Проанализированы преимущества и недостатки существующих технологий проведения вспашки с экологической точки зрения, приведены основные направления сохранения агрегатного состояния почвы при возделывании.

The advantages and disadvantages of existing technologies of tillage from an environmental point of view, are the major areas of conservation aggregate state of the soil during cultivation.

Одержано 12.05.11

УДК 657

В.І. Гуцул, доц., канд. техн. наук, В.О. Кадашова, ст. гр. ОА-10
Кіровоградський національний технічний університет

Оцінка значень коефіцієнта Джині при деяких законах розподілу сукупного доходу

В статті досліджується нерівномірність доходів населення за допомогою коефіцієнта Джині k. Аналізується залежність коефіцієнта Джині k від закону розподілу доходів населення та співвідношення мінімального і максимального розмірів доходів. Отримані результати представлені в аналітичній та графічній формах.
нерівномірність доходів, коефіцієнта Джині, крива Лоренца, лінійний розподіл, показниковий розподіл, кубічний розподіл

Міра нерівномірності доходів населення визначається за допомогою коефіцієнта Джині k. Метою даної роботи є дослідження залежності коефіцієнта Джині k від закону розподілу доходів населення та співвідношення мінімального і максимального розмірів доходів.

Розрахунки будемо робити в безрозмірних величинах. Кількість всього населення і сумарний дохід беремо рівними одиниці. Нехай функція $u = \varphi(x)$ $(0 \le x \le 1)$ визначає розмір доходів u для особи, яка займає положення x, причому $\varphi(0)$ і $\varphi(1)$ – відповідно мінімальний і максимальний розміри доходів. Введемо параметр n, який визначає відношення максимального розміру доходів до мінімального, тобто

$$n = \frac{\varphi(1)}{\varphi(0)}. \tag{1}$$

Так як за домовленістю сумарний дохід населення дорівнює одиниці, то для функції $\varphi(x)$ повинна виконуватися умова

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = 1. \tag{2}$$

Використовуючи залежність $u = \varphi(x)$ можна знайти функцію $y = f(x)$, де y – частка сукупного доходу, яку одержує частина x населення:

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)dt. \tag{3}$$

Графік функції $y = f(x)$ називають кривою Лоренца. Коефіцієнта Джині k обчислюється за формулою [1]

$$k = 1 - 2\int_0^1 f(x)dx\,. \tag{4}$$

Розглянемо спочатку випадок лінійної залежності функції $u = \varphi(x)$, тобто

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) = ax + b\,. \tag{5}$$

Використовуючи умови (1) і (2), отримуємо

$$\varphi_1(x) = \frac{2(n-1)}{n+1}x + \frac{2}{n+1}\,. \tag{6}$$

На основі (3) дістаємо

$$f_1(x) = \frac{n-1}{n+1}x^2 + \frac{2}{n+1}x\,. \tag{7}$$

За допомогою формули (4) визначаємо коефіцієнт Джині $k_1 = k_1(n)$ для даного випадку:

$$k_1(n) = \frac{n-1}{3(n+1)}\,. \tag{8}$$

Відмітимо, що

$$\lim_{n\to\infty} k_1(n) = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{3(n+1)} = \frac{1}{3}\,. \tag{9}$$

Нехай розмір доходу змінюється за показниковим законом, а саме

$$\varphi(x) = \varphi_2(x) = \beta \cdot a^{\alpha x}\,. \tag{10}$$

Аналогічно попередньому дістаємо:

$$\varphi_2(x) = \frac{\ln n}{n-1}\cdot n^x\,, \tag{11}$$

$$f_2(x) = \frac{n^x - 1}{n-1}\,, \tag{12}$$

$$k_2(n) = \frac{n+1}{n-1} - \frac{2}{\ln n}\,. \tag{13}$$

При нескінченному зростанні *n* отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} k_2(n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1} - \frac{2}{\ln n}\right) = 1\,. \tag{14}$$

Розглянемо тепер випадок, коли розмір доходів змінюється за кубічним законом, а саме

$$\varphi(x) = \varphi_3(x) = a(x-0{,}5)^3 + b\,. \tag{15}$$

Для цієї функції дістаємо:

$$\varphi_3(x)=\frac{8(n-1)}{n+1}(x-0,5)^3+1, \tag{16}$$

$$f_3(x)=\frac{2(n-1)}{n+1}(x-0,5)^4+\frac{n-1}{8(n+1)}; \tag{17}$$

$$k_3(n)=\frac{n-1}{5(n+1)}; \tag{18}$$

$$\lim_{n\to\infty}k_3(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{5(n+1)}=0,2. \tag{19}$$

На основі отриманих співвідношень за допомогою пакету прикладних програм MathCAD були побудовані типові графічні залежності. На рис. 1 наведені графіки функцій $u=\varphi_i(x)\,(i=1,2,3)$ при $n=20$. Показниковий закон (крива $\varphi_2(x)$) на якісному рівні відображає ситуацію, коли в державі по суті не має так званого середнього класу. Кубічний закон (крива $\varphi_3(x)$) відповідає випадку коли представники середнього класу складають більшу частину населення.

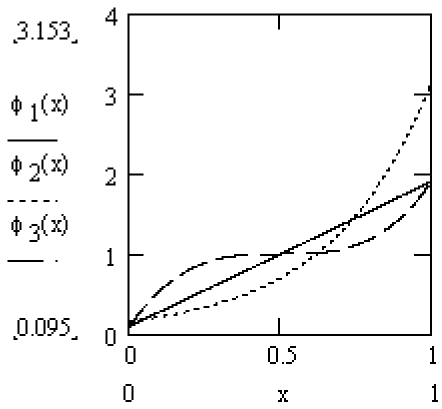

Рисунок 1 – Закони розподілу розмірів доходів

На рис. 2 зображені криві Лоренца при $n=20$. Як бачимо найменше відхилення від рівномірного (від прямої $y=x$) спостерігається при кубічному законі розподілу доходів населення (крива $f_3(x)$). Найбільше відхилення відбувається у випадку показникового розподілу (крива $f_2(x)$).

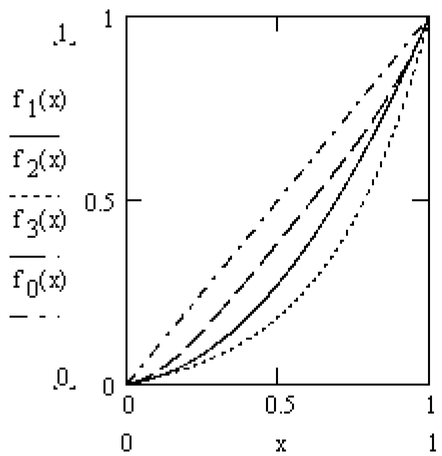

Рисунок 2 – Криві Лоренца

На рис. 3 наведені криві, які характеризують залежність коефіцієнта Джини *k* від співвідношення максимального і мінімального розмірів доходів. Як і слід було очікувати, зростання параметра *n* призводить до збільшення коефіцієнта Джині *k* для всіх трьох законів розподілу.

Найбільше значення коефіцієнта Джині спостерігається у випадку показникового закону розподілу доходів, тобто при відсутності явно вираженого середнього класу. У відповідності з формулами (13), (14) коефіцієнта Джині асимптотично наближається до одиниці при зростанні *n* (рис. 3; крива $k_2(n)$).

У випадку кубічного закону розподілу доходів, тобто при наявності у суспільстві явно вираженого середнього класу, значення коефіцієнта Джині є найменшим. У відповідності з формулами (18), (19) коефіцієнт Джині залишається меншим за 0,2 при будь-якому *n* (рис. 3; крива $k_3(n)$).

Формули (8), (9) показують, що при лінійному законі розподілу доходів населення значення коефіцієнта Джині не перебільшує $1/3$ (рис. 3; крива $k_1(n)$). Такі показники є досить оптимальними, але очевидно, що вказаний елементарний розподіл має мало шансів для практичної реалізації.

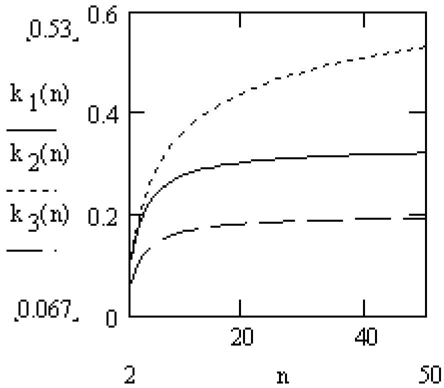

Рисунок 3 – Залежність коефіцієнта Джині *k* від співвідношення максимального і мінімального розмірів доходів

Можемо зробити наступні основні висновки:

1) В усіх розглянутих випадках коефіцієнт Джині збільшується при збільшенні різниці між мінімальним і максимальним рівнями доходів.

2) Коефіцієнт Джині приймає найбільші значення (відповідають найменш розвинутим країнам) при показниковому законі розподілу розмірів доходів, тобто у тому випадку, коли у суспільстві не має чітко сформованого середнього класу.

3) Коефіцієнт Джині приймає найменші значення (відповідають найбільш розвинутим сучасним країнам) при кубічному законі розподілу розмірів доходів, тобто у тому випадку, коли основна частина населення є представниками середнього класу.

Список літератури

1. Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.:Либідь, 2007. – 720 с.
2. Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2003. – 520 с.

Одержано 01.05.11