Міністерство освіти і науки України
КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

УДК 62-752+62-755 ДРНТІ 55.03.00

Г.Б. Філімоніхін

Динаміка багатокульових (багатомаятникових) автобалансирів. Стійкість побічних рухів

Кіровоград 2003

Вступ

В роботі [1] розпочато створення аналітичної теорії багатокульових (багатомаятникових) автобалансирів, зокрема для різних фізичних моделей ротора і АБП, виведені диференціальні рівняння руху системи, визначені кількість і умови існування усталених рухів системи ротор – АБП, для дисбалансів, які може зрівноважити АБП досліджена стійкість основних рухів – рухів, у яких ротор зрівноважений і відсутнє відхилення вала від осі обертання.

В цій роботі досліджується стійкість побічних рухів – у яких ротор не зрівноважений, і у випадку великих дисбалансів, які не може зрівноважити АБП, досліджується стійкість основного руху – у якому КВ максимально відхилені у легкий бік ротора і цим зменшують дисбаланс ротора. Побічні усталені рухи розглядаються двох типів. У перших – КВ обертаються синхронно разом з ротором. Ці рухи загальновідомі і при дослідженні динаміки АБП з двома КВ традиційно вивчається саме їх стійкість [2-4]. Другі побічні рухи уперше експериментально відкриті для маятникових АБП, що зрівноважують горизонтально розташований ротор в роботі [5], а для кульових АБП, що зрівноважують вертикально розташований ротор – у роботі [6]. В цих рухах КВ майже рівномірно обертаються відносно землі із швидкістю, близькою до резонансної швидкості обертання ротора, а повздовжня вісь ротора рухається по гіпоциклоїді, що утворена прямою прецесією з цією частотою і прямою нутацією з частотою обертання ротора. Теоретично ці рухи досліджені для двохкульових (двохмаятникових) АБП у роботі [7]. В цій роботі розглядається більш загальний випадок – багатокульових (багатомаятникових) АБП з однаковими КВ.

1. Дослідження стійкості побічних рухів, у яких КВ обертаються синхронно з ротором.

1.1. Одержання рівнянь першого наближення

У випадку АБП з n однаковими КВ диференційні рівняння руху системи мають вигляд [1]:

$$R_j = \ddot{\alpha}_j + h\dot{\alpha}_j - i\tilde{R}_m[(\ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s)e^{-i\alpha_j} - (\ddot{\bar{s}} - 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s})e^{i\alpha_j}], \ /j = \overline{1,n}/;$$

$$R_{n+1} = \ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s + H(\dot{s} + iR_\omega s) + s + \ddot{\psi} + 2iR_\omega \dot{\psi} - R_\omega^2 \psi = 0,$$

$$R_{n+2} = \bar{R}_{n+1}, \quad \psi = e_0 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{i\alpha_j}. \tag{1}$$

Для стаціонарних побічних рухів, знайдених у роботі [1], вводимо збурення і збурений рух

$$\alpha_j = \tilde{\alpha}_j + \beta_j = \gamma + k_j\pi + \beta_j, \ |\beta_j| << 1, \ /j = \overline{1,n}/;$$

$$s = \tilde{s} + x, \ \bar{s} = \bar{\tilde{s}} + \bar{x}, \ |x|, \ |\bar{x}| << 1. \tag{2}$$

Лініаризуємо диференціальні рівняння руху. Розглянемо

$$\dot{s} = \dot{x}, \ \ddot{s} = \ddot{x};$$

$$\dot{\alpha}_j = \dot{\beta}_j, \quad \ddot{\alpha}_j = \ddot{\beta}_j, \quad e^{i\alpha_j} = e^{i\gamma}\cdot e^{ik_j\pi}\cdot e^{i\beta_j} = (-1)^{k_j} e^{i\gamma}(1 + i\beta_j) \ /j = \overline{1,n}/;$$

$$\psi \approx e_0 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k_j} e^{i\gamma}(1 + i\beta_j) = e_0 + e^{i\gamma}\left[e(k) + i\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k_j}\beta_j\right]. \tag{3}$$

Введемо нову узагальнену координату

$$\beta = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k_j}\beta_j. \tag{4}$$

Тоді

$$\psi \approx e_0 + e^{i\gamma}[e(k) + i\beta], \ \dot{\psi} \approx ie^{i\gamma}\dot{\beta}, \ \ddot{\psi} \approx ie^{i\gamma}\ddot{\beta}, \tag{5}$$

і останні два рівняння системи (1) перетворяться до вигляду:

$$R_{n+1} = \ddot{x} + 2iR_\omega \dot{x} - R_\omega^2 x + H(\dot{x} + iR_\omega x) + x + ie^{i\gamma}(\ddot{\beta} + 2iR_\omega \dot{\beta} - R_\omega^2 \beta) = 0,$$

$$R_{n+2} = \overline{R}_{n+1}. \qquad (6)$$

Перетворюємо перші n рівнянь:

$$R_j \approx \ddot{\beta}_j + h\dot{\beta}_j - i\tilde{R}_m \{[\ddot{x} + 2iR_\omega \dot{x} - R_\omega^2 (x - \tilde{s})] - i\beta_j (-1)^{k_j} e^{-i\gamma} -$$
$$- [\ddot{\bar{x}} - 2iR_\omega \dot{\bar{x}} - R_\omega^2 (\bar{x} + \bar{\tilde{s}})] + i\beta_j (-1)^{k_j} e^{i\gamma}\}, \quad /\, j = \overline{1,n}\,/.$$

Остаточно для них одержуємо:

$$R_j \approx \ddot{\beta}_j + h\dot{\beta}_j + (-1)^{k_j} \tilde{R}_m R_\omega^2 (\tilde{s} e^{-i\gamma} + \bar{\tilde{s}} e^{i\gamma}) \beta_j -$$
$$- i(-1)^{k_j} \tilde{R}_m [(\ddot{x} + 2iR_\omega \dot{x} - R_\omega^2 x) e^{-i\gamma} - (\ddot{\bar{x}} - 2iR_\omega \dot{\bar{x}} - R_\omega^2 \bar{x}) e^{i\gamma}] = 0, \quad /\, j = \overline{1,n}\,/. \qquad (7)$$

Вводимо нові змінні і параметр

$$y = ie^{-i\gamma} x, \ \ \bar{y} = -ie^{i\gamma} \bar{x}, \ \ 2\tilde{v} = \tilde{s} e^{-i\gamma} + \bar{\tilde{s}} e^{i\gamma}. \qquad (8)$$

Тоді лініаризовані диференціальні рівняння приймуть вигляд:

$$L_j = \ddot{\beta}_j + h\dot{\beta}_j + (-1)^{k_j} 2R_m R_\omega^2 \tilde{v} \beta_j -$$
$$- (-1)^{k_j} R_m [\ddot{y} + 2iR_\omega \dot{y} - R_\omega^2 y + \ddot{\bar{y}} - 2iR_\omega \dot{\bar{y}} - R_\omega^2 \bar{y}] = 0, \ /\, j = \overline{1,n}\,/;$$

$$L_{n+1} = \ddot{y} + 2iR_\omega \dot{y} - R_\omega^2 y + H(\dot{y} + iR_\omega y) + y - (\ddot{\beta} + 2iR_\omega \dot{\beta} - R_\omega^2 \beta) = 0,$$

$$L_{n+2} = \overline{L}_{n+1}. \qquad (9)$$

Для подальшого дослідження стійкості розглянемо різні випадки.

1.2. Випадок, коли КВ відхилені у один бік

У рухах $k = 0, 2^n - 1$ всі КВ відповідно відхилені у важкий і легкий бік ротора:

$$k = 0 \ : \ k_j = 0; \quad k = 2^n - 1 \ : \ k_j = 1. \qquad (10)$$

Введемо у розглядання нові змінні

$$\delta_j = \beta_n - \beta_j, \quad /\, j = \overline{1, n-1}\,/. \qquad (11)$$

Тоді перші n рівнянь системи (9) перетворяться до вигляду:

$$L_n - L_j = \ddot{\delta}_j + h\dot{\delta}_j + (-1)^k 2R_m R_\omega^2 \tilde{\nu}\delta_j = 0, \qquad /\, j = \overline{1, n-1}\,/;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^k}{n} L_j = \ddot{\beta} + h\dot{\beta} + 2\tilde{R}_m R_\omega^2 \tilde{\nu}(-1)^k \beta -$$

$$- R_m \left[\ddot{y} + 2iR_\omega \dot{y} - R_\omega^2 y + \ddot{\bar{y}} - 2iR_\omega \dot{\bar{y}} - R_\omega^2 \bar{y}\right]. \tag{12}$$

З перших (n–1) рівнянь знаходимо таку необхідну умову асимптотичної стійкості побічного руху

$$(-1)^k \tilde{\nu} > 0. \qquad \left(k = 0:\ \tilde{\nu} > 0; \quad k = 2^n - 1:\ \tilde{\nu} < 0\right). \tag{13}$$

Звідки випливає, що побічний рух $k = 0$ може бути стійким при $\tilde{\nu} > 0$, а рух $k = 2^n - 1$ - при $\tilde{\nu} < 0$.

1. Розглянемо випадок відсутності сил опору: $h, H = 0$.

В цьому випадку [1]:

$$\tilde{\nu}(0) = \frac{R_\omega^2 (e_0 + 1)}{1 - R_\omega^2}, \qquad \tilde{\nu}(2^n - 1) = \frac{R_\omega^2 (e_0 - 1)}{1 - R_\omega^2}. \tag{14}$$

У випадку $k = 0$ побічний рух може бути стійким тільки на дорезонансних швидкостях: $R_\omega < 1$. У випадку $k = 2^n - 1$ необхідна умова стійкості приймає вигляд

$$\frac{R_\omega^2 (e_0 - 1)}{1 - R_\omega^2} < 0. \tag{15}$$

Звідки одержуємо, що рух може бути стійким при виконанні однієї з двох таких умов стійкості

$$R_\omega < 1, \quad e_0 < 1; \qquad R_\omega > 1, \quad e_0 > 1. \tag{16}$$

Таким чином, побічний рух $k = 2^n - 1,\ e_0 < 1$ може бути стійким тільки на дорезонансних швидкостях, а основний рух при великих дисбалансах $k = 2^n - 1,\ e_0 > 1$ – на зарезонансних швидкостях.

2. Випадок наявності сил опору. В цьому випадку [1]

$$\tilde{v}(0)=\frac{R_\omega^2\left(e_0+\cos\tilde{\gamma}\right)}{1-R_\omega^2},\quad \tilde{v}(2^n-1)=\frac{R_\omega^2\left(e_0+\cos\tilde{\gamma}\right)}{1-R_\omega^2}. \tag{17}$$

Розглядаємо можливі варіанти.

2.1. Випадок, коли $e_0<1$. Тоді існують швидкості [1]

$$R^*_{\omega 1/2}=\frac{\sqrt{4e_0^2+H^2\left(1-e_0^2\right)}\mp H\sqrt{\left(1-e_0^2\right)}}{2e_0},\quad 0<R^*_{\omega 1}<1<R^*_{\omega 2}, \tag{18}$$

такі, що для руху $k=0$:

$$\forall\ R_\omega<R_{\omega 1},\ \tilde{v}>0;\qquad \forall\ R_\omega>R_{\omega 2},\ \tilde{v}<0. \tag{19}$$

Звідки випливає, що побічний рух $k=0$ за умови існування може бути стійким тільки на дорезонансних швидкостях.

Для руху $k=2^n-1$:

$$\forall\ R_\omega<R_{\omega 1}\quad \tilde{v}<0,\qquad \forall\ R_\omega>R_{\omega 2}\quad \tilde{v}>0. \tag{20}$$

Звідки випливає, що цей рух за умови існування може бути стійким тільки на дорезонансних швидкостях.

2.2. Випадок, коли $e_0>1$. У цьому випадку:

- для руху $k=0$

$$\forall R_\omega<1,\ \ \tilde{v}>0;\qquad \forall R_\omega>1,\ \ \tilde{v}<0;$$

- для $k=2^n-1$

$$\forall R_\omega<1,\ \ \tilde{v}>0;\qquad \forall R_\omega>1,\ \ \tilde{v}<0. \tag{21}$$

Таким чином, побічний рух $k=0$ $\left(e_0>1\right)$ може бути стійким тільки на дорезонансних швидкостях, а основний рух $k=2^n-1$ $\left(e_0>1\right)$ - на зарезонансних.

Для одержання додаткових умов стійкості (нестійкості) використовуємо останні два рівняння в системі (9) і останнє рівняння в системі (12). Введемо коефіцієнти

$$a_{11} = (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2,$$

$$a_{33} = \lambda^2 + h\lambda \pm 2\widetilde{R}_m R_\omega^2 \widetilde{v}\,. \tag{22}$$

Тоді характеристичне рівняння визначається таким визначником

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & -a_{13} \\ 0 & \bar{a}_{11} & -\bar{a}_{13} \\ -R_m a_{13} & -R_m \bar{a}_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\bar{a}_{11}a_{33} - R_m\left(a_{11}\bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11}a_{13}^2\right) = 0\,. \tag{23}$$

Характеристичне рівняння у явному вигляді

$$a_6\lambda^6 + a_5\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

$$a_0 = 2\widetilde{R}_m R_\omega^2 \left[\pm v\left[(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2\right] + R_\omega^2 (R_\omega^2 - 1)\right],$$

$$a_1 = h\left\{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2\right\} + 2H\widetilde{R}_m R_\omega^2 \left\{\pm 2(R_\omega^2 + 1)v + 3R_\omega^2\right\},$$

$$a_2 = (R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2 \pm 2v\widetilde{R}_m R_\omega^2\left[2(R_\omega^2 + 1) + H^2\right] + 2\widetilde{R}_m R_\omega^2 (1 + R_\omega^2) + 2hH(R_\omega^2 + 1),$$

$$a_3 = 2R_\omega^2\left[2H\widetilde{R}_m (1 \pm v) + H + h\right] + 2(H + h) + hH^2,$$

$$a_4 = 2R_\omega^2\left[1 - \widetilde{R}_m (1 \mp v)\right] + 2(1 - \widetilde{R}_m) + H(H + 2h),$$

$$a_5 = 2H(1 - \widetilde{R}_m) + h, \quad a_6 = 1 - 2\widetilde{R}_m\,. \tag{24}$$

Обмежимося розгляданням випадку відсутності сил опору $h, H = 0$. У цьому випадку характеристичне рівняння (24) приймає вигляд

$$a_6 y^3 + a_4 y^2 + a_2 y + a_0 = 0,$$

$$a_0 = 2\widetilde{R}_m R_\omega^2 (R_\omega^2 - 1)\left[R_\omega^2 \pm v(R_\omega^2 - 1)\right],$$

$$a_2 = (R_\omega^2 - 1)^2 \pm 4v\widetilde{R}_m R_\omega^2 (R_\omega^2 + 1) + 2\widetilde{R}_m R_\omega^2 (1 + R_\omega^2),$$

$$a_4 = 2R_\omega^2\left[1 - \widetilde{R}_m (1 \mp v)\right] + 2(1 - \widetilde{R}_m), \quad a_6 = 1 - 2\widetilde{R}_m, \tag{25}$$

Відхилення вала $\widetilde{v}$ визначається рівняннями (14). Тоді коефіцієнт a_0 приймає вигляд:

$$a_0 = \pm 2\widetilde{R}_m R_\omega^4 (1 - R_\omega^2) e_0, \tag{26}$$

де верхній знак відповідає руху $k=0$, а нижній - $k=2^n-1$. Для стійкості руху необхідно, щоб всі коефіцієнти були додатними. Звідки видно, що рух $k=0$ може бути стійким тільки на дорезонансних швидкостях і нестійкий на зарезонансних, а рух $k=2^n-1$ - навпаки.

З врахуванням попередніх умов стійкості, побічний рух $k=2^n-1$ $(e_0<1)$ завжди нестійкий. Досліджуємо стійкість основного руху $k=2^n-1$ $(e_0>1)$. Для нього решта коефіцієнтів:

$$a_2=\left(R_\omega^2-1\right)^2+\frac{2R_mR_\omega^2\left[(2e_0-1)R_\omega^4+(e_0+3)R_\omega^2-6\right]}{R_\omega^2-1},$$

$$a_4=2(1-R_m)\left(R_\omega^2+1\right)+\frac{2R_m(e_0-1)R_\omega^4}{R_\omega^2-1},\quad a_6=1-2R_m, \tag{27}$$

Видно, що якщо $e_0>1$, то коефіцієнти додатні, що відповідає необхідній умові стійкості руху. Позначимо

$$x=R_\omega^2,\quad y=\lambda^2. \tag{28}$$

Тоді характеристичне рівняння (25) прийме вигляд

$$b_3y^3+b_2y^2+b_1y+b_0=0,$$

$$b_0=2R_me_0(x-1)^2x^2,\quad b_1=(x-1)^3+2R_mx\left[(2e_0-1)x^2+(e_0+3)x-6\right],$$

$$b_2=2(1-R_m)\left(x^2-1\right)+2R_m(e_0-1)x^2,\quad b_3=(1-2R_m)(x-1). \tag{29}$$

У некритичному випадку у полінома (29) всі корені від'ємні. Умова, що всі корені від'ємні [8]:

$$b_i>0,\quad /i=\overline{0,3}/;$$

$$\det=-b_1^2b_2^2+4b_1^3b_3+27b_0^2b_3^2-18b_0b_1b_2b_3+4b_0b_2^3<0. \tag{30}$$

Аналізуємо першу групу рівнянь. Якщо $x>1$, то $b_0,b_2,b_3>0$, що відповідає стійкості. Подамо b_1 у вигляді

$$b_1=(x-1)^3+2R_mx\left[(x-1)^2(2e_0-1)+(6e_0+1)(x-1)+4(e_0-1)\right]. \tag{31}$$

Звідки видно, що $\forall x > 1,\ e_0 > 1\ \ b_1 > 0$. Таким чином перша група умов виконується.

Останню умову в (30) можна подати у вигляді

$$\det = -16x(x-1)^8 + 16x(x-1)^5[8x^3(1+e_0) - x^2(25-8e_0) + 38x - 5]R_m + \ldots \quad (32)$$

Звідки видно, що $\det < 0$, якщо $R_m << 1$.

Останню умову в (30) можна подати і в такому вигляді

$$\det = -16\left[1 - 2R_m(1+e_0)\right]^4 x^9 +$$

$$+16\left[1 - 2R_m(1+e_0)\right]^2[8 - 33R_m + 2R_m^2(e_0 + 17)]x^8 + \ldots \quad (33)$$

Звідки видно, що $\det < 0$, якщо $x >> 1$ (ротор швидко обертається: $R_\omega >> 1$).

1.3. Випадок, коли КВ відхилені у різні боки

Коли КВ відхилені у різні боки $\exists p, q \in \{1,2,\ldots,n\}:\ k_p \neq k_q$.

Нехай m КВ відхилені у важкий бік ротора, а $(n-m)$ - у легкий. Введемо нові змінні:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_{s_j}, \qquad \theta = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-m}\beta_{q_j}, \quad (34)$$

де

$$s_j \in \{1,2,\ldots,n\}:\ k_{s_j} = 0,\ /\ j = \overline{1,m}\,/; \quad q_j \in \{1,2,\ldots,n\}:\ k_{q_j} = 1,\ /\ j = \overline{1,n-m}\,/. \quad (35)$$

Тоді

$$\beta = \mu + \theta. \quad (36)$$

Перетворюємо диференціальне рівняння руху (9) до вигляду:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{L_{s_j}}{n} = \ddot{\mu} + h\dot{\mu} + 2R_m R_\omega^2\tilde{v}\mu - \frac{m}{n}R_m\left[\ddot{y} + 2iR_\omega\dot{y} - R_\omega^2 y + \ddot{\bar{y}} - 2iR_\omega\dot{\bar{y}} - R_\omega^2\bar{y}\right] = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n-m}\frac{L_{q_j}}{n} = \ddot{\theta} + h\dot{\theta} - 2R_m R_\omega^2\tilde{v}\theta - \frac{n-m}{n}R_m\left[\ddot{y} + 2iR_\omega\dot{y} - R_\omega^2 y + \ddot{\bar{y}} - 2iR_\omega\dot{\bar{y}} - R_\omega^2\bar{y}\right] = 0.$$

Розглянемо

$$e(k)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k_j}=\frac{1}{n}\left\{\sum_{j=1}^{m}\cdot 1-\sum_{j=1}^{n-m}\cdot 1\right\}=\frac{m-(n-m)}{n}=\frac{2m-n}{n}=2\frac{m}{n}-1.$$

Тоді

$$\frac{m}{n}=\frac{1+e(k)}{2};\qquad \frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=\frac{1-e(k)}{2}, \tag{37}$$

і перетворені диференціальні рівняння приймають вигляд:

$$S_1=\ddot{\mu}+h\dot{\mu}+2R_mR_\omega^2\tilde{v}\mu-\frac{(1+e(k))}{2}R_m\left[\ddot{y}+2iR_\omega\dot{y}-R_\omega^2y+\ddot{\bar{y}}-2iR_\omega\dot{\bar{y}}-R_\omega^2\bar{y}\right]=0,$$

$$S_2=\ddot{\theta}+h\dot{\theta}-2R_mR_\omega^2\tilde{v}\theta-\frac{(1-e(k))}{2}R_m\left[\ddot{y}+2iR_\omega\dot{y}-R_\omega^2y+\ddot{\bar{y}}-2iR_\omega\dot{\bar{y}}-R_\omega^2\bar{y}\right]=0,$$

$$S_3=\ddot{y}+2iR_\omega\dot{y}-R_\omega^2y+H(\dot{y}+iR_\omega y)+y-$$
$$-[(\ddot{\mu}+2iR_\omega\dot{\mu}-R_\omega^2\mu)+(\ddot{\theta}+2iR_\omega\dot{\theta}-R_\omega^2\theta)]=0,\qquad S_4=\bar{S}_3. \tag{38}$$

Розглянемо різні випадки.

1. Випадок, коли в різні боки відхилені принаймні по 2 КВ. Виділяємо два КВ, відхилених у важкий бік $k_p=k_q=0$ і два КВ – у легкий $k_r=k_s=0.$ Вводимо нові змінні

$$\delta_{pq}=\beta_p-\beta_q;\quad \rho_{rs}=\beta_r-\beta_k. \tag{39}$$

Розглянемо

$$L_p-L_q=\ddot{\delta}_{pq}+h\dot{\delta}_{pq}+2R_mR_\omega^2\tilde{v}\delta_{pq}=0,$$

$$L_r-L_s=\ddot{\delta}_{rs}+h\dot{\delta}_{rs}-2R_mR_\omega^2\tilde{v}\delta_{rs}=0. \tag{40}$$

Останні два диференціальні рівняння дають взаємновиключні умови стійкості

$$\vec{v}>0,\qquad \tilde{v}<0,$$

із чого заключаємо, що такі побічні рухи завжди нестійкі.

2. Випадок, коли тільки один КВ відхилений у протилежний бік по відношенню до всіх інших.

1) Якщо більшість КВ відхилена у важкий бік, то необхідна умова стійкості $\tilde{v} > 0$ дає $R_\omega < R_{\omega 1}$, тобто ротор повинен обертатися з дорезонансною швидкістю.
2) Якщо більшість КВ відхилена у легкий бік, то необхідна умова $\tilde{v} < 0$ дає:

- якщо $e_0 < |e_k|$, то $R_\omega < R_{\omega 1}$;
- якщо $e_0 > |e_k|$, то $R_\omega > 1$,

тобто рух може бути стійким на дорезонансних швидкостях для малих дисбалансів, або на зарезонансних - для великих. Це аналоги умов (21).

Для системи рівнянь (38) характеристичне рівняння приймає вигляд:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & -a_{13} & -a_{13} \\ 0 & \bar{a}_{11} & -\bar{a}_{13} & -\bar{a}_{13} \\ -\frac{(e_0+e_k)}{2}\tilde{R}_m a_{13} & -\frac{(e_0+e_k)}{2}\tilde{R}_m a_{13} & a_{33} & 0 \\ -\frac{(e_0-e_k)}{2}\tilde{R}_m a_{13} & -\frac{(e_0-e_k)}{2}\tilde{R}_m a_{13} & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Або, якщо розкрити визначник

$$D(\lambda) = a_{11}\bar{a}_{11}a_{33}a_{44} - \frac{\tilde{R}_m}{2}\left(a_{11}\bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11}a_{13}^2\right)\left[a_{33}(e_0 - e_k) + a_{44}(e_0 + e_k)\right] = 0, \quad (41)$$

де a_{11}, a_{13} з (22), а

$$a_{33} = \lambda^2 + h\lambda + 2\tilde{R}_m R_\omega^2 \tilde{v}, \quad a_{44} = \lambda^2 + h\lambda - 2\tilde{R}_m R_\omega^2 \tilde{v}. \quad (42)$$

Оскільки

$$D(\lambda) = b_0 + \ldots + b_8\lambda^8,$$

$$b_0 = -4e_0 R_m (e_0 + e_k)R_\omega^2, \ldots, b_8 = 1 - 2R_m, \quad (43)$$

то умова стійкості має вигляд $e_0(e_0 + e_k) < 0$, звідки знаходимо

$$|e_k| > e_0, \quad e_k < 0. \quad (44)$$

Якщо умова виконується, то рух може бути стійким на дорезонансних швидкостях. Якщо $e_0 > |e_k|$, то рух нестійкий.

Розглядаємо випадок $|e_k| > e_0$, $e_k < 0$. Запишемо коефіцієнти характеристичного рівняння при відсутності сил опору:

$$a_0 = -4e_0(e_0 + e_k)R_m^2 R_\omega^8,$$

$$a_2 = \frac{2R_m R_\omega^4}{(1 - R_\omega^2)^2}\left[(R_\omega^2 - 1)^3 - R_m(e_0 + e_k)\left[(2e_0 + e_k)R_\omega^6 - 2(3e_k - 2e_0)R_\omega^4 + 12e_k R_\omega^2\right]\right],$$

$$a_4 = (R_\omega^2 - 1)^2 + 2R_m R_\omega^2(1 + R_\omega^2) - \frac{2R_m^2 R_\omega^4(e_0 + e_k)\left[(R_\omega^4 - 1)e_k + R_\omega^4 e_0\right]}{(R_\omega^2 - 1)^2},$$

$$a_6 = 2(R_\omega^2 + 1)(1 - R_m) - \frac{4e_k(e_0 + e_k)R_m^2 R_\omega^4}{R_\omega^2 - 1}, \quad a_8 = 1 - 2R_m. \tag{45}$$

Оскільки $R_\omega < 1$, $e_0 + e_k < 0$, $e_k < 0$ то $a_0, a_4, a_6, a_8 > 0$, що відповідає умові стійкості. Введемо нову змінну

$$x = 1 - R_\omega^2,\ 0 < x < 1\ (R_\omega^2 = 1 - x). \tag{46}$$

Тоді

$$a_2 = \frac{2R_m(1 - x)^2}{x^2}\left[-x^3 - 2R_m(1 - x)(e_0 + e_k)\left((e_k + e_0)x^2 + x + 4\right) - xe_0(1 - x)\right] < 0$$

оскільки $a_2 < 0$, то і цей рух нестійкий.

2. Дослідження квазіперіодичних побічних рухів.

2.1. Кількість і умови існування квазіперіодичних рухів

1. Перехід до рухомої системи координат, яка обертається з кутовою швидкістю Ω. Використовуємо диференціальні рівняння руху системи у вигляді [1]:

$$M_j = \ddot{\varphi}_j + h_j(\dot{\varphi}_j - R_\omega) - \frac{i\tilde{R}_m R_{J_j}}{2}\left(\ddot{z}e^{-i\varphi_j} - \ddot{\bar{z}}e^{i\varphi_j}\right) = 0,\ /\ j = \overline{1,n}\ /;$$

$$M_{n+1} = \ddot{z} + H\dot{z} + z - \sum_{j=1}^{n} e_j \left(\dot{\varphi}_j^2 - i\ddot{\varphi}_j\right) e^{i\varphi_j} = e_0 R_\omega^2 e^{iR_\omega \tau},\; M_{n+2} = \overline{M}_{n+1}. \tag{47}$$

Перейдемо до системи координат, яка обертається зі сталою кутовою швидкістю Ω:

$$\varphi_j = \Omega\tau + \alpha_j;/\, j = \overline{1,n}\,/;\; z = s e^{i\Omega\tau}. \tag{48}$$

Тоді

$$\dot{\varphi}_j = \Omega + \dot{\alpha}_j,\; \ddot{\varphi}_j = \ddot{\alpha}_j,\; /\, j = \overline{1,n}\,/;\;\; \dot{z} = \left(\dot{s} + i\Omega s\right) e^{i\Omega\tau},\; \ddot{z} = \left(\ddot{s} + 2i\Omega\dot{s} - \Omega^2 s\right) e^{i\Omega\tau}. \tag{49}$$

Перетворюємо систему (47) за алгоритмом

$$R_j = M_j;\; /\, j = \overline{1,n}\,/; R_{n+1} = M_{n+1} e^{-i\Omega\tau},\; R_{n+2} = M_{n+2} e^{i\Omega\tau}. \tag{50}$$

Одержуємо

$$R_j = \ddot{\alpha}_j + h_j\left(\dot{\alpha}_j + \Omega - R_\omega\right) - \frac{i\tilde{R}_m R_{J_j}}{2}\Big[\left(\ddot{s} + 2i\Omega\dot{s} - \Omega^2 s\right) e^{-i\alpha_j} -$$
$$- \left(\ddot{\bar{s}} - 2i\Omega\dot{\bar{s}} - \Omega^2 \bar{s}\right) e^{i\alpha_j}\Big] = 0,\;\; /\, j = \overline{1,n}\,/;$$
$$R_{n+1} = \ddot{s} + 2i\Omega\dot{s} - \Omega^2 s + H\left(\dot{s} + i\Omega s\right) + s -$$
$$- \sum_{j=1}^{n} e_j \left(\dot{\alpha}_j^2 + 2\Omega\dot{\alpha}_j + \Omega^2 - i\ddot{\alpha}_j\right) e^{i\alpha_j} = e_0 R_\omega^2 e^{i\left(R_\omega - \Omega\right)\tau};\;\; R_{n+2} = \overline{R}_{n+1}. \tag{51}$$

Шукаємо усталені рухи, у яких КВ обертаються відносно землі із сталою кутовою швидкістю Ω:

$$\alpha_j = \tilde{\alpha}_j,\; /\, j = \overline{1,n}\,/;\; s = \tilde{s},\; \tilde{s} = \tilde{\bar{s}};\; e_0 = 0. \tag{52}$$

- сталі величини. Тоді рівняння (51) приймуть вигляд:

$$\tilde{R}_j = h_j\left(\Omega - R_\omega\right) + iR_{mj}\Omega^2\left[\tilde{s} e^{-i\tilde{\alpha}_j} - \tilde{\bar{s}} e^{i\tilde{\alpha}_j}\right] = 0,\;\; /\, j = \overline{1,n}\,/;$$
$$\tilde{R}_{n+1} = \left(1 - \Omega^2 + iH\Omega\right)\tilde{s} - \Omega^2 \sum_{j=1}^{n} e_j e^{i\tilde{\alpha}_j} = 0,\quad \tilde{R}_{n+2} = \tilde{\overline{R}}_{n+1}. \tag{53}$$

Видно, що такі рухи можуть виникати, якщо $e_0 = 0$.

У подальшому будемо розглядати випадок однакових КВ. Система (53) приймає вигляд:

$$\tilde{R}_j = h(\Omega - R_\omega) + iR_m\Omega^2 \left[\tilde{s}e^{-i\tilde{\alpha}_j} - \tilde{\tilde{s}}e^{i\tilde{\alpha}_j}\right] = 0, \ \left(j = \overline{1,n}\right);$$

$$\tilde{R}_{n+1} = \left(1 - \Omega^2 + iH\Omega\right)\tilde{s} - \frac{\Omega^2}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{i\tilde{\alpha}_j} = 0, \quad \tilde{R}_{n+2} = \overline{\tilde{R}}_{n+1}. \tag{54}$$

Шукаємо розв'язок системи (54) у вигляді

$$\tilde{\alpha}_j = \gamma, \ \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{55}$$

Тоді система (54) перетворюється до вигляду

$$\tilde{R}_j = h(\Omega - R_\omega) + iR_m\Omega^2 \left[\tilde{s}e^{-i\gamma} - \tilde{\tilde{s}}e^{i\gamma}\right] = 0, \ \left(j = \overline{1,n}\right);$$

$$\tilde{R}_{n+1} = \left(1 - \Omega^2 + iH\Omega\right)\tilde{s} - \Omega^2 e^{i\gamma} = 0, \quad \tilde{R}_{n+2} = \overline{\tilde{R}}_{n+1}. \tag{56}$$

З останніх двох рівнянь системи (56) знаходимо

$$\tilde{s} = \frac{\Omega^2 e^{i\gamma}}{1 - \Omega^2 + iH\Omega}, \quad \tilde{\tilde{s}} = \frac{\Omega^2 e^{-i\gamma}}{1 - \Omega^2 - iH\Omega}. \tag{57}$$

Тоді з перших n рівнянь системи (56) знаходимо

$$\tilde{R}_j = h(\Omega - R_\omega) + iR_m\Omega^2\left[\frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2 + iH\Omega} - \frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2 - iH\Omega}\right] = 0, \ \left(j = \overline{1,n}\right),$$

або

$$\tilde{R}_j = h(\Omega - R_\omega) + \frac{2R_m\Omega^5 H}{\left(1 - \Omega^2\right)^2 + H^2\Omega^2} = 0, \ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Звідси отримуємо таке рівняння для визначення Ω:

$$P(\Omega) = 2R_m\Omega^5 H - h(R_\omega - \Omega)\left[\left(1 - \Omega^2\right)^2 + H^2\Omega^2\right] = 0. \tag{58}$$

Кожному дійсному Ω - розв'язку рівняння (58) буде відповідати однопараметрична сім'я усталених рухів вигляду (55), (57), що залежить від параметру γ. Зробимо попередній аналіз коренів полінома (58). Оскільки

$$\forall\ \Omega \le 0\ \ P(\Omega) < 0,\ \forall\ \Omega \ge R_\omega\ \ P(\Omega) > 0,\ P(1) = 2R_m H - hH^2(R_\omega - 1),$$

то: всі дійсні корені рівняння (58) лежать у відкритому інтервалі $(0, R_\omega)$; якщо $P(1) > 0$, то принаймні один корінь $\Omega < 1$. З умови, що $P(1) > 0$ знаходимо:

$$R_\omega < R_{\omega 1}^*, \; R_{\omega 1}^* = 1 + \frac{2R_m}{hH}. \tag{59}$$

При виконанні умови (59) принаймні один корінь полінома (58) буде меншим за 1.

Знайдемо наближено корені полінома (58) у граничних випадках. Для цього розкладемо корені за степенями малих параметрів і залишимо тільки дійсні корені.

1. У випадку малих сил зовнішнього опору $H << 1$ у рівняння (58) три дійсних кореня

$$\Omega_{1/2} \approx 1 \mp \sqrt{\frac{R_m H}{h(R_\omega - 1)}}, \quad \Omega_3 \approx R_\omega - \frac{2R_m R_\omega^5}{h(R_\omega^2 - 1)^2}. \tag{60}$$

Видно, що дійсні $\Omega_{1/2}$ існують тільки на зарезонансних швидкостях обертання ротора (δ - дійсне для $R_\omega > 1$).

2. У випадку малих сил внутрішнього опору $h << 1$ у рівняння (58) єдиний дійсний корінь і він менший за 1:

$$\Omega_1 \approx \sqrt[5]{\frac{hR_\omega}{2R_m H}}. \tag{61}$$

3. У випадку, коли маса КВ набагато менша маси ротора $R_m << 1$ у рівняння (58) єдиний дійсний корінь, близький до R_ω:

$$\Omega_3 \approx R_\omega - \frac{2HR_m R_\omega^5}{h[(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2]}. \tag{62}$$

4. У випадку, коли ротор швидко обертається $R_\omega >> 1$ у рівняння (58) єдиний дійсний корінь, близький до R_ω:

$$\Omega_3 = \frac{hR_\omega}{h + 2R_m H}. \tag{63}$$

2.2. Стійкість квазіперіодичних рухів

Досліджуємо стійкість квазіперіодичних рухів. Введемо збурений рух

$$\alpha_j = \gamma + \beta_j,\ \left|\beta_j\right| << 1,\ s = \tilde{s} + x,\ \bar{s} = \tilde{\tilde{s}} + \bar{x},\ |x| << 1\,. \tag{64}$$

Перетворюємо диференціальні рівняння руху (51). Розглянемо

$$e^{i\alpha_j} = e^{i\gamma} \cdot e^{i\beta_j} \approx e^{i\gamma}\left(1 + i\beta_j\right),\ e^{-i\alpha_j} \approx e^{-i\gamma}\left(1 - i\beta_j\right). \tag{65}$$

Перетворюємо перші n рівнянь в (51):

$$\begin{aligned} R_j \approx \left(\ddot{\beta}_j + h\dot{\beta}_j + h\left(\Omega - R_\omega\right)\right) - iR_m \Big[\left(\ddot{x} + 2i\Omega\dot{x} - \Omega^2\left(x + \tilde{s}\right)\right)e^{-i\gamma}\left(1 - i\beta_j\right) - \\ - \left(\ddot{\bar{x}} - 2i\Omega\dot{\bar{x}} - \Omega^2\left(\bar{x} + \tilde{\tilde{s}}\right)\right)e^{i\gamma}\left(1 + i\beta_j\right)\Big] = 0. \end{aligned}$$

Залишаємо величини першого порядку малості:

$$\begin{aligned} R_j \approx \ddot{\beta}_j + h\dot{\beta}_j + R_m\Omega^2\left(\tilde{s}e^{-i\gamma} + \tilde{\tilde{s}}e^{i\gamma}\right)\beta_j - \\ - iR_m\left[\left(\ddot{x} + 2i\Omega\dot{x} - \Omega^2 x\right)e^{-i\gamma} - \left(\ddot{\bar{x}} - 2i\Omega\dot{\bar{x}} - \Omega^2\bar{x}\right)e^{i\gamma}\right] = 0,\ /\ j = \overline{1,n}\,/. \end{aligned} \tag{66}$$

Перетворюємо останні два рівняння в (51):

$$\begin{aligned} R_{n+1} \approx \ddot{x} + 2i\Omega\dot{x} - \Omega^2 x + H\left(\dot{x} + 2i\Omega x\right) + x - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\left(2\Omega\dot{\beta}_j + \Omega^2 - i\ddot{\beta}_j\right)\left(1 + i\beta_j\right)e^{i\gamma} - \\ - \Omega^2\tilde{s} + iH\Omega\tilde{s} + s = 0, \qquad R_{n+2} = \bar{R}_{n+1}. \end{aligned}$$

Або остаточно:

$$\begin{aligned} R_{n+1} \approx \ddot{x} + 2i\Omega\dot{x} - \Omega^2 x + H\left(\dot{x} + 2i\Omega x\right) + x - \\ - \frac{e^{i\gamma}}{n}\sum_{j=1}^{n} i\left(\ddot{\beta}_j + 2i\Omega\dot{\beta}_j - \Omega^2\beta_j\right) = 0, \quad R_{n+2} = \bar{R}_{n+1}\,. \end{aligned} \tag{67}$$

Розглянемо

$$\tilde{s}e^{-i\gamma} + \tilde{\tilde{s}}e^{i\gamma} = \frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2 + iH\Omega} + \frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2 - iH\Omega} = \frac{2\Omega^2\left(1 - \Omega^2\right)}{\left(1 - \Omega^2\right)^2 + H^2\Omega^2}\,.$$

Тоді система (66) перетворюється до вигляду:

$$R_j \approx \ddot{\beta}_j + h\dot{\beta}_j + \frac{2R_m\Omega^4\left(1-\Omega^2\right)\beta_j}{\left(1-\Omega^2\right)^2 + H^2\Omega^2} -$$

$$-iR_m\left[\left(\ddot{x} + 2i\Omega\dot{x} - \Omega^2 x\right)e^{-i\gamma} - \left(\ddot{\bar{x}} - 2i\Omega\dot{\bar{x}} - \Omega^2\bar{x}\right)e^{i\gamma}\right] = 0, \ /\, j = \overline{1,n}\,/. \qquad (68)$$

Зробимо попередньо оцінку стійкості, використовуючи систему рівнянь (68). Розглянемо

$$R_n - R_j = \ddot{\delta}_{nj} + h\dot{\delta}_{nj} + \frac{2R_m\Omega^4\left(1-\Omega^2\right)\beta_j}{\left(1-\Omega^2\right)^2 + H^2\Omega^2} = 0,\ \delta_{nj} = \beta_n - \beta_j,\ \ /\, j = \overline{1,n-1}\,/. \qquad (69)$$

З системи рівнянь (69) видно, що для $\Omega > 1$ квазіперіодичний рух нестійкий, а для $\Omega < 1$ - може бути асимптотично стійким:

$$\Omega < 1, \qquad (70)$$

- необхідна умова асимптотичної стійкості. З врахуванням розв’язків рівняння (58) і умов їх існування заключаємо, що розглядувані рухи можуть існувати і бути стійкими тільки у випадку малих сил опору, на зарезонансних швидкостях, менших за $R^*_{\omega 1}$ з (59).

Введемо нову змінну

$$\beta = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_j\,. \qquad (71)$$

Тоді

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{R_j}{n} = \ddot{\beta}_j + h\dot{\beta}_j + \frac{2R_m\Omega^4\left(1-\Omega^2\right)}{\left(1-\Omega^2\right)^2 + H^2\Omega^2}\beta -$$

$$-iR_m\left[\left(\ddot{x} + 2i\Omega\dot{x} - \Omega^2 x\right)e^{-i\gamma} - \left(\ddot{\bar{x}} - 2i\Omega\dot{\bar{x}} - \Omega^2\bar{x}\right)e^{i\gamma}\right] = 0,$$

$$R_{n+1} = \ddot{x} + 2i\Omega\dot{x} - \Omega^2 x + H\left(\dot{x} + 2i\Omega x\right) + x + ie^{i\gamma}\left(\ddot{\beta} + 2i\Omega\dot{\beta} - \Omega^2\beta\right) = 0,$$

$$R_{n+2} = \overline{R}_{n+1}. \qquad (72)$$

Введемо у розглядання коефіцієнти

$$a_{11} = \left(\lambda + i\Omega\right)^2 + H\left(\lambda + i\Omega\right) + 1,\ a_{13} = \left(\lambda + i\Omega\right)^2,$$

$$a_{33} = \lambda^2 + h\lambda + \frac{2R_m\Omega^4(1-\Omega^2)}{(1-\Omega^2)^2 + H^2\Omega^2} = \lambda^2 + h\lambda + R_m\tilde{\nu}\,. \qquad (73)$$

Тоді характеристичне рівняння (останніх) трьох рівнянь (72) задається визначником:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & ie^{i\gamma}a_{13} \\ 0 & \overline{a}_{11} & -ie^{-i\gamma}\overline{a}_{13} \\ -iR_m e^{-i\gamma}a_{13} & iR_m e^{i\gamma}\overline{a}_{13} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\overline{a}_{11}a_{33} - R_m\left(\overline{a}_{11}a_{13}^2 + a_{11}\overline{a}_{13}^2\right) = 0\,. \qquad (74)$$

Можна перевірити, що $D(0) = 0$ і характеристичне рівняння у явному вигляді має вигляд:

$$D(\lambda) = \left(b_5\lambda^5 + b_4\lambda^4 + b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0\right)\lambda,$$

$$b_0 = h\left[(\Omega^2-1)^2 + H^2R^2\right] + 2HR_m\left[(1+\Omega^2)\nu + 3\Omega^4\right],$$

$$b_1 = (\Omega^2-1)^2 + H^2R^2 + 2hH(1+\Omega^2) + R_m\left[2(1+\Omega^2) + H^2\right]\nu + 2\Omega^2(5+\Omega^2),$$

$$b_2 = 2(h+H)(1+\Omega^2) + 2R_m(2\Omega^2+\nu)H + hH^2,$$

$$b_3 = 2(1+\Omega^2)(1-R_m) + \nu R_m + H(H+2h),$$

$$b_4 = 2H(1-R_m) + h, \quad b_5 = 1 - 2R_m\,. \qquad (75)$$

Відповідно до критерію Рауса-Гурвіца умови асимптотичної стійкості (від'ємності дійсних частин характеристичного рівняння (75)) мають вигляд:

$$b_i > 0,\ /i = \overline{0{,}5}/; \quad \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0,\ \Delta_4 > 0, \qquad (76)$$

де

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_4 & b_2 \\ b_5 & b_3 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_4 & b_2 & b_0 \\ b_5 & b_3 & b_1 \\ 0 & b_4 & b_2 \end{vmatrix},\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} b_4 & b_2 & b_0 & 0 \\ b_5 & b_3 & b_1 & 0 \\ 0 & b_4 & b_2 & b_0 \\ 0 & b_5 & b_3 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Якщо врахувати, що $v > 0$, то перша група умов в (76) виконується. Перевіримо другу групу умов. Покладаємо, що $v > 0$ і $\Omega^2 < 1$.

$$\Delta_2 = [2(\Omega^2 + 1) + v]R_m h + 2H\{[(1 - 2R_m)^2 + 2R_m^2]\Omega^2 + (1 - R_m)^2 + R_m^2(1 - v) + h^2\} +$$
$$+ 2hH^2(2 - R_m) + 2(1 - R_m)H^3. \qquad (77)$$

З (77) видно, що $\Delta_2 > 0$ - умова виконується.

У практично важливих випадках, у яких можуть існувати побічні рухи, у яких Ω<1

$$h, H, R_m \sim \varepsilon, \quad \varepsilon << 1. \qquad (78)$$

Залишимо у виразах для Δ_3, Δ_4 складові найбільшої величини щодо ε:

$$\Delta_3 \approx 2[8H^2\Omega^2 + hH(1 + 6\Omega^2 + \Omega^4)] > 0, \quad \Delta_4 \approx 16H^2(1 - \Omega^2)^2 > 0. \qquad (79)$$

З додатності Δ_3, Δ_4 випливає, що побічний рух, у якому Ω<1, асимптотично стійкий у області власного існування.

2.3. Вигляд квазіперіодичних рухів

Розглянуті побічні рухи є періодичними. Коли з'являється дисбаланс ($e_0 > 0$), вони породжують квазіперіодичні рухи. Знайдемо наближено ці рухи, вважаючи, що дисбаланс малий ($e_0 > 0$).

Використовуємо диференціальні рівняння руху (47). У нульовому наближенні

$$\varphi_j = \Omega\tau + \gamma, \quad / j = \overline{1, n} /. \qquad (80)$$

Підстановка кутів φ_j у останні два рівняння системи (47) перетворює їх до вигляду

$$M_{n+1} = \ddot{z} + H\dot{z} + z = \Omega^2 e^{i(\Omega\tau + \gamma)} + e_0 R_\omega^2 e^{iR_\omega\tau}, \quad M_{n+2} = \overline{M}_{n+1}. \qquad (81)$$

Частинними розв'язками цих двох рівнянь є

$$z = \frac{\Omega^2 e^{i(\Omega\tau+\gamma)}}{1-\Omega^2+2iH\Omega} + \frac{e_0 R_\omega^2 e^{iR_\omega\tau}}{1-R_\omega^2+2iHR_\omega}, \ \bar{z} \ . \qquad (82)$$

Рівняння (80) і (82) є наближеним виразом деякого квазіперіодичного руху. У цього руху можуть бути і інші складові, але оскільки в системі є сили опору, то всі інші складові цього руху будуть з часом згасати і залишаться тільки ці складові.

Для практичного використання достатньо наближеного розв'язку (80), (82). Для одержання наступних наближень можна скористатися методом малого параметра, чи іншим асимптотичним методом [9].

Для невеликих дисбалансів умови існування і стійкості квазіперіодичних рухів співпадають з такими для побічних рухів у випадку відсутності дисбалансу.

Таким чином:

- при невеликих дисбалансах існує і стійке однопараметричне сімейство квазіперіодичних рухів, у яких кулі (маятники) притиснуті одна до одної й обертаються навколо повздовжньої осі ротора в напрямку обертання ротора з частотою Ω, меншою за резонансну (Ω<1), а повздовжня вісь ротора рухається по гіпоциклоїді, що утворена сумою двох рухів: "повільної" прецесії з частотою Ω; "швидкої" нутації з частотою, рівною швидкості обертання ротора R_ω;
- квазіперіодичні рухи - періодичні, якщо відношення частоти нутації до частоти прецесії – раціональне число, або неперіодичні, якщо – нераціональне;
- для працездатності АБП додатково необхідно, щоб квазіперіодичні рухи були нестійкі, або не існували.

Висновки

1) Стаціонарний побічний рух $k = 0$ - у якому КВ відхилені у важкий бік ротора, може бути стійкий тільки на дорезонансних швидкостях обертання ротора ($R_\omega < 1$), але за умови існування, а на зарезонансних швидкостях - нестійкий;
2) решта стаціонарних побічних рухів завжди нестійка;
3) основний рух $k = 2^n - 1$, $e_0 > 1$, у якому КВ відхилені у легкий бік ротора і не можуть зрівноважити великий дисбаланс - стійкий на зарезонансних швидкостях обертання ротора принаймні у випадках, коли:
   - ефективна маса КВ набагато менша маси ротора $(R_m << 1)$;
   - коли ротор швидко обертається $(R_\omega >> 1)$.
4) серед усіх усталених побічних квазіперіодичних рухів асимптотично стійкий тільки той, у якому КВ обертаються відносно землі із швидкістю, меншою за резонансну;
5) цей рух існує на зарезонансних швидкостях обертання ротора $(R_\omega > 1)$, менших за $R_{\omega 1}^*$ з (59).

Список літератури

1. Динаміка багатокульових (багатомаятникових) автобалансирів. Стійкість основних рухів / Філімоніхін Г.Б.; Кіровогр. держ. техн. ун-т. – Кіровоград, 2003. – 46 с.: іл. – Бібліогр.: 17 назв. – Укр. – Деп. в ДНТБ України 20.10.03, №144-Ук2003.
2. Муйжниек А.И. Исследование устойчивости автоматического динамического балансировщика // Ученые записки Рижского политехнического института. -1959. -1. Вып. 1. -С.155-170.
3. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. -М.: Наука, 1971. -896с.
4. Кравченко В.И. Автобалансирующие устройства для улучшения динамических характеристик машин: Автореф.дис… канд.техн.наук: 01.02.06 / АН СССР, ин-т машиностроения им. А.А.Благонравова. -М., 1989. -18 с.
5. Артюнин А.И. "Исследование движения ротора с автобалансиром // Известия Вузов. Машиностроение. -1993. №1. -С. 15-19.
6. Филимонихин Г.Б. Универсальный стенд для исследования динамики пассивных автобалансиров и его апробация шаровым автобалансиром // Збірник наукових праць КДТУ, 2001. Вип.№9, С.101-107.
7. Філімоніхін Г.Б. Нестаціонарні побічні рухи двохкульового (двохмаятникового) автобалансира // Збірник наукових праць КДТУ, 2003. Вип.№13, С.347-352.
8. Савченко А.Я. Устойчивость стационарных движений механических систем. –К.: Наук. думка, 1977. -160 с.
9. Найфэ А. Введение в методы возмущений: Пер. с англ. -М.: Мир, 1984. -535 с.

ЗМІСТ

Друкується у відповідності з рішенням вченої ради Кіровоградського державного технічного університету

назва організації

від 27 жовтня 2003 р., протокол № 2

дата засідання