МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

CENTRAL UKRAINIAN NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY

ФАКУЛЬТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА ТРАНСПОРТУ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING AND TRANSPORT

Кафедра вищої математики та фізики

Department of Higher Mathematics and Physics

Методичні рекомендації та тестові завдання з математики для абітурієнтів – іноземних громадян, слухачів підготовчого курсу (відділення). Частина 1

Methodical recommendations and test tasks in mathematics for entrants - foreign citizens, preparatory course participant. Part 1

Затверджено на засіданні
методичної ради центру
довузівської підготовки
Протокол № 9
від 13.06.2022 р.

КРОПИВНИЦЬКИЙ 2022

Математика: Методичні рекомендації та тестові завдання з математики
для абітурієнтів – іноземних громадян, слухачів підготовчого курсу (відділення).
Частина 1 (Українською та англійською мовами)./ Укл.: Кривоблоцька Л. –
ЦНТУ, 2022.- 42с.
Методичні рекомендації складаються з 3 розділів, присвячених фундаментальним принципам алгебри та елементам обчислення. Основні поняття математики пояснюються та ілюструються малюнками та прикладами. Рекомендації можуть стати в нагоді учням, які хочуть розуміти та вміти використовувати стандартні алгебраїчні методи, розв’язувати рівняння та нерівності, аналізувати поведінку функції, оперувати дійсними та комплексними числами тощо. Рекомендується як підготовчий курс математики для англомовних студентів.

Укладачі:
Кривоблоцька Лариса Миколаївна – доцент кафедри вищої математики та фізики.

Рецензент: Якименко С.М., кандидат фіз.- мат наук, доцент

ЗМІСТ

Contents

1. Дійсні числа

1.1. Арифметичні операції

Арифметичними операціями над числами є додавання, віднімання, множення і ділення. Операції додавання і віднімання, а також множення і ділення є взаємопов'язаними.

1. The Real Number System

1.1. Arithmetic operations

The arithmetic operations associated with real numbers are addition subtraction, multiplication, and division. The operations of addition and subtraction are related, as are the operations of multiplication and division.

Таблиця 1

Назва символу	Операція	Символ
Плюс	Додавання	+
Мінус	Віднімання	-
Точка	Множення	·
Хрест		×
Двокрапка	Ділення	:
Коса риска		/

Table 1

Sign	Designation	Operation
	Plus	Addition
	Minus	Subtraction
	Multiplication	Multiplication
	Division	Division
	Fraction bar	

Додавання двох чисел a і b записується у вигляді

The **addition** of two numbers a and b is denoted by

$$a + b = c$$

де c - результат додавання a і b. При цьому a і b називаються **складовими**, а результат додавання - **сумою** a і b.

where c is the result of the addition of a and b. Both numbers, a and b, are called **addends**, and c is the **sum** of a and b.

Віднімання двох чисел a і b описується формулою

The **subtraction** of two numbers a and b is denoted by

$$a - b = c\ ,$$

де c - результат віднімання b з a. Число a є **від'ємником**, а результат віднімання c називають **різницею** між a і b.

where c is the result of the subtraction of b from a. The result c is also called the **difference** between a and b, and a is known as the **subtrahend**.

Операцію віднімання можна звести до операції додавання:

The subtraction of numbers defined in terms of addition:

$$a - b = a + (-b) = c,$$

Таким чином, щоб відняти *b* з *a*, потрібно до *a* додати *b*, взяте з протилежним знаком. Це означає, що додавання і віднімання є взаємно зворотними операціями.
Легко перевірити правильність зробленого віднімання, оскільки різниця *a* - *b* це таке число *c*, до якого потрібно додати *b*, щоб отримати *a*:

Thus, in order to subtract *b* from *a* it is necessary to add the negative of *b* to *a*. This means that addition and subtraction are inverse operations to each other. One can easily check whether the result of the subtraction is true. Indeed, by the definition, the difference $ba -$ is the number *c* that by which the number *b* is added to produce *a*:

$$c = a - b \Rightarrow a = b + c.$$

Множення двох чисел *a* і *b* позначається символічно як

The **multiplication** of two numbers *a* and *b* is denoted by

$$ab = c,$$

де *c* - результат множення *a* і *b*. При цьому числа *a* і *b* називаються **співмножники,** а результат множення - їх **добутком**.

where *c* is the result of the multiplication of the numbers *a* and *b*. Both numbers, *a* and *b*, are called **factors** (or multipliers), and *c* is the **product** of *a* and *b*.

Операція **ділення** чисел ґрунтується на операції їх множення. Нехай дано будь-які числа *a* і *b*. Тоді

The operation of **division** of two numbers is derived from the operation of multiplication. Given any two real numbers *a* and *b*,

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = c,$$

де *c* – результат ділення *a* на *b*. Отже, щоб розділити *a* на *b*, треба *a* помножити на число, зворотне до *b*. Це означає, що множення та ділення є зворотними операціями стосовно один одного. У наведеній вище формулі *a* називається **діленим**, *b* – **дільником**, а результат *c* – **часткою** від ділення *a* на

where *c* is the result of the division of *a* by *b*. Thus, to divide *a* by *b*, the inverse of *b* is multiplied by *a*. This means that multiplication and division are inverse operations to each other.
In the above formula, *a* is called the **dividend**, *b* is the **divisor**, and *c* is the **quotient** of *a* and *b*.

b.

Правильність зробленого ділення перевіряється множенням, так як частка від ділення *a* на *b* це таке число, яке потрібно помножити на *b*, щоб отримати *a*:

One can use multiplication to test whether the result of the division is true, because the quotient of *a* and *b* is a number *c* by which the number *b* is multiplied to produce *c:*

$$c = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad a = bc$$

1.2. Читання математичних формул

1.2. Reading of Mathematical Formulas

Таблиця 2 / **Table 2**

Читання формул	Формули / Formulas	Reading of Formulas
• *a* плюс *b* • Сума *a* і *b*.	$a + b$	• *a* plus *b* • The sum of *a* and *b*.
• *a* мінус *b* • Різниця між *a* і *b*.	$a - b$	• *a* minus *b* •The difference between *a* and *b*.
Плюс чи мінус. *a* плюс чи мінус *b*.	$\pm$ $a \pm b$	Plus or minus *a* plus or minus *b*
Мінус чи плюс *a* мінус чи плюс *b*	$\mp$ $a \mp b$	minus or plus *a* minus or plus *b*
• *ab* • *a* помножене на *b*. • Добуток *a* і *b*.	ab $a \cdot b$	• *ab* • *a* times b • The product of *a* and *b*.
• *a* поділене на *b*. • Частка від ділення *a* на *b*. • Дріб *a* на *b*. • Відношення *a* до *b*	$a \div b$ $\frac{a}{b}$ a/b	• *a* over *b*. • *a* divided by *b*. • The quotient of *a* and *b*. • The ratio of *a* to *b*.

ab поділене на *cd*	$\frac{ab}{cd}$	*a* times *b* over *c* times *d*
Одна друга	$\frac{1}{2}$	One half
Одна третя	$\frac{1}{3}$	One third
Одна четверта	$\frac{1}{4}$	One quarter
Одна *n*-а	$1/n$	One *nth* One over *n*
Десяткова крапка	.	Decimal point
Дві цілих (і) сімдесят дев’ять сотих	2.79	Two point seventy nine
Круглі дужки	( )	Parentheses.
a в дужках	(a)	• *a* in parentheses • parenthesis *a* parenthesis • parenthesis (open) *a* parenthesis (close) • (initial) parenthesis *a* (final) parenthesis
• *a* дужка відкривається *b* плюс *c* дужка закривається. • *a* помножити на суму *b* і *c*.	$a(b+c)$	• *a* parenthesis *b* plus *c* parenthesis • *a* parenthesis open *b* plus *c* parenthesis close
a розділити на *b*, помножене на *c* плюс *d* в дужках	$\frac{a}{b(c+d)}$	*a* over *b* times *c* plus *d* in parentheses
• У дужках *a* розділити на *b*, помножити на *c* і плюс *d*.		• *a* over *b* times *c* plus *d* in parentheses.

• Відкрити дужку, *a* розділити на *b*, отриманий дріб помножити на *c* плюс *d*, закрити дужку.	$\left(\frac{a}{b}c+d\right)$	• Parenthesis, *a* over *b*, this fraction multiplied by *c* plus *d*, parenthesis.
Квадратні дужки. *a* в квадратних дужках	[ ] $[a]$	Brackets. *a* in brackets.
Квадратна дужка відкривається, *a* плюс *b*, квадратна дужка закривається, помножити на *c*	$[a+b]\,c$	Bracket (open) *a* plus *b* bracket (close) multiplied by *c*.
Фігурні дужки	{ }	Braces.
Фігурна дужка відкривається, *a* плюс *b*, фігурна дужка закривається, помножити на *c*	$\{a+b\}\,c$	Brace (open) *a* plus *b* brace (close) multiplied by *c*.
a дорівнює *b*	$a = b$	• *a* equals *b* • *a* is equal to *b*
a не дорівнює *b*	$a \neq b$	*a* is not equal to *b*.
a тотожно дорівнює *b*.	$a \equiv b$	*a* is identical with *b*.
a приблизно дорівнює *b*.	$a \approx b$	• *a* is approximately equal to *b*. • *a* is nearly equal to *b*.
a менше *b*	$a< b$	• *a* is less than *b*.
a більше *b*	$a>b$	• *a* is greater than *b*.
Не більше (менше або дорівнює)	$\leq$	Less or equal to.
• *a* менше або	$a \leq b$	• *a* is less than or

дорівнює *b* • *a* не більше *b*		equal to *b*. • *a* is not greater than *b*.
Не менше (більше або дорівнює)	$\geq$	Greater or equal to.
• *a* більше або дорівнює *b* • *a* не менше *b*	$a \geq b$	• *a* is greater than or equal to *b*. • *a* is not less than *b*.
a набагато менше *b*	$a \ll b$	*a* is much less than *b*.
a набагато більше *b*	$a \gg b$	*a* is much greater than *b*.
Номер Номер 5 Натуральне число Натуральні числа	# #5 Natural # Natural #s	Number. Number five. Natural number. Natural numbers.
Стрілка	$\rightarrow$	Arrow.
І так далі (три крапки).	$\ldots$	Leader.
Один плюс два, плюс три і так далі	$1+2+3\ldots$	One plus two plus three point, point, point
• Означає. • Тягне за собою.	$\Rightarrow$	This implies.
• Рівність *a*=*b* тягне за собою рівність *b*=*a* • Якщо *a*=*b*, то *b*=*a* • З рівності *a*=*b* випливає рівність *b*=*a*	$a=b \quad \Rightarrow \quad b=a$	• The equality *a*=*b* implies *b*=*a*. • If *a*=*b* then *b*=*a*.

1.3. Основні визначення і позначення

Для наочного зображення чисел можна використовувати числову вісь, яка представляє собою пряму лінію з обраним на ній початком відліку і масштабом. Початком відліку слугує точка нуль, так що всі числа можна

1.3. Basic Definitions and Notations

The set of all numbers can be graphically represented on the real number line, that is, such a straight line, on which the origin and a scale are chosen. The number zero is used as the порівнювати з нулем.

Ті числа, які більше нуля, називаються **додатніми:**

origin, and so any numbers can be compared with zero.

Numbers are called **positive** if they are greater than zero:

$$a > 0 .$$

Додатнім числам відповідають точки на числовій осі, розташовані праворуч від нуля. Всі додатні числа впорядковані в порядку зростання зліва направо (з правого боку від нуля).

All positive numbers are represented by points that lie to the right of the number zero. All positive numbers are ordered, in ascending order from left to right, to the right side of zero.

Ті числа, які менше нуля, називаються **від'ємними.**

Numbers are called **negative** if they are less than zero.

$$a < 0$$

Від'ємним числам відповідають точки на числовій осі, що лежать зліва від нуля.

All negative numbers are represented by points to the left of the number zero.

Число нуль відокремлює додатні числа від від'ємних і не є ні додатнім, ні від'ємним.

The number zero is an intermediate value between positive and negative numbers. It is neither positive nor negative number.

Натуральні числа являють собою числа виду

Natural numbers are the numbers such as

$$1,2,3,4, \ldots$$

Цілі числа це числа виду

Integers are the following numbers:

$$...,3,2,1,0,1,2,3...,$$

Можна сказати й інакше: до цілих чисел відносяться всі натуральні числа, натуральні числа зі знаком мінус, а також нуль.

One can also say that the set of integers consists of all natural numbers, the negative of the natural numbers, and the number zero.

Множину всіх цілих чисел можна розбити на два класи: парні і непарні числа.

The set of all integers can be subdivided into the two classes of numbers: either even or odd.

Парні числа це такі цілі числа, які діляться на число два без залишку. Так, якщо n - будь-яке ціле число, то число $m=2n$ - є парним.

An **even** number is an integer that is divisible by the number two. If n is any integer, then the number $m=2n$ is even.

Ціле число m називається **непарним**, якщо число $m/2$ не є цілим. якщо n - будь-яке ціле число, то число $m=2n+1$ є непарним.

A number m is called an **odd** number, if only m is an integer but non $m/2$.

Число називається **раціональним,**

A number is called a **rational** number, if it can be expressed exactly as the якщо його можна представити у вигляді відношення цілих чисел m і n, де $n \neq 0$.

quotient of two integers m and n, where $n \neq 0$.

Всі цілі числа є раціональними, так як будь-яке ціле число m завжди можна подати у вигляді відношення цілих чисел m і 1.

All integers are also rational numbers, because any integer m can be expressed by the quotient of two integers m and 1.

Крім того, раціональне число може бути представлено

In addition, a rational number can be also represented:

• або кінцевим десятковим дробом, наприклад,

• either by a terminating decimal, for instance,

$$\frac{3}{4} = 0.75$$

• або нескінченним періодичним дробом, наприклад,

• or a recurring decimal, for example,

$$\frac{15}{11} = 1.3636(36)...$$

Ірраціональними числами називаються такі числа, які можуть бути представлені у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

Conversely, **irrational** numbers are the numbers that can be expressed by non-repeating and non- terminating decimals.

Ніяке ірраціональне число не можна представити у вигляді відношення двох цілих чисел.

Any irrational number is not capable of being expressed as the quotient of two integers.

Приклади ірраціональних чисел:

Some **examples** of irrational numbers:

$$\sqrt{2} \approx 1.4142...$$

$$\pi \approx 3.141592...$$

$$e = 2.71828182845904523536028 74\ldots$$

До дійсних числах відносяться раціональні та ірраціональні числа.

Real numbers are either rational or irrational.

Приклади:

Examples:

• Число 5 є натуральним. Воно також є додатнім, цілим, непарним, раціональним і дійсним числом.

• Number 5 is natural. It is also positive, integer, odd, rational, and real.

• Раціональне від'ємне число є також дійсним, але не є натуральним. Однак нічого не можна сказати про те, чи є воно цілим числом.

• A rational and negative number is also real but not natural. However, one can not say whether it is an integer number or not.

Між множиною дійсних чисел і точками числової осі існує взаємно однозначна відповідність: кожна точка числової осі відповідає єдиному

There is a one-to-one correspondence between the set of real numbers and points on the real number line, that is, every point on this line corresponds to a дійсному числу; і навпаки - кожне дійсне число відповідає єдиній точці числової осі.

unique real number, and every real number can be paired with a unique point on this number line.

1.4. Властивості дійсних чисел

1.4. Properties of Real Numbers

Математичні перетворення алгебраїчних виразів базуються на таких властивостях дійсних чисел:

Most mathematical manipulations of algebraic expressions are based on the properties of real numbers. All real numbers have the following properties:

$$\text{I. } a = b \quad \Rightarrow \quad b = a$$

Ця властивість означає рівноправність правої і лівої частин рівності.

This property states equal rights for both sides of an equality.

$$\text{II. } \begin{cases} a = b \\ c = b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = c$$

Числа рівні між собою, якщо кожне з них дорівнює одному й тому числу.

Numbers are equal to each other if they are equal to the same number.

$$\text{III. } \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a + c = b + d$$

Рівність не порушиться, якщо до обох його частин додати рівні числа.

An equality holds valid if equal numbers are added to both its members.

$$\text{IV. } \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \quad \Rightarrow \quad ac = bd$$

Рівність не порушиться, якщо обидві його частини помножити на рівні числа.

Властивості III і IV дозволяють складати праві і ліві частини рівнянь, а також множити обидві частини рівнянь на однакові ненульові множники.

Якщо $f\ (a)$ позначає операцію над числом а, що приводить до єдиного результату, то справедливе і більш загальне твердження:

An equality holds valid if both its sides are multiplied by equal non- zero numbers.

Properties III and IV allow us to add term by term the left and right sides of equations as well as to multiply both sides of an equation by a non-zero factor.

If some operation $f\ (a)$ with respect to a number a gives a unique result then one can also formulate a more general statement:

$$a = b \quad \Rightarrow \quad f(a) = f(b)$$

$$\text{V.} \quad a + b = b + a$$

Від перестановки місць доданків сума не змінюється.

Це правило називають властивістю комутативності складання.

Items of a sum can be added in any order.

This rule is called the Commutative Law for Addition.

$$\text{VI.} \quad ab = ba$$

Від перестановки місць співмножників добуток не змінюється.
Це правило відоме як властивість комутативності щодо множення.

Factors can be multiplied in any order. This rule is known as the Commutative Law for Multiplication.

$$\text{VII.} \quad a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$$

Доданки можна групувати довільним чином.
Це правило називається властивістю асоціативності щодо додавання.

Addition items can be combined in any groups.
This property is called the Associative Law for Addition.

$$\text{VIII.} \quad a(bc) = (ab)c = abc$$

Співмножники можна об'єднувати в довільні групи.
Це правило називається властивістю асоціативності щодо множення.

Factors can be combined in any groups. This property is called the Associative Law for Multiplication.

$$\text{IX.} \quad a(b \pm c) = ab \pm ac$$

Читаючи цю рівність зліва направо, ми говоримо, що розкриваємо дужки.
Читаючи його справа наліво, ми говоримо, що виносимо загальний множник.

This property allows us to expand an expression.
We can also read the property from right to left as follows:
A common factor can be taken out.

$$\text{X.} \quad a + (-a) = -a + a = 0$$

Для будь-якого дійсного числа *a* існує, і до того ж єдине, число –*a*, яке в сумі з *a* дає нуль. Число – *a* називається зворотним до числа *a* щодо додавання.

For any real number *a*, there exists a unique number (−*a*) to which the given number is added to produce. The number (−*a*) is known as the additive inverse of *a*.

$$\text{XI.} \quad a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

Для будь-якого дійсного числа *a* існує, і до того ж єдине, число 1/*a*, яке при множенні на *a* дає одиницю.
Числа *a* і (1/*a*) є взаємно оберненими щодо множення. Тільки число нуль не має оберненого, так як операція ділення на нуль не визначена і, отже, число нуль не може бути дільником.

For any non-zero real number *a*, there exists a unique real number 1/*a* by which the given number is multiplied to produce unity.
The number 1/*a* is called the reciprocal (or multiplicative inverse) of *a*. Only the number zero has no the reciprocal. Division by zero is undefined, that is, the number zero cannot be a divisor.

XII. Якщо $ab = 0$, то $a = 0$ або $b = 0$, або *a* і *b* дорівнюють нулю одночасно.

If $ab = 0$ then at least one of the factors has to be equal to zero.

XIII. Якщо $ab \neq 0$, то $a \neq 0$ і $b \neq 0$

If $ab \neq 0$ then $a \neq 0$ and $b \neq 0$.

XIV. Для будь-яких дійсних чисел *a* і *b* виконується одна і тільки одна з таких умов:

$a > b$ (*a* більше *b*)

$a = b$ (*a* дорівнює *b*)

$a < b$ (*a* менше *b*)

For any real numbers *a* and *b* one and only one of the following conditions occurs:

$a > b$ (*a* is greater than *b*)

$a = b$ (*a* is equal to *b*)

$a < b$ (*a* is less than *b*).

Приклади:

Examples:

- $38 + 43 + 62 = (38 + 62) + 43 = 100 + 43 + 143$.
- $25 \cdot 73 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 73 = 100 \cdot 73 = 7300$.
- $18 \cdot 35 + 82 \cdot 35 = 35 \cdot (18 + 82) = 35 \cdot 100 = 3500$.
- $2 \cdot (7x + 4) - 10x = 14x + 8 - 10x = (14x - 10x) + 8 = 4x + 8$.
- $5x = 15a \quad \Rightarrow \quad x = 3a$
- $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y) + (x - y) = 5 + 3 \\ (x + y) - (x - y) = 5 - 3 \end{cases} \Rightarrow$
  $\begin{cases} x + y + x - y = 8 \\ x + y - x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 8 \\ 27 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$.

1.5. Перетворення слів у формули

1.5. Translating words into formulas

Завдання: Сформулювати у вигляді символьних виразів і рівнянь такі словесні речення:

Problem: Translate the following written expressions and sentences into symbolic expressions and equations.

1) Сума п'ятнадцяти і *a*: The sum of 15 and *a*:

$15 + a$.

2) Різниця між ігрек і *b*: The difference between *y* and *b*:

$y – b$.

3) Добуток дванадцяти на *x*: The product of 12 and *x*:

$12\,x$.

4) Частка від ділення двох на *b*: The quotient of 2 and *b*:

$^2\!/_b$.

5) Відношення ігрека до трьох: The ratio of *y* to 3:

$y : 3$.

6) Число *x*, зменшене на п'ять: A number *x* decreased by 5:

$x - 5$.

7) Число *b*, збільшене на сім: A number *b* increased by 7:

$b + 7$.

8) Число *c*, зменшене на сімдесят *x*: A number *c* decreased by 70 times *x*:

$c - 70x$.

9) x більше різниці між a і b:

x is greater than the difference between a and b:

$$x > a - b.$$

10) Добуток сімнадцяти на a менше b:

The product of 17 and a is less than b:

$$17a < b.$$

11) Сума c і двох дорівнює три:

The sum of c and 2 is 3:

$$c + 2 = 3.$$

12) z не менше ніж подвоєна різниця між x і y:

z is not less than twice difference between x and y:

$$z \geq x + y.$$

13) Подвоєне a мінус дев'ять дорівнює c:

Twice a minus 9 is equal to c:

$$2a - 9 = c.$$

14) Чверть від z, відмінусований з п'яти, дорівнює десяти:

A quarter of a number z subtracted from 5 equals 10:

$$5 - z/4 = 10.$$

15) Сума b і d збігається з подвоєним z:

The sum of b and d is the same as twice z:

$$b + d = 2z.$$

16) Якщо подвоєне x і плюс п'ять розділити на два, то отримаємо c мінус дев'ять:

If twice x plus 5 is divided by two, the result is c minus 9.

$$(2x+5)/2 = c - 9.$$

17) Двічі два - чотири:

Twice two makes four:

$$2 \cdot 2 = 4.$$

18) Добуток a на b вдвічі більше різниці між 7 і c, і вдвічі менше суми 7 і c:

The product of a and b is twice as large as the difference between 7 and c and twice as small as the sum of 7 and c:

$$ab = 2(7 - c) = (7 + c)/2 \, .$$

1.6. Абсолютні величини

1.6. Absolute Values

Абсолютна величина будь-якої дійсного числа a позначається символом $|a|$ і визначається такою формулою:

The **absolute value** of a real number a is denoted by the symbol $|a|$ and defined by the following formula:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases} \qquad (1).$$

Абсолютна величина невід'ємного числа збігається з самим числом, тоді як абсолютна величина негативного числа дорівнює числу, взятому з протилежним знаком.

The absolute value of a non- negative number is the number itself, while the absolute value of a negative number is the negative of the number.

$$|5| = 5, \quad |-5| = (-5) = 5, \quad |0| = 0.$$

Геометрична інтерпретація

Абсолютна величина дійсного числа дорівнює відстані від нуля до відповідної точки числової осі незалежно від напрямку. Відстань між точками a і b числової осі дорівнює $|a-b|$.

Абсолютні величини мають такі властивості:

Geometric interpretation

The absolute value of a real number is the distance between the corresponding point on the number line and the zero-point regardless of the direction. For any numbers a and b the distance between points a and b on the number line is $|a-b|$.

Absolute values have the following properties:

I. $|a| \geq 0$

II. $|-a| = |a|$

III. $|a-b| = |b-a|$

IV. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

V. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \quad (b \neq 0)$

VI. $|a|^2 = a^2$

1.7. Дроби

Дріб це вираз виду $\dfrac{a}{b}$, де a називається чисельником дробу, b - його знаменником. У чисельнику і знаменнику можуть стояти будь-які числа або вирази, проте знаменник не повинен дорівнювати нулю.

Дроби мають такі властивості:

1.7. Fractions

A **fraction** is an expression of the form $\dfrac{a}{b}$, where a and b are called, respectively, the **numerator** and **denominator**. The numerator and denominator can be represented by any real numbers or expressions. However, the denominator can no be equal to zero.

Fractions have the following properties:

I. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$

Дріб не зміниться, якщо його чисельник і знаменник одночасно помножити або розділити на одне й те саме ненульове число.

Завдяки цій властивості дріб можна:

• привести до іншого знаменника;

• перетворити до іншого виду, якщо розкласти чисельник і знаменник на множники, а потім скоротити загальні множники.

A fraction keeps its value if both the numerator and denominator are multiplied or divided by equal non- zero numbers.

One can use this property in order:

• to reduce the fraction to a different denominator;

• to simplify the fraction by factoring the numerator and denominator and reducing common factors.

Приклади:

Examples:

• $\dfrac{4}{5} = \dfrac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \dfrac{8}{10}$,

- $\frac{30}{45}=\frac{2\cdot3\cdot5}{3\cdot3\cdot5}=\frac{2}{3}$,
- $\frac{8x-4}{6x-3}=\frac{4(2x-1)}{3(2x-1)}=\frac{4}{3}$,
- $\frac{a^2-ab}{ab-b^2}=\frac{a(a-b)}{b(a-b)}=\frac{a}{b}$.

II. $$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Прочитаємо цю властивість зліва направо:
Щоб скласти дріб з однаковими знаменниками, потрібно скласти чисельники, зберігши попередній знаменник.
Тепер прочитаємо його справа наліво:
Дріб не зміниться, якщо кожний доданок чисельника розділити на знаменник і отримані результати скласти.
Аналогічно виконується віднімання дробів:

Let us read this property from left to right: In order to add fractions with common denominators, add together the numerators and keep the same denominator. We can also read the property from right to left: The fraction keeps its value if each term of the numerator is divided by the denominator and then the results are added. There is a similar rule for subtraction of fractions with equal denominators:

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

Дві останні формули можна об'єднати в одну:

Two last formulas can be combined into the following uniform rule:

III. $$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}.$$

IV. $$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{d}=\frac{ad}{cd}\pm\frac{cb}{cd}=\frac{ad\pm bc}{cd}.$$

Щоб скласти (або відняти) дроби з різними знаменниками, потрібно привести дроби до спільного знаменника і скласти (або відняти) дроби з однаковими знаменниками.

In order to add (or subtract) fractions with different denominators it is necessary to reduce the fractions to a common denominator by finding a common multiple of both denominators and then add (or subtract) the fractions with equal denominators.

Приклади:

Examples:

- $\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\frac{4\cdot3}{5\cdot3}-\frac{2\cdot5}{3\cdot5}=\frac{12-10}{15}=\frac{2}{15}$.
- $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}=\frac{c}{abc}+\frac{a}{abc}=\frac{c+a}{abc}$.

V. $$\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}.$$

Щоб помножити дроби, потрібно помножити окремо чисельники і

The numerator of the product of fractions is equal to the product of the окремо знаменники; потім поділити один результат на інший.

numerators, and the denominator equals the product of the denominators of all fractions.

VI.

$$a:\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b}.$$

Щоб поділити на дріб, треба помножити на зворотний дріб.

To divide a value by a fraction multiply it by the reciprocal fraction.

Приклад:

Example:

$$\frac{6a}{5b}:\frac{3}{b}=\frac{6a}{5b}\cdot\frac{b}{3}=\frac{6ab}{5b\cdot 3}=\frac{2a}{5}.$$

Рівні дроби називаються **пропорціями**. **Приклади** пропорцій:

Equivalent fractions are known as **proportions**. **Examples** of proportions:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\quad \frac{1}{x-2}=\frac{x}{4},\quad \frac{x-5}{3}=\frac{y+1}{2}.$$

Пропорції можна розв'язувати за правилом перехресного множення:

Proportions may be solved by cross multiplication using the cross product property:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad\Leftrightarrow\quad ad=bc.$$

З цього правила випливає, що

From this it follows that

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{d}{b}=\frac{c}{a}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

1.8. Множини

1.8. Sets

Множина є скінченною або нескінченною сукупністю об'єктів. Об'єкти називаються елементами (або членами) множини. Елементами множини можуть бути слова, числа тощо.

Для позначення множини зазвичай використовується одна з великих латинських букв.

Якщо множина A визначається переліком своїх елементів, то перелік поміщають в фігурні дужки, а елементи відокремлюють один від одного комами:

A = {перелік елементів}.

Приклад 1: Символічний запис $A=\{a, b, x\}$ означає, що A є множиною елементів a,b,x.

Твердження “x є елементом множини A”. записується символічно у вигляді $x\in A$.

Символічний запис $A\not\ni x$ означає, що x

A set is a finite or infinite collection of objects. The objects are called elements or members of the set. For instance, numbers or words can be elements of a set.

Sets are usually denoted by capital Latin letters. A pair of braces is used to enclose either elements of the set or its description list, using commas to separate the individual elements. If the set A is defined by a list of its elements, then it can be written in the following format:

A = {list of elements}.

Example 1: Let A be the set of the elements a,b,x. The set A is defined here by the list of its elements and so it can be denoted as $A=\{a, b, x\}$.

The statement “x is an element of the set A” is symbolized as $x\in A$.

Conversely, the statement “x is not an не є елементом множини *A*.

element of *A*” is written symbolically as $A \notin x$.

Приклад 2: Нехай *N* представляє собою множину натуральних чисел: $N = \{1,2,3,\ldots\}$.

Тоді символьний запис $7 \in N$ означає, що число сім є натуральним числом, тоді як запис $\sqrt{3} \notin N$ означає, що $\sqrt{3}$ не є натуральним числом.

Множину можна визначити й інакше, формулюючи принцип відбору елементів і вказуючи властивості, що їх характеризують. У цьому випадку використовується запис $A = \{\, x | P \,\}$, де розділовий символ "|" читається: "таких, що". Весь рядок читається так: "Множина *A* усіх елементів *x* таких, що кожний елемент *x* має властивість *P”*.

Множина, яка не містить елементів, називається порожньою множиною і позначається символом Ø.

Множина раціональних і ірраціональних чисел утворює множину дійсних чисел.

Example 2: Let *N* be the set of all natural numbers:
$N = \{1,2,3,\ldots\}$.

Then the notation $7 \in N$ means that the number seven is a natural number, and the notation $\sqrt{3} \notin N$ means that $\sqrt{3}$ is not any natural number.

A set can be also defined by describing the elements through their characterizing properties: “The set *A* of all elements *x* such that *x* has the property *P*”. In this case, the symbol “|” is used instead of the statement “such that”, and the set is written in the following format:

$$A = \{\, x | P \,\}.$$

If a set has no elements, it is called a **null** set or an **empty** set and it is denoted by the symbol Ø.

The set of all rational and irrational numbers is the set of real numbers

1.9. Інтервали

Підмножини дійсних чисел називають **інтервалами (**або **проміжками**).

Кінцевий інтервал являє собою безліч дійсних чисел, якому відповідає відрізок числової осі, обмежений точками *a* і *b*.

Нескінченний інтервал $(-\infty,\infty)$ не має граничних точок і представляє собою множину усіх дійсних чисел.

1.9. Intervals

Intervals are special subsets of real numbers.

A **finite** interval is a set of real numbers represented by a line segment of the number line between the two endpoints, *a* and *b*.

The **infinite** interval $(-\infty,\infty)$ has no endpoints and represents the set of all real numbers.

1.10. Піднесення до степеня

1.10.1. Читання формул

Таблиця 3

1.10. Exponentiation

1.10.1. Reading of Formulas

Table 3

Читання формул	Формули	Reading of Formulas
x у квадраті	x^2	*x* squered
x у кубі	x^3	*x* cubed
• Два у кубі.	2^3	• The third power of 2.

• Два у третьому (мірі).		• Two cubed.
x у шостому	x^6	*x* to the power six
x у ступені *n*	x^n	*x* to the power *n*
x у ступені два на *n*	$x^{2/n}$	*x* to the power x over n
П'ять у ступені *x* мінус два.	5^{x-2}	Five to the power *x* minus 2
Корінь (квадратний) із x.	$\sqrt{x}$	The square root of *x*
Корінь з семи.	$\sqrt{7}$	The square root of seven.
Корінь п'ятого ступеня з *x*.	$\sqrt[5]{x}$	The fifth root of *x*.
Корінь *n*- го ступеня із *x*.	$\sqrt[n]{x}$	The *n*th root of *x*.
• Корінь з *a* плюс три плюс *b* в квадраті. • Корінь квадратний, під коренем a плюс в дужках сума трьох і b в квадраті.	$\sqrt{a+(3+b)^2}$	• The square root of *a* plus three plus *b* squared. • The square root of *a* plus the sum of three and *b* in parentheses squared.
• *x* один два дорівнює мінус *b* плюс мінус корінь квадратний з *b* у квадраті мінус чотири *ac*, все розділити на два *a*. • *x* один два дорівнює дробу, в чисельнику мінус *b*, плюс мінус корінь квадратний, під коренем *b* в квадраті мінус чотири *ac*, в знаменнику два *a*.	$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	• *x* sub one comma two equals minus *b* plus or minus the square root of *b* squared minus four *a* times *c* over two *a*. • *x* sub one and two equals long fraction bar, above the fraction bar minus *b* plus or minus the square root of *b* squared, minus four *a* times *c* below the fraction bar two times *a*.

1.10.2. Загальні правила

У виражені x^a величина *x* називається основою, *a* - показником ступеня, а сам вираз x^a читається як *x* у ступені *a*.

Приклад: У виразах $x^3, 2^4, 5^y$ і 3^n,показниками ступеня є, відповідно, 3, 4, *y* і *n*.

Для ступеневих виразів справедливі такі правила, які широко застосовуються у алгебраїчних

1.10.2. Common Rules

In the expression x^a the quantity *x* is called the **base,** *a* is the **exponent** of the power, and x^a is the *a*th power of *a* or *x* raised to the *a*th power.

Example: The exponents of the quantities $x^3, 2^4, 5^y$ and 3^n are, respectively, 3, 4, *y* and *n*.

The following rules are useful in algebraic manipulations involving перетвореннях.

exponents:

$$x^0 = 1 \qquad (4)$$
$$x^a x^b = x^{a+b} \qquad (5)$$
$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \qquad (6)$$
$$x^{-a} = \frac{1}{x^a} \qquad (7)$$
$$\left(x^a\right)^b = x^{ab} \qquad (8)$$
$$(xy)^a = x^a y^a \qquad (9)$$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a} \qquad (10)$$

Приклади:

Examples:

- $a^2 a^7 = a^9; \qquad \left(a^2\right)^7 = a^{14};$
- $x^3 x^5 / x^6 = x^{3+5-6} = x^2;$
- $\dfrac{x^{-7}}{\left(x^{-2}\right)^3} = \dfrac{x^{-7}}{x_{-6}} = x^{-7-(-6)} = x^{-1} = \dfrac{1}{x};$
- $\dfrac{\left(x^3\right)^5 x^{-4}}{x^{11}} = x^{15-4-11} = x^0 = 1.$

1.10.3. Ступені з дробовими показниками

Нехай n – натуральне число.

Тоді вираз $x^{\frac{1}{n}}$ називається коренем n-го ступеня із x і позначається символом $\sqrt[n]{x}$.

Таким чином,

1.10.3. Rational Exponents

Let n be a natural number.
Then the power of x with the exponent of the form $\frac{1}{n}$ is called the nth root of x and denoted symbolically as $\sqrt[n]{x}$.
Therefore,

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Корінь другого ступеня називається квадратним коренем, а корінь третього ступеня - кубічним коренем. При запису квадратного кореня його показник опускають і пишуть просто $\sqrt{x}$.

The second root of x is called the square root of x, and the third root is known as the cube root. The index of the square root is omitted from the expression, that is, the square root of the number x is written as $\sqrt{x}$.

Приклади:

• Рівняння $x^2 = 25$ має два розв'язки: $x = \pm 5$. Тому два числа, 5 і (-5), є коренями квадратними з числа 25. Арифметичне ж значення кореня дорівнює 5.

Examples:

• The equation $x^2 = 25$ has the two solutions: $x = \pm 5$, that is, both numbers, 5 і (-5), are the square roots of 25. The principal square root of 25 is 5.

Приклади:

Examples:

- $\sqrt{3^2} = |3| = 3, \ \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3,$
- $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = 4\sqrt{3},$
- $\sqrt{a^3 - a^2} = \sqrt{a^2(a-1)} = |a|\sqrt{a-1}.$

2. Алгебраїчні вирази

2. Algebraic Expressions

2.1. Вступ

2.1. Introduction

Константа це символ, який використовується для опису величини, що не змінюється.

Змінна це символ, який використовується для опису величини, що приймає різні значення.

Алгебраїчний вираз це сума членів, кожен з яких представляє собою добуток констант і будь-якого числа змінних. Змінні також називають символьними величинами, а постійні множники членів - їх **коефіцієнтами**.

Член, що містить в своєму добутку тільки константи, називається **постійним** членом.

Ступінь члена визначається сумою показників ступеня його змінних.

Члени, що відрізняються один від одного тільки своїми коефіцієнтами, називаються **подібними.** Подібні члени можна групувати і представити у вигляді одного члена, коефіцієнт якого дорівнює сумі коефіцієнтів подібних членів. Така процедура називається **приведенням подібних.**

Алгебраїчний вираз приймає числове значення, якщо замість змінних підставити числа. Такий процес називаються **обчисленням** алгебраїчного виразу

A **constant** is a symbol that represents a quantity assumed to be unchanged throughout a given discussion.

A **variable** is a symbol used to represent a quantity that may assume any given value or set of values.

An **algebraic expression** is an additive combination of any number of terms. A **term** is a product with an unspecified number of variables and constants. The variables of a term are said to be **literal factors**, and the product of the constants is called the **coefficient** of the term.

A term, whose factors are only constants, is called a **constant** term.

The **degree** of a term is the sum of the exponents of its variables.

Terms that have the same literal factors but differ only in their numerical coefficients are called **similar terms**. By applying the distributive property, two or more similar terms can be combined into one term. The new term has the same literal factors as the similar terms, but its coefficient is the sum of the coefficients of the similar terms. This procedure is known as **combining similar terms**.

The algebraic expression takes on a numerical value when numbers substitute for variables. This process is known as **evaluating** algebraic expression.

Приклад:

Членами алгебраїчного виразу

Example:

The terms of the algebraic expression

$$7x^3 - 8x^{-1}y^2 + 3x + 5 - 9x$$

є, відповідно, $7x^3, 8x^{-1}y^2, 3x, 5, -9x$ та $(-9x)$. Ступінь члена $7x^3$ дорівнює трьом.

Два члени, $3x$ і $(-9x)$, є подібними і можуть бути представлені єдиним членом $(-6x)$. Тому цей вираз зводиться до виду $7x^3 - 8x^{-1}y^2 - 6x + 5$ і може бути обчислений, наприклад, підстановкою $x = 2$ та $y = 3$:

are, respectively, $7x^3, 8x^{-1}y^2, 3x, 5, -9x$ and $(-9x)$. The degree of the term $7x^3$ equals 3.

Two terms, $3x$ and $(-9x)$, have the same literal factor, so they are similar terms and can be combined into the single term $(-6x)$. The given expression is reduced to the form $7x^3 - 8x^{-1}y^2 - 6x + 5$ and can be evaluated by setting, *e.g.*, $x = 2$ and $y = 3$:

$$7 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^{-1} \cdot 3^2 - 6 \cdot 2 + 5 = 56 - 36 - 12 + 5 = 13.$$

2.2. Многочлени

Многочленом називається вираз, всі змінні якого мають тільки цілі невід'ємні показники ступеня.

Ступінь многочлена визначається ступенем члена, що має найбільший ступінь.

2.2. Polynomials

An algebraic expression is called a **polynomial** if all variables of its terms have only non-negative integer exponents.

The degree of a polynomial is the degree of the term with the highest degree.

Приклади:

- Ступінь одночлена 5 x^3z дорівнює чотирьом.
- Многочлен $2x-9y$ – є біномом першого ступеня.
- Многочлен $3x + 4x^2yz^4 - yz^3$ є тричленом сьомого ступеня.

Многочлен однієї змінної є виразом виду

Examples:

- The polynomial 5 x^3z is a monomial of degree 4
- The polynomial $2x - 9y$ is a binomial of degree 1.
- The polynomial $3x + 4x^2yz^4 - yz^3$ is a trinomial of degree 7.

A polynomial with a single variable is an expression that can be written in the following form:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

де x – змінна, a_k – коефіцієнти многочлена $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

where x – the variable and a_k – coefficients of the polynomial $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

2.3. Алгебраїчні перетворення

2.3.1. Розкладання на множники

Фраза "розкласти на множники" означає "представити математичний вираз у вигляді добутку двох або більшого числа множників". Вираз, записаний у вигляді добутку, зазвичай

2.3. Algebraic transformations

2.3.1. Factoring

The wording “factoring” means “to express a mathematical quantity as a product of two or more quantities”. This procedure often gives simpler expressions.

має більш простий вигляд.

Так, наступний вираз $(x+y^2)(2x-y)^3(x^2+3y)^4$ є многочленом двох змінних, що містить 36 членів.

For instance, the following expression $(x+y^2)(2x-y)^3(x^2+3y)^4$ is a polynomial with two variables and 36 terms.

Приклади: Розкласти вирази на множники:

Examples: Factor the following expressions into irreducible factors:

- $15a-6a^2=3a(5-2a).$
- $x^2+2x-3=x^2-x+3x-3$
  $=x(x-1)+3(x-1)=(x-1)(x+3).$
- $a^2+2ab-3a-6b=a(a+2b)-3(a+2b)$
  $=(a+2b)(a-3).$

Завдання 1: Розкласти на множники різницю квадратів a^2-b^2

Завдання 2: Розкласти на множники різницю кубів: a^3-b^3

Завдання 3: Розкласти на множники квадратний тричлен $a^2+2ab+b^2$.

Problem 1: Factor the difference between two squares a^2-b^2

Problem 2: Factor the difference between two cubes: a^3-b^3

Problem 3: Factor the quadratic trinomial $a^2+2ab+b^2$.

2.3.2. Формули скороченого множення

2.3.2. Expanding

У деяких випадках потрібно виконати перетворення, зворотне розкладанню на множники. При цьому ми говоримо, що розкриваємо дужки. В результаті такої операції ступеня і добутку перетворяться у суму, а алгебраїчний вираз записується в іншому вигляді.

Прочитаємо формули (2) - (9) справа наліво.

In many cases one needs the inverse operation to factoring, which is called expanding. Due to expanding of powers or a product of items we can get another form of the algebraic expression and write down the result as a sum of terms.

Let us read formulas (2) – (9) from right to left.

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2. \qquad (10)$$

Добуток різниці основ на їх суму дорівнює різниці квадратів основ.

The product of the difference between the bases and the sum of bases is equal to the difference between the bases squared.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3. \qquad (11)$$

Добуток суми основ на неповний квадрат їх різниці дорівнює сумі кубів основ.

The product of the sum of the bases and the imperfect square of their difference is equal to the sum of the bases cubed.

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3. \qquad (12)$$

Добуток різниці основ на неповний квадрат їх суми дорівнює різниці кубів основ.

The product of the difference between the bases and the imperfect square of their sum is equal to the difference between the bases cubed.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad (13)$$

Квадрат суми двох чисел дорівнює квадрату першого числа, плюс подвоєний добуток першого числа на друге, плюс квадрат другого числа.

The second power of the sum of two numbers equals the first number squared, plus twice product of the numbers and plus the second number squared.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \quad (14)$$

Квадрат різниці двох чисел дорівнює квадрату першого числа, мінус подвоєний добуток першого числа на друге, плюс квадрат другого числа.

The second power of the difference between two numbers equals the first number squared, minus twice product of the numbers and plus the second number squared.

Постарайтеся завчити вищенаведені словесні формулювання як вірші.

Try to memorize the above wording as rhymes.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \quad (15)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \quad (16)$$

3. Алгебраїчні рівняння і нерівності

3. Algebraic Equations and Inequalities

3.1. Лінійні рівняння

3.1. Linear Equations

Лінійне рівняння з однією змінною можна представити у вигляді:

A linear equation in one variable can be put into the following form:

$$ax + b = 0, \quad (1)$$

де a і b - константи ($a \neq 0$), x - змінна.

where a and b are constants ($a \neq 0$), and x is the variable.

Приклад 1: Щоб розв'язати рівняння

In order to solve the equation

$$a_1x + b_1 = a_2x + b_2,$$

необхідно його перетворити до виду:

it is necessary to transform it into the following form:

$$(a_1 - a_2)x = b_2 - b_1. \quad (2)$$

Якщо $a_1 \neq a_2$, то це рівняння має розв'язок

If $a_1 \neq a_2$, then the solution for the given equation is

$$x = (b_2 - b_1)/(a_1 - a_2).$$

Якщо $a_1 = a_2$ і $b_1 = b_2$, то рівняння перетворюється у тотожність $0 \cdot x = 0$, тобто задовольняється за будь-яких значеннях x.

Якщо $a_1 = a_2$, але $b_1 \neq b_2$, то рівняння не має рішень.

If $a_1 = a_2$ and $b_1 = b_2$ then equation (2) is the identity $0 \cdot x = 0$. Therefore, any number x will make the true sentence in this equation.

If $a_1 = a_2$ but $b_1 \neq b_2$, then the given equation has no solutions.

3.2. Лінійні нерівності

3.2. Linear Inequalities

Лінійну нерівність з однією змінною

A linear inequality in one variable is

можна уявити в одній з таких форм:

that inequality, which can be put into one of the following forms:

$$ax+b>0, \qquad (3a)$$

$$ax+b\geq 0. \qquad (3b)$$

Тут a та b - константи ($a \neq 0$), x - змінна.

In these formulas and b are constants ($a \neq 0$), and x is a variable.

Нерівність (3a) називається строгим, тоді як нерівність (3b) - нестрогим. Єдина відмінність цих нерівностей полягає в тому, що в одному випадку гранична точка інтервалу входить в множину рішень, а в іншому - не входить.

Inequality (3a) is called a strict inequality while inequality (3b) is an unstrict inequality. The only difference between these inequalities is whether the endpoint of the interval is included in the solution set or not.

Процедура розв'язку нерівностей багато в чому аналогічна процедурі розв'язку рівнянь, але грунтується вже на властивостях нерівностей.

The procedure of solving inequalities is similar to that of equations, except that the properties of inequalities apply.

Приклад 2: Розв'язати нерівність:

Example 2: Solve the following inequality:

$$-5x+3\geq 2x+17.$$

Розв'язок: Щоб розв'язати лінійну нерівність, потрібно в її лівій частині згрупувати всі члени, що містять змінну, а всі інші члени перенести в праву частину:

Solution: In order to solve a linear inequality it is necessary to group together all terms with the variable on the left-hand side of the inequality and to eliminate from this side other terms:

$$-5x+3\geq 2x+17 \quad \Rightarrow$$

$$-5x+3-2x-3\geq 2x+17-2x-3 \quad \Rightarrow$$

$$-7x\geq 14.$$

Щоб записати розв'язок, потрібно розділити обидві частини отриманої нерівності на від'ємне -7 число і змінити знак нерівності на зворотний: $x\leq -2$.

Divide both sides of this inequality by the negative number -7 and reverse the inequality symbol to get the solution set: $x\leq -2$.

3.3. Лінійні рівняння, які містять $|ax+b|$

3.3. Linear Equations Involving the Absolute Value $|ax+b|$

Щоб розв'язати рівняння, що містить $|ax+b|$, слід звільнитися від символів абсолютної величини. Для цього потрібно розглянути два можливих випадки.

In order to solve an equation involving the absolute value $|ax+b|$ it is necessary to remove the absolute value symbol. This can be done by considering two possible cases.

Випадок 1: Якщо $ax+b\geq 0$, то знак абсолютної величини можна просто

Case 1: If the expression represents a positive quantity then the absolute value symbol can be simply dropped.

опустити:

$$ax+b\geq 0 \quad\Rightarrow\quad |ax+b|=ax+b.$$

Випадок 2: Якщо $ax+b<0$, то символи абсолютної величини можна також опустити, але при цьому потрібно змінити знак перед виразом $ax+b$

If the expression $ax+b$ represents a negative quantity then the absolute value symbol can be also dropped but a minus sign has to be written in front of ($ax+b$)

$$ax+b<0 \quad\Rightarrow\quad |ax+b|=-(ax+b).$$

Таким чином, вихідне рівняння еквівалентне двом лінійним рівнянням, який не містить символів абсолютної величини.

Therefore, instead of the original equation we obtain two linear equations, each of which does not contain the absolute value symbol.

Отже, завдання зводиться до проблеми, вже розглянутої раніше.

Hence, the problem is reduced that considered above.

Приклад 3: Розв'язати рівняння

Example 3: Solve the equation

$$|2x+3|=9-x.$$

Розв’язок:

Solution:

Випадок 1: Якщо $2x+3\geq 0$, що еквівалентно $x\geq -3/2$, то знак абсолютної величини можна просто опустити. Тоді

Case 1: If $2x+3\geq 0$, that means $x\geq -3/2$, then the absolute value symbol can be simply dropped. Therefore,

$$|2x+3|=9-x \quad\Rightarrow\quad 2x+3=9-x \quad\Rightarrow$$
$$3x=6 \quad\Rightarrow\quad x=2,$$

за умови, що $x\geq -3/2$.

provided that $x\geq -3/2$.

Умова виконується.

That is certainly true.

Випадок 2: Якщо $2x+3<0$, що означає $x<-3/2$, то при опусканні символу абсолютної величини вираз $(2x+5)$ береться зі знаком мінус:

Case 2: If $2x+3<0$, that means $x<-3/2$, then we drop the absolute symbol and write down the minus sign in front of the expression $(2x+5)$

$$|2x+3|=9-x \quad\Rightarrow\quad -(2x+3)=9-x \quad\Rightarrow\quad x=-12.$$

Це значення задовольняє необхідній умові $x<-3/2$.

This value obeys the condition $x<-3/2$.

Об'єднуючи розв'язки, отримані у вище розглянутих випадках, ми отримуємо безліч розв'язків цього рівняння:

The solution set is the union of the two solutions involving case 1 and case 2. Thus, the solution set for the given equation is the following:

$$\{x|x=-12, x=2\}.$$

Приклад 4: Розв'язати рівняння

Example 4: Solve the equation

$$|2x+15|=3x-5.$$

Розв'язок:

Випадок 1:

$$\begin{cases} 2x+15=3x-5 \\ 2x+15\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=20 \\ x\geq -15/2 \end{cases} \Rightarrow x=20.$$

Випадок 2:

$$\begin{cases} -(2x+15)=3x-5 \\ 2x+15<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x<-15/2 \end{cases}.$$

Виникло протиріччя і, отже, $x=-2$ не є розв'язком даного рівняння. В цьому випадку розв'язком є порожня множина Ø.

Таким чином, рівняння має тільки один розв'язок: $x = 20$.

Solution:

Case 1:

Case 2:

This is a contradiction. Therefore, the value $x = -2$ is not the solution for the considered equation, and the solution set in case 2 is the empty set Ø. Thus, the solution set for the given equation is the single value $x = 20$.

3.4. Лінійні рівняння, що містять абсолютні величини $|ax+b|$ і $|cx+d|$

Щоб розв'язати рівняння, що містить абсолютні величини $|ax+b|$ і $|cx+d|$, слід звільнитися від всіх символів абсолютної величини.

Нехай $x=x_1$ і $x=x_2$ є рішеннями рівнянь $ax+b=0$ і $cx+d=0$, відповідно. Отже, вираз $ax+b$ змінює свій знак у точці x_1, а вираз $cx+d$ – у точці x_2.

3.4. Linear Equations Involving Absolute Values $|ax+b|$ and $|cx+d|$

In order to solve a linear equation involving the absolute values $|ax+b|$ and $|cx+d|$ it is necessary to remove all absolute value symbols.

Let $x=x_1$ and $x=x_2$ be, respectively, the solutions of the equations $ax+b=0$ and $cx+d=0$. Therefore, the expression $ax+b$ changes its sign in the point x_1 while the expression $cx+d$ changes its sign in the point x_2.

3.5. Лінійні нерівності, які містять $|ax+b|$

Лінійні нерівності, що містять абсолютну величину $|ax+b|$, розв'язуються за тією ж схемою, що і відповідні рівняння.

По-перше, потрібно знайти точку, в якій вираз $ax + b$ змінює знак. Потім кожному з інтервалів $ax + b \geq 0$ та $ax + b < 0$ потрібно записати і вирішити стандартним способом звичайні лінійні нерівності, які не містять символів абсолютної величини. Далі потрібно вибрати такі рішення нерівностей, які

3.5. Linear Inequalities Involving Absolute Value $|ax+b|$

In order to solve a linear inequality involving the absolute value $|ax+b|$ it is necessary to use the same technique as in the case of equations.

First, find the point in which the expression changes its sign. Then in both cases $ax + b \geq 0$ and $ax + b < 0$, write down and solve the linear inequalities not involving the absolute value symbols. At this step the problem can be solved in the usual way, but the solution for each of these inequalities has to be tested to determine whether it належать відповідним інтервалам.

У деяких випадках рішення можна записати одразу, використовуючи властивості абсолютної величини:

belongs to the corresponding interval.
In some cases one can easily write the solution set in view of the following properties of absolute values:

$$|x-b|<a \quad \Rightarrow \quad b-a<x<b+a.$$

$$|x-b|\le a \quad \Rightarrow \quad b-a\le x\le b+a.$$

$$|x-b|>a \quad \Rightarrow \quad x\in(-\infty,b-a)\cup(b+a,+\infty).$$

$$|x-b|\ge a \quad \Rightarrow \quad x\in(-\infty,b-a]\cup[b+a,+\infty).$$

Приклад 6: Розв'язати нерівність

Example 6: Solve the inequality

$$|3x-1|<5.$$

Розв’язок:

Solution:

$$|3x-1|<5\Rightarrow 1-5<3x<1+5\Rightarrow -\frac{4}{3}<x<2.$$

Приклад 7: Розв'язати нерівність

Example 7: Solve the inequality

$$|4x+5|\ge 3.$$

Розв’язок:

Solution:

$$|4x+5|\ge 3\Rightarrow \begin{matrix} a)4x+5\le -3, \\ b)4x+5\ge 3. \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a)x\le -2, \\ b)x\ge -\frac{1}{2}. \end{matrix}$$

Таким чином, сукупність рішень даної нерівності є об'єднанням множин отриманих рішень:

The solution set for the given inequality is the union of the two solution sets:

$$\left\{x\middle|(x\le -2)\cup\left(x\ge -\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Приклад 8: Розв'язати нерівність

Example 8: Solve the inequality

$$|3x-1|\le 2x.$$

Розв’язок:

Solution:

$$|3x-1|\le 2x\Rightarrow -2x\le 3x-1\le 2x\Rightarrow$$

$$-2x-3x\le -1\le 2x-3x\Rightarrow -5x\le -1\le -x\Rightarrow$$

$$5x\ge 1\ge x\Rightarrow \frac{1}{5}\le x\le 1.$$

Приклад 9: Розв'язати нерівність

Example 9: Solve the inequality

$$|x+2|\le 5x-10.$$

Розв’язок:

Solution:

Випадок 1: якщо $x+2\geq 0,$ тоді

Case 1: If $x+2\geq 0,$ then

$$\begin{cases} |x+2|\leq 5x-10 \\ x+2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2\leq 5x-10 \\ x\geq -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x\geq 3 \\ x\geq -2 \end{cases} \Rightarrow x\geq 3.$$

Випадок 2: якщо $x+2<0,$ тоді

Case 2: If $x+2<0,$ then

$$\begin{cases} |x+2|\leq 5x-10 \\ x+2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(x+2)\leq 5x-10 \\ x<-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x\geq \frac{4}{3} \\ x<-2 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing.$$

У цьому випадку рішень не існує, так що безліч рішень даної нерівності складається з рішень, що стосується лише першого випадку: $x \in [3,+\infty)$.

Якщо нерівність містить дві або більше абсолютних величин, його розв'язок зводиться до розв'язку декількох лінійних нерівностей. Серед одержаних рішень потрібно зробити відбір таких, що потрапляють у відповідні інтервали. Їхня сукупність утворює безліч рішень нерівності.

There are no solutions in this case. Therefore, the solution set for the given inequality involves Case 1 only: $x \in [3,+\infty)$.

If an inequality involves two or more absolute values, then its solution involves solving three or more inequalities. Then it is necessary to select only such solutions that belong to the corresponding intervals. The solution set is the union of the solutions involving all cases.

3.6. Квадратні рівняння

3.6. Quadratic Equations

Квадратне рівняння може бути подане у вигляді

A **quadratic equation** can be written in the following form

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (5)$$

Де x – змінна; a, b та c – константи $(a\neq 0)$.

where *x* is the variable; *a* , *b* an d *c* are constants $(a\neq 0)$.

Рівняння (5) також називають рівнянням другого ступеня, оскільки в лівій його частині стоїть многочлен другого ступеня.

Since the expression on the left- hand side (5) is a quadratic polynomial so equation (5) is also called a second-degree equation.

Якщо розділити обидві частини

Equation (5) can be rewritten in the form of a monic quadratic equation by рівняння (5) на коефіцієнт a, то отримане рівняння називається квадратним рівнянням:

dividing both its sides by the numerical coefficient a:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0. \qquad (6)$$

Квадратні рівняння розв'язуються будь-яким з наступних методів:
• виділення повного квадрата;
• застосуванням формули;
• розкладанням на множники.

Quadratic equations can be solved using any of the following methods:
• completing the perfect square;
• applying the quadratic formula;
• factoring.

3.6.1. Виділення повного квадрату

Виділимо повний квадрат у лівій частині многочлена (6), додаючи та віднімаючи відповідну константу:

3.6.1. Completing the Perfect Square

Let us transform the quadratic polynomial on the left-hand side of equation (6) by adding and subtracting the constant to complete the perfect square:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}\right).$$

При цьому ми отримуємо рівносильне рівняння:

We get the equation which is equivalent to the original one:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}\right).$$

Зведемо праву частину до спільного знаменника:

Reduce the right side to the common denominator:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad (7)$$

Величина $D=b^2-4ac$ називається дискримінантом квадратного рівняння, а знак дискримінанта є важливою характеристикою рівняння.

Перепишемо рівняння (7) в термінах дискримінанту:

The value $D=b^2-4ac$ is called the discriminant of the quadratic equation. The sign of the discriminant is an important characteristic of the quadratic equation.

Let us rewrite equation (7) in terms of

the discriminant:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}. \qquad (8)$$

Можливі три випадки: $D<0, D=0$ та $D>0$.

There are three possible cases: $D<0, D=0$ and $D>0$.

Випадок 1: якщо $D<0$, тоді

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0.$$

If $D<0$, then

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0.$$

Суперечність, яка виникла, вказує на те, що рівняння (8) не має розв'язків на множині дійсних чисел.

This is a contradiction. Therefore, equation (8) has no real roots, that is, the solution set in Case 1 is the empty set Ø.

Випадок 2: якщо $D=0$, тоді

Case 2: If $D=0$ then

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

Отже, корені рівняння (8) збігаються один з одним:

Therefore, equation (8) has a twice repeated real root:

$$x_1=x_1=-\frac{b}{2a}. \qquad (9)$$

Випадок 3: якщо $D>0$, то можна отримати корені з обох частин рівності (8):

Case 3: If $D>0$ then by taking the square root of both sides of equation (8) we obtain:

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{D}}{2|a|}. \qquad (10)$$

3.6.2. Формула коренів квадратного рівняння

3.6.2. The Quadratic Formula

Рівність (10) можна представити у вигляді

The equality (10) can be rewritten in the following form

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (11)$$

Ця формула називається формулою коренів квадратного рівняння. Вона повністю усуває проблему вирішення рівняння (5).

Formula is known as the **quadratic formula.** It gives the complete solution for equation (5).

Приклади:

Examples:

•Рівняння $3x^2 - x + 4 = 0$ не має дійсних коренів, тому що дискримінант негативний:

•The equation $3x^2 - x + 4 = 0$ has no real roots because the discriminant is negative:

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -59 < 0.$$

• Рівняння $x^2 - 6x + 9 = 0$ має лише одне рішення $x = 3$, оскільки $D = 36 - 36 = 0$.

• The equation $x^2 - 6x + 9 = 0$ has a twice repeated real root $x = 3$ because $D = 36 - 36 = 0$.

• Відповідно до формули (11) коренями рівняння $x^2 + 6x + 5 = 0$ є $x_1 = -5$ і та $x_2 = -1$.

• In view of formula (11), the equation $x^2 + 6x + 5 = 0$ has the solution set $x_1 = -5$ and $x_2 = -1$.

3.6.3. Розкладання многочленів на множники

Розкладання многочлена на множники повністю вирішує проблему знаходження його коренів. Щоб краще зрозуміти взаємозв'язок між розкладанням многочлена на множники та знаходженням коренів рівняння, розглянемо, наприклад, квадратне рівняння (6).

Якщо $D < 0$, то рівняння не має дійсних коренів x_1 та x_2, так що многочлен $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ не можна розкласти на простіші множники.

Якщо $D = 0$, то корені рівняння (6) співпадають один з одним: $x_1 = x_2$. Це означає, що аналізований многочлен можна представити у вигляді

3.6.3. Factoring Polynomials

A polynomial equation can be solved by factoring the polynomial expression, that is, by representing it as the product of irreducible polynomials. In order to understand better the relation between factoring the polynomial and finding the solution set of the equation, let us consider, for instance, quadratic equation (6).

If $D < 0$, then the equation has no real roots, that is, the polynomial $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ is irreducible.

If $D = 0$, then the roots for equation (6) coincide with each other: $x_1 = x_2$. So the polynomial can be represented as

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)^2.$$

Якщо $D > 0$, то рівняння (8) має два різні дійсні корені, x_1 та x_2. Це означає, що многочлен $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ розкладається на два лінійні множники:

If $D > 0$ then equation (8) has two real roots, x_1 and x_2 ($x_1 \neq x_2$), that is, the polynomial $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ can be factored into two linear factors:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2).$$

Розкриємо дужки та спростимо цю тотожність:

Expand the expression on the right side and simplify this identity:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2 \Rightarrow$$
$$\left(\frac{b}{a}+x_1+x_2\right)x+\frac{c}{a}=x_1x_2. \qquad (12)$$

Тотожність повинна виконуватися за будь-яких значень x.
Нехай $x=0$, тоді

The identity has to be valid for any values of x. Let $x=0$, then

$$x_1x_2\equiv\frac{c}{a}. \qquad (13)$$

Отже,

Hence,

$$\left(\frac{b}{a}+x_1+x_2\right)x=0.$$

для будь-яких значень x. Тоді

for any x. Therefore,

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}. \qquad (14)$$

Формули (13) і (14) застосовуються як для знаходження коренів рівняння (6), так і для перевірки правильності одержаних рішень.

Formulas (13) and (14) can be used to find the roots of equation (6) as well as to test whether the found roots are correct.

Приклади:

Examples:

• Щоб розкласти на множники квадратний многочлен

• In order to factor the quadratic polynomial

$$x^2-4x-12,$$

спочатку додамо до нього і віднімемо x^2. Потім попарно згрупуємо доданки та винесемо загальні множники:

first, add and subtract the term x^2. Next group the terms by pairs, and then take out the common factors:

$$x^2-4x-12=\left(x^2+2x\right)-6x-12=$$
$$=x(x+2)-6(x+2)=(x+2)(x-6).$$

Така форма запису многочлена дозволяє знайти корені рівняння

This form of the polynomial gives the roots of the equation

$$2x^2-4x-12=0.$$

Розв'язаннями цього рівняння є $x=-2$ та $x=6$

The solution set for this equation is $x=-2$ and $x=6$

• Квадратне рівняння

• The quadratic equation

$$x^2-11x+24=0$$

легко розв'язується за допомогою формул (13) і (14):
$11=3+8$ та $24=3\cdot 8.$
Отже, рівняння має розв'язки $x=3$та $x=8$.
Перевірка: якщо $x=3$, то

can be easily solved by using formulas (13) and (14):
$11=3+8$ and $24=3\cdot 8.$
Therefore, the solution set for the equation is $x=3$and $x=8$.
Check up: If $x=3$, then

$$x^2-11x+24=0 \quad\Rightarrow\quad 3^2-33+24\equiv 0 \quad\Rightarrow\quad 0\equiv 0.$$

Рівняння перетворилось у тотожність.
Нехай тепер $x=8$. Тоді

That is true.
Now let $x=8$. Then

$$x^2-11x+24=0 \quad\Rightarrow\quad 8^2-88+24\equiv 0 \quad\Rightarrow\quad 0\equiv 0.$$

Перевірку виконано.
• Щоб розв'язати кубічне рівняння

That is true.
• The cubic equation

$$x^3+4x^2+x-6=0$$

потрібно розкласти многочлен на множники:

can be solved by factoring the polynomial:

$$x^3+4x^2+x-6=\left(x^3-x^2\right)+\left(5x^2-5x\right)+\left(6x-6\right)$$
$$=x^2(x-1)+5x(x-1)+6(x-1)=(x-1)\left(x^2+5x+6\right).$$

Тепер розкладемо на множники квадратний многочлен x^2+5x+6

Now factor the quadratic polynomial x^2+5x+6

$$x^2+5x+6=\left(x^2+2x\right)+(3x+6)=$$
$$=x(x+2)+3(x+2)=(x+2)(x+3).$$

Таким чином,

Thus,

$$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x+2)(x+3)=0.$$

Отже, рівняння має розв'язки $x=-3,\ x=-2$ і $x=1.$

Hence, the solution set is $x=-3,\ x=-2$ and $x=1.$

3.7. Ділення многочлена на многочлен

Якщо многочлен $P(x)$ перетворюється в нуль при $x=a$, то з теореми розкладу випливає, що $x-a$ – є одним із множників многочлена $P(x)$: $P(x)=(x-a)Q(x)$, де $Q(x)$ – невідомий многочлен.
Щоб знайти $Q(x)$, потрібно многочлен $P(x)$ розділити на $x-a$.
Покажемо процедуру поділу на конкретному прикладі.
Приклад: Зробимо заготовку для ділення кутом многочлена

3.7. Polynomial Long Division

If the polynomial $P(x)$ is equal to zero for $x=a$ then in view of the Factor Theorem $x-a$ – is a factor of the polynomial $P(x)$: $P(x)=(x-a)Q(x)$, where $Q(x)$ is an unknown polynomial.
The polynomial $Q(x)$can be found by the division of $P(x)$ by $x-a$.
Consider the division algorithm in detail for a particular example.
Example: To perform the polynomial long division of the polynomial x^3-4x^2+x+6 by $x-3$, write the expressions in the form of long

x^3-4x^2+x+6 на $x-3$, розташовуючи доданки в порядку зменшення ступенів:

division:

$$x^3-4x^2+x+6 \quad \big|\, \underline{x-3}$$

Потім поділимо член x^3, що містить старший ступінь у чисельнику, на аналогічний член x знаменника і запишемо відповідь x^2 нижче лінії:

Next, divide the leading term x^3 in the numerator of the given polynomial by the leading term x of the divisor and write the answer x^2 under the line:

$$x^3-4x^2+x+6 \quad \big|\, \frac{x-3}{x^2}$$

Помножимо x^2 на дільник $x-3$ і запишемо відповідь $x^2(x-3)=x^3-3x^2$ під многочленом чисельника, розташовуючи члени з однаковими ступенями один під одним:

Multiply the term x^2 by the divisor $x-3$ and write the answer $x^2(x-3)=x^3-3x^2$ under the numerator polynomial, lining up the terms of equal degree:

$$\begin{array}{l} x^3-4x^2+x+6 \\ x^3-3x^2 \end{array} \quad \big|\, \frac{x-3}{x^2}$$

Віднімаємо вираз в останній лінії з виразу у попередній:

Then subtract the last line from the line above it:

$$\begin{array}{l} x^3-4x^2+x+6 \\ - \\ \underline{x^3-3x^2} \\ -x^2+x+6 \end{array} \quad \big|\, \frac{x-3}{x^2}$$

Потім вся процедура повторюється: член $\left(-x^2\right)$ зі старшим ступенем отриманого многочлена ділимо на член x дільника, отримуємо $(-x)$ і додаємо цей результат до x^2 у правому стовпчику:

Now we have to repeat the procedure, that is, divide the leading term $\left(-x^2\right)$ of the polynomial in the last line by the leading term x of the divisor to obtain $(-x)$, and add this term to the x^2 under the line on the right- hand side:

$$\begin{array}{l} x^3-4x^2+x+6 \\ - \\ \underline{x^3-3x^2} \\ -x^2+x+6 \end{array} \quad \big|\, \frac{x-3}{x^2-x}$$

Помножуємо $(-x)$ на дільник $x-3$, записуючи результат $-x(x-3)=-x^2+3x$ під многочленом чисельника, один член під іншим з таким же ступенем:

Then multiply the term $(-x)$ by the divisor $x-3$ and write the answer $-x(x-3)=-x^2+3x$ under the last line polynomial, lining up terms of equal degree:

$$\begin{array}{l|l} x^3-4x^2+x+6 & x-3 \\ \hline - & \\ x^3-3x^2 & x^2-x \\ \hline -x^2+x+6 & \\ -x^2+3x & \end{array}$$

Віднімаємо вираз в останній лінії з виразу у попередній:

Subtract the last line from the line above it:

$$\begin{array}{l|l} x^3-4x^2+x+6 & \\ - & \\ x^3-3x^2 & x-3 \\ \hline \quad -x^2+x+6 & x^2-x \\ \quad -x^2+3x & \\ \hline \qquad\qquad -2x+6 & \end{array}$$

Тепер потрібно розділити $(-2x)$ на член x із старшим ступенем дільника, що дає (-2), і додати цей результат до виразу нижче лінії у правому стовпчику. Потім помножимо число (-2) на дільник $x-3$ і запишемо відповідь $-2(x-3)=-2x+6$ під многочленом чисельника, один член під іншим з таким самим ступенем:

At the next step we divide the term $(-2x)$ by the leading term x of the divisor to obtain (-2), and add this term to the expression under the line on the right-hand side. Then multiply the number (-2) by the divisor $x-3$ and write the answer $-2(x-3)=-2x+6$ under the last line polynomial, lining up terms of equal degree:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-4x^2+x+6 & x-3 \\ \cline{2-2}
-\quad x^3-3x^2 & x^2-x-2 \\ \cline{1-1}
\quad -x^2+x+6 & \\
\quad -x^2+3x & \\ \cline{1-1}
\qquad -2x+6 & \\
\qquad -2x+6 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Процедура ділення завершена, і ми отримуємо остаточно

Therefore, the division procedure is terminated. Thus, we finally get

$$\frac{x^3-4x^2+x+6}{x-3}=x^2-x-2.$$

Цей результат можна перевірити, помножуючи обидві частини останньої рівності на дільник:

The easiest way to check the answer algebraically is to multiply both sides by the divisor:

$$x^3-4x^2+x+6=\left(x^2-x-2\right)\left(x-3\right).$$

Спростимо праву частину:

Expand and simplify the expression on the right side:

$$\left(x^2-x-2\right)\left(x-3\right)=x^3-x^2-2x-3x^2+3x+6=x^3-4x^2+x+6.$$

Ми отримали тотожність і, відповідно, підтвердили правильність отриманого результату. Таким чином, многочлен x^3-4x^2+x+6 має вигляд добутку многочленів менших ступенів.

Thus, we have the identity and so the answer is correct. By polynomial long division, the polynomial x^3-4x^2+x+6 is factored, that is, it is written as the product of polynomials with lower degrees.

3.8. Квадратні нерівності

3.8. Quadratic Inequalities

Квадратну нерівність можна представити в одній із наступних форм:

A quadratic inequality can be put into one of the following forms:

$$ax^2+bx+c>0, \qquad (15a)$$

$$ax^2+bx+c\geq 0, \qquad (15b)$$

де x – змінна; a, b та c – константи $\left(a\neq 0\right)$.

where x is the variable; a, b and c are constants $\left(a\neq 0\right)$.

Щоб розв'язати квадратну нерівність, потрібно спочатку розв'язати відповідне квадратне рівняння:

In order to solve the quadratic inequality it is necessary to solve the corresponding quadratic equation:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Можливі три випадки: $D<0$, $D=0$ або $D>0$.

There are three possible cases: $D<0$, $D=0$ or $D>0$.

Якщо $D<0$, то рівняння не має дійсних коренів. Це означає, що вираз ax^2+bx+c зберігає свій знак при будь-яких значеннях x:

$ax^2+bx+c>0$, якщо $a>0$;

$ax^2+bx+c<0$, якщо $a<0$.

If $D<0$, then the equation has no real roots. Hence, the expression ax^2+bx+c holds its sign for any value of x:

$ax^2+bx+c>0$, if $a>0$;

$ax^2+bx+c<0$, if $a<0$.

Якщо $D=0$, то корені рівняння співпадають один з одним: $x_1=x_2$. Тому вираз ax^2+bx+c має той самий знак, що і коефіцієнт a – для всіх x, крім точки $x=x_1=x_2$, у якій многочлен дорівнює нулю.

If $D=0$, then the roots for the equation coincide with each other: $x_1=x_2$. So the expression ax^2+bx+c has the same sign as the coefficient a for all values x, except $x=x_1=x_2$, where it is equal to zero.

Якщо $D>0$, то рівняння має два дійсних корені, x_1 та x_2 $(x_1<x_2)$, а багаточлен ax^2+bx+c змінює свій знак під час переходу через точки x_1 та x_2. Ці точки розбивають числову вісь на три інтервали: $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) та (x_2, ∞).

Якщо $a>0$, то многочлен додатний на інтервалах $(-\infty, x_1)$ та (x_2, ∞), так що розв'язком нерівності (15a) є множина

If $D>0$, then the equation has two real roots x_1 and x_2 $(x_1<x_2)$, and the polynomial ax^2+bx+c, changes its sign when the variable x jumps over x_1 or x_2. These points divide the number line into three intervals: $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) and (x_2, ∞).

If $a>0$, then the polynomial is greater than zero on the intervals $(-\infty, x_1)$ and (x_2, ∞). Therefore, the solution set for inequality (15a) is the union of the sets $x<x_1$ and $x>x_2$:

$$\{x | x<x_1\} \cup \{x | x>x_2\}.$$

Якщо ж $a<0$, то розв'язком нерівності є множина $\{x | x_1<x<x_2\}$.

If $a<0$, then the solution set for the inequality is $\{x | x_1<x<x_2\}$.

При розв'язку нерівностей корисно використовувати числову вісь.

We can also use the number line to find

Приклади:

• Щоб розв'язати нерівність

$$x^2+2x-8>0$$

потрібно спочатку розв'язати рівняння

$$x^2+2x-8=0.$$

Це рівняння має два корені:

$x_1=-4$ та $x_2=2.$

Отже, сукупністю розв'язків нерівності є об'єднання множин $\{x|x<-4\}$ та $\{x|x>2\}$: $\{x|x<-4\}\cup\{x|x>2\}.$

• Щоб розв'язати нерівність

$$x^2-4x-5\le 0$$

потрібно знайти корені рівняння

$$x^2-4x-5=0.$$

Це рівняння має два корені:

$x_1=-1$ та $x_2=5.$

Отже $x^2-4x-5\le 0$, якщо $-1\le x\le 5.$

• Дано нерівність

$$x^2+6x+9>0.$$

Корені рівняння

$$x^2+6x+9=0$$

співпадають один з одним і дорівнюють – 3.

Отже $x^2+6x+9>0$, для будь-яких дійсних x, крім $x=-3.$

• Дано нерівність

$$x^2-4x+4\le 0.$$

Корені рівняння

$$x^2-4x+4=0$$

співпадають один з одним : $x_1=x_2=2.$

Це означає, що $x^2-4x+4>0$ при $x\ne 2$, і $x^2-4x+4=0$ при $x=2.$

Отже, нерівність задовольняється тільки при $x=2.$

• Розв'язати нерівність:

the solution set of the inequality.

Examples:

• In order to solve the inequality

$$x^2+2x-8>0$$

it is necessary to solve the equation

$$x^2+2x-8=0.$$

This equation has two real roots:

$x_1=-4$ and $x_2=2.$

Therefore, the solution set for the inequality is the union of the sets $\{x|x<-4\}$ and $\{x|x>2\}$: $\{x|x<-4\}\cup\{x|x>2\}.$

• In order to solve the inequality

$$x^2-4x-5\le 0$$

it is necessary to solve the equation

$$x^2-4x-5=0.$$

This equation has two real roots:

$x_1=-1$ and $x_2=5.$

Therefore, $x^2-4x-5\le 0$,if $-1\le x\le 5$

• Given the inequality

$$x^2+6x+9>0.$$

The equation

$$x^2+6x+9=0$$

has a twice repeated root $x_1=x_2=-3.$

Therefore $x^2+6x+9>0$ for any $x\in R$ except $x=-3$

• Given the inequality

$$x^2-4x+4\le 0.$$

The roots of the equation

$$x^2-4x+4=0$$

coincide with each other: $x_1=x_2=2.$

Hence, $x^2-4x+4>0$ if $x\ne 2$, and $x^2-4x+4=0$ if $x=2.$

Therefore, the solution set for the inequality is $x=2.$

• Solve the following inequality:

$$x^2-4x+5\le 0.$$

Оскільки рівняння

$$x^2-4x+5=0$$

не має дійсних коренів, то многочлен x^2-4x+5 додатній за будь-яких $x\in R$. Отже, розв'язком нерівності є порожня множина Ø.

Since the equation

$$x^2-4x+5=0$$

has no real roots, the quadratic polynomial x^2-4x+5 is positive for any $x\in R$. Therefore, the solution set is the empty set Ø.

ЛІТЕРАТУРА

1. М.Я. Выгодский. Справочник по элементарной математике. М., Физматгиз, 1962 г.,424 стр.
2. Збірник задач з математики для вступників до ВТУЗів/ За ред.. М.І. Сканаві. Київ, Вища школа, 1992, 445 с.
3. D. Cohen, Precalculus. West Publishing Company, 1997, 1018p
4. V.V. Konev, Mathematics: Preparatory Course. Textbook. TPU Press, 2009, 104p.