

ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Кафедра сільськогосподарського машинобудування

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОБОЧИХ ПРОЦЕСІВ МАШИН

Методичні рекомендації до виконання практичних робіт
для здобувачів ступеня вищої освіти доктор філософії спеціальності 133 –
"Галузеве машинобудування"
освітньо-наукова програма «Галузеве машинобудування»

Ухвалено
на засіданні кафедри
сільськогосподарського
машинобудування.
Протокол № 15 від 26 червня 2020 р.

м. Кропивницький
2020

Математичне моделювання робочих процесів машин : методичні рекомендації до виконання практичних робіт для здобувачів ступеня вищої освіти доктор філософії спеціальності 133 – "Галузеве машинобудування" освітньо-наукова програма «Галузеве машинобудування» / [уклад. : В.В. Амосов, В.М. Сало] ; М-во освіти і науки України, Центральноукраїн. нац. техн. ун-т, каф. с.-г. машинобуд. – Кропивницький : ЦНТУ, 2020.– 40 с.

Укладачі: доц., канд. техн. наук В.В. Амосов,
проф., доктор техн. наук В.М. Сало

Рецензент: проф., доктор техн. наук Кулешков Ю. В.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1

Методика використання бібліотечної ММ

Кількість створених математичних моделей у найрізноманітніших галузях знань вражає. Було б нераціональним не скористатись цим інтелектуальним багатством. Головні проблеми – що шукати, де і як. Можна знайти потрібний математичний метод, алгоритм моделювання або навіть готову програму у зовсім несподіваному джерелі. Такими подарунками Доля нагороджує допитливих науковців, які цікавляться досягненнями колег з різних напрямків наукових досліджень, читаючи повідомлення в Інтернеті, наукові статті, монографії, спілкуючись під час наукових конференцій. Навіть на своїй або сусідній кафедрі можна, при бажанні, знайти чимало цікавого та корисного, яке дозволить створити гарну математичну модель.

Як приклад, пропонується алгоритм створення та використання простої **математичної моделі системи роздачі кормів мобільними кормороздавачами**, розроблена для практичних занять з курсу ТКРМТ.

Завантажувачі кормів та мобільні кормороздавачі працюють у взаємозв'язку. На тривалість кожної технологічної операції та всього процесу завантаження і роздачі кормів діють випадкові фактори. Для визначення економічно доцільної кількості кормороздавачів, які обслуговують один завантажувач корму, використовують теорію масового обслуговування. Завантажувач і кормороздавачі (рис. 1.1) утворюють одноканальну систему масового обслуговування (СМО) з очікуванням.

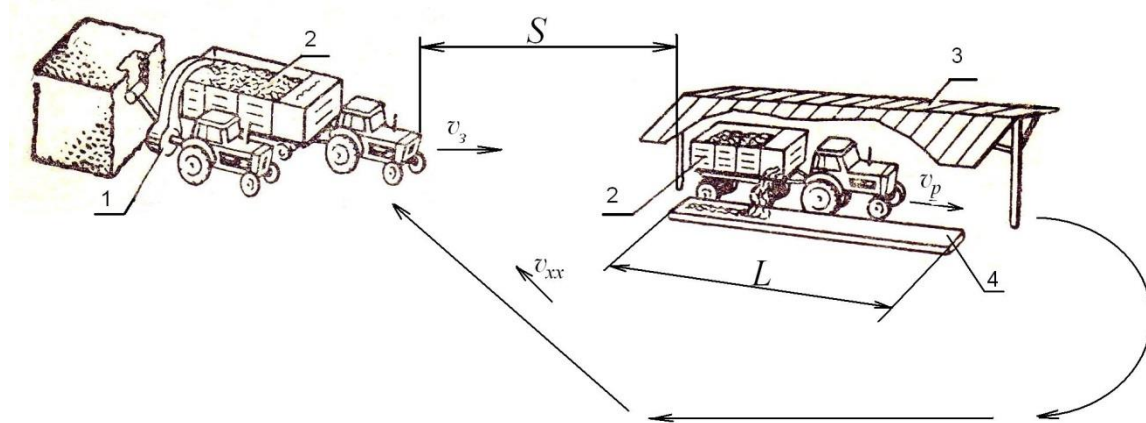


Рисунок 1.1 – Розрахункова схема системи роздачі кормів мобільними кормороздавачами: 1 – завантажувач кормів; 2 – кормороздавач; 3 – виробниче приміщення; 4 – годівниця.

На завантаження прибуває в середньому λ кормороздавачів за годину

$$\lambda = m/t_{\text{ц}}, \quad (1.1)$$

де m – кількість кормороздавачів (її треба визначити у результаті дослідження);

$t_{\text{ц}}$ – середня тривалість циклу роботи кормороздавача, год

$$t_{\text{ц}} = t_{\text{зав}} + t_{\text{р.з.}} + t_{\text{р}} + t_{\text{хх}}, \quad (1.2)$$

де $t_{зав}$, $t_{p.з.}$, t_p , t_{xx} – середній час відповідно завантаження, руху з кормом, роздачі корму і холостого ходу кормороздавача, год

$$t_{p.з.} = \frac{S}{g_3}, \quad (1.3)$$

де S – відстань від місця завантаження корму до місця роздачі, км (табл.1.1);

g_3 – швидкість руху агрегату з завантаженим кормороздавачем, $g_3=10$ км/год.

$$t_p = \frac{L}{g_p}, \quad (1.4)$$

де L – довжина годівниць, у які треба завантажити корм, км (табл. 1.1);
 g_p – швидкість руху агрегату при роздачі корму, км/год (табл. 1.1).

$$t_{xx} = \frac{S}{g_{xx}}, \quad (1.5)$$

де g_{xx} – швидкість руху агрегату з порожнім кормороздавачем, $g_{xx}=15$ км/год.

Завантажувач може завантажити μ кормороздавачів за годину

$$\mu = \frac{1}{t_{зав}}. \quad (1.6)$$

Продуктивність системи масового обслуговування характеризуються показником

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = m \cdot \frac{t_{зав}}{t_{ц}}. \quad (1.7)$$

Середня кількість кормороздавачів, які простоюють,

$$N_{np} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha}. \quad (1.8)$$

Втрати коштів через простій кормороздавачів

$$B_{\kappa} = C_{\kappa} \frac{\alpha^2}{1-\alpha}, \quad (1.9)$$

де C_{κ} – втрати від однієї години простою кормороздавача, $C_{\kappa}=20$ грн.

Втрати коштів через простій завантажувача

$$B_3 = C_3(1-\alpha), \quad (1.10)$$

де C_3 – втрати від однієї години простою завантажувача кормів, $C_3=15$ грн.

Сумарні втрати коштів через простій кормороздавачів та завантажувача

$$B(\alpha) = C_{\kappa} \frac{\alpha^2}{1-\alpha} + C_3(1-\alpha). \quad (1.11)$$

Оптимальну кількість кормороздавачів, яка забезпечить мінімальні втрати коштів, можливо визначити, взявши похідну від функції (1.11) по α ,

прирівнявши її до нуля і визначивши значення $\alpha_{opt} < 1$ (умова функціонування СМО з очікуванням). Ці перетворення можна виконати вручну або з використанням програми в системі Mathcad, яка наведена далі.

Оптимальна кількість кормороздавачів

$$m_{opt} = \alpha_{opt} \frac{t_u}{t_{зав}}. \quad (1.12)$$

Таблиця 1.1

Вихідні дані для дослідження системи завантаження та роздачі кормів мобільними кормороздавачами

№ варіанту	$t_{зав}$, год	S , км	L , км	ϑ_p , км/год	№ варіанту	$t_{зав}$, год	S , км	L , км	ϑ_p , км/год
1	0,3	1	0,1	1,0	17	0,5	1	0,1	1,4
2	0,3	1	0,1	1,2	18	0,5	1	0,1	1,6
3	0,3	1	0,12	1,0	19	0,5	1	0,12	1,4
4	0,3	1	0,12	1,2	20	0,5	1	0,12	1,6
5	0,3	0,8	0,1	1,0	21	0,5	0,8	0,1	1,4
6	0,3	0,8	0,1	1,2	22	0,5	0,8	0,1	1,6
7	0,3	0,8	0,12	1,0	23	0,5	0,8	0,12	1,4
8	0,3	0,8	0,12	1,2	24	0,5	0,8	0,12	1,6
9	0,4	1	0,1	1,0	25	0,2	0,6	0,08	1,7
10	0,4	1	0,1	1,2	26	0,2	0,6	0,08	1,9
11	0,4	1	0,12	1,0	27	0,2	0,6	0,1	1,7
12	0,4	1	0,12	1,2	28	0,2	0,6	0,1	1,9
13	0,4	0,8	0,1	1,0	29	0,2	0,8	0,08	1,7
14	0,4	0,8	0,1	1,2	30	0,2	0,8	0,08	1,9
15	0,4	0,8	0,12	1,0	31	0,2	0,8	0,1	1,7
16	0,4	0,8	0,12	1,2	32	0,2	0,8	0,1	1,9

Зміст звіту

1. Роздруківка результатів розрахунку з використанням бібліотечної математичної моделі, реалізованої в системі Mathcad, згідно даних заданого варіанту (табл. 1.1).

2. Висновок по визначенню оптимальної кількості кормороздавачів.

Бібліотечна математична модель, реалізована в системі Mathcad

Дослідження системи роздачі кормів мобільними кормороздавачами студента гр.МС98 Заїнчковського

- $S := 0.5$ - відстань від сховища кормів до тваринницького приміщення, км
 $t_{\text{зав}} := 0.8$ - середня тривалість завантаження кормороздавача, год
 $L := 0.15$ - довжина годівниць, км
 $C_{\text{зав}} := 20$ - втрати від простою завантажувача, грн/год
 $C_k := 16$ - втрати від простою кормороздавача, грн/год
 $V_m := 10$ - середня швидкість руху завантаженого кормороздавача, км/год
 $V_p := 1.6$ - середня швидкість руху при роздачі кормів у годівниці, км/год
 $V_{xx} := 15$ - середня швидкість руху розвантаженого кормороздавача, км/год

Тривалість циклу роботи кормороздавача

$$t_{\text{ц}} := \frac{S}{V_m} + \frac{L}{V_p} + \frac{S}{V_{xx}} + t_{\text{зав}} \quad t_{\text{ц}} = 0.958$$

Втрати коштів через простій завантажувача та кормороздавачів

$$C(\alpha) := \left[C_{\text{зав}} \cdot (1 - \alpha) + C_k \cdot \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} \right]$$

Визначаємо оптимальне значення α

$$\frac{d}{d\alpha} C(\alpha) \rightarrow -20 + 32 \cdot \frac{\alpha}{1 - \alpha} + 16 \cdot \frac{\alpha^2}{(1 - \alpha)^2} \text{ solve, } \alpha \rightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

Вибираємо значення $\alpha < 1$, яке відповідає умові роботи СМО з чеканням

$$\alpha := \frac{1}{3}$$

Визначаємо оптимальну кількість кормороздавачів

$$m := \alpha \cdot \frac{t_{\text{ц}}}{t_{\text{зав}}} \\ m = 0.399$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2

Структурний аналіз машини

Технічна система – це сукупність функціонально взаємопов'язаних технічних об'єктів, що утворюють машину чи агрегат, котрі поєднані однією метою та загальним алгоритмом функціонування в самостійну структуру, що має властивості, які не зводяться до властивостей елементів, і призначену для виконання певного технологічного процесу та здатну працювати в автоматичному режимі за відповідною програмою.

Термін «технічна система» визначений як узагальнюючий для широкого кола пристроїв, уже існуючих та тих, що будуть створюватися людиною з метою задоволення різноманітних суспільних потреб.

Техніка (від грец. *techne* – мистецтво, майстерність, вміння) – сукупність засобів людської діяльності, створених для здійснення процесів виробництва та обслуговування виробничих і невиробничих потреб суспільства.

Технічний об'єкт (від лат. *objectus* – предмет) – матеріальний результат інженерної діяльності. Тобто це будь-який виріб (деталь, вузол, підсистема, функціональна одиниця або система), який можна розглядати відокремлено.

Залежно від призначення та принципу дії, технічні системи, як і технічні об'єкти, поділяють на машини, апарати та прилади. У випадках, коли складно визначити приналежність системи, використовують поняття «пристрій» або «комплекс».

Поділ технічних об'єктів (систем) на машини, апарати та прилади і на технічні системи носить умовний характер. Системою може бути певна сукупність самодостатніх машин, апаратів чи приладів, і в той же час система чи декілька систем можуть бути складовими тих же машин, апаратів чи приладів.

Технічна система характеризується:

- призначенням (виконанням корисних функцій);
- структурою і принципом роботи (сукупністю елементів, їх взаємним розташуванням та зв'язками між ними, що задають стійкість і відтвореність функції);
- новою якістю (сукупністю властивостей елементів, що входять до її складу).

До складу технічної системи входять механізми, модулі, машини та інші технічні об'єкти різного призначення.

Механізм – це сукупність окремих ланок (механічних, гідравлічних, пневматичних, електромагнітних тощо), що завдяки кінематичним парам утворюють кінематичний ланцюг, який здатний перетворювати визначені рухи вхідної ланки в необхідні рухи вихідної ланки. Механізм складає основу більшості машин.

Модуль – уніфікований вузол, що конструктивно оформлений, як самостійний виріб для виконання визначеної функції в різноманітних технічних системах.

Машина – це технічний об'єкт (технічна система), який складається з

функціональних елементів (деталей, вузлів, пристроїв, механізмів), що використовує енергію для виконання певних функцій (механічних рухів, перетворення матерії (речовини, поля) або перетворення інформації).

Сучасні машини умовно поділяють на енергетичні, робочі та інформаційні.

Енергетичні машини перетворюють один вид енергії в інший.

До них відносяться:

- двигуни – машини, які перетворюють різні види енергії в механічну роботу (електродвигуни, парові та гідротурбіни, двигуни внутрішнього згорання тощо);

- генератори – машини які перетворюють механічну енергію в інший вид енергії (електрогенератори, компресори, насоси).

Робочі машини перетворюють речовину або поле та змінюють положення предмета виробництва. Робочі машини поділяються на технологічні та транспортні.

Інформаційні машини служать для перетворення, обробки і передачі інформації. Основу таких машин складають електронно-обчислювальні машини.

Об'єкти технічної системи, що утворюють підсистеми, поділяються на чотири основні групи.

I- *група*. Джерела механічного руху, тобто двигуни. Ними є енергетичні машини, що перетворюють різні види енергії в механічну роботу. Тому ці технічні об'єкти утворюють енергетичні системи або підсистеми.

II- *група*. Виконавчі пристрої, що виконують визначену технологічним процесом роботу шляхом механічних рухів. Сюди входять машини, модулі та механізми головного та допоміжного рухів, а також механізми переміщення. Вони утворюють виконавчі системи або підсистеми

III- *група*. Керуючі пристрої, якими є регулятори, пульти керування, обчислювальні машини, командоапарати, мікропроцесори тощо. Завдяки каналам зв'язку вони з'єднані між собою та з інформаційними датчиками, що розміщені на механізмах, і утворюють систему або підсистему керування. За типом задач, що пов'язані з керуванням технічними об'єктами, системи керування поділяються на підсистеми: автоматичного контролю, автоматичного регулювання, слідкуючі, автоматичного захисту, автоматичного керування, адаптивного керування, обробки даних тощо.

IV- *група*. Допоміжні пристрої, які забезпечують працездатність технічних об'єктів технічних систем, а, саме, модулі та механізми, що утворюють допоміжні системи або підсистеми, наприклад: технічної діагностики, змащування, охолодження, нагрівання, регулювання технологічних режимів, виміру фізичних параметрів, контролю якості, безпечності, сигналізації, освітлення, утилізації відходів, технологічного оснащення, подачі заготовок, видалення готових виробів, перетворювачі тощо.

Технічні об'єкти технічної системи можуть існувати та діяти самостійно. Однак виконувати корисну роботу здатні лише у визначеному поєднанні між собою, утворюючи певну структуру технічної системи.

Структурою технічної системи називається створений конструктором відповідно до розробленого технологічного процесу функціональний взаємозв'язок технічних об'єктів, що дозволяє реалізувати визначений алгоритм дії та виконувати корисну роботу щодо виготовлення необхідних виробів. Таким чином, *структура* – це функціональний взаємозв'язок технічних об'єктів технічної системи.

Структурна схема – це спрощене зображення складових частин технічної системи умовними графічними позначеннями з лініями зв'язку, що дає загальне уявлення про устрій та принцип дії технічної системи.

На рисунку 2.1, для прикладу, показана структурна блок-схема певної технічної системи.

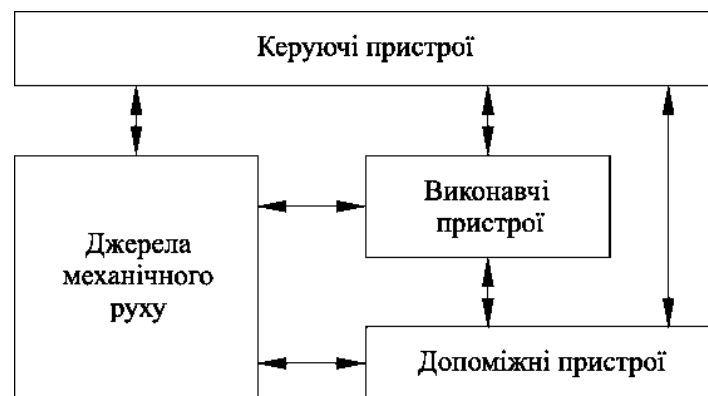


Рисунок 2.1 – Приклад структурної блок-схеми технічної системи

Технічна система може нормально функціонувати за своїм призначенням лише при наявності визначених зв'язків із зовнішнім середовищем:

- сировини, необхідної для виготовлення виробів;
 - допоміжних матеріалів для забезпечення працездатності;
 - енергії, що ефективно перетворюється в механічний рух;
 - алгоритму функціонування відповідно до заданого технологічного процесу;
 - регулярного технічного обслуговування;
 - своєчасного видалення відходів виробництва;
 - постійного виведення готових виробів із робочої зони відповідно до заданого ритму роботи;
 - інтелектуального супроводу фахівцями відповідного профілю.
- Зовнішні фактори, що забезпечують ефективну роботу технічної системи, подані на рисунку 2.2

Технологічний процес визначає функціональне призначення та алгоритм дії технічної системи, на основі якого будується структурна схема системи.

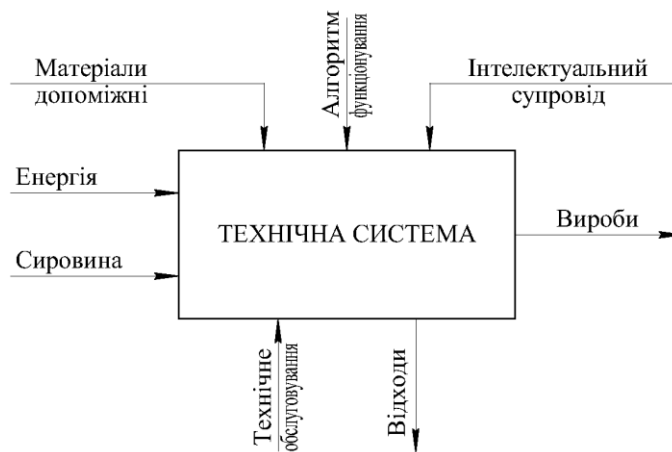


Рисунок 2.2 – Фактори, що забезпечують ефективну роботу технічної системи

Кожна технічна система містить підсистеми (елементи системи). Кількість підсистем може бути різною. В системі можна виділити дві та більше підсистем. Складні системи розбиваються на десятки і сотні підсистем. В середині кожної підсистеми відбувається перетворення енергії, обмін і поширення інформації між елементами підсистеми. Між підсистемами також наявні зв'язки, по яких передаються потоки енергії та розповсюджується інформація.

В загальному вигляді під технічною системою розуміють органічно єдину сукупність підсистем (елементів), яка виконує певну функцію.

Довільну технічну систему зручно зобразити графічно у вигляді блок-схем (рис. 2.3).

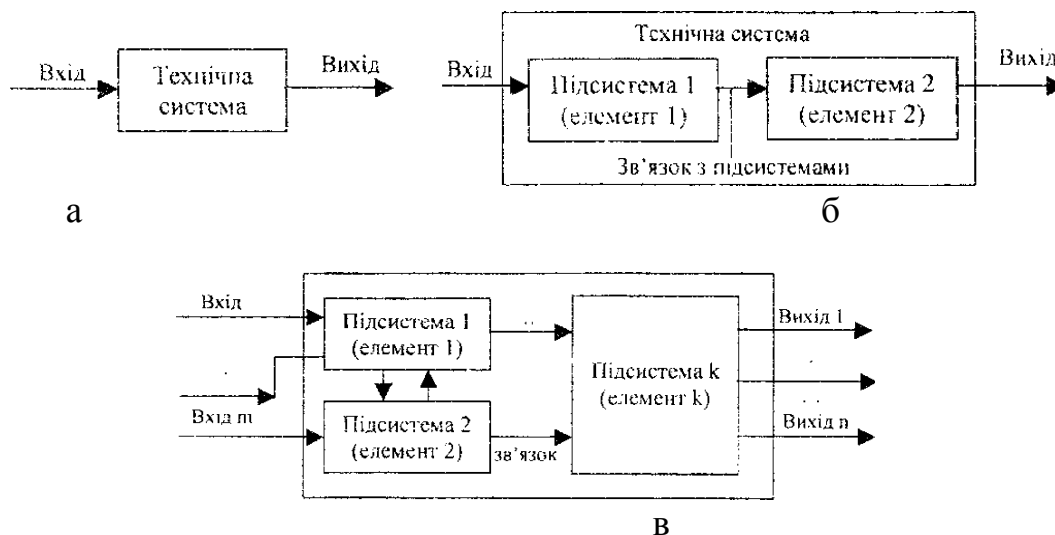


Рисунок 2.3 – Графічне зображення технічних систем у вигляді блок-схем:

а – система, яка складається з одного елемента; б – система, яка включає послідовно з'єднані елементи; в – система з кількома входами і виходами, яка складається із багатьох елементів і має розгалужену структуру

Виділення підсистем, входів і виходів здійснюється виходячи із суті

задачі, поставленої мети досліджень та наявного досвіду аналізу аналогічних систем.

В деяких випадках розділення системи на складові підсистеми є очевидним (рис. 2.4).

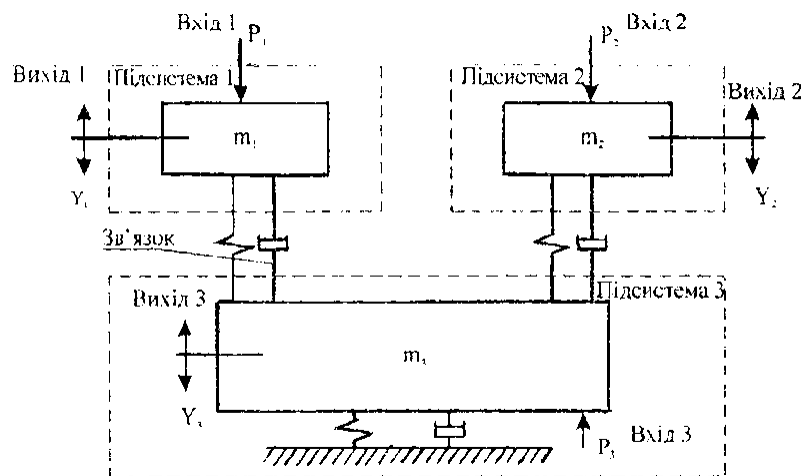


Рисунок 2.4 – Приклад механічної коливальної динамічної системи, її основних підсистем, входів і виходів: P_1 , P_2 , P_3 – входи у вигляді сил, що діють на маси; Y_1 , Y_2 , Y_3 – виходи у вигляді переміщення мас

Приклад 2.1. Скласти структурну блок-схему плуга начіпного ярусного ПНЯ-4-40 [Сільськогосподарські та меліоративні машини : підручник / Д.Г. Войтюк, В.О. Дубровін, Т.Д. Іщенко та ін.; За ред. Д.Г. Войтюка. К. : Вища освіта, 2004. С.31-33].

Користуючись описом будови плуга, його зображенням на рис. 1.25 та знаннями технології обробітку ґрунту, складаємо структурну блок-схему плуга ПНЯ-4-40 (рис. 2.5).

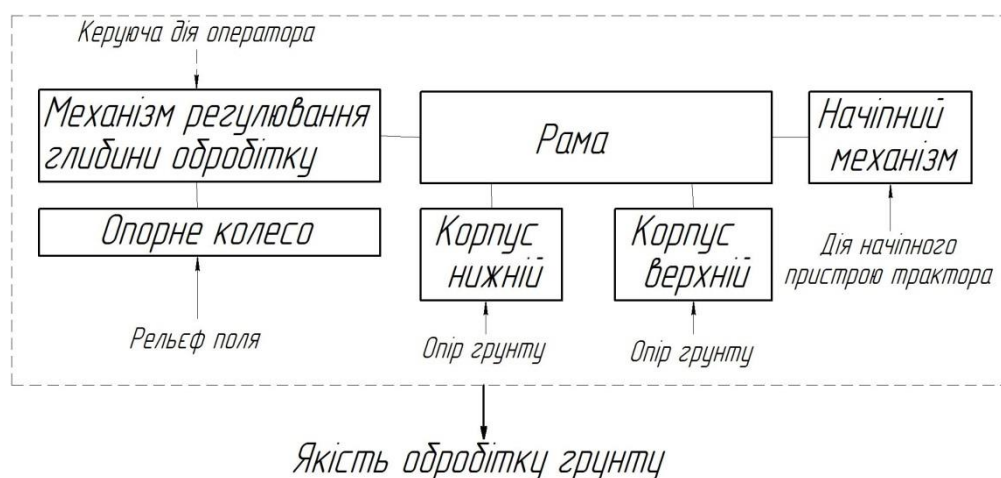


Рисунок 2.5 – Структурна блок-схема плуга начіпного ярусного ПНЯ-4-40.

Задача 2.1. Скласти структурну блок-схему сільськогосподарської машини відповідно до свого варіанту в табл. 2.1 (за узгодженням з викладачем можна скласти структурну блок-схему сільськогосподарської машини, яка є об'єктом дослідження аспіранта, або її вузла).

Таблиця 2.1

Вихідні дані для складання структурної блок-схеми сільськогосподарської машини

№ варіанту	Назва машини	Джерело інформації
1	Плуг п'ятикорпусний начіпний ПЛН-5-35	[1, С.26]
2	Плоскоріз-щілювач начіпний ПЩН-2,5	[1, С.41]
3	Щілювач-розпушувач ґрунту ЩРП-3-70	[1, С.43]
4	Борона дискова БД-10	[1, С.48]
5	Борона дискова важка БДВ-6	[1, С.49]
6	Культиватор паровий швидкісний КПС-4	[1, С.58]
7	Культиватор-розпушувач КР-4,5	[1, С.59]
8	Культиватор фрезерний КФ-5,4	[1, С.65]
9	Агрегат для прямого посіву BSK-600	[1, С.76]
10	Машина МКУ-2	[1, С.95]

Зміст звіту

1. Зображення машини (схема або загальний вигляд).
2. Опис будови та роботи.
3. Структурна блок-схема.

Література

1. Сільськогосподарські та меліоративні машини : підручник / Д.Г. Войтюк, В.О. Дубровін, Т.Д. Іщенко та ін.; За ред. Д.Г. Войтюка. К. : Вища освіта, 2004.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3

Аналіз робочого процесу машини

Теоретичні відомості. Процес створення товару (виконання роботи, надання послуги) являє собою *робочий процес*. Для сфери матеріального виробництва характерні робочі процеси, пов'язані з виробництвом товарів; їх звичайно називають *виробничими процесами*. **Робочий процес** – це цілеспрямована діяльність (сукупність дій, робіт) по створенню споживчої вартості, що задовольняє особисті, колективні (корпоративні) або суспільні потреби.

Результатом робочого процесу є продукція.

Структура робочого процесу – це склад частин даного процесу і їх взаємозв'язки відносно порядку проходження або рівня входження. Елементарною складовою робочого процесу (його нижнім рівнем) вважається операція. *Операція* – це частина робочого процесу, виконувана над одним або декількома предметами праці на одному або декількох однакових робочих місцях без переналагодження засобів праці за участю або/та під контролем одного або декількох працівників (бригади, команди). У сільськогосподарському виробництві предметами праці є ґрунт, рослини, тварини, інші живі організми. Робоче місце – поле, сад, ферма, водойма і т. ін. Засоби праці – сільськогосподарські машини та знаряддя. На кожній операції працівник з використанням засобів праці здійснює один або кілька *фізичних процесів*. Це може бути переміщення, деформація, нагрівання.

Сукупність технологічних операцій, упорядкована відносно взаємного проходження, утворює *технологічний процес*. Його оформлюють у вигляді технологічної карти. Вибудовані в порядку проходження сукупності технологічних операцій, що становлять технологічний процес, і інших операцій або дій (у тому числі виконуваних поза робочими місцями й без додатка живої праці) утворюють *виробничий процес*. *Робочий процес* включає певним чином упорядковану (організовану) у просторі й у часі сукупність процесів праці й природних процесів, необхідних і достатніх для створення певної продукції. *Процес праці* – це робочий процес, що вимагає додатки живої або/та упредметненої праці. Наприклад, вирощування зерна пшениці; обробка деталей на верстаті із завантаженням-вивантаженням робітником; виконання обчислень комп'ютером по програмі, розробленій програмістом. *Природний процес* – це робочий процес, що не вимагає додатка ні живої, ні упредметненої праці. Наприклад, визрівання зерна пшениці; природне сушіння дерева й пофарбованих предметів, попередньо підготовлених до цього людиною; руйнування поверхні деталей від корозії; природне охолодження виливків, старіння заготовок у металообробці.

Зміст звіту

1. Скласти на основі технологічної карти вирощування с.-г. культури перелік процесів праці й природних процесів, які створюють робочий

процес виробництва с.-г. продукції.

2. Визначити перелік операцій, включаючи підготовчі, які виконує с.-г. машина, структурна схема якої була складена на практичному занятті № 2.

3. Пояснити, які фізичні процеси відбуваються на кожній операції. Які математичні моделі цих фізичних процесів Вам відомі? Наведіть хоча б один приклад.

Приклад 3.1. У прикладі 2.1 була складена структурна схема плуга начіпного ярусного ПНЯ-4-40. Необхідно скласти перелік процесів праці й природніх процесів, які створюють робочий процес виробництва цукрового буряка (плуг ПНЯ-4-40 традиційно використовується у технологічному процесі вирощування саме цієї культури), на основі типової технологічної карти [1]. Знаходимо технологічну карту вирощування цукрового буряка за інтенсивною технологією [1, с.179] та копіюємо з неї перелік основних операцій (процесів праці) (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

№ п/п	Найменування робіт (операцій)	Фізичний процес
1	Боронування дисковими важкими боронами	Розпушування поверхні ґрунту
2	Боронування дисковими важкими боронами	Розпушування поверхні ґрунту
3	Навантаження мінеральних добрив	Переміщення сипкого матеріалу
4	Внесення мінеральних добрив	Переміщення сипкого матеріалу в ґрунт
5	Оранка	*)
6	Суцільна культивування	Розпушування поверхні ґрунту
7	Шлейфування (вирівнювання)	Розпушування поверхні ґрунту
8	Транспортування води	Переміщення рідкого матеріалу
9	Обприскування	Переміщення рідкого матеріалу на ґрунт
10	Навантаження мінеральних добрив	Переміщення сипкого матеріалу
11	Транспортування добрив	Переміщення сипкого матеріалу
12	Транспортування насіння	Переміщення сипкого матеріалу
13	Сівба буряка	Переміщення сипкого матеріалу в ґрунт
14	Транспортування води	Переміщення рідкого матеріалу
15	Обприскування	Переміщення рідкого матеріалу в ґрунт
16	Транспортування води	Переміщення рідкого матеріалу
17	Обприскування	Переміщення рідкого матеріалу на рослини
18	Навантаження мінеральних добрив	Переміщення сипкого матеріалу
19	Транспортування добрив	Переміщення сипкого матеріалу
20	Міжрядна обробка буряка	Розпушування поверхні ґрунту
21	Міжрядна обробка буряка	Розпушування поверхні ґрунту
22	Збирання коренів цукрового буряка	Викопування та переміщення дискретного матеріалу
23	Транспортування буряка	Переміщення дискретного матеріалу

*) Докладний опис фізичних процесів при оранці наведено далі.

Короткий опис основного фізичного процесу, який відбувається на відповідній операції, запишемо у таблицю 3.1.

У проміжки часу між процесами праці відбуваються наступні природні процеси:

- а) опромінення рослин та ґрунту сонячним світлом;
- б) зволоження поверхні ґрунту та рослин природними опадами;
- в) рух вологи у ґрунті та рослинах;
- г) випаровування вологи з поверхні ґрунту та рослин;
- д) видування часток ґрунту потоками повітря та вимивання потоками води;

е) біохімічні процеси у ґрунті та рослинах.

Пług ПНЯ-4-40 виконує оранку ґрунту. Для забезпечення якісного обробітку ґрунту необхідно провести підготовчу операцію розмітки поля.

При виконанні оранки відбуваються наступні фізичні процеси:

- а) деформування скиби ґрунту;
- б) розпушування ґрунту;
- в) перекидання скиби ґрунту у два етапи – корпусами верхнього ярусу, а потім – корпусами нижнього;
- г) деформування поверхні ґрунту опорним колесом плуга;
- д) деформування всіх деталей плуга;
- е) абразивне зношування лемішно-полицевих поверхонь корпусів плуга;
- ж) зношування підшипникового вузла опорного колеса, шарнірів націпного пристрою та механізму регулювання глибини оранки.

Під час виконання оранки ґрунту необхідно контролювати показники якості виконання агротехнічних вимог: глибини обробітку, гребенистості, гранулометричного складу ґрунту, наявності пожнивних решток на поверхні поля та ін.

Прикладом математичної моделі фізичного процесу є аналітична ММ руйнування ґрунту клином [2, с.136–139].

Література

1. Технологічні карти вирощування сільськогосподарських культур : монографія / Л.М. Тіщенко, С.І. Корнієнко, В.А. Дубровін та ін.: за ред. Л.М. Тіщенко / Харк. нац. техн. ун-т с.-г. ім. Петра Василенка. Харків : ХНТУСГ, 2015. 273 с. URL: <https://www.agronom.co.ua/tehnologichni-karti-viroshhuvannya-silskogospodarskix-kultur/>
2. Сисолін П.В., Сало В.М., Кропивний В.М. Сільськогосподарські машини: теоретичні основи, конструкція, проектування. Кн.1. Машини для рільництва / За ред. Черновола М.І. К. : Урожай, 2001. 384с.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4

Постановка задачі моделювання

На вибір математичної теорії та методу моделювання впливає, перш за все, постановка задачі та наявність вихідних даних. Не дарма вважають, що правильно поставлена задача - це вже половина її вирішення. Тому, спочатку розглянемо суть самого поняття «задача».

Для вирішення будь-якої задачі спочатку потрібно розібратися в ситуації, що склалася, поставити та чітко сформулювати питання, на які потрібно отримати відповіді після моделювання. Для цього потрібно зрозуміти, у чому полягає задача та необхідність її вирішення методом математичного моделювання.

Розгляд умов, що призводять до виникнення задачі, дозволяє виділити деякі з них по характеру ситуацій, в яких знаходиться дослідник:

1. Є один або декілька кінцевих результатів, яких прагнуть досягти при вирішенні технічного питання.
2. Існує дві чи більше стратегій досягнення потрібних результатів, які мають неоднакову ефективність при досягненні заданої мети.
3. Існує сумнів щодо того, яка стратегія є найкращою тобто «оптимальною».

Інакше кажучи, задача виникає тоді, коли суб'єктові (технічна система чи процес) потрібно досягти заданої мети та існують шляхи її досягнення, кожен з яких характеризується різною ефективністю, причому невідомо, яким шляхом досягнути та вибрати стратегію.

Залежно від наших знань стосовно характеру вихідних даних або результату ухвалення рішення, існують три типи задач:

1. Детерміновані задачі. Це задачі, що виникають у ситуаціях, коли кожна стратегія приводить до єдиного результату.
2. Імовірнісні задачі (задачі з ризиком). Задачі, при вирішенні яких можуть бути отримані різні результати, ймовірності досягнення яких відомі або можуть бути оцінені.
3. Задачі в умовах невизначеності. Задачі, що виникають у ситуаціях, коли невідомо, які результати можуть бути отримані. Тому не можна *Постановка задачі* включає, насамперед, формулювання питань, на які потрібно отримати відповіді під час моделювання та докладне викладення ситуації, що склалась (проблеми, умови задачі, обмеження). *Представлення того, що саме невідомо і що потрібно дізнатися, не тільки дозволяє сформулювати задачу, але й визначає напрям і методи її вирішення.*

Постановка задачі повинна включати сукупність основних шляхів її вирішення, але не повинна обмежувати ініціативу дослідників під час пошуку та вибору ними оптимального напрямку дій. Такий підхід припускає можливість використання дослідником математичної моделі для вирішення інших (найчастіше зворотних) задач з тими ж вихідними даними (або атрибутами моделі), тобто передбачає можливість удосконалення моделювання.

На етапі постановки задачі потрібно одержати відповіді на питання й виконати такі роботи:

1. Підготувати список питань, на які треба відповісти наприкінці моделювання.

2. Вивчити ситуацію (існуючі процеси в сукупності й поагрегатно та інше).

3. Сформулювати списки контрольних і керуючих параметрів, збурюючих впливів.

4. Сформулювати виробничі дані для основного (початкового) варіанту.

5. Встановити чи достатньо даних для основного (початкового) варіанта? Якщо ні, то провести виробничі (лабораторні) дослідження чи використати додаткові літературні (експериментальні) дані.

6. Вибрати:

- цільову функцію;
- вхідні та вихідні змінні;
- обмеження.

7. Ввести умовні позначення всіх атрибутів майбутньої моделі.

8. Виявити зв'язки та описати поводження параметрів (змінних) у межах компонентів системи або встановити співвідношення між ними у вигляді функціональних залежностей.

Декомпозиція системи (або розбивка задачі на підзадачі) проводиться для складних систем у випадку, коли побудова набору співвідношень між характеристиками системи є неможливою або складною. Тому систему доводиться розділяти на елементи, математичний опис яких можливо здійснити.

Конкретного способу спрощення (ускладнення) моделі не існує, але є основні принципи. Це:

- компроміс між повнотою, трудомісткістю побудови моделі та складністю експериментування з нею;
- відповідність точності окремих елементів моделі до точності вихідних даних для моделювання;
- розподіл процесів моделювання на послідовні незалежні етапи;
- точне відтворення одних частин системи і спрощене відтворення інших;
- виключення окремих частин системи з заміною їх еквівалентними випадковими впливами;
- організація послідовності моделей зростаючої складності з перевіркою збіжності результатів.

Здійснити постановку задачі моделювання для своєї теми.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5

Вибір математичного апарата для моделювання

Після того, як визначені математичні величини, що описують процес, явище чи систему, переходять до пошуку математичних співвідношень, які зв'язують ці математичні величини. Формулювання співвідношень здійснюється на основі зроблених припущень, висунутих гіпотез, законів, яким підпорядковуються ці явища.

Закінчена концептуальна постановка задачі моделювання дозволяє сформулювати математичну задачу моделювання, яка містить сукупність різних математичних співвідношень, що описують поведінку, властивості об'єкта моделювання, взаємозв'язки між елементами об'єкта. При цьому потрібно намагатися, щоб математична модель була зручною для подальшого дослідження. Варто зауважити, що математик-прикладник при складанні моделі повинен орієнтуватися на структуру і зміст доступної йому вихідної інформації. Інакше можемо одержати математичний конструкт, який ніколи не знайде практичного застосування.

Математична постановка задачі моделювання – це сукупність математичних співвідношень, які описують поведінку і властивості об'єкта моделювання (тобто наші представлення про об'єкт набувають математичної форми).

Сукупність математичних співвідношень визначає вигляд оператора моделі. Найбільш простий вигляд оператор моделі має у випадку алгебраїчних рівнянь. Подібні моделі можна назвати моделями апроксимаційного типу, оскільки для їх побудови використовують різні методи апроксимації експериментальних даних про поведінку, залежно від вхідних параметрів, параметрів зовнішнього середовища та внутрішніх параметрів об'єкта. Однак моделі такого типу мають обмежену сферу застосування. При вивченні природи нам постійно доводиться спостерігати явища, які залежать від часу. Такі явища називаються *процесами*. Часто математичні моделі процесів описуються диференціальними рівняннями з додатковими умовами. Диференціальні рівняння мають неперервний характер і їх безпосереднє розв'язування на ЕОМ неможливе, оскільки ЕОМ є пристроями дискретного типу. Тому необхідно попередньо здійснювати дискретизацію поставленої задачі й застосовувати числові методи для їх розв'язування.

Для створення математичних моделей складних систем і процесів потрібно використовувати великий обсяг знань, що накопичився в цій дисципліні. У багатьох галузях знань (механіці, фізиці, біології) прийнято виділяти закони для об'єктів даної галузі знань і співвідношення, які описують поведінку окремих елементів або їх сукупностей, наприклад, рівняння балансу маси, кількості імпульсу, енергії, які справедливі за певних умов для будь-яких тіл.

Рівняння цього класу підтверджені великою кількістю експериментів і добре вивчені. Необхідно зазначити, що ці співвідношення є основним елементом – серцевиною будь-якої математичної моделі. Помилки у виборі визначальних співвідношень приводять до неправильних результатів

моделювання.

При побудові математичних моделей постійно потрібно враховувати суперечливі вимоги: модель повинна бути достатньо повною і в той же час допускати її дослідження за допомогою існуючих математичних і комп'ютерних засобів. Академік А.М. Тихонов зазначав, що в багатьох випадках правильно побудована математична модель розв'язує проблему моделювання більше, ніж на половину. Побудова математичної моделі – це найбільш істотний, найбільш складний етап наукового дослідження, який не піддається формалізації.

Для контролю правильності отриманої системи математичних співвідношень необхідно виконати ряд перевірок.

Контроль розмірностей. У математичному моделюванні розглядувані величини, як правило, мають розмірність. Характеристики об'єкта вимірюються в деяких одиницях, що мають певний зміст, наприклад маса вимірюється в *кг*, температура в градусах і т.д. Числові значення розмірних одиниць залежать від вибору одиниць вимірювання. Серед одиниць вимірювання виділяють величини з незалежною (основною) розмірністю, а розмірності інших величин виражають через основні.

Контроль порядків полягає в грубій оцінці порядків величин, які фігурують у математичних співвідношеннях. За допомогою грубих оцінок можна одержувати характерні значення величин, що входять у рівняння, і зрозуміти, які вирази є відносно малими. Якщо їх відкинути, то після розв'язування спрощених рівнянь можна зрозуміти, чи відкинуті члени дійсно малі.

Контроль характеру залежностей. Напрямо і швидкість зміни вихідних параметрів моделі, які впливають із математичних співвідношень, повинні бути такими, як це впливає з фізичного змісту моделі.

Контроль законів збереження. Якщо математична модель будувалась на основі закону збереження, то цій же властивості повинен задовольняти і розв'язок рівняння. Якщо при побудові моделі були враховані втрати енергії, то такій же властивості повинен задовольняти і розв'язок. Як правило, аналоги фундаментальних законів повинні зберігатися і при переході до обчислювального алгоритму.

Контроль екстремальних ситуацій. При цьому необхідно продивитися, якого вигляду набувають математичні співвідношення, якщо параметри моделі наближаються до гранично допустимих значень частіше за все до нуля або до нескінченності.

У подібних екстремальних ситуаціях модель часто спрощується, а математичні співвідношення стають більш наочними і можуть бути перевірені. Наприклад, відсутність навантажень приводить до відсутності деформацій.

Контроль граничних умов. Передбачає перевірку того, що вони використані при побудові розв'язків і що значення вихідних параметрів моделі задовольняють дані умови.

Контроль математичної замкнутості полягає в перевірці того, що

виписана система математичних співвідношень дає можливість, і при тому однозначно розв'язати поставлену математичну задачу, тобто за початковим станом системи можна однозначно визначити її наступні стани. Наприклад, для знаходження n невідомих із системи алгебраїчних рівнянь потрібно перевірити, що кількість незалежних рівнянь дорівнює n . Якщо рівнянь менше n , то така система має безліч розв'язків і потрібно сформулювати додаткові вимоги, щоб розв'язок знаходився однозначно. Якщо ці рівняння отримуються з експериментів та спостережень, то можлива постановка задачі, при якій кількість рівнянь перевищує n , а самі рівняння задовольняються лише наближено, тоді розв'язок шукається методом найменших квадратів.

Якщо задача звелась до відшукування розв'язків диференціального рівняння, то необхідно перевірити, чи поставлені додаткові (початкові, граничні) умови однозначно визначають розв'язок, тобто перевірити, чи модель є замкнутою.

Властивість математичної замкнутості системи тісно пов'язана з введенням Адамаром поняттям коректно поставленої математичної задачі – задачі, для якої розв'язок існує, єдиний і неперервно залежить від вхідних даних, тобто малій зміні вхідних даних відповідає достатньо мала зміна розв'язку. Числові методи виправдано застосовувати лише до коректно поставлених задач. Необхідно зазначити, що не всі задачі, які виникають на практиці, є коректними. Наприклад, у прикладних застосуваннях математики часто виникають системи лінійних алгебраїчних рівнянь, але такі системи можуть виявитися погано обумовленими, тобто малі зміни вхідних даних можуть істотно змінювати розв'язок, а оскільки параметри системи отримуються з експериментів, то можна одержати недостовірні розв'язки.

Доведення коректності математичної задачі є складною математичною проблемою, її можна розв'язати лише для деяких класів математичних задач. Найпростіший спосіб розпізнавання поганої обумовленості полягає в перерахунку розв'язків при довільній зміні вхідних даних у межах її точності. Якщо результати при цьому будуть сильно відрізнятися, то математична задача погано обумовлена і модель потрібно змінити.

Математична модель коректна, якщо для неї виконуються всі контрольні перевірки розмірності, порядків, характеру залежностей, екстремальних ситуацій, граничних умов, фізичного змісту та математичної замкнутості.

Доведення теорем існування та єдиності складає один із найважливіших кроків цього дослідження. Достатньо згадати, скільки інтелектуальних сил людство витратило на нерозв'язні задачі. Однак, якщо доведено, що задача не має розв'язку, а фізичне явище все ж існує, то необхідно проаналізувати причину такої невідповідності. Вона може бути викликана недосконалою моделлю, або неадекватністю математичного апарату. Наприклад, багато крайових задач математичної фізики при недостатньо гладких початкових і крайових умовах не мають класичного розв'язку. Подолати ці труднощі вдається в рамках концепції узагальнених функцій. На жаль, для актуальних складних задач, які пропонує сьогодення наука, подібні дослідження вдається виконати лише в окремих випадках.

Але варто розуміти, що жодні математичні утворення, якими б

витонченими вони не були, не можуть замінити при побудові моделі чіткого розуміння проблеми, точної постановки задачі, змістовного вивчення об'єкта-оригінала та взаємодії його з оточуючим середовищем.

Коли модель створена, переходять до знаходження розв'язку задачі, який зводиться до відшукування деяких залежностей шуканих величин від вхідних параметрів моделі. На цьому етапі важливу роль відіграє математичний апарат, необхідний для аналізу математичної моделі. При цьому необхідно розробити або використати раніше створені алгоритми для аналізу даної моделі.

Прикладна математика надає досліднику широкий вибір математичних методів, що можуть бути використані при дослідженні конкретних математичних моделей. Серед цих методів є кращі та гірші й потрібно уміти їх відрізняти. Всі методи розв'язування задач можна поділити на **аналітичні** та **алгоритмічні**.

Аналітичні методи більш зручні для наступного аналізу результатів, але застосовні лише для відносно простих моделей. Аналітичні методи дослідження базуються на різноманітному математичному апараті. Серед аналітичних методів необхідно відзначити якісні методи дослідження динамічних систем, що дозволяють якісно оцінити ряд основних характеристик системи. На практиці інколи не потрібний точний кількісний розрахунок, а можна обмежитися якісною картиною поведінки явища, особливо це важливо при моделюванні біологічних систем, де значення параметрів початкових умов не можуть бути точно задані і від математичної моделі вимагається з'ясування якісних характеристик, а саме, чи існують у системі стани рівноваги, чи вони стійкі, як змінюється характер стійкості при зміні параметрів. Важливу роль серед аналітичних методів відіграють методи збурень, які дозволяють послідовно уточнювати розв'язок. Однак у багатьох застосуваннях для моделювання складних процесів виникає ряд обмежень, що пов'язані зі складністю, нелінійністю. У цьому випадку недостатньо аналітичного апарату, а потрібні ефективні числові методи дослідження математичних моделей, тобто реалізувати великий потенціал математичного моделювання неможливо без потужних засобів автоматизації обчислень, якими є сучасні комп'ютери. Так, без комп'ютерів було б неможливо детально проаналізувати складні фізичні процеси, що виникають при розробці джерел атомної енергії, розрахувати траєкторії супутників та космічних кораблів. Прив'язування комп'ютера до розв'язання задачі дослідження деякого об'єкта і означає створення комп'ютерної моделі, яка дозволяє проводити обчислювальні експерименти.

Розв'язки, отримані за допомогою алгоритмічних методів, не зводяться до точних аналітичних розв'язків відповідної задачі. Алгоритмічні методи більш трудомісткі в реалізації, вимагають глибоких знань методів обчислювальної математики, наявності бібліотеки програмного забезпечення, потужної обчислювальної техніки.

Числові методи можуть застосовуватися лише для коректних математичних задач, що істотно для застосування даних методів у математичному моделюванні. Спільним для числових методів є зведення математичної задачі до скінченновимірної, це частіше за все досягається дискретизацією вихідної

задачі, тобто переходом від функції неперервного аргументу до функції дискретного аргументу. Числовий розв'язок реалізується у вигляді обчислювального алгоритму. Алгоритм повинен давати розв'язок задачі за допустимий машинний час.

Важливою характеристикою алгоритму є його точність, тобто можливість отримувати розв'язок задачі з заданою точністю $\epsilon > 0$ за скінченну кількість дій. На практиці задовольняються деяким компромісом між точністю і величиною машинного часу. Для будь-якої математичної задачі, як правило, можна запропонувати кілька алгоритмів, за допомогою яких можна отримати розв'язки з заданою точністю, але за різну кількість операцій. Алгоритми, які витрачають меншу кількість дій для досягнення однакової точності, будемо називати більш економічними або більш ефективними.

Велике різноманіття числових методів значною мірою ускладнює вибір того чи іншого методу в кожному конкретному випадку. Вибір конкретного методу зумовлений тим, який із них більше підходить для даної моделі з точки зору забезпечення ефективності, стійкості і точності результатів.

Вибраний метод розв'язування задачі повинен бути розрахований на такі вхідні дані, які можна виміряти з необхідною точністю. Якщо вхідні дані містять похибки, то немає змісту використовувати числові методи високої точності.

Помилка у виборі обчислювального методу через похибки заокруглення може призвести до одержання недостовірних результатів. Наприклад, при розв'язуванні диференціальних рівнянь при неправильному виборі методу з часом можуть з'явитися сильно осцилюючі розв'язки, але це не означає, що таким стає реальний процес, швидше за все обчислювальний метод став нестійким.

Більше того, ефективність одного й того ж методу може істотно відрізнятись від застосування його різними спеціалістами, часто ефективність числових методів, розроблених програм визначається інтуїтивно, що напрацьовується впродовж багатьох років.

Однак кожна комп'ютерна реалізація відповідає конкретним заданим параметрам системи, і при цьому можуть бути загублені важливі якісні властивості моделі, пов'язані насамперед з асимптотичною поведінкою розв'язку, тому, перш ніж застосовувати числові методи, потрібно задачу дослідити аналітичними методами. Тобто дослідження математичної моделі повинно, як правило, поєднувати як обчислювальні, так і аналітичні методи.

Найкращу математичну модель можна створити у творчій співпраці з математиками-прикладниками.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6

Експериментально-статистичні методи математичного моделювання

Статистичні методи – це методи прикладної математичної статистики, які застосовують здебільшого для оброблення експериментальних даних. Основна мета застосування статистичних методів – підвищити обґрунтованість висновків досліджень за рахунок використання імовірнісної логіки та імовірнісних моделей.

Статистичні методи застосовують у таких напрямках:

- а) описова статистика;
- б) теорія статистичного висновку;
- в) теорія планування експериментів, яка слугує для виявлення і перевірки причинних зв'язків між змінними.

Найпоширеніші такі статистичні методи: кореляційний, дисперсійний, регресійний і факторний аналіз.

Метод Монте-Карло, який називають також методом статистичного моделювання, дає змогу вирішувати ймовірнісні проблеми статистичними методами.

Статистичне моделювання (англ. *Statistical modeling*) – це спрощений, математично-формалізований спосіб апроксимації якого-небудь випадкового явища чи процесу. Об'єктом моделювання виступає статистична сукупність, в якій реалізується закономірність. При наявності даних, отриманих зі спостережень, можна обчислити статистичні відношення між величинами, використовуючи регресійний аналіз або інші статистичні методи.

Чисто математичні моделі, в яких взаємозв'язки між вхідними та вихідними даними зафіксовані цілком детерміністично, можуть бути важливими теоретичними інструментами, але вони непрактичні для опису спостережень, експериментів чи опитувань. Для таких явищ дослідники зазвичай вводять в модель, окрім детерміністичних, також стохастичні елементи. Коли невизначеність реалізації призводить до включення випадкових компонентів, отримані моделі називаються стохастичними моделями. Отже, статистична модель – це стохастична модель, що містить параметри, які є невідомими константами, і їх необхідно оцінити, спираючись на припущення про модель та спостереження.

Переваги статистичних моделей:

- Випадковість часто вводиться в систему для досягнення певного балансу або різноманітності. Наприклад, випадкове призначення лікування експериментальним одиницям дозволяє отримати об'єктивні висновки про ефективність лікування. Як ще один приклад, вибір особи для вибірки опитування за випадковими механізмами забезпечує різноманітність вибірки.
- Навіть якщо детерміністична модель може бути сформульована для досліджуваного явища, стохастична модель може забезпечити простіший і зрозуміліший опис. Наприклад, в принципі, можливо зафіксувати результат підкидання монетки детерміністичною моделлю, беручи до уваги властивості монети, спосіб підкидання, умови середовища, в якому рухається монета, і

поверхні, на яку вона приземлиться тощо. В результаті для опису простого результату – герб або число, потрібна дуже складна модель. Альтернативно, результат підкидання монетки можна описати як результат стохастичного процесу – імовірності, з якою випаде герб.

- Часто достатньо описати середньостатистичну поведінку процесу, а не кожен конкретну реалізацію. Наприклад, могла бути розроблена модель регресії, яка б зв'язувала ріст рослин з наявністю поживних речовин. Явна мета моделі може полягати у визначенні того, як змінюється середньостатистичне зростання рослин з наявністю поживних речовин, а не прогнозування зростання окремої рослини. Підтримка поняття усереднення в моделі полягає в характері очікуваних значень, що описують типову поведінку при наявності випадковості. Це, у свою чергу, вимагає, щоб модель містила стохастичні компоненти.

Завданням статистичного моделювання є одержання в можливо більш простій формі рівнянь, що зв'язують вихідні параметри об'єкта з вхідними, звичайно без врахування фізичних закономірностей процесів, на основі експериментальних даних, знятих на об'єкті моделювання.

Вигляд рівняння для кожного компонента вектора вихідних змінних у при цьому задається заздалегідь і вибирається, виходячи з міркувань:

- 1) вибирається найбільш проста математична залежність (часто використовуються поліноміальні вирази);

- 2) рівняння повинно містити найменше можливе число параметрів, що підлягають визначенню;

- 3) рівняння повинно бути лінійним щодо параметрів.

У загальному випадку лінійне відносно параметрів рівняння має вигляд

$$y = \sum_{j=1}^k a_j \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

де a_j – параметри; $\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_k)$ – функції від незалежних змінних $x_1, x_2, \dots, x_k$ (задаються при виборі рівняння).

Параметри a_j визначаються на основі експериментальних даних, отриманих з об'єкта моделювання, методами регресійного аналізу. При цьому можливі два випадки:

1. **Пасивний експеримент.** Експериментальні дані отримують в процесі спостереження за функціонуванням діючого об'єкта. Постановка спеціально планованих експериментів не допускається. Як правило, у цьому випадку вхідні параметри об'єкта змінюються в незначних межах, експериментальні дані несуть малий об'єм інформації, і одержуване рівняння регресії справедливе лише в досліджуваних інтервалах зміни вхідних параметрів об'єкта (x_i). Пасивний експеримент – велика серія дослідів з почерговим варіюванням кожної з змінних. До пасивного експерименту відноситься також збір статистичної інформації в режимі нормальної експлуатації на промисловому об'єкті.

2. **Активний експеримент.** Допускається постановка спеціальних експериментів на об'єкті моделювання (як правило, лабораторній або дослідно-

промисловій установці). У цьому випадку доцільне використання **методів математичного планування експериментів**, що дозволяють одержати максимум інформації з поставлених дослідів і обробити дані з найменшими обчислювальними витратами.

Вихідний статистичний матеріал зводять в таблицю 6.1.

При пасивному експерименті кожен рядок таблиці являє собою зафіксований реальний стан об'єкта, а всі рядки таблиці – вибірку таких станів. В активному експерименті кожен рядок являє собою умови проведення дослідів і відповідні їм значення вихідної змінної, а вся таблиця – науковий план проведення експерименту.

Метою є одержання математичної моделі об'єкта

$$\hat{y} = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Таблиця 6.1

Таблиця експериментальних даних

№ дослідів	x_1	x_2	x_3	. . .	x_k	y
1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	. . .	x_{k1}	y_1
2	x_{12}	x_{22}	x_{32}	. . .	x_{k2}	y_2
3	x_{13}	x_{23}	x_{33}	. . .	x_{k3}	y_3
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
n	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}	. . .	x_{kn}	y_n

Прийнято називати незалежні змінні $x_1, x_2, \dots, x_k$ – **факторами**, координатний простір з координатами $x_1, x_2, \dots, x_k$ – **факторним простором**, математичну модель – **функцією відгуку**, а геометричне зображення функції відгуку у факторному просторі – **поверхнею відгуку**.

Обробка дослідних даних у цьому випадку для одержання математичної моделі проводиться методами класичного регресійного і кореляційного аналізу.

Математичне моделювання зводиться до пошуку невинуватених характеристик зв'язку, що встановлюють функціональні залежності між вхідними і вихідними змінними у сталому режимі роботи агрегату. Ці залежності називаються **рівняннями регресії**.

Побудова математичних моделей об'єктів на основі експериментальних даних у вигляді рівнянь регресії є типовою задачею апроксимації.

У найпростішому випадку лінійного зв'язку двох змінних рівняння регресії представляється залежністю

$$y = a_0 + ax.$$

Якщо вихідна змінна є лінійною функцією багатьох змінних $x_1, \dots, x_k$, рівняння регресії можна подати у вигляді

$$y_0 = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_kx_k = a_0 + \sum_{i=1}^k a_ix_i$$

Якщо залежність між змінними має більш складний характер, то для її опису може використовуватись більш складна модель, наприклад, квадратична

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i + \sum_{i=1}^k a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{C_k^2} a_{ij} x_i x_j,$$

де C_k^2 – число сполучень з k елементів по 2.

В загальному випадку невідомими можуть бути як число членів полінома (структура моделі), так і коефіцієнти при змінних. Визначення цих невідомих і є задачею регресійного аналізу.

Таблиця 6.2

Залежність між числом факторів і числом коефіцієнтів степеневого рівняння регресії

Число факторів	Число коефіцієнтів степеневого рівняння			
	I ст.	II ст.	III ст.	IV ст.
2	3	6	10	15
3	4	10	20	35
4	5	15	35	7°
5	6	21	56	126

Уявимо, що структура моделі відома і за вибіркою експериментальних даних необхідно визначити оцінки коефіцієнтів.

Для оцінки коефіцієнтів використовується метод найменших квадратів. Відповідно до цього методу оцінки коефіцієнтів визначаються з умови мінімуму функції помилки

$$J(a_1 \dots a_k) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \min$$

де y_i – значення вихідної змінної за даними спостережень;

$\hat{y}_i$ – відповідне значення вихідної змінної, передвіщене за допомогою регресійної моделі.

Для одержання оцінок $a_1, \dots, a_k$, при яких значення функції J мінімальне, застосовують звичайні методи математичного аналізу. Умовою мінімуму є:

$$\partial J / \partial a_i = 0 \quad i=1 \dots k,$$

де k – число факторів.

В *Mathcad* присутні наступні функції для визначення рівняння регресії.

Лінійна регресія:

slope(vx,vy) – тангенс кута нахилу лінії регресії;

intercept(vx,vy) – точка перетинання лінії регресії з лінією Oy;

line(vx,vy) – повертає вектор, що містить коефіцієнти для лінії регресії $(a+b \cdot x)$, що щонайкраще апроксимує дані з векторів vx, vy;

medfit(vx,vy) – повертає вектор, що містить коефіцієнти для лінії регресії, отримані методом медіан-медіанної регресії.

Поліноміальна регресія:

regress (vx, vy, k) – повертає вектор, використовуваний функцією *interp* для побудови полінома до k -го ступеня, що щонайкраще наближається до

значень із v_x і v_y (для знаходження полінома необхідно скористатися функцією *interp*);

loess($v_x, v_y, span$) – повертає вектор, використовуваний функцією *interp* для знаходження полінома другого ступеня, що наближається до значень точок з v_x, v_y (*span* контролює відстань від вихідних точок, на якому може перебувати парабола; чим більший розкид даних, тим більшим повинен бути параметр *span*; гарні результати дає значення *span*=0.75).

Спеціальна регресія:

expfit(v_x, v_y, v_g) – знаходить коефіцієнти для експонентної кривої, щонайкраще відповідної до даних з v_x, v_y ; в v_g утримуються передбачувані значення коефіцієнтів ($a \cdot e^{bx} + c$);

lgfit(v_x, v_y, v_g) – знаходить коефіцієнти для логістичної кривої

$$\left(\frac{a}{1 + b \cdot e^{-cx}} \right),$$

в v_g утримуються передбачувані значення коефіцієнтів;

sinfit(v_x, v_y, v_g) – знаходить коефіцієнти для гармонійної кривої виду ($a \sin(x+b) + c$);

logfit(v_x, v_y, v_g) – знаходить коефіцієнти для логарифмічної кривої виду $a \cdot \ln(x+b) + c$;

lnfit(v_x, v_y) – знаходить коефіцієнти для логарифмічної кривої виду $a \cdot \ln(x) + b$;

pwrfit(v_x, v_y, v_g) – знаходить коефіцієнти для кривої виду $a \cdot x^b + c$.

Генералізована регресія:

linfit(v_x, v_y, F) – повертає вектор, що містить коефіцієнти, використовувані для складання лінійної комбінації функцій, що втримуються в F , щонайкраще відповідної до значень із v_x, v_y .

Звичайно отримані в результаті досвіду експериментальні значення розташовані не зовсім правильним чином - дають деякий "розкид", тобто виявляють випадкові відхилення від видимої загальної закономірності. Ці відхилення пов'язані з неминучими при всякому досвіді помилками виміру.

Для усунення цих помилок вирішується задача згладжування експериментальної залежності.

В *Mathcad* існують три функції згладжування:

medsmooth(v_y, n) - повертає вектор, отриманий згладжуванням v_y з, що зміщаються медіанами з вікном ширини n ;

ksmooth(v_x, v_y, b) - повертає вектор, отриманий згладжуванням з використанням ядра Гаусса для обчислення середньозважених елементів з v_y ;

supsmooth(v_x, v_y) - повертає вектор, отриманий шляхом згладжування адаптивним методом найменших квадратів.

У кожному разі після згладжування виходить крива, набагато більш гладка, ніж кусочно-лінійна функція, що з'єднує точки одну з одною у послідовному порядку. При згладжуванні буває корисне застосування функції *sort*(Y), що сортує дані векторів, що іноді зменшує погрішності чисельного алгоритму згладжування.

Приклад 6.1. Результати експериментальних досліджень оформлені у вигляді таблиці, перший рядок якої включає значення вхідного параметра x , а другий – вихідного t . Необхідно побудувати в системі координат xOt точки з координатами $(x_i, t_i, i=1, 2, \dots, 10)$ (рис. 6.1) та провести згладжування експериментальної залежності, користуючись однією з функцій *Mathcad*. Визначити коефіцієнти рівняння регресії за згладженими даними.

Таблиця 6.1

Значення аргументу, x_i									
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Первісне значення функції, t_i									
0	1	3	4	7	12	14	18	21	25

Підготуємо експериментальні дані у вигляді двох вектор-стовбців: X (вхідний параметр) та T (вихідний параметр).

Зобразимо точки з координатами $(x_i, t_i, i=1, 2, \dots, 10)$ на двовірному графіку (рис. 6.1), виділивши їх червоним кольором.

Візуальна оцінка дозволяє зробити висновок, що більшість точок лежать на прямій лінії або плавній кривій великого радіуса кривизни. Випадають із загальної тенденції точки 4, 5 та 6. Тому перед подальшою математичною обробкою експериментальних даних доцільно провести вирівнювання (згладжування) кривої. Обираємо для згладжування функцію *supsmooth(vx,vy)*, яка повертає вектор, отриманий адаптивним методом найменших квадратів. Зображуємо вектор Ts пунктирною лінією (рис. 6.1). Вона дуже близька до прямої, тому можна з невеликою похибкою вважати, що маємо найпростіший випадок лінійного зв'язку двох змінних, для якого рівняння регресії представляється залежністю

$$t = a + b \cdot x.$$

Для визначення коефіцієнтів a і b використовуємо функцію *line(vx,vy)*, що щонайкраще апроксимує дані з векторів vx, vy . У нашому випадку звертання до функції матиме вигляд

$$koef := line(X, Ts),$$

де *koef* – вектор, який складається з двох елементів $koef_0 = a$ та $koef_1 = b$.

Будуємо графік лінійної функції відповідно до рівняння регресії

$$Tr = koef_0 + koef_1 \cdot X$$

та виділяємо його суцільною лінією (рис. 6.1).

Зміст звіту

1. Знайти і завантажити файл «Exper.xmcd».
2. Внести зміни до файлу відповідно до свого варіанту в табл. 6.2 (за узгодженням з викладачем можна ввести свої дані).
3. Зробити копію отриманих результатів та вставити у звіт.

Таблиця 6.2

Вихідні дані для побудови експериментально-статистичної моделі

№ Варіанту	Значення аргументу, x									
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	Первісне значення функції, t									
1.	0	1	3	4	7	12	14	18	21	25
2.	1	3	4	7	12	14	18	21	25	32
3.	2	4	7	12	14	18	21	25	32	34
4.	3	7	12	14	18	21	25	32	34	38
5.	8	12	14	18	21	25	32	34	38	44
6.	11	14	18	21	25	32	34	38	44	47
7.	12	18	21	25	32	34	38	44	47	55
8.	19	21	25	32	34	38	44	47	55	60
9.	22	25	32	34	38	44	47	55	60	72
10.	26	32	34	38	44	47	55	60	72	80
11.	31	34	38	44	47	55	60	72	80	86
12.	35	38	44	47	55	60	72	80	86	94
13.	37	44	47	55	60	72	80	86	94	104
14.	45	47	55	60	72	80	86	94	104	111
15.	51	55	60	72	80	86	94	104	111	122
16.	55	60	72	80	86	94	104	111	122	130
17.	69	72	80	86	94	104	111	122	130	145
18.	77	80	86	94	104	111	122	130	145	150
19.	81	86	94	104	111	122	130	145	150	168
20.	89	94	104	111	122	130	145	150	168	185
21.	92	104	111	122	130	145	150	168	185	202
22.	108	111	122	130	145	150	168	185	202	225
23.	118	122	130	145	150	168	185	202	225	237
24.	126	130	145	150	168	185	202	225	237	255
25.	137	145	150	168	185	202	225	237	255	280
26.	145	150	168	185	202	225	237	255	280	296

Результати виконання Приклад 6.1

Експериментально-статистичні методи математичного моделювання

Підготуємо експериментальні дані у вигляді двох вектор-стовбців: X (вхідний параметр) та T (вихідний параметр)

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \\ 14 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix} \quad T_{\text{exp}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 12 \\ 14 \\ 18 \\ 21 \\ 25 \end{pmatrix} \quad T_s := \text{supsmooth}(X, T)$$

Зобразимо точки з координатами $(x_i, t_i, i=1, 2, \dots, 10)$ на двовірному графіку (рис. 6.1)

$$\text{coef} := \text{line}(X, T_s) \quad Tr := \text{coef}_0 + \text{coef}_1 \cdot X$$

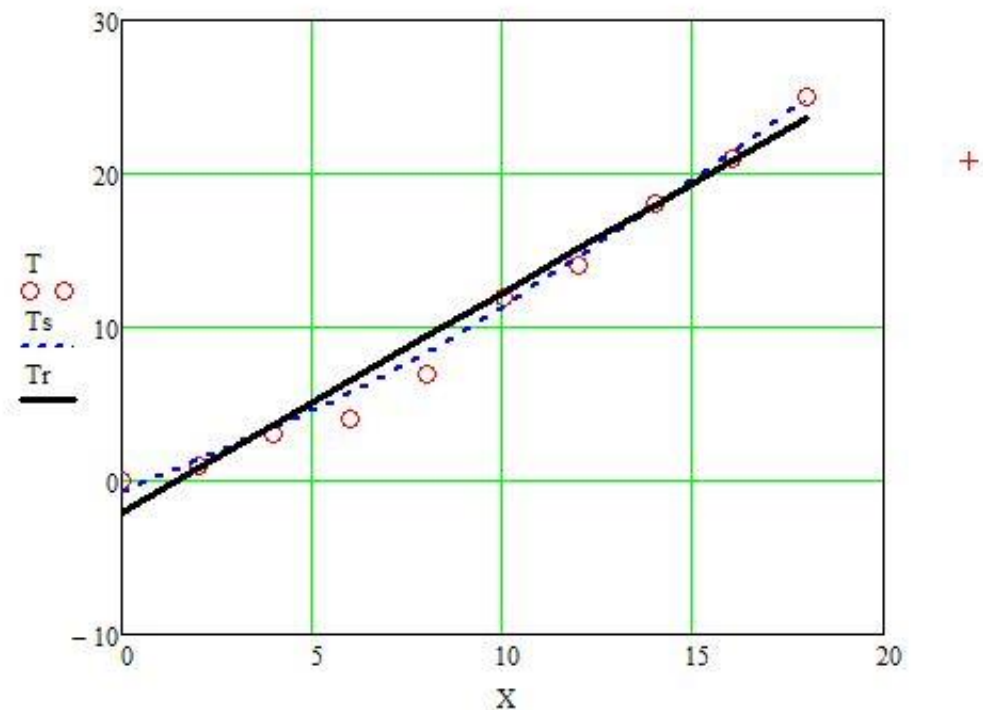


Рисунок 6.1 – Зв'язок між вхідним x та вихідним t параметрами.

Візуальна оцінка дозволяє зробити висновок, що більшість точок лежать на прямій лінії або плавній кривій великого радіуса кривизни. Випадають із загальної тенденції точки 4, 5 та 6. Тому перед подальшою математичною обробкою експериментальних даних доцільно провести вирівнювання (згладжування) кривої. Обираємо для згладжування функцію *supsmooth(vx,vy)*, яка повертає вектор, отриманий адаптивним методом найменших квадратів. Зображуємо вектор T_s пунктирною лінією (рис. 6.1).

Вона дуже близька до прямої, тому можна з невеликою похибкою вважати, що маємо найпростіший випадок лінійного зв'язку двох змінних. Для визначення коефіцієнтів лінійного рівняння використовуємо функцію *line(vx,vy)*. Будуємо графік апроксимуючої лінійної функції $T_r=f(X)$ та виділяємо його суцільною лінією (рис. 6.1).

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 7

Графічне представлення результатів моделювання

Геометрично модель може бути представлена як деяка *поверхня відгуку*, відповідна до розташування точок $W(x)$ в k -вимірному факторному просторі x . Таке представлення виявляється надзвичайно корисним, зокрема, при розв'язку задач оптимізації. На жаль, наочно можна уявити собі тільки одновимірну (рис. 7.1, *а*) і двовимірну (рис. 7.1, *б*) поверхні відгуку, причому в останньому випадку зручно використовувати *топографічний спосіб* зображення рельєфу за допомогою ліній рівня (рис. 7.1, *в*).

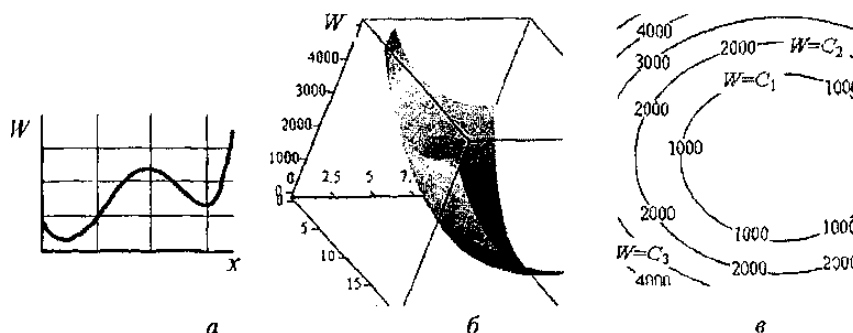


Рисунок 7.1 – Графічне зображення моделі (поверхні відгуку)

Кількість вершин (западин) визначає модальність поверхні відгуку. Якщо на поверхні відгуку є одна вершина (западина), модель називається *унімодальною* (див. рис. 7.1, *б* і 7.2), а якщо ні, то – *полімодальною* (рис. 7.1, *а*). Вимога унімодальності може бути сформульована аналогічно умові наявності одного локального екстремуму цільової функції.

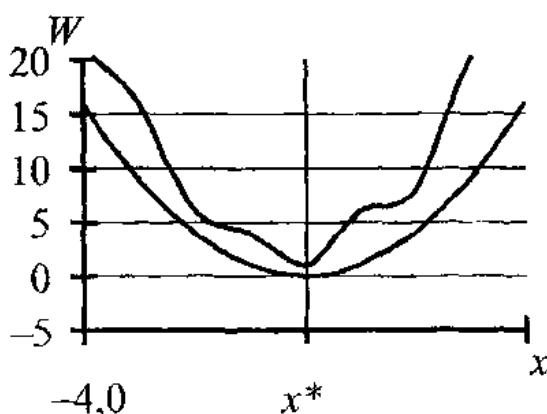


Рисунок 7.2 – Одновимірні унімодальні поверхні відгуку

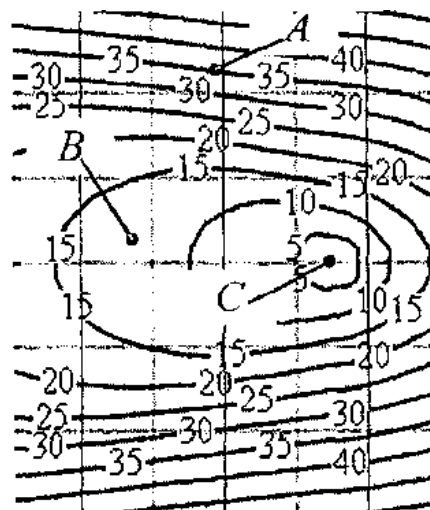


Рисунок 7.3 – Характеристика контрастності поверхні відгуку

Багатомірна модель називається *унімодальною*, якщо існує хоча б одна крива, що проходить через точку x^* , уздовж якої функція *унімодальна* в одномірному сенсі (рис. 7.4).

Іншою важливою властивістю є контрастність поверхні відгуку, що показує чутливість результуючої функції до зміни фазових змінних. Контрастність характеризується величинами похідних. Приблизно рівна контрастність по всім змінним x^* характеризує ситуацію «схилу» (точка A на рис. 7.3). Суттєво різна контрастність по різних змінних (погана обумовленість функції) є ознакою «яружної» ситуації (точка B). Нарешті, загальна низька контрастність (точка C) говорить або про близькість екстремуму, або про своєрідне «плато» на поверхні відгуку. Можливості дослідження моделей суттєво залежать від зазначених властивостей поверхні відгуку.

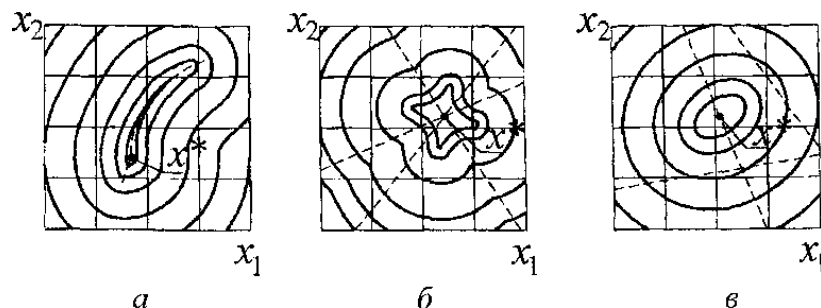


Рисунок 7.4 – Двовимірні *унімодальні* поверхні відгуку: а – *унімодальна*; б – *строго унімодальна*; в – *лінійно унімодальна*

Виконання діаграм (графіків)

Правила виконання діаграм регламентується Р 50-77-88. При виконанні діаграм використовують прямокутну і полярну систему координат, які наведені на рисунках 7.5 та 7.6 відповідно.

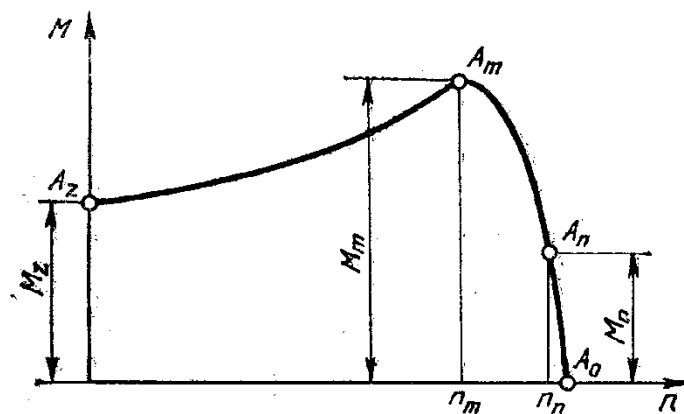


Рисунок 7.5 – Прямокутна система координат

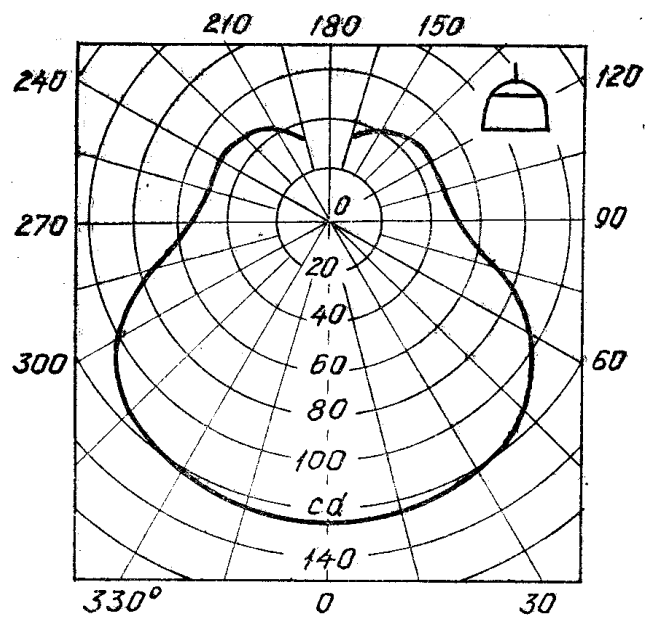


Рисунок 7.6 – Полярна система координат

В прямокутній системі координат незалежну змінну, як правило, необхідно відкласти на горизонтальній осі (осі абсцис).

Позитивні значення величин відкладають на осях, як правило, вправо і вгору від точки початку відліку (рис.7.7). При виконанні діаграм в системі трьох координат (просторовій) функціональні залежності слід зображати у вигляді аксонометричної проекції за ГОСТ 2.317 (рис. 7.8).

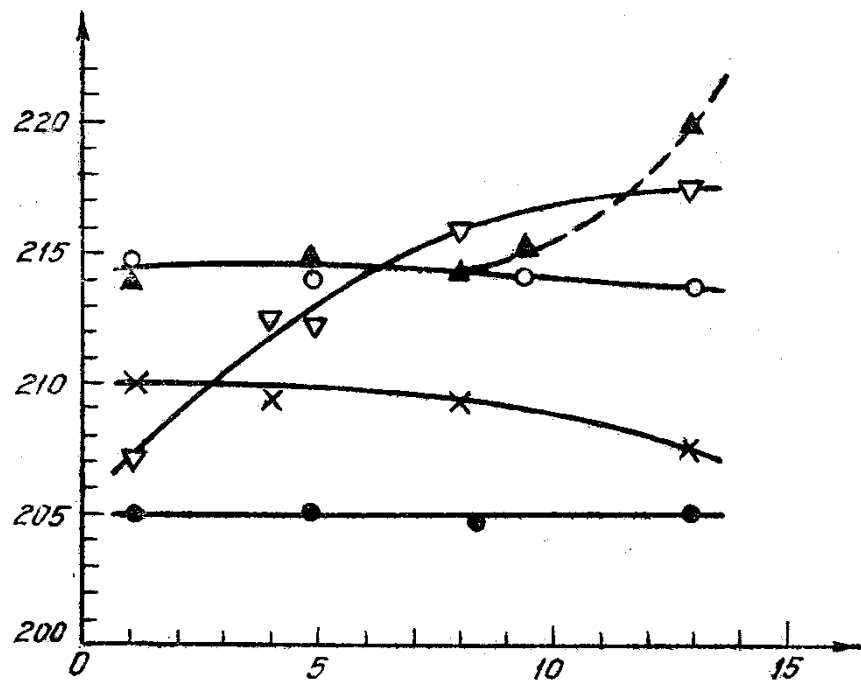


Рисунок 7.7 – Відкладання позитивних величин на осях системи координат

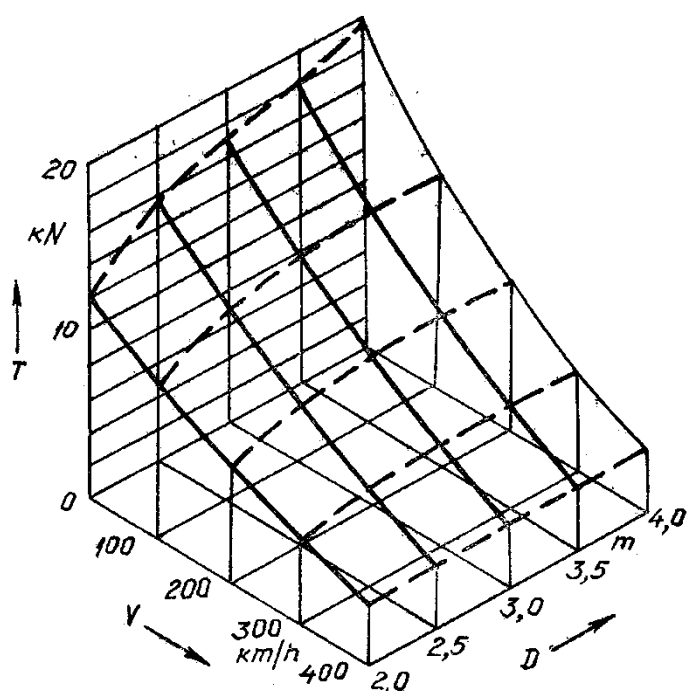


Рисунок 7.8 – Система трьох координат

У полярній системі координат початок відліку кутів (кут 0°) повинен знаходитися на горизонтальній або вертикальній осі. Позитивний напрямку куткових координат повинен відповідати напрямку обертання проти годинникової стрілки.

Значення величин, пов'язаних функціональною залежністю, яка зображується, відкладають на осях координат, які використовуються у вигляді шкал (рис. 7.9). В діаграмах, які зображують декілька функцій різних

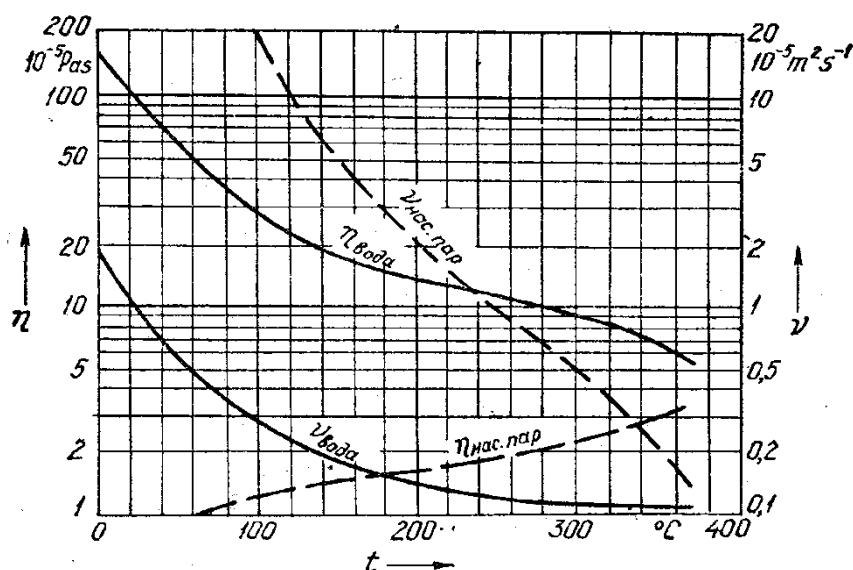


Рисунок 7.9 – Використання осей координат у вигляді шкал

змінних, а також в діаграмах, в яких одна і та ж змінна повинна бути виражена одночасно в різних одиницях, допускається використовувати в якості шкал координатні осі, лінії координат на сітці, що обмежують поля діаграми, а також прямі, які розташовані паралельно координатним осям (рис. 7.10)

Координатні осі, які використовуються в якості шкал значень величин, що зображуються, повинні бути розділені на графічні інтервали одним із наступних способів: координатною сіткою (рис. 7.9); ділильними штрихами (рис. 7.7); сполученням координатної сітки і ділильних штрихів (рис. 7.10).

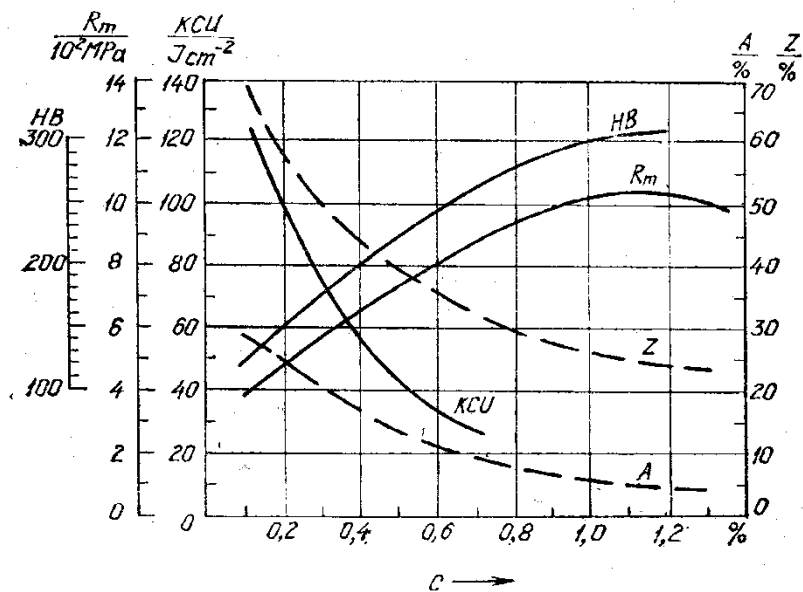


Рисунок 7.10 – Використання осей і сітки у вигляді шкал

Ділильні штрихи, що відповідають кратним графічним інтервалам, допускається подовжувати.

Допускається осі координат завершувати стрілками, які вказують напрямок зростання значень величин. Їх наносять за межами шкал (рис. 7.7). Допускаються самостійні стрілки, які наносяться після позначення величини – паралельно осі координат (рис. 7.9).

Рядом з поділками сітки або ділильними штрихами, які відповідають початку і закінченню шкали, повинні бути вказані відповідні числа (значення величин). Якщо початком відліку шкал є нуль, його вказують один раз в точці перетину шкал.

Числа у шкал слід розташовувати горизонтально поза полем діаграми. В окремих випадках дозволяється наносити числа у шкал в межах поля діаграми.

Діаграми виконують лініями за ГОСТ 2.303.

Осі координат і шкал, що обмежують поле, виконують товстою суцільною лінією (s). Лінії координатної сітки і ділильні штрихи виконують суцільною тонкою лінією (від s/3 до s/2). Зображення функціональної залежності виконують основною лінією товщиною 2s.

Якщо в одній діаграмі зображуються дві і більше функціональні залежності, то допускається виконувати їх лініями різних типів.

Характерні точки ліній функціональної залежності (тобто позначені числами, буквами, символами) допускається позначати кружками (рис. 7.5).

Точки діаграми, які отримані вимірюванням або розрахунками позначають графічно (кружком, хрестиком тощо). Позначення таких точок повинно бути пояснено під діаграмою або на вільному місці поля діаграми.

Викладені вище рекомендації не є обов'язковими до виконання на території України та призначені для вибору найбільш наочного способу зображення результатів моделювання.

Правила виконання графіків і діаграм у прикладних програмах для математичного моделювання можуть відрізнятись від рекомендованих. Отримані зображення необхідно копіювати «як є» і вставляти у власні документи.

Приклад 7.1. Побудувати 3D-зображення (в системі трьох координат) залежності (математичної моделі), отриманої експериментально-статистичним методом.

Рівняння регресії на основі отриманих експериментальних даних має вигляд

$$Y = 1,0221 + 0,1043x_1 + 0,3349x_3$$

Вхідні параметри змінюємо в межах: $8 \leq x_1 \leq 16$, $10 \leq x_3 \leq 22$.

Використовуємо для побудови просторового каркасного графіка з кольоровою заливкою крок зміни параметра x_1 $\Delta x_1 = 0,5$, параметра x_3 $\Delta x_3 = 1,0$.

Зміну параметрів організовуємо, використовуючи конструкцію *m...n* з підменю «Матрица».

Просторовий графік починаємо будувати, обравши пункт «График поверхности» в підменю «График». Клацаємо правою кнопкою миші, зупинивши курсор у створеній області графіка, обираємо у меню «Свойства». Відмічаємо у підпунктах:

«Общие»: «Периметр», «Показать поле», «График поверхности»;

«Оси»: «Ось X»: «Провести линии», «Автосетка», «Цвет линии», «Толщина линии»=1, «Подпись»=x1, «Показать числа», «Цвет осей», «Толщина осей»=1,5, «Автомасштабирование»;

«Ось Y»: «Провести линии», «Цвет линии», «Число»=4, «Толщина линии»=1, «Подпись»=x3, «Показать числа», «Цвет осей», «Толщина осей»=1,5, «Автомасштабирование»;

«Ось Z»: «Провести линии», «Автосетка», «Цвет линии», «Толщина линии»=1, «Подпись»=Y, «Показать числа», «Цвет осей», «Толщина осей»=1,5, «Автомасштабирование»;

«Оформление»: «График 1»: «Поверхность с заливкой», «Карта цветов», «Каркас», «Толщина»=1, «Сплошной цвет».
Зберігаємо результат, присвоюючи файлу своє ім'я.

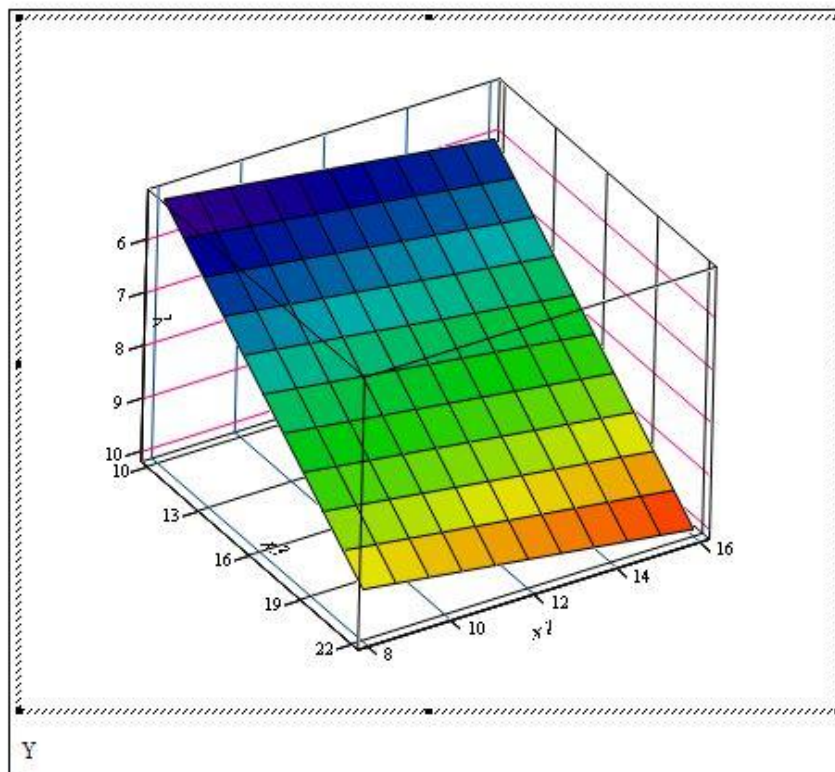
Графічне представлення результатів моделювання

Вхідний параметр x_1 змінюємо в межах від 8 до 16, вхідний параметр x_3 – в межах від 10 до 22

$$x_1 := 8.0, 8.5 \dots 16.0$$

$$x_3 := 10, 11 \dots 22$$

$$Y(x_1, x_3) := 1.0221 + 0.3349 \cdot x_3 + 0.1043 \cdot x_1$$



Зміст звіту

1. Знайти і завантажити файл «graf 3D.xmcd».
2. Внести зміни до файлу відповідно до свого варіанту в табл. 7.1 (за узгодженням з викладачем можна ввести дані своєї математичної моделі з двома вхідними параметрами).
3. Зробити копію отриманих результатів та вставити у звіт.

ЗМІСТ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1. Методика використання бібліотечної ММ	3
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №2. Структурний аналіз машини	7
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3. Аналіз робочого процесу машини	13
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №4. Постановка задачі моделювання	16
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №5. Вибір математичного апарата для моделювання	18
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6. Експериментально-статистичні методи математичного моделювання	23
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №7. Графічне представлення результатів моделювання	32

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОБОЧИХ ПРОЦЕСІВ МАШИН

Методичні рекомендації до виконання практичних робіт
для здобувачів ступеня вищої освіти доктор філософії спеціальності 133 –
"Галузеве машинобудування"
освітньо-наукова програма «Галузеве машинобудування»

Укладачі: В.В. Амосов, В.М. Сало