МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРОЕКТУВАННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИН
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Елементи математичного аналізу функції однієї змінної

Методичні вказівки та індивідуальні завдання
для самостійної роботи студентів технічних
спеціальностей

КІРОВОГРАД
2011

Вища математика. Елементи математичного аналізу функції однієї змінної. Методичні вказівки та індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів технічних спеціальностей / Укл.: В.І.Гуцул, С.Я.Гончарова – Кіровоград: КНТУ, 2011. – 140 с.

Методичні вказівки та індивідуальні завдання по вивченню розділів „Диференціальне числення функції однієї змінної”, „Інтегральне числення функції однієї змінної”, курсу „Вища математика”. Призначені для самостійної роботи студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання. По кожній темі наведені основні теоретичні положення, розглянуті типові приклади та розроблені індивідуальні завдання, що дозволяє ефективно використовувати дану розробку при модульно-рейтинговій системі навчання.

Затверджено на засіданні
кафедри вищої
математики та фізики.
Протокол № 7 від 01.03.2011 р.

ЗМІСТ

Організація навчального процесу за кредитно-модульною системою

№ теми	Теми	Методичні вказівки	Індивідуальні завдання
1	2	3	4
Модуль 1. Диференціальне числення функції однієї змінної.			
1	Похідна функції (означення, властивості, таблиця похідних).	§ 1.1,	№ 1
2	Диференціювання функцій (похідна складної і оберненої функцій; похідна від неявно заданої функції; логарифмічне диференціювання; похідна від параметрично заданої функції).	§ 1.2, 1.3	№ 2-4
3	Диференціал функції. Застосування диференціала до наближених обчислень.	§ 1.4	№ 6
4	Похідна і диференціал вищих порядків.	§ 1.5	№ 5
5	Теореми Ролля, Лагранжа, Коші. Застосування похідної до обчислення границь (правило Лопіталя). Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції.	§ 2.1	№ 7, 8

1	2	3	4
6	Елементи дослідження функції (дослідження функції на монотонність і точки екстремуму; опуклість кривої і точки перегину; асимптоти кривої). Повне дослідження функції і побудова графіка.	§ 2.2-2.7	№ 9
Модуль 2. Невизначений інтеграл			
1	Поняття невизначеного інтеграла (означення первісної і невизначеного інтегралу; таблиця інтегралів; властивості).	§ 3.1	№ 10
2	Методи інтегрування (заміна змінної і інтегрування частинами).	§ 3.2	№ 11
3	Інтегрування деяких функцій, які містять квадратний тричлен.	§ 3.3	№ 12
4	Інтегрування дробово-раціональних функцій (елементарні дроби; розклад дробу на елементарні; загальна схема інтегрування раціональних дробів).	§ 3.4, 3.5	№ 13
5	Інтегрування тригонометричних функцій.	§ 3.6	№ 15
6	Інтегрування ірраціональних функцій. Інтегрування ірраціональних виразів за допомогою тригонометричних підстановок.	§ 3.7	№ 14

1	2	3	4
Модуль 3. Визначений інтеграл. Застосування інтегралів			
1	Поняття визначеного інтеграла (означення визначеного інтеграла через інтегральну суму; геометричний зміст; властивості).	§ 4.1	
2	Обчислення визначеного інтеграла (формула Ньютона-Лейбніца). Методи інтегрування у визначеному інтегралі (заміна змінної і інтегрування частинами).	§ 4.2	№ 16
3	Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії (площа плоскої фігури; довжини дуги; об‘єм і площа поверхні тіла обертання).	§ 4.3 - 4.5	№ 17, 18
4	Застосування визначеного інтеграла до задач фізики (статичні моменти; моменти інерції; координати центра ваги; метод інтегральних сум).	§ 4.6, 4.7	19
5	Невласні інтеграли.	§ 4.8	20
6	Наближені обчислення визначеного інтеграла (формула трапецій; формула Сімпсона).	§ 4.9	№ 21

Розділ 1. **Похідна і диференціал. Правила і методи диференціювання**

§ 1.1. Поняття та властивості похідної

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка визначена і неперервна на інтервалі (a,b). Нехай x_0 – фіксована внутрішня точка вказаного інтервалу. Дамо аргументу x приріст Δx в точці x_0. Вважаємо, що нова точка $x_0 + \Delta x$ також належить інтервалу *(a,b).* Функція у дістане приріст $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Якщо існує границя відношення приросту функції до приросту аргументу при $\Delta x \to 0$, тобто якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то вона називається *похідною* функції $y = f(x)$ в точці x_0 і позначається $y'(x_0)$ або $f'(x_0)$ (можливі й інші позначення). Таким чином

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1.1)$$

Похідна характеризує *швидкість* зміни функції *y*.

Знаходження похідної називається також *диференціюванням* функції.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = x^2 + 5x$ в точці x_0.

Розв'язання.

Використовуючи означення можемо записати:

$$f(x_0) = x_0^2 + 5x_0,$$

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 5(x_0 + \Delta x) = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 5x_0 + 5\Delta x,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2+5x_0+5\Delta x-x_0^2-5x_0}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x+5)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x+5)=2x_0+5;$$

$$f'(x_0)=2x_0+5.$$

У загальному випадку похідна функції $y=f(x)$ у довільній точці x (якщо вона існує) позначається одним із символів $f'(x),\ y'(x),\ y',\ \dfrac{dy}{dx}$.

При розв'язанні практичних задач для визначення похідної застосовується не саме означення, а *таблиця похідних*, основні *властивості похідної* і різні *методи диференціювання*.

Таблиця похідних:

1. $(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$;
2. $(x)'=1$;
3. $(c)'=0,\ (c=const)$;
4. $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$;
5. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$;
6. $(e^x)'=e^x$;
7. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$;
8. $(\sin x)'=\cos x$;
9. $(\cos x)'=-\sin x$;
10. $(\mathrm{tg}\,x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;
11. $(\mathrm{ctg}\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
12. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
14. $(\mathrm{arctg}\,x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;

8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; 16. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Приклад 2. Довести, що $(\sin x)' = \cos x$.

Розв'язання. Відмітимо, що функція $y = \sin x$ визначена і неперервна на інтервалі $(-\infty;\infty)$. Використовуючи одну з тригонометричних формул, дістаємо

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x-x}{2} = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Знайдемо границю (застосовано першу чудову границю):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Отже $y' = \cos x$.

Приклад 3. Знайти похідну y' для наступних функцій:

а) $y = x^7$; б) $y = \sqrt[3]{x}$; в) $y = \frac{1}{x^4}$; г) $y = \log_5 x$; д) $y = 3^x$.

Розв'язання. За допомогою таблиці похідних маємо

а) $y' = \left(x^7\right)' = 7\cdot x^6$; б) $y' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$;

в) $y' = \left(x^{-4}\right)' = -4\cdot x^{-5}$; г) $y' = (\log_5 x)' = \frac{1}{x\cdot\ln 5}$;

д) $y' = (3^x)' = 3^x\cdot\ln 3$.

Основні властивості похідної:

1. $(u \pm v) = u' \pm v'$; 3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

2. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$; 4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$,

де c – стала; u, v – функції від x.

Приклад 4. Знайти похідні функцій:

а) $y = x^3 - 3 \cdot \sin x$; б) $y = \sqrt{x} \cdot e^x$; в) $y = 2 \cdot \operatorname{tg} x + \dfrac{x^2 - 1}{\sin x + x}$.

Розв'язання: Використовуючи основні властивості і таблицю похідних, дістаємо:

а) $y' = (x^3)' - 3 \cdot (\sin x)' = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot \cos x$;

б) $y' = (\sqrt{x})' \cdot e^x + \sqrt{x} \cdot (e^x)' = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot e^x + \sqrt{x} \cdot e^x$;

в) $y' = 2 \cdot (\operatorname{tg} x)' + \dfrac{(x^2 - 1)' \cdot (\sin x + x) - (x^2 - 1) \cdot (\sin x + x)'}{(\sin x + x)^2} =$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2x \cdot (\sin x + x) - (x^2 - 1) \cdot (\cos x + 1)}{(\sin x + x)^2}\ .$$

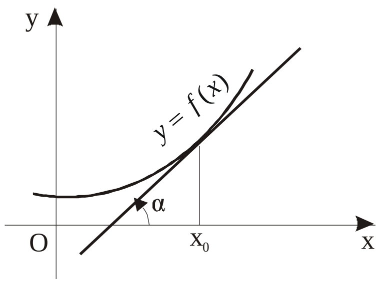

Рис. 1

Геометричний зміст похідної полягає у тому, що похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0, f(x_0))$, тобто $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ (рис. 1).

Приклад 5. До кривої $y = x^4$ у точці з абсцисою $x_0 = \sqrt[3]{0{,}25}$ проведена дотична. Знайти кут між цією дотичною і додатнім напрямом осі Ох.

Розв'язання. Знайдемо спочатку похідну у заданій точці:

$$f'(x) = (x^4)' = 4x^3;\ f'(x_0) = f'\left(\sqrt[3]{0{,}25}\right) = 4 \cdot \left(\sqrt[3]{0{,}25}\right)^3 = 1 .$$

Шуканий кут визначається рівністю (геометричний зміст прохідної) $\mathrm{tg}\alpha = 1$. Отже $\alpha = 45^\circ$.

§1.2. Похідна складної функції і функції, заданої параметрично

Розглянемо складну функцію, тобто функцію, яка задана у вигляді $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$ (або $y = f(\varphi(x))$). Похідна від такої функції (якщо вона існує) шукається за формулою:

$$y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x) \, . \tag{2.1}$$

При використанні формули (2.1) після диференціювання замість проміжної змінної u необхідно підставити $\varphi(x)$. З формули (2.1) випливає наступне правило диференціювання складної функції: похідна складної функції дорівнює добутку похідної від зовнішньої функції по проміжній змінній на похідну від проміжної змінної по незалежній..

Приклад 1. Знайти y', якщо:

а) $y = \sin^5 x$; б) $y = \ln(x^3 + 3x^2)$.

Розв'язання. а) Задану функцію можна представити у вигляді $y = u^5$, де $u = \sin x$. Згідно з формулою (2.1), маємо

$$y' = (u^5)' \cdot (\sin x)' = 5u^4 \cdot \cos x = 5\sin^4 x \cdot \cos x .$$

б) Аналогічно попередньому $u = x^3 + 3x^2$, $y = \ln u$;

$$y' = (\ln u)' \cdot (x^3 + 3x^2)' = \frac{1}{u} \cdot (3x^2 + 6x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2} \cdot (3x^2 + 6x).$$

У більш загальному випадку складна функція представляє собою суперпозіцію декількох елементарних функцій. Наприклад функція може мати вигляд $y = f(v), v = \psi(u), u = \varphi(x)$ (або $y = f(\psi(\varphi(x)))$). У цьому випадку справедлива формула

$$y'(x) = f'(v) \cdot \psi'(u) \cdot \varphi'(x). \tag{2.2}$$

Підкреслимо, що добуток правої частини останньої рівності складається з похідних від кожної із задіяних функцій по відповідній змінній.

Приклад 2. Здиференціювати функції:

а) $y = tg^3(x^2 + 5)$; б) $y = e^{\sin^2 x}$.

Розв'язання. а) Задану функцію можемо представити у вигляді $y = v^3, v = \mathrm{tg} u, u = x^2 + 5$. На основі (2.2) маємо

$$y' = (v^3)' \cdot (\mathrm{tg} u)' \cdot (x^2 + 5)' = 3v^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 u} \cdot 2x =$$

$$= 3tg^2(x^2 + 5) \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2 + 5)} \cdot 2x.$$

б) При оформленні розв'язків проміжні змінні вводити не обов'язково. Беручі послідовно похідні від показникової, степенової і тригонометричної функцій, отримуємо

$$y' = e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cdot \cos x.$$

Якщо функція задана параметрично, тобто у вигляді $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$

то похідна від *y* по *x* визначається за формулою

$$y_x' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \qquad (2.3)$$

У формулі (2.3) і надалі індекс знизу вказує змінну, по якій береться похідна.

Приклад 3. Знайти похідні y_x':

а) $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = t^2 - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = t^4 - t^2, \\ y = e^{3t-1}. \end{cases}$

Розв'язання. На основі (2.3) маємо

а) $y_x' = \frac{2t}{3\sin^2 t \cdot \cos t}$; б) $y_x' = \frac{e^{3t-1} \cdot 3}{4t^3 - 2t}$.

§1.3. Диференціювання неявно заданих функцій. Логарифмічне диференціювання

Нехай функція *y* від *x* задана *неявно*, тобто у вигляді рівності $F(x, y) = 0$. Розглянемо метод диференціювання вказаної функції на конкретному прикладі.

Приклад 1. Функція *y* від *x* задана виразом $y^3 + e^{x^2+y^5} + 3\sin x = 0.$ Знайти похідну y'.

Розв'язання. Здиференціюємо задану рівність, враховуючи те, що *y* є функцією від *x*:

$$3y^2 y' + e^{x^2+y^5} \cdot (2x + 5y^4 y') + 3\cos x = 0\,.$$

Отриманий вираз розглядаємо як рівняння відносно похідної y' (воно завжди лінійне). Розв'язуємо рівняння:

$$y'(3y^2 + 5y^4 e^{x^2+y^5}) = -2xe^{x^2+y^5} - 3\cos x,$$

$$y' = \frac{-2xe^{x^2+y^5} - 3\cos x}{3y^2 + 5y^4 e^{x^2+y^5}}.$$

Розглянемо показниково-степеневу функцію $y = u^v$, де u і v – функції від *x*. Похідна $y'(x)$ у цьому випадку визначається за допомогою *методу логарифмічного диференціювання.* Суть вказаного методу полягає у тому, що спочатку логарифмуємо рівність $y = u^v$, а потім знаходимо похідну y' за правилами диференціювання неявної функції.

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = (x^2+5)^{\sin x}$.

Розв'язання.: Логарифмуємо задану рівність і робимо очевидні перетворення (використано властивість логарифму $\log_a x^p = p\log_a x$):

$$\ln y = \ln(x^2+5)^{\sin x}\ ,\ \ln y = \sin x \cdot \ln(x^2+5)\,.$$

Диференціюємо останню рівність за правилами диференціювання неявної функції:

$$(\ln y)' = (\sin x)' \cdot \ln(x^2+5) + \sin x \cdot (\ln(x^2+5))',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln(x^2+5) + \sin x \cdot \frac{1}{x^2+5} \cdot 2x\,,$$

$$y' = y \cdot \left(\cos x \cdot \ln(x^2+5) + \frac{2x \cdot \sin x}{x^2+5} \right),$$

$$y' = (x^2+5)^{\sin x} \cdot (\cos x \cdot \ln(x^2+5) + \frac{2x \cdot \sin x}{x^2+5})\,.$$

За допомогою вказаного методу для показниково-степеневоі функції $y = u^v$ легко отримати наступну формулу:

$$\left(u^v\right)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u' \qquad (3.1)$$

Формула (3.1) легко запам’ятовується. Перший доданок її правої частини – це похідна функції $y = u^v$ при умові, що основа u є сталою величиною (використовується таблична похідна для показникової функції a^x); другий доданок – це похідна функції $y = u^v$ при умові, що показник v є сталою величиною (використовується таблична похідна для степеневої функції x^α).

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = (\operatorname{tg} x)^{3x+1}$.

Розв’язання. Користуючись формулою (3.1), знайдемо

$$y' = (\operatorname{tg} x)^{3x+1} \cdot \ln \operatorname{tg} x \cdot 3 + (3x+1) \cdot (\operatorname{tg} x)^{3x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

§1.4. Диференціал функції. Наближені обчислення за допомогою диференціала

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x, то її приріст Δy у цій точці можна представити у вигляді

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \tag{4.1}$$

де Δx – приріст аргументу у точці x; $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Добуток $f'(x) \cdot \Delta x$ є головною частиною приросту функції (другий доданок є нескінченно малою величиною більш високого порядку малості при $\Delta x \to 0$). Він називається *диференціалом* функції в точці x і позначається символом dy або $df(x)$. Отже,

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{4.2}$$

Приріст Δx незалежної змінної x співпадає з її диференціалом dx тобто $dx = \Delta x$. Означення (4.2) може бути записане у вигляді

$$dy = f'(x)dx \tag{4.3}$$

Всі основні властивості диференціала співпадають з властивостями похідної. Наприклад для диференціала суми і добутку справедливі формули

$$d(u+v) = du + dv, \quad d(uv) = udv + vdu \,.$$

Приклад 1. Знайти диференціал функції $y = 2\arcsin^2 x + \sqrt{x}$.

Розв'язання. На основі формули (4.3) маємо

$$dy = \left(2\arcsin^2 x + \sqrt{x}\right)' dx = \left(\frac{4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx \,.$$

Як бачимо знаходження диференціала dy по суті зводиться до знаходження похідної y' .

Нехай функція $y = f(x)$, диференційовна на інтервалі (a,b) і нехай x_0 – внутрішня точка цього інтервалу. Припустимо, що незалежна змінна x отримала приріст Δx в точці x_0, причому нова точка $x = x_0 + \Delta x$ також належить інтервалу *(a,b).* Як відомо приріст Δy і диференціал dy функції визначаються наступним чином

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\,, \; dy = f'(x_0)dx \,.$$

Користуючись наближеною рівністю $\Delta y \approx dy$, дістаємо

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)dx$$

або

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \tag{4.4}$$

Формула (4.4) застосовується для *наближених обчислень* значення функції.

Приклад 2. Задана функція $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$. Обчислити наближено за допомогою диференціала значення цієї функції в точці $x = 1{,}97$.

Розв'язання. Значення x_0 підбираємо таким чином, щоб воно було близьким до заданого значення *x* і щоб сама функція і її похідна легко обчислювалися у цій точці. У більшості випадків x_0 є найближчим цілим числом до заданого *x*. Нехай $x_0 = 2$. Тоді:

$$f(x_0) = f(2) = \sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 3, \ \Delta x = x - x_0 = 1.97 - 2 = -0.03;$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{2x^2 + 1}\right)' = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}; \ f'(x_0) = f'(2) = \frac{4}{3}.$$

Підставивши знайдені значення у формулу (4.4), отримуємо:

$$f(1.97) = f(2 + (-0{,}03)) \approx 3 + \frac{4}{3} \cdot (-0.03) = 2.96.$$

§1.5. Поняття про похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці *x*, тобто у цій точці існує похідна $f'(x)$. Якщо для функції *f*(*x*) у точці *x* існує похідна від похідної $f'(x)$, то вона називається *похідною другого порядку* або *другою похідною*. Похідною третього порядку називається похідна від похідної другого порядку і т. д. Для вказаних похідних вищих порядків прийняті позначення y'', y''', …, $y^{(n)}$ або $f''(x)$, $f'''(x)$, …, $f^{(n)}(x)$.

Приклад 1. Знайти похідні другого порядку для наступних функцій:

а) $y = 2x^3 + \sin 3x - 1$; б) $y = e^{x^2+1}$.

Розв'язання. У відповідності з означенням другої похідної можемо записати:

а) $y' = 6x^2 + 3\cdot\cos 3x$, $y'' = \left(6x^2 + 3\cdot\cos 3x\right)' = 12x - 9\cdot\sin 3x$;

б) $y' = 2\cdot xe^{x^2+1}$, $y'' = \left(2\cdot xe^{x^2+1}\right)' = 2e^{x^2+1} + 4x^2e^{x^2+1}$.

Якщо функцію задано *параметрично* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то похідна другого порядку від y по x обчислюється за формулою:

$$y_{xx}'' = \frac{(y_x')_t'}{\varphi'(t)} \tag{5.1}$$

або

$$y_{xx}'' = \frac{\varphi'(t)\cdot\psi''(t) - \varphi''(t)\cdot\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}. \tag{5.2}$$

Приклад 2. Знайти похідні другого порядку y''_{xx} від функцій заданих параметрично:

а) $\begin{cases} x = t^2 - 3, \\ y = \cos t + t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = e^{2t-1}, \\ y = t^4 - \sin t. \end{cases}$

Розв'язання. а) Користуючись формулою (5.1), отримуємо:

$$y_x' = \frac{-\sin t + 1}{2t}, \qquad y_{xx}'' = \frac{\left(\dfrac{-\sin t + 1}{2t}\right)'}{(t^2-3)'} = \frac{-2t\cos t - 2\cdot(-\sin t + 1)}{8t^3}.$$

б) Застосовуючи формулу (5.2), дістаємо:

$$\varphi'(t) = 2e^{2t-1},\ \varphi''(t) = 4e^{2t-1},\ \psi'(t) = 4t^3 - \cos t,$$

$$\psi''(t) = 12t^2 + \sin t;\ y_{xx}'' = \frac{2e^{2t-1}\cdot(12t^2 + \sin t) - 4e^{2t-1}\cdot(4t^3 - \cos t)}{(2e^{2t-1})^3}.$$

Розділ 2. **Застосування похідної і диференціала. Дослідження функції**

§ 2.1. Знаходження границі за допомогою похідної. Правило Лопіталя

Правило Лопіталя застосовується для обчислення границь. Сформулюємо його суть. Нехай функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ диференційовані в околі точки x_0 і нехай в цій точці вони одночасно нескінченно малі або нескінченно великі, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0 \text{ і } \lim_{x\to x_0}\psi(x)=0 \text{ або } \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty \text{ і } \lim_{x\to x_0}\psi(x)=\infty.$$

Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, то існує також границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, причому:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}. \qquad (1.1)$$

Очевидно, що правило Лопіталя використовується для розкриття невизначеностей виду $\dfrac{0}{0}$ і $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Приклад 1. Обчислити границі:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{2^x-2}{x-1}; \quad \text{б) } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}; \quad \text{в) } \lim_{x\to x_0}\frac{\sin^2 x}{x^3+x^2}.$$

Розв'язання. Застосовуючи правило Лопіталя, дістаємо:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{2^x-2}{x-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{(2^x-2)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2^x\cdot\ln 2}{1}=2\ln 2;$$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

в) При обчисленні цієї границі правило Лопіталя необхідно застосувати два рази (у загальному випадку при виконанні відповідних умов це можна робити декілька разів).

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^3+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin^2 x)'}{(x^3+x^2)'}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{3x^2+2x}=$$

$$=2\lim_{x\to0}\cos x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{3x^2+2x}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{3x^2+2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)'}{(3x^2+2x)'}=2\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{6x+2}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

Правило Лопіталя використовується також для розкриття невизначеностей типу $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ і ∞^0. У всіх вказаних випадках можна зробити перетворення, після яких дістанемо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Приклад 2. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to0}(x\cdot\ln x)$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-\ln^2 x)$.

Розв'язання. У наведених нижче розв'язках спочатку за допомогою елементарних перетворень зводимо задану границю до невизначеності $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$, а потім застосовуємо правило Лопіталя.

а) $\lim\limits_{x\to0}(x\cdot\ln x)=\{0\cdot\infty\}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=-\lim\limits_{x\to0}x=0$.

б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{arctgx}-\dfrac{1}{x}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-arctgx}{x\cdot arctgx}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{arctgx+x\cdot\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(1+x^2)\cdot arctgx+x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x\cdot arctgx+(1+x^2)\cdot\dfrac{1}{1+x^2}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cdot arctgx+1}=\frac{0}{1}=0.$$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-\ln^2 x)=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2(1-\dfrac{\ln^2 x}{x^2})\right).$

Так як

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\right)^2=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}\right)^2=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\right)^2=0,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{\ln^2 x}{x^2})=1,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(x^2(1-\frac{\ln^2 x}{x^2})\right)=\infty\cdot 1=\infty.$$

При розкритті невизначеностей 0^0, 1^∞ і ∞^0 зручно використовувати тотожність

$$f(x)^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\cdot\ln f(x)}. \tag{1.2}$$

Формула (1.2) здобута за допомогою основної логарифмічної тотожності.

Приклад 3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{tgx}}$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (1.2), маємо

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{tgx}}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{tgx}\cdot\ln(1+x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{tgx}}.$$

Знайдемо границю показника:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{tgx}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x))'}{(tgx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1+x}=1.$$

Дістаємо кінцевий результат:

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{tgx}}=e^1=e.$$

§ 2.2. Асимптоти кривої

Нехай задана функція $y=f(x)$. Якщо існує пряма, така, що відстань від точки $M(x, f(x))$ кривої до цієї прямої прямує до нуля при нескінченному віддалені точки М від початку системи координат, то ця пряма називається *асимптотою* кривої (або графіка функції) $y=f(x)$.

Розрізняють три види асимптот: *похилі*, *горизонтальні* і *вертикальні*. *Похилі* і *горизонтальні* асимптоти шукають у формі $y=kx+b$, де

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx). \tag{2.1}$$

Якщо хоча б одна з границь формул (2.1) не існує (дорівнює нескінченності), то крива не має вказаних асимптот. У випадку, коли обидві границі існують і $k=0$, крива має горизонтальну асимптоту $y=b$. Параметри k і b можуть бути різними при $x\to+\infty$ і при $x\to-\infty$. У цьому випадку крива має дві похилі асимптоти.

Пряма $x=a$ є *вертикальною* асимптотою, якщо

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty. \tag{2.2}$$

Границя у формулі (2.2) може бути односторонньою. Якщо функція визначена на усій числовій прямій, то її графік не має вертикальних асимптот.

Приклад 1. Знайти асимптоти кривих:

а) $y=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+4}$; б) $y=\dfrac{x^2}{x^2+x+1}$; в) $y=2x+arctg3x$;

г) $y=\dfrac{x^5}{x^3-1}$; д) $y=x^2+\ln x$.

Розв'язання. Для всіх кривих спочатку за допомогою формул (2.1) визначаємо похилі і горизонтальні асимптоти, а потім, використовуючи формулу (2.2) – вертикальні.

а) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2}{x(x^2+4)}$=1;

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x^2}{x^2+4}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-x^3-4x}{x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x}{x^2+4}=2.$$

Отже пряма $y=x+2$ є похилою асимптотою.

Вертикальних асимптот немає, так як функція визначена на інтервалі $(-\infty;\infty)$ (немає точок, в яких виконується умова (2.2)).

б) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x(x^2+x+1)}=0,\quad b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2+x+1}+0\cdot x\right)=1$.

Пряма $y=1$ – горизонтальна асимптота.

Вертикальних асимптот немає.

в) Для цієї кривої границі формул (2.1) потрібно розглядати окремо при $x\to+\infty$ і при $x\to-\infty$ (у попередніх випадках вони співпадали).

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}(2+\frac{arctg3x}{x}) = 2+0 = 2\,;$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_1x) = \lim_{x\to-\infty}(2x+arctg3x-2x) = \lim_{x\to-\infty}(arctg3x) = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Пряма $y = 2x - \frac{\pi}{2}$ – похила асимптота (ліва).

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty}(2+\frac{arctg3x}{x}) = 2+0 = 2\,;$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x) = \lim_{x\to+\infty}(2x+arctg3x-2x) = \lim_{x\to+\infty}(arctg3x) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Пряма $y = 2x + \frac{\pi}{2}$ – похила асимптота (права).

Вертикальних асимптот немає.

г) Так як $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5}{x(x^3-1)} = \infty$, то похилих і горизонтальних асимптот немає. Оскільки $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^5}{x^3-1} = \infty$, то пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою (точка $x=1$ є точкою розриву другого роду).

д) Відзначимо, що дана функція визначена на інтервалі $(0;+\infty)$, що потрібно враховувати при знаходженні відповідних границь. Так як

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}(x+\frac{\ln x}{x}) = \lim_{x\to+\infty}x + \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}x + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \infty\,,$$

то похилих і горизонтальних асимптот немає. Оскільки

$$\lim_{x\to0+}f(x) = \lim_{x\to0+}(x^2+\ln x) = -\infty\,,$$

то пряма $x=0$ є вертикальною асимптотою.

§ 2.3. Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована при $x = x_0$, то в точці $M_0(x_0, f(x_0))$ існує дотична до графіка функції і її рівняння визначається за формулою

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{3.1}$$

Рівняння нормалі до кривої в точці $M_0(x_0, f(x_0))$, при умові, що $f'(x_0) \neq 0$, має вигляд

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{3.2}$$

Якщо $f'(x_0) = 0$, то дотична паралельна осі *Ox*, а нормаль – осі *Oy*. У цьому випадку рівняння дотичної має вигляд $y = f(x_0)$, а рівняння нормалі визначається за формулою $x = x_0$.

Приклад 1. Записати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = x^3 + 1$ в точці $x_0 = 1$.

Розв'язання. Обчислюємо всі необхідні значення:

$$f(x_0) = f(1) = 1^3 + 1 = 2; \quad f'(x) = 3x^2; \quad f'(x_0) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3.$$

Використовуючи формулу (3.1), отримуємо рівняння дотичної

$$y = 2 + 3 \cdot (x - 1) \text{ або } y = 3x - 1.$$

Застосовуючи формулу (3.2), дістаємо рівняння нормалі

$$y = 2 - \frac{1}{3}(x - 1) \text{ або } y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$

§ 2.4. Обчислення найбільшого і найменшого значень функції на відрізку

Критичними точками функції $y = f(x)$ називаються точки, в яких її перша похідна дорівнює нулю або не існує. Точки, в яких перша похідна функції дорівнює нулю називаються *стаціонарними*.

Якщо функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$, то найбільше і найменше значення (вони обов'язково існують) вона приймає на кінцях відрізку або в критичних точках, які належать цьому відрізку. Звідси випливає, що знаходження найбільшого і найменшого значень функції на відрізку може здійснюватися за наступною схемою:

1) визначаємо критичні точки;

2) обчислюємо значення функції на кінцях відрізку і в критичних точках, які належать відрізку;

3) порівнюючи отримані значення, вибираємо найбільше і найменше з них.

Приклад 1. Знайти найбільше і найменше значення функцій на вказаних відрізках:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 1$, $[0;3]$; б) $y = x - 2 \cdot \ln x$, $[1;e]$.

Розв'язання. а) Знаходимо першу похідну і визначаємо критичні точки:

$$y' = x^2 - 5x + 4; \quad x^2 - 5x + 4 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4.$$

Так як функція диференційована на всій числовій прямій, то інших критичних точок не існує. Відрізку $[0;3]$ належить тільки точка $x_1 = 1$. Обчислюємо значення функції на кінцях відрізку і в точці

$x_1 = 1$:

$$f(0) = 1, \quad f(3) = -\frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{29}{6}.$$

Порівнюючи між собою здобуті числа, маємо: $y_{найм} = -\frac{1}{2}$, $y_{найб} = \frac{29}{6}$.

б) Аналогічно попередньому, можемо записати:

$$y' = 1 - \frac{2}{x}, \quad 1 - \frac{2}{x} = 0, \quad \frac{x-2}{x} = 0, \quad x = 2;$$

$$f(1) = 1 - 2 \cdot \ln 1 = 1, \; f(e) = 1 - 2 \cdot \ln e = -1,$$

$$f(2) = 2 - 2 \cdot \ln 2 = 2 \cdot (1 - \ln 2);$$

$$y_{найм} = -1; \; y_{найб} = 2 \cdot (1 - \ln 2).$$

Відзначимо, що в точці $x = 0$ похідна не існує, але вказана точка не належить вказаному інтервалу, більш того, вона не належить області визначення заданої функції.

§2.5. Дослідження функції на зростання, спадання і точки екстремуму

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі (a,b) і нехай x_1, x_2 – дві довільні точки з цього інтервалу, причому $x_1 < x_2$. Якщо для вказаних точок виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \le f(x_2)$), то кажуть, що функція $y = f(x)$ *зростає* (*не спадає*) на інтервалі (a,b). Якщо ж для вказаних точок виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$), то кажуть, що функція $y = f(x)$ *спадає* (*не зростає*) на інтервалі (a,b).

Інтервали зростання і спадання функції (*інтервали* *монотонності*) визначаються за допомогою першої похідної. Якщо $f'(x) > 0$ для будь-якого x з інтервалу (a, b), то функція $y = f(x)$ на вказаному інтервалі зростає; якщо ж $f'(x) < 0$, то функція спадає.

Точка x_0 називається точкою *локального мінімуму* функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого x з деякого околу цієї точки виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$. Якщо ж $f(x_0) > f(x)$, то точка x_0 називається точкою *локального максимуму*.

Мінімум або максимум (тут і надалі мова іде про локальний мінімум і локальний максимум) функції будемо називати її *екстремумом*, а точку x_0, в якій функція має екстремум – *точкою екстремуму*.

Необхідна умова екстремуму функції: якщо функція $y = f(x)$ має екстремум в точці x_0, то у цій точці перша похідна дорівнює нулю або не існує, тобто x_0 – критична точка.

Достатні умови екстремуму функції: критична точка x_0 є точкою максимуму, якщо при переході через цю точку (зліва направо) перша похідна змінює знак з «+» на «-»; якщо ж знак змінюється з «-» на «+», то точка x_0 є точкою мінімуму (якщо знак не міняється, то екстремуму немає).

Дослідження функції на зростання, спадання і точки екстремуму будемо здійснювати за наступною схемою:

1) знаходимо область визначення функції;
2) знаходимо критичні точки;
3) на числовій прямій відмічаємо всі критичні точки і точки, в яких функція невизначена (точки розриву);
4) визначаємо знак першої похідної на кожному із отриманих інтервалів області визначення функції (для цього достатньо

обчислити значення похідної в одній точці даного інтервалу);

5) використовуючи відповідні умови, визначаємо інтервали зростання, спадання і точки екстремуму (при необхідності обчислюємо і самі екстремуми).

Приклад 1. Знайти проміжки зростання, спадання і точки екстремуму функцій:

а) $y = \frac{3}{4x^4} + \frac{2}{3x^3} - \frac{1}{2x^2}$; б) $y = \sqrt[3]{x^2}$; в) $y = x - \ln x$.

Розв'язання. а)Функція визначена на всій числовій прямій окрім точки $x = 0$. Область визначення функції будемо позначати через $D(f)$. Таким чином $D(f) = (-\infty;0)U(0;+\infty)$. Знайдемо критичні точки:

$$y' = \frac{3}{4}(x^{-4})' + \frac{2}{3}(x^{-3})' - \frac{1}{2}(x^{-2})' = -3x^5 - 2x^{-4} + x^{-3} = -\frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 3}{x^5};\ \ \frac{x^2 - 2x - 3}{x^5} = 0;\ x^2 - 2x - 3 = 0;\ x_1 = -1;\ x_2 = 3.$$

Відзначимо, що в точці $x = 0$ похідна не існує, але ця точка є точкою розриву і не може бути точкою екстремуму функції. На числовій прямій відмічаємо критичні точки, точки розриву і визначаємо знак першої похідної на отриманих проміжках (рис.2).

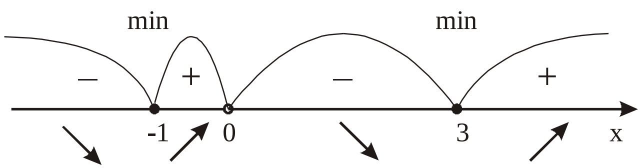

Рис. 2

Маємо: функція спадає на інтервалах $(-\infty,-1)$ і $(0;3)$; функція зростає на інтервалах $(-1;0)$ і $(3;+\infty)$; в точці $x = -1$ функція має локальний мінімум $\left(y_{1\min} = f(-1) = -\dfrac{5}{12}\right)$; точка $x = 3$ також є точкою мінімуму $\left(y_{2\min} = f(3) = -\dfrac{7}{324}\right)$.

б) Функція визначена на всій числовій прямій, тобто $D(f) = (-\infty;+\infty)$. Знайдемо похідну:

$$y' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}.$$

В точці $x = 0$ похідна не існує. Вказана точка належить області визначення функції. Отже $x = 0$ – критична точка. Визначаємо інтервали монотонності та точки екстремуму (рис. 3).

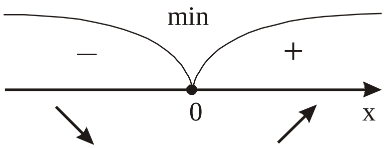

Рис. 3

На інтервалі $(-\infty;0)$ функція спадає; на інтервалі $(0;+\infty)$ функція зростає; $x = 0$ – точка локального мінімуму $(y_{\min} = f(0) = 0)$.

в) Аналогічно попередньому дістаємо (Рис. 4): $D(f) = (0;+\infty)$;

$$y' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}; \quad \frac{x-1}{x} = 0;$$

$x = 1$ – критична точка.

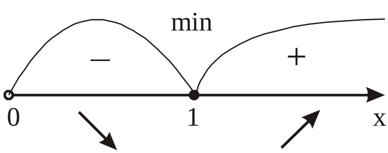

Рис. 4

Функція спадає на інтервалі $(0;1)$; функція зростає на інтервалі $(1;+\infty)$; $x = 1$ – точка мінімуму $(y_{\min} = f(1) = 1)$. Відзначимо, що $x = 1$ – *кутова точка*.

§2.6. Опуклість кривої і точки перегину

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована на інтервалі (a,b). Графік цієї функції називають *опуклим угору* (Рис. 5) на інтервалі (a,b), якщо на цьому інтервалі він розміщений не вище будь-якої своєї дотичної і *опуклим униз* (Рис. 6), якщо він розміщений не нижче дотичної. Точка $(x_0, f(x_0))$ називається *точкою перегину* (Рис. 7) кривої $y = f(x)$, якщо при переході через цю точку крива змінює напрям опуклості.

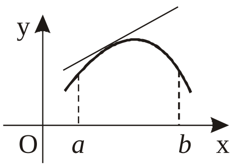

Рис. 5

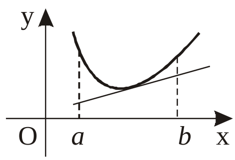

Рис. 6

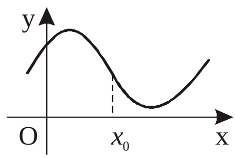

Рис. 7

Дослідження кривої на опуклість і точки перегину здійснюється за допомогою другої похідної. Якщо $f''(x) > 0$ для будь-якого x з інтервалу (a,b), то крива $y = f(x)$ опукла униз на цьому інтервалі; якщо ж $f''(x) < 0$, то крива опукла угору. *Критичними точками другого роду* функції $y = f(x)$ називаються точки, в яких її друга похідна дорівнює нулю або не існує.

Необхідна умова точки перегину: якщо $\left(x_0, f(x_0)\right)$ – точка перегину кривої, то у цій точці друга похідна функції $y = f(x)$ дорівнює нулю або не існує (x_0 – критична точка другого роду).

Достатня умова точки перегину: нехай x_0 – критична точка другого роду функції $y = f(x)$; тоді, якщо друга похідна $f''(x)$ змінює знак при переході через точку x_0, то точка $(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину.

Дослідження графіка функції на опуклість і точки перегину здійснюється за наступною схемою:

1) знаходимо область визначення функції;
2) знаходимо критичні точки другого роду;
3) на числовій прямій відмічаємо всі критичні точки другого роду і точки розриву функції;
4) визначаємо знак другої похідної на кожному із отриманих інтервалів області визначення функції;
5) використовуючи відповідні умови, визначаємо інтервали опуклості і точки перегину кривої.

Приклад 1. Знайти інтервали опуклості і точки перегину кривих:

а) $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + x + 2$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$; в) $y = \sqrt[3]{x^4} + x$.

Розв'язання. а) Функція визначена для всіх $x \in R$, тобто $D(f) = (-\infty; +\infty)$; Знаходимо критичні точки другого роду:

$$y' = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 1, \quad y'' = x^2 - 3x - 4;$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4;$$

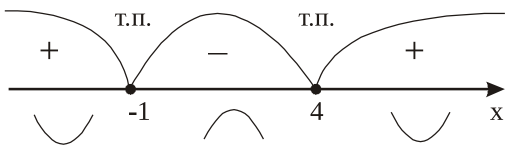

Рис. 8

Так як друга похідна визначена на всій числові прямій, то інших критичних точок другого роду не існує. Будуємо числову пряму;

відмічаємо на ній знайдені точки (точок розриву немає); визначаємо знак другої похідної і напрям опуклості на отриманих інтервалах; знаходимо точки перегину (Рис. 8).

Маємо: крива опукла униз на інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(4;+\infty)$; опукла угору на $(-1;4)$; $(-1;-5/12)$ і $(4;-146/3)$ – точки перегину.

б) Аналогічно попередньому дістаємо:

$$D(f)=(-2;+\infty); \qquad y'=((x+2)^{-\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$y''=\frac{3}{4}(x+2)^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{4\sqrt{(x+2)^5}}.$$

Критичних точок другого роду немає, так як друга похідна відмінна від 0 і визначена на всій області визначення функції (точка $x=-2$ не входить в область визначення). Враховуючи, що $f''(x)>0$ на інтервалі $(-2;+\infty)$, робимо висновок, що графік функції опуклий униз у всій області визначення. Точок перегину немає.

в) Маємо: $D(f)=(-\infty;+\infty)$; $y'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+1$;

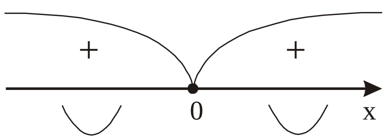

Рис. 9

$$y''=\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{4}{9\cdot\sqrt[3]{x^2}}.$$

Так як в точці $x=0$ друга похідна не існує і функція визначена, то (0;0) – критична точка другого роду. На обох отриманих інтервалах $(-\infty;0)$ і $(0;+\infty)$ крива опукла униз. Точок перегину немає (рис.9).

§2.7. Повне дослідження функції, побудова графіка

Наведемо схему повного дослідження функції і побудови її графіка:

1) знаходимо область визначення функції;
2) досліджуємо функцію на парність, непарність і періодичність;
3) знаходимо точки перетину кривої з осями координат і інтервали знакосталості;
4) визначаємо асимптоти кривої і характер точок розриву;
5) знаходимо проміжки зростання, спадання і екстремуми функції;
6) досліджуємо графік функції на опуклість і точки перегину;
7) будуємо графік функції.

Розглянемо більш детально наведену схему на конкретних прикладах.

Приклад 1. Провести повне дослідження функцій і побудувати їхні графіки:

а) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$; б) $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

Розв'язання. а) Враховуючи, що знаменник дробу дорівнює нулю при $x = \pm 2$, знаходимо область визначення функції

$$D(f) = (-\infty;-2) U (-2;2) U (2;+\infty).$$

Нагадаємо, що функція $y = f(x)$ називається *парною*, якщо область її визначення симетрична відносно нуля і якщо для будь-якого x виконується рівність $f(-x) = f(x)$; якщо ж $f(-x) = -f(x)$, то функція називається *непарною*. Графік парної функції симетричний відносно осі *Oy*, а графік непарної – відносно початку координат. У нашому випадку область визначення симетрична відносно нуля і

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=-\frac{x^3}{x^2-4}=-f(x)\ .$$

Функція непарна (побудований графік повинен бути симетричним відносно початку координат).

Легко бачити, що функція неперіодична.

Знайдемо точки перетину графіка функції з віссю *Ox* (у цих точках $y=0$): $\frac{x^3}{x^2-4}=0$, $x^3=0$, $x=0$; (0;0) – точка перетину з віссю *Ox*.

Визначаємо точки перетину графіка функції з віссю *Oy* (у цих точках $x=0$): $y=\frac{0}{0-4}=0$; (0;0) – точка перетину з віссю *Oy*.

Знайдемо інтервали знакосталості. Для цього на числовій прямій відмічаємо точки перетину кривої з віссю *Ox* і точки розриву, а потім визначаємо знак функції на кожному з одержаних проміжків області визначення функції (рис. 10). Як бачимо функція додатна на інтервалах $(-2;0)$ і $(2;+\infty)$, від'ємна на $(-\infty;-2)$ і $(0;2)$.

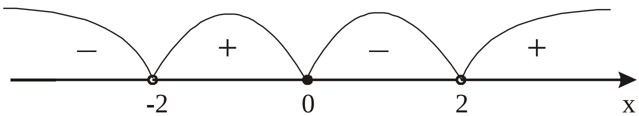

Рис. 10

Шукаємо похилі і горизонтальні асимптоти (див. §2.2):

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x\cdot(x^2-4)}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{x^2-4}\right)=0;$$

$y=kx+b=1\cdot x+0=x,\ y=x$ – похила асимптота.

Так як

$$\lim_{x\to-2-}\frac{x^3}{(x^2-4)}=-\infty,\quad \lim_{x\to-2+}\frac{x^3}{(x^2-4)}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to2-}\frac{x^3}{(x^2-4)}=-\infty,\quad \lim_{x\to2+}\frac{x^3}{(x^2-4)}=+\infty,$$

то прямі $x=-2$ і $x=2$ є вертикальними асимптотами ($x=\pm2$ – точки розриву другого роду).

Досліджуємо функцію на інтервали зростання, спадання і точки екстремуми (див. §2.5.):

$$y'=\frac{3x^2(x^2-4)-2x\cdot x^3}{(x^2-4)^2}=\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2};$$

$x^4-12x^2=0$, $x^2(x^2-12)=0$, $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{12}=-2\sqrt{3}$, $x_3=2\sqrt{3}$.

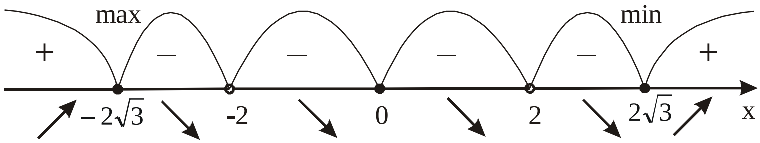

Рис. 11

Функція зростає на інтервалах $\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)$ і $\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$. Функція спадає на інтервалах $\left(-2\sqrt{3};-2\right)$, $\left(-2;0\right)$, $\left(0;2\right)$ і $\left(2;2\sqrt{3}\right)$. Точка $x=-2\sqrt{3}$ – точка максимуму $(y_{\max}\approx-5.2)$; $x=2\sqrt{3}$ – точка мінімуму $(y_{\min}\approx5.2)$.

Досліджуємо функцію на опуклість і точки перегину (див. §2.6):

$$y'' = \frac{(4x^3 - 24x)(x^2 - 4)^2 - 2(x^2 - 4)\cdot 2x \cdot (x^4 - 12x^2)}{(x^2 - 4)^4} = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^3};$$

$$8x^3 + 96x = 0, \quad 8x(x^2 + 12) = 0, \quad x = 0, \quad (x^2 + 12 \neq 0).$$

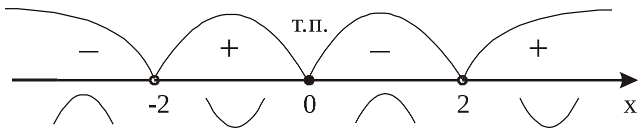

Рис. 12

Функція опукла угору на інтервалах $(-\infty;-2)$ і $(0;2)$; опукла униз на інтервалах $(-2;0)$ і $(2;+\infty)$; (0; 0) – точка перегину.

Будуємо графік функції (Рис. 13).

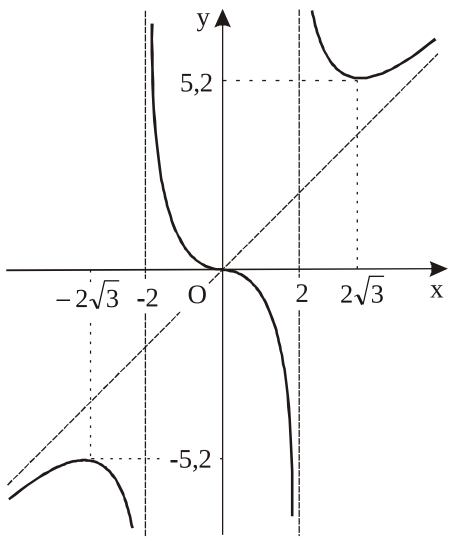

Рис. 13

б) Областю визначення функції є інтервал $(0;+\infty)$.

Так як область визначення не симетрична відносно нуля, то функція не парна і не непарна. Функція неперіодична.

Знаходимо точки перетину кривої з віссю Ox:

$\frac{\ln x}{x}=0, \ln x=0, x=1$;   (1;0) – точка перетину з віссю Ox.

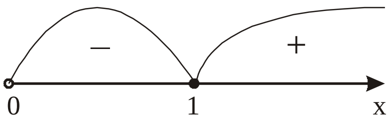

Рис. 14

Вісь Oy графік функції не перетинає $(x \neq 0)$.

Інтервали знакосталості (рис.14): на інтервалі (0;1) функція від’ємна, на $(1;+\infty)$ – додатна.

Знаходимо похилі і горизонтальні асимптоти:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=0;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x}-0\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0;$$

$y=kx+b=0\cdot x+0=0, y=0$ (вісь Ox) – горизонтальна асимптота.

Так як $\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$, то $x=0$ – вертикальна асимптота.

Досліджуємо функцію на монотонність і точки екстремуму:

$$y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2};\ 1-\ln x=0,\ \ln x=1,\ x=e\quad (e\approx 2.71).$$

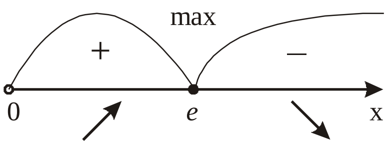

Рис. 15

Функція зростає на інтервалі $(0;e)$, спадає на інтервалі $(e;+\infty)$; $x=e$ – точка максимуму $(y_{\max}=e^{-1}\approx 0.37)$.

Досліджуємо графік функції на опуклість і точки перегину:

$$y'' = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3};$$

$$2\ln x - 3 = 0, \ \ln x = \frac{3}{2}, \quad x = e^{1,5} \approx 4.48 .$$

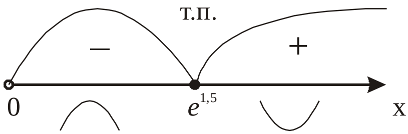

Рис. 16

На інтервалі $(0; e^{1,5})$ крива опукла угору, на інтервалі $(e^{1,5}; +\infty)$ – униз; $(e^{1,5}; 1{,}5e^{-1,5})$ – точка перегину.

Будуємо графік (рис. 17).

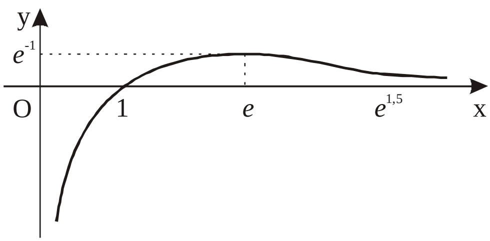

Рис.17

Розділ 3. **Невизначений інтеграл**

§3.1. Поняття невизначеного інтеграла. Найпростіші прийоми інтегрування

У диференціальному численні розглядалася наступна основна задача: по заданій функції $F(x)$ потрібно знайти її похідну $F'(x) = f(x)$. У інтегральному численні розглядається обернена задача: по заданій функції $f(x)$ потрібно знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнювала б функції $F(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$. Іншими словами по заданій похідній від невідомої функції необхідно знайти саму функцію.

Якщо для кожного x з деякого проміжку X виконується рівність $F'(x) = f(x)$, то функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку X. Наприклад функція $F(x) = 0{,}25x^4 + 3$ є первісною для функції $f(x) = x^3$ на R, так як

$$F'(x) = (0{,}25x^4 + 3)' = x^3 = f(x).$$

Нехай $F(x)$ є первісною для функції $F(x)$ на проміжку X. Тоді на цьому проміжку функція $f(x)$ має нескінченну множину первісних, які можуть бути представлені у вигляді суми $F(x) + C$, де C – довільна стала. Вказана множина всіх можливих первісних називається *невизначеним інтегралом* і позначається символом $\int f(x)dx$. Таким чином можемо записати

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{1.1}$$

Функція $f(x)$ називається *підінтегральною функцією*, $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*, x – *змінною інтегрування*. Операцію знаходження невизначеного інтеграла (первісної) будемо називати *інтегруванням функції*.

Основні властивості невизначеного інтеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, 2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$,

3. $\int dF(x) = F(x) + C$, 4. $\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$ (k – стала),

5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

Таблиця інтегралів:

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$, 2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$,

3. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, 4. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$,

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, 6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$,

7. $\int e^x dx = e^x + C$, 8. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$,

9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$, 10. $\int \cos x dx = \sin x + C$,

11. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, 12. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$,

13. $\int \dfrac{dx}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C$ 14. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$,

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C$.

У найпростіших випадках невизначені інтеграли можуть бути знайдені тільки за допомогою таблиці інтегралів, основних властивостей та елементарних перетворень підінтегральної функції. Вказаний підхід називається *безпосереднім інтегруванням*.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int \left(\dfrac{5}{\cos^2 x} - \dfrac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x^5} \right) dx$; б) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Розв'язання. Використовуючи основні властивості, таблицю інтегралів і очевидні елементарні перетворення дістаємо:

а) $\int\left(\frac{5}{\cos^2 x}-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^5}\right)dx=5\int\frac{dx}{\cos^2 x}-2\int x^{-3}dx+\int x^{\frac{5}{3}}dx=$

$$=5\,\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+C\ ;$$

б) $\int \mathrm{tg}^2\, xdx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=$

$$=\mathrm{tg}\,x-x+C\ .$$

Для невизначеного інтеграла справедлива також наступна властивість: якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$ і $u=\varphi(x)$ – будь-яка неперервно диференційована функція, то $\int f(u)du=F(u)+C$. На основі цієї властивості в деяких випадках інтеграл може бути зведений до табличного за допомогою прийому *внесення функції під знак диференціала*.

Приклад 2. Знайти інтеграли: а) $\int\frac{\cos xdx}{\sin^5 x}$; б) $\int xe^{x^2+3}dx$.

Розв'язання. а) Застосовуємо прийом внесення функції під знак диференціала. Так як $d\sin x=(\sin x)'dx=\cos xdx$ і $\int u^{-5}du=\frac{u^{-4}}{-4}+C$, то можемо записати

$$\int\frac{\cos xdx}{\sin^5 x}=\int\frac{d\sin x}{\sin^5 x}=\int\sin^{-5} xd\sin x=\frac{\sin^{-4} x}{-4}+C\ .$$

б) Аналогічно попередньому, враховуючи, що $xdx=\frac{1}{2}d(x^2+3)$, маємо

$$\int xe^{x^2+3}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2+3}d(x^2+3)=\frac{1}{2}e^{x^2+3}+C\ .$$

Нехай функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$. Застосовуючи прийом внесення функції під знак диференціала дістаємо

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Отже, справедлива формула

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C, \qquad (1.2)$$

де $F(x)$ – первісна для $f(x)$.

Приклад 3. Обчислити інтеграли: а) $\int \frac{dx}{5x+1}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

Розв'язання. а) Застосовуючи прийом внесення функції під знак диференціала, отримуємо:

$$\int \frac{dx}{5x+1} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5x+1)}{5x+1} = \frac{1}{5}\ln|5x+1|+C.$$

б) Використовуючи формулу (1.2), дістаємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin 3x + C.$$

§3.2. Методи інтегрування

Досить часто заміна змінної суттєво спрощує обчислення невизначеного інтеграла. Нехай перехід до нової змінної задається підстановкою $x=\varphi(t)$ і нехай $\varphi(t)$ – монотонна, неперервно диференційована функція (на відповідному проміжку) нової змінної t. *Метод заміни змінної* (або *метод підстановки*) визначається наступною формулою

$$\int f(x)dx = \left| x = \varphi(t),\, dx = \varphi'(t)dt \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,. \qquad (2.1)$$

Інколи нову змінну зручно вводити за допомогою підстановки $u = \psi(x)$. У цьому випадку використовується формула

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \left| u = \psi(x),\, du = \psi'(x)dx \right| = \int f(u)du\,. \qquad (2.2)$$

При застосуванні формул (2.1) і (2.2) після інтегрування потрібно повернутися до змінної *x*.

Приклад 1. Знайти інтеграли: а) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$; б) $\int \sin^6 x \cdot \cos x dx$.

Розв'язання. а) Застосовуючи формулу (2.1), маємо

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x} = \left| x = t^2,\, dx = 2tdt \right| = \int \frac{t \cdot 2tdt}{1+t^2} = 2\int \frac{t^2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2+1}{1+t^2}dt - 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2t - 2arctgt + C = \left| t = \sqrt{x} \right| = 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + C\,.$$

б) Використовуючи формулу (2.2), дістаємо

$$\int \sin^6 x \cdot \cos x dx = \left| u = \sin x,\, du = \cos x dx \right| = \int u^6 du = \frac{u^7}{7} + C = \frac{\sin^7 x}{7} + C\,.$$

Якщо *u* і *v* – диференційовані функції від *x*, то має місце формула:

$$\int udv = uv - \int vdu\,. \qquad (2.3)$$

Формула (2.3) лежить в основі *методу інтегрування частинами*. При її застосуванні мається на увазі, що інтеграл у правій частині простіший, ніж інтеграл у лівій. При використанні вказаного методу підінтегральний вираз розбивається на два множника $u = \varphi(x)$ і $dv = \psi(x)dx$. Здиференціювавши першу рівність, та зінтегрувавши другу, знаходимо $du = \varphi'(x)dx$ і $v = \int \psi(x)dx$ (довільну сталу беремо рівною нулю). Далі застосовуємо формулу (2.3).

Приклад 2. Знайти інтеграли: а) $\int x\cdot\sin x dx$; б) $\int\sqrt{1+x^2}dx$.

Розв'язання. а) Використавши метод інтегрування частинами, отримаємо

$$\int x\cdot\sin x dx=\begin{vmatrix}u=x, dv=\sin x dx,\\ du=dx, v=-\cos x\end{vmatrix}=-x\cdot\cos x+\int\cos x dx=$$

$$=-x\cdot\cos x+\sin x+C .$$

б) Аналогічно попередньому маємо

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=\begin{vmatrix}u=\sqrt{1+x^2}, dv=dx,\\ du=\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, v=x\end{vmatrix}=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=x\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}dx+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| .$$

Можемо записати

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=x\sqrt{1+x^2}dx-\int\sqrt{1+x^2}dx+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| .$$

Помітивши, що в лівій і правій частинах однакові інтеграли, зводимо подібні і розв'язуємо рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$2\int\sqrt{1+x^2}dx=x\sqrt{1+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| ,$$

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)+C .$$

Наведемо деякі типи інтегралів, для обчислення яких завжди застосовується метод інтегрування частинами:

$$\int P(x)\cdot\sin(ax+b)dx\,,\qquad (P(x)=u\,,\quad \sin(ax+b)dx=dv\,);$$

$$\int P(x)\cdot\cos(ax+b)dx\,,\qquad (P(x)=u\,,\quad \cos(ax+b)dx=dv\,);$$

$$\int P(x)\cdot a^{bx+c}dx\,,\qquad (P(x)=u\,,\quad a^{bx+c}dx=dv\,);$$

$$\int P(x)\cdot\log_a xdx\,,\qquad (\log_a x=u\,,\quad P(x)dx=dv\,);$$

де $P(x)$ – многочлен.

Приклад 3. Знайти інтеграли:

а) $\int (x^4+x^2+1)\cdot\ln xdx$; б) $\int x^2\cdot e^{3x}dx$.

Розв'язання. а) Маємо один з наведених вище стандартних випадків. Інтегруємо:

$$\int (x^4+x^2+1)\cdot\ln xdx=\left|\begin{array}{l} u=\ln x, dv=(x^4+x^2+1)dx, \\ du=\dfrac{dx}{x}, v=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^3}{3}+x \end{array}\right|=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x-$$

$$-\int\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\right)\frac{dx}{x}=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x-\int\left(\frac{x^4}{5}+\frac{x^2}{3}+1\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x-\frac{x^5}{25}-\frac{x^3}{9}-x+C\,.$$

б) Застосовуємо метод інтегрування частинами два рази:

$$\int x^2\cdot e^{3x}dx=\left|\begin{array}{l} u=x^2, dv=e^{3x}dx, \\ du=2xdx, v=\dfrac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right|=\frac{1}{3}x^2\cdot e^{3x}-\frac{2}{3}\int x\cdot e^{3x}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=x, dv=e^{3x}dx, \\ du=dx, v=\dfrac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right|=\frac{1}{3}x^2\cdot e^{3x}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\cdot e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+C.$$

§3.3. Інтегрування деяких виразів, що містять квадратний тричлен.

Розглянемо інтеграли виду

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\tag{3.1}$$

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx,\quad \int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,\tag{3.2}$$

де *A, B, a, b, c* – сталі.

Інтеграли (3.1) зводяться до табличних за допомогою виділення повного квадрата у квадратному тричлені знаменника, а саме:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a((x+h)^2-l),\text{ де }h=\frac{b}{2a},\,l=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

У залежності від значень параметрів a і l будимо отримувати різні табличні інтеграли. Наприклад, якщо $l<0,-\infty<a<+\infty$, то для першого інтеграла отримуємо

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+h)^2-l}=\frac{1}{a\sqrt{-l}}\operatorname{arctg}\frac{x+h}{\sqrt{-l}}+C;$$

якщо $a<0,l>0$, то для другого інтеграла дістаємо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a((x+h)^2-l)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-a(l-(x+h)^2)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dx}{\sqrt{l-(x+h)^2}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{x+h}{\sqrt{l}}+C\,.$$

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int\frac{dx}{2x^2-16x+46}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{-2x^2+12x-15}}$.

Розв'язання. а) Виділяємо в знаменнику повний квадрат і інтегруємо:

$$\int\frac{dx}{2x^2-16x+18}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-8x+9}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2-2\cdot4\cdot x+16)-16+9}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-4)^2-7}=\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x-4-\sqrt{7}}{x-4+\sqrt{7}}\right|+C\,.$$

б) Аналогічно попередньому отримуємо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-2x^2+12x-15}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-2(x^2-6x+7{,}5)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-2((x-3)^2-1{,}5)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1{,}5-(x-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{1{,}5}}+C.$$

Розглянемо інтеграли (3.2). В чисельнику виділяємо похідну від квадратного тричлена знаменника ($(ax^2+bx+c)'=2ax+b$):

$$Ax+B=\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{bA}{2a}=r(2ax+b)+s,\ \text{де}\ r=\frac{A}{2a},\ s=B-\frac{bA}{2a}\,;$$

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{r(2ax+b)+s}{ax+bx+c}dx=r\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}+s\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}\,;$$

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=r\int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+s\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,.$$

Два з чотирьох отриманих інтегралів були розглянуті вище, а для двох інших маємо:

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + C\ ;$$

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int (ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}} d(ax^2+bx+c) = 2(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}} + C\ .$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int \frac{(3x+5)}{2x^2+8x+9}dx$.

Розв'язання. Враховуючи, що похідна знаменника дорівнює $4x+8$, дістаємо

$$\int \frac{(3x+5)}{2x^2+8x+7}dx = \int \frac{\frac{3}{4}(4x+8)+5-6}{2x^2+8x+7}dx = \frac{3}{4}\int \frac{(4x+8)dx}{2x^2+8x+7} -$$

$$-\int \frac{dx}{2x^2+8x+7} = \frac{3}{4}\int \frac{d(2x^2+8x+7)}{2x^2+8x+7} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2-0{,}5} =$$

$$= \frac{3}{4}\ln\left|2x^2+8x+9\right| - \frac{1}{4\sqrt{0.5}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{0{,}5}}{x+2+\sqrt{0{,}5}}\right| + C\ .$$

§3.4. Інтегрування найпростіших дробів

Найпростішими (або *елементарними*) називаються наступні чотири типи дробів:

I. $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$, де k – додатне ціле число більше одиниці;

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $p^2-4q<0$ (дискримінант від'ємний);

IV. $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $p^2-4q<0$, k – додатне ціле число більше одиниці. Тут *A, B, a, p, q* – сталі.

Для найпростіших дробів першого і другого типів маємо:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\cdot \ln\left|x-a\right| + C,$$

$$\int \frac{A}{\left(x-a\right)^k}dx = A\int\left(x-a\right)^{-k}dx = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C.$$

Інтегрування елементарного дробу третього типу було розглянуто в попередньому параграфі (перший з інтегралів (3.2) при $a=1, l<0$).

Найскладнішим і найбільш громіздким є інтегрування елементарного дробу четвертого типу. У загальному випадку вказаний інтеграл береться за допомогою рекурентної формули. Для інтеграла $I_n=\int\dfrac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ (n – додатне ціле число) справедлива наступна рекурентна формула

$$I_n=\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}, \qquad (4.1)$$

де $I_{n-1}=\int\dfrac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}$. Формулу (4.1) дозволяє звести обчислення інтеграла I_n до обчислення табличного інтеграла $I_1=\int\dfrac{dt}{t^2+a^2}$.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int\dfrac{4x-5}{(x^2-6x+13)^2}dx$.

Розв'язання. Виділяємо в чисельнику похідну від квадратного тричлена знаменника і розбиваємо інтеграл на два:

$$\int \frac{4x-5}{(x^2-6x+13)^2}dx = \int \frac{2(2x-6)+7}{(x^2-6x+13)^2}dx =$$

$$= 2\int \frac{(2x-6)dx}{(x^2-6x+13)^2} + 7\int \frac{dx}{((x-3)^2+4)^2}.$$

Для першого інтеграла можемо записати

$$\int \frac{(2x-6)dx}{(x^2-6x+13)^2} = \int (x^2-6x+13)^{-2} d(x^2-6x+13)^2 =$$

$$= \frac{(x^2-6x+13)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x^2-6x+13} + C.$$

У другому інтегралі робимо підстановку і застосовуємо формулу (4.1) (тут $a=2, n=2$):

$$\int \frac{dx}{((x-3)^2+4)^2} = \left| \begin{matrix} x-3=t, \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{(t^2+4)^2}dt = \frac{1}{2\cdot 4\cdot(2-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+4)^{2-1}} +$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}\cdot\int \frac{dt}{(t^2+4)}dt = \frac{t}{8(t^2+4)} + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{x-3}{8((x-3)^2+4)} + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + C.$$

Остаточно маємо:

$$\int \frac{4x-5}{(x^2-6x+13)^2}dx = -\frac{2}{x^2-6x+13} + 7\left(\frac{x-3}{8((x-3)^2+4)} + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}\right) +$$

$$+C = \frac{7x-37}{8(x^2-6x+13)} + \frac{7}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + C.$$

§3.5. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Розглянемо інтеграл від *дробово-раціональної функції* тобто інтеграл виду $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, де $P(x)$, $Q(x)$ – многочлени. В загальному випадку за допомогою перетворень підінтегральної функції обчислення такого інтеграла зводиться до інтегрування многочлена і найпростіших дробів.

Наведемо спочатку деякі поняття і властивості для раціонального дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь многочлена чисельника менший за степінь многочлена знаменника. Як що ж степінь многочлена чисельника не менший за степінь многочлена знаменника, то дріб називається *неправільним*. Поділивши у неправильному дробу чисельник на знаменник (виділивши цілу частину), дістанемо

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \tag{5.1}$$

де $F(x)$ – частка, $R(x)$ – остача, $\frac{R(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб.

Знаменник $Q(x)$ можна представити у вигляді добутку лінійних і квадратичних виразів (деякі з них можуть повторюватися), а саме

$$Q(x) = A(x-a)^m \ldots (x-b)^n (x^2+ux+v)^k \ldots (x^2+px+q)^r. \tag{5.2}$$

Тут мається на увазі, що квадратні тричлени у формулі (5.2) на лінійні множники не розкладаються (дискримінанти від’ємні). Лінійні множники відповідають дійсним кореням многочлена $Q(x)$ ($x = a$ є дійсним m-кратним коренем і т.д.); кожен квадратичний множник відповідає парі комплексно-спряжених коренів.

Правильний раціональний дріб $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, знаменник якого представлений у вигляді добутку (5.2), розкладається на найпростіші дроби за допомогою наступної формули

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_m}{(x-a)^m}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_rx+N_r}{(x^2+px+q)^r}\,, \qquad (5.3)$$

де $A_1, A_2, \ldots, M_r, N_r$ – невідомі числові коефіцієнти, які потрібно визначати (методи обчислення цих коефіцієнтів будуть розглянуті на конкретних прикладах).

Приклад 1. Розкласти дріб $\dfrac{2x^3-14x^2+26x+3}{(x-3)^2(x^2-x+3)}$ на найпростіші.

Розв'язання. Дріб правильний і знаменник представлений у формі (5.2). Застосовуємо формулу (5.3), приводимо праву частину до спільного знаменника і записуємо многочлен чисельника у стандартній формі:

$$\frac{2x^3-14x^2+26x+3}{(x-3)^2(x^2-x+3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{Mx+N}{x^2-x+3}=$$

$$=\frac{A(x-3)(x^2-x+3)+B(x^2-x+3)+(Mx+N)(x-3)^2}{(x-3)^2(x^2-x+3)}=$$

$$=\frac{(A+M)x^3+(-4A+B-6M+N)x^2+(6A-B+9M-6N)x-9A+3B+9N}{(x-3)^2(x^2-x+3)}.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x многочленів чисельників крайнього лівого і крайнього правого дробів, одержимо:

$$\begin{cases} A + M = 2, \\ -4A + B - 6M + N = -14, \\ 6A - B + 9M - 6N = 26, \\ -9A + 3B + 9N = 3. \end{cases}$$

Розв'язавши систему лінійних рівнянь (можна застосовувати метод Гаусса, формули Крамера і т.д.), знайдемо $A = -1, B = 1, M = 3, N = -1$.

Підставивши ці значення, остаточно маємо:

$$\frac{2x^3 - 14x^2 + 26x + 3}{(x-3)^2(x^2 - x + 3)} = \frac{-1}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{3x-1}{x^2 - x + 3}.$$

Невідомі коефіцієнти у наведеному вище прикладі були знайдені *методом невизначених коефіцієнтів*.

Дробово-раціональну функцію можна інтегрувати за наступною *загальну схему*:

1. якщо дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ неправильний, то ділимо чисельник на знаменник і застосовуємо формулу (5.1) (виділяємо цілу частину);

2. знаменник $Q(x)$ розкладаємо на добуток лінійних і квадратичних множників, тобто представляємо його у формі (5.2);

3. правильний раціональний дріб $\frac{R(x)}{Q(x)}$ розкладаємо на найпростіші дроби за допомогою формули (5.3);

4. інтегруємо перетворену функцію.

Приклад 2. Обчислити $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$.

Розв'язання. Під знаком інтеграла неправильний дріб. Поділивши чисельник на знаменник, одержимо

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}=x+1+\frac{2}{x^3-x^2+x-1}$$

Розкладемо знаменник в добуток:

$$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+1)\,.$$

Застосуємо формулу (5.3) і приведемо до спільного знаменника:

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}\,.$$

Прирівняємо чисельники крайніх дробів:

$$A(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)=2\,.$$

З метою визначення невідомих коефіцієнтів надамо x три числових значення (по кількості невідомих). У загальному випадку в якості вказаних значень потрібно брати дійсні корені знаменника (у нашому прикладі $x=1$) і доповнювати їх деякими зручними для обчислень числами. Використовуючи останню рівність, дістаємо:

$$\begin{array}{ll} x=1: & 2A=2, \\ x=0: & A-N=2, \\ x=2: & 5A+2M+N=2; \end{array} \qquad \begin{cases} A=1, \\ N=-1, \\ M=-1. \end{cases}$$

Можемо записати

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+1}\,.$$

Інтегруємо:

$$\int\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}=\int\left(x+1+\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-\operatorname{arctg}x+C\,.$$

У останніх прикладах наведені два різних метода для визначення невідомих коефіцієнтів формули (5.3). При розв’язуванні прикладів можна використовувати або один з них, або комбінувати обидва.

§3.6. Інтегрування тригонометричних функцій.

Розглянемо інтеграл виду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx. \qquad (6.1)$$

Тут і надалі R – раціональна функція своїх аргументів. Інтеграл (6.1) зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t. \qquad (6.2)$$

Вказана заміна змінної називається *універсальною тригонометричною* підстановкою. Враховуючи що

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad x = 2\cdot\operatorname{arctg} t,$$

дістаємо

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (6.3)$$

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$.

Розв'язання. Застосовуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1} = \left| tg\frac{x}{2} = t \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} =$$

$$= \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}+1\right| + C.$$

Недоліком підстановки (6.1) є те, що після її здійснення, як правило, під знаком інтеграла з'являються громіздкі вирази. Розглянемо деякі більш частинні випадки інтегралів від тригонометричних функцій.

1) Перший з інтегралів

$$\int R(\sin x)\cos x dx\,, \quad \int R(\cos x)\sin x dx \tag{6.4}$$

береться за допомогою підстановки $\sin x = t$, а другий – $\cos x = t$.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x}$.

Розв'язання. Маємо перший з інтегралів (6.4). Можемо записати

$$\int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x} = \begin{vmatrix} \sin x = t, \\ \cos x dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2} arctgt + C = \frac{1}{2} arctg \sin x + C.$$

2) Для інтегралів

$$\int R(tgx)dx\,, \quad \int R(\sin^{2m} x, \cos^{2n} x)dx\,, \tag{6.5}$$

де m і n – цілі числа, потрібно застосувати підстановку $\mathrm{tg}\, x = t$. для вказаної заміні отримуємо

$$\sin^{2m} x = (\sin^2 x)^m = \left(\frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}\right)^m = \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^m,$$

$$\cos^{2n} x = \left(\cos^2 x\right)^n = \left(\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}\right)^n = \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^n;$$

$$\mathrm{tg}\, x = t, \quad x = \mathrm{arctg}\, t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

Розв'язання. Маємо другий з інтегралів (6.5). Використовуючи заміну $\operatorname{tg} x = t$, дістаємо

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{1+\dfrac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C .$$

3) Інтеграли

$$\int R(\sin x)\cos^{2p+1} x dx , \quad \int R(\cos x)\sin^{2p+1} x dx , \tag{6.6}$$

де p –додатне ціле число, беруться за допомогою підстановок $\sin x = t$, $\cos x = t$ відповідно. Для цих інтегралів можемо записати

$$\cos^{2p+1} x dx = (\cos^2 x)^p \cos x dx = (1-\sin^2 x)^p d \sin x = (1-t^2)^p dt ,$$

$$\sin^{2p+1} x dx = (\sin^2 x)^p \sin x dx = -(1-\cos^2 x)^p d \cos x = -(1-t^2)^p dt .$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx$.

Розв'язання. Маємо другий з інтегралів (6.6). Робимо підстановку $\cos x = t$:

$$\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x dx = -\int \cos^2 x (1-\cos^2 x) d \cos x =$$

$$= -\int t^2 (1-t^2) dt = -\int (t^2 - t^4) dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

4) Для інтегралів

$$\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx , \tag{6.7}$$

де m і n – цілі невід'ємні числа, застосовуються тригонометричні формули, які дозволяють знизити степінь тригонометричних функцій у два рази, а саме

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) , \ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) , \ \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x .$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int \sin^4 x dx$.

Розв'язання. Беремо інтеграл за допомогою формул зниження степеня:

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx +$$

$$+\frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

5) Інтеграли

$$\int \cos nx \cos mx dx\,,\ \int \sin mx \cos nx dx\,,\ \int \sin mx \sin nx dx \qquad (6.8)$$

беруться за допомогою наступних тригонометричних формул (формул перетворення добутків у суми):

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))\,,$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))\,,$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\,.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int \cos 5x \cos 3x dx$.

Розв'язання. Застосовуючи першу з наведених вище формул, дістаємо

$$\int \cos 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 8x + \cos 2x)dx = \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\,.$$

§3.7. Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграл

$$\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})dx \tag{7.1}$$

зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки

$$x = t^k; \quad dx = kt^{k-1}dt\,. \tag{7.2}$$

Тут R – раціональна функція своїх аргументів, k – найменше спільне кратне (НСК) знаменників n, … , s.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x}+1)\sqrt{x}}$.

Розв'язання. У даному випадку підінтегральна функція раціонально залежить від аргументів $x^{\frac{1}{4}}$ і $x^{\frac{1}{2}}$. Так як найменше спільне кратне чисел 4 і 2 дорівнює 4, то потрібно зробити підстановку $x = t^4$:

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x}+1)\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} x = t^4, \\ dx = 4t^3 dt \end{matrix} \right| = \int \frac{4t^3 dt}{(t+1)t^2} = 4\int \frac{(t+1)-1}{(t+1)}dt =$$

$$= 4\int dt - 4\int \frac{dt}{t+1} = 4t - \ln|t+1| + C = \left| t = \sqrt[4]{x} \right| = 4\sqrt[4]{x} - 4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + C\,.$$

Аналогічно попередньому, інтеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{\frac{r}{s}} \right)dx \tag{7.3}$$

зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки

$$\frac{ax+b}{cx+g}=t^k; \quad x=\frac{gt^k-b}{a-ct^k}; \quad dx=\frac{(ag-bc)kt^{k-1}}{(a-ct^k)^2}dt, \qquad (7.4)$$

де k – НСК знаменників n, …, s.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1\right)^2\frac{dx}{x^2}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл типу (7.3). Робимо підстановку (7.4):

$$\frac{1-x}{1+x}=t^2, \quad 1-x=(1+x)t^2, \quad x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx=\frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt;$$

$$\int\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1\right)^2\frac{dx}{x^2}=\int(t+1)^2\cdot\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}\cdot\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt=$$

$$=-4\int\frac{t(1+t)^2}{(1-t)^2(1+t)^2}dt=-4\int\frac{t}{(t-1)^2}dt=-4\int\frac{(t-1)+1}{(t-1)^2}dt=$$

$$=-4\int\frac{dt}{t-1}-4\int\frac{dt}{(t-1)^2}=-4\ln|t-1|+4(t-1)^{-1}+C=$$

$$=-4\ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right|+4\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right)^{-1}+C.$$

Розглянемо інтеграл виду

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx \qquad (a\neq 0, b^2-4ac\neq 0) \qquad (7.5)$$

Після виділення в квадратному тричлені повного квадрата і заміни змінної отримаємо один з трьох інтегралів, кожен з яких може бути знайдений при допомозі відповідної тригонометричної підстановки:

$$\int R(t, \sqrt{t^2+m^2})dt, \quad t = m\operatorname{tg} z \text{ або } t = m\operatorname{ctg} z; \qquad (7.6)$$

$$\int R(t, \sqrt{t^2-m^2})dt, \quad t = m\sin^{-1} z \text{ або } t = m\cos^{-1} z; \qquad (7.7)$$

$$\int R(t, \sqrt{m^2-t^2})dt, \quad t = m\sin z \text{ або } t = m\cos z. \qquad (7.8)$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x+5}}$.

Розв'язання. Виділяємо в знаменнику повний квадрат і робимо першу підстановку:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{(x-1)^2+4}} = \left| \begin{array}{l} x-1=t, \\ x=t+1, dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t^2+4}}.$$

Отримали інтеграл (7.6). Робимо вказану підстановку і, враховуючи, що $1+\operatorname{tg}^2 z = \frac{1}{\cos^2 z}$, дістаємо

$$= \int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t^2+4}} = \left| t = 2\operatorname{tg} z, dt = \frac{2dz}{\cos^2 z} \right| = \int \frac{dz}{2\sin z + \cos z}.$$

Останній інтеграл береться за допомогою універсальної тригонометричної підстановки:

$$\int \frac{dz}{2\sin z + \cos z} = \left| \operatorname{tg}\frac{z}{2} = v \right| = \int \frac{-2dv}{v^2-4v-1} = -2\int \frac{dv}{(v-2)^2-5} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{v-2-\sqrt{5}}{v-2+\sqrt{5}}\right| + C = -\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}}{2} - 2 - \sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}}{2} - 2 + \sqrt{5}}\right| + C.$$

Розділ 4. **Визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла.**

§ 4.1. Означення та основні властивості визначеного інтеграла.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a,b]$. Розіб'ємо вказаний відрізок на n частин точками поділу $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$, причому $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ (рис.18).

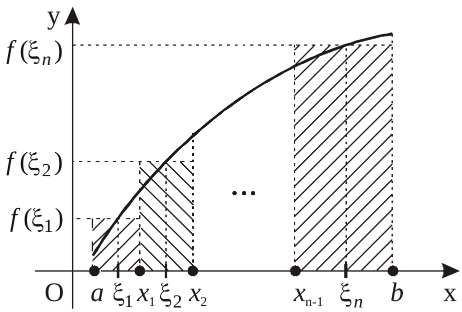

Рис. 18

Введемо позначення $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. На кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]\,(i = 1,2,\ldots,n)$ певним чином виберемо по одній точці $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Складемо суму

$$s_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ . \qquad (1.1)$$

Сума s_n називається *інтегральною сумою* функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Очевидно, що значення інтегральної суми залежить від самої функції $f(x)$, способу розбиття відрізка $[a,b]$ на n частин і від вибору точок ξ_i. Нехай λ – найбільша з величин Δx_i $(i = 1,2,\ldots,n)$. Відмітимо, що при $\lambda \to 0$ число відрізків n нескінченно збільшується.

Якщо існує границя інтегральної суми (1.1) при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a,b]$ на частини, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом* функції $y = f(x)$ на проміжку $[a,b]$.

Визначений інтеграл позначається через $\int_a^b f(x)dx$, де a, b – відповідно нижня і верхня межа інтегрування, $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз. Отже, можемо записати

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ . \tag{1.2}$$

Якщо визначений інтеграл існує (існує границя інтегральної суми), то функція $f(x)$ називається *інтегрованою* на проміжку $[a,b]$.

Дамо *геометричний зміст* визначеного інтеграла. Нехай $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$. Кожен доданок $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ інтегральної суми (1.1) дорівнює площі прямокутника зі сторонами $f(\xi_i)$ і Δx_i (рис. 18), а вся інтегральна сума дорівнює площі фігури, що обмежена віссю Ох, вертикальними прямими $x = a, x = b$ і ламаною лінією, ланки якої паралельні координатним осям. Очевидно, що при $\lambda \to 0$ вказана ламана прямує до кривої $y = f(x)$. Таким чином визначений інтеграл (1.2) при $f(x) \geq 0$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції (див. рис. 19, а), тобто площі фігури, яка зліва обмежена прямою $x = a$, справа – прямою $x = b$, знизу – віссю Ох і зверху – кривою $y = f(x)$.

Основні властивості визначеного інтеграла:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$,

4. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$,

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$, 5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$,

3. $\int\limits_a^b k\cdot f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, 6. $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$,

де k – стала; числа m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції *f(x)* на відрізку $[a,b]$.

§ 4.2. Обчислення визначеного інтеграла.

В основі обчислення визначеного інтеграла лежить *формула Ньютона-Лейбніца*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (2.1)$$

де $F(x)$ – первісна функції *f*(x).

Приклад 1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^{\pi/6} \sin 2x dx$; б) $\int\limits_0^1 \left(\frac{3}{1+x^2} + 5e^{2x}\right)dx$.

Розв'язання. а) Використовуючи (2.1), отримуємо

$$\int\limits_0^{\pi/6} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/6} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}.$$

б) Застосовуючи третю та четверту властивості, дістаємо

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{3}{1+x^2} + 5e^{2x}\right)dx = 3\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}dx + 5\int\limits_0^1 e^{2x}dx =$$

$$= \left(3\operatorname{arctg} x + \frac{5}{2}e^{2x}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{4} + \frac{5}{2}e^2 - \frac{5}{2}.$$

Розглянуті в першому розділі метод інтегрування частинами і метод заміни змінної переносяться і на випадок визначеного інтеграла. *Інтегрування частинами* у визначеному інтегралі здійснюється за допомогою формули

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du \,. \tag{2.2}$$

Даний метод застосовують до тих же функцій, що й у випадку невизначеного інтеграла.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_0^2 x \cdot e^{3x} dx$.

Розв'язання. На основі (2.2) маємо

$$\int_0^2 x \cdot e^{3x} dx = \left| u = x, dv = e^{3x} dx, du = dx, v = \frac{1}{3} e^{3x} \right| = \frac{1}{3} x e^{3x}\Big|_0^2 -$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^2 e^{3x} dx = \frac{2}{3}e^6 - \frac{1}{9}e^{3x}\Big|_0^2 = \frac{5}{9}e^6 + \frac{1}{9}.$$

Метод заміни змінної у визначеному інтегралі при застосуванні підстановки $x = \varphi(t)$ базується на формулі

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \,. \tag{2.3}$$

Нові межі інтегрування у правій частині визначаються рівностями $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$.

Розв'язання. Використовуючи (2.3), отримуємо

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \left| \begin{matrix} x = t^2,\ dx = 2tdt, \\ \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta^2 = 4 \Rightarrow \beta = 2 \end{matrix} \right| = \int_1^2 \frac{2tdt}{t(t+1)} =$$

$$= 2\int_1^2 \frac{dt}{t+1} = 2\ln|t+1|\Big|_1^2 = 2\ln 3 - 2\ln 2 = 2\ln\frac{3}{2}.$$

§ 4.3. Площа плоскої фігури.

Площа криволінійної трапеції (рис. 19, а), тобто площа фігури,

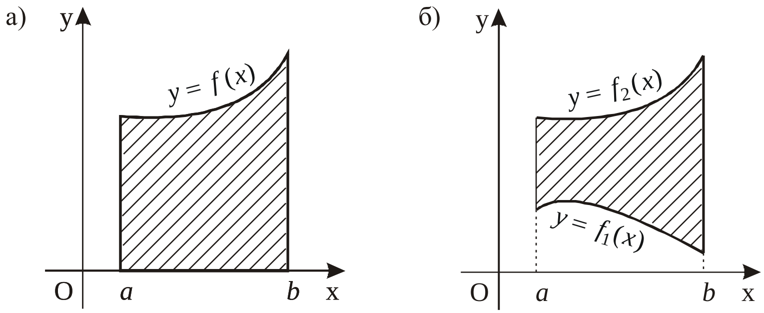

Рис. 19

яка обмежена прямими $x = a, x = b\ (a < b)$, віссю Ох і кривою $y = f(x)\ (f(x) \geq 0)$, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (3.1)$$

Площа фігури (рис. 19, б), яка обмежена прямими $x = a, x = b\ (a < b)$ і кривими $y = f_1(x), y = f_2(x)\ (f_1(x) \leq f_2(x))$ обчислюються за формулою:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (3.2)$$

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y = x^3, y = 0, x = 1;$ б) $y = 2\sqrt{x}, y = x$.

Розв'язання. а) Побудувавши графіки всіх заданих рівнянь, одержимо фігуру, площу якої потрібно знайти (рис. 20). Застосовуємо формулу (3.1), причому звертаємо увагу на те, що підінтегральна функція) $f(x)$ визначається рівнянням лінії, яка обмежує криволінійну трапецію зверху:

$$S = \int_0^1 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

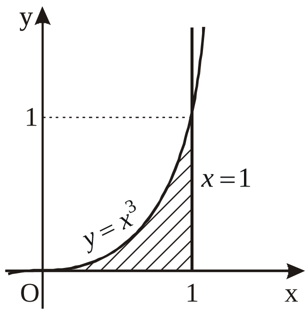

Рис. 20

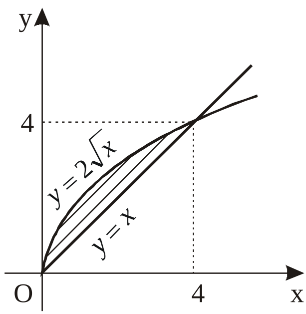

Рис. 21

б) Спочатку будуємо фігуру (рис. 21). Розв'язавши систему двох рівнянь $y = 2\sqrt{x}$ і $y = x$, одержимо координати точок перетину кривих, а саме (0;0) і (4;4). Застосовуємо формулу (3.2):

$$S = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x)dx = \left.\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\right|_0^4 = \frac{8}{3}.$$

Якщо верхня межа криволінійної трапеції (рис.22) задана

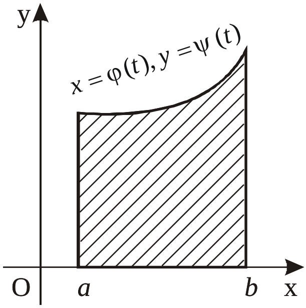

Рис. 22

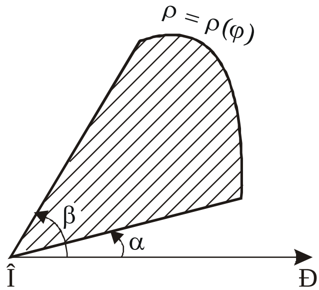

Рис. 23

параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, причому $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то її площа обчислюється за формулою:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt\,. \tag{3.3}$$

Площа криволінійного сектора (рис.23), заданого в полярних координатах співвідношенням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, визначається наступною рівністю

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi\,. \tag{3.4}$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

а) $x = 4\cos t,\ y = 2\sin t$; б) $\rho = a\cos 2\varphi$.

Розв'язання. а) Визначаємо декілька опорних точок, які наведені в таблиці, та будуємо задану криву (рис. 24).

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
x	4	3.46	2.83	2.00	0	-4	0
y	0	1	1.41	1.73	2	0	-2

Враховуючи симетрію фігури, знаходимо площу четвертої частини (подвійна штриховка) і множимо її на 4. Так як крива задана параметричними рівняннями, то застосовуємо формулу (3.3). Знайдемо межі інтегрування:

$$4\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pi/2,\ 4\cos\beta = 4 \Rightarrow \beta = 0.$$

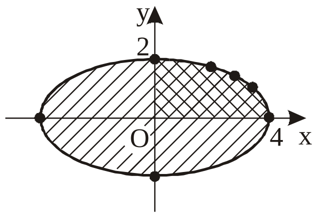

Рис. 24

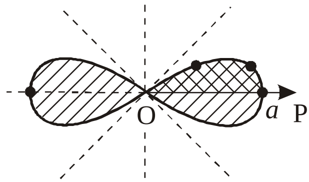

Рис. 25

Обчислюємо площу:

$$S = 4\int_{\pi/2}^{0} 2\sin t(-4\sin t)dt = -32\int_{\pi/2}^{0} \sin^2 t dt = -16\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos 2t)dt =$$

$$= -16\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/2}^{0} = 8\pi .$$

б) При побудові кривої необхідно мати на увазі, що вона визначена не для всіх значень аргументу φ. Так як $\rho \geq 0$, то дістаємо

$$a\cos 2\varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in [-\pi/4;\pi/4] \cup [3\pi/4;5\pi/4].$$

З врахуванням сказаного визначаємо опорні точки, які наведені в таблиці, та будуємо криву (рис. 25).

φ	$-\pi/4$	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$
ρ	0	a	0,87a	0.5a	0	0	a	0

Застосовуючи формулу (3.4) і враховуючи симетрію, маємо

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2\cos^2 2\varphi d\varphi = 2a^2\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}(1+\cos 4\varphi)d\varphi =$$

$$= a^2\left(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{a^2\pi}{4}.$$

§ 4.4. Довжина дуги кривої.

Довжина l дуги кривої $y = f(x), a \le x \le b$ обчислюється за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{4.1}$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, то формула (3.1) перетворюється до вигляду

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt. \tag{4.2}$$

У випадку полярних координатах, коли лінія задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, довжина дуги визначається формулою

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi. \tag{4.3}$$

Приклад 1. Обчислити довжину дуги параболи $y = 0{,}5x^2$ від $x = 0$ до $x = 1$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (4.1). Знайдемо спочатку підінтегральну функцію:

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \left(\left(0{,}5x^2\right)'\right)^2} = \sqrt{1 + x^2}.$$

Обчислюємо довжину (знаходження первісної див. § 3.2, прикл. 2б):

$$l=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))\ .$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$, то формула (4.1) перетворюється до вигляду

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt\ . \qquad (4.2)$$

Довжина дуги просторової кривої $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ обчислюється за формулою

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt\ . \qquad (4.3)$$

Приклад 2. Знайти довжину дуги астероїди $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$ від $t=0$ до $t=\pi/2$.

Розв'язання. Лінія задана параметричними рівняннями, тому скористаємося формулою (4.2). Маємо:

$$\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}=\sqrt{\left(6\cos^2 t\cdot(-\sin t)\right)^2+\left(6\sin^2 t\cdot\cos t\right)^2}=$$

$$=6\sqrt{\cos^2 t\cdot\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}=6\cos t\cdot\sin t=3\sin 2t\ ;$$

$$l=\int_0^{\pi/2}3\sin 2t\,dt=-\frac{3}{2}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}=-\frac{3}{2}(-1-1)=3\ .$$

У випадку полярних координатах, коли лінія задана рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, довжина дуги визначається формулою

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi\ . \qquad (4.4)$$

Приклад 3. Обчислити довжину дуги кривої $\rho = a\cos\varphi$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

Розв'язання. Крива задана у полярній системі координат. Застосуємо формулу (4.4):

$$l = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi = a\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = a\pi .$$

§ 4.5. Обчислення об'єму тіла обертання і площі поверхні обертання

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену лінією $y = f(x)$ ($f(x) \ge 0$), віссю Ox і двома вертикальними прямими $x = a, x = b$ (рис.26). Обертаючи цю фігуру навколо осі Ox, одержимо тіло у просторі. Об'єм отриманого тіла обертання і площа поверхні обертання обчислюються відповідно за формулами:

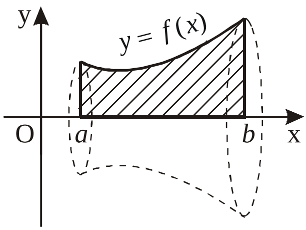

Рис. 26

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx , \tag{5.1}$$

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx . \tag{5.2}$$

Якщо крива, яка обмежує криволінійну трапецію зверху, задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$V=\pi\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}}\psi^2(t)\varphi'(t)dt\,, \qquad (5.3)$$

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt\,. \qquad (5.4)$$

Межі інтегрування у формулі (5.3) визначаються рівностями $\varphi(\tilde{\alpha})=a$ і $\varphi(\tilde{\beta})=b$ (можливі варіанти $\tilde{\alpha}=\alpha, \tilde{\beta}=\beta$ або $\tilde{\alpha}=\beta, \tilde{\beta}=\alpha$).

Приклад 1. Плоска фігура, яка обмежена лініями $y=x^3$, $y=0$, $x=1$ обертається навколо осі Ох. Обчислити: а) об'єм тіла обертання; б) площу поверхні обертання.

Розв'язання. а) Побудувавши фігуру (рис.20) і застосувавши формулу (5.1), отримуємо

$$V=\pi\int_0^1 x^6dx=\pi\left.\frac{x^7}{7}\right|_0^1=\frac{\pi}{7}\,.$$

б) Використовуючи формулу (5.2), дістаємо

$$S=2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx=2\pi\cdot\frac{1}{36}\int_0^1(1+9x^4)^{\frac{1}{2}}d(1+9x^4)=$$

$$=\frac{\pi}{27}(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{\pi(10\sqrt{10}-1)}{27}.$$

§ 4.6. Обчислення статичних моментів, моментів інерції та координат центра ваги

При розв'язанні багатьох задач механіки та фізики використовуються такі поняття як *статичні моменти, моменти інерції* та *центр ваги*. Наведемо далі методи обчислення вказаних величин для криволінійної трапеції та дуги плоскої кривої (розглядаються однорідні тіла з густиною $\rho = 1$).

Нехай задана дуга плоскої кривої $y = f(x)$, яка обмежена прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$. Статичні моменти дуги відносно координатних осей (позначаються через M_x, M_y), моменти інерції дуги (позначаються через I_x, I_y) та координати центра ваги (позначаються через $\bar{x}, \bar{y}$) обчислюються за формулами:

$$M_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, M_y = \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, \qquad (6.1)$$

$$I_x = \int_a^b f^2(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, I_y = \int_a^b x^2\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, \qquad (6.2)$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{l}, \bar{y} = \frac{M_x}{l}; l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, \qquad (6.3)$$

де l – довжина дуги.

Приклад 1. Знайти статичний момент дуги кривої $y = 2\sqrt{x}$ $(0 \le x \le 3)$ відносно осі Ох.

Розв'язання. Застосовуємо першу з формул (6.1):

$$f'(x) = \left(2\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}}, \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}};$$

$$M_x = \int_1^3 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}}dx = 2\int_1^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}dx = 2 \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^3 = \frac{8(4-\sqrt{2})}{3}.$$

Якщо дуга задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta$, то відповідні формули приймають вигляд:

$$M_x=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt,\ M_y=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt\,, \quad (6.4)$$

$$I_x=\int_{\alpha}^{\beta}\psi^2(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt,\ I_y=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt\,, \quad (6.5)$$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{l},\ \bar{y}=\frac{M_x}{l};\ l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt\,. \quad (6.6)$$

Приклад 2. Знайти момент інерції дуги кривої $x=\frac{1}{2}t^2$, $y=\frac{4}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}$ $(0\le t\le 2)$ відносно осі Oy.

Розв'язання. Використовуємо другу з формул (6.5):

$$\varphi'(t)=\left(\frac{1}{2}t^2\right)'=t,\ \psi'(t)=\left(\frac{4}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}\right)'=2(t+1)^{\frac{1}{2}}\,;$$

$$\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}=\sqrt{t^2+4t+4}=\sqrt{(t+2)^2}=t+2\,;$$

$$I_y=\int_0^2\left(\frac{1}{2}t^2\right)^2\cdot(t+2)dt=\frac{1}{4}\int_0^2(t^5+2t^4)dt=\frac{1}{4}\left(\frac{t^6}{6}+2\cdot\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=\frac{88}{15}\,.$$

Розглянемо тепер криволінійну трапецію, яка обмежена прямими $x=a, x=b\ (a<b)$, кривою $y=f(x)\ (f(x)\ge 0)$ і віссю Ox (рис. 19). Статичні моменти, моменти інерції та координати центра ваги вказаної фігури обчислюються за формулами:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx,\ M_y=\int_a^b xf(x)dx\,, \quad (6.7)$$

$$I_x=\frac{1}{3}\int_a^b f^3(x)dx,\ I_y=\int_a^b x^2f(x)dx\,, \quad (6.8)$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{S}, \bar{y} = \frac{M_x}{S}; S = \int_a^b f(x)dx, \tag{6.9}$$

де S – площа фігури.

Приклад 3. Знайти координати центра ваги плоскої фігури, яка обмежена дугою параболи $y = 2x - x^2$ та віссю Ох.

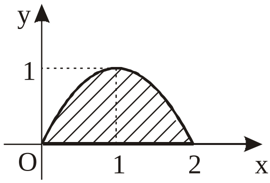

Рис. 27

Розв'язання. Так як фігура симетрична відносно прямої $x = 1$ (рис. 27), то $\bar{x} = 1$. Використовуючи формули (6.9), отримуємо:

$$S = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3};$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{15}; \bar{y} = \frac{M_x}{S} = \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Якщо дуга, яка обмежує криволінійну трапецію зверху, задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, то маємо:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)dt, M_y = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\psi(t)\varphi'(t)dt, \tag{6.10}$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta \psi^3(t)\varphi'(t)dt, I_y = \int_\alpha^\beta \varphi^2(t)\psi(t)\varphi'(t)dt, \tag{6.11}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{S}, \bar{y} = \frac{M_x}{S}; S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt. \tag{6.12}$$

Межі інтегрування у формулах (6.10) – (6.12) визначаються рівностями $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, тобто $t = \alpha$ відповідає крайнім лівим точкам криволінійної трапеції, а $t=\beta$ – крайнім правим.

Приклад 4. Знайти момент інерції I_y плоскої фігури, яка обмежена дугою кола $x=2\cos t,\ y=2\sin t\ (y\geq 0)$, прямими $x=-1$, $x=1$ і віссю Ох.

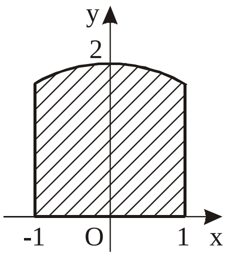

Рис. 28

Розв'язання. Оскільки крива, яка обмежує криволінійну трапецію зверху (рис. 28) задана параметричними рівняннями, то використовуємо другу з формул (6.11). Знайдемо спочатку межі інтегрування:

$$2\cos\alpha=-1,\ \cos\alpha=-1/2,\ \alpha=2\pi/3;$$

$$2\cos\beta=1,\ \cos\beta=1/2,\ \beta=\pi/3\,.$$

Визначаємо момент інерції:

$$I_y=\int\limits_{2\pi/3}^{\pi/3}4\cos^2 t\cdot 2\sin t\cdot(2\cos t)'dt=-4\int\limits_{2\pi/3}^{\pi/3}(2\sin t\cos t)^2dt=-4\int\limits_{2\pi/3}^{\pi/3}\sin^2 2tdt=$$

$$=-2\int\limits_{2\pi/3}^{\pi/3}(1-\cos 4t)dt=-2\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_{2\pi/3}^{\pi/3}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

§ 4.7. Обчислення роботи та деякі задачі механіки рідин

Нехай точка М під дією змінної сили $F(x)$ перемістилася вздовж осі Ox з положення $x=a$ у положення $x=b$, причому напрям сили збігається з напрямом переміщення. Робота А, витрачена на вказане переміщення, обчислюється за формулою

$$A=\int\limits_a^b F(x)dx\,. \tag{7.1}$$

У частинному випадку, коли $F(x)=F$ є сталою величиною, будемо мати

$$A=\int_a^b F dx = F\int_a^b dx = Fx\Big|_a^b = F(b-a),$$

тобто робота дорівнює добутку сили на пройдений шлях.

Приклад 1. Яку роботу потрібно витратити, щоб розтягнути пружину на 5 см, якщо сила 100 Н розтягує пружину на 1 см.

Розв'язання. Згідно з законом Гука $F=kx$, де x – розтягнення пружини в метрах, F – сила в ньютонах. Підставивши задані значення F і x, знайдемо коефіцієнт пропорційності k і запишемо закон Гука у явному вигляді:

$$100=k\cdot 0.01,\ k=10000,\ F=10000x.$$

Застосувавши формулу (6.1), маємо

$$A=\int_0^{0,05} 10000x dx = 5000x^2\Big|_0^{0,05} = 12,5 \text{ Дж.}$$

Наступний приклад ілюструє *метод інтегральних сум*, який часто застосовується в теорії визначеного інтеграла.

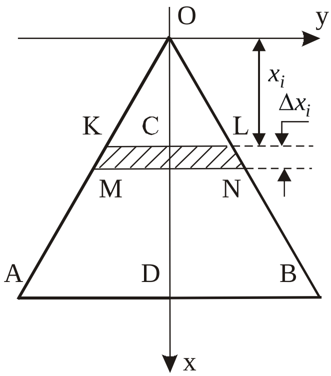

Рис. 29

Приклад 2. Пластина у вигляді правильного трикутника зі стороною a занурена вертикально у рідину, причому одна з вершин трикутника розміщена на поверхні рідини, а основа паралельна їй. Визначити величину сили тиску рідини на цю пластину.

Розв'язання. Систему координат Оху обираємо у відповідності з рисунком (рис. 29). Задану пластину розіб'ємо на n вузьких горизонтальних смуг, товщини яких позначимо через $\Delta x_i \ (i=1,2,\ldots,n)$. Розглянемо i-ту смугу (чотирикутник MKLN). Оскільки Δx_i є малою величиною, то площу $\Delta \mathrm{S_i}$, цієї смуги можна приблизно обчислити як площу прямокутника:

$$\Delta S_i \approx KL \cdot \Delta x_i = \frac{2x_i}{\sqrt{3}} \cdot \Delta x_i \ ; \ KL = 2CL = 2 \cdot OC \cdot tg30^0 = \frac{2x_i}{\sqrt{3}} \ .$$

Згідно з *законом Паскаля* тиск рідини P на площадку визначається формулою $P = \rho g h S$, де ρ – густина, g – прискорення вільного падіння, h – глибина занурення, S площа площадки. Знайдемо тиск на i-ту смугу (глибина занурення $h = x_i$):

$$P_i = \rho g x_i \Delta S_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \rho g x_i^2 \Delta x_i \ .$$

Просумувавши всі P_i, одержимо наближене значення сили тиску рідини на всю пластину:

$$P \approx \sum_{i=1}^{i=n} P_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{3}} \rho g x_i^2 \Delta x_i \ .$$

Нехай $\lambda = \max(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$. Здійснивши граничний перехід в останній рівності при $\lambda \to 0$, одержимо точну формулу (отримаємо границю інтегральної суми). Враховуючи, що $OD = OB \cdot \sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, можемо записати

$$P = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{3}} \rho g x_i^2 \Delta x_i = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \frac{2}{\sqrt{3}} \rho g x^2 dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \rho g \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{a^3 \rho g}{4} \ .$$

На наступних двох прикладах розглянемо метод, який по своїй суті подібний до методу інтегральних сум, але формально дещо відрізняється від нього.

Приклад 3. Поверхня ями, яка до країв наповнена водою, є поверхнею обертання дуги параболи $y=\sqrt{1-x}$ $(0\le x\le 1)$ навколо осі Ox (рис. 30). Знайти роботу, витрачену на викачування води з цієї ями.

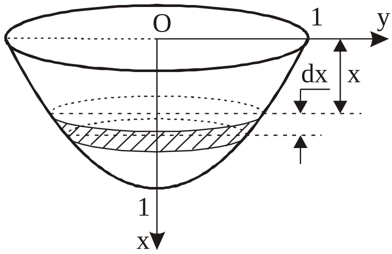

Рис. 30

Розв'язання. Двома площинами, перпендикулярними осі Ox, на глибіні x виділяємо елементарний шар води малої товщини dx. Враховуючи, що dx є малою величиною, об'єм dV вказаного елементарного шару з точністю до нескінченно малих більш високого порядку малості можна обчислити як об'єм циліндра з радіусом основи $\sqrt{1-x}$ і висотою dx:

$$dV=\pi\left(\sqrt{1-x}\right)^2 dx=\pi(1-x)dx\,.$$

Знайдемо масу dm елементарного шару:

$$dm=\rho dV=\rho\pi(1-x)dx\,.$$

Елементарна робота dA, яка витрачається на підняття виділеного шару на висоту x, дорівнює добутку сили тяжіння $F=gdm$ на пройдений шлях x, тобто

$$dA=g\rho\pi(1-x)xdx\,.$$

Проінтегрувавши останню рівність знайдемо роботу, яка витрачається на викачування всієї води ($\rho=1000$ кг/м^3, $g\approx 9{,}8$ м/с^2, $\pi\approx 3{,}14$) :

$$A=\int_0^1 g\rho\pi x(1-x)dx=g\rho\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1\approx 5128{,}7 \text{ Дж.}$$

Приклад 4. За який час вода, яка наповнює циліндричну посудину з площею основи $S = 100\,\text{см}^2$ і висотою $H = 20$ см, витече через отвір на дні площею $S_0 = 1\,\text{см}^2$.

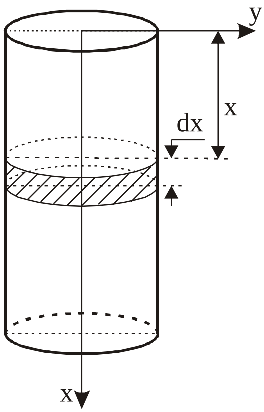

Рис. 31

Розв'язання. При розв'язанні цієї задачі використовується *закон Торічеллі*: швидкість стікання води з малого отвору на відстані h від вільної поверхні визначається формулою $v = \mu\sqrt{2gh}$, де $\mu \approx 0{,}6$, g – прискорення вільного падіння.

Нехай в деякий момент часу вільна поверхня води знаходиться на відстані x від верхнього краю посудини (рис. 31). Виділяємо елементарний шар води товщиною dx і об'ємом $dV = Sdx$. Якщо цей шар витікає за проміжок часу dt зі швидкістю стікання v, то очевидно, що повинна виконуватися рівність $dV = vS_0 dt$. Використовуючи формулу Торічеллі можемо записати (у нашому випадку відстань від вільної поверхні $h = H - x$)

$$dt = \frac{dV}{S_0 v} = \frac{Sdx}{S_0\mu\sqrt{2g(H-x)}}\,.$$

Обчислюємо час витікання всієї води (інтегруємо):

$$t = \int_0^H \frac{Sdx}{S_0\mu\sqrt{2g(H-x)}} = \frac{S}{S_0\mu\sqrt{2g}}\int_0^H (H-x)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= -\frac{S}{S_0\mu\sqrt{2g}}\cdot 2(H-x)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^H = \frac{S}{S_0\mu}\cdot\sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 33{,}7\text{ с.}$$

§ 4.8. Невласні інтеграли

Розглянемо спочатку *невласні інтеграли з нескінченими границями* (*невласні інтеграли першого роду*). Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;+\infty)$. Невласний інтеграл від цієї функції на півнескінченному інтервалі визначається наступним чином:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{\beta} f(x)dx, . \qquad (8.1)$$

Якщо границя у правій частині записаної формули існує, то кажуть, що невласний інтеграл *збігається*; якщо ж границя не існує, то інтеграл *розбігається*. Аналогічно для функції $f(x)$, яка неперервна на інтервалі $[-\infty;b)$, маємо

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{b} f(x)dx \, . \qquad (8.2)$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на R, то невласний інтеграл з нескінченними границями від цієї функції визначається так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (8.3)$$

де c – довільне число. Невласні інтеграли правої частини останньої рівності досліджуються за допомогою формул (8.2) і (8.1).

Приклад 1. Обчислити невласні інтеграли (або показати, що вони розбігаються): а) $\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2+1}$; б) $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

Розв'язання. а) Застосовуємо формулу (8.2):

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{1}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{\alpha\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_{\alpha}^{1}=$$

$$=\lim_{\alpha\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}\alpha\right)=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}.$$

б) Використовуючи (8.1), отримуємо

$$\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\beta\to+\infty}\int_{e}^{\beta}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\beta\to+\infty}\int_{e}^{\beta}(\ln x)^{-\frac{1}{3}}d\ln x=\lim_{\beta\to+\infty}\frac{3}{2}(\ln x)^{\frac{2}{3}}\Big|_{e}^{\beta}=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{\beta\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\ln^2\beta}-\sqrt[3]{\ln^2 e}\right)=\frac{3}{2}(\infty-1)=\infty.$$

Інтеграл розбігається.

Розглянемо тепер *невласні інтеграли від функцій, які мають точки розриву* (*невласні інтеграли другого роду*). Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b)$, а в точці $x=b$ вона терпить розрив або невизначена. Невласний інтеграл від цієї функції на проміжку $[a,b]$ визначається наступною рівністю

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\beta\to b-0}\int_{a}^{\beta}f(x)dx. \qquad (8.4)$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $(a;b]$, а в точці $x=a$ терпить розрив або невизначена, то

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\alpha\to a+0}\int_{\alpha}^{b}f(x)dx. \qquad (8.5)$$

У випадку, коли функція $f(x)$ терпить розрив у внутрішній точці $x=c$ проміжку $[a,b]$, невласний інтеграл визначається наступним чином

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \,. \qquad (8.6)$$

Приклад 2. Обчислити невласний інтеграл (або показати, що він розбігається) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Розв‘язання: Так як при $x = 1$ підінтегральна функція невизначена ($\ln 1 = 0$), то маємо невласний інтеграл. Застосовуємо формулу (8.5):

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\alpha \to 1+0} \int_\alpha^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\alpha \to 1+0} \int_\alpha^e (\ln x)^{-\frac{1}{2}} d\ln x = \lim_{\alpha \to 1+0} 2(\ln x)^{\frac{1}{2}}\Big|_\alpha^e =$$

$$= 2 \lim_{\alpha \to 1+0} \left(\sqrt{\ln e} - \sqrt{\ln \alpha}\right) = 2(1-0) = 2.$$

§ 4.9. Наближені обчислення визначеного інтеграла

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі $[a,b]$. У цьому випадку, як відомо, існує визначений інтеграл (існує границя інтегральної суми) $\int_a^b f(x)dx.$ Якщо первісна для функції $f(x)$ в елементарних функціях не виражається, то вказаний інтеграл обчислюється за допомогою однієї з наближених формул. Розглянемо далі *формулу трапецій* і *формулу Сімпсона*.

Розіб’ємо інтервал $[a,b]$ на n рівних частин точками поділу $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ і введемо позначення:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n);\ \ h = (b-a)/n.$$

Наближена *формула трапецій* має вигляд

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \qquad (9.1)$$

Якщо функція $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ невід'ємна, то формула

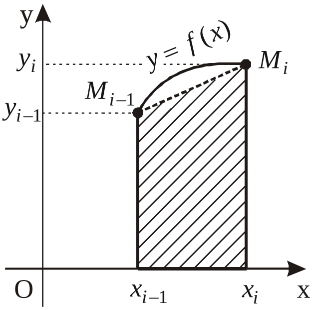

Рис. 32

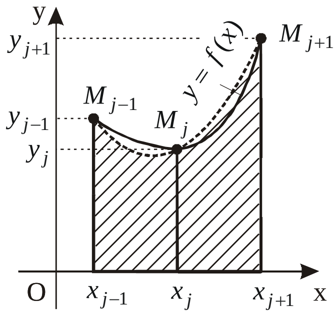

Рис. 33

(9.1) має просту *геометричну інтерпретацію*: на кожному проміжку $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1,2,\ldots,n$ інтеграл лівої частини вказаної формули дорівнює площі криволінійної трапеції, яка обмежена зверху дугою $M_{i-1}M_i$ кривої $y = f(x)$ (рис. 32), а відповідна складова правої частини дорівнює площі звичайної трапеції, яка отримана з вищезгаданої шляхом заміни верхньої межі прямолінійним відрізком $M_{i-1}M_i$.

Абсолютна похибка Δ формули (9.1) визначається співвідношеннями

$$\Delta \le \frac{k(b-a)^3}{12n^2}, \quad k = \max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|. \qquad (9.2)$$

Розіб'ємо тепер проміжок $[a,b]$ на *парне* число *n* рівних частин. Використовуючи прийняті вище позначення, можемо записати

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\big(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})\big). \qquad (9.3)$$

Формула (9.3) називається *формулою парабол* або *формулою Сімпсона*. *Геометричний зміст* формули (9.3) подібний до геометричного змісту формули (9.1). Різниця полягає лише у тому, що на кожному проміжку $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ $(j = 1,3,\ldots,n-1)$ дуга $M_{j-1}M_{j+1}$ кривої $y = f(x)$ (Рис. 33) замінюється дугою квадратичної параболи, яка проходить через точки M_{j-1}, M_j, M_{j+1}.

Формула Сімпсона є більш точною ніж формула трапецій. Абсолютна похибка Δ формули (9.3) визначається співвідношеннями

$$\Delta \le \frac{k(b-a)^5}{180n^4}, \quad k = \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|. \tag{9.4}$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_1^5 \frac{dx}{x^2}$ за формулою: а) Ньютона-Лейбніца; б) трапецій; в) Сімпсона. Знайти абсолютну та відносну похибки наближених методів.

Розв'язання. а) Знайдемо точне значення інтеграла:

$$I = \int_1^5 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^5 = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5} = 0{,}8\,.$$

б) Розіб'ємо відрізок $[1;5]$ на вісім рівних частин. Отже, $n = 8$, $h = (5-1)/8 = 0{,}5$. Так як для нашого прикладу $f(x) = 1/x^2$, то $y_i = 1/x_i^2$ $(i = 0,1,2,\ldots 8)$. Відповідні значення x_i і y_i представлені в наведеній нижче таблиці.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y_i	1	4/9	1/4	4/25	1/9	4/49	1/16	4/81	1/25

Застосовуємо формулу (9.1):

$$I_{mp} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{25}\right)+\frac{4}{9}+\frac{1}{4}+\frac{4}{25}+\frac{1}{9}+\frac{4}{49}+\frac{1}{16}+\frac{4}{81}\right)=0{,}8395\,.$$

Знайдемо абсолютну та відносну помилки:

$$\Delta = |I - I_{mp}| = |0{,}8 - 0{,}8395| = 0{,}0395;\ \delta = \left|\frac{\Delta}{I}\right|\cdot 100\% = \frac{0{,}0395}{0{,}8}\cdot 100\% = 4{,}9\%.$$

в) Обчислюємо інтеграл за формулою Сімпсона:

$$I_c \approx \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{25}+4\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{25}+\frac{4}{49}+\frac{4}{81}\right)+2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right)\right)=0{,}8048\,.$$

Визначаємо абсолютну та відносну помилки:

$$\Delta = |I - I_c| = |0{,}8 - 0{,}8048| = 0{,}0048;\ \delta = \left|\frac{\Delta}{I}\right|\cdot 100\% = \frac{0{,}0048}{0{,}8}\cdot 100\% = 0{,}6\%\,.$$

Як бачимо, формула Сімпсона справді дає більш точний результат ніж формула трапецій.

Оцінки похибок (9.2) і (9.4) показують, що точність обох методів збільшується при збільшенні числа n.

Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Диференціальне числення функції однієї змінної

***Завдання* 1.** Знайти похідні функцій, використовуючи означення похідної.

1. а) $y = x^2 - 15x$; б) $y = 8x^3 - 8x$.
2. а) $y = 2x^2 - 14x$; б) $y = 9x^3 - 7x$.
3. а) $y = 3x^2 - 13x$; б) $y = 10x^2 - 6x$.
4. а) $y = 4x^2 - 12x$; б) $y = 11x^3 - 5x$.
5. а) $y = 5x^2 - 11x$; б) $y = 12x^3 - 4x$.
6. а) $y = 6x^2 - 10x$; б) $y = 13x^3 - 3x$.
7. а) $y = 7x^2 - 9x$; б) $y = 14x^3 - 2x$.
8. а) $y = 8x^2 - 8x$; б) $y = 15x^3 - x$.
9. а) $y = 9x^2 - 7x$; б) $y = x - 15x^3$.
10. а) $y = 10x^2 - 6x$; б) $y = 2x - 14x^3$.
11. а) $y = 11x^2 - 5x$; б) $y = 3x - 13x^3$.
12. а) $y = 12x^2 - 4x$; б) $y = 4x - 12x^3$.
13. а) $y = 13x^2 - 3x$; б) $y = 5x - 11x^3$.
14. а) $y = 14x^2 - 2x$; б) $y = 6x - 10x^3$.
15. а) $y = 15x^2 - x$; б) $y = 7x - 9x^3$.
16. а) $y = x - 15x^2$; б) $y = 8x - 8x^3$.
17. а) $y = 2x - 14x^2$; б) $y = 9x - 7x^3$.
18. а) $y = 3x - 13x^2$; б) $y = 10x - 6x^3$.
19. а) $y = 4x - 12x^2$; б) $y = 11x - 5x^3$.
20. а) $y = 5x - 11x^2$; б) $y = 12x - 4x^3$.
21. а) $y = 6x - 10x^2$; б) $y = 13x - 3x^3$.
22. а) $y = 7x - 9x^2$; б) $y = 14x - 2x^3$.
23. а) $y = 8x - 8x^2$; б) $y = 15x - x^3$.

24. а) $y = 9x - 7x^2$; б) $y = x^3 - 15x$.

25. а) $y = 10x - 6x^2$; б) $y = 2x^3 - 14x$.

26. а) $y = 11x - 5x^2$; б) $y = 3x^3 - 13x$.

27. а) $y = 12x - 4x^2$; б) $y = 4x^3 - 12x$.

28. а) $y = 13x - 3x^2$; б) $y = 5x^3 - 11x$.

29. а) $y = 14x - 2x^2$; б) $y = 6x^3 - 10x$.

30. а) $y = 15x - x^2$; б) $y = 7x^3 - 9x$.

***Завдання* 2.** Знайти похідні першого порядку.

1. а) $y = x^3 - \dfrac{3}{x^2} + 2\sqrt[4]{x^3}$; б) $y = 5^x \ln x + \dfrac{x^4 + \sin x}{2 - \cos x}$;

   в) $y = \mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{ctg}^4(x^5 + 1)$; г) $y = \arcsin^3(x^4 \sin x)$.

2. а) $y = x^7 - \dfrac{5}{x^3} + 4\sqrt[3]{x^5}$; б) $y = e^x \log_4 x + \dfrac{x^6 + 2\cos x}{x^7 - 3\sin x}$;

   в) $y = 2\arccos^4 x - 4^{x^2+3}$; г) $y = \lg(x^4 + x\cos x)$.

3. а) $y = x^8 - \dfrac{5}{x} + 7\sqrt[6]{x^5}$; б) $y = \sin x \arccos x - \dfrac{x^3 + x}{e^x + 4}$;

   в) $y = \log_3(x^4 + 2x) - tg^3(x^2 - 1)$; г) $y = ctg^2(x + x^2 \sin x)$.

4. а) $y = x^5 - \dfrac{4}{x^2} + 3\sqrt[4]{x^5}$; б) $y = x^4 \,\mathrm{arcctg}\, x + \dfrac{\arcsin x}{x - \arccos x}$;

   в) $y = e^{x^4 + 5x} - \log_6^2(x^7 + 3x)$; г) $y = tg^9 \dfrac{1 - 2x}{3x + 1}$.

5. а) $y = x^3 + \dfrac{5}{x^7} - 6\sqrt[3]{x^7}$; б) $y = x^5 \,\mathrm{ctg}\, x - \dfrac{\mathrm{arctg}\, x}{x^3 - \sin x}$;

   в) $y = 3^{x^2 + x} - \ln^4(x^4 + 1)$; г) $y = \log_3 \dfrac{4x + 1}{2 - 5x}$.

6. а) $y = x^7 + \dfrac{9}{x^6} - 7\sqrt[3]{x^4}$; б) $y = \lg x \operatorname{tg} x + \dfrac{x^7 - e^x}{x^2 + 3}$;

в) $y = \operatorname{arcctg}(1 + x^2) + \arccos^3 x^2$; г) $y = 9^{x^2 + x^3 \sin x}$.

7. а) $y = x^6 - \dfrac{3}{x^2} + 5\sqrt[5]{x^2}$; б) $y = x^4 \log_3 x - \dfrac{1 + x^4}{2^x + x^2}$;

в) $y = e^{x^2 + 9x} - \sqrt{\ln\left(x^2 + 3\right)}$; г) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{7x + 1}{2 - 3x}$.

8. а) $y = x^7 + \dfrac{5}{x^4} - 6\sqrt[4]{x^7}$; б) $y = \sqrt{x} \sin x + \dfrac{x^2 - 2\cos x}{x^3 + 1}$;

в) $y = tg^4 x + \sqrt{\operatorname{ctg}(x^3 + 1)}$; г) $y = \log_5 \dfrac{7x + 2}{x^2 + 5}$.

9. а) $y = x^9 - \dfrac{4}{x^3} + 7\sqrt[6]{x^5}$; б) $y = \sqrt[3]{x} e^x + \dfrac{3 - 5\sin x}{\cos x + x^2}$;

в) $y = 7^{x^4 + 3x} - \operatorname{arctg}^7\left(x^5 + 4\right)$; г) $y = e^{\sin x + x^5 \cos x}$.

10. а) $y = 3x^2 - \dfrac{9}{x^5} + 2\sqrt[4]{x}$; б) $y = \sqrt{x^3} \arcsin x - \dfrac{x^4 + 9x}{x^2 + \operatorname{tg} x}$;

в) $y = 4\operatorname{ctg}^3 x + \sqrt{\operatorname{arctg} x^5}$; г) $y = \sin^5 \dfrac{4x + 1}{5 - 6x}$.

11. а) $y = 2x^3 + \dfrac{3}{x^4} - 9\sqrt[5]{x^3}$; б) $y = x^4 e^x - \dfrac{x^4 + 5}{\lg x + 2}$;

в) $y = 5^{x^4 - 7x} + \ln^5\left(x^7 + 3x\right)$; г) $y = \cos^3\left(1 + \sqrt{x} e^x\right)$.

12. а) $y = 5x^5 - \dfrac{2}{x^6} + 3\sqrt[8]{x^7}$; б) $y = \sqrt{x^9} \operatorname{tg} x + \dfrac{2x^3 - \lg x}{3 + 5x}$;

в) $y = e^{3x + x^4} - \log_4^5\left(2 + x^6\right)$; г) $y = \operatorname{tg}^4 \dfrac{6 - 7x}{8x - 5}$.

13. а) $y=3x^7+\dfrac{9}{x^8}-5\sqrt[9]{x^2}$; б) $y=x^5\arcsin x-\dfrac{arctgx}{1+x^2}$;

в) $y=2\sqrt{\sin x}+\operatorname{arcctg}^6 x^4$; г) $y=\log_3\left(x^2+2xe^x\right)$.

14. а) $y=6x^9-\dfrac{5}{x}+\sqrt{x^5}$; б) $y=x^8\sin x-\dfrac{2x^3+3\sin x}{3x^2-7\cos x}$;

в) $y=\arccos x^5-\ln^3\left(x^4+5\right)$; г) $y=3^{5x-\sqrt{x}\sin x}$.

15. а) $y=5x^2-\dfrac{8}{x^3}+\sqrt[3]{x}$; б) $y=x^5\operatorname{arctg} x+\dfrac{4x+e^x}{1+x^5}$;

в) $y=\sin^5 x-2\operatorname{tg}^7\left(x^9+5\right)$; г) $y=\log_8\dfrac{9x-3}{2+\cos x}$.

16. а) $y=5x^2+\dfrac{4}{x}+\sqrt[3]{x^4}$; б) $y=7^x\lg x-\dfrac{x^2-\cos x}{3+\sin x}$;

в) $y=ctg^8x+3tg^5\left(x^6+3\right)$; г) $y=\arccos^4\left(x^5\cos x\right)$.

17. а) $y=x^8-\dfrac{6}{x^4}+5\sqrt[5]{x^3}$; б) $y=5^x\log_2 x-\dfrac{x^7-3\sin x}{x^8+4\cos x}$;

в) $y=4\arcsin^6 x-e^{\sin^2 x}$; г) $y=\ln\left(x^6-4x^2\sin x\right)$.

18. а) $y=x^9-\dfrac{7}{x^2}+5\sqrt[5]{x^6}$; б) $y=\cos x\arcsin x+\dfrac{2x^2-x}{4^x+1}$;

в) $y=\log_5\left(x-3x^5\right)+ctg^4\left(x^3+1\right)$; г) $y=tg^5\left(x^2-x\cos x\right)$.

19. а) $y=x^6+\dfrac{5}{x^3}-4\sqrt[6]{x^7}$; б) $y=2x^5\operatorname{arcctg} x-\dfrac{\arccos x}{\arcsin x-x^2}$;

в) $y=3e^{x^5-4x}+\log_4^2\left(x^8-4x\right)$; г) $y=ctg^4\dfrac{2x+3}{4-5x}$.

20. а) $y=x^8-\dfrac{6}{x^5}+5\sqrt[4]{x^3}$; б) $y=\ln x\operatorname{ctg} x-\dfrac{x^5-3e^x}{2+x^4}$;

в) $y = arctg\left(x^2-4\right)+2\arcsin^5 x^3$; г) $y = 7^{2x^3-x^2\cos x}$.

21. а) $y = x^7+\frac{2}{x^4}-8\sqrt{x^5}$; б) $y = 2x^5\log_6 x+\frac{x^5+4}{5^x+x^5}$;

в) $y = 4e^{x^5-7x}+2\sqrt{\lg\left(x^3+4\right)}$; г) $y = \operatorname{arcctg}\frac{9x-4}{5-8x}$.

22. а) $y = 4x^8-\frac{3}{x^5}+5\sqrt[7]{x^4}$; б) $y = 2\sqrt{x}\cos x-\frac{x^3+3\sin x}{2-x^4}$;

в) $y = \operatorname{ctg}^4 x-4\sqrt{tg\left(x^4+2\right)}$; г) $y = \log_7\frac{8x+4}{x^2+6}$.

23. а) $y = x^{10}+\frac{5}{x^4}-6\sqrt[5]{x^6}$; б) $y = 5\sqrt[3]{x}3^x-\frac{3\cos x-5}{\sin x+x^3}$;

в) $y = 9^{x^5-4x}+2\operatorname{arcctg}^6\left(x^4+7\right)$; г) $y = e^{2\cos x-x^4\sin x}$.

24. а) $y = 4x^3+\frac{5}{x^6}-3\sqrt{x^7}$; б) $y = \sqrt[3]{x^2}\arccos x+\frac{2x^3+5x}{x^4-\operatorname{ctg} x}$;

в) $y = 5tg^5x-2\sqrt{\operatorname{arcctg} x^4}$; г) $y = \cos^4\frac{5x-2}{3-4x}$.

25. а) $y = 3x^4-\frac{2}{x^5}+4\sqrt[3]{x^5}$; б) $y = 4x^7e^x+\frac{x^3-4}{\ln x+2}$;

в) $y = 3^{x^2+5x}-\lg^6\left(x^9-4x\right)$; г) $y = \sin^4\left(5\sqrt[3]{x}e^x+3\right)$.

26. а) $y = 7x^6+\frac{3}{x^7}-4\sqrt[7]{x^8}$; б) $y = \sqrt{x^5}\operatorname{ctg} x-\frac{4x^4+2\ln x}{1-4x}$;

в) $y = 5e^{4x+x^5}+2\log_8^3\left(4+x^2\right)$; г) $y = \operatorname{ctg}^5\frac{4-9x}{5x-4}$.

27. а) $y = 6x^8-\frac{5}{x^9}+4\sqrt{x^9}$; б) $y = 4x^7\arccos x+\frac{2\operatorname{arcctg} x}{9+x^2}$;

в) $y = 3\sqrt{\cos x} - 4\operatorname{arctg}^5 x^6$; г) $y = \log_4\left(x^4 + 5x^3 e^x\right)$.

28. а) $y = 5x^{10} - \dfrac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2}$; б) $y = 2x^5 \cos x + \dfrac{3x^2 - 4\cos x}{5\sin x - 7x^3}$;

в) $y = \arcsin x^4 + 2\lg^4\left(x^3 + 9\right)$; г) $y = 5^{3x + \sqrt{x}\cos x}$.

29. а) $y = 6x^3 + \dfrac{9}{x^4} - 2\sqrt[3]{x^7}$; б) $y = x^4 \operatorname{arcctg} x - \dfrac{3e^x + 5}{2 - x^2}$;

в) $y = \cos^4 x + 3\operatorname{ctg}^9\left(x^7 + 3\right)$; г) $y = \log_5 \dfrac{2 + 3x}{1 + \sin x}$.

30. а) $y = 2x^7 - \dfrac{3}{x^5} - \sqrt[4]{x^5}$; б) $y = \sqrt{x}\ln x + \dfrac{x^2 + 3x}{x^3 - \cos x}$;

в) $y = \log_5(x^4 + \sqrt[3]{x}\sin x)$; г) $y = \sqrt{\arcsin(x^2 \cos x)}$.

Завдання **3.** Знайти похідні першого порядку від функцій, заданих неявно і в параметричній формі.

1. а) $x^4 + e^{3y} + \sin\left(x^2 + y^3\right) = 0$; б) $x = \operatorname{tg}^2 t^3, y = 2t^2 - \cos^3 t$.
2. а) $\operatorname{ctg}\left(3x + y^4\right) - \ln\left(x^2 - y^5\right) = 0$; б) $x = \sqrt{t} + 2^t, y = f \arccos^4 t$.
3. а) $\sqrt[3]{x^2 + y^5} - e^{3x} + 2\operatorname{tg} y = 0$; б) $x = \lg\left(2t^5 - 1\right), y = t^2 \sin t$.
4. а) $y^6 - \operatorname{tg}^3(5x + 2y) - 4^x = 0$; б) $x = \arcsin t^3, y = \sqrt{t} + \sin^7 t$.
5. а) $\cos^5 x - \lg y + 5\sqrt{x}y^4 = 0$; б) $x = \log_2(5t + 1), y = \sqrt{t}\cos^2 t$.
6. а) $\lg\left(2x^3 - 3y^2\right) + 2\sqrt{x} + 3y^5 = 0$; б) $x = \operatorname{arctg}^2 t, y = e^{3t} - t\operatorname{ctg} t$.
7. а) $\sqrt[5]{y^3} + x^4 \sin y - 4\sqrt{5x + 6y} = 0$; б) $x = 3^{2t} + 2t^4, y = \ln^2\left(t^4 + 1\right)$.
8. а) $5^x - 3\sqrt{y + 1} + 2\cos\left(y^2 - 3x\right) = 0$; б) $x = \operatorname{arctg}^4 t, y = \sqrt{t}\lg(2t - 1)$.

9. а) $\mathrm{ctg}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}\right)+5x^5-e^{4y}=0$; б) $x=7^{4t}-t, y=\log_3\left(2t^4+4\right)$

10. а) $y^5\sin^3 x+\sqrt{x^4+5y^2}=0$; б) $x=\arcsin t^3, y=2\sqrt{1+t^2}$.

11. а) $9^{3x+4y}+2\sin^5 x+x\sqrt{y}=0$; б) $x=2\sqrt[6]{t}+3t, y=\lg^2\left(t^4+3\right)$.

12. а) $2y^7+\arccos^3 x-\sqrt{5x+3y}=0$; б) $x=\log_7(5t+1), y=t^4\sin t$.

13. а) $5\cos x-\sin^3(xy)+\sqrt[4]{y}=0$; б) $x=\sqrt{t}\,\lg t, y=3\,\mathrm{arcctg}^3 t$.

14. а) $\arcsin\left(x^3-2y^2\right)+3\sqrt{x}y=0$; б) $x=3^{2t+1}, y=t^2\ln^3 t$.

15. а) $2\log_5\left(4y^2+x^3\right)-3x+5\sqrt{y}=0$; б) $x=\arcsin^4 t, y=2\sqrt{t}+\cos^8 t$.

16. а) $e^{5y-x}+3\,\mathrm{tg}\,x+x\ln y=0$; б) $x=3t\,\mathrm{arctg}\,t^2, y=\lg\left(t^4+9\right)$.

17. а) $2x^5-e^{4y}-3\cos\left(x^4+2y^2\right)=0$; б) $x=4\,\mathrm{ctg}^3 t^2, y=3t^3+2\sin^5 t$.

18. а) $3\,\mathrm{tg}\,t\left(x^4+5y\right)+\lg\left(x^5-y^2\right)=0$; б) $x=\sqrt[3]{t^2}+3^t, y=2\arcsin^3 t$.

19. а) $\sqrt[4]{x^5+y^2}-2e^{6x}+3ctgy=0$; б) $x=\ln\left(3t^4+1\right), y=t^3\cos t$.

20. а) $6y^5+5\,\mathrm{tg}^2(7x+4y)-5^x=0$; б) $x=\arccos t^5, y=\sqrt[4]{t}-\sin^6 t$.

21. а) $5\sin^4 x+\ln y+3\sqrt{y}x^3=0$; б) $x=\log_5(3t+1), y=t^2\sqrt{\sin t}$.

22. а) $2\ln\left(3x^2+5y^4\right)-3\sqrt{y}+5x^4=0$; б) $x=\mathrm{arcctg}^9 t, y=t^2\,\mathrm{tg}\,t$.

23. а) $\sqrt[4]{y^5}-3x^3\cos y+5\sqrt{3x^3+4y^5}=0$;б) $x=2^{3t}+5t^3, y=\lg^3\left(t^2+4\right)$.

24. а) $3^x+2\sqrt{y+4}-\sin\left(x^2+3y^3\right)=0$; б) $x=\mathrm{arcctg}\,t^5, y=t^5\ln(5t+1)$.

25. а) $2tg\left(\sqrt{y}-3\sqrt[5]{x}\right)-4x^4+2e^{5y}=0$; б) $x=4^{7t}+2t, y=\log_2\left(3t^3+8\right)$.

26. а) $2y^7\cos^2 x-5\sqrt{y^4+x^3}=0$; б) $x=\arccos t^4, y=3\sqrt{3+4t^2}$.

27. а) $7^{4x-3y}+5\cos^4 x+\sqrt{x}y^3=0$; б) $x=3\sqrt[5]{t^2}-4t, y=\ln^3\left(t^5+2\right)$.

28. а) $3y^8+4\arcsin^2 x-5\sqrt{3x+5y}=0$; б) $x=2\sin t^2,\ y=\lg^3\left(t^2+3\right)$.

29. а) $3\sin x+5\cos^2(xy)-2\sqrt[3]{y}=0$; б) $x=t^2\ln t,\ y=9\,\mathrm{arctg}^4\, t$.

30. а) $\arccos\left(x^2+y^5\right)+2\sqrt{y}x^4=0$; б) $x=5^{4t},\ y=\sqrt[3]{t^2}\lg^5 t$.

***Завдання* 4.** Знайти похідні.

1. а) $y=\left(x^3+2\right)^{4\sin x}$; б) $y=(\ln x+5)^{\sqrt{x}-3x}$.

2. а) $y=\left(2x^4-\sqrt{x}\right)^{\cos 2x}$; б) $y=\left(\mathrm{tg}^2 x-1\right)^{x^3+5x}$.

3. а) $y=\left(3x^5-\sqrt[3]{x}\right)^{\mathrm{tg}\,4x}$; б) $y=\left(e^{2x}-2\sqrt{x}\right)^{x-4x^4}$.

4. а) $y=\left(4x^6-3x\right)^{2\,\mathrm{ctg}\,x}$; б) $y=(\arcsin x+x)^{5x^2+3x}$.

5. а) $y=(5x^7+2x^2)^{\arcsin x}$; б) $y=\left(3^x+2x^4\right)^{2x^2+3\sqrt{x}}$.

6. а) $y=(6x^8-5x^4)^{\arccos 2x}$; б) $y=\left(2e^{3x}+x\right)^{x^4+6x^2}$.

7. а) $y=(7x^9+4x^3)^{3\,\mathrm{arctg}\,x}$; б) $y=\left(4\lg x+3\sqrt{x}\right)^{x^5+3x^2}$.

8. а) $y=(8x^{10}-7x^7)^{\mathrm{arcctg}\,4x}$; б) $y=\left(\ln x-2x^3\right)^{3\sqrt{x}+x^2}$.

9. а) $y=(9x^{11}+2x^3)^{5\ln x}$; б) $y=\left(\sin 3x+x^2\right)^{2x-x^3}$.

10. а) $y=(10x^9-3x)^{\lg 4x}$; б) $y=\left(\cos 5x-2\sqrt{x}\right)^{x^4+1}$.

11. а) $y=(x^5-2\sqrt[3]{x})^{3\sin x}$; б) $y=\left(5^x+4x\right)^{2-3x}$.

12. а) $y=(2x^6+7x)^{\cos 3x}$; б) $y=\left(4e^{2x}-\sqrt[3]{x}\right)^{2x^3+x}$.

13. а) $y=(3x^7-5x^2)^{4\,\mathrm{tg}\,x}$; б) $y=(\arccos x+2)^{\sqrt{x}+3x}$.

14. а) $y=(4x^8+3\sqrt[4]{x})^{\mathrm{ctg}\,5x}$;   б) $y=(3x+\arcsin x)^{2x^6}$.

15. а) $y=(5x^9-2x^4)^{\arcsin 9x}$;   б) $y=(2\ln x+x^2)^{3x+1}$.

16. а) $y=(6x^{10}+2\sqrt[5]{x})^{5\arccos x}$;   б) $y=(\sqrt{x}-5\lg x)^{x^4+3x}$.

17. а) $y=(7x-5\sqrt{x})^{\mathrm{arctg}\,4x}$;   б) $y=(2\sin 6x+7)^{4x-5}$.

18. а) $y=(8x^2+3x)^{4\,\mathrm{arctg}\,x}$;   б) $y=(9x+\cos 3x)^{x^3-x}$.

19. а) $y=(9x^3-5x)^{4\ln x}$;   б) $y=(3tgx-8x)^{2x+7}$.

20. а) $y=(10x^4-\sqrt[6]{x})^{\lg 5x}$;   б) $y=(5x^4+ctgx)^{x^5-\sqrt{x}}$.

21. а) $y=(x^5+6x^3)^{4\sin x}$;   б) $y=(\arccos x-2\sqrt{x})^{5x+x^2}$.

22. а) $y=(2x^6-\sqrt[3]{x})^{\cos 8x}$;   б) $y=(4x-2\arcsin x)^{x^3-8x}$;

23. а) $y=(3x^7+7x^3)^{5tgx}$;   б) $y=(\mathrm{arcctg}\,x+x^6)^{\sqrt{x}+4x}$.

24. а) $y=(4x^8-\sqrt[4]{x})^{ctg3x}$;   б) $y=(2x-3\,\mathrm{arctg}\,x)^{x^2+5x^5}$.

25. а) $y=(5x^9+3x^2)^{7\arcsin x}$;   б) $y=(7^x+2\sqrt{x})^{3x^4+x}$.

26. а) $y=(6x-\sqrt[5]{x})^{\arccos 9x}$;   б) $y=(x^3+e^x)^{x^5-3x^4}$.

27. а) $y=(7x^2+5x)^{4\,\mathrm{arctg}\,x}$;   б) $y=(2\lg x+3)^{2x-\sqrt{x}}$.

28. а) $y=(8x^3+3\sqrt[3]{x})^{\mathrm{arctg}\,5x}$;   б) $y=(9x+2\lg x)^{x^4+4x}$.

29. а) $y=(9x^4-7x)^{\lg x}$;   б) $y=(x^2+3\sin x)^{4x^5+x}$.

30. а) $y=(10x^5+\sqrt[8]{x})^{\lg 3x}$;   б) $y=(7\cos 8x+2x)^{3x^8-5x}$.

Завдання **5.** Знайти похідні другого порядку.

1. а) $y = 4e^{5x} - 3\sin^2 x$; б) $x = 5\sqrt{t} + \cos t, y = \arcsin t$.
2. а) $y = 2\cos^3 x + 5^{4x}$; б) $x = 3t^4 - 4\sin t, y = \arccos t$.
3. а) $y = \log_4\left(x^4 + 1\right) + 2\sqrt{x}$; б) $x = \sqrt[3]{t} - 5tgt, y = \text{arcctg}\, t$.
4. а) $y = 8x^3 + 3\ln^4 x$; б) $x = 2ctgt + 9, y = \text{arctg}\, t$.
5. а) $y = 3\arcsin\left(x^4 + 5\right) - e^{2x}$; б) $x = 2\,\text{tg}\,t, y = 4t^3 + 3^{4t}$.
6. а) $y = 5\arccos^4 x + 3\sqrt[3]{x^2}$; б) $x = \log_5 t, y = \sqrt{t} + 2e^{3t}$.
7. а) $y = 6\,\text{arctg}\left(1 - x^3\right) + 5x$; б) $x = 4\ln t, y = 2\sin t + \sqrt{t}$.
8. а) $y = 4x^4 - 3arcctg^5 x$; б) $x = 4^{\sin t}, y = t^5 + 5\sqrt[3]{t}$.
9. а) $y = e^{\cos t} - 5x^7$; б) $x = 3\lg t, y = 2tgt + 3t^4$.
10. а) $y = 4\sqrt[5]{x} - 5^{\text{tg}\,x}$; б) $x = \arcsin t, y = 9t^2 + 2^t$.
11. а) $y = \log_5\left(x^3 + 5\right) - 4x^5$; б) $x = \arccos t, y = 3t^4 - 2\cos t$.
12. а) $y = \log_8^5 x - 2\sqrt[6]{x}$; б) $x = \text{arctg}\, t, y = 2\ln t + t^5$.
13. а) $y = 5x^6 + 3\ln\left(x^5 + 5\right)$; б) $x = \text{arcctg}\, t, y = 5\lg t - 4\sqrt{t}$.
14. а) $y = 3\lg^5 x - 2x^9$; б) $x = \arcsin t, y = 7t^2 - \ln t$.
15. а) $y = 5^{\sin x} + 2\sqrt[5]{x}$; б) $x = \arcsin t, y = 7t^2 - \ln t$.
16. а) $y = \cos\left(x^3 - x\right) - 3x$; б) $x = \sqrt{t} + 7\,\text{ctg}\,t, y = 2\log_4 t$.
17. а) $y = 2\,\text{tg}^3 x - 5e^{4x}$; б) $x = 3\sin t - 4\sqrt[3]{t}, y = \text{arctg}\, t$.
18. а) $y = 4^{5x} - 3\,\text{ctg}^2 x$; б) $x = 7\cos t - 6t^3, y = \text{arcctg}\, t$.
19. а) $y = 3\sqrt[3]{x} + 2\log_5(x^2 + 2)$; б) $x = 4\,\text{ctg}\,t + \sqrt{t}, y = \arccos t$.

20. а) $y = 5\lg^4 x - 7x^2$; б) $x = 8t + 3\operatorname{tg} t, y = \arcsin t$.

21. а) $y = 2e^{3x} + 5\arccos x^3$; б) $x = 3\operatorname{ctg} t, y = 4^{6t} + 5t^2$.

22. а) $y = 5\sqrt[4]{x^3} + 2\arcsin^5 x$; б) $x = 4\log_9 t, y = 5e^{2t} + t^4$.

23. а) $y = 6x^2 - 5\operatorname{arcctg}\left(x^4 + 4\right)$; б) $x = 5\lg t, y = \sqrt[5]{t} - 3\cos t$.

24. а) $y = 2\operatorname{arctg}^7 x + 9x^2$; б) $x = 5^{\cos t}, y = 7\sqrt[4]{t} + 2t^4$.

25. а) $y = 3x^5 + 2e^{\sin x}$; б) $x = 6\lg t, y = 5t^3 - 8\operatorname{ctg} t$.

26. а) $y = 4^{\operatorname{ctg} x} - 2x^6$; б) $x = 2\arccos t + \sqrt{t}, y = 4t + 1$.

27. а) $y = 8\log_4(2 + x^4) - 7x^5$; б) $x = 3\arcsin t + t^2, y = 2 - 5t$.

28. а) $y = \log_3^8 x + 4x^9$; б) $x = 3\operatorname{arcctg} t - 2\sqrt{t}, y = 3^{2t}$;

29. а) $y = 2\lg\left(x^4 + 1\right) - 6\sqrt[6]{x}$; б) $x = 5\operatorname{arctg} t + 2t, y = e^{5t}$.

30. а) $y = 9x^3 - 5\ln^2 x$; б) $x = 4^{\sin t} + t^4, y = 2\operatorname{tg} t$.

***Завдання* 6.** Знайти диференціал функції і наближено обчислити її значення у заданій точці *x*.

1. $y = \arcsin\left(x^2 - 1\right), x = 0{,}96$.

2. $y = \sqrt{x^3 + 1}, x = 2{,}05$.

3. $y = \arccos\left(9 - x^2\right), x = 2{,}94$.

4. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2}, x = 5{,}05$.

5. $y = \operatorname{arctg}\left(3x^2 - 26\right), x = 2{,}96$.

6. $y = \sqrt[4]{x^2 + 7}, x = 3{,}03$.

7. $y = \operatorname{arcctg}\left(17 - x^2\right), x = 3{,}98$.

8. $y = \ln\left(x^3 - 7\right), x = 2{,}06$.

9. $y = \arcsin\left(x^2 - 1\right), x = 0{,}96$.

10. $y = \operatorname{arctg}\left(x^5 + 5x\right), x = 0{,}04$.

11. $y = e^{x^2 - 5x}, x = 4{,}97$.

12. $y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right), x = 0{,}02$.

13. $y=e^{\sin 2x}, x=-0{,}06$.

14. $y=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-2x\right), x=0{,}05$.

15. $y=\mathrm{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{6}\right), x=-0{,}04$.

16. $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}+4x\right), x=0{,}03$.

17. $y=\sqrt{x^3+3x^2+10}, x=2{,}98$.

18. $y=\arcsin\left(x^4-x^3\right), x=1{,}06$.

19. $y=\sqrt[3]{3x^3+5x}, x=0{,}95$.

20. $y=\arccos\left(x^3-x^2\right), x=1{,}04$.

21. $y=\sqrt[4]{3x^2+x+1}, x=4{,}97$.

22. $y=\mathrm{arctg}\left(4x^3-3x\right), x=1{,}02$.

23. $y=e^{x^4-5x}, x=-0{,}06$.

24. $y=\mathrm{arcctg}\left(x^4-15\right), x=2{,}05$.

25. $y=\mathrm{arctg}\left(x^2-3x\right), x=2{,}94$.

26. $y=\ln\left(x^2-15\right), x=4{,}05$

27. $y=\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right), x=-0{,}04$.

28. $y=\mathrm{arcctg}\left(x^5-x^4\right), x=1{,}03$.

29. $y=e^{\sin 5x}, x=-0{,}02$.

30. $y=\mathrm{tg}\left(3x+\frac{\pi}{3}\right), x=0{,}06$.

***Завдання* 7.** Записати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=f(x)$ в точці з абсцисою x_0.

1. $y=x^3-2x, x_0=1$.

2. $y=\sqrt{x^3+2x+4}, x_0=0$.

3. $y=\sin^2 x, x_0=\frac{\pi}{6}$.

4. $y=\cos^2 x, x_0=\frac{\pi}{3}$.

5. $y=e^{x^2+3x}, x_0=0$.

6. $y=\lg\left(3x^2+2x+10\right), x_0=0$.

7. $y=(2x-3)^5, x_0=2$.

8. $y=\sqrt[3]{x^2+3x+4}, x_0=1$.

9. $y=tg^2 x, x_0=\frac{\pi}{4}$.

10. $y=ctg^2 x, x_0=\frac{\pi}{4}$.

11. $y=2^{x^2+x}, x_0=1$.

12. $y=\log_4\left(x^2+3x+4\right), x_0=0$.

13. $y=(3x-7)^4, x_0=3$.

14. $y=\sqrt[4]{2x^2-x+1}, x_0=3$.

15. $y=\mathrm{arctg}^2\, x, x_0=1$.

16. $y=arctg^2 x, x_0=1$.

17. $y=\arcsin^2 x, x_0=\frac{1}{2}$.

18. $y=\arccos^2 x, x_0=\frac{1}{2}$.

19. $y=(5x-4)^4, x_0=1$.

20. $y=\sqrt{3x^3+1}, x_0=2$.

21. $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right), x_0=0$.

22. $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right), x_0=0$.

23. $y=e^{x^3-2x+1}, x_0=1$.

24. $y=\log_2\left(x^2-2x-1\right), x_0=3$.

25. $y=\mathrm{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right), x_0=0$.

26. $y=\mathrm{ctg}\left(4x+\frac{\pi}{4}\right), x_0=0$.

27. $y=\sqrt[3]{3x^2+x+13}, x_0=2$.

28. $y=\sqrt[4]{x^3+x^2+1}, x_0=4$.

29. $y=(2-3x)^5, x_0=1$.

30. $y=e^{2x^3-3x-5}, x_0=1$.

***Завдання* 8.** Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x^2+5x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-5x-1}{\sin^2 3x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(2x+\frac{\pi}{2})}{\sqrt{x^2+4x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln(x^2+3x)$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(7x+1)}{x^2+3x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{tg2x-2x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{\sin x-1}{\cos^3 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)ctgx$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}6x}{\sqrt{2x^2+7x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x^2})$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg(4x+\frac{\pi}{2})}{\sqrt{x^3+8x}}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{\cos x}-\cos x-1}{\cos^2 x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin^3 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{x^2}}{\operatorname{arctg}x^2}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x-\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}(x^2+1)e^{-3x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(3x-5)}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{\cos x-1}\right)$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lg(4x-3)}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x+x-\pi}{(x-\pi)^2}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{3x+1}}{2x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{\sin\pi x+\pi x-\pi}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2^{4x+3}}{9x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{\ln(x+1)}\right)$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x^2+5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2+\sin x-x}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x^3-3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+3x+1)-3x}{\sin^2 x}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^3 x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x^2-5x+3}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^3 x-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{4x}+3x}{2x+e^{5x}}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{3x}-3x\ln 4-1}{\sin^2 5x}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-e^{-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{e^{4x}-4x-1}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+4x}{\sin x+5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x-\operatorname{tg}5x}{\sin 4x-4x}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3}{\ln(3x+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x\lg(5x^2+x)$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-2^{3x}}{\arcsin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\ln(1-\frac{\pi}{2}+x)\operatorname{tg}x$

22. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{5^x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(3\operatorname{tg}x-\frac{1}{x-\pi/2}\right)$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln(3x^2-2)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-\sin x-1}{\sin^2 x}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{\lg(x^2-3)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-xe^x}{x\operatorname{arctg}x}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{10x+3}{e^{5x}+4x}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{e^{\cos x}-\cos x-1}{\cos^2 x}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3-7x}{5x+3^x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin x}-\frac{5}{x^2}\right)$.

27. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2^{3x}}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 5x}{\sin 6x-6x}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2^x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos \pi x+x}{x^3-x^2-x+1}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\log_2 x-1}{x^2-8x+12}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4}{\ln(x+1)}-\frac{3}{x^3}\right)$.

30. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-4x}{\arcsin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\operatorname{arctg}x}{\sin x+x^3-x}$.

***Завдання* 9.** Дослідити функцію і побудувати її графік.

1. $y=\dfrac{x^4}{2x^2-1}$.
2. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$.
3. $y=\dfrac{x^4}{\left(x^2-4\right)^2}$.
4. $y=\dfrac{x}{x^2+4}$.
5. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-9}$.
6. $y=\dfrac{x^2}{x-3}$.
7. $y=\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)^2$.
8. $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$.
9. $y=\dfrac{2x^3-1}{x^3}$.
10. $y=\dfrac{x^3}{x^3-8}$.
11. $y=\dfrac{x^4}{x^2-4}$.
12. $y=\dfrac{x^4+3}{x^3}$.
13. $y=\left(\dfrac{x^2}{x^2+9}\right)^2$.
14. $y=\dfrac{x}{x^2+3}$.
15. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+12}$.
16. $y=\dfrac{x^2}{2x+5}$.
17. $y=\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^2$.
18. $y=\dfrac{x^3-4}{x^2}$.
19. $y=\dfrac{4-x^2}{x^3}$.
20. $y=\dfrac{x^3}{x^3+2}$.
21. $y=\dfrac{x^4}{3-x^2}$.
22. $y=\dfrac{16+3x^4}{x^3}$.
23. $y=\left(\dfrac{x^2}{9-x^2}\right)^2$.
24. $y=\dfrac{x}{x^2-9}$.
25. $y=\dfrac{x^2-4}{9-x^2}$.
26. $y=\dfrac{x^2}{3-2x}$.
27. $y=\left(\dfrac{1-2x}{4+x}\right)^2$.
28. $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$.
29. $y=\dfrac{4-3x^2}{x^3}$.
30. $y=\dfrac{x^3}{8-x^3}$.

Інтегральне числення

***Завдання* 10.** Знайти інтеграли, користуючись таблицею інтегралів і найпростішими правилами інтегрування.

1. а) $\int\left(\frac{3}{\cos^2 x}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+5^x\right)dx$; б) $\int\left(x^5-\frac{3}{x^4}-4x\sqrt{x}\right)dx$;

в) $\int(\sin(3x+1)+2e^{5x})dx$; г) $\int\left(\frac{2}{4+9x^2}-(1-3x)^5\right)dx$;

д) $\int 3x^2e^{x^3}dx$; е) $\int\frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$.

2. а) $\int\left(\frac{4}{x^2-16}+\frac{3}{\sin^2 x}-3^x\right)dx$; б) $\int\left(x^3-x^2\sqrt[4]{x^3}+\frac{2}{x^7}\right)dx$;

в) $\int\left(\cos(1-2x)+(5x+1)^9\right)dx$; г) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}+3e^{2x+1}\right)dx$;

д) $\int 4x^3\sin x^4dx$; е) $\int\left(x^2e^{x^3+1}+\frac{\ln^2 x}{x}\right)dx$.

3. а) $\int\left(\frac{2}{x^2+3}-\frac{5}{\sin^2 x}+\sin x\right)dx$; б) $\int\left(\left(2+\sqrt{x}\right)^3+\frac{1}{x^4}\right)dx$;

в) $\int(\cos(1-3x)+2^{5x})dx$; г) $\int\left(\frac{2}{9+4x^2}-\frac{5}{\cos^2 3x}\right)dx$;

д) $\int 5x^4\sin x^5dx$; е) $\int\left(x(5x^2+2)^8-\frac{\mathrm{tg}^5 x}{\cos^2 x}\right)dx$.

4. а) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{2}{\sin^2 x}+7^x\right)dx$; б) $\int\left(3x^2-x\sqrt[4]{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx$;

в) $\int\left(e^{4x+1}+\frac{3}{\cos^2 3x}\right)dx$; г) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{2-9x^2}}+\sin(1-5x)\right)dx$;

д) $\int 7x^6\left(3+x^7\right)^5 dx$; е) $\int\left(x^2\cos x^3+\frac{3}{x\ln^5 x}\right)dx$.

5. а) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}+\frac{3}{\cos^2 x}+e^x\right)dx$; б) $\int\left(\left(2+\sqrt[3]{x}\right)^2+\frac{2}{x^5}\right)dx$;

в) $\int\left((3+5x)^9-4^{1-2x}\right)dx$; г) $\int\left(\frac{2}{1+9x^2}-\frac{3}{2-4x}\right)dx$;

д) $\int 6x^5\sin\left(x^6+5\right)dx$; е) $\int\left(\frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}+\frac{ctg^6 x}{\sin^2 x}\right)dx$.

6. а) $\int\left(\frac{2}{x}-3\sin x+2*5^x\right)dx$; б) $\int\left(x^3-\sqrt{x^3}+\frac{4}{x^9}\right)dx$;

в) $\int\left(e^{3x-1}+\frac{3}{\sin^2(1-2x)}\right)dx$; г) $\int\left(\frac{3}{5+16x^2}-\cos(5x+3)\right)dx$;

д) $\int 3x^2 e^{x^3}dx$; е) $\int\left(\frac{x}{5x^2-4}+\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)dx$.

7. а) $\int\left(2\cos x-\frac{2}{\sin^2 x}+4e^x\right)dx$; б) $\int\left(\left(3-\sqrt{x}\right)^3+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$;

в) $\int\left(\frac{4}{3x+2}-\sin(1-4x)\right)dx$; г) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{9x^2+5}}-4^{1-3x}\right)dx$;

д) $\int\left(5x^4\left(3+x^5\right)^7\right)dx$; е) $\int\left(\frac{3}{x\ln^5 x}+\frac{x^2}{\cos^2 x^3}\right)dx$.

8. а) $\int\left(\frac{1}{4+x^2}-3e^x+\frac{4}{x}\right)dx$; б) $\int\left(\left(2x^2+1\right)^3-\frac{4}{x^5}\right)dx$;

в) $\int\left(\sin(3x+1)-3(1-4x)^8\right)dx$; г) $\int\left(\frac{5}{4x^2-9}-3^{2-5x}\right)dx$;

д) $\int 7x^6\cos x^7 dx$; е) $\int\left(\frac{x^4}{\sin^2\left(1+2x^5\right)}-\frac{\mathrm{tg}^3 x}{\cos^2 x}\right)dx$.

9. а) $\int\left(3\sin x+4^x-\frac{2}{x^2+1}\right)dx$; б) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$;

в) $\int\left(\frac{2}{\cos^2(4x+1)}-\frac{3}{1-5x}\right)dx$; г) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-25x^2}}+(3+4x)^4\right)dx$;

д) $\int\frac{5x^4}{3+x^2}dx$; е) $\int\left(x^3\cos\left(1-2x^4\right)+\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{\sin^2 x}\right)dx$.

10. а) $\int\left(5*3^x-2\cos x+\frac{4}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx$; б) $\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^3 dx$;

в) $\int\left(e^{2x+3}-\frac{3}{\sin^2(1-2x)}\right)dx$; г) $\int\left(3\sin x+4^x-\frac{2}{x^2+1}\right)dx$;

д) $\int 9x^8\left(1+x^9\right)^5 dx$; е) $\int\left(\frac{2^x}{3+2^x}+\frac{x^3}{\cos^2\left(x^4+1\right)}\right)dx$.

11. а) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2}{\sin^2 x}-4^x\right)dx$; б) $\int\left(\frac{5}{x^3}-x^6+2x^2\cdot\sqrt{x}\right)dx$;

в) $\int\left(\cos(4x-3)+3e^{3x}\right)dx$; г) $\int\left(\frac{5}{4x^2+9}+(5x-3)^4\right)dx$;

д) $\int 4x^3e^x dx$; е) $\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$.

12. а) $\int\left(5^x-\frac{2}{x^4-4}+\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$; б) $\int\left(x\cdot\sqrt{x}+2x^4+\frac{3}{x^6}\right)dx$;

в) $\int\left((2-7x)^5+3\sin(3+4x)\right)dx$; г) $\int\left(e^{2+5x}-\frac{2}{\sqrt{1-9x^2}}\right)dx$;

д) $\int 5x^4\cos x^5dx$; е) $\int\left(x^3e^{x^4}-\frac{2}{x\ln^4 x}\right)$.

13. а) $\int\left(\frac{3}{\cos^2 x}+\frac{4}{5+x^2}-5\sin x\right)dx$; б) $\int\left(\left(3-\sqrt[3]{x}\right)^2-\frac{3}{x^2}\right)dx$;

в) $\int\left(5^{2x}-3\sin(2-5x)\right)dx$; г) $\int\left(\frac{3}{\sin^2 4x}+\frac{7}{4+9x^2}\right)dx$;

д) $\int 6x^5\cos x^6dx$; е) $\int\left(\frac{2\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}+x^2\left(3x^3+5\right)^9\right)dx$.

14. а) $\int\left(5^x+\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{6}{\sqrt{5+x^2}}\right)dx$; б) $\int\left(x\sqrt[5]{x}+5x^3-\frac{3}{x^7}\right)dx$;

в) $\int\left(\frac{4}{\sin^2 2x}-5e^{2-3x}\right)dx$; г) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{3-4x^2}}+3\cos 6x\right)dx$;

д) $\int 8x^7\left(5+x^8\right)^5dx$; е) $\int\left(\frac{2}{x\ln^3 x}+3x^3\sin x^4\right)dx$.

15. а) $\int\left(3e^x+\frac{4}{\sin^2 x}-\frac{5}{\sqrt{x^2-9}}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{1}{x^6}-\left(1+\sqrt{x}\right)^3\right)dx$;

в) $\int\left(5^{2-3x}+(2-x)^7\right)dx$; г) $\int\left(\frac{5}{3-5x}+\frac{4}{1+16x^2}\right)dx$;

д) $\int 7x^6\cos\left(3+x^7\right)dx$; е) $\int\left(\frac{2\operatorname{ctg}^5 x}{\sin^2 x}-\frac{3x}{\sqrt{4-9x^2}}\right)dx$.

16. а) $\int\left(5\cos x+\frac{3}{x}-5\cdot 2^x\right)dx$; б) $\int\left(\sqrt[4]{x^3}+3x^4-\frac{2}{x^7}\right)dx$;

в) $\int\left(\frac{2}{\cos^2(3-4x)}+e^{2+5x}\right)dx$; г) $\int\left(2\sin(3-8x)+\frac{5}{3+9x^2}\right)dx$;

д) $\int 5x^3e^{x^4}\,dx$; е) $\int\left(\frac{x^4}{3x^5+1}+\frac{e^x}{e^{2x}-4}\right)dx$.

17. а) $\int\left(5e^x-3\sin x+\frac{6}{\cos^2 x}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\left(2-\sqrt[6]{x}\right)^2\right)dx$;

в) $\int\left(2\cos(3-5x)+\frac{5}{3+4x}\right)dx$; г) $\int\left(5^{6x-5}+\frac{3}{\sqrt{4x^2+3}}\right)dx$;

д) $\int 6x^5\left(2+x^6\right)^9 dx$; е) $\int\left(\frac{x^3}{\sin^2 x^4}-\frac{5}{x\ln^3 x}\right)dx$.

18. а) $\int\left(\frac{3}{x}+2e^x-\frac{5}{9+x^2}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{5}{x^6}-\left(3x^3-2\right)^2\right)dx$;

в) $\int\left((2+3x)^9+\cos(1-5x)\right)dx$; г) $\int\left(5^{5-2x}+\frac{3}{9x^2-25}\right)dx$;

д) $\int 8x^7\left(5+x^8\right)^5 dx$; е) $\int\left(\frac{2\,\mathrm{tg}^2 x}{\cos^2 x}-\frac{x^5}{\cos^2\left(3-2x^6\right)}\right)dx$.

19. а) $\int\left(5^x-4\cos x+\frac{6}{x^2+4}\right)dx$; б) $\int\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x^3}\right)^2 dx$;

в) $\int\left(\frac{5}{2-3x}+\frac{4}{\sin^2(2+5x)}\right)dx$; г) $\int\left((4-9x)^4+\frac{2}{\sqrt{1-9x^2}}\right)dx$;

д) $\int\frac{6x^5}{4+x^6}dx$; е) $\int\left(\frac{5\,\mathrm{ctg}^3 x}{\sin^2 x}-2x^4\sin x^5\right)dx$.

20. а) $\int\left(3\sin x+\frac{5}{\sqrt{4-x^2}}+3\cdot 6^x\right)dx$; б) $\int\left(\frac{1}{x^2}-\sqrt[3]{x}\right)^3 dx$;

в) $\int\left(\frac{2}{\cos^2(3+4x)}+e^{2-5x}\right)dx$; г) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{2+9x}}-\frac{5}{\sqrt{16x^2+11}}\right)dx$;

д) $\int 10x^9\left(3+x^{10}\right)^4 dx$; е) $\int\left(\frac{x^4}{\sin^2\left(x^5+3\right)}-\frac{5\cdot 3^x}{3^{2x}+1}\right)dx$.

21. а) $\int\left(2^x+\frac{3}{9+x^2}-\frac{2}{\cos^2 x}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{5}{x^6}-x\sqrt[4]{x}+2x^3\right)dx$;

в) $\int\left(\frac{3}{2+5x}-2\sin(1-6x)\right)dx$; г) $\int\left((2-7x)^7+\frac{3}{9-16x^2}\right)dx$;

д) $\int 5x^4 3^x dx$; е) $\int\left(x^3\left(1+x^4\right)^5-\cos^5 x\sin x\right)dx$.

22. а) $\int\left(\frac{5}{x^2+36}-4^x+\frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{3}{x^2}-x\sqrt[3]{x}+2x^4\right)dx$;

в) $\int\left((3-5x)^8+2\cos 3x\right)dx$; г) $\int\left(x^4\cdot 5^{x^5}+\frac{6x^3}{2+x^4}\right)dx$;

д) $\int 7x^6\sin x^7 dx$; е) $\int\left(x^7 e^{x^8+2}-\frac{2}{x\ln^7 x}\right)dx$.

23. а) $\int\left(3\sin x+\frac{5}{x^2+4}-\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{3}{x^9}-\left(4-\sqrt[3]{x}\right)^2\right)dx$;

в) $\int\left(3^{6x}-2\cos(2-5x)\right)dx$; г) $\int\left(\frac{3}{\cos^2 4x}+\frac{5}{4x^2-25}\right)dx$;

д) $\int 8x^7\sin x^8 dx$; е) $\int\left(4x^5 e^{1+x^6}-\frac{3}{tg^5 x\cos^2 x}\right)dx$.

24. а) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x^2-9}}+5^x+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{1}{x^6}-x\sqrt[5]{x}+5x^4\right)dx$;

в) $\int\left(\frac{3}{\cos^2 5x}-2^{3x+2}\right)dx$;

г) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{4x^2+11}}-3\sin 2x\right)dx$;

д) $\int 9x^8\left(5-2x^9\right)^4 dx$;

е) $\int\left(x^6\cos\left(2x^7-3\right)+\frac{5\ln^5 x}{x}\right)dx$.

25. а) $\int\left(3e^x+\frac{5}{\cos^2 x}-\frac{2}{x^2-9}\right)dx$;

б) $\int\left(\frac{3}{x^4}+\left(3-\sqrt[5]{x}\right)^2\right)dx$;

в) $\int\left(2^{3-5x}+5(2+3x)^5\right)dx$;

г) $\int\left(\frac{3}{4x^2-1}+\frac{2}{5+6x}\right)dx$;

д) $\int 8x^7\sin\left(3-x^8\right)dx$;

е) $\int\left(\frac{x^5}{\sqrt{5+3x^6}}-\frac{3\operatorname{tg}^5 x}{\sin^2 x}\right)dx$.

26. а) $\int\left(3\cdot 4^x-5\sin x+\frac{3}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$;

б) $\int\left(\sqrt[4]{x}+2x^3-\frac{5}{x^5}\right)dx$;

в) $\int\left(3^{2x+1}-\frac{5}{\sin^2(3x-2)}\right)dx$;

г) $\int\left(2\cos(5+2x)-\frac{4}{3+4x^2}\right)dx$;

д) $\int 5x^4 e^{x^5}dx$;

е) $\int\left(\frac{4^x}{2+4^{2x}}-\frac{5x^3}{2x^4-7}\right)dx$.

27. а) $\int\left(\frac{5}{\sin^2 x}+3\cdot 6^x-4\cos x\right)dx$;

б) $\int\left(\frac{3}{\sqrt[4]{x}}-\left(2+\sqrt[3]{x}\right)^3\right)dx$;

в) $\int\left(2\sin(5x+1)-\frac{5}{3x+2}\right)dx$;

г) $\int\left(5^{2x-3}-\frac{4}{\sqrt{25x^2+3}}\right)dx$;

д) $\int 8x^7\left(x^8-2\right)^5 dx$;

е) $\int\left(\frac{2x^4}{\cos^2 x^5}-\frac{5\ln^3 x}{x}\right)dx$.

28. а) $\int\left(\frac{3}{x}-5\cdot 3^x+\frac{4}{x^2+16}\right)dx$;

б) $\int\left(\frac{3}{x^8}-2\left(x^4+2\right)^3\right)dx$;

в) $\int\left(2(5-3x)^7-5\sin(1-5x)\right)dx$; г) $\int\left(5^{4x-7}+\dfrac{3}{16x^2+9}\right)dx$;

д) $\int 10x^9\cos x^{10}dx$; е) $\int\left(\dfrac{3}{\operatorname{tg}^5 x\cos^2 x}-\dfrac{2x^6}{\sin^2 x^7}\right)dx$.

29. а) $\int\left(5^x-\dfrac{3}{x^2-36}-5\sin x\right)dx$; б) $\int\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)^2dx$;

в) $\int\left(\dfrac{4}{3x+5}-\dfrac{3}{\cos^2(7x-1)}\right)dx$; г) $\int\left((1-5x)^4+\dfrac{2}{\sqrt{36x^2+5}}\right)dx$;

д) $\int\dfrac{9x^8}{2+x^9}dx$; е) $\int\left(\dfrac{3\operatorname{tg}^7 x}{\sin^2 x}-2x^5\cos x^6\right)dx$.

30. а) $\int\left(5\cos x-4\cdot 8^x+\dfrac{2}{\sqrt{x^2-3}}\right)dx$; б) $\int\left(\dfrac{2}{x}-\sqrt[3]{x}\right)^2dx$;

в) $\int\left(\dfrac{5}{\sin^2(3x+1)}-5^{6x+1}\right)dx$; г) $\int\left(\dfrac{4}{\sqrt{2-9x}}+\dfrac{3}{\sqrt{4+25x^2}}\right)dx$;

д) $\int 4x^3\left(2-3x^4\right)^7dx$; е) $\int\left(\dfrac{x^5}{\cos^2 x^6}+\dfrac{3^x}{3^{2x}-49}\right)dx$.

***Завдання* 11.** Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами.

1. а) $\int xe^{2x}dx$; б) $\int(x^2+1)\cos x dx$; в) $\int\operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$.

2. а) $\int x\sin 3x dx$; б) $\int x^2e^{2x}dx$; в) $\int\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$.

3. а) $\int (2x+1)\cos x dx$; б) $\int x^2 \cdot 3^x dx$; в) $\int e^{2x} \sin 3x dx$.

4. а) $\int x \cdot 2^x dx$; б) $\int x^2 \sin 3x dx$; в) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$.

5. а) $\int (1-3x) \cdot 4^x dx$; б) $\int x^2 \cos 2x dx$; в) $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

6. а) $\int x^3 \ln 2x dx$; б) $\int (1+x^2)e^x dx$; в) $\int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$.

7. а) $\int x^2 \log_3 x dx$; б) $\int (2-x^2)\sin x dx$; в) $\int e^{\arccos x} dx$.

8. а) $\int x^5 \ln 3x dx$; б) $\int (4+x^2)\cos x dx$; в) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx$.

9. а) $\int x \cdot 5^{2x} dx$; б) $\int x^2 \sin 5x dx$; в) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

10. а) $\int (1+3x)\cos 2x dx$; б) $\int x^2 e^{1-4x} dx$; в) $\int \cos(\ln x) dx$.

11. а) $\int (2-5x)\sin x dx$; б) $\int (2+3x^2)e^x dx$; в) $\int \sqrt{1-x^2} dx$.

12. а) $\int x e^{5x} dx$; б) $\int (1-2x^2)\cos 2x dx$; в) $\int \operatorname{arcctg} \sqrt{x} dx$.

13. а) $\int (2+3x)\sin 2x dx$; б) $\int (5-x^2)e^{3x} dx$; в) $\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$.

14. а) $\int (1-2x)\cos 4x dx$; б) $\int x^2 \cdot 4^x dx$; в) $\int e^{4x} \sin x dx$.

15. а) $\int x \cdot 7^x dx$; б) $\int (5+x^2)\sin 4x dx$; в) $\int e^{3x} \cos x dx$.

16. а) $\int (2+5x) \cdot 3^x dx$; б) $\int x^2 \cos 5x dx$; в) $\int x \operatorname{arcctg} x dx$.

17. а) $\int x^2 \ln 3x dx$; б) $\int (x^2+5)e^{3x} dx$; в) $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$.

18. а) $\int x^6 \log_4 2xdx$; б) $\int (3+x^2)\sin 2xdx$; в) $\int e^{\arcsin x}dx$.

19. а) $\int x^6 \ln 2xdx$; б) $\int x^2 \cos 6xdx$; в) $\int \lg(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

20. а) $\int x \cdot 7^{2x}dx$; б) $\int x^2 \sin 7xdx$; в) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

21. а) $\int (2+4x)\cos 3xdx$; б) $\int (1-4x^2)e^x dx$; в) $\int \sin(\ln x)dx$.

22. а) $\int (2-3x)\sin 5xdx$; б) $\int (1+4x^2)e^{2x}dx$; в) $\int \sqrt{4+x^2}\,dx$.

23. а) $\int (5+2x)\cdot 6^x dx$; б) $\int (2+x^2)\sin 3xdx$; в) $\int \operatorname{arctg} xdx$.

24. а) $\int (3-2x)\cos 4xdx$; б) $\int (1+2x^2)e^{4x}dx$; в) $\int \operatorname{arcctg} xdx$.

25. а) $\int (2+x)\sin 4xdx$; б) $\int x^2 \cdot 5^x dx$; в) $\int e^{5x}\cos xdx$.

26. а) $\int x \cdot 9^x dx$; б) $\int (1-7x^2)\cos 2xdx$; в) $\int e^x \sin 5xdx$.

27. а) $\int (3+4x)\cdot 5^x dx$; б) $\int (2+3x^2)\sin 2xdx$; в) $\int e^{2x}\sin 3xdx$.

28. а) $\int x^{10}\ln 2xdx$; б) $\int (x^2+3)e^{4x}dx$; в) $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$.

29. а) $\int x^2 \lg xdx$; б) $\int (4-5x^2)\cos 3xdx$; в) $\int \arcsin xdx$.

30. а) $\int x^7 \ln 5xdx$; б) $\int x^2 \sin 6xdx$; в) $\int \arccos xdx$.

***Завдання* 12.** Знайти інтеграли від функцій, які вміщують квадратний тричлен.

1. а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int \frac{2x-3}{3x^2+5x+2}dx$; в) $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x^2-2x-4}}dx$.

2. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+20}}$; б) $\int \frac{4x+3}{x^2-3x+4}dx$; в) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$.

3. а) $\int \frac{dx}{9x^2-6x+2}$; б) $\int \frac{5x-1}{2x^2+6-3}dx$; в) $\int \frac{3x-4}{\sqrt{4x^2-12x+10}}dx$.

4. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+25}}$; б) $\int \frac{2x-3}{x^2-10x+26}dx$; в) $\int \frac{8x+1}{\sqrt{4x^2-16x+20}}dx$.

5. а) $\int \frac{dx}{5x^2+10x+1}$; б) $\int \frac{4x+5}{x^2-6x+13}dx$; в) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{6x-x^2-5}}dx$.

6. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-12x+27}}$; б) $\int \frac{5x-4}{2x^2-12x+20}dx$; в) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+4x+2}}dx$.

7. а) $\int \frac{dx}{x^2+5x+2}$; б) $\int \frac{6x+5}{3x^2-6x+2}dx$; в) $\int \frac{4x+5}{\sqrt{x^2+8x+32}}dx$.

8. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+5}}$; б) $\int \frac{3x-2}{4x^2+24x-3}dx$; в) $\int \frac{7x+1}{\sqrt{x^2-16x+17}}dx$.

9. а) $\int \frac{dx}{x^2+5x+4}$; б) $\int \frac{4x-9}{5x^2+20x-2}dx$; в) $\int \frac{6x-5}{\sqrt{x^2-10x+34}}dx$.

10. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}}$; б) $\int \frac{9x+1}{3x^2-6x+2}dx$; в) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2-4x+20}}dx$.

11. а) $\int \frac{dx}{5x^2-10x+3}$; б) $\int \frac{8x-3}{x^2+12x+40}dx$; в) $\int \frac{4x-3}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$.

12. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+14x+40}}$; б) $\int \frac{5x+2}{2x^2-12x+3}dx$; в) $\int \frac{7x+1}{\sqrt{-x^2+2x+4}}dx$.

13. а) $\int \frac{dx}{3x^2+42x+1}$; б) $\int \frac{6x-5}{x^2+4x+5}dx$; в) $\int \frac{5x-4}{\sqrt{x^2+10x+29}}dx$.

14. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-12x+32}}$; б) $\int \frac{4x+1}{4x^2+16x+3}dx$; в) $\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-16x+65}}dx$.

15. а) $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$; б) $\int \frac{3x+2}{2x^2-2x+1}dx$; в) $\int \frac{9x-2}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$.

16. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+24x+1}}$; б) $\int \frac{7x-4}{x^2-5x+2}dx$; в) $\int \frac{8x+3}{\sqrt{x^2-4x-12}}dx$.

17. а) $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$; б) $\int \frac{2x+5}{3x^2+5x-3}dx$; в) $\int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+4}}dx$.

18. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+16}}$; б) $\int \frac{3x+4}{x^2+3x-4}dx$; в) $\int \frac{5x+2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx$.

19. а) $\int \frac{dx}{9x^2+6x+1}$; б) $\int \frac{x-5}{2x^2+6x-2}dx$; в) $\int \frac{4x-3}{\sqrt{4x^2+12x+8}}dx$.

20. а) $\int \frac{dx}{5x^2-10x-1}$; б) $\int \frac{5x+4}{x^2-6x+10}dx$; в) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{-6x-x^2-5}}dx$.

21. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+2}}$; б) $\int \frac{4x-5}{2x^2+12x+10}dx$; в) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+12x+27}}dx$.

22. а) $\int \frac{dx}{x^2-5x+1}$; б) $\int \frac{5x+6}{3x^2+6x+1}dx$; в) $\int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2-8x+32}}dx$.

23. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16x+17}}$; б) $\int \frac{2x-3}{4x^2-24x-2}dx$; в) $\int \frac{x+7}{\sqrt{x^2-3x+4}}dx$.

24. а) $\int \frac{dx}{x^2-5x+3}$; б) $\int \frac{9x-4}{5x^2-20x+1}dx$; в) $\int \frac{5x-6}{\sqrt{x^2+10x+34}}dx$.

25. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+20}}$; б) $\int \frac{9x-2}{3x^2-18x-1}dx$; в) $\int \frac{4x+3}{\sqrt{2-2x-x^2}}dx$.

26. а) $\int \frac{dx}{5x^2+10x+2}$; б) $\int \frac{3x-8}{x^2-12x+40}dx$; в) $\int \frac{4x-3}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$.

27. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$; б) $\int \frac{2x+5}{2x^2+12x+1}dx$; в) $\int \frac{6x+1}{\sqrt{x^2-14x+40}}dx$.

28. а) $\int \frac{dx}{3x^2-42x-1}$; б) $\int \frac{5x-6}{x^2-4x+3}dx$; в) $\int \frac{4x-5}{\sqrt{x^2-10x+29}}dx$.

29. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16x+65}}$; б) $\int \frac{x+4}{4x^2-16x+1}dx$; в) $\int \frac{5x-3}{\sqrt{x^2-12x+32}}dx$.

30. а) $\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$; б) $\int \frac{2x+3}{2x^2+2x-1}dx$; в) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-18x+80}}dx$.

***Завдання* 13.** Знайти інтеграли від раціональних дробів.

1. а) $\int \frac{x^4+x+2}{x^2-9}dx$; б) $\int \frac{4x^2+5x}{(x-1)(x+2)^2}dx$; в) $\int \frac{6x^2-25x+56}{(x-3)(x^2-4x+10)}dx$.

2. а) $\int \frac{x^3+5}{x^2+4}dx$; б) $\int \frac{11x-3}{(x+2)(2x-1)^2}dx$; в) $\int \frac{2x^2+24x+28}{(x-4)(x^2+6x+12)}dx$.

3. а) $\int \frac{2x^2+x+1}{x^2-1}dx$; б) $\int \frac{3x^2-6x-58}{(x-3)(x+4)^2}dx$; в) $\int \frac{2x^2-25x+51}{(x+1)(x^2-8x+17)}dx$.

4. а) $\int \frac{x^3-3}{x^2+9}dx$; б) $\int \frac{x^2+7x-6}{(3x-1)(x+1)^2}dx$; в) $\int \frac{x^2-13x-28}{(x-2)(x^2+10x+26)}dx$.

5. а) $\int \frac{x^4+x^3+2}{x^2-4}dx$; б) $\int \frac{15x^2+28x+3}{(4x+1)(x+2)^2}dx$; в) $\int \frac{x^2+7x+39}{(x-3)(x^2+2x+8)}dx$.

6. а) $\int \frac{3x^3+5}{x^2+16}dx$; б) $\int \frac{2x^2+8x-5}{(2x+3)(x+4)^2}dx$; в) $\int \frac{2x^2-5x+9}{(x-1)(x^2-4x+9)}dx$.

7. а) $\int \frac{x^2+3x+1}{x^2-3}dx$; б) $\int \frac{9x^2+28x-57}{(3x+1)(x+5)^2}dx$; в) $\int \frac{9x^2-14x+16}{(x-2)(x^2-x+2)}dx$.

8. а) $\int \frac{x^4+4}{x^2+5}dx$; б) $\int \frac{7x^2+14x-37}{(4x-3)(x+4)^2}dx$; в) $\int \frac{3x^2-9x+32}{(x+4)(x^2-2x+5)}dx$.

9. а) $\int \frac{x^3+x^2+6}{x^2-16}dx$; б) $\int \frac{9x^2+x-12}{(3x-1)(x+1)^2}dx$; в) $\int \frac{4x^2-14x+9}{(x-5)(x^2-3x+3)}dx$.

10. а) $\int \frac{x^2+3x+1}{x^2+7}dx$; б) $\int \frac{10x^2+x-22}{(4x-1)(x+3)^2}dx$; в) $\int \frac{3x^2-7x+6}{(x-1)(x^2-4x+5)}dx$.

11. а) $\int \frac{3x^3+1}{x^2-7}dx$; б) $\int \frac{5x^2-27x-38}{(3x+1)(x-5)^2}dx$; в) $\int \frac{7x^2+25x+27}{(x+3)(x^2+4x+6)}dx$.

12. а) $\int \frac{x^4+5}{x^2+8}dx$; б) $\int \frac{10x^2+13x+6}{(4x+1)(x+1)^2}dx$; в) $\int \frac{7x^2-23x+30}{(x-2)(x^2-3x+5)}dx$.

13. а) $\int \frac{x^2+2x}{x^2-4}dx$; б) $\int \frac{4x^2-15x+13}{(2x-3)(x-2)^2}dx$; в) $\int \frac{6x^2+15x+16}{(x+2)(x^2+3x+4)}dx$.

14. а) $\int \frac{2x^3-x+1}{x^2+9}dx$; б) $\int \frac{5x^2-12x+15}{(x+3)(x-1)^2}dx$; в) $\int \frac{6x^2-3x+17}{(x+3)(x^2-2x+5)}dx$.

15. а) $\int \frac{x^4+5}{x^2-9}dx$; б) $\int \frac{8x^2+23x+9}{(x+4)(x+1)^2}dx$; в) $\int \frac{x^2+x-10}{(x+1)(x^2-x+3)}dx$.

16. а) $\int \frac{4x^2+3}{x^2+2}dx$; б) $\int \frac{3x^2+x-34}{(3x-1)(x+3)^2}dx$; в) $\int \frac{6x^2+17x}{(x+4)(x^2+x+2)}dx$.

17. а) $\int \frac{2x^4+x+3}{x^2+9}dx$; б) $\int \frac{3x^2-20x+13}{(x+1)(x-2)^2}dx$; в) $\int \frac{x^2-15x+30}{(x+3)(x^2-3x+10)}dx$.

18. а) $\int \frac{3x^3+4}{x^2-4}dx$; б) $\int \frac{10x^2+4x+2}{(x-2)(2x+1)^2}dx$; в) $\int \frac{3x^2-13x+30}{(x-3)(x^2-5x+12)}dx$.

19. а) $\int \frac{3x^2-x+2}{x^2+1}dx$; б) $\int \frac{2x^2-11x-2}{(x+3)(x-4)^2}dx$; в) $\int \frac{x^2+2x-14}{(x-1)(x^2-7x+17)}dx$.

20. а) $\int \frac{2x^5-x^2+2}{x^2-9}dx$; б) $\int \frac{2x^2+5x-11}{(3x+1)(x-1)^2}dx$; в) $\int \frac{2x^2+x-17}{(x+2)(x^2+9x+25)}dx$.

21. а) $\int \frac{3x^4+2x^3+1}{x^2+4}dx$; б) $\int \frac{2x^2+7x-8}{(4x-1)(x-2)^2}dx$; в) $\int \frac{5x^2+2x+21}{(x+3)(x^2-x+8)}dx.$

22. а) $\int \frac{2x^3+7}{x^2-16}dx$; б) $\int \frac{5x^2-18x+22}{(2x-3)(x-4)^2}dx$; в) $\int \frac{x^2+2x+15}{(x+1)(x^2+3x+9)}dx$.

23. а) $\int \frac{3x^2+x-1}{x^2+3}dx$; б) $\int \frac{2x^2-22}{(3x-1)(x-5)^2}dx$; в) $\int \frac{6x^2+7x+10}{(x+2)(x^2+x+2)}dx$.

24. а) $\int \frac{2x^4-3}{x^2-5}dx$; б) $\int \frac{6x^2-37x+14}{(4x+3)(x-4)^2}dx$; в) $\int \frac{5x^2+x+16}{(x-4)(x^2+x+5)}dx$.

25. а) $\int \frac{3x^3+x^2-5}{x^2+16}dx$; б) $\int \frac{6x^2+6x-7}{(3x+1)(x+2)^2}dx$; в) $\int \frac{5x^2+10x-3}{(x+5)(x^2+2x+3)}dx.$

26. а) $\int \frac{x^2+x+3}{x^2-7}dx$; б) $\int \frac{6x^2-14x-25}{(4x+1)(x-3)^2}dx$; в) $\int \frac{7x^2-8x+30}{(x-3)(x^2+3x+5)}dx$.

27. а) $\int \frac{2x^3-1}{x^2+7}dx$; б) $\int \frac{4x^2+21x+21}{(3x-1)(x+5)^2}dx$; в) $\int \frac{x^2-x+6}{(x-3)(x^2-3x+6)}dx$.

28. а) $\int \frac{5x^4+1}{x^2-8}dx$; б) $\int \frac{3x^2-12x}{(4x-1)(x-1)^2}dx$; в) $\int \frac{2x^2-3}{(x+2)(x^2+2x+5)}dx$.

29. а) $\int \frac{2x^2+1}{x^2+4}dx$; б) $\int \frac{x^2-6x-12}{(2x+3)(x+2)^2}dx$; в) $\int \frac{3x^2-6x+2}{(x-2)(x^2-3x+4)}dx$.

30. а) $\int \frac{3x^3+2x+4}{x^2-9}dx$; б) $\int \frac{7x^2+5x+2}{(x-3)(x+1)^2}dx$; в) $\int \frac{x-8}{(x+1)(x^2+2x+10)}dx.$

***Завдання* 14.** Знайти інтеграли від ірраціональних функцій.

1. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$.

2. а) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}+2\sqrt[4]{(3x-1)^3}}$.

3. а) $\int \frac{dx}{3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{2\sqrt{4x+3}+\sqrt[3]{4x+3}}$.

4. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{3\sqrt{2x-3}-\sqrt[3]{(2x-3)^2}}$.

5. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}+3\sqrt[6]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{4\sqrt{x-2}+3\sqrt[4]{(x-2)^3}}$.

6. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}-4\sqrt[8]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{2\sqrt[4]{(3x-1)^3}+\sqrt[6]{(3x-1)^5}}$.

7. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(4x-3)^5}+2\sqrt[8]{(4x-3)^7}}$.

8. а) $\int \frac{dx}{2\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[9]{x^7}}$; б) $\int \frac{dx}{3\sqrt[4]{2x+5}-\sqrt[8]{(2x+5)^3}}$.

9. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[9]{x^8}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[8]{(3x+1)^3}+2\sqrt[4]{3x+1}}$.

10. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(4x+5)^5}-3\sqrt[9]{(4x+5)^2}}$.

11. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+5}+4\sqrt[6]{x+5}}$.

12. а) $\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+4}+3\sqrt[3]{3x+4}}$.

13. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{4\sqrt[3]{(2x+5)^2}-\sqrt[4]{(2x+5)^3}}$.

14. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-4}-\sqrt[4]{3x-4}}$.

15. а) $\int \frac{dx}{3\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{2\sqrt{3x+2}+\sqrt[4]{3x+2}}$.

16. а) $\int \frac{dx}{5\sqrt[4]{x^3}-3\sqrt[6]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{2\sqrt{2x-1}-3\sqrt[4]{(2x-1)^3}}$.

17. а) $\int \frac{dx}{3\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt[8]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(2x+7)^5}-2\sqrt[4]{(2x+7)^3}}$.

18. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}-4\sqrt[8]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{4\sqrt[6]{(3x-4)^5}+\sqrt[8]{(3x-4)^7}}$.

19. а) $\int \frac{dx}{5\sqrt[6]{x^5}+3\sqrt[9]{x^8}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(4x-5)^3}+4\sqrt[8]{(4x-5)^5}}$.

20. а) $\int \frac{dx}{3\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[9]{x^8}}$; б) $\int \frac{dx}{5\sqrt[8]{(x-6)^7}-\sqrt[4]{(x-6)^3}}$.

21. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[6]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{2\sqrt[6]{(x-6)^5}-\sqrt[4]{(x-6)^3}}$.

22. а) $\int \frac{dx}{4\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{9\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt[6]{(2x+1)^5}}$.

23. а) $\int \frac{dx}{6\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{5\sqrt{3x+7}+\sqrt[3]{(3x+7)^2}}$.

24. а) $\int \frac{dx}{4\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}}$; б) $\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{(1-2x)^2}+\sqrt[4]{(1-2x)^3}}$.

25. а) $\int \frac{dx}{4\sqrt{x}-5\sqrt[3]{x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{6\sqrt{3-x}+\sqrt[4]{3-x}}$.

26. а) $\int \frac{dx}{3\sqrt{x}+7\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-1}+2\sqrt[3]{(4x-1)^2}}$.

27. а) $\int \frac{dx}{5\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt[6]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{3\sqrt{3-2x}-\sqrt[4]{(3-2x)^3}}$.

28. а) $\int \frac{dx}{6\sqrt[4]{x^3}-5\sqrt[8]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(3-4x)^3}+5\sqrt[6]{(3-4x)^5}}$.

29. а) $\int \frac{dx}{5\sqrt[4]{x^3}+3\sqrt[8]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{4\sqrt[6]{(4-x)^5}-\sqrt[8]{(4-x)^7}}$.

30. а) $\int \frac{dx}{4\sqrt[6]{x^5}+9\sqrt[9]{x^8}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(3x-7)^3}+4\sqrt[8]{(3x-7)^5}}$.

Завдання 15. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій.

1. а) $\int \frac{dx}{3-2\sin x}$; б) $\int \sin^5 x\cos^3 xdx$; в) $\int \sin^4 2xdx$.

2. а) $\int \frac{dx}{1+4\cos x}$; б) $\int \cos^4 x\sin^3 xdx$; в) $\int \cos^4 4xdx$.

3. а) $\int \frac{dx}{4-\sin x}$; б) $\int \sin^2 x\cos^5 xdx$; в) $\int \cos x\sin^2 2xdx$.

4. а) $\int \frac{dx}{2+5\cos x}$; б) $\int \cos^6 x\sin^5 xdx$; в) $\int \sin^3 x\cos^2 2xdx$.

5. а) $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x}$; б) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$; в) $\int \cos 3x\sin 2xdx$.

6. а) $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$; б) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$; в) $\int \cos 4x\cos 2xdx$.

7. а) $\int \frac{dx}{2\sin x + 5\cos x}$; б) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx$; в) $\int \sin x \sin 5x dx$.

8. а) $\int \frac{dx}{\cos x - 2\sin x}$; б) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} dx$; в) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$.

9. а) $\int \frac{dx}{4 + 3\sin x}$; б) $\int \frac{\sin x dx}{4 - \cos^2 x}$; в) $\int \sin 2x \cos^2 4x dx$.

10. а) $\int \frac{dx}{1 - 2\cos x}$; б) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{9 - \sin^2 x}} dx$; в) $\int \sin 3x \sin^2 6x dx$.

11. а) $\int \frac{dx}{6 + 5\sin x}$; б) $\int \frac{\operatorname{ctg}^4 x - 5}{\sin^2 x} dx$; в) $\int \sin^6 2x dx$.

12. а) $\int \frac{dx}{3 - \cos x}$; б) $\int \frac{\sin x}{9 - \sin^2 x} dx$; в) $\int \cos^6 2x dx$.

13. а) $\int \frac{dx}{\sin x - 3\cos x}$; б) $\int \sin^2 x \operatorname{tg} x dx$; в) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$.

14. а) $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x}$; б) $\int \cos^2 x \operatorname{ctg} x dx$; в) $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$.

15. а) $\int \frac{dx}{2\cos x - 3\sin x}$; б) $\int \sin^7 x dx$; в) $\int \frac{dx}{(4 - \operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x}$.

16. а) $\int \frac{dx}{3\cos x + 5\sin x}$; б) $\int \cos^7 x dx$; в) $\int \frac{dx}{(9 + \operatorname{ctg}^2 x)\sin^2 x} dx$.

17. а) $\int \frac{dx}{3 - 2\cos x}$; б) $\int \cos^5 x \sin^5 x dx$; в) $\int \sin^4 3x dx$.

18. а) $\int \frac{dx}{1 + 4\sin x}$; б) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$; в) $\int \cos^4 5x dx$.

19. а) $\int \frac{dx}{4 - \cos x}$; б) $\int \cos^2 x \sin^5 x dx$; в) $\int \sin x \cos^2 2x dx$.

20. а) $\int \frac{dx}{2+5\sin x}$; б) $\int \sin^6 x \cos^5 x dx$; в) $\int \cos^3 x \sin^2 2x dx$.

21. а) $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x}$; б) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$; в) $\int \cos x \sin 7x dx$.

22. а) $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$; б) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$; в) $\int \cos 2x \cos 8x dx$.

23. а) $\int \frac{dx}{2\cos x+5\sin x}$; б) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$; в) $\int \sin 3x \sin 9x dx$.

24. а) $\int \frac{dx}{\sin x-2\cos x}$; б) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x} dx$; в) $\int \frac{5\mathrm{tg}^6 x+3}{\cos^2 x} dx$.

25. а) $\int \frac{dx}{4+3\cos x}$; б) $\int \frac{\cos 2x}{9-\sin^2 2x} dx$; в) $\int \sin 4x \cos^2 8x dx$.

26. а) $\int \frac{dx}{1-2\sin x}$; б) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4-\cos^2 2x}} dx$; в) $\int \sin 5x \sin^2 10x dx$.

27. а) $\int \frac{dx}{6+5\cos x}$; б) $\int \frac{1-3\mathrm{ctg}^3 x}{\sin^2 x} dx$; в) $\int \sin^6 4x dx$.

28. а) $\int \frac{dx}{3-\sin x}$; б) $\int \frac{\cos x}{4-\cos^2 x} dx$; в) $\int \cos^6 4x dx$.

29. а) $\int \frac{dx}{\cos x-3\sin x}$; б) $\int \sin x tg^2 x dx$; в) $\int \mathrm{tg}^4 2x dx$.

30. а) $\int \frac{dx}{2\cos x+3\sin x}$; б) $\int \cos x \,\mathrm{ctg}^2 x dx$; в) $\int \mathrm{ctg}^4 2x dx$.

Завдання 16. Обчислити визначені інтеграли.

1. а) $\int_0^1 x^6(1+x^7)^5dx$; б) $\int_0^1 x\cdot 2^x dx$; в) $\int_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x^3}}$.

2. а) $\int_0^1\left(\frac{2}{1+9x^2}+\frac{3}{2-4x}\right)dx$; б) $\int_0^{\pi/4}x^2\cos 2x dx$; в) $\int_1^{2^{12}}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}+3\sqrt[6]{x^5}}$.

3. а) $\int_0^1 x^2e^{x^3}dx$; б) $\int_1^2 x^3\ln 2x dx$; в) $\int_1^{2^8}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}+4\sqrt[8]{x^5}}$.

4. а) $\int_0^1 x^4\left(x^5-1\right)dx$; б) $\int_0^{\pi/4}\left(2-x^2\right)\sin x dx$; в) $\int_1^{2^8}\frac{dx}{3\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x^3}}$.

5. а) $\int_0^1 5^{2x+1}dx$; б) $\int_1^2 x^5\ln 3x dx$; в) $\int_1^{2^{18}}\frac{dx}{2\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[9]{x^8}}$.

6. а) $\int_0^1\frac{x^4}{3+x^5}dx$; б) $\int_0^1 x\cdot 5^{2x}dx$; в) $\int_1^{2^{18}}\frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[9]{x^7}}$.

7. а) $\int_0^1 x^8(1+x^9)^5dx$; б) $\int_0^1 x^2e^{2x}dx$; в) $\int_1^{64}\frac{dx}{4\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^5}}$.

8. а) $\int_0^1 x^3e^x dx$; б) $\int_0^{\pi/3}(2-5x)\sin x dx$; в) $\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}$.

9. а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$; б) $\int_0^1 xe^{5x}dx$; в) $\int_1^{2^{12}}\frac{dx}{2\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^3}}$.

10. а) $\int_0^1\frac{dx}{1+2x}$; б) $\int_0^{\pi/4}(2+3x)\sin 2x dx$; в) $\int_1^{16}\frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}$.

11. а) $\int_0^1 x^7\left(1+x^8\right)^5 dx$; б) $\int_0^1 x^2\cdot 4^x dx$; в) $\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}}$.

12. а) $\int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^2}$; б) $\int_0^{\pi/4} x\sin 4x dx$; в) $\int_1^{16}\frac{dx}{3\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}$.

13. а) $\int_0^1 x^3 e^{x^4} dx$; б) $\int_0^{\pi/5} x\cos 5x dx$; в) $\int_1^{2^{12}}\frac{dx}{5\sqrt[4]{x^3}+3\sqrt[6]{x^5}}$.

14. а) $\int_0^1 x^5\left(x^6-1\right)^9 dx$; б) $\int_0^2 x^2\ln 3x dx$; в) $\int_1^{2^{12}}\frac{dx}{5\sqrt[4]{x^3}+3\sqrt[6]{x^5}}$.

15. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2tg^2 x}{\cos^2 x}dx$; б) $\int_1^2 x^3\log_4 2x dx$; в) $\int_1^{2^8}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}+4\sqrt[8]{x^5}}$.

16. а) $\int_0^1\frac{x^5}{4+x^6}dx$; б) $\int_0^{\pi/6} x\cos 6x dx$; в) $\int_1^{2^{18}}\frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}+3\sqrt[9]{x^7}}$.

17. а) $\int_0^1 x^9\left(2+x^{10}\right)^4 dx$; б) $\int_0^1 x\cdot 7^{2x} dx$; в) $\int_1^{2^{18}}\frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[9]{x^8}}$.

18. а) $\int_0^1 x^4\cdot 3^{x^5} dx$; б) $\int_0^{\pi/3}(1+3x)\cos 3x dx$; в) $\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}$.

19. а) $\int_0^1\sqrt{4+5x}dx$; б) $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx$; в) $\int_1^{64}\frac{dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$.

20. а) $\int_0^1\sqrt[3]{1+7x}dx$; б) $\int_0^{\pi/3}(2+x)\sin 3x dx$; в) $\int_1^{2^{12}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[4]{x^3}}$.

21. а) $\int_0^1 x^8\left(x^9-1\right)^7 dx$; б) $\int_0^1(1+2x)e^{4x} dx$; в) $\int_1^{16}\frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}}$.

22. а) $\int_0^1 \sqrt[4]{1-x}\,dx$; б) $\int_0^{\pi/3} (2+x)\sin 3x dx$; в) $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

23. а) $\int_0^1 x^4 \cdot e^{x^5} dx$; б) $\int_0^{\pi/3} (1-7x)\cos 2x dx$; в) $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+5\sqrt[4]{x}}$.

24. а) $\int_0^1 x^7 \left(x^8-1\right)^5 dx$; б) $\int_0^1 (3+4x)\cdot 5^x dx$; в) $\int_1^{2^{12}} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt[6]{x^5}}$.

25. а) $\int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin 5x dx$; б) $\int_1^2 x^9 \ln 2x dx$; в) $\int_1^{2^8} \frac{dx}{6\sqrt[4]{x^3}+5\sqrt[8]{x^7}}$.

26. а) $\int_0^1 \frac{x^8}{2+x^9} dx$; б) $\int_0^{\pi/3} (4-5x)\cos 3x dx$; в) $\int_1^{2^8} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}+4\sqrt[8]{x^5}}$.

27. а) $\int_0^1 x^3 \left(2-3x^4\right)^5 dx$; б) $\int_0^{\pi/6} x\sin 6x dx$; в) $\int_1^{2^{18}} \frac{dx}{2\sqrt[6]{x^5}+3\sqrt[9]{x^8}}$.

28. а) $\int_0^1 x^2 \cdot 2^{x^3} dx$; б) $\int_0^{\pi/2} (2x+1)\cos x dx$; в) $\int_1^{2^{12}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[4]{x^3}}$.

29. а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+3x}}$; б) $\int_0^1 (1+3x)e^{2x} dx$; в) $\int_1^{16} \frac{dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}}$.

30. а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+7x}}$; б) $\int_1^2 x^2 \ln 3x dx$; в) $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$.

***Завдання* 17.** Обчислити площу фігури , яка обмежена лініями:

1. а) $y=\sqrt{x}, y=2-x, y=0$; б) $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$.

2. а) $y=\sqrt{x}, y=\sqrt{-x}, y=1$; б) $\rho=2\cos\varphi, \rho=\cos\varphi$.

3. а) $y=e^x, y=1-x, x=1$; б) $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \; y=0, \; 0\le t\le 2\pi. \end{cases}$

4. а) $y=\ln x, y=1-x, y=1$; б) $\rho=3\sin 3\varphi$.

5. а) $y=-\sqrt{x}, y=-\dfrac{1}{2}x$; б) $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$.

6. а) $y=\sqrt{x}, y=\dfrac{1}{2}x$; б) $\rho=2(1+\cos\varphi)$.

7. а) $y=\dfrac{1}{x}, y=x, y=2$; б) $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$.

8. а) $y=\dfrac{1}{x}, y=x, x=2$; б) $\rho=6\cos\varphi$.

9. а) $y=e^x, y=1-x, y=e$; б) $\begin{cases} x=4\cos^3 t \\ y=4\sin^3 t \end{cases}$.

10. а) $y=x^3, y=2-x, y=0$; б) $\rho=3(1-\cos\varphi)$.

11. а) $y=x^2, y=x+2$; б) $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \; y=0, \; 0\le t\le 2\pi. \end{cases}$

12. а) $y=x^2, y=x+6$; б) $\rho=2\sin\varphi, \rho=\sin\varphi$.

13. а) $y=x^3, y=-x, y=1$; б) $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$.

14. а) $y=x^2, y=x, x=2$; б) $\rho=4\cos 3\varphi$.

15. а) $y=-x^2, y=x-2$; б) $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$.

16. а) $y=-x^3, y=-x^2$; б) $\rho=4(1+\cos\varphi)$.

17. а) $y=\sqrt{x}, y=2-x, y=0$; б) $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$.

18. а) $y=2^x, y=\left(\frac{1}{2}\right)^x, y=2$; б) $\rho=6\sin 4\varphi$.

19. а) $y=x^3, y=-x, x=-1$; б) $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \ y=0,\ 0\le t\le 2\pi. \end{cases}$

20. а) $y=3^x, y=\left(\frac{1}{3}\right)^x, y=3$; б) $\rho=6(1-\cos\varphi)$.

21. а) $y=x^3, y=-x, y=-1$; б) $\begin{cases} x=5\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$.

22. а) $y=\frac{1}{x^2}, y=x, y=4$; б) $\rho=4\cos\varphi, \rho=2\cos\varphi$.

23. а)и $y=-x^3, y=x, x=1$; б) $\begin{cases} x=9\cos t \\ y=9\sin t \end{cases}$.

24. а) $y=\frac{1}{x^2}, y=-x, y=4$; б) $\rho=4\sin 2\varphi$.

25. а) $y=-x^3, y=x, x=-1$; б) $\begin{cases} x=8\cos^3 t \\ y=8\sin^3 t \end{cases}$.

26. а) $y=e^x, y=\left(\frac{1}{e}\right)^x, y=e$; б) $\rho=8\cos 2\varphi$.

27. а) $y=\frac{1}{x^3}, y=x, y=8$; б) $\begin{cases} x=6(t-\sin t), \\ y=6(1-\cos t), \ y=0,\ 0\le t\le 2\pi. \end{cases}$

28. а) $y=-x^3, y=x, y=1$; б) $\rho=4(1+\cos\varphi)$.

29. а) $y=\frac{1}{x^3}, y=x, y=-8$; б) $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$.

30. а) $y=-x^3, y=x, y=-1$;		б) $\rho=4\sin\varphi, \rho=2\sin\varphi$.

Завдання **18**. Розв’язати геометричні задачі за допомогою визначених інтегралів.

1. Обчислити довжину дуги півкубічної параболи $y^2=(x+1)^3, 0\le x\le 3$.

2. Обчислити довжину кардіоїди $\rho=3(1-\cos\varphi)$.

3. Обчислити об’єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y=e^{3x}, y=0, x=0$ і $x=1$.

4. Знайти довжину дуги кривої $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x, 1\le x\le e$.

5. Обчислити об’єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y=\mathrm{tg}\,x, y=0$ і $x=\pi/4$.

6. Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y=\sin x, y=0, 0\le x\le\pi$, навколо осі Ox.

7. Знайти довжину астроїди $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$.

8. Знайти площу поверхні тора, утвореного обертанням навколо осі Ox кола $x^2+y^2-4y+3=0$.

9. Знайти довжину логарифмічної спіралі $\rho=e^{\varphi}$, яка вирізається колом $\rho=e$.

10. Обчислити об’єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y=ctg\,x, y=0$ і $x=\pi/4$.

11. Знайти довжину дуги кривої у просторі

$x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ z = 4t,\ 0 \le t \le 4$

12. Знайти довжину дуги кривої $x = 2(\cos t + t\sin t),\ y = 2(\sin t - t\cos t),\ 0 \le t \le \pi$.

13. Обчислити об’єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями $y = 3^{2x},\ y = 0,\ x = 0$ і $x = 1$.

14. Знайти довжину дуги кривої $y = \ln\sin x,\ \pi/3 \le x \le \pi/2$.

15. Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої кривими $y = x^2$ і $y = 8 - x^2$.

16. Знайти довжину дуги лінії $y = t^3 - t,\ x = \sqrt{3}t^2 - 1,\ 0 \le t \le 2$.

17. Знайти довжину петлі лінії $x = t^2,\ y = t - \frac{1}{3}t^3,\ -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$.

18. Знайти довжину дуги просторової кривої $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ z = 4\sin\frac{t}{2},\ 0 \le t \le \pi$.

19. Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями $y = (x-2)^2,\ y = x$.

20.Знайти довжину дуги кривої $x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

21. Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями $y = x(4 - x),\ y = x$.

22. Знайти довжину дуги півкубічної параболи $y^2 = x^3,\ 0 \le t \le 4$.

23. Обчислити довжину астроїди $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t.$

24. Знайти довжину дуги кривої $\rho = 8\sin^3\frac{\varphi}{3},\ 0 \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$.

25. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням однієї арки

лінії $y=\sin x$ навколо осі Ох.

26. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями $y^2=3x,\ y=x$.

27. Знайти довжину кардіоїди $\rho=8(1-\cos\varphi)$.

28. Знайти площу поверхні конуса, утвореного обертанням навколо осі Ох відрізка прямої $y=2x,\ 0\le x\le 2$.

29. Знайти довжину дуги цепної лінії $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\ 0\le x\le 1$.

30. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої параболами $y=-x^2+3,\ y=x^2+1$.

Завдання **19.** Розв'язати задачі фізики та механіки за допомогою визначених інтегралів.

1. Резервуар циліндричної форми заповнений водою до верхнього краю. Обчислити роботу, яку необхідно затратити для того, щоб викачати воду з цього резервуару, якщо його висота дорівнює 5 м, а радіус основи – 3 м.

2. Знайти координати центру ваги плоскої фігури, обмеженої параболою $y^2=2x-2$ і прямою $y=x-1$.

3. Трикутна пластина опущена вертикально у воду так, що її основа паралельна поверхні води, а протилежна вершина знаходиться на поверхні води. Обчислити силу, з якою вода давить на цю пластину, якщо основа трикутника дорівнює 3 м, а висота – 8 м.

4. Стискання пружини пропорційне прикладеній силі. Обчислити роботу сили при стисканні пружини на 5 см, якщо сила, рівна 0,5 Н стискає її на 1 см.

5. Знайти статичний момент прямокутника зі сторонами a і b відносно його сторін.

6. Резервуар має форму півциліндра і заповнений водою до верхнього краю (резервуар розміщено так, що площина перерізу циліндра паралельна поверхні землі). Обчислити роботу, яку необхідно затратити для того, щоб викачати воду з цього резервуару, якщо радіус основи циліндра дорівнює 2 м, а висота – 6 м.

7. Передня частина дамби має форму параболи з вершиною внизу; основа дамби (верхній край) дорівнює 2 м, а висота – 1 м. Обчислити тиск води на дамбу, якщо вода доходить до верхнього краю дамби.

8. Знайти координати центру ваги однорідної фігури, обмеженої дугою синусоїди $y = \sin x$ і відрізком осі Ох від точки $x = 0$ до точки $x = \pi$.

9. Обчислити центр ваги однорідної фігури, обмеженої дугою косинусоїди $y = \cos x$ і відрізком осі Ох від точки $x = -\pi/2$ до точки $x = \pi/2$.

10. Резервуар має форму півкулі і заповнений водою до верхнього краю (резервуар розміщено так, що площина перерізу кулі паралельна поверхні землі). Обчислити роботу, яку необхідно затратити для того, щоб викачати воду з цього резервуару, якщо радіус кулі дорівнює 8 м.

11. Знайти координати центру ваги однорідної фігури, обмеженої лініями $y^2 = 8x$ і $x^2 = 8y$.

12. Розтяг пружини пропорційний прикладеній силі. Обчислити роботу сили при розтягуванні пружини на 6 см, якщо сила, рівна 2 Н розтягує її на 1 см.

13. Знайти момент інерції відносно осі Ох однорідної плоскої фігури, обмеженої дугою синусоїди $y = \sin x$ і відрізком осі Ох від точки $x = 0$ до точки $x = \pi$.

14. Знайти момент інерції відносно осі Ох однорідної плоскої фігури, обмеженої дугою косинусоїди $y = \cos x$ і відрізком осі Ох від точки $x = -\pi/2$ до точки $x = \pi/2$.

15. Знайти координати центру ваги плоскої фігури, обмеженої першою аркою циклоїди $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t\ (0 \le t \le 2\pi)$ і віссю Ох.

16. Обчислити роботу, необхідну для викачування масла з вертикального циліндричного резервуара, висота якого дорівнює 6 м і радіус основи – 2 м. Густина масла дорівнює 0,9 кг/м^3.

17. Знайти статичні моменти відносно осей Ох, Оу і координати центру ваги трикутника, утвореного прямими $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2$.

18. Пластина у вигляді півкруга занурена вертикально у воду так, що верхній діаметр лежить на поверхні води. Знайти тиск на цю пластину, якщо радіус дорівнює 5 м.

19. Знайти координати центру ваги однорідного параболічного сегмента, обмеженого параболою $y^2 = 8x$ і прямою $x = 2$.

20. Знайти координати центру ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями $x^2 + 4y - 16 = 0$ і $y = 0$.

21. Знайти момент інерції відносно осі Оу плоскої фігури, обмеженої лініями $x = 2,\ y = x^2$ і $y = 0$.

22. Визначити тиск води на вертикальний півкруг, діаметр якого 2R розміщений на поверхні води.

23. Обчислити роботу, яку необхідно витратити на викачування води з ями у формі конуса (вершина на дні). Висота конуса дорівнює 2

м, а радіус основи – 0,5 м.

24. За який час вода витече з конічної лійки висотою $h = 40$ см, радіусом нижньої основи $r = 0{,}3$ см і верхньої $R = 6$ см.

25. Знайти координати центру ваги дуги, однієї арки циклоїди $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t\ (0 \le t \le 2\pi)$.

26. Знайти момент інерції відносно осі Оу плоскої фігури, обмеженої лініями $x = 1,\ y = x^3$ і $y = 0$.

27. Вертикальна гребля має форму трапеції. Обчислити силу тиску води на греблю, якщо відомо, що верхня і нижня основи греблі відповідно дорівнюють 40 м і 30 м, а висота – 10 м.

28. Знайти координати центру ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями $y = 4x - x^2$ і $y = x$.

29. Знайти координати центру ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями $y = 4 - x^2$ і $y = 0$.

30. Обчислити момент інерції відносно осі Ох плоскої фігури, обмеженої прямими $x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = x + 2$.

***Завдання* 20.** Обчислити невласні інтеграли (або показати, що вони розбігаються).

1. а) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$;   б) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{x^2 + 2x - 8}$.

2. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$;   б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$.

3. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 8}$;   б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$.

4. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+5x+4}$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{x^2dx}{x^3-1}$.

5. а) $\int\limits_0^{\infty} x^2e^{-x^3}dx$; б) $\int\limits_0^{2} \frac{xdx}{(x^2-4)^2}$.

6. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2e^{x^3}dx$; б) $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+8}}$.

7. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\sin x}$.

8. а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\ln x}dx}{x}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos x}$.

9. а) $\int\limits_0^{\infty} xe^{-2x}dx$; б) $\int\limits_0^{2} \frac{x^3dx}{x^4-16}$.

10. а) $\int\limits_1^{\infty} x^{-3}\sin x^{-2}dx$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{x^2+2x+3}{x^5}dx$.

11. а) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^5 x}}$; б) $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{x^2-2x-3}$.

12. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{(3x^2+6x)dx}{x^3+3x^2+2}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} xdx$.

13. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+34}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} xdx$.

14. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2-8x+12}$; б) $\int\limits_0^{3} \frac{(x^2-1)dx}{x^3-3x-18}$.

15. а) $\int_{0}^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx$;   б) $\int_{0}^{4} \frac{x^2 dx}{(x^3-64)^2}$.

16. а) $\int_{-\infty}^{0} x^6 e^{x^7} dx$;   б) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+12}}$.

17. а) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+14}}$;   б) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{1-\sin 2x}$.

18. а) $\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{\ln x}}{x} dx$;   б) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{1-\cos 2x}$.

19. а) $\int_{0}^{\infty} x e^{-4x} dx$;   б) $\int_{0}^{2} \frac{(x^3-1)dx}{x^4-4x-8}$.

20. а) $\int_{1}^{\infty} x^{-4} \cos x^{-3} dx$;   б) $\int_{0}^{1} \frac{x^3+4x+1}{x^4} dx$.

21. а) $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[4]{\ln^3 x}}$;   б) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{x^2+2x-24}$.

22. а) $\int_{0}^{\infty} \frac{(5x^4+1)dx}{x^5+x}$;   б) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x(1-\operatorname{tg} x)}$.

23. а) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2-10x+50}$;   б) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x(1-\operatorname{ctg} x)}$.

24. а) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2-6x+5}$;   б) $\int_{-2}^{0} \frac{x^2 dx}{x^3+8}$.

25. а) $\int_{0}^{\infty} x^4 e^{-x^5} dx$;   б) $\int_{-3}^{0} \frac{x dx}{x^2-9}$.

26. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} x^4 e^{x^5} dx$; б) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$.

27. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+80}}$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/6} \frac{dx}{1-\sin 3x}$.

28. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{\ln^3 x}}{x} dx$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/6} \frac{dx}{1-\cos 3x}$.

29. а) $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-6x} dx$; б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{(x^3-2x)dx}{x^4-4x^2-45}$.

30. а) $\int\limits_{1}^{\infty} x^{-5} \sin x^{-4} dx$; б) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{x^4+3x^2+1}{x^5} dx$.

***Завдання* 21.** Обчислити наближено довжину дуги кривої $y = Ax^3 + Bx^2, 0 \le x \le 2$ (розбити заданий проміжок на 10 частин і значення підінтегральної функції обчислювати з точністю до четвертого знака після коми): а) за формулою трапецій; б) за формулою Сімпсона.

№ вар.	A	B	№ вар.	A	B	№ вар.	A	B
1	2	1	11	1	3	21	1	5
2	3	1	12	2	3	22	2	5
3	4	1	13	4	3	23	3	5
4	5	1	14	5	3	24	4	5
5	6	1	15	6	3	25	6	5
6	1	2	16	1	4	26	1	6
7	3	2	17	2	4	27	2	6
8	4	2	18	3	4	28	3	6
9	5	2	19	5	4	29	4	6
10	6	2	20	6	4	30	5	6

Рекомендована література

1. Кулініч Г.Л. та ін. Вища математика: Основні розділи: Підручник. Кн.1 – К.:Либідь, 2003.
2. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення. – К.: Техніка, 2003.
3. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Зб. задач. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення. – К.: Техніка, 2004.
4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука,1989.
5. Шипачёв В.С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1990.
6. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 – М.: Высш. шк., 1986.