

Моделі випадкових графів та їх застосування для моделювання програмних систем

Теорія графів відіграє величезну роль у фундаментальній і прикладній математиці. В рамках одного з напрямків графі вивчаються з ймовірнісної точки зору. Типова постановка питання така: чи велика ймовірність того, що граф володіє даною властивістю? В залежності від того, який зміст вкладати в поняття “ймовірність”, вийде та чи інша модель випадкового графа. Однак для практичного застосування деякі з цих моделей більш цікаві, деякі - менш. Найкраще зарекомендували себе з практичної точки зору такі моделі, як модель Ердеша-Реньї та Барабаші-Альберта. Розглянемо детальніше модель Ердеша-Реньї, яка за десятиліття, що минули з моменту її появи, добре зарекомендувала себе як в рамках «чистої» математики так і в рамках її різноманітних прикладних застосувань, серед яких можна назвати транспортні мережі, Інтернет та інші соціальні і біологічні мережі, теорія алгоритмів і т. д.

Нехай дано множину $V_n = \{1, \dots, n\}$, елементи якої ми назвемо вершинами. Саме на цій множині ми будемо будувати випадковий граф. Зрозуміло, отже, що випадковою буде множина ребер графа. Вважаємо, що потенційних ребер у графа не більше ніж C_n^2 . Будемо з'єднувати будь-які дві вершини і та j ребром з деякою ймовірністю $p \in [0, 1]$ незалежно від всіх інших $C_n^2 - 1$ пар вершин. Інакше кажучи, ребра з'являються у відповідності до стандартної схеми Бернуллі, в якій C_n^2 випробувань і ймовірність успіху p . Позначимо через E випадкову множину ребер, яка виникає в результаті реалізації такої схеми. Покладемо $G = (V_n, E)$. Це і є випадковий граф в моделі Ердеша-Реньї. Якщо записати дане визначення в форматі аксіоматики Колмогорова, то отримаємо імовірнісний простір $G(n, p) = (\Omega_n, F_n, P_{n,p})$, в якому $\Omega_n = \{G = (V_n, E)\}$, $F_n = 2^{\Omega_n}$, $P_{n,p}(G) = p^{|E|} (1-p)^{C_n^2 - |E|}$. Тут через $|A|$ позначена потужність множини A , а 2^A - це сукупність всіх підмножин множини A . Елемент сигма-алгебри F_n - це набір графів. Якщо нам треба знайти ймовірність, з якою граф на n вершинах володіє даною властивістю A , то ми просто беремо множину $A \in F_n$, що складається з усіх графів, для яких виконується властивість A , і обчислюємо $P_{n,p}(A) = \sum_{G \in A} P_{n,p}(G)$. Таким чином ймовірність того, наприклад, що випадковий граф зв'язний - це величина, що дорівнює сумі ймовірностей всіх зв'язних графів (на фіксованій множині вершин).

Отже, на практиці ми маємо апарат чисельного опису топології складних мережевих конструкцій. За допомогою теорії випадкових графів ми можемо моделювати і потім аналізувати системи, що не мають очевидних принципів побудови.

¹ студент 3^{го} курсу навчання за напрямом “Комп’ютерна інженерія”;

² викладач кафедри програмного забезпечення