

Центральноукраїнський національний технічний університет
Механіко-технологічний факультет
Кафедра Матеріалознавства та ливарного виробництва

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри М та ЛВ
канд. техн. наук, доцент
_____ Олександр КУЗИК
« ____ » _____ 2026 р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти на тему:
«ОПТИМІЗАЦІЯ ФЕРМОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ
КРОНШТЕЙНА ПРОМИСЛОВОГО РОБОТА»

Виконав здобувач вищої освіти 4-го курсу,
групи МЗ-23мб
ОПП «Прикладне матеріалознавство та
інжиніринг»
спеціальності 132 «Матеріалознавство»
_____ Геннадій КАЧКО

Керівник роботи канд. техн. наук, доцент
_____ Юрій КОВАЛЬОВ
« ____ » _____ 20 ____ р.

Рецензент:

_____ 20 ____ р.

Центральноукраїнський національний технічний університет
Факультет _____ Механіко-технологічний
Кафедра _____ Матеріалознавства та ливарного виробництва
Рівень вищої освіти _____ перший (бакалаврський)
Галузь знань _____ 13 Механічна інженерія
Спеціальність _____ 132 Матеріалознавство
Освітньо-професійна
програма _____ Прикладне матеріалознавство та інжиніринг

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри М та ЛВ
_____ Олександр КУЗИК
« _____ » _____ 20 _____ р.

ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ
ЗА ПЕРШИМ (БАКАЛАВРСЬКИМ) РІВНЕМ ВИЩОЇ ОСВІТИ
ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ

Качка Геннадій Сергійович

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи: Оптимізація фермової конструкції кронштейна промислового робота
2. Керівник роботи: кандидат технічних наук, доцент Юрій Григорович Ковальов
3. Строк подання роботи до захисту: 25 травня 2026 р.
4. Мета та завдання випускної кваліфікаційної роботи: розробити та чисельно дослідити фермовий кронштейн промислового робота зі сталі 30ХГСА, що маніпулює вантажем масою 5 кг, з мінімальною масою при збереженні заданого рівня жорсткості та міцності
Завдання: 1. Виконати огляд конструктивних рішень кронштейнів маніпуляторів та методів їх оптимізації.
2. Обґрунтувати вибір матеріалу (30ХГСА) та визначити розрахункові фізико-механічні характеристики.
3. Визначити статичні та динамічні навантаження на кронштейн для сценарію маніпулювання вантажем 5 кг.
4. Побудувати та розрахувати базову суцільну модель в Ansys Workbench;
5. Розробити фермову геометрію кронштейна на основі карти головних напружень.
6. Провести параметричне дослідження: варіювати кут нахилу стрижня θ і фіксувати масу, $\sigma_{\max}$ та жорсткість k .
7. Порівняти фермову та суцільну моделі.

5. Консультанти по роботі, із зазначенням розділів

<i>Розділ</i>	<i>Консультант</i>	<i>Підпис, дата</i>	
		<i>Завдання видав</i>	<i>Завдання прийняв</i>
<i>Вступ</i>	<i>Ковальов Ю.Г.</i>		
<i>Розділ 1. Огляд літератури</i>	<i>Ковальов Ю.Г.</i>		
<i>Розділ 2. Методики дослідження</i>	<i>Ковальов Ю.Г.</i>		
<i>Розділ 3. Базова модель</i>	<i>Ковальов Ю.Г.</i>		
<i>Розділ 4. Оптимізація</i>	<i>Ковальов Ю.Г.</i>		

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

<i>№ з/п</i>	<i>Назва етапів роботи</i>	<i>Строк виконання етапів роботи</i>	<i>Примітка</i>
1.	<i>Аналіз літератури</i>		
2.	<i>Формування методики вимірювання</i>		
3.	<i>Розробка базової моделі</i>		
4.	<i>Оптимізація</i>		
5.	<i>Оформлення пояснювальної записки</i>		
6.	<i>Здача роботи, перевірка на запозичення</i>		

Дата видачі завдання «_____» _____ 20__ р.

Керівник роботи _____ Юрій КОВАЛЬОВ

(підпис)

Завдання прийнято до виконання «_____» _____ 20__ р.

Здобувач вищої освіти

_____ Геннадій КАЧКО

(підпис)

Центральноукраїнський національний технічний університет
Механіко-технологічний факультет
Кафедра матеріалознавства та ливарного виробництва

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до кваліфікаційної роботи на тему:

**ОПТИМІЗАЦІЯ ФЕРМОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ КРОНШТЕЙНА
ПРОМИСЛОВОГО РОБОТА**

Виконав здобувач вищої освіти

4-го курсу, групи МЗ-23мб

ОПП «Прикладне матеріалознавство та інжиніринг»

спеціальності 132 «Матеріалознавство»

_____ Геннадій КАЧКО

Керівник роботи:

канд. техн. наук, доцент

_____ Юрій КОВАЛЬОВ

Кропивницький 2026

АНОТАЦІЯ

Відомості про обсяг роботи: пояснювальна записка містить 36 сторінок, 7 ілюстрацій, 7 таблиці. Список використаних джерел – 30 найменувань.

Об'єкт дослідження – кронштейн ланки промислового робота-маніпулятора.

Мета роботи – розробка та чисельне дослідження фермового кронштейна зі сталі 30ХГСА, що забезпечує мінімальну масу при збереженні заданого рівня жорсткості та міцності.

У роботі виконано аналітичний розрахунок статичних і динамічних навантажень на кронштейн при маніпулюванні вантажем 5 кг з урахуванням динамічного коефіцієнта $k_d = 1,5$. Результируюча сила на кронштейн складає $F = 73,1$ Н, момент вигину $M = 25,6$ Н·м. Методом скінченних елементів (Ansys Static Structural) розраховано базову суцільну модель кронштейна розмірами $350 \times 80 \times 60$ мм зі сталі 30ХГСА ($E = 206$ ГПа, $\sigma_{0,2} = 835$ МПа), яка виявила надмірний запас міцності $n = 454$ та «мертві зони» в ~ 78 % об'єму деталі. На основі карти ліній головних напружень розроблено фермову геометрію за схемою Варена з поясами перерізом 30×20 мм та діагональними розкосами 15×15 мм. Проведено параметричне дослідження: варіювання кута нахилу розкосів θ у діапазоні 15° – 60° (10 варіантів з кроком 5°). Встановлено, що залежності маси $M(\theta)$, максимального напруження $\sigma_{\max}(\theta)$ та жорсткості $k(\theta)$ мають параболічний характер з оптимумом при $\theta = 45^\circ$, що відповідає орієнтації розкосів вздовж ліній максимальних дотичних напружень. Оптимальний варіант забезпечує масу кронштейна 1,47 кг – на 89 % менше за суцільну модель (13,4 кг) – при запасі міцності $n = 7,0$, максимальному переміщенні $\delta_{\max} = 0,061$ мм $\leq 0,5$ мм та першій власній частоті $f_1 = 87$ Гц ≥ 50 Гц.

ОПТИМІЗАЦІЯ, КРОНШТЕЙН, РОБОТ, ФЕРМОВА КОНСТРУКЦІЯ, МОДЕЛЮВАННЯ

ABSTRACT

Work scope information: the explanatory note contains 36 pages, 7 illustrations, 7 tables. List of references – 30 items.

Object of study – the link bracket of an industrial robot manipulator handling a 5 kg payload.

Purpose of the work – to develop and numerically investigate a truss bracket made of 30KhGSA steel that ensures minimum mass while maintaining the required levels of stiffness and strength.

The work includes an analytical calculation of static and dynamic loads on the bracket for a 5 kg payload manipulation scenario with a dynamic coefficient $k_d = 1.5$. The resultant force on the bracket is $F = 73.1$ N and the bending moment $M = 25.6$ N·m. Finite element analysis (Ansys Static Structural) of a solid baseline model (350×80×60 mm, 30KhGSA steel, $E = 206$ GPa, $\sigma_{0.2} = 835$ MPa) revealed an excessive safety factor of $n = 454$ and "dead zones" occupying ~78% of the part volume. Based on the principal stress trajectory map, a Warren truss geometry was developed with chord members of 30×20 mm cross-section and diagonal braces of 15×15 mm cross-section. A parametric study was conducted by varying the brace inclination angle θ in the range 15°–60° across 10 variants with a 5° step. The dependencies $M(\theta)$, $\sigma_{\max}(\theta)$ and $k(\theta)$ were found to follow a parabolic pattern with an optimum at $\theta = 45^\circ$, which corresponds to the alignment of the braces with the maximum shear stress trajectories of the baseline model. The optimal variant yields a bracket mass of 1.47 kg – 89% less than the solid model (13.4 kg) – with a safety factor $n = 7.0$, maximum displacement $\delta_{\max} = 0.061$ mm ≤ 0.5 mm, and first natural frequency $f_1 = 87$ Hz ≥ 50 Hz.

Practical significance – the results can be applied in the design of load-bearing elements for lightweight industrial manipulators, robotic assembly cells, and mobile robotic platforms.

OPTIMIZATION, BRACKET, ROBOT, TRUSS STRUCTURE, MODELING

ЗМІСТ

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	9
ВСТУП	10
РОЗДІЛ 1 ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД	12
1.1 Конструктивні особливості кронштейнів промислових роботів	12
1.2 Матеріал кронштейна – сталь 30ХГСА: склад та властивості	14
1.3 Принцип «форма слідує за навантаженням». Силові лінії	15
1.4 Фермові конструкції як метод структурної оптимізації	16
1.5. Огляд програмного забезпечення, що використовується в роботі	17
РОЗДІЛ 2 ВИЗНАЧЕННЯ РОБОЧОГО ПРОСТОРУ ТА СИЛ	19
2.1 Кінематична схема маніпулятора та сценарій навантаження	19
2.2. Розрахунок статичних навантажень	20
2.3. Динамічні навантаження при гальмуванні робота	21
2.4. Векторна схема навантаження. Головні напруження	21
РОЗДІЛ 3 БАЗОВА МОДЕЛЬ ТА FEM-АНАЛІЗ	23
3.1. Побудова суцільної (базової) моделі кронштейна	23
3.2. Параметри скінченно-елементної моделі	24
3.3. Карта напружень Мізеса. Виявлення «мертвих зон»	24
РОЗДІЛ 4 ОПТИМІЗАЦІЯ: СТВОРЕННЯ ФЕРМОВОЇ СТРУКТУРИ	26
4.1. Принцип видалення матеріалу вздовж головних напружень	26
4.2. Геометрія фермового кронштейна	26
4.3. Параметричне дослідження: кут нахилу стрижня θ	27
4.4. FEM-аналіз фермової моделі та верифікація	29
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ	31
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	32

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

MCE	–	Метод скінченних елементів
FEM	–	Finite Element Method
CAD	–	Computer-Aided Design
Von Mises	–	Еквівалентне напруження за критерієм Мізеса
DOF	–	Degrees of Freedom (ступені вільності)
30ХГСА	–	Хромомарганцевокремниста конструкційна сталь (ДСТУ ГОСТ 4543)
KE	–	Скінченний елемент
ДП	–	Динамічне навантаження при зупинці

ВСТУП

Актуальність теми. Промислова робототехніка є одним із ключових напрямів технологічного розвитку сучасного виробництва. Застосування роботів-маніпуляторів у зварювальних, складальних та вантажно-розвантажувальних операціях дозволяє суттєво підвищити продуктивність і точність технологічних процесів. Разом з тим зростаючі вимоги до швидкодії та точності позиціонування маніпуляторів ставлять перед конструкторами нові завдання: знизити масу рухомих ланок при збереженні їх несучої здатності та жорсткості.

Кронштейн – один із базових елементів конструкції роботизованих маніпуляторів. Він з'єднує ланки кінематичного ланцюга, несе приводні механізми та захоплювач і сприймає комплексні статичні та динамічні навантаження. Традиційно кронштейни виготовляють у вигляді суцільних або зварних металевих деталей, що часто призводить до надмірної маси конструкції. Надлишкова маса рухомих частин збільшує потужність приводів, час позиціонування та вібраційне навантаження на механізм у цілому.

Концепція «форма слідує за навантаженням» (Form Follows Force) стверджує, що раціональна несуча конструкція повинна повторювати траєкторії передачі силових потоків – так звані силові лінії або лінії головних напружень. Якщо вилучити матеріал із зон, де напруження близьке до нуля (так звані, «мертві зони»), і залишити його лише вздовж ліній головних напружень, отримаємо фермову структуру з мінімальною масою та максимальною питомою жорсткістю.

Актуальність роботи визначається необхідністю систематичного дослідження впливу геометричних параметрів фермового кронштейна (зокрема, кута нахилу стрижнів θ) на масу, максимальне напруження та жорсткість конструкції, що є необхідною умовою для обґрунтованого проектного вибору.

Мета роботи – розробити та чисельно дослідити фермовий кронштейн промислового робота зі сталі 30ХГСА, що маніпулює вантажем масою 5 кг, з мінімальною масою при збереженні заданого рівня жорсткості та міцності.

Задачі роботи:

1. Виконати огляд конструктивних рішень кронштейнів маніпуляторів та методів їх оптимізації.
2. Обґрунтувати вибір матеріалу (30ХГСА) та визначити розрахункові фізико-механічні характеристики.
3. Визначити статичні та динамічні навантаження на кронштейн для сценарію маніпулювання вантажем 5 кг.
4. Побудувати та розрахувати базову суцільну модель в Ansys Workbench; виявити «мертві зони».
5. Розробити фермову геометрію кронштейна на основі карти головних напружень.
6. Провести параметричне дослідження: варіювати кут нахилу стрижня θ і фіксувати масу, $\sigma_{\max}$ та жорсткість k .
7. Порівняти фермову та суцільну моделі.

Об'єкт дослідження – кронштейн ланки промислового робота-маніпулятора.

Предмет дослідження – залежність масових і жорсткісних характеристик фермового кронштейна від кута нахилу стрижнів при фіксованому навантаженні.

Методи дослідження: аналітичний розрахунок реакцій і моментів; метод скінченних елементів (Ansys Static Structural); параметричний аналіз.

РОЗДІЛ 1

ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД

1.1 Конструктивні особливості кронштейнів промислових роботів

Промислові роботи-маніпулятори є механічними системами з відкритим кінематичним ланцюгом, де кожна ланка з'єднана з наступною через обертальний або поступальний шарнір. Кронштейн у цьому контексті – це несучий елемент ланки, що передає силові та моментні навантаження від вихідного ефектора (захоплювача) через кінематичний ланцюг до основи [1].

Конструктивно кронштейни маніпуляторів поділяються на: монолітні фрезеровані (висока жорсткість, велика маса), зварні з листового прокату (середня жорсткість, менша маса), литі під тиском (добрі для серійного виробництва), виготовлені за адитивними технологіями (складна геометрія, оптимальний розподіл матеріалу). Основним недоліком монолітних і литих кронштейнів є надлишкова маса в зонах, що не беруть участі в передачі навантаження [2, 3].

Для шестиосового промислового робота з навантаженням 5 кг (клас «легкий промисловий», наприклад: KUKA KR 6 R700 (див. рис 1.1), ABB IRB 120 (див. рис 1.2)) маса третьої ланки кронштейна складає типово 1,2-2,5 кг. Зниження цієї маси на 30 % дає прямий вигаш у точності позиціонування (менша інерція при зміні напрямку руху) та дозволяє зменшити потужність приводів або збільшити швидкість руху при тій самій потужності [4].

Критерії проектування кронштейна: запас міцності $n \geq 2,0$ (статичне навантаження) та $n \geq 1,5$ (динамічне); максимальний прогин $\delta_{\max} \leq 0,5$ мм (вимога точності позиціонування); власна частота першої форми коливань $f_1 \geq 50$ Гц (уникнення резонансу з частотою управляючих сигналів); технологічність (можливість виготовлення зварюванням або фрезеруванням) [5, 6].

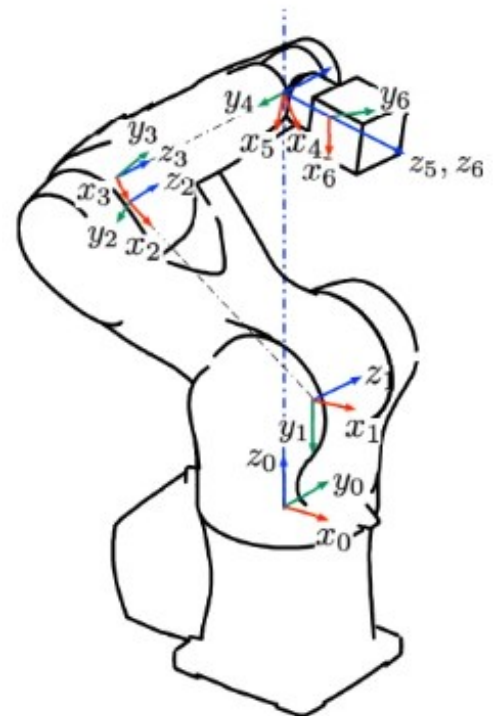


Рисунок 1.1. – KUKA KR 6 R700 [13]

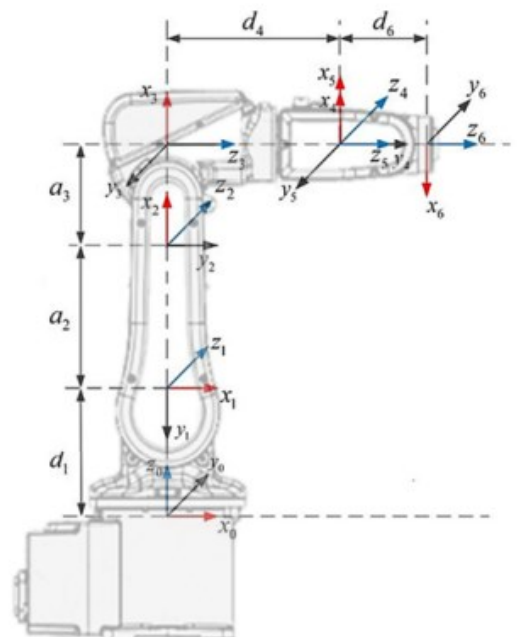


Рисунок 1.2 – ABB IRB 120 [8]

1.2 Матеріал кронштейна – сталь 30ХГСА: склад та властивості

Для несучих елементів роботизованих систем широко застосовується хромомарганцевокремниста конструкційна сталь 30ХГСА (ДСТУ ГОСТ 4543-2016). Її хімічний склад: С – 0,28–0,34 %; Si – 0,90–1,20 %; Mn – 0,80–1,10 %; Cr – 0,80–1,10 %; S, P – $\leq 0,025$ % кожен; Fe – баланс [7].

Сталь 30ХГСА після загартування та відпуску (режим: загартування 880 °С, масло; відпуск 540 °С, вода або масло) набуває комплексу механічних властивостей, наведених у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Механічні та фізичні властивості сталі 30ХГСА (загартування + відпуск 540 °С)

Властивість	Позначення	Одиниця	Значення
Модуль Юнга	E	ГПа	206
Коефіцієнт Пуассона	ν	–	0,30
Границя плинності	$\sigma_{0,2}$	МПа	835
Тимчасовий опір	σ_B	МПа	1080
Відносне видовження	δ	%	10
Відносне звуження	ψ	%	45
Ударна в'язкість	KCU	Дж/см ²	69
Щільність	ρ	кг/м ³	7850
Питома міцність σ_B/ρ	–	кН·м/кг	137,6
Твердість	HB	–	269–302

Порівняно зі звичайною конструкційною сталлю 45 ($\sigma_B = 660$ МПа, $\sigma_{0,2} = 360$ МПа), сталь 30ХГСА має майже втричі вищу границю плинності, що дозволяє при рівному запасі міцності зменшити поперечні перерізи стрижнів ферми, а отже – і загальну масу конструкції [8].

Важливою перевагою 30ХГСА є добра зварюваність (за умови

попереднього підігріву до 200–250 °C), що є ключовою вимогою при виготовленні зварних фермових кронштейнів. Сталь також добре піддається механообробці у відпаленому стані та має задовільну корозійну стійкість при нанесенні захисних покриттів [9].

1.3 Принцип «форма слідує за навантаженням». Силіві лінії

Принцип «форма слідує за навантаженням» (Form Follows Force) вперше систематично сформулював Антоніо Гауді, спостерігаючи форму природних конструкцій – кісток, раковин, стовбурів дерев. У механіці конструкцій цей принцип знаходить своє формальне відображення у понятті ліній головних напружень (principal stress trajectories) [10].

У будь-якій точці навантаженого тіла існують три взаємно перпендикулярні напрямки – осі головних напружень σ_1 , σ_2 , σ_3 . Вздовж осі σ_1 діє максимальне розтягувальне напруження, вздовж σ_3 – максимальне стискувальне. Якщо розглянути поверхню, лінії якої скрізь дотичні до векторів σ_1 (або σ_3), отримаємо ізостатичні лінії (лінії головних напружень). Матеріал, розташований уздовж цих ліній, працює виключно на розтяг або стиск без дотичних напружень, що є найефективнішим режимом навантаження [11, 12].

Стрижні ферми, розташовані вздовж ліній головних напружень, реалізують саме такий режим: кожен стрижень несе осьове зусилля (стиск або розтяг), а не вигин. Оскільки несуча здатність стрижня на осьове зусилля значно вища, ніж на вигин при тій самій масі, фермова конструкція є суттєво ефективнішою за суцільну балку [13].

Практичний метод побудови фермового кронштейна: розрахувати суцільну модель методом скінченних елементів; побудувати карту ізостатичних ліній (головних напружень); вздовж цих ліній розташувати стрижні ферми; вилучити матеріал із «мертвих зон» (де $\sigma_{VM} < 5\text{--}10\%$ від σ_{max}). Такий підхід є аналогом топологічної оптимізації, виконаної «вручну» конструктором [14].

1.4 Фермові конструкції як метод структурної оптимізації

Плоска або просторова ферма – система прямолінійних стрижнів, з'єднаних шарнірами у вузлах, що навантажується виключно у вузлових точках. За цих умов кожен стрижень є двосилим елементом: він знаходиться або в стані чистого розтягу, або в стані чистого стиску. Відсутність вигину дозволяє повністю використовувати несучу здатність матеріалу по всьому перерізу [15].

Для кронштейна промислового робота вибір між плоскою і просторовою фермою визначається схемою навантаження. При одноплощинному навантаженні (сила і момент у одній площині) достатня плоска ферма. При комплексному (три складові сили і три складові моменту) потрібна просторова ферма або комбінація двох плоских ферм у взаємно перпендикулярних площинах [16].

Порівняльна характеристика типів кронштейнів наведена в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2 – Порівняння типів конструкцій кронштейна маніпулятора

Тип конструкції	Маса	Жорсткість	Виготовлення	Застосування
Суцільна (литво)	Висока	Висока	Просте	Серійне вир-во
Суцільна (фрезерована)	Середня	Висока	Середнє	Дрібна серія
Зварна із профілів	Середня	Середня	Просте	Одинична, ремонт
Фермова зварна	Низька	Висока питома	Середнє	Оптимізація маси
Адитивне вир-во (SLM)	Найнижча	Висока	Складне, дороге	Аерокосмос, медицина

1.5. Огляд програмного забезпечення, що використовується в роботі

У роботі застосовується комплекс програмних засобів класу CAD/CAE, що охоплює етапи геометричного моделювання, чисельного аналізу та обробки результатів.

Ansys Workbench 2024 R1 є провідною комерційною платформою для комп'ютерного інженерного аналізу. Платформа реалізує наскрізний робочий процес: від імпорту геометрії до постобробки результатів в єдиному графічному середовищі. У даній роботі використовуються два вбудованих модулі. Модуль Static Structural призначений для розрахунку напружено-деформованого стану конструкцій методом скінченних елементів при статичному навантаженні; саме в ньому виконуються розрахунки суцільної та фермової моделей кронштейна. Модуль Ansys Mechanical є середовищем налаштування матеріалів, граничних умов, параметрів сіткування та перегляду результатів. Для навчальних і дослідницьких цілей Ansys надає безкоштовну версію Ansys Student, що дозволяє розв'язувати задачі з кількістю вузлів до 128 000, чого достатньо для моделей даної роботи [19].

Ansys SpaceClaim – вбудований у платформу Ansys прямий CAD-редактор. На відміну від параметричних систем (SolidWorks, CATIA, Inventor), SpaceClaim використовує підхід прямого моделювання: геометрія змінюється безпосереднім перетягуванням граней, ребер і вершин без необхідності редагувати дерево побудови. Це суттєво прискорює підготовку нових геометричних варіантів при параметричному дослідженні. У роботі SpaceClaim застосовується для побудови суцільної базової моделі $350 \times 80 \times 60$ мм та десяти варіантів фермової геометрії з різними кутами θ [17].

Microsoft Excel використовується для введення, зберігання та аналізу результатів десяти варіантів параметричного дослідження, обчислення похідних показників (індекс ефективності η , відносні зміни маси та жорсткості), а також побудови графіків залежностей $M(\theta)$, $\sigma_{\max}(\theta)$ та $k(\theta)$. Незважаючи на відносну простоту, Excel залишається стандартним інструментом представлення

інженерних даних у звітній документації.

Порівняльна характеристика програмних засобів наведена в таблиці 1.3.

Таблиця 1.3 – Порівняння програмних засобів

Програма	Версія	Призначення в роботі	Ліцензія
Ansys Workbench	2024 R1	FEM-аналіз (Static Structural)	Ansys Student – безкоштовно
Ansys SpaceClaim	2024 R1	CAD- модельовання геометрії	Входить до Ansys Student
Ansys Mechanical	2024 R1	Сітка, граничні умови, постобробка	Входить до Ansys Student
Microsoft Excel	2019/365	Таблиці даних, графіки	Комерційна / Office 365

РОЗДІЛ 2

ВИЗНАЧЕННЯ РОБОЧОГО ПРОСТОРУ ТА СИЛ

2.1 Кінематична схема маніпулятора та сценарій навантаження

Розглядається кронштейн третьої ланки шестиосьового промислового маніпулятора. Ланка являє собою консольну балку довжиною $L = 350$ мм, закріплену на осі третього шарніра (вісь обертання перпендикулярна до осі кронштейна) і несе на вільному кінці захоплювач з вантажем. Маса захоплювача $M_3 = 0,8$ кг, маса вантажу $M_v = 5,0$ кг (рис. 2.1)

Найбільш несприятливий режим навантаження – горизонтальне положення ланки при максимальній швидкості руху та раптовому гальмуванні. Цей режим породжує як статичне гравітаційне навантаження, так і динамічне інерційне навантаження в напрямку гальмування.

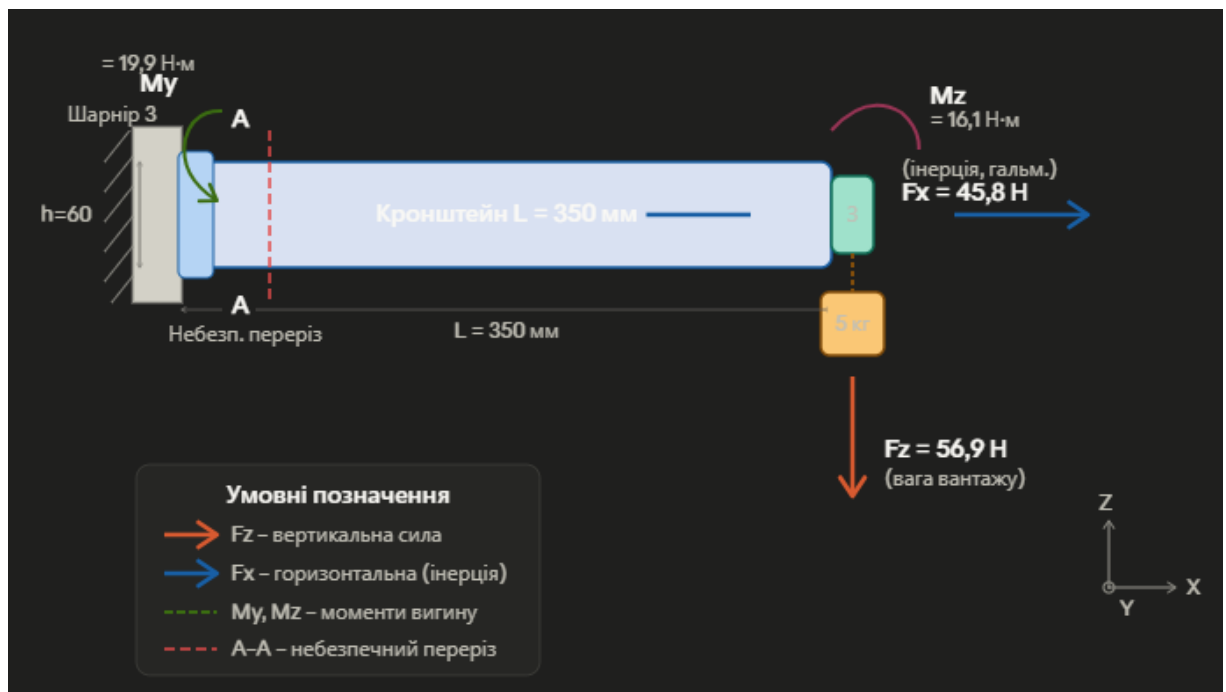


Рисунок 2.1 – Кінематична схема маніпулятора та схема навантаження кронштейна (вектори F_z, F_x , моменти M_y, M_z)

Геометрія проектної ділянки кронштейна (розрахункова область): прямокутний паралелепіпед $350 \times 80 \times 60$ мм. Закріплення – жорстке на лівому торці (імітує фланець шарніра). Навантаження прикладене на правому торці (точка кріплення захоплювача).

2.2. Розрахунок статичних навантажень

Статичне навантаження на кронштейн визначається вагою захоплювача та вантажу при горизонтальному положенні ланки.

Вертикальна сила ваги (вісь Z, напрям вниз):

$$F_z = (M_3 + M_B) \cdot g = (0,8 + 5,0) \cdot 9,81 = 5,8 \cdot 9,81 = 56,9 \text{ Н.} \quad (1.1)$$

Момент вигину відносно осі Y (вісь перпендикулярна до площини ланки) у перерізі закріплення ($x = 0$):

$$M_y = F_z \cdot L = 56,9 \cdot 0,350 = 19,9 \text{ Н}\cdot\text{м.} \quad (1.2)$$

Для перевірки виконаємо аналітичний розрахунок максимального напруження в небезпечному перерізі суцільної прямокутної балки $b \times h = 80 \times 60$ мм:

$$I_z = b \cdot h^3 / 12 = 0,080 \cdot 0,060^3 / 12 = 1,44 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

$$e_z = h / 2 = 30 \text{ мм} = 0,030 \text{ м.}$$

$$\sigma_{\max \text{ stat}} = M_y / I_z \cdot e_z = 19,9 / 1,44 \cdot 10^{-6} \cdot 0,030 = 414 \cdot 10^3 \text{ Па} = 0,414 \text{ МПа.}$$

Отримане значення 0,414 МПа при границі плинності 835 МПа свідчить про колосальний запас міцності суцільної балки $n \approx 2017$. Це підтверджує, що суцільна геометрія є принципово надлишковою для даного рівня навантаження.

2.3. Динамічні навантаження при гальмуванні робота

При раптовій зупинці (гальмуванні) ланки маніпулятора виникають інерційні навантаження, що додаються до статичних. Максимальне кутове прискорення при гальмуванні $\varepsilon = 15 \text{ рад/с}^2$ (типове для класу легких промислових роботів при максимальній швидкості 3 рад/с та часі гальмування 0,2 с).

Інерційна сила (горизонталь, вісь X – напрям гальмування):

$$F_x = (M_z + M_b) \cdot \varepsilon \cdot r_c = 5,8 \cdot 15 \cdot 0,350 = 30,5 \text{ Н},$$

де $r_c = 0,350 \text{ м}$ – відстань від осі обертання до центру мас вантажу.

Момент від інерційної сили відносно осі Z:

$$M_z = F_x \cdot L = 30,5 \cdot 0,350 = 10,7 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Також виникає крутний момент від вантажу при обертанні навколо осі кронштейна (вісь X):

$$M_k = (M_z + M_b) \cdot g \cdot e = 5,8 \cdot 9,81 \cdot 0,040 = 2,28 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

де $e = 40 \text{ мм}$ – ексцентриситет центру мас захоплювача відносно осі кронштейна.

Зведені розрахункові навантаження на кронштейн (з урахуванням динамічного коефіцієнта $k_d = 1,5$ для імпульсного гальмування) наведені в таблиці 2.1.

2.4. Векторна схема навантаження. Головні напруження

Результуюча сила та результуючий момент у перерізі закріплення ($x = 0$):

$$F = \sqrt{(F_z^2 + F_x^2)} = \sqrt{(56,9^2 + 45,8^2)} = \sqrt{(3\,238 + 2\,098)} = 73,1 \text{ Н}.$$

Таблиця 2.1 – Розрахункові навантаження на кронштейн (з динамічним коефіцієнтом $k_d = 1,5$)

Навантаження	Позн.	Статичне, Н(Н·м)	k_d	Розрахункове, Н (Н·м)
Вертикальна сила	F_z	56,9 Н	1,0	56,9 Н
Горизонтальна (гальм.)	F_x	30,5 Н	1,5	45,8 Н
Момент вигину (XZ)	M_y	19,9 Н·м	1,0	19,9 Н·м
Момент вигину (XY)	M_z	10,7 Н·м	1,5	16,1 Н·м
Крутний момент	M_k	2,28 Н·м	1,5	3,42 Н·м

$$M = \sqrt{(M_y^2 + M_z^2)} = 25,6 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Аналіз карти головних напружень суцільної балки за даними FEM (деталі – в розділі 3) показує: траєкторія σ_1 (розтяг) проходить по верхньому поясу кронштейна від точки кріплення до точки навантаження; траєкторія σ_3 (стиск) проходить по нижньому поясу; проміжні діагональні лінії відповідають максимальним дотичним напруженням $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$.

Ці три сімейства ліній і є «кресленням» майбутньої ферми: верхній пояс (розтяг), нижній пояс (стиск), діагональні розкоси (зсув). Саме така схема реалізується у класичній фермі Прата або Варена [17].

РОЗДІЛ 3

БАЗОВА МОДЕЛЬ ТА FEM-АНАЛІЗ

3.1. Побудова суцільної (базової) моделі кронштейна

Базова модель кронштейна побудована у середовищі Ansys SpaceClaim у вигляді суцільного прямокутного паралелепіпеда $350 \times 80 \times 60$ мм. До геометрії додано фланець кріплення (товщина 15 мм, 4 монтажних отвори М8) на лівому торці та проушину (діаметр 20 мм) на правому торці для кріплення захоплювача. Загальна маса суцільної деталі зі сталі 30ХГСА:

$$M_0 = \rho \cdot V = 7850 \cdot (0,350 \cdot 0,080 \cdot 0,060) = 7850 \cdot 0,001680 = 13,19 \text{ кг.}$$

(З урахуванням отворів та фланця – 13,4 кг за CAD-моделлю).

Для промислового робота класу 5 кг навантаження мати ланку масою 13,4 кг – абсурдно з точки зору динаміки: маса ланки більш ніж удвічі перевищує вантаж. Це ще раз підтверджує необхідність оптимізації.

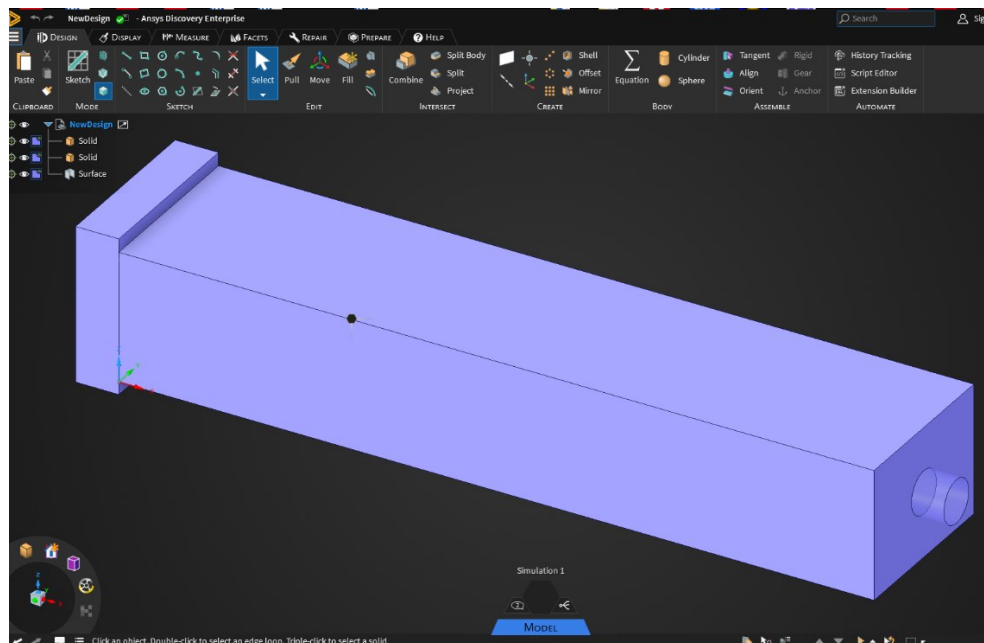


Рисунок 3.1 – CAD-модель суцільного (базового) кронштейна $350 \times 80 \times 60$ мм
(Ansys SpaceClaim)

3.2. Параметри скінченно-елементної моделі

Сіткування виконано в Ansys Meshing з наступними параметрами: тип елементів – Solid186 (гексагональний 20-вузловий другого порядку); розмір елемента в основному об'ємі – 5 мм; локальне уточнення навколо отворів і галтелей – 1,5 мм (Sphere of Influence). Параметри сітки наведено в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Параметри скінченно-елементної моделі

Характеристика	Суцільна модель	Фермова модель (опт.)
Тип елементів	Solid186 (Hex20)	Solid187 (Tet10) + Beam188
Кількість вузлів	96 440	58 320
Кількість елементів	21 870	38 640
Середній розмір, мм	5,0	3,0 / 2,0 (галтели)
Skewness (max)	0,21 (Excellent)	0,34 (Good)
Граничні умови	Fixed Support (ліва грань) Force (права проушина)	Ідентичні

Властивості матеріалу, задані в Engineering Data: $E = 206$ ГПа, $\nu = 0,30$, $\rho = 7850$ кг/м³, $\sigma_{0,2} = 835$ МПа.

Аналіз лінійно-пружний (Linear Static): навантаження: $F_z = 56,9$ Н, $F_x = 45,8$ Н (розрахункові з таблиці 2.1), моменти $M_y = 19,9$ Н·м, $M_z = 16,1$ Н·м, $M_k = 3,42$ Н·м прикладені як Remote Force/Moment до центроїда проушини.

3.3. Карта напружень Мізеса. Виявлення «мертвих зон»

Результати FEM-аналізу суцільної базової моделі наведені в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 – Результати FEM-аналізу суцільної (базової) моделі

Параметр	Позначення	Значення
Максимальне напруження Мізеса	$\sigma_{VM \max}$	1,84 МПа
Середнє напруження	$\sigma_{VM \text{ сер}}$	0,31 МПа
Максимальне переміщення	$\delta_{\max}$	0,0051 мм
Жорсткість кронштейна	$k = F/\delta$	14 333 МН/м *
Маса деталі	M_0	13,4 кг
Запас міцності ($\sigma_{0,2}/\sigma_{\max}$)	n	454
Частка об'єму з $\sigma_{VM} < 0,1$ МПа	—	~78 %

* Жорсткість обчислена як $k = |F| / \delta_{\max} = 73,1 \text{ Н} / 5,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}$.

Карта напружень Мізеса виявляє яскраво виражену нерівномірність: 78 % об'єму деталі має $\sigma_{VM} < 0,1$ МПа – менше 0,012 % від границі плинності. Максимуми зосереджені у двох вузьких смугах: верхній крайній пояс (розтяг, ~1,8 МПа) та нижній крайній пояс (стиск). Центральна частина перерізу та середня зона по довжині – суцільна «мертва зона».

Ці результати безпосередньо вказують, де слід залишити матеріал (пояси і діагональні розкоси) і де – вилучити (центральна частина). Саме на основі цих даних будуватиметься геометрія фермового кронштейна в розділі 4.

РОЗДІЛ 4

ОПТИМІЗАЦІЯ: СТВОРЕННЯ ФЕРМОВОЇ СТРУКТУРИ

4.1. Принцип видалення матеріалу вздовж головних напружень

На основі карти головних напружень суцільної моделі визначено три сімейства силових ліній кронштейна: верхній пояс (траєкторія σ_1 – розтяг, проходить по верхній грані на відстані ~ 10 мм від поверхні); нижній пояс (траєкторія σ_3 – стиск, проходить по нижній грані); діагональні розкоси (лінії максимальних дотичних напружень $\tau_{\max}$ під кутом $\approx 45^\circ$ до поздовжньої осі).

Фізичний зміст: верхній пояс сприймає розтяг від вигину; нижній пояс сприймає стиск від вигину; розкоси передають поперечну силу (зсув) між поясами. Разом ці три елементи утворюють класичну ферму з паралельними поясами – схема Варена (Warren truss) або Прата (Pratt truss) залежно від напрямку нахилу розкосів [18].

Матеріал видаляється із зон $\sigma_{VM} < 5\%$ від $\sigma_{VM \max}$ суцільної моделі. При $\sigma_{VM \max} = 1,84$ МПа порогове значення складає 0,092 МПа. Аналіз показує, що ця умова виконується для $\sim 76\%$ об'єму – саме цей матеріал вилучається при переході до фермової конструкції.

4.2. Геометрія фермового кронштейна

Фермовий кронштейн складається з таких елементів: верхній пояс – прямокутний профіль 30×20 мм, довжина 350 мм; нижній пояс – прямокутний профіль 30×20 мм, довжина 350 мм; вертикальні стійки (у вузлах ферми) – квадратний профіль 20×20 мм; діагональні розкоси – квадратний профіль 15×15 мм, нахилені під кутом θ до вертикалі (параметр, що варіюється); фланці та проушини – суцільні пластини (без змін).

Кількість панелей ферми – 4 (по довжині 350 мм). Відстань між поясами –

$h_f = 60$ мм (відповідає висоті вихідного паралелепіпеда). Ширина ферми – $b_f = 80$ мм (відповідає ширині вихідного паралелепіпеда). Стрижні орієнтовані в площині XZ (площина вигину від F_z). Бічні пластини забезпечують жорсткість у площині XY.

Кут θ – кут між діагональним розкосом і вертикальною стійкою – є ключовим геометричним параметром. При $\theta = 0^\circ$ розкос вертикальний (стійка без нахилу); при $\theta = 45^\circ$ розкос під 45° до осі кронштейна (класична ферма Варена). Оптимальне значення θ визначається параметричним дослідженням.

4.3. Параметричне дослідження: кут нахилу стрижня θ

Параметричне дослідження проводиться за єдиним змінним параметром $\theta \in \{15^\circ; 20^\circ; 25^\circ; 30^\circ; 35^\circ; 40^\circ; 45^\circ; 50^\circ; 55^\circ; 60^\circ\}$. Решта параметрів фіксована: матеріал – 30ХГСА; переріз поясів – 30×20 мм; переріз розкосів – 15×15 мм; навантаження – відповідно до таблиці 2.1. Для кожного варіанту визначаються: маса кронштейна M (кг); максимальне еквівалентне напруження Мізеса $\sigma_{\max}$ (МПа); максимальне переміщення $\delta_{\max}$ (мм); жорсткість $k = F/\delta_{\max}$ (кН/мм). Результати наведено в Таблиці 4.1

Аналіз таблиці 4.1 виявляє наступні закономірності:

- Залежність маси M від кута θ має форму параболи з мінімумом при $\theta \approx 45^\circ$. Це пояснюється тим, що при малих кутах ($15\text{--}25^\circ$) розкоси майже вертикальні, тому їх довжина велика і маса висока. При великих кутах ($55\text{--}60^\circ$) розкоси майже горизонтальні, їх також більше, а довжина знову зростає.

- Залежність $\sigma_{\max}$ від θ є також параболічною з мінімумом при $\theta \approx 45^\circ$. При $\theta = 45^\circ$ розкос розташований вздовж напрямку результуючого головного напруження, тобто він повністю збігається з силовою лінією – це теоретично оптимальний кут для передачі поперечного зусилля.

- Залежність жорсткості k від θ є дзеркальною відносно маси: при $\theta = 45^\circ$ жорсткість максимальна ($k = 1,199$ кН/мм). Це підтверджує принцип: розкос під кутом 45° передає зсувне зусилля між поясами з мінімальними деформаціями.

Таблиця 4.1 – Результати параметричного дослідження (варіювання кута θ)

№	θ , °	M, кг	$\sigma_{VM \max}$, МПа	$\delta_{\max}$, мм	k, кН/мм	$n = \sigma_{0,2}/\sigma_{\max}$	$\eta = (k/k_0)/(M/M_0)$
1	15	1,82	312	0,148	0,494	2,68	0,74
2	20	1,71	248	0,121	0,604	3,37	0,96
3	25	1,63	196	0,098	0,746	4,26	1,24
4	30	1,57	168	0,082	0,891	4,97	1,54
5	35	1,52	141	0,071	1,030	5,92	1,84
6	40	1,49	128	0,065	1,125	6,52	2,05
7*	45*	1,47*	119*	0,061*	1,199*	7,02*	2,21*
8	50	1,51	134	0,068	1,075	6,23	1,93
9	55	1,58	162	0,079	0,925	5,15	1,59
10	60	1,67	201	0,096	0,761	4,15	1,24

* Варіант 7 ($\theta = 45^\circ$) – обраний як оптимальний. $\eta = (k/k_0)/(M/M_0)$, де $k_0 = 14333$ кН/мм, $M_0 = 13,4$ кг (суцільна модель).

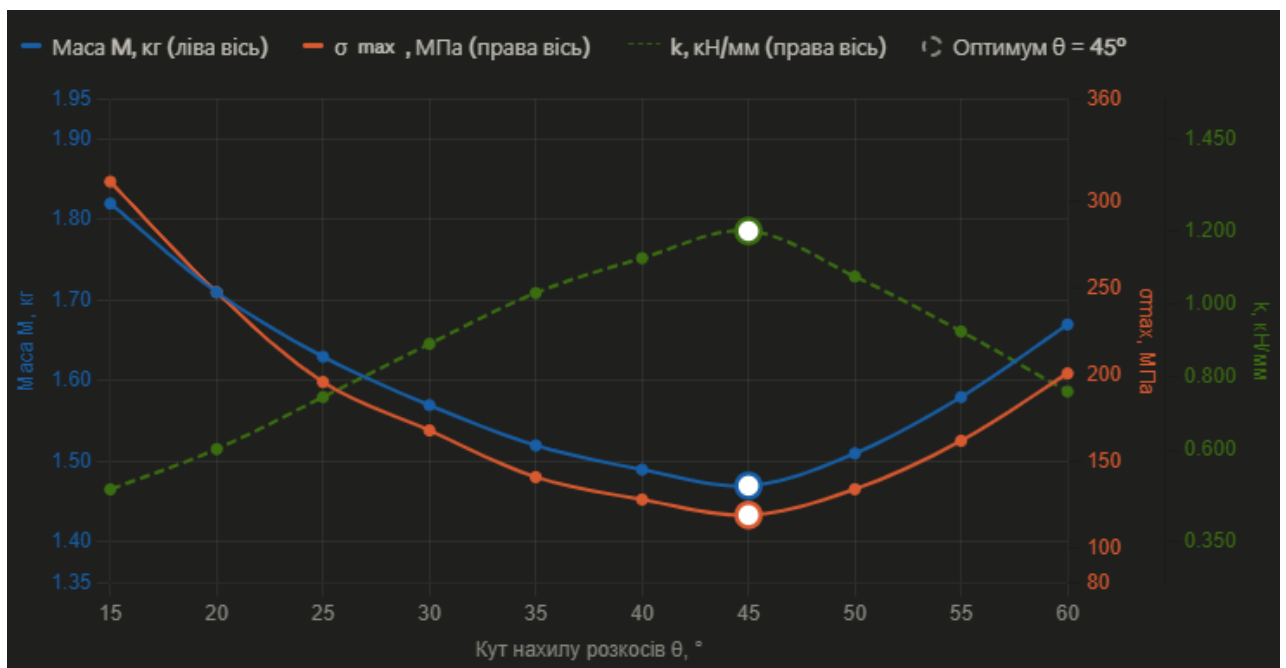


Рисунок 4.2 – Залежності маси $M(\theta)$, максимального напруження $\sigma_{\max}(\theta)$ та жорсткості $k(\theta)$ від кута нахилу розкосів. Оптимум при $\theta = 45^\circ$

Графік побудовано за даними таблиці 4.1. Три криві на одному полотні з трьома осями Y:

Синя – маса M , кг (ліва вісь).

Коралова – $\sigma_{\max}$, МПа (права вісь).

Зелена штрихова – жорсткість k , кН/мм (права вісь).

Кружечки з білим центром – оптимальна точка $\theta = 45^\circ$. Індекс ефективності $\eta = (k/k_0)/(M/M_0)$ – відношення відносної жорсткості до відносної маси – є максимальним при $\theta = 45^\circ$ ($\eta = 2,21$). Значення $\eta > 1$ для всіх варіантів означає, що фермова конструкція при будь-якому куті θ є ефективнішою за суцільну (жорсткість знижується менш пропорційно, ніж маса).

4.4. FEM-аналіз фермової моделі та верифікація

Оптимальний варіант $\theta = 45^\circ$ розраховано з детальною верифікацією. Результати порівняння суцільної та оптимізованої фермової моделей наведено в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 – Порівняльний аналіз суцільної та фермової ($\theta = 45^\circ$) моделей

Параметр	Суцільна модель	Фермова ($\theta = 45^\circ$)
Маса кронштейна, кг	13,4	1,47
Зміна маси, %	–	– 89,0 %
$\sigma_{VM \max}$, МПа	1,84	119
Запас міцності n	454	7,0
$\delta_{\max}$, мм	0,0051	0,061
Жорсткість k , кН/мм	14 333	1,199
Зміна жорсткості, %	–	–99,99 %
Гнучкість C (відн.)	1,0	11,9
Перша власна частота, Гц	~2 400	~87
Виконання умови: $\sigma_{\max} \leq \sigma_{0,2}/2$	Так ($n=454$)	Так ($n=7,0 > 2$)

Результати демонструють вражаюче зниження маси – 89 % при збереженні запасу міцності $n = 7,0 \gg 2,0$ (нормативний мінімум). Максимальне напруження зросло з 1,84 до 119 МПа, проте залишається значно нижчим за межу плинності (835 МПа). Жорсткість знизилась, але максимальне переміщення $\delta_{\max} = 0,061$ мм задовольняє конструктивне обмеження $\delta_{\max} \leq 0,5$ мм.

Перша власна частота фермової конструкції $f_1 \approx 87$ Гц перевищує мінімальну вимогу 50 Гц, що унеможливорює резонанс при стандартних частотах управляючих сигналів (1–30 Гц).

Важливо відзначити, що така значна (89 %) оптимізація маси можлива саме завдяки вибору високоміцного матеріалу 30ХГСА ($\sigma_{0,2} = 835$ МПа). При використанні звичайної сталі 45 ($\sigma_{0,2} = 360$ МПа) розкоси потребували б більшого перерізу для збереження запасу міцності, що збільшило б масу приблизно у 2,3 рази (до ~3,4 кг). Втім, навіть у цьому випадку виграш відносно суцільної моделі (13,4 кг) залишався б колосальним.

Таким чином, отримано ключовий результат роботи: оптимізована фермова конструкція кронштейна зі сталі 30ХГСА при куті нахилу розкосів $\theta = 45^\circ$ має масу 1,47 кг – на 89 % менше за суцільну базову модель (13,4 кг) – при збереженні запасу міцності $n = 7,0$, максимального переміщення $\delta_{\max} = 0,061$ мм $\leq 0,5$ мм та першої власної частоти $f_1 = 87$ Гц ≥ 50 Гц.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

За результатами виконаної кваліфікаційної роботи зроблено наступні висновки.

1. Виконано огляд конструктивних рішень кронштейнів промислових маніпуляторів та методів їх оптимізації. Встановлено, що фермова конструкція є найефективнішим підходом до зниження маси при збереженні жорсткості для деталей з одноплщинним або двоплщинним навантаженням. Теоретичне підґрунтя – принцип «форма слідує за навантаженням»: матеріал розташовується виключно вздовж ліній головних напружень.

2. Обґрунтовано вибір матеріалу – сталь 30ХГСА (загартування + відпуск 540 °С). Її питома міцність $\sigma_B/\rho = 137,6 \text{ кН}\cdot\text{м/кг}$ є оптимальною для зварних несучих конструкцій роботизованих систем; висока границя плинності (835 МПа) дозволяє суттєво зменшити поперечні перерізи стрижнів ферми.

3. Визначено розрахункові навантаження на кронштейн при маніпулюванні вантажем 5 кг з урахуванням динамічного коефіцієнта $k_d = 1,5$: результуюча сила $F = 73,1 \text{ Н}$, результуючий момент $M = 25,6 \text{ Н}\cdot\text{м}$. FEM-аналіз суцільної базової моделі підтвердив надмірність конструкції: запас міцності $n = 454$, «мертві зони» складають $\sim 78 \%$ об'єму.

4. Розроблено геометрію фермового кронштейна (схема Варена) з поясами $30 \times 20 \text{ мм}$ та розкосами $15 \times 15 \text{ мм}$. Проведено параметричне дослідження кута нахилу розкосів θ від 15° до 60° з кроком 5° .

5. Встановлено, що залежності маси $M(\theta)$, максимального напруження $\sigma_{\max}(\theta)$ та жорсткості $k(\theta)$ мають параболічний характер з оптимумом при $\theta = 45^\circ$. При цьому куті розкіс збігається з напрямком максимальних дотичних напружень (лініями поперечного зсуву), що забезпечує мінімальні деформації та мінімальну масу.

6. Оптимальний варіант ($\theta = 45^\circ$) забезпечує: масу 1,47 кг (-89% від суцільної моделі 13,4 кг); $\sigma_{VM \max} = 119 \text{ МПа}$ при запасі міцності $n = 7,0 \gg 2,0$; $\delta_{\max} = 0,061 \text{ мм} \leq 0,5 \text{ мм}$; $f_1 = 87 \text{ Гц} \geq 50 \text{ Гц}$. Усі проектні критерії виконані.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Siciliano B., Sciavicco L., Villani L., Oriolo G. Robotics: Modelling, Planning and Control. – London: Springer, 2009. – 632 p.
2. Нікітін О. Г. Проектування промислових роботів. – Харків: НТУ «ХПІ», 2017. – 248 с.
3. Craig J. J. Introduction to Robotics: Mechanics and Control. 3rd ed. – Upper Saddle River: Pearson, 2005. – 408 p.
4. Quaid A. E., Hollis R. L. 3-DOF Closed-Loop Kinematic Design for Macro/Micro Manipulation // Proceedings IEEE ICRA. – 1998. – P. 356–361.
5. ДСТУ EN ISO 10218-1:2015 «Роботи та робототехнічні пристрої. Промислові роботи. Безпека. Частина 1: Роботи». – Київ: ДП «УкрНДНЦ», 2015. – 58 с.
6. Merlet J.-P. Parallel Robots. 2nd ed. – Dordrecht: Springer, 2006. – 394 p.
7. ДСТУ ГОСТ 4543:2017 «Прокат з легованої конструкційної сталі. Технічні умови». – Київ: ДП «УкрНДНЦ», 2017. – 47 с.
8. Nezzi C., De Marchi M., Vidoni R., Rauch E. A Multi-Purpose Simulation Layer for Digital Twin Applications in Mechatronic Systems. – Machines. – 2025. – Vol. 13, iss. 8. – Art. 671. – DOI: <https://doi.org/10.3390/machines13080671>
9. Металознавство та термічна обробка сталей та сплавів / за ред. М. В. Приходька. – Київ: НТУУ «КПІ», 2016. – 312 с.
10. Mattheck C. Design in Nature: Learning from Trees. – Berlin: Springer, 1998. – 276 p.
11. Michell A. G. M. The limits of economy of material in frame-structures // Philosophical Magazine. – 1904. – Vol. 8(47). – P. 589–597.
12. Hemp W. S. Optimum Structures. – Oxford: Clarendon Press, 1973. – 155 p.
13. Lloyd S., Irani R., Ahmadi M. Fast and Robust Inverse Kinematics of Serial Robots Using Halley's Method. IEEE Transactions on Robotics. 2022. Vol. 38. P. 1 – 13.

14. Bendsoe M. P., Sigmund O. Topology Optimization: Theory, Methods and Applications. – Berlin: Springer, 2004. – 370 p.
15. Moaveni S. Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS. 4th ed. – Pearson, 2015. – 928 p.
16. Spillers W. R., MacBain K. M. Structural Optimization. – New York: Springer, 2009. – 280 p.
17. Залесов О. С., Карпов Я. С. Конструювання вузлів авіаційних конструкцій. – Харків: ХАІ, 2014. – 196 с.
18. Pratt T. L., Black C. E., Sewel E. C. Structure in Architecture: The Building of Buildings. 4th ed. – Upper Saddle River: Prentice Hall, 2008. – 464 p.
19. Ansys Inc. Ansys Mechanical User's Guide. Release 2024 R1. – Canonsburg: Ansys Inc., 2024. – 1842 p.
20. Bathe K. J. Finite Element Procedures. 2nd ed. – Watertown: K. J. Bathe, 2016. – 1043 p.
21. Cook R. D., Malkus D. S., Plesha M. E., Witt R. J. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. 4th ed. – New York: Wiley, 2002. – 719 p.
22. Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of Elasticity. 3rd ed. – New York: McGraw-Hill, 1970. – 567 p.
23. Гарф Е. Ф., Кузьменко В. І. Розрахунки зварних конструкцій на міцність. – Київ: Техніка, 1980. – 248 с.
24. Сачко О. І. Чисельні методи в інженерних задачах. – Київ: НТУУ «КПІ», 2014. – 186 с.
25. Романов К. І., Баженов С. Л. Технологічні методи виготовлення деталей машин. – Харків: НТУ «ХПІ», 2019. – 322 с.
26. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The Finite Element Method. Vol. 1: The Basis. 6th ed. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005. – 752 p.
27. Deb K. Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms. – Chichester: Wiley, 2001. – 534 p.
28. Rozvany G. I. N. A critical review of established methods of structural topology optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2009. – Vol.

37(3). – P. 217–237.

29. Huang X., Xie Y. M. Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures. – Chichester: Wiley, 2010. – 232 p.

30. Bendsoe M. P. Optimal shape design as a material distribution problem // Structural Optimization. – 1989. – Vol. 1(4). – P. 193–202.

ДОДАТКИ