

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА СПЕЦКУРС

**методичні вказівки і контрольні завдання
для студентів будівельних спеціальностей**

Кропивницький – 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра деталей машин та прикладної механіки

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
СПЕЦКУРС

методичні вказівки і контрольні завдання
для студентів будівельних спеціальностей

Рекомендовано засіданням кафедри
деталей машин та прикладної механіки для
студентів будівельних спеціальностей
Протокол № 10 від 11.05.2021 р.

Кропивницький – 2021

Теоретична механіка. Спецкурс: методичні вказівки і контрольні завдання для студентів будівельних спеціальностей // Укл. Пирогов В.В., Філімоніхін Г.Б. – Кропивницький: ЦНТУ, 2021. – 32 с.

Табл. 3. Іл. 47. Бібліогр.: 7 назв.

Укладачі к.ф.-м.н., доц. Пирогов В.В.,
 д.т.н., проф. Філімоніхін Г.Б.,

Рецензент д.т.н., проф. Пашинський В.А.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
ЗАДАЧА СК1 – ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ ДО ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР СКЛАДЕНОЇ КОНСТРУКЦІЇ.....	5
ЗАДАЧА СК2 – ЗАСТОСУВАННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ ТА РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА II РОДУ ПРИ ВИВЧЕННІ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ	17
ЗАДАЧА СК3 – ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ ЗА ДОПОМОГОЮ ЕОМ	25
ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ З РОЗДІЛУ "ДИНАМІКА"	31
ЛІТЕРАТУРА	32

Передмова

Теоретична механіка - загальнонаукова дисципліна, яка займає важливе місце в вузівській програмі фундаментальної підготовки спеціалістів.

Необхідною умовою успішного оволодіння курсом є виконання індивідуальних домашніх завдань. До кожної задачі додається 10 рисунків і таблиця, в якій містяться додаткові до тексту задачі умови. Нумерація рисунків подвійна, при цьому номером рисунку є цифра, яка стоїть після крапки. Наприклад, рис. СК1.4 – це рис. 4 до задачі СК1. Варіант до кожної задачі студент обирає згідно номеру залікової книжки. Наприклад:

номер залікової книжки – 8.092304150;

Останній цифрі залікової книжки 0 відповідає рисунок, а передостанній – 5, відповідає рядок вихідних розрахункових даних з таблиці.

Індивідуальні домашні завдання виконують в окремому зошиті або на аркушах формату А4. На титульному аркуші вказується: факультет, спеціальність, назва дисципліни, номер варіанту, фамілія та ініціали студента. Слід зауважити, що при виконанні креслення розрахункової схеми її необхідно виконувати із врахуванням умов розв'язуваного варіанту задачі. Креслення необхідно зображати так, щоб на ньому все було добре видно. Розв'язок задач необхідно супроводжувати короткими поясненнями (які формули або теореми застосовуються, звідки отримуються ті чи інші результати та ін.) і детальними розрахунками. **Роботи, виконані не за варіантом, або не самостійно не зараховуються.**

Методичні вказівки для розв'язку приведені до кожної задачі після викладення її тексту; після цього розглядається розв'язок аналогічної задачі. Мета прикладу – пояснити хід розв'язку.

В основу цих методичних вказівок покладені методичні вказівки Тарга С.М. [1], та збірник завдань для курсових робіт з теоретичної механіки Яблонского А.А. [2].

Задача СК1 – застосування принципу можливих переміщень до визначення реакцій опор складеної конструкції

Умова задачі. Складена конструкція навантажена так, як показано на схемі. Схеми конструкцій показані на рис. СК1.0 – СК1.9, а необхідні дані для розв’язку приведені в табл. СК1.

Знайти: реакції опор складеної конструкції застосовуючи принцип можливих переміщень.

Таблиця СК1

Номер умови	Навантаження									
	P_1 , кН	P_2 , кН	q , кН/м	M , кН·м	a	b	c	d	e	l
	м									
1	20	8	3	8	1	1,5	2	3	4	5
2	18	12	2	6	2	2,5	2,5	3,5	4	5
3	16	16	1	5	3	4	3	4	5	6
4	14	10	2	7	1,5	2	3	4	5,5	6
5	12	14	1	10	2,5	3	4	5	6	7
6	10	18	3	9	3,5	4	5	6	6,5	7
7	16	5	2	3	1	2	2,5	3	4	5
8	15	16	1	6	1,5	3	3,5	4	5	6
9	18	20	3	7	2,5	3	4	5	6	7
0	16	15	2	8	2	2,5	3	4	6	7,5

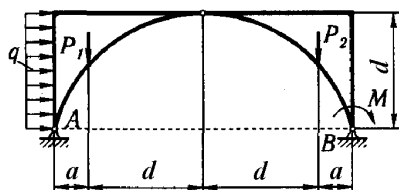


Рис. СК1.0

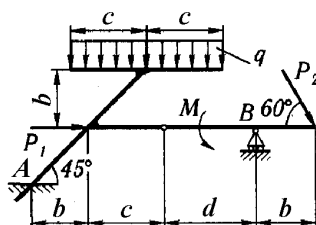


Рис. СК1.1

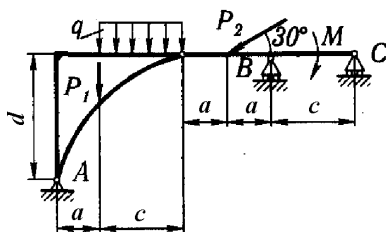


Рис. СК1.2

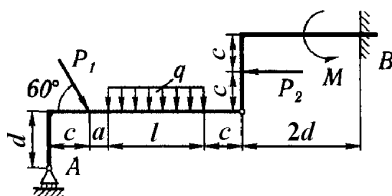


Рис. СК1.3

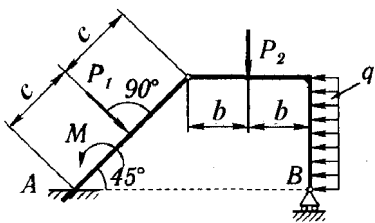


Рис. СК1.4

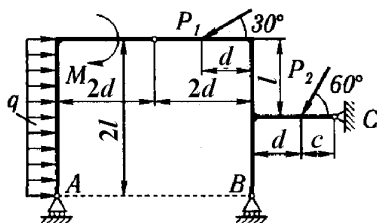


Рис. СК1.5

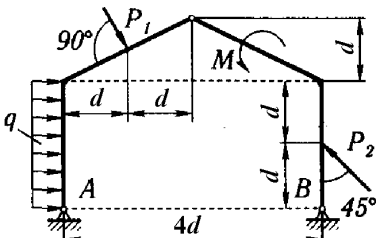


Рис. СК1.6

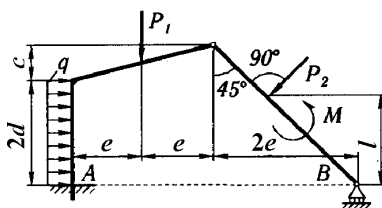


Рис. СК1.7

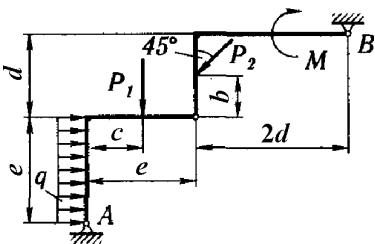


Рис. СК1.8

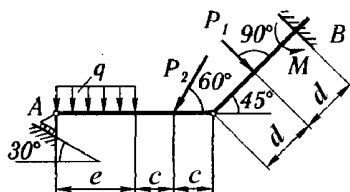


Рис. СК1.9

Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача СК1 на застосування принципу можливих переміщень. Порядок застосування вказаного принципу наступний:

1. показати всі діючі на систему активні сили (при визначенні реакції опори, використовуючи аксіому про відкидання в'язей, необхідно відкинути відповідну в'язь і замінити її дію реакцією в'язі (опори));
2. надати системі можливе переміщення і показати на схемі елементарні переміщення δs_i точок прикладання сил або кути $\delta \varphi_i$ елементарних поворотів тіл, на які діють сили;
3. складаємо рівняння принципу можливих переміщень

$$\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (a)$$

включаючи в число активних сил і розглядувану реакцію в'язі. В (а) $\vec{F}_i$ - рівнодійна всіх прикладених до i -ої точки активних сил (зовнішніх і внутрішніх); $\delta \vec{r}_i$ - можливе переміщення i -ої точки системи.

4. встановити залежність між величинами δs_i і $\delta \varphi_i$, та виразити ці величини через будь-яку одну - незалежну. Після заміни в рівності (а) всіх величин δs_i і $\delta \varphi_i$ через одну незалежну, одержимо рівняння, з якого і знайдеться шукана в задачі величина або залежність.

Зауважимо, що залежність між δs_i і $\delta \varphi_i$ можна знайти:

а) з відповідних геометричних співвідношень;

б) з кінематичних співвідношень, вважаючи, що система рухається, і визначаючи при даному положенні системи залежність між лінійними v_i або кутовими ω_i швидкостями відповідних точок або тіл системи, а потім вважаючи $\delta s_i = v_i dt$, $\delta \varphi_i = \omega_i dt$.

В ряді випадків при вирішенні задачі можна використовувати інший вигляд рівняння принципу можливих переміщень, так зване рівняння можливих потужностей

$$\sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = 0, \quad (б)$$

де $\vec{v}_i$ - можлива швидкість i -ої точки системи.

Приклад розв'язку задачі СК1 (випадок відсутності опор із жорстким закріпленням)

Умова задачі. Складена рама навантажена силами P_1 та P_2 , моментом M та розподіленим навантаженням q (рис. СК1а.1).

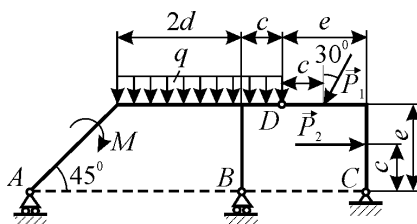


Рис. СК1а.1

Дано: $P_1=10$ кН; $P_2=8$ кН; $q=5$ кН/м; $M=8$ кН·м; $c=2$ м, $d=3$ м, $e=4$ м.

Знайти: реакції опор складеної конструкції застосовуючи принцип можливих переміщень.

Розв'язок

1. Визначимо реакції опор.

Визначимо зосереджену силу від розподіленого навантаження:

$$Q = q(2d + c) = 5(2 \cdot 3 + 2) = 40 \text{ кН.}$$

Зосереджена сила Q прикладена посередині навантаженої ділянки, де прикладене розподілене навантаження.

Розкладемо сили P_1 та P_2 на складові спрямовані вздовж відповідних координатних осей:

$$P_{1x} = P_1 \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ kH}, \quad P_{1y} = P_1 \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ kH},$$

$$P_{2x} = P_2 = 8 \text{ кН}, \quad P_{2y} = 0.$$

Визначимо горизонтальну складову реакції нерухомої опори C (X_C). Для цього нерухому опору в точці C представимо у вигляді рухомої опори на катках, опорною площиною якої буде горизонтальна поверхня, і прикладемо реакцію $\vec{X}_C$ (рис. СК1а.2). Надамо правій частині рами можливу швидкість $\vec{v}_C$ поступального руху вправо. Швидкості точок A , B і D лівої частини рами будуть паралельні, тому ліва частина рами, як і права, одержить ту ж саму можливу швидкість $\vec{v}_C$ поступального руху. Складемо рівняння можливих потужностей:

$$X_C v_C + P_{2x} v_C - P_{1x} v_C = 0,$$

ЗВІДКИ

$$X_C = P_{1y} - P_{2y} = 5 - 8 = -3 \text{ кН.}$$

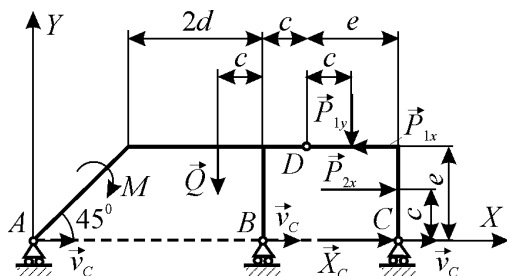


Рис. СК1а.2

Визначимо вертикальну складову реакції нерухомої опори C (Y_C). Для цього нерухому опору в точці C представимо у вигляді рухомої опори на катках, опорною площиною якої буде вертикальна поверхня, і прикладемо реакцію $\bar{Y}_C$ (рис. СК1а.3).

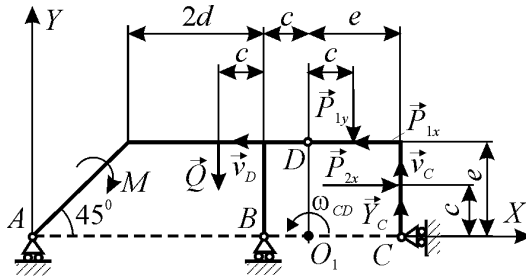


Рис. СК1а.3

Можлива швидкість $\vec{v}_C$ в розглядуваному випадку буде паралельна опорній площині катка C , а можлива швидкість точки D лівої частини рами буде паралельна опорним площинам катків A і B . В результаті ліва частина рами набуде можливої швидкості $\vec{v}_D$ поступального руху вліво, а права частина рами набуде можливої кутової швидкості ω_{CD} навколо миттєвого центра швидкостей O_1 , що знаходиться на перетині перпендикулярів до швидкостей $\vec{v}_C$ і $\vec{v}_D$ точок C і D . Враховуючи, що

$$\omega_{CD} = \frac{v_D}{e} = \frac{v_C}{e},$$

рівняння можливих потужностей в розглядуваному випадку матиме вигляд:

$$Y_C v_C - P_{2x} v_C \frac{c}{e} + P_{1x} v_C - P_{1y} v_C \frac{c}{e} = 0.$$

Звідки знаходимо, що

$$Y_C = P_{2x} \frac{c}{e} - P_{1x} + P_{1y} \frac{c}{e} = 8 \frac{2}{4} - 10 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,866 \frac{2}{4} = 3,33 \text{ кН}.$$

Визначимо реакцію рухомої опори A (Y_A). Відкинувши рухому опору в точці A замінимо її реакцією $\vec{Y}_A$ (рис. СК1а.4). Надамо правій частині рами можливої кутової швидкості ω_{CD} навколо точки C в бік обертання годинникової стрілки. Ліва частина рами отримає можливу кутову швидкість ω_{BD} навколо миттєвого центра швидкостей O_2 , що знаходиться на перетині перпендикулярів до швидкостей $\vec{v}_D$ і $\vec{v}_B$ точок D і B (швидкість $\vec{v}_D$ направлена перпендикулярно CD , а швидкість $\vec{v}_B$ направлена паралельно опорній площині рухомої опори B). З рис. СК1а.4 отримуємо, що

[illegible]

$$6,95 + 38,38 + 3,33 - 40 - 8,66 = 48,66 - 48,66 = 0.$$

[illegible]

Рис. СК1а.6

$$\sum_{i=1}^n M_D(\vec{F}_i) = 0: -Y_A(2d + e \cos 45^\circ + c) - M + 2Qc - Y_Bc -$$

$$-P_{1y}c+P_{2x}c+X_Ce+Y_Ce=0,$$

$$-6,95(2 \cdot 3 + 4 \cdot 0,707 + 2) - 8 + 2 \cdot 40 \cdot 2 - 38,38 \cdot 2 -$$
$$-8,66 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 + 3,33 \cdot 4 = -189,34 + 189,32 = -0,02.$$

$$\eta = \frac{189,32 - 189,34}{189,34} \cdot 100\% \approx -0,01\%.$$

Відповідь: $X_C = -3 \text{ кН}$; $Y_C = 3,33 \text{ кН}$; $Y_A = 6,95 \text{ кН}$; $Y_B = 38,38 \text{ кН}$.

Приклад розв'язку задачі СК1 (випадок наявності опори із жорстким закріпленням)

Умова задачі. Складена рама навантажена силами P_1 та P_2 , моментом M та розподіленим навантаженням q (рис. СК16.1).

Дано: $P_1=20$ кН; $P_2=12$ кН; $q=8$ кН/м; $M=15$ кН·м; $c=2$ м,
 $d=3$ м, $e=4$ м.

Знайти: реакції опор складеної конструкції застосовуючи принцип можливих переміщень.

Розв'язок

1. Визначимо реакції опор.

Визначимо зосереджену силу від розподіленого навантаження:

$$Q = qc = 8 \cdot 2 = 16 \text{ кН.}$$

Зосереджена сила Q прикладена посередині навантаженої ділянки, де прикладене розподілене навантаження.

Розкладемо сили P_1 та P_2 на складові спрямовані вздовж відповідних координатних осей:

$$P_{1x} = P_1 \cos 45^\circ = 20 \cdot 0,707 = 14,14 \text{ кН, } P_{1y} = P_{1x} = 14,14 \text{ кН,}$$

$$P_{2x} = P_2 \sin 60^\circ = 12 \cdot 0,866 \approx 10,39 \text{ кН, } P_{2y} = P_2 \cos 60^\circ = 12 \cdot 0,5 = 6 \text{ кН.}$$

Визначимо реакцію рухомої опори A (R_A). Відкинувши рухому опору в точці A замінимо її реакцією $\vec{R}_A$ (рис. СК16.2).

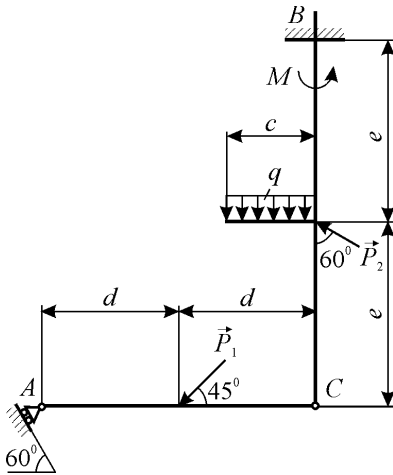


Рис. СК16.1

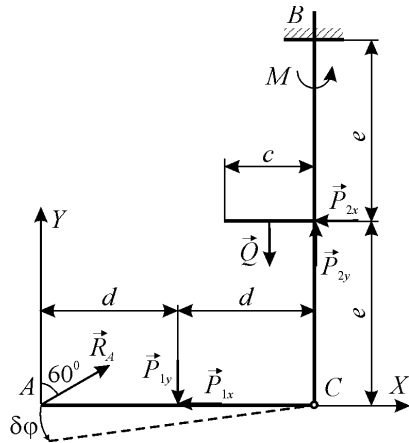


Рис. СК16.2

Можливим переміщенням лівої частини рами є її поворот навколо шарніра C на кут $\delta\varphi$ проти ходу стрілки годинника; права частина рами залишається нерухомою. Складемо рівняння робіт:

$$-R_A \cos 60^\circ 2d \delta\varphi + P_{1y} d \delta\varphi = 0,$$

звідки

$$R_A = \frac{P_{1y}}{2 \cos 60^\circ} = \frac{14,14}{2 \cdot 0,5} = 14,14 \text{ кН.}$$

Визначимо момент жорсткого закріплення в точці B (M_B).

Відкинемо в'язь, що перешкоджає повороту правої частини рами, та замінімо жорстке закріплення в точці B на нерухому опору, приклавши при цьому момент M_B (рис. СК16.3). Надамо правій частині рами можливу кутову швидкість ω_2 навколо точки B проти ходу стрілки годинника. Ліва частина рами отримає можливу кутову швидкість ω_1 навколо миттєвого центра швидкостей – точки O_1 , що знаходиться на перетині перпендикулярів до швидкостей $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_C$ (швидкість $\vec{v}_A$ паралельна опорній площині катка A , а $\vec{v}_C \perp CB$). З рис. СК16.3 отримаємо, що

$$v_C = 2\omega_2 e = \omega_1 O_1 C, \text{ звідки } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2e}{O_1 C},$$

де

$$O_1 C = 2d \operatorname{tg} 30^\circ = 2 \cdot 3 \cdot 0,577 \approx 3,46 \text{ м.}$$

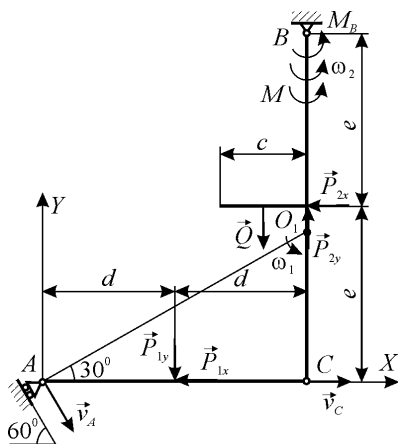


Рис. СК16.3

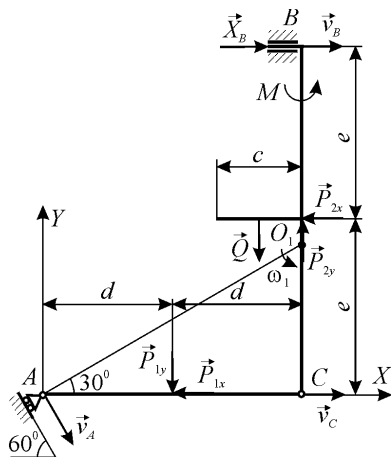


Рис. СК16.4

Рівняння можливих потужностей матиме вигляд:

$$M_B \omega_2 + M \omega_2 - P_{2x} \omega_2 e + Q \omega_2 \frac{c}{2} - P_{1x} \omega_1 O_1 C + P_{1y} \omega_1 d = 0, \text{ звідки}$$

$$M_B = -M + P_{2x} e - Q \frac{c}{2} + P_{1x} 2e - P_{1y} \frac{2de}{O_1 C} =$$

$$= -15 + 10,39 \cdot 4 - 16 \frac{2}{2} + 14,14 \cdot 2 \cdot 4 - 14,14 \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3,46} \approx 25,6 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$v_B = v_C = \omega_1 O_1 C \quad (\omega_1 = v_B / O_1 C).$$
$$X_B v_B - P_{2x} v_B - P_{1x} \omega_1 O_1 C + P_{1y} \omega_1 d = 0, \text{ звідки}$$

$$X_B = P_{2x} + P_{1x} - P_{1y} \frac{d}{O_1C} = 10,39 + 14,14 - 14,14 \frac{3}{3,46} \approx 12,27 \text{ кН.}$$

Надамо правій частині рами можливої швидкості $\vec{v}_B$ поступального

руху вздовж вертикальних направляючих (напрявні перешкоджають повороту правої частини рами). Ліва частина рами отримує можливу кутову швидкість ω_1 навколо миттєвого центра швидкостей – точки A . З рис. СК16.5 отримуємо, що

$$v_B = v_C = \omega_1 2d \quad (\omega_1 = v_B / (2d)).$$

Рівняння можливих потужностей матиме вигляд:

$$Y_B v_B + P_{2y} v_B - Q v_B - P_{1y} \omega_1 d = 0, \quad \text{звідки}$$

$$Y_B = -P_{2y} + Q + \frac{P_{1y}}{2} = -6 + 16 + \frac{14,14}{2} = 17,07 \text{ кН.}$$

2. Перевірка. Перевіримо чи дійсно знайдені значення величин задовольняють рівняння рівноваги (рис. СК16.6).

1-ше рівняння для перевірки:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad R_A \sin 60^\circ - P_{1x} - P_{2x} + X_B = 0,$$

$$14,14 \cdot 0,866 - 14,14 - 10,39 + 12,27 = 24,515 - 24,53 = 0,015 \approx 0.$$

Перевірка виконується. Відносна похибка становить:

$$\eta = \frac{24,515 - 24,53}{24,53} \cdot 100\% \approx -0,06\%.$$

2-ге рівняння для перевірки:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad R_A \cos 60^\circ + Y_B - Q + P_{2y} - P_{1y} = 0,$$

$$14,14 \cdot 0,5 + 17,07 - 16 + 6 - 14,14 = 30,14 - 30,14 = 0.$$

Перевірка виконується.

3-тє рівняння для перевірки:

$$\sum_{i=1}^n M_K(\vec{F}_i) = 0: \quad R_A [e \sin 60^\circ - (2d - c) \cos 60^\circ] + M + M_B - Q \frac{c}{2} +$$

$$+ P_{1y} (d - c) - P_{1x} e + P_{2y} c + Y_B c - X_B e = 0,$$

$$14,14 [4 \cdot 0,866 - (2 \cdot 3 - 2) \cdot 0,5] + 15 + 25,6 - 16 \cdot 1 + 14,14 (3 - 2) -$$

$$- 14,14 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 17,07 \cdot 2 - 12,27 \cdot 4 = 121,58 - 121,64 = -0,06 \approx 0.$$

Перевірка виконується. Відносна похибка становить:

$$\eta = \frac{121,58 - 121,64}{121,64} \cdot 100\% \approx -0,05\%.$$

Відповідь: $R_A = 14,14 \text{ кН}; \quad M_B = 25,6 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad X_B = 12,27 \text{ кН};$
 $Y_B = 17,07 \text{ кН}.$

Задача СК2 – застосування загального рівняння динаміки та рівняння Лагранжа II роду при вивченні руху механічної системи з одним ступенем вільності

Умова задачі. Механічна система складається з однорідних ступінчатих шківів 1 і 2, обмотаних нитками, вантажів 3-6, прикріплених до ниток, та невагомому блоку (рис. СК2.0 – СК2.9, табл. СК2). Система рухається у вертикальній площині під дією сил тяжіння і пари сил з моментом M , що діє на один із шківів. Радіуси ступеней шківа 1 рівні: $R_1 = 0,2$ м, $r_1 = 0,1$ м, а шківа 2 - $R_2 = 0,3$ м, $r_2 = 0,15$ м. Радіуси інерції шківів відносно осей обертання відповідно рівні $\rho_1 = 0,1$ м та $\rho_2 = 0,2$ м. Тіла (вантажі), ваги яких дорівнюють нулю, на рисунку не зображати (блоки 1 та 2 зображати завжди, як частини системи).

Знайти (нехтуючи тертям): прискорення вантажу, що має найбільшу вагу за допомогою загального рівняння динаміки та за допомогою рівняння Лагранжа II роду.

Таблиця СК2

Номер умови	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	$M,$ $\text{Н} \cdot \text{м}$
	Н						
0	10	0	20	30	40	0	10
1	0	40	0	10	20	30	12
2	20	30	40	0	10	0	16
3	0	20	10	30	0	40	18
4	30	0	20	0	40	10	12
5	0	10	30	40	20	0	16
6	40	0	0	20	30	10	10
7	10	20	0	40	0	30	18
8	0	40	10	0	30	20	12
9	30	0	40	20	10	0	16

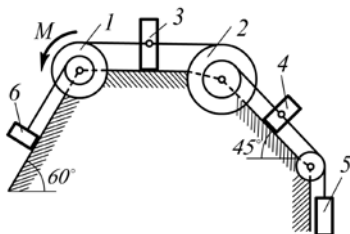


Рис. СК2.0

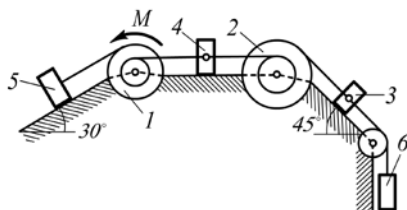


Рис.СК2.1

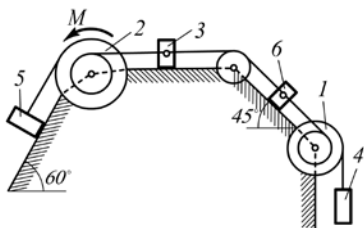


Рис.СК2.2

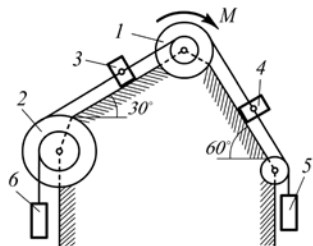


Рис.СК2.3

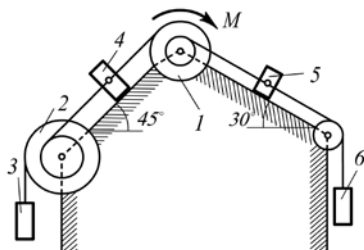


Рис.СК2.4

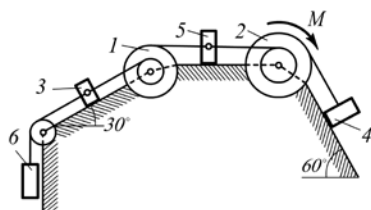


Рис.СК2.5

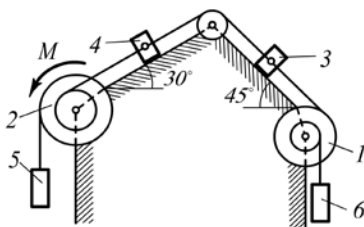


Рис.СК2.6

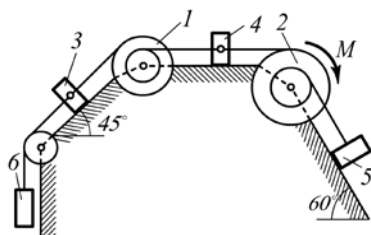


Рис.СК2.7

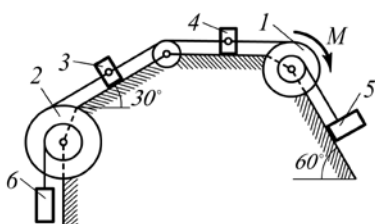


Рис.СК2.8

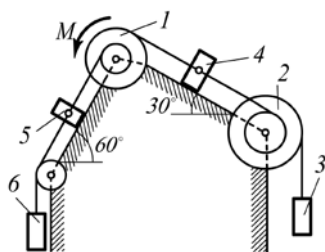


Рис.СК2.9

Методичні рекомендації до розв'язання задачі

При розв'язанні задачі за допомогою загального рівняння динаміки врахувати, що у випадку однорідного тіла, яке обертається навколо власної осі симетрії, система сил інерції приводиться до пари сил з

моментом $M_i^{in} = J\varepsilon$, де J - момент інерції тіла відносно осі обертання, ε - кутове прискорення тіла. Прийняти до уваги, що напрямки сил та моментів інерції протилежні напрямкам прискорень.

При розв'язанні задачі за допомогою **рівняння Лагранжа II роду** необхідно врахувати, що кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій усіх тіл, що входять до системи; цю енергію потрібно виразити через ту швидкість (лінійну чи кутову), яку у задачі необхідно визначити. Для встановлення залежності між швидкостями точок тіла, що рухається плоскопаралельно, або між його кутовою швидкістю і швидкістю центра інерції скористатися поняттям миттєвого центру швидкостей (кінематика).

Приклад розв'язку задачі СК2 за допомогою загального рівняння динаміки

Умова задачі. Механічна система складається з вантажів 1 та 2, однорідних ступінчатого шківів 3, блоку 4 та диска 5 (рис. СК2а.1). Система рухається у вертикальній площині під дією сил тяжіння і пари сил з моментом M , що діє на ступінчатий шків 3. Радіус інерції шківів 3 відносно осі обертання рівний ρ_3 .

Дано: $P_1 = 40 \text{ Н}$; $P_2 = 80 \text{ Н}$; $P_3 = 50 \text{ Н}$; $P_4 = 60 \text{ Н}$; $P_5 = 30 \text{ Н}$;
 $R_3 = 0,3 \text{ м}$; $r_3 = 0,1 \text{ м}$; $\rho_3 = 0,2 \text{ м}$; $R_4 = 0,2 \text{ м}$; $M = 20 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Знайти (нехтуючи тертям): прискорення вантажу, що має найбільшу вагу.

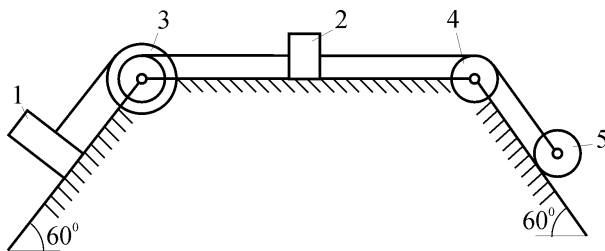


Рис. СК2а.1

Розв'язок

1. Будуємо розрахункову схему (рис. СК2а.2). Показуємо на схемі можливі переміщення та прискорення тіл системи. Прикладаємо до тіл активні сили та сили і моменти інерції. Відповідно до принципу Даламбера-Лагранжа

$$\sum_{i=1}^n (\delta A_i^{(ак)} + \delta A_i^{(ін)}) = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^{(ак)} + \vec{F}_i^{(ін)}) \delta \vec{r}_i = 0. \quad (1)$$

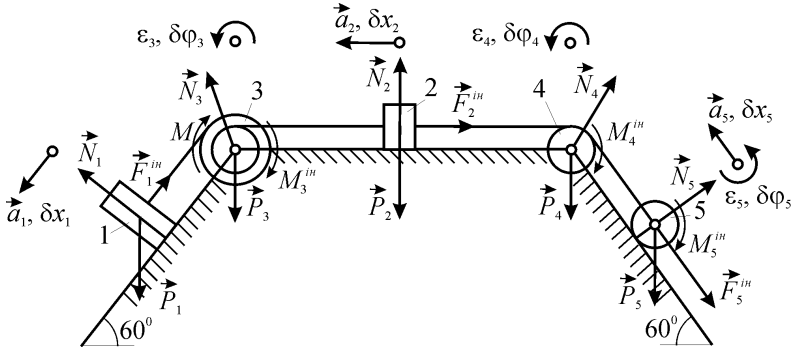


Рис. СК2а.2

2. Визначаємо зв'язки між можливими переміщеннями і прискореннями.

2.1. Визначаємо зв'язки між можливими переміщеннями. Виразимо всі можливі переміщення через незалежне δx_2 .

$$\delta \varphi_3 = \frac{\delta x_2}{r_3}, \quad \delta x_1 = \delta \varphi_3 R_3 = \frac{R_3 \delta x_2}{r_3}, \quad \delta \varphi_4 = \frac{\delta x_2}{R_4}, \quad \delta x_5 = \delta x_2, \quad \delta \varphi_5 = \frac{\delta x_2}{R_5}. \quad (2)$$

2.2. Визначаємо зв'язки між прискореннями. Виразимо всі прискорення через незалежне a_2 .

$$\varepsilon_3 = \frac{a_2}{r_3}, \quad a_1 = \varepsilon_3 R_3 = \frac{R_3 a_2}{r_3}, \quad \varepsilon_4 = \frac{a_2}{R_4}, \quad a_5 = a_2, \quad \varepsilon_5 = \frac{a_2}{R_5} = \frac{a_2}{R_5}. \quad (3)$$

3. Складаємо загальне рівняння динаміки. Загальне рівняння динаміки (1) для розглядуваної системи має вигляд (будемо враховувати, що знак “+” для елементарної роботи буде в тому випадку, коли напрямок сили або моменту співпадає з напрямком можливого переміщення, і знак “-” – якщо не співпадає):

$$(P_1 \sin 60^\circ - F_1^{ін}) \delta x_1 - (M + M_3^{ін}) \delta \varphi_3 - F_2^{ін} \delta x_2 - M_4^{ін} \delta \varphi_4 - (P_5 \sin 60^\circ + F_5^{ін}) \delta x_5 - M_5^{ін} \delta \varphi_5 = 0. \quad (4)$$

4. Перший етап перетворення загального рівняння динаміки. Підставивши зв'язки між можливими переміщеннями (2) у загальне рівняння динаміки (4), отримаємо:

$$\left[(P_1 \sin 60^\circ - F_1^{ін}) \frac{R_3}{r_3} - \frac{(M + M_3^{ін})}{r_3} - F_2^{ін} - \frac{M_4^{ін}}{R_4} - P_5 \sin 60^\circ - F_5^{ін} - \frac{M_5^{ін}}{R_5} \right] \delta x_2 = 0.$$

Оскільки $\delta x_2 \neq 0$, то

$$(P_1 \sin 60^\circ - F_1^{in}) \frac{R_3}{r_3} - \frac{(M + M_3^{in})}{r_3} - F_2^{in} - \frac{M_4^{in}}{R_4} - P_5 \sin 60^\circ - F_5^{in} - \frac{M_5^{in}}{R_5} = 0.$$

Перенесемо сили та моменти інерції у лівий бік, а решту сил та моментів – у правий, одержимо

$$F_1^{in} \frac{R_3}{r_3} + \frac{M_3^{in}}{r_3} + F_2^{in} + \frac{M_4^{in}}{R_4} + F_5^{in} + \frac{M_5^{in}}{R_5} = \frac{R_3}{r_3} P_1 \sin 60^\circ - \frac{M}{r_3} - P_5 \sin 60^\circ. \quad (5)$$

5. Другий етап перетворення загального рівняння динаміки.

5.1. Визначаємо сили та моменти інерції:

$$F_1^{in} = \frac{P_1}{g} a_1 = \frac{R_3}{r_3} \frac{P_1}{g} a_2, \quad F_2^{in} = \frac{P_2}{g} a_2, \quad F_5^{in} = \frac{P_5}{g} a_5 = \frac{P_5}{g} a_2,$$

$$M_3^{in} = J_3 \varepsilon_3 = \frac{P_3}{g} \rho_3^2 \frac{a_2}{r_3}, \quad M_4^{in} = J_4 \varepsilon_4 = \frac{P_4}{g} R_4^2 \frac{a_2}{R_4} = \frac{P_4}{g} R_4 a_2,$$

$$M_5^{in} = J_5 \varepsilon_5 = \frac{P_5}{g} \frac{R_5^2}{2} \frac{a_2}{R_5} = \frac{P_5}{g} \frac{R_5}{2} a_2. \quad (6)$$

5.2. Підставляємо сили та моменти інерції (6) у рівняння (5), отримаємо:

$$\frac{R_3^2}{r_3^2} \frac{P_1}{g} a_2 + \frac{\rho_3^2}{r_3^2} \frac{P_3}{g} a_2 + \frac{P_2}{g} a_2 + \frac{P_4}{g} a_2 + \frac{3}{2} \frac{P_5}{g} a_2 = \frac{R_3}{r_3} P_1 \sin 60^\circ - \frac{M}{r_3} - P_5 \sin 60^\circ,$$

або

$$\left(\frac{R_3^2}{r_3^2} P_1 + \frac{\rho_3^2}{r_3^2} P_3 + P_2 + P_4 + \frac{3}{2} P_5 \right) \frac{a_2}{g} = \frac{R_3}{r_3} P_1 \sin 60^\circ - \frac{M}{r_3} - P_5 \sin 60^\circ.$$

Остаточно

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\left(\frac{R_3}{r_3} P_1 \sin 60^\circ - \frac{M}{r_3} - P_5 \sin 60^\circ \right) g}{\frac{R_3^2}{r_3^2} P_1 + \frac{\rho_3^2}{r_3^2} P_3 + P_2 + P_4 + \frac{3}{2} P_5} = \\ &= \frac{\left(\frac{0,3}{0,1} 40 \cdot 0,866 - \frac{20}{0,1} - 30 \cdot 0,866 \right) \cdot 9,8}{\frac{0,3^2}{0,1^2} 40 + \frac{0,2^2}{0,1^2} 50 + 80 + 60 + \frac{3}{2} 30} = -1,6 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Відповідь: $a_2 = -1,6 \text{ м/с}^2$.

Приклад розв'язку задачі СК2 за допомогою рівняння Лагранжа II роду

Умова задачі. Використовуючи вихідну схему (рис. СК2а.1) та вихідні дані попереднього прикладу знайти (нехтуючи тертям): прискорення вантажу, що має найбільшу вагу.

Розв'язок

1. Будемо розрахункову схему (рис. СК2б.1). Показуємо на схемі можливі переміщення та швидкості тіл системи. Прикладаємо до тіл сили: активні $\vec{P}_i = m_i \vec{g}$, $i = \overline{1,5}$; реакції $\vec{N}_i$, $i = \overline{1,5}$. Запишемо рівняння Лагранжа II роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \quad (q = x_2). \quad (1)$$

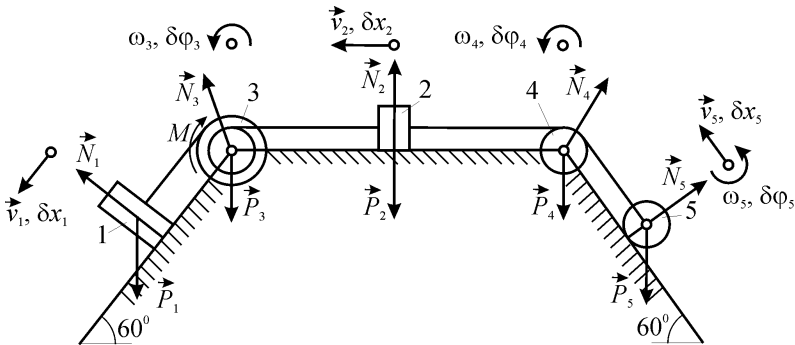


Рис. СК2б.1

2. Визначасмо зв'язки між можливими переміщеннями і швидкостями.

2.1. Визначасмо зв'язки між можливими переміщеннями. Виразимо всі можливі переміщення через незалежне δx_2 .

$$\delta \varphi_3 = \frac{\delta x_2}{r_3}, \quad \delta x_1 = \delta \varphi_3 R_3 = \frac{R_3 \delta x_2}{r_3}, \quad \delta \varphi_4 = \frac{\delta x_2}{R_4}, \quad \delta x_5 = \delta x_2, \quad \delta \varphi_5 = \frac{\delta x_2}{R_5}. \quad (2)$$

2.2. Визначасмо зв'язки між швидкостями. Виразимо всі швидкості через незалежне v_2 .

$$\omega_3 = \frac{v_2}{r_3}, \quad v_1 = \omega_3 R_3 = \frac{R_3 v_2}{r_3}, \quad \omega_4 = \frac{v_2}{R_4}, \quad v_5 = v_2, \quad \omega_5 = \frac{v_5}{R_5} = \frac{v_2}{R_5}. \quad (3)$$

3. Визначаємо кінетичну енергію системи:

$$T = \sum_{i=1}^5 T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5. \quad (4)$$

Тіло 1 рухається поступально, тому

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2. \quad (5)$$

Тіло 2 рухається поступально, тому

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (6)$$

Тіло 3 – ступінчастий шків з радіусом інерції відносно осі обертання ρ_3 – обертається навколо нерухомої осі, тому

$$T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 = \{J_3 = m_3 \rho_3^2\} = \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 \omega_3^2. \quad (7)$$

Тіло 4 – барабан, маса якого розподілена по ободу – обертається навколо нерухомої осі, тому

$$T_4 = \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2 = \{J_4 = m_4 R_4^2\} = \frac{1}{2} m_4 R_4^2 \omega_4^2. \quad (8)$$

Тіло 5 – рухомий блок, який є суцільним однорідним циліндром – рухається плоскопаралельно, тому

$$T_5 = \frac{1}{2} (m_5 v_5^2 + J_5 \omega_5^2) = \{J_5 = m_5 R_5^2 / 2\} = \frac{m_5}{2} \left(v_5^2 + \frac{R_5^2 \omega_5^2}{2} \right). \quad (9)$$

Підставляючи (5) – (9) в (4) та враховуючи зв'язки для швидкостей (3), кінетична енергія системи матиме вигляд:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left[m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 \rho_3^2 \omega_3^2 + m_4 R_4^2 \omega_4^2 + m_5 \left(v_5^2 + \frac{R_5^2 \omega_5^2}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ m_1 \left(\frac{R_3 v_2}{r_3} \right)^2 + m_2 v_2^2 + m_3 \rho_3^2 \left(\frac{v_2}{r_3} \right)^2 + m_4 R_4^2 \left(\frac{v_2}{R_4} \right)^2 + m_5 \left[v_2^2 + \frac{R_5^2}{2} \left(\frac{v_2}{R_5} \right)^2 \right] \right\} = \\ &= \frac{v_2^2}{2} \left(m_1 \frac{R_3^2}{r_3^2} + m_2 + m_3 \frac{\rho_3^2}{r_3^2} + m_4 + \frac{3}{2} m_5 \right) = \frac{1}{2} J_{36} v_2^2 = \frac{1}{2} J_{36} \dot{x}_2^2, \quad (10) \end{aligned}$$

де

$$J_{36} = m_1 \frac{R_3^2}{r_3^2} + m_2 + m_3 \frac{\rho_3^2}{r_3^2} + m_4 + \frac{3}{2} m_5$$

- зведений момент інерції системи.

4. Визначаємо узагальнену силу. Узагальнену силу визначимо через елементарну роботу системи δA :

$$Q = \delta A / \delta q, \quad (q = x_2). \quad (11)$$

Елементарна робота системи має вигляд (будемо враховувати, що знак “+” для елементарної роботи буде в тому випадку, коли напрямок сили або моменту співпадає з напрямком можливого переміщення, і знак “–” – якщо не співпадає):

$$\begin{aligned} \delta A &= m_1 g \sin 60^\circ \delta x_1 - M \delta \varphi_3 - m_5 g \sin 60^\circ \delta x_5 = \\ &= m_1 g \sin 60^\circ \frac{R_3 \delta x_2}{r_3} - M \frac{\delta x_2}{r_3} - m_5 g \sin 60^\circ \delta x_2 = \\ &= \left[\left(\frac{R_3}{r_3} m_1 - m_5 \right) g \sin 60^\circ - \frac{M}{r_3} \right] \delta x_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Підставляючи (12) в (11) отримаємо

$$Q = \left(\frac{R_3}{r_3} m_1 - m_5 \right) g \sin 60^\circ - \frac{M}{r_3}. \quad (13)$$

5. Визначаємо прискорення a_2 .

5.1. Визначаємо ліву частину рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = J_{36} \dot{x}_2, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = J_{36} \ddot{x}_2. \quad (14)$$

5.2. Складаємо рівняння Лагранжа II роду та визначаємо невідому. Підставляючи (14) та (13) в (1) отримаємо:

$$J_{36} \ddot{x}_2 = Q,$$

де

$$\begin{aligned} J_{36} &= 4 \frac{0,3^2}{0,1^2} + 8 + 5 \frac{0,2^2}{0,1^2} + 6 + \frac{3}{2} 3 = 74,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ Q &= \left(\frac{0,3}{0,1} 4 - 3 \right) \cdot 9,8 \cdot 0,866 - \frac{20}{0,1} \approx -123,62 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Остаточно

$$a_2 = \frac{Q}{J_{36}} = \frac{-123,62}{74,5} \approx -1,6 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $a_2 = -1,6 \text{ м/с}^2$.

Задача СКЗ – Інтегрування диференціального рівняння вільних коливань механічної системи з одним ступенем вільності за допомогою ЕОМ

Умова задачі. Механічна система з одним ступенем вільності (рис. СКЗ.0 – СКЗ.9), може здійснювати коливання відносно положення рівноваги. В початковий момент часу ($t_0=0$) система була виведена із стану рівноваги і швидкості всіх її точок дорівнюють нулю. Далі система починає коливатися під дією тільки консервативних (потенціальних) сил. Необхідні дані для розв'язку приведені в табл. СКЗ.

На рис. СКЗ.1 та СКЗ.5 показані пружини, сила пружності F_{np} яких зв'язана з деформацією λ співвідношенням $F_{np}(\lambda)=c\lambda+\alpha\lambda^3$. На інших рисунках показані пружини, для яких залежність сили пружності F_{np} від деформації λ – лінійна, тобто $F_{np}=c\lambda$. Вважаємо, що в стані спокою пружини отримують початкову деформацію f . Схеми механічних систем (рис. СКЗ.0 – СКЗ.9) приведені для стану спокою. Кочення тіл у всіх випадках відбувається без ковзання. Тіла, радіус інерції яких не вказаний, вважати однорідними, суцільними циліндрами. При розрахунках прийняти, що $R=0,2$ м; $l=0,5$ м; $f=0,05$ м; $\alpha=0,02$ Н/см³; $\beta=30^\circ$.

Знайти:

1. диференціальне рівняння коливального руху системи;
2. за допомогою ЕОМ знайти розв'язок диференціального рівняння використовуючи початкові умови руху системи;
3. визначити циклічну частоту та період коливань.

Таблиця СКЗ

Номер умови	m_1 , кг	m_2 , кг	c , Н/см
0	10	5	10
1	15	8	12
2	20	12	15
3	12	14	20
4	8	16	25
5	16	6	30
6	14	7	20
7	9	9	15
8	18	11	12
9	11	15	18

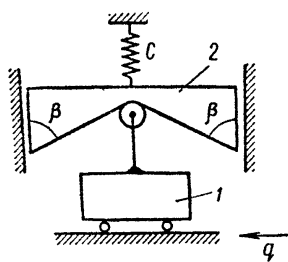


Рис. СКЗ.0

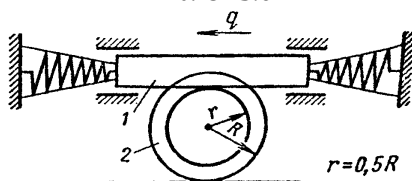


Рис. СКЗ.2

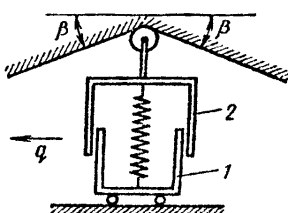


Рис. СКЗ.4

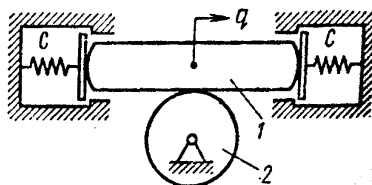


Рис. СКЗ.1

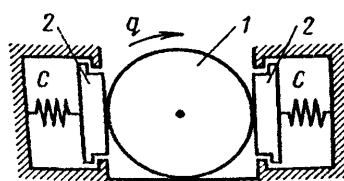


Рис. СКЗ.3

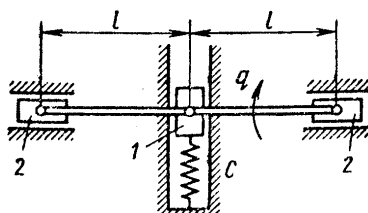


Рис. СКЗ.5

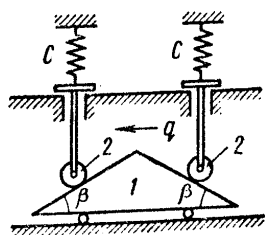


Рис. СКЗ.6

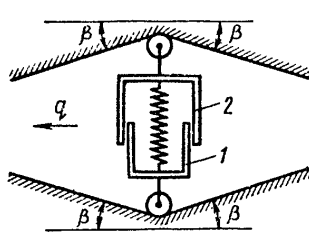


Рис. СКЗ.7

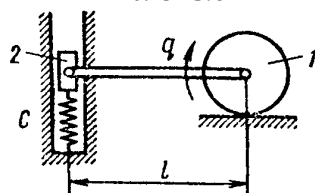


Рис. СКЗ.8

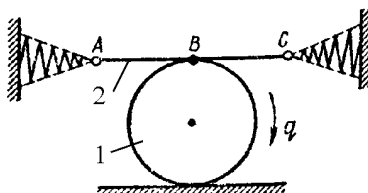


Рис. СКЗ.9

Методичні рекомендації до розв'язання задачі

При розв'язанні задачі для знаходження диференціального рівняння коливального руху скористатися **рівнянням Лагранжа II роду**. Необхідно також врахувати, що кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій тіл, що входять до системи. Для встановлення залежності між швидкостями точок тіла, що рухається плоскопаралельно, або між його кутовою швидкістю і швидкістю центра інерції скористатися поняттям миттєвого центру швидкостей (кінематика).

Приклад розв'язку задачі СКЗ

Умова задачі. Механічна система подана на рис. СКЗа. При поступальному русі тіла 1 відносно напрямних, диск 2 котиться без ковзання по горизонтальній поверхні. Система утримується в положенні рівноваги двома пружинами, які стиснуті в стані спокою на величину f . Сили пружності пружин передаються на тіло 1 через шайби 3. Переміщення правої шайби обмежено лівим упором, а лівої – правим. Відстань між упорами рівна довжині тіла 1. Тому при переміщенні тіла 1 від положення рівноваги вліво на нього діє сила пружності тільки від лівої пружини (рис. СКЗб), а при переміщенні вправо від положення рівноваги – тільки правої.

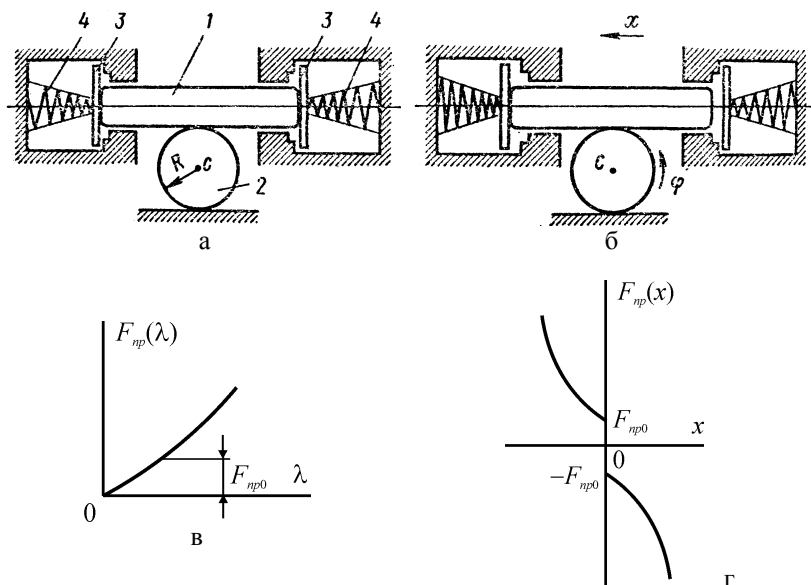


Рис. СКЗ

Сила пружності F_{np} кожної пружини зв'язана з її деформацією λ співвідношенням $F_{np}(\lambda) = c\lambda + \alpha\lambda^3$ (рис. СКЗв). Залежність сили $F_{np}(x)$, що діє на тіло 1 з боку пружин подана на рис. СКЗг, де F_{np0} – значення сили пружності в стані спокою, а x – зміщення тіла 1 по горизонталі. При вирішенні задачі не враховувати маси шайб 3 і сили опору руху.

Дано: $m_1 = 20 \text{ кг}$; $m_2 = 40 \text{ кг}$; $m_3 = 5 \text{ кг}$; $c = 10 \text{ Н/см}$; $\alpha = 0,03 \text{ Н/см}^3$; $R = 0,3 \text{ м}$; $f = 0,1 \text{ м}$; $t_0 = 0$; $q_0 = 0,5 \text{ рад}$; $\dot{q}_0 = 0$.

Знайти:

1. диференціальне рівняння коливального руху системи;
2. за допомогою ЕОМ знайти розв'язок диференціального рівняння використовуючи початкові умови руху системи;
3. визначити циклічну частоту та період коливань.

Розв'язок

Для отримання диференціального рівняння руху системи скористаємося рівнянням Лагранжа II роду для консервативних систем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}, \quad (1)$$

де T і Π - кінетична і потенціальна енергія системи. В якості узагальненої координати q приймаємо кут повороту φ диска 2 ($q = \varphi$).

1. Визначаємо кінетичну енергію системи.

$$T = T_1 + T_2. \quad (2)$$

Тіло 1 рухається поступально, тому

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2. \quad (3)$$

Тіло 2 – суцільний однорідний циліндр – рухається плоскопаралельно, тому

$$T_2 = \frac{1}{2} (m_2 v_C^2 + J_2 \omega_2^2) = \left\{ J_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2} \right\} = \frac{m_2}{2} \left(v_C^2 + \frac{R_2^2 \dot{\varphi}^2}{2} \right). \quad (4)$$

Підставляючи (3) і (4) в (2) та враховуючи зв'язки для швидкостей

$$v_C = R\dot{\varphi} = R\dot{q}, \quad \dot{x} = 2R\dot{q}$$

кінетична енергія системи матиме вигляд:

$$T = \frac{1}{2} \left[m_1 \dot{x}^2 + m_2 \left(v_C^2 + \frac{R_2^2 \dot{\varphi}^2}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad (5)$$

де

$$a = (4m_1 + 1,5m_2)R^2, \quad a = 12,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

2. Визначаємо потенціальну енергію системи. Потенціальну енергію системи визначаємо, як роботу сил пружності на переміщенні із відхиленого положення в нульове.

$$\Pi(x) = \int_x^0 P(x)dx = \int_0^x (-P(x))dx. \quad (6)$$

Залежність $P(x)$ (рис. СКЗг) визначається виразом:

$$P(x) = \begin{cases} -P_0 - b_1x - b_2x^2 - \alpha x^3, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ P_0 - b_1x + b_2x^2 - \alpha x^3, & x < 0. \end{cases} \quad (7)$$

де

$$P_0 = f(c + \alpha f^2), \quad b_1 = c + 3\alpha f^2, \quad b_2 = 3\alpha f.$$

Вираз (7) можна подати у більш компактному вигляді, якщо скористатися функцією $x/|x|$, яка приймає значення +1 при $x > 0$ і -1 при $x < 0$. Нехай значення $x/|x|$ при $x = 0$ дорівнює нулю. Тоді залежність $P(x)$ набуде вигляду:

$$P(x) = -(P_0 + b_2x^2) \frac{x}{|x|} - b_1x - \alpha x^3. \quad (8)$$

Підставляючи (8) в (6), отримуємо вираз для $\Pi(x)$:

$$\Pi(x) = (P_0 + \frac{b_2}{3}x^2)|x| + \frac{b_1}{2}x^2 + \frac{\alpha x^4}{4}. \quad (9)$$

Виразимо потенціальну енергію, як функцію від q , враховуючи, що $x = 2Rq$, тоді вираз (9) набуде вигляду:

$$\Pi(q) = (2RP_0 + \frac{8b_2R^3}{3}q^2)|q| + 2R^2b_1q^2 + 4\alpha R^4q^4. \quad (10)$$

Функція (10) має похідну

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = F(q) = (2RP_0 + 8b_2R^3q^2) \frac{q}{|q|} + 4R^2b_1q + 16\alpha R^4q^3, \quad (11)$$

де

$$P_0 = cf + \alpha f^3 = 10^3 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 10^5 \cdot 0,1^3 = 130 \text{ Н};$$

$$2RP_0 = 2 \cdot 0,3 \cdot 130 = 78 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad b_1 = 1900 \text{ Н/м}; \quad 4R^2b_1 = 684 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$16\alpha R^4 = 16 \cdot 0,3 \cdot 10^5 \cdot 0,3^4 = 3888 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad 8R^3b_2 = 1944 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Остаточно, функція $F(q)$ приймає вигляд:

$$F(q) = (78 + 1944q^2) \frac{q}{|q|} + 684q + 3888q^3. \quad (12)$$

При $q = 0$ отримуємо, що $F(q) = 0$, так як в цьому положенні сили, що діють на тіла системи, взаємно зрівноважені.

3. Знаходимо диференціальне рівняння руху. Підставляючи (5) і (12) в рівняння (1), отримаємо нелінійне диференціальне рівняння руху системи:

$$a\ddot{q} + F(q) = 0,$$

або

$$12,6\ddot{q} + (78 + 1944q^2) \frac{q}{|q|} + 684q + 3888q^3 = 0. \quad (13)$$

Для визначення руху системи слід чисельно проінтегрувати на ЕОМ рівняння (13) при початкових умовах: $t_0 = 0$ с; $q_0 = 0,5$ рад; $\dot{q}_0 = 0$ рад/с. Результати обчислень представлені на рис. СКЗд, де на графіку t - час (с), $q(t)$ - кут (рад); $dq(t)/dt$ - швидкість (рад/с), $d^2q(t)/dt^2$ - прискорення (рад/с²).

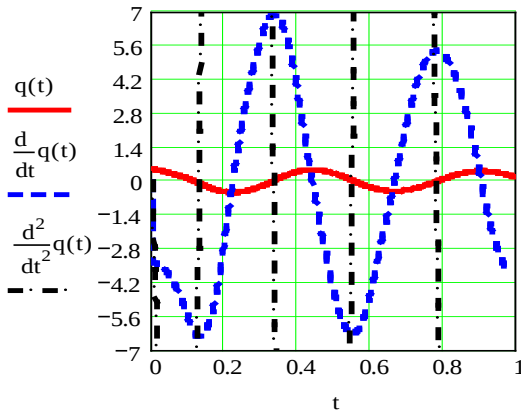


Рис. СКЗд

Використовуючи графік (рис. СКЗд) легко визначити одну четверту періоду коливань $0,25T$: в момент $t_* = 0,25T$ значення q обертається в нуль. Так як $t_* = 0,114$ с, то період коливань складає $T = 0,456$ с, а циклічна частота $k = 13,77$ с⁻¹.

Теоретичні питання з розділу "Динаміка"

Для розв'язання задач з динаміки необхідно засвоїти такі теми курсу теоретичної механіки.

Динаміка точки

1. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки у векторній, координатній і натуральній формах.
2. Дві основні задачі динаміки точки (пряма, обернена). Послідовність їх розв'язання.
3. Сила інерції матеріальної точки. Принцип Даламбера для вільної і невільної матеріальної точки. Принцип Даламбера при відносному русі матеріальної точки. Стан відносного спокою.
4. Теорія прямолінійних коливань матеріальної точки. Пружна сила, сила в'язкого опору середовища, збурна сила. Положення статичної рівноваги. Коливальний рух.
5. Вільні коливання матеріальної точки при відсутності сил опору. Амплітуда, частота, фаза, період вільних коливань.
6. Затухаючі коливання матеріальної точки. Декремент затухаючих коливань.
7. Вимушені коливання матеріальної точки. Явище резонансу.

Загальні теореми динаміки

8. Центр мас матеріальної системи. Координати центра мас. Теорема про рух центра мас матеріальної системи.
9. Кількість руху матеріальної точки. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній і інтегральній формах.
10. Кількість руху матеріальної (механічної) системи. Теорема про зміну кількості руху матеріальної системи в диференціальній і інтегральній формах.
11. Момент кількості руху матеріальної точки. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки.
12. Момент кількості руху матеріальної системи (кінетичний момент). Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної системи.
13. Кінетичний момент твердого тіла. Тензор інерції.
14. Властивості тензора інерції.
15. Осьові моменти інерції деяких тіл – приклади обчислення.
16. Диференціальні рівняння поступального, обертального і плоско-паралельного рухів абсолютно твердого тіла.
17. Елементарна робота сили і робота сили на кінцевому переміщенні (повна робота сили). Визначення роботи у векторній, координатній і натуральній формах.

18. Кінетична енергія матеріальної точки. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки у диференціальній і інтегральній формах.
19. Кінетична енергія матеріальної системи. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи у диференціальній і інтегральній формах.

Аналітична механіка

20. Математичне означення в'язей. Класифікація в'язей (стаціонарні, нестаціонарні, утримуючі, неутримуючі, голономні, неголономні).
21. Дійсні і можливі переміщення механічної системи. Обмеження, які накладають в'язі на можливі переміщення.
22. Ідеальні і неідеальні в'язі. Приклади.
23. Принцип можливих переміщень.
24. Загальне рівняння динаміки.
25. Узагальнені координати, швидкості, сили. Узагальнене рівняння статyki.
26. Рівняння Лагранжа II роду.
27. Рівняння Лагранжа II роду для консервативних і дисипативних систем.

Література

1. **Теоретическая механика:** Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных специальностей высших учебных заведений / Под ред. С.М.Тарга – 4-е изд. – М.: Высш. шк., 1989. 111 с.
2. **Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике:** Учебное пособие для технических вузов (под ред. Яблонского А.А.). – М.: Интеграл-Пресс, 2006. 384 с.
3. *Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.* – М.: “Высшая школа”, 1986. - 416 с.
4. *Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики.* – СПб.: Издательство “Лань”, 2001. 768 с.
5. *Павловський М.А. Теоретична механіка.* – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
6. *Кільчевський М. О. Курс теоретичної механіки.* – Т. 1–2. – К., 1955–1957.
7. *Путята Т.В., Фрадлін Б.Н. Методика розв'язування задач з теоретичної механіки.* –К.: “Радянська школа”, - 1955. 391 с.

Навчально-методичне видання

Теоретична механіка Спецкурс

**методичні вказівки і контрольні завдання
для студентів будівельних спеціальностей**

к.ф.-м.н., доц. Володимир Васильович Пирогов,
д.т.н., проф. Філімоніхін Геннадій Борисович,

Комп'ютерний набір
кафедра ДМ та ПМ
т. (0522) 597-547

Підп. до друку . Формат 60x84 1/16 (A5). Папір друк №3. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. . Ум.фарбо-відб. . Облік.-вид.арк. . Тираж 100 прим.
Зам.№

Центральноукраїнський національний технічний університет
25006, м. Кіровоград. пр. Університетський, 8