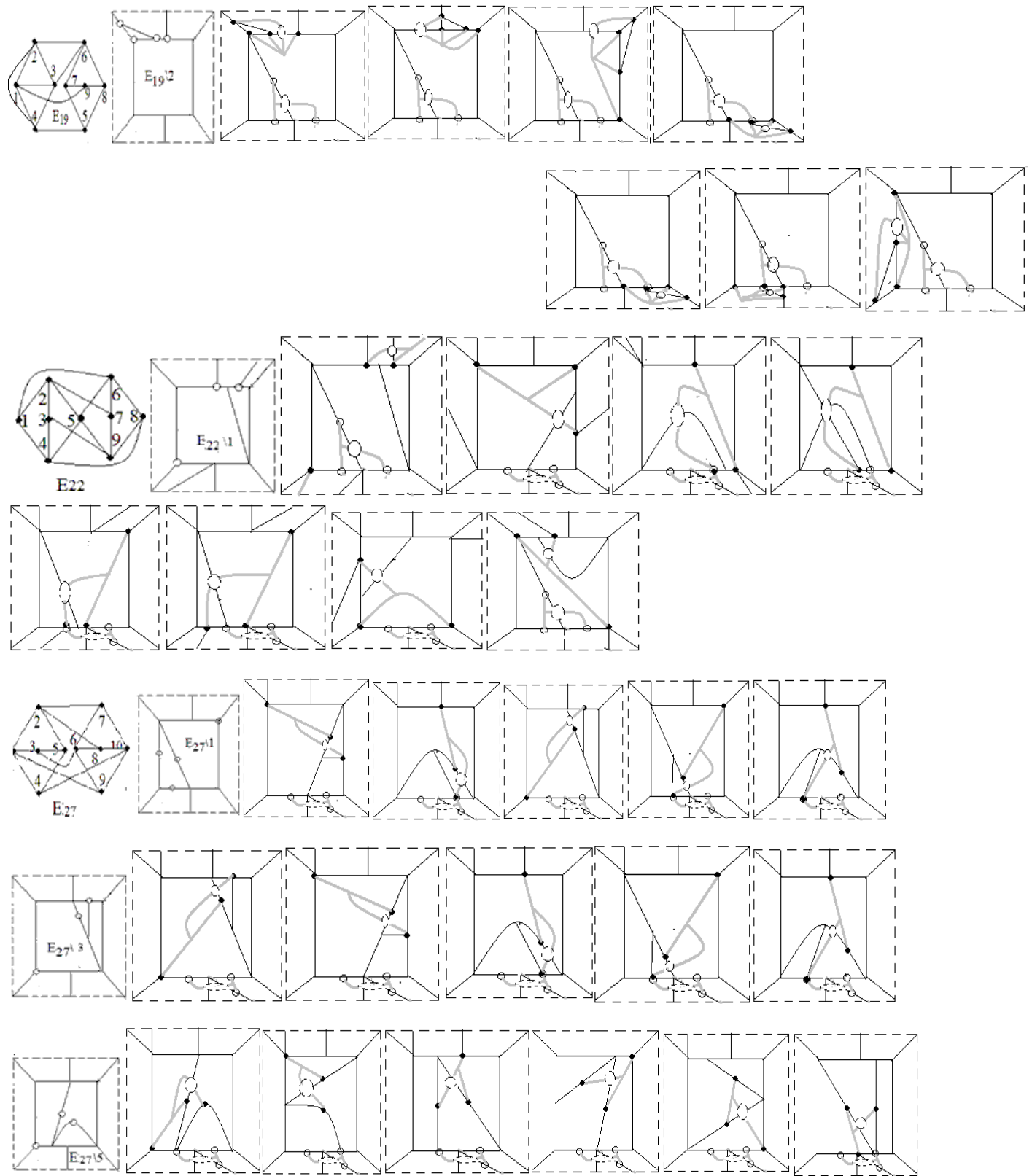




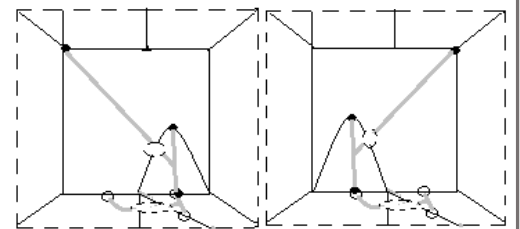
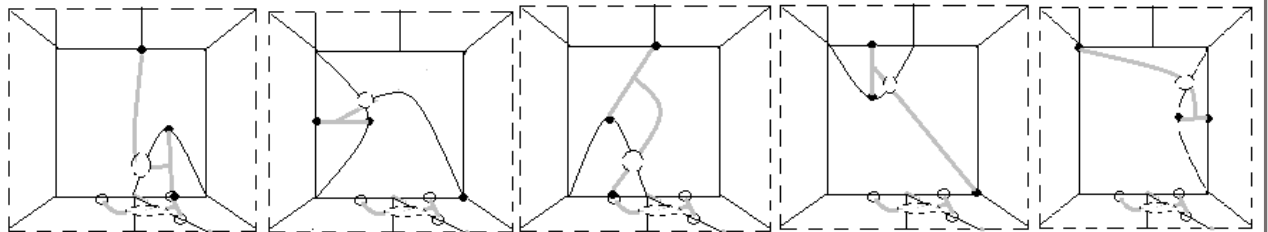
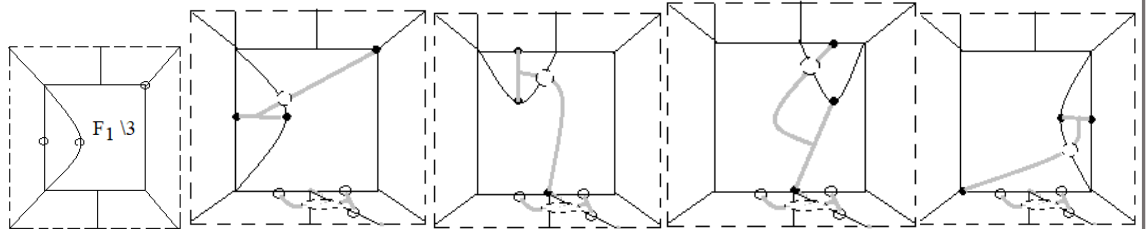
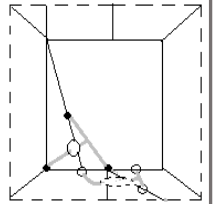
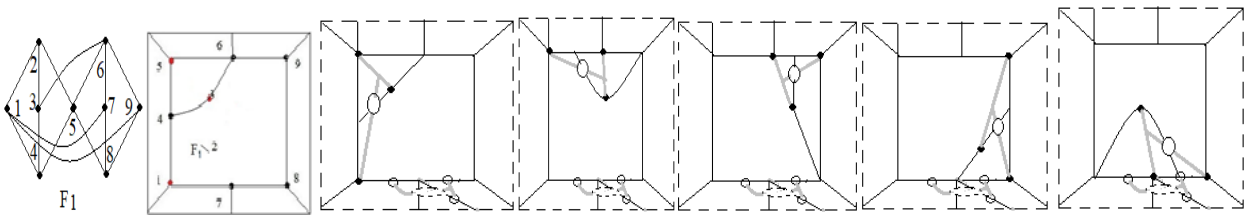
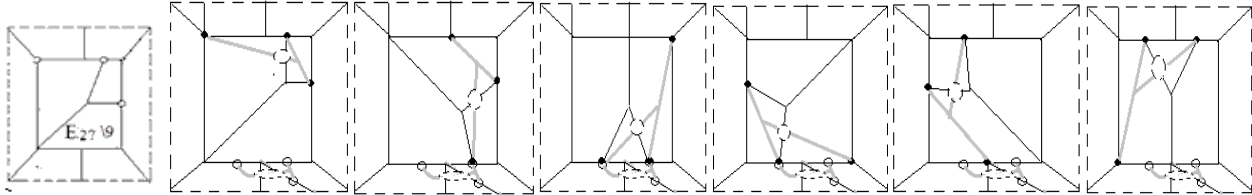
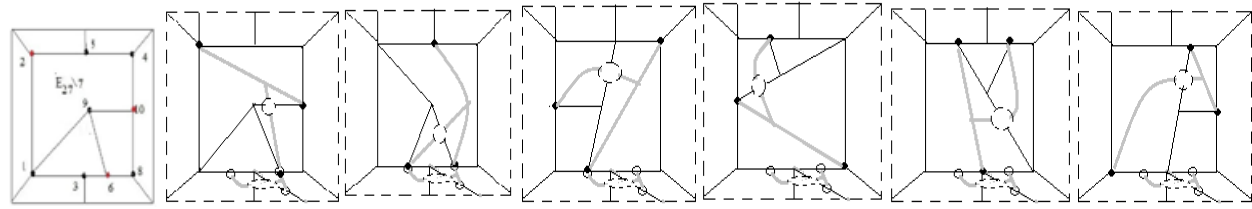


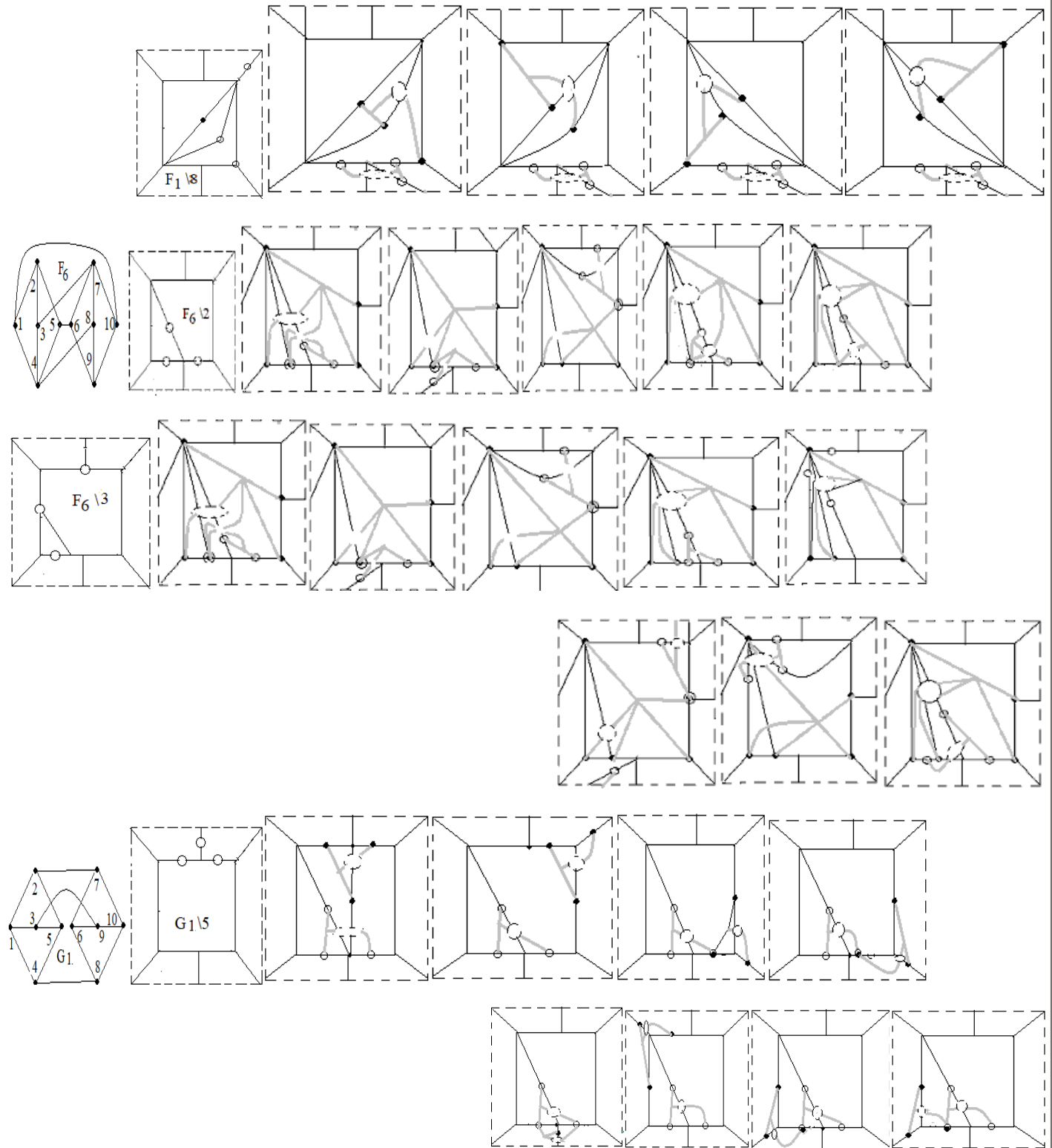






Структура графів на поверхнях. III





8.2. СИНТЕЗ МІНОРІВ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА З МІНОРІВ ПРОЕКТИВНОЇ ПЛОЩИНИ, ЯКІ МАЮТЬ ПІДГРАФ ГОМЕОМОРФНИЙ K_5

Розглянемо **задачу** побудови мінорів поверхні Клейна, тобто графів неорієнтованого роду 3 у якого всі ребра є суттєвими відносно роду при операціях видалення довільного ребра чи стискання його в точку, з використанням структурних властивостей пари мінорів G_i, G_j проективної площини N_1 . Оцінка числа таких графів встановлена в десятки тисяч як наведено в статтях багатьох авторів [4,5,11,12]. Насамперед така оцінка обумовлена перебірним алгоритмом побудови всіх графів неорієнтованого роду 3 з подальшим видаленням чи стисканням в точку деяких ребер графів, які стали несуттєвими відносно роду.

Наша мета полягатиме в направленому пошуку мінорів поверхні Клейна, зокрема заданої зв'язності. Має місце підґрунтя в [8,16,17], де зокрема знайдено 662 2-зв'язних мінори поверхні Клейна. З кожного з 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна можливо побудувати принаймні один 3-зв'язний мінор шляхом приєднання кінцевих вершин простої зірки до деяких точок з обох частин 2-зв'язних мінори поверхні Клейна з обома видаленими точками розрізу. Зауважимо, що чотирьохкомпонентна структура мінорів графів заданого роду виписана у статтях Робертсона і Сеймура. Подібну задачу про покриття множини вершин планарного графа не більш ніж заданим числом кліток розглянуто в [9, 10,18].

Мінори G_i проективної площини з підграфами гомеоморфними одному й тому графу Куратовського K , подамо як φ -образ пари підграфів (K, H_i) при φ -перетворенні шляхом ототождження відповідних точок пари простих ланцюгів L_K, L_{H_i} чи простих циклів в ланцюг ототождження L_i , де H_i є підграфом породженим множиною вершин $(G_i^0 \setminus K^0) \cup L_i$, а множина вершин ланцюга L_i складена з $L_i^0 = \{a_{i'}^*\}_{i'=1}^{m_i}$, тобто задано пару φ -перетворень $\varphi_i : (H_i + K, \sum_{i'=s}^{m_i} (a_{i'} + g_{i'})) \rightarrow (G_i, L_i^0)$.

Згідно [3] вважатимемо, що довільне мінімальне вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N має комбінаторне подання через множини граничних замкнених шляхів, утворених при обході за часовою стрілкою ребер та вершин на границі кожної клітки з множини.

Результати:

1. Додаток 1 містить 13 мінорів проективної площини, які мають 15 породжених підграфів гомеоморфних K_5 з виділеними точками приєднання до висячих вершин зірки та

вкладеннями в проєктивну площину, які мають клітку з граничним циклом довжини не менше 5 і задовольняють теоремі 1:

2. Додаток 1а містить мінори C_3 і B_7 проєктивної площини з 2-ма частинними підграфами гомеоморфними K_5 з виділеними точками приєднання до висячих вершин зірки та вкладеннями в проєктивну площину, які не мають клітки з циклом довжини не менше 5 і задовольняють теоремі 1.
3. Додаток 1б має 3 мінори та 8-м їхніх частинних підграфів мінорів проєктивної площини, що стягуються до K_5 . Граф E_{19} містить породжений K_5 та має частинний підграф, який стягується до K_5 :
4. Додаток 2. Наведені нижче графи без позначок є результатом синтезу по K_5 пари (C_2, G) мінорів проєктивної площини $N_1 \in 2$ -зв'язними мінорами поверхні Клейна. Графи G сумісні з C_2 та містять частинний чи породжений підграф гомеоморфний K_5 , але не стягується стисканням в точку ребра до нього. В 1-му рядку наведено граф C_2 На 2-му рядку графів породжений підграф $C_2 \setminus 8$, $G=C_2 \setminus 8$, поданий двома неізоморфними вкладеннями в N_1 і ототожнений всіма різними можливими способами з графом C_2 по частині чи підграфу K_5 . Подальші рядки аналогічні 2-му рядку для інших мінорів проєктивної площини з частиною чи породженим підграфом K_5 .
5. Алгоритмом А побудовано два класи 3-зв'язних моделей мінорів поверхні Клейна наведено без розмітки вершин їхні мінімальні вкладення до неорієнтованої поверхні роду 3.
6. Перший клас з карт в додатку 1 отримано шляхом ϕ -перетворення пар графів (C_2, Γ_i) по підграфам K_5 . Другий клас в додатку 2 отримано таким же ϕ -перетворення пар графів (F_6, Γ_i) по підграфам K_5 . Графи Γ_i присутні в додатку А як такі, у яких вершини помічені тими ж мітками що і в списку 35-ти мінорів проєктивної площини та кожен з них має підграф гомеоморфний графу K_5 .
7. Цим фактом підтверджено суттєву різницю кількості синтезованих моделей 3-зв'язних мінорів поверхні Клейна для різних пар графів з числа 40 графів додатку А.

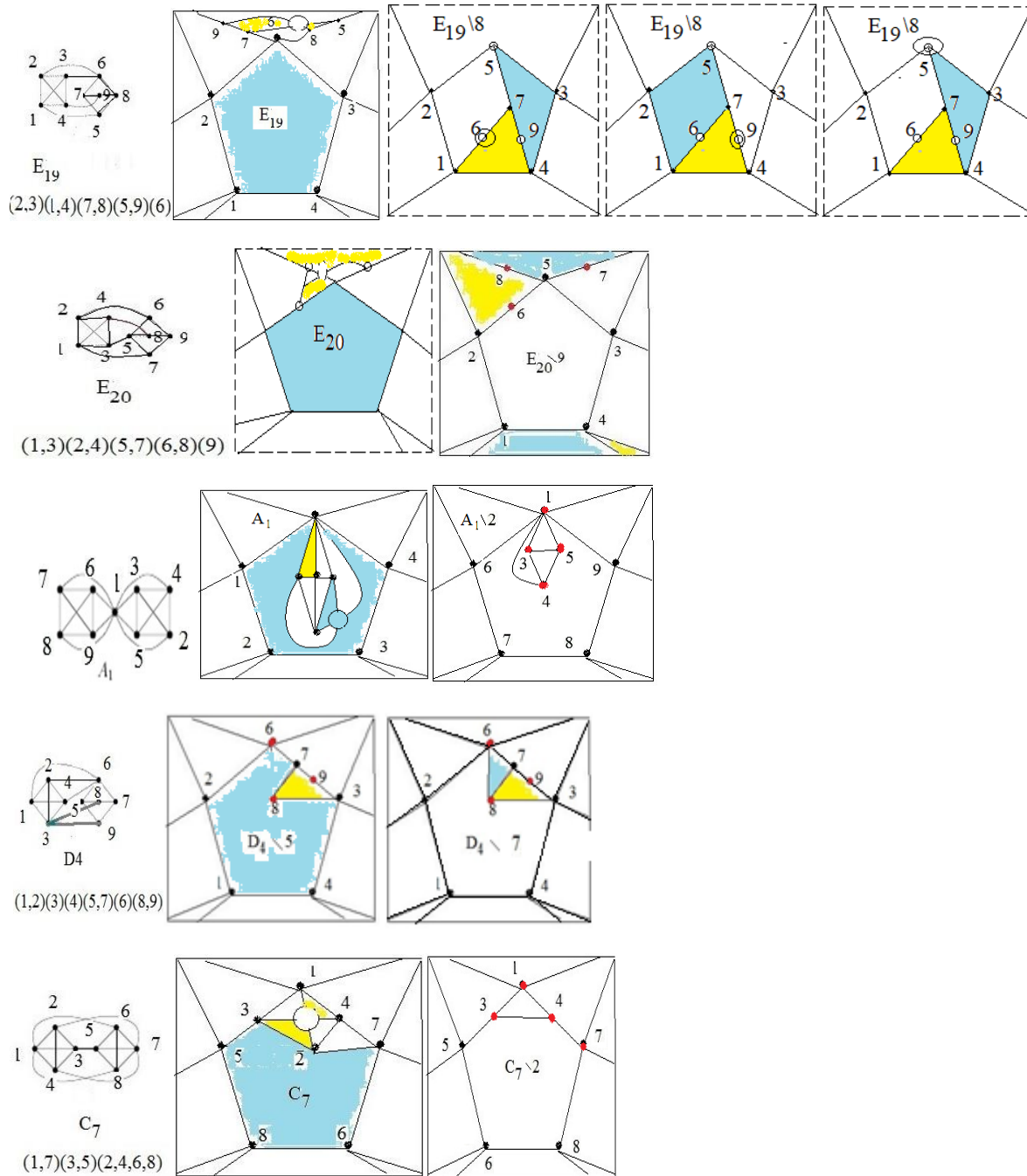
Література.

43. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1973. 383 с.
44. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1970. 299 с.
45. Mohar B., Thomassen C. Graphs on Surfaces. Johns Hopkins University Press, 2001. 412 p. <https://www.sfu.ca/~mohar/Book.html>
46. Hur S. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Phd, Ohio State University, 2008. http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1209141894

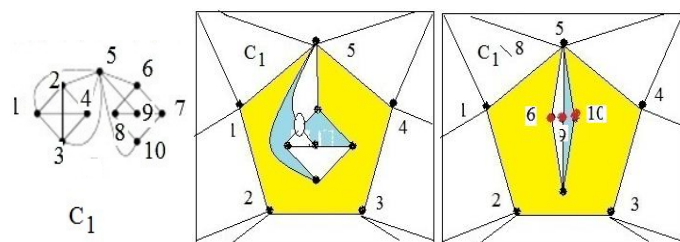
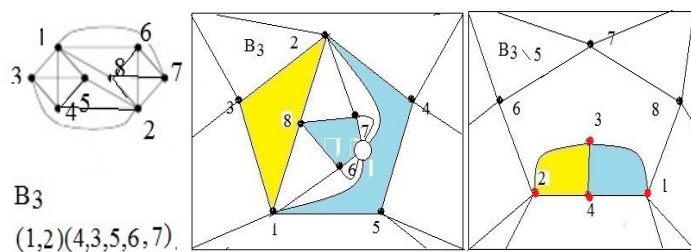
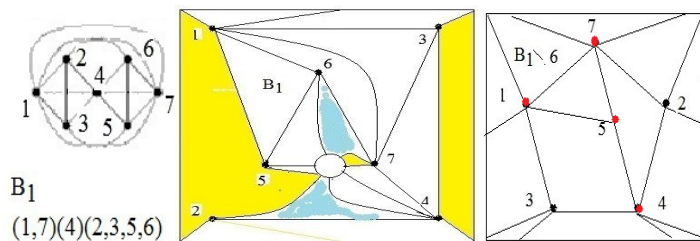
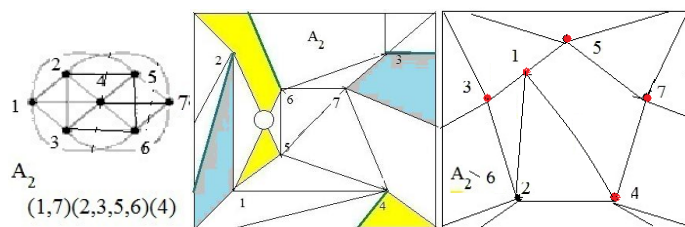
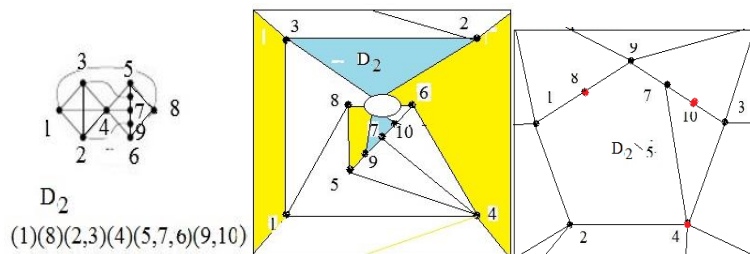
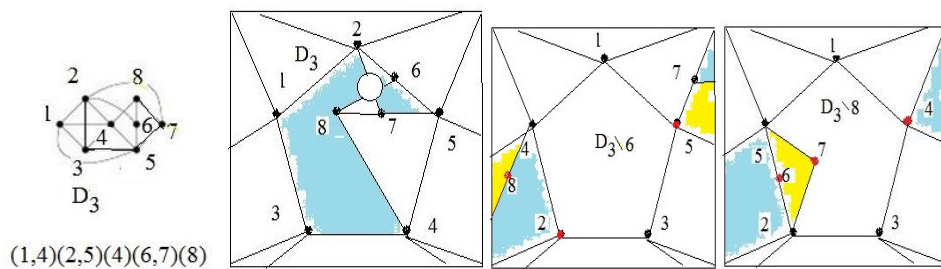
47. Archdeacon D., Huneke P. A Kuratowski Theorem for Nonorientable Surfaces. *Journal of combinatorial theory*, Series B. 1989. **46**. P. 173–231.
48. Петренюк В.І. Про структуру площинних підграфів графів-обструкцій неорієнтованої поверхні заданого роду. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021. № 33. С. 105–109. [Google Scholar](#).
49. Anna Flötotto. *Embeddability of graphs into the Klein surface*. Dissertation, University Bielefeld, 2010. -174 pp.
50. P.Škoda. Obstructions for embedding graphs into surfaces, Simon Frazer University, PhD dissertation, 2012.-133 p.
51. Bienstock D., Dean N. On obstructions to small face covers in planar graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*. 1992. **55**. P. 163–189. <https://doi.org/10.1016/0095-8956%2892%2990040-5>
52. Bienstock D., Monma C.L. On the complexity of covering vertices by faces in a planar graph. *SIAM J. Comput.* 1988. **17**. P. 53–76. <https://doi.org/10.1137/0217004>
53. Mohar B. Face Covers and the Genus Problem for Apex Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 2001. **82**. P. 102–117. <https://doi.org/10.1006/jctb.2000.2026>
54. Mohar B. Apex graphs with embeddings of face-width three. *Discrete Mathematics*. 1997. **176**. P. 203–210. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(96\)00363-9](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00363-9)
13. В.І. Петренюк, Д.А. Петренюк, О.В. Оришака. Структура проєктивно площинних підграфів графів-обструкцій заданої поверхні. *Кібернетика та комп'ютерні технології*. 2022, № 2. С. 1-20 [DOI:10.34229/2707-451X.22.2.0](https://doi.org/10.34229/2707-451X.22.2.0)
14. В.І. Петренюк, Д.А. Петренюк. Про алгоритм побудови 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні ехнології*, № 37 (2023): 72-74. <http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit/article/view/308>
15. Edwin R. van Dam, Jack H. Kooleen, Hajime Tanaka. Distance-regular graphs, E-JC, DS22: Apr 15, 2016, <https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/issue/view/Surveys>.
16. Bojan Mohar, Petr Škoda. Excluded minors for the Klein bottle I. Low connectivity case, *Journal of Combinatoria Theory, Series B*, Volume 164, January 2024, Pages 299-320. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2023.10.002>
17. Bojan Mohar, Petr Škoda. Excluded minors for the Klein bottle II. Low connectivity case, *Journal of Combinatoria Theory, Series B*, Volume 166, May 2024, Pages 80-108. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2023.12.006>
18. D. Bienstock, C. C. Monma, On the complexity of embedding planar graphs to minimize certain distance measures, *Algorithmica*, 5 (1990), 93–109 <https://doi.org/10.1007/BF0184037>
19. В.І. Петренюк, Д.А. Петренюк. Про синтез площинних графів із заданими властивостями. *Кібернетика та комп'ютерні технології*, №2, Інститут кібернетики НАНУ, Київ, 2025, С. 17-36. Режим доступу: http://cctech.org.ua/ua/index.php?option=com_content&view=article&id=718:abstract-25-2-2-artu&catid=11:vertikalnoe-menyu-ua&Itemid=101

ДОДАТОК 1 ДО РОЗДІЛУ 8.2

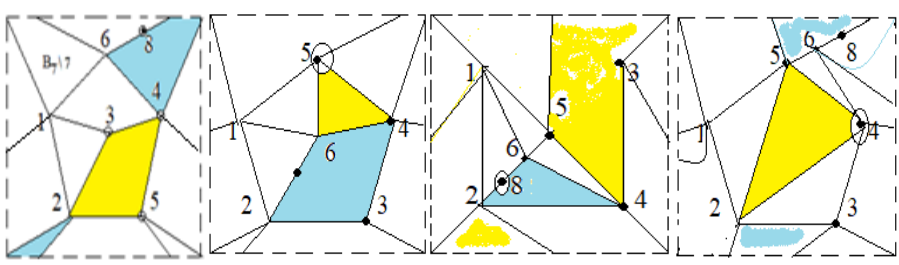
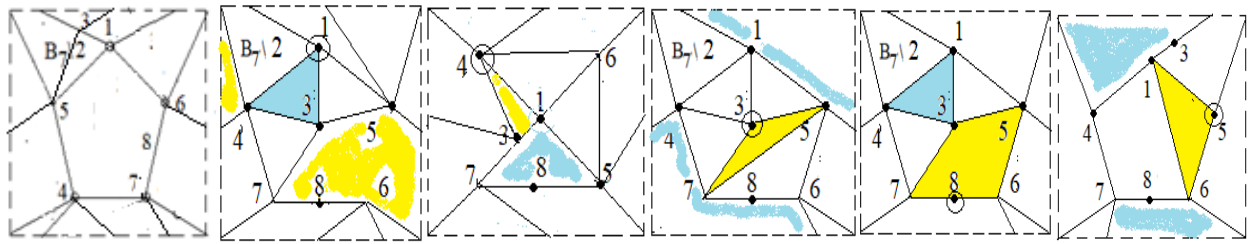
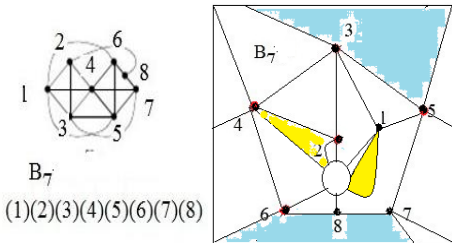
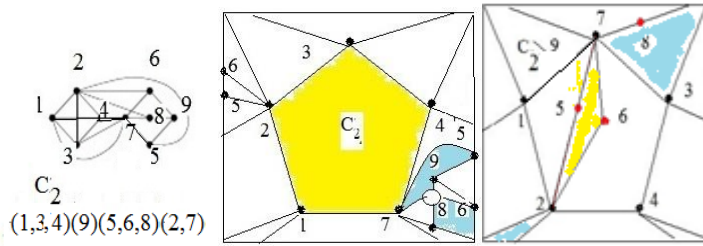
Наведено 13 мінорів проективної площини, які мають 15 породжених підграфів гомеоморфних K_5 з виділеними точками приєднання до висячих вершин зірки та вкладеннями в проективну площину, які мають клітку з граничним циклом довжини не менше 5 і задовольняють теоремі 1:



Структура графів на поверхнях. III

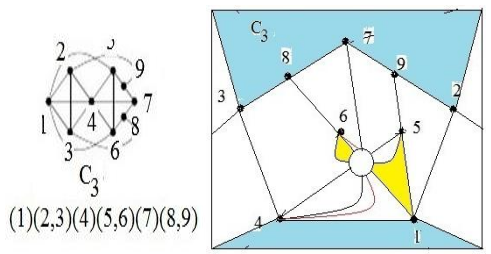


Структура графів на поверхнях. III

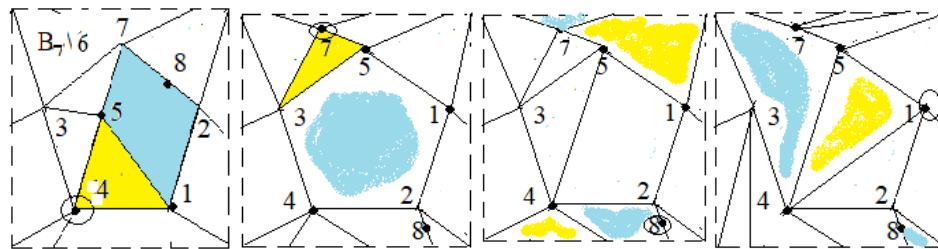
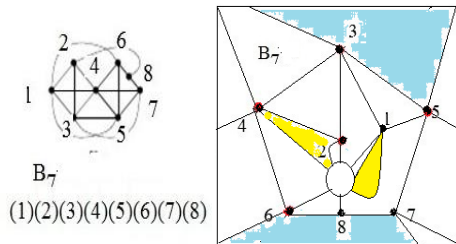
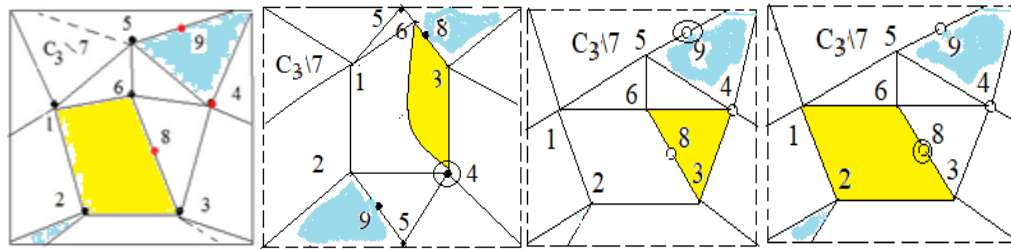


ДОДАТОК 1А ДО РОЗДІЛУ 8.2.

Мінори C_3 і B_7 проєктивної площини з 2-ма частинними підграфами гомеоморфними K_5 з виділеними точками приєднання до висячих вершин зірки та вкладеннями в проєктивну площину, які не мають клітки з циклом довжини не менше 5 і задовольняють теорему 1.

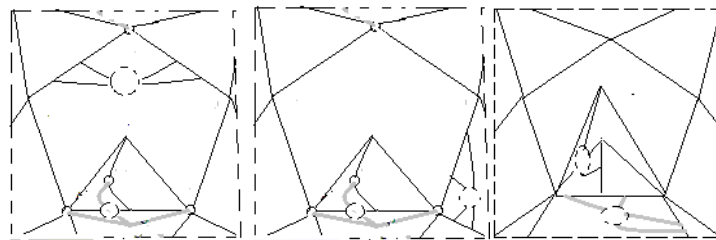
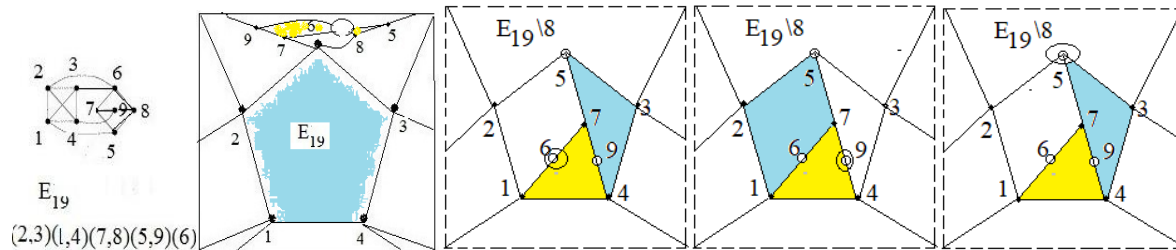


Структура графів на поверхнях. III

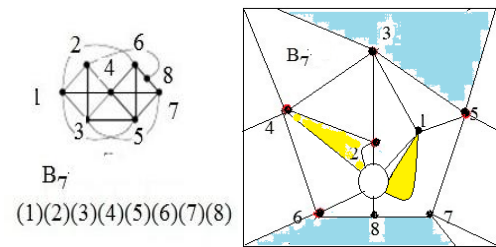
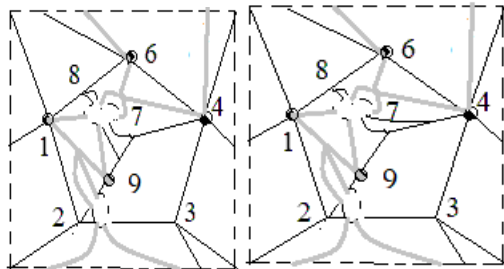
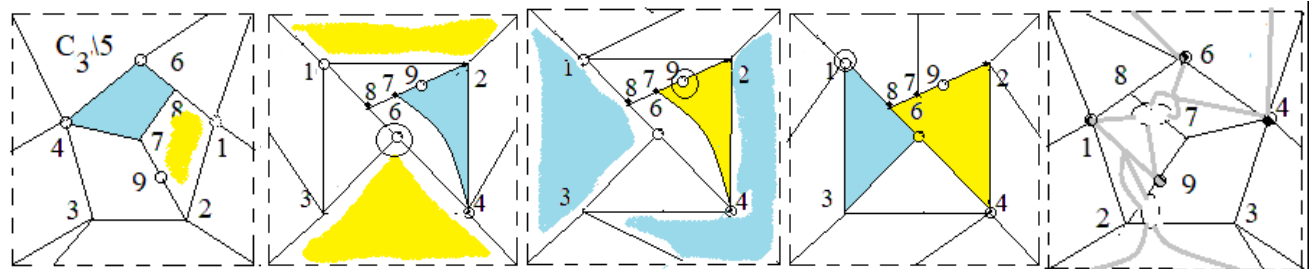
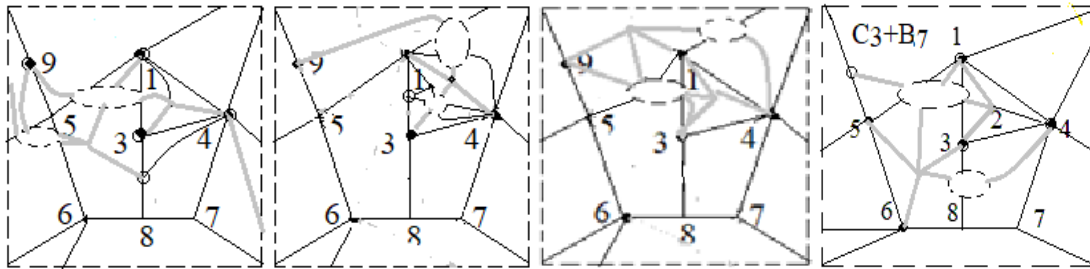
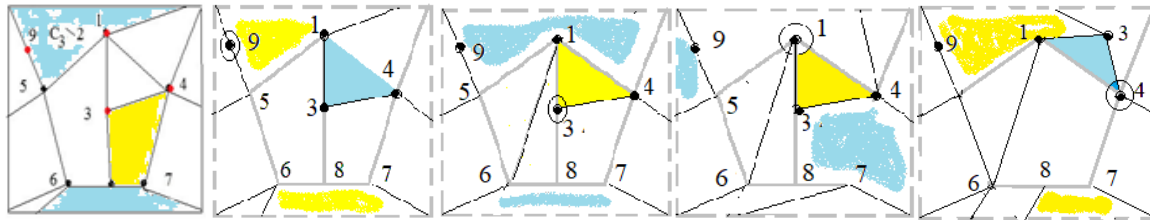
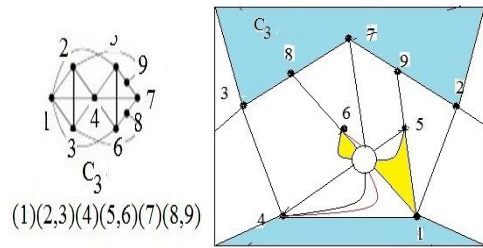


ДОДАТОК 1Б ДО РОЗДІЛУ 8.2.

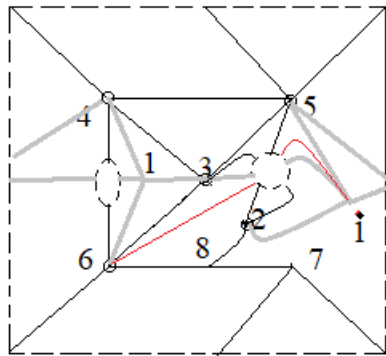
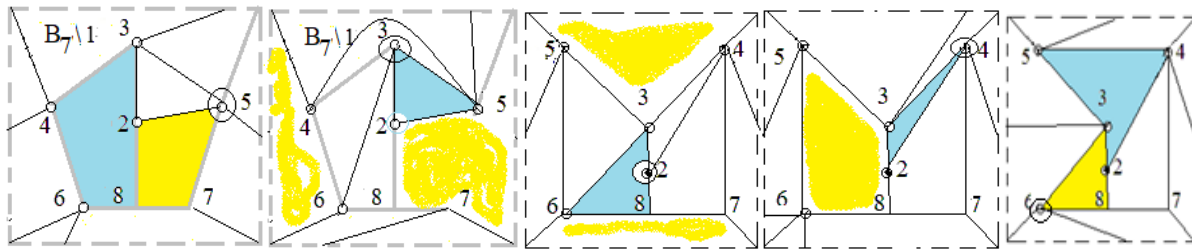
Наведені 3 мінори та 8-м їхніх частинних підграфів мінорів проєктивної площини, що стягуються до K_5 . Граф E_{19} містить породжений K_5 та має частинний підграф, який стягується до K_5 :



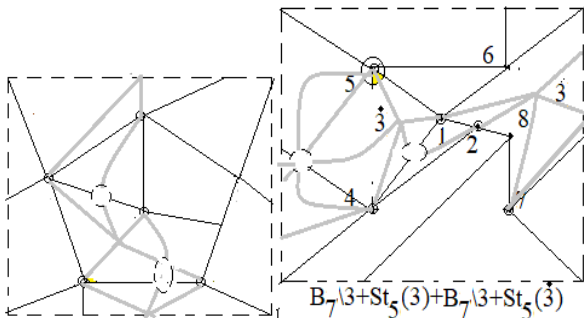
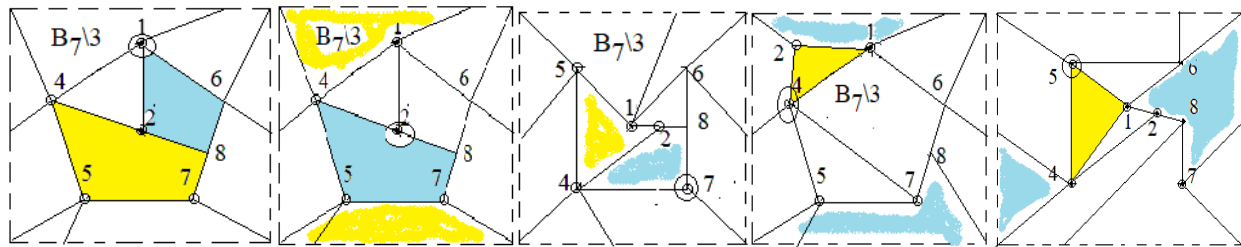
Структура графів на поверхнях. III



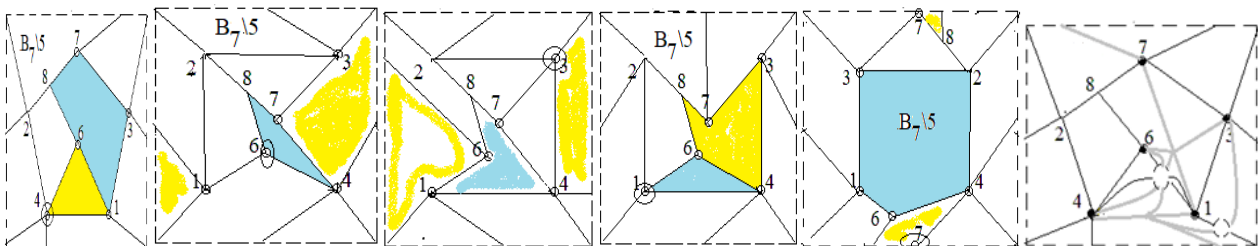
Структура графів на поверхнях. III



$B_7 \setminus 1 + St_5(1) + B_7 \setminus 1 + St_5(1)$

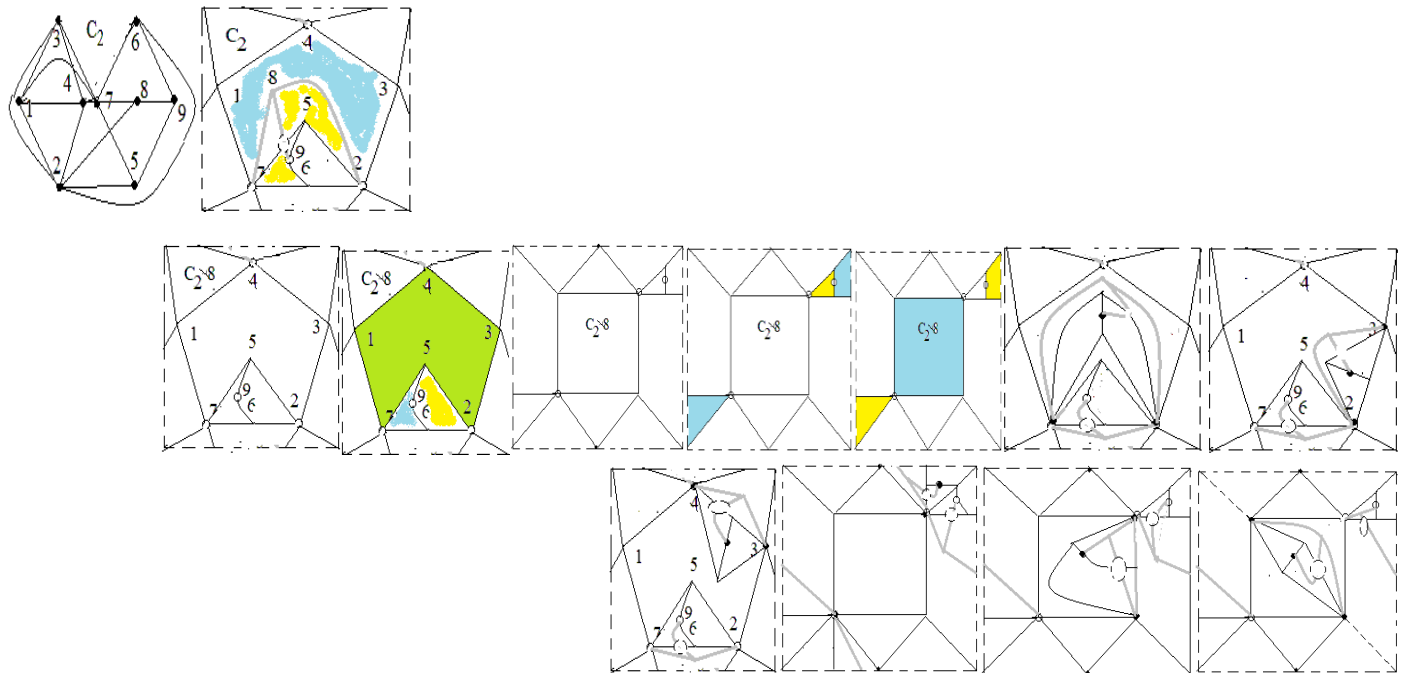


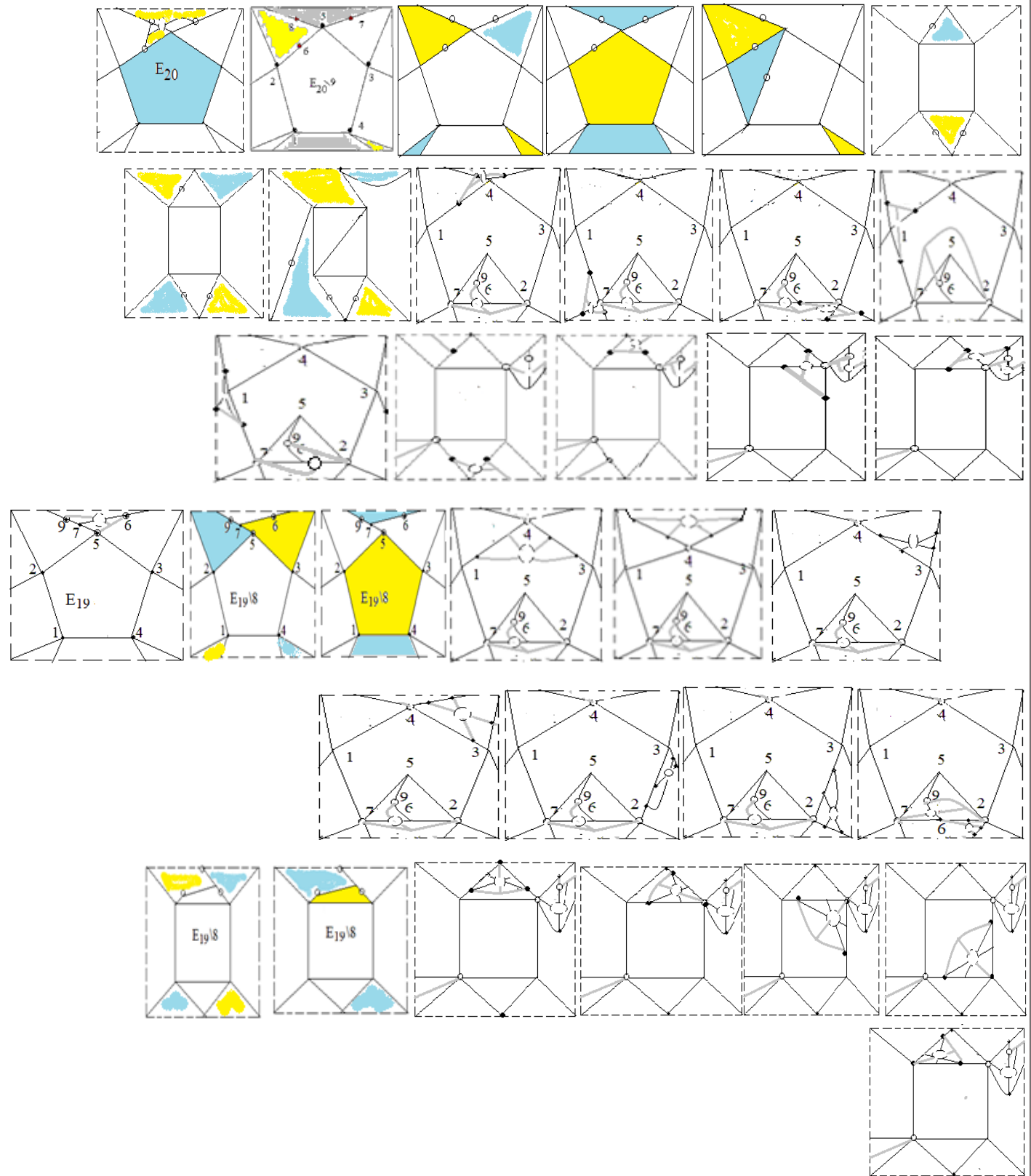
$B_7 \setminus 3 + St_5(3) + B_7 \setminus 3 + St_5(3)$

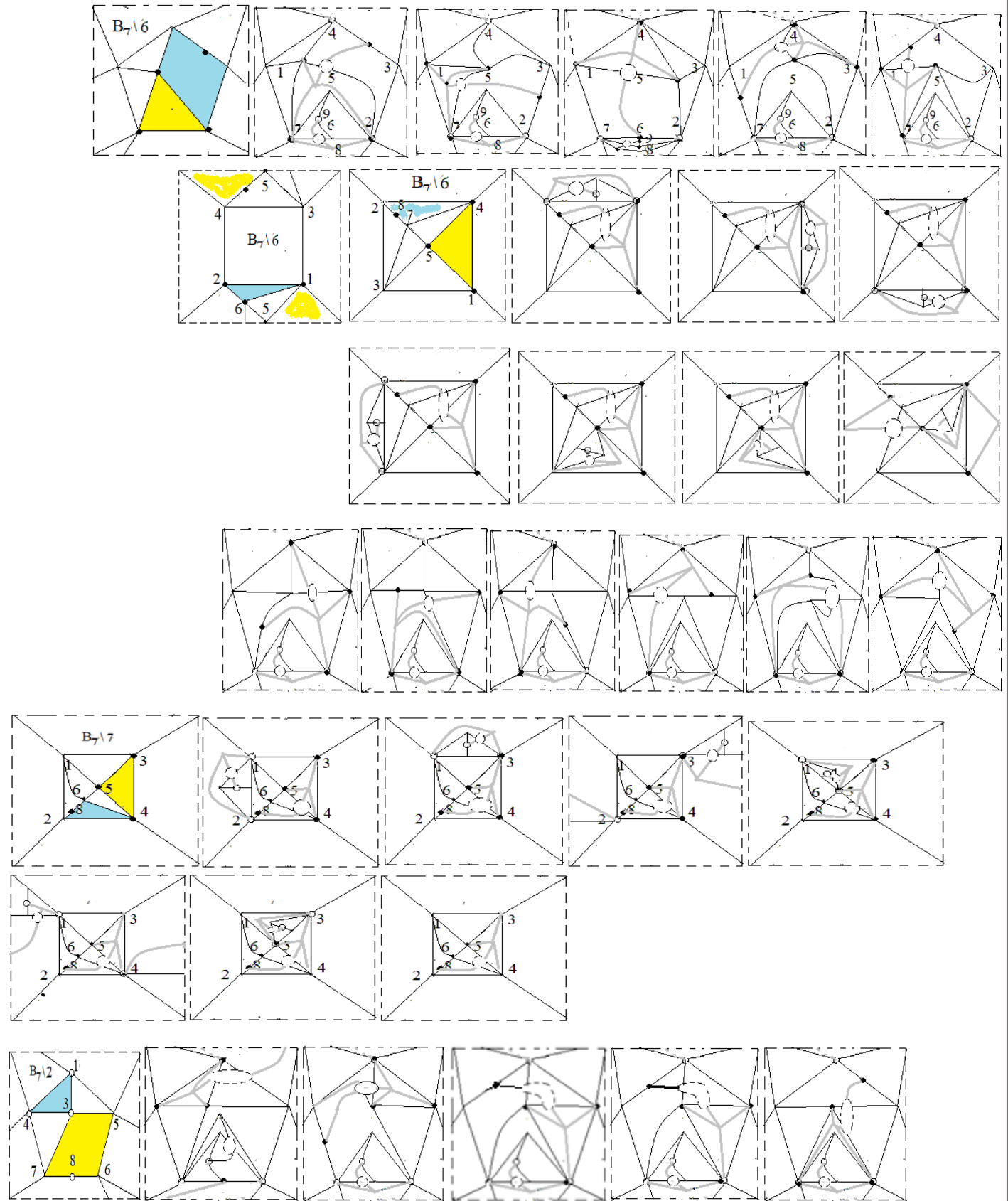


ДОДАТОК 2 ДО РОЗДІЛУ 8.2.

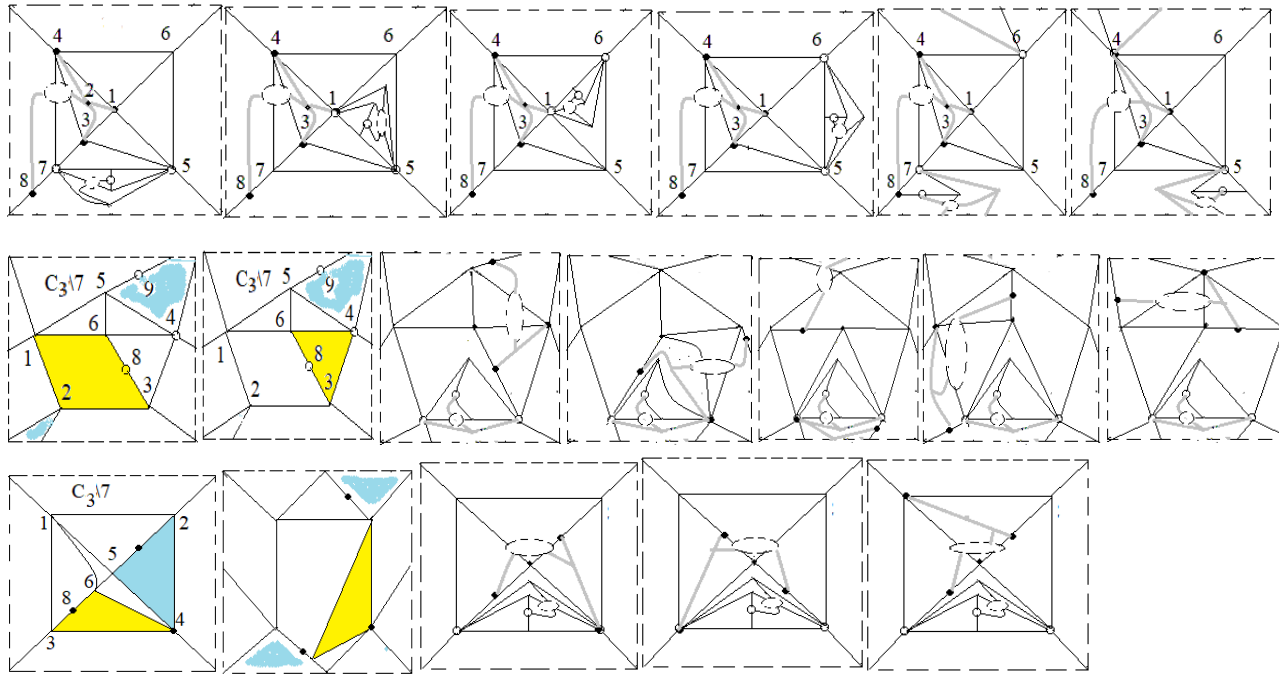
Наведені нижче графи без позначок є результатом синтезу по K_5 пари (C_2, G) мінорів проективної площини $N_1 \in 2$ -зв'язними мінорами поверхні Клейна. Графи G сумісні з C_2 та містять частинний чи породжений підграф гомеоморфний K_5 , але не стягується стисканням в точку ребра до нього. В 1-му рядку наведено граф C_2 На 2-му рядку графів породжений підграф $C_2 \setminus 8$, $G=C_2 \setminus 8$, поданий двома неізоморфними вкладеннями в N_1 і ототожнений всіма різними можливими способами з графом C_2 по частині чи підграфу K_5 . Подальші рядки аналогічні 2-му рядку для інших мінорів проективної площини з частиною чи породженим підграфом K_5 .







Структура графів на поверхнях. III



8.3. АЛГОРИТМ ВИЯВЛЕННЯ МІНОРІВ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА СЕРЕД ГРАФІВ НЕОРІЄНТОВАНОГО РОДУ 3 СИНТЕЗОВАНИХ З МІНОРІВ ПРОЕКТИВНОЇ ПЛОЩИНИ, ЯКІ МАЮТЬ ПІДГРАФ ГОМЕОМОРФНИЙ $K_{3,3}$

В багатьох статтях досліджувалися структурні властивості графів-обструкцій заданої неорієнтованої поверхні як неорієнтованого 2-многовиду без країв та побудовані їхні прототипи як основу з якої, шляхом видалення чи стискання деякої множини ребер та, можливо, додавання нових ребер без зміни роду, утворюються графи-обструкції заданої поверхні. Так дослідження структури графів неорієнтованого роду виконувалися в [4,5,6]. Подібні питання розглядалися в [7,8,9]. В [10,11] досліджено структурні властивості графів як φ -образу площинного графа та, або простої зірки, або графа-обструкції проективної площини. В [12,13] наведено метод побудови всіх 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна. Основні визначення та позначення узяті з [1,2],[3].

Розглянемо **задачу** виявлення графів-обструкцій та мінорів поверхні Клейна серед графів роду 3, синтезованих з пари графів мінорів проективної площини, кожен з яких має частинний чи породжений підграф гомеоморфний $K_{3,3}$.

Тобто з побудованої скінченої множини 2-зв'язних графів неорієнтованого роду 3 треба не в перебірний спосіб відібрат ті, у яких всі ребра є суттєвими відносно роду при операціях видалення довільного ребра чи стискання його в точку, з використанням пари мінорів G_i, G_j проективної площини N_1 .

Оцінка числа графів-обструкцій поверхні Клейна в десятки тисяч наведена в [4,5,11,12]. Насамперед така оцінка обумовлена перебірним алгоритмом побудови всіх графів неорієнтованого роду 3 з подальшим видаленням чи стисканням в точку деяких ребер графів, які стали несуттєвими відносно роду.

Згідно [3] вважатимемо, що довільне мінімальне вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N має комбінаторне подання через множину граничних замкнених шляхів, утворених при обході за часовою стрілкою ребер та вершин на границі кожної клітки з множини. Нехай задано мінімальне вкладення $f: G \rightarrow N$ графа G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$, тобто є найменша по включенню підмножина $\{s_i\}_{i=1}^t$ множини $S_G(N, f)$, де $S_G(N, f) = N \setminus f(G)$, складена з кліток на границях яких розташовано точки з множини M . Кожен граф G неорієнтованого роду k , $k \geq 1$, може подаватися наступним чином:

$\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=1}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, як φ -образ графа H та зірки $St_n(g_0)$, приєднаної висячими вершинами g_i до точок $a_i \in H^0$, $M = \{a_i\}_{i=1}^m$. Множина M , $M \subseteq (\partial s_1 \cup \partial s_2) \cap H^0$, розміщується мінімальним вкладенням f' , $f': H \rightarrow N'$ на границях кліток s_1, s_2, \dots, s_t з множини $N' \setminus f'(H)$, де $t \geq 2$, $m \geq 2$, $i = 1, 2, \dots, m$. Аналогічно характеристикам вкладення графа до орієнтованої поверхні на підмножині $\{s_i, s_j, s_k\}$ множині $S_G(N, f)$, в [13] визначено мінімальну кліткову відстань заданої множини точок графа неорієнтованого роду. Так в [6] визначено характеристику θ , $\theta=1$, множини коли є, хоча б, одна спільна точка на їхніх границях, яка є центром кліткової зірки, утвореної із трьох кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$ або

визначено характеристику $\partial\theta$, $\partial\theta=1$, якщо три пари границь цих кліток мають, принаймні, спільну точку.

Дослідження властивостей площинних та проєктивних графів мінімальних відносно заданої множини вершин із фіксованою клітковою довжиною і числом досяжності заданої підмножини множини точок потрібне для оцінки неорієнтованого роду утворених графів.

Наша мета полягатиме в направленому пошуку мінорів поверхні Клейна та має підґрунтя в [8,16,17], де зокрема знайдено 662 2-зв'язних мінори поверхні Клейна. Структура мінорів графів заданого роду вписана у статтях Робертсона і Сеймура та складається з чотирьох компонент. Подібну задачу про покриття множини вершин планарного графа не більш ніж заданим числом кліток розглянуто в [9, 10,18].

Схема синтезу наступна. Синтез графа G з впорядкованої пари мінорів (G_1, G_2) проєктивної площини з заданими підграфами, гомеоморфними графу $K_{3,3}$, чи стягнутими до $K_{3,3}$, спочатку полягатиме в ототоженні кожної пари відповідних вершин заданих підграфів у відповідні вершини спільного підграфа K . До клітки чи пари кліток підграфа K може бути приклеєно не більше трьох лент Мебіуса та в утворені клітки вкладено граф $G \setminus K$ вкладенням, що може бути сумою мінімальних вкладень мінорів G_i , $i=1,2$, в поверхню Клейна N_2 , що співпадають на спільно-му підграфі K . Неорієнтований род $\gamma(G)$ задовольняти ме нерівності $2 \leq \gamma(G) \leq 4$. Рівність $\gamma(G)=3$ буде за умови сумісності графів G_1, G_2 , яка полягатиме спочатку в побудові множини $F(G_1, N_2)$ всіх тих неізоморфних мінімальних вкладень f_i , $f_i \in F(G_1, N_2)$, графа G_1 в поверхню Клейна, що задовольняють співвідношенню (*) теореми 1. Далі перевірка можливості продовження кожного f_i до вкладення підграфа $G_2 \setminus K$ в одну чи кілька кліток з множини $N_2 \setminus f_i(G_1 \setminus K)$, з приклеєними до них лентами Мебіуса. Перевірка має бут для всіх рідних варіантів приєднання підграфа $G_2 \setminus K$ до графа G_1 .

Теорема 1. Мають місце наступні твердження:

1. Для кожного породженого чи частинного підграфа H неорієнтованого роду $n-1$, де $H = G \setminus v$, $n=3$, 2-зв'язного мінора G неорієнтованого роду n , виконуються наступні співвідношення:

(*) Для довільної вершини v , $v \in G \setminus H$, кліткова довжина $d = d_H(M)$ множини точок $M = \{u_j\}_{j=1}^{|M|}$ графа H (з якими попарно ототожнюються висячі вершини u_j' з множини $St_G^0(v) \setminus \{v\}$) задовольняє рівнянню $d = n - 2$ та існує скінчена множина Fv , $Fv = \{fv_j\}_{j=1}^{|M|}$, де вкладення $fv_j: H \rightarrow N$, графа H в неорієнтовану поверхню N роду $n-1$ задовольняє умові: $(fv_j(u_j) \subset \partial s_1) \wedge (fv_j(M \setminus u_j) \subset \bigcup_{k=2}^{d+1} \partial s_k)$, де $s_i \in N \setminus fv_j(G \setminus (St_G^1(v) \cup \{v\}))$.

(**) кожне ребро e , $e \in H^1$, є критичним, при операції видалення ребра чи стискання його в точку, або відносно неорієнтованого роду $\gamma(G) = n$, або кліткової довжини множини точок M , $M = St_G(v) \setminus \{v\}$, при операції видалення довільної точки $x \in M$;

2. Якщо граф G синтезовано з пари сумісних по $K_{3,3}$ мінорів H_i, H_j неорієнтованого роду $n - 1$, (тобто є вкладення графа G в неорієнтовану поверхню роду n , подане як сума мінімальних вкладень мінорів H_i, H_j), то тоді граф G - може не бути граф-обструкцією неорієнтованого роду n , $n-1 \geq 0$, можливо з деякими несуттєвими ребрами відносно роду при операції стискання ребра в точку;

3. Якщо G є мінором неорієнтованого роду n , $n = 3$, то кожна його вершина v задовольняє співвідношенню (*), вписаному для підграфів $G \setminus v$ роду менше n .

Доведення теореми 1 маємо намір опубліковано в журналі “Кібернетика та комп’ютерні технології” в статті авторів “Про синтез мінорів проективної площини з підграфом чи частиною гомеоморфними $K_{3,3}$ ”.

На рис. 1 наведено приклад виконання умов (*) вкладеннями в поверхню Клейна теореми 1. На першій карті наведено мінор $(C_3 \setminus 1 + St_5) + (D_4 \setminus 1 + St_4)$, де зірки мають сірі ребра та сірі центральні вершини.

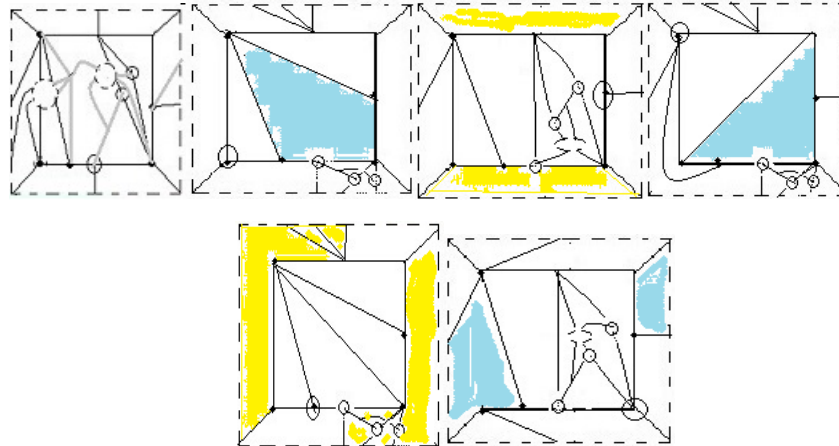


Рис. 1.

На рис. 2 наведено приклад коли не виконується умова теореми 1 для висячих ребер двох зірок з п’ятьма та чотирма сірими висячими ребрами, що приєднані до виділених двох множин вершин, які, відповідно, наведені жирно та обведених кружками. Не мінор $(C_3 \setminus 1 + St_5) + (E_5 \setminus 5 + St_4)$ стане ним після видалення пари ребер та стискання в точку червоного ребра.

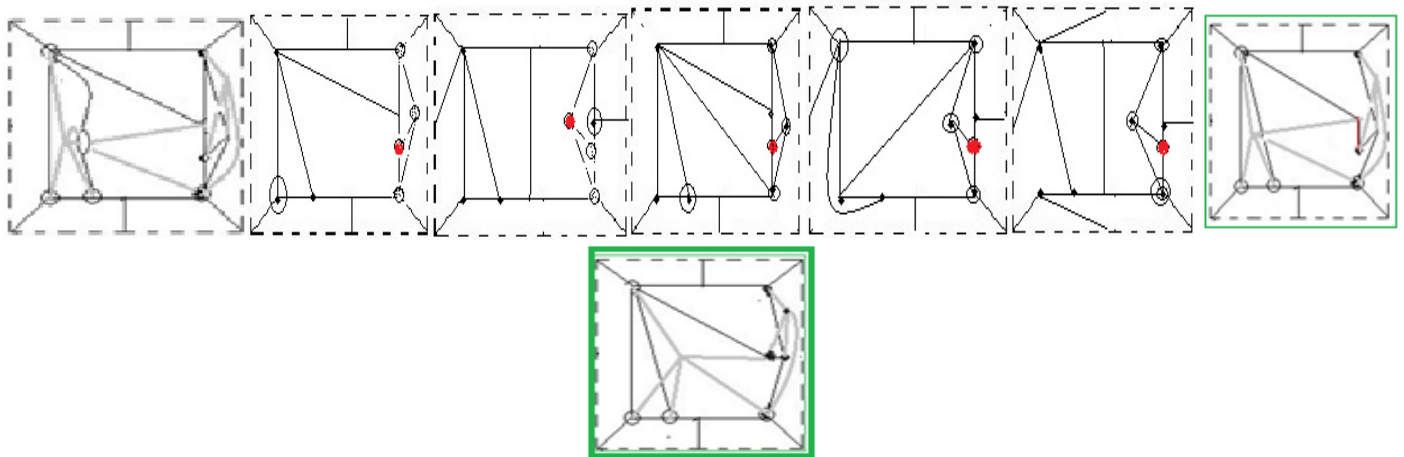


Рис.2.

Схематичний алгоритм має наступний вигляд:

Вхід . Синтезований граф G з пари мінорів G_i проективної площини , кожен з підграфом K гомеоморфним $K_{3,3}$ та виділеною зіркою $St_{|M_i|}(v_i)$ з множиною всіх висячих вершин M_i , де $v_i \in G_i^0 \setminus K^0$;

В циклі з параметром k від 1 до $|G^0 \setminus K^0|$ кроком 1 виконати дії:

1. $v := v_k$, де $v_i \in G_1^0 \setminus K^0$
 2. Побудуємо множину F_1 всіх $|M_1|$ мінімальних вкладень f_j графа G_1 в поверхню Клейна N_2 , які розміщують на границях двох виділених граней $s_1(v_1), s_2(v_1), s_i(v_1) \in N_2 \setminus f(G_1)$ (що мають принаймні одну спільну точку на своїх границях) одну точку v та підмножину $M_i \setminus v$, відповідно, де $i = 1, 2, j = 1, \dots, |G_1^0 \setminus K^0|$. Продовжуємо вкладення розташовуючи в середину однієї виділеної грані (з підмножиною $M_i \setminus v$ точок на границі), центр зірки та її ребра за винятком одного, яке розміщуватимемо на ленті Мебіуса, яку приклеїмо до обох виділених граней;
 3. В циклі з параметром l від 1 до $|G_2^0 \setminus K^0|$ кроком 1 виконати:
 4. $u_l := u_l$ де $u_l \in G_2^0 \setminus K^0$
 5. Побудуємо вкладення f' графа $(G_2 \setminus K) \setminus St_{|M_2|}(u_1)$ в поверхню N_3 , яку подано через грані $s_1(u_1), s_2(u_1)$ множини $N_2 \setminus f(G_1)$ (можливо відмінних від виділених граней $s_1(v_1), s_2(v_1)$) з, принаймні, однією приклеєною лентою Мебіуса.
 6. Якщо для кожної зірки $St_{|M_2|}(u_1)$ з центром вкладеним в $s_1(u_1), s_2(u_1) \in$ вкладення яке розміщує на границях цих виділених граней з, принаймні, однією спільною точкою на своїх границях) одну точку u та підмножину $M_2 \setminus u$, відповідно, то
тоді
виводимо «граф G є графом обструкцією поверхні Клейна»; вкладення $f'f$ буде мінімальним;
виводимо G - мінор поверхні Клейна в файл;
інакше
виводимо «граф G не є графом обструкцією бо має несуттєві ребра відносно роду при операції видалення»;
виходимо на кінець алгоритму.
 7. Підлягатимуть стисканню в точку ті ребра $e \in f'f(G)$ графа обструкції G поверхні Клейна, які заважатимуть розміщенню на границях двох кліток однієї точки з множини виділених точок, а всіх інших точок цієї множини на границі другої та утворюють підмножину T . В результаті стискання кожного з ребер підмножини T отримаємо мінор G поверхні Клейна.
 8. Кінець циклу з параметром l ;
 9. Кінець циклу з параметром k ;
- Кінець алгоритма.

Твердження А. Схематичний алгоритм коректний та лінійний.

Доведення. Основою алгоритма є теорема 1. Граф $K_{3,3}$ має одне неізоморфне мінімальне вкладення в проективну площину, тому підграф K гомеоморфний $K_{3,3}$ також. Переглянувши всі 2-за'язні мінори проективної площини побачимо, що відносно K будуть розміщуватися декілька, принаймні 4, простих зірок з центрами в тих вершинах мінорів проективної площини, які не задіяні при синтезі графа G . Таким чином матимемо не більше 16 варіантів розташування зірок відносно підграфа K мінорів проективної площини, яких менше 35. Тому число варіантів різних вкладень до поверхні Клейна не залежить від обраного синтезованого графа. Якщо мова йтиме про рід графа-обструкції Q як φ -образу графа G та квазізірки при ототожненні пар точок множини з висячими вершинами квазізірки, то розумітимемо під клітковою відстанню довжини d скорочену довжину

кліткового ланцюга чи дерева кліткового покриття, який покриває задану множину точок площинного графа. При обчисленні кліткової відстані заданої множини M графа точок графа треба для кожного неізоморфного вкладення G будувати розширення цього вкладення площинного графа G до вкладення в неорієнтовану поверхню N' – евклідову площину з, принаймні одною, стрічкою Мебіуса, на якій множина точок M є досяжною. Кінець схематичного доведення твердження А.

1. Хоменко М. П. φ -перетворення графів. Препринт ИМ АНУ, Київ, 1973. 383 с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ АНУ, Київ, 1970. 299 с.
3. Mohar B., Thomassen C. *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins University Press, 2001. 412 p. <https://www.sfu.ca/~mohar/Book.html>
4. Hur S. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Phd, Ohio State University, 2008. http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1209141894
5. Archdeacon D., Huneke P. A Kuratowski Theorem for Nonorientable Surfaces. *Journal of combinatorial theory*, Series B. 46. 1989. P. 173–231.
6. Петренко В.І. Про структуру площинних підграфів графів-обструкцій неорієнтованої поверхні заданого роду. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. № 33. 2021. С. 105–109. [Google Scholar](https://scholar.google.com/citations?user=...)
7. Bienstock D., Dean N. On obstructions to small face covers in planar graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*. 55. 1992. P. 163–189. <https://doi.org/10.1016/0095-8956%2892%2990040-5>
8. Bienstock D., Monma C. L. On the complexity of covering vertices by faces in a planar graph. *SIAM J. Comput.* 17. 1988. P. 53–76. <https://doi.org/10.1137/0217004>
9. Mohar B. Face Covers and the Genus Problem for Apex Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 82. 2001. P. 102–117. <https://doi.org/10.1006/jctb.2000.2026>
10. Mohar B. Apex graphs with embeddings of face-width three. *Discrete Mathematics*. 176. 1997. P. 203–210. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(96\)00363-9](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00363-9)
11. Петренко В. І. О структуре плоских графов с заданным числом достижимости некоторого множества их точек. Депонированный рукопис на 51 стор, №2245-Ук86, 1986
12. В.І. Петренко, Д.А. Петренко, О.В. Оришака. Структура проективно площинних підграфів графів-обструкцій заданої поверхні. *Кибернетика та комп'ютерні технології*. 2022, № 2. С. 1-20 [DOI:10.34229/2707-451X.22.2.0](https://doi.org/10.34229/2707-451X.22.2.0)
13. В.І. Петренко, Д.А. Петренко. Про алгоритм побудови 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*, № 37 (2023): 72-74. <http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit/article/view/308>
14. Edwin R. van Dam, Jack H. Koolen, Hajime Tanaka. Distance-regular graphs, *E-JC, DS22*: Apr 15, 2016, <https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/issue/view/Surveys>.
15. [Bojan Mohar](#), Petr Škoda. Excluded minors for the Klein bottle I. Low connectivity case, *Journal of Combinatorica*, [Volume 164](#), January 2024, Pages 299-320. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2023.10.002>
16. [Bojan Mohar](#), Petr Škoda. Excluded minors for the Klein bottle II. Low connectivity case, *Journal of Combinatorica*, [Volume 166](#), May 2024, Pages 80-108. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2023.12.006>.
17. В.І. Петренко, Д.А. Петренко. Про синтез мінорів проективної площини з підграфом чи частиною гомеоморфними $K_{3,3}$. *Кибернетика та комп'ютерні технології* 2026