МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ БУДІВНИЦТВА, ТРАНСПОРТУ ТА ЕНЕРГЕТИКИ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ В ТРАНСПОРТНИХ ПРОЦЕСАХ: ЕЛЕМЕНТИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник для самостійної роботи студентів

КРОПИВНИЦЬКИЙ – 2026

Методи прикладної математики в транспортних процесах: Елементи дискретної математики. Навчальний посібник для самостійної роботи студентів / Філімоніхіна І.І., Семенюта М.Ф., Кривоблоцька Л.М., Гуцул В.І., Якименко С.М. – Кропивницький: ЦНТУ, 2026 р. –138 с.

Укладачі:
Ірина Іванівна Філімоніхіна - канд. фіз.-матем. наук, доц.
Марина Фролівна Семенюта - канд. фіз.-матем. наук, доц.
Лариса Миколаївна Кривоблоцька- канд. фіз.-матем. наук, доц.
Сергій Миколайович Якименко - канд. фіз.-матем. наук, доц.
Василь Іванович Гуцул - канд. техн. наук, доц.

Рецензенти:
доктор технічних наук, професор, професор кафедри експлуатації та ремонту машин ЦНТУ В.В. Аулін
кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики, НТУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» Ж.Т. Черноусова

Рекомендовано до друку Вченою радою
ЦНТУ Міністерства освіти та науки України.
Протокол № 10 від 25 травня 2026 р.

Зміст

ПЕРЕДМОВА

Дискретна математика – це розділ сучасної математики, в якому вивчають властивості математичних об'єктів дискретного характеру. Вона є теоретичною основою для моделювання, проектування та оптимізації складних систем.

Курс дискретної математики виступає базою для таких спеціальних дисциплін як обчислювальна техніка, інфокомунікаційні системи і мережі, основи теорії кодування, цифрова обробка сигналів, інженерна та комп'ютерна графіка та інших. Для студентів спеціальності «Транспортні технології» апарат дикретної математики є інструментом для розв'язання практичних задач логістики, управління пасажирськими та вантажними перевезеннями, а також організації руху на транспортних мережах.

В даному посібнику розглядаються елементи теорії множин, математичної логіки та теорії графів. Це ті відомості, які будуть необхідні для подальшого використання при вивченні спеціальних дисциплін спеціалізації «Логістика на автомобільному транспорті».

ТЕМА 1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1. Основні поняття теорії множин

Математичне поняття множини формувалося на підставі інтуїтивних уявлень про сукупності різних предметів. У повсякденному житті і практичній діяльності ми часто використовуємо різні сукупності об’єктів, предметів, понять, чисел, символів тощо. Наприклад, сукупність студентів певного навчального закладу, аксіом геометрії, число гравців університетської футбольної команди, літер алфавіту. Одним з основоположників теорії множин є Георг Кантор. Він так казав про множину: « Множина – це багато, що мислиться як єдине ціле».

Теорія множин є основним розділом дискретної математики та комп’ютерних наук в цілому, функціонального аналізу, топології, загальної алгебри. Теорія множин широко застосовується в програмуванні для побудови систем керування баз даних, для організації роботи комп’ютерних мереж, мережі Інтернет.

Інтуїтивне поняття множини: *множина* – сукупність деяких різних об’єктів, що мають спільні властивості і представляють собою єдине ціле.

Елементами множини називаються об’єкти, з яких складається множина.

Для позначення множин використовують великі латинські літери $A, B, X, Y, \ldots$, а для їхніх елементів – малі латинські літери $a, b, x, y \ldots$.

Порожньою множиною називається множина, що не містить жодного елемента.

Для її позначення використовують символ $\emptyset$.

До основних числових множин, які розглядаються у математиці, відносять:

1. Множина натуральних чисел: $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$.

2. Множина цілих чисел: $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

3. Множина раціональних чисел: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}$.

4. Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ (множина усіх чисел числової прямої).

Задати множину означає вказати правило, яке дозволяє з'ясувати, чи є деякий об`єкт елементом даної множини.

Існують такі способи задання множин:

1) безпосередній перелік усіх елементів множини;
2) задання за допомогою характеристичної властивості;
3) графічний.

Розглянемо окремо кожен спосіб.

Перший спосіб – це найпростіший спосіб задати множину.

Приклад 1.1.1.

$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, $N = \{1,2,3, \cdots\}$.

Фігурні дужки в такому записі означають, що порядок розташування елементів у множині несуттєвий.

Для другого способу використовують такий запис: $X = \{x \mid p(x)\}$ або $X = \{x : p(x)\}$. Цей запис означає, що розглядаються елементи множини X, що задовольняють деяку умову $p(x)$.

Приклад 1.1.2.

$A = \{x \mid x - \textit{просте число}\}$ $\left(A = \{2,3,5,7,11,13,17,\dots\}\right)$;

$B = \{x \mid x \in R, x^2 + 2x - 15 = 0\}$ $\left(B = \{-5,3\}\right)$.

Тут для множин A та B спершу записані множини за допомогою характеристичної властивості, а потім – переліком всіх елементів множини.

Для запису того факту, що елемент належить(не належить) множині, використовують символи $\in$ ($\notin$).

Приклад 1.1.3.

$A = \{1,2,3\}$, тоді $3 \in A, 7 \notin A$.

Множина А називається *підмножиною множини B*, якщо кожен елемент множини А належить також і множині В.

Позначення: $A \subset B$.

Приклад 1.1.4.

$A = \{1,3,5\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, тоді $A \subset B$.

Множини A і B називаються рівними, якщо вони складаються із однакових елементів. В протилежному випадку множини називаються *нерівними.*

Позначення: $A = B$ $(A \neq B)$.

Приклад 1.1.5.

$A = \{1,3,5\}$, $B = \{3,1,5\}$, тоді $A = B$.

Очевидно, що $A = B$ тоді і тільки тоді, коли $A \subset B$ і $B \subset A$.

Для розгляду графічного способу задання множин вводять поняття *універсальної множини.*

Якщо всі множини, що розглядаються в деякій задачі, є підмножинами деякої іншої множини U, то вона називається *універсальною множиною* для даної задачі. Для позначення універсальної множини використовують символ U.

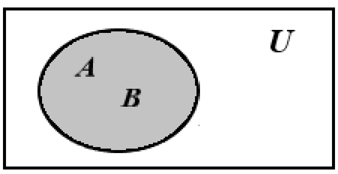
Для будь-якої множини X: $X \subset U$.

Наприклад, при вивченні числових множин роль універсальної множини може грати множина комплексних чисел $\mathbb{C}$ (або деякі її підмножини). У теорії чисел універсальна множина збігається або із множиною всіх цілих чисел $\mathbb{Z}$, або з множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$; в математичному аналізі універсальна множина – це множина дійсних чисел $\mathbb{R}$.

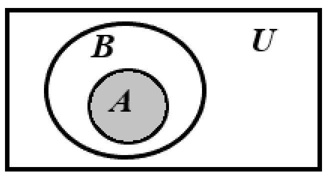
Для графічного задання множин використовують *діаграми Ейлера-Венна:* універсальну множину U зображають у вигляді прямокутника, а інші множини – у вигляді кругів всередині цього прямокутника.

Наприклад, діаграми Ейлера Венна для ілюстрації понять $A = B$ і $A \subset B$ мають вигляд:

A=B



A⊂B



Множина називається скінченною, якщо кількість її елементів виражається деяким числом.

Множина, яка не є скінченною, називається *нескінченною.*

Злічена множина – це множина, усі елементи якої можна перенумерувати: $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.

Потужністю скінченої множини називається кількість елементів у цій множині.

Потужність множини A позначають символом $|A|$. Нехай, наприклад, $A=\{2,3,7,15\}$, тоді $|A|=4$.

Відповідність між елементами множин A та B називається *взаємно однозначною, якщо* кожному елементу множини A відповідає єдиний елемент множини B і кожному елементу множини B відповідає єдиний елемент множини A.

Приклад 1.1.6. Відображення $f: x \to 3x+1$ встановлює взаємно однозначну відповідність між елементами множин $A=\{1,2,3\}$ та $B=\{4,7,10\}$.

Дві множини називаються рівнопотужними (еквівалентними), якщо між їх елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Той факт, що множини A та B є рівнопотужними, будемо записувати у вигляді:

$$|A|=|B|.$$

Відношення рівнопотужності має наступні властивості:

1. Якщо $|A|=|B|$, то $|B|=|A|$.
2. Якщо $|A|=|B|$ і $|B|=|C|$, то $|A|=|C|$.

Приклад 1.1.7. Множини $A=\{1,2,3,\dots,n\}$ та $B=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ є рівнопотужними. Відповідність встановлює відображення $f: k \to a_k$.

Скінченні множини рівнопотужні тоді і тільки тоді, коли вони містять однакову кількість елементів.

Приклад 1.1.8. Множина парних чисел рівнопотужна множині цілих чисел. Відповідність встановлює відображення $f: 2n \to n, n \in \mathbb{N}$.

Множина A називається зліченною, якщо вона рівнопотужна множині натуральних чисел.

В теорії множин доводиться, що множини цілих чисел, раціональних чисел є зліченними, множина дійсних чисел є незліченною.

Справедливі також такі твердження:

а) у кожної нескінченної множини є зліченна підмножина;

б) будь-яка підмножина зліченної множина або скінченна, або зліченна;

в) об'єднання скінченної та зліченної множин є зліченною множиною;

г) об'єднання скінченної кількості зліченних множин — зліченна множина.

Множина дійсних чисел та будь-яка рівнопотужна їй множина називається *континуальною.* Іншими словами, такі множини мають потужність континуум.

1.2. Підмножини

Будь-яку частину A′ множини A, що вибрана за певною ознакою, називають *підмножиною* і позначають $A' \subset A \Leftrightarrow a \in A' \Rightarrow a \in A$.

Також запис $A \subset B$ може називатися «включення» і читатися «A міститься (входить) у B», «B містить A».

Приклад.1.2.1.

Включення $A \subset B$ правильне для множин A = { 2,4}, B={1,2,3,4 }.

Приклад 1.2.2.

1) Множина A складається з усіх чотирикутників;

2) Множина B складається з усіх трапецій;

3) Множина C складається з усіх паралелограмів;

4) Множина D складається з усіх прямокутників;

5) Множина E складається з усіх квадратів.

Кожна наступна множина є підмножиною попередньої:

$$A \supset B \supset C \supset D \supset E.$$

Приклад 1.2.3.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

З визначення підмножини бачимо, що будь-яка множина є підмножиною самої себе: $A \subset A$.

Будемо вважати, що порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини: $\varnothing \subset A$.

Множини $\varnothing$ і A називаються *тривіальними підмножинами A*.

Підмножина називається *власною (нетривіальною) підмножиною* множини A, яка не є порожньою та не збігається з A.

Множина всіх підмножин даної множини називається *булеаном* і позначається $\mathcal{B}(A)$.

Наприклад, якщо множина $A = \{1, 2, 3\}$, то

$$\mathcal{B}(A) = \{\{\varnothing\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Потужність булеану визначається за формулою:

$$|\mathcal{B}(A)| = 2^{|A|}.$$

Для нескінчених множин справедливе таке твердження:

Потужність булеану довільної зліченої множини є континуум.

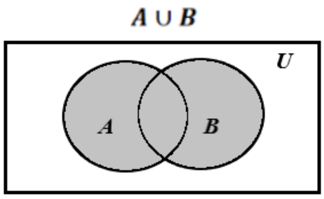
Загалом, потужність булеану множини більша за потужність цієї множини.

1.3. Операції над множинами

Діаграми Ейлера-Венна зручно використовувати для ілюстрації операцій над множинами. Розглянемо ці операції та їх графічне зображення. При цьому результуючі множини на діаграмах Ейлера-Венна будемо для наглядності зафарбовувати сірим кольором.

Об'єднанням множин A і B називається множина A ∪ B, що складається з елементів, які належать хоча б одній із цих множин:

$$A \cup B = \{x \in A \text{ або } x \in B\}.$$



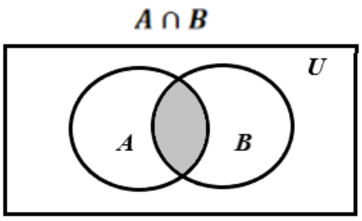
Аналогічним чином визначають об'єднання довільної скінченної кількості множин.

Приклад 1.3.1.

A ={1,2,3,4}, B ={3,4,5,6}, тоді *A* ∪ *B ={1,2,3,4,5,6}.*

Перетином множин A і B називається множина A ∩ B , що складається з елементів, які одночасно належать обом цим множинам:

$$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$$



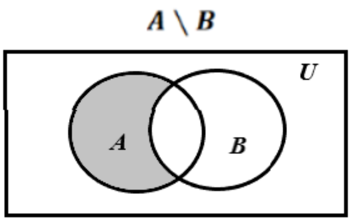
.

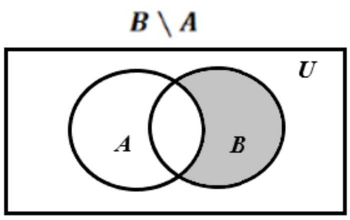
Аналогічним чином визначають перетин довільної скінченної кількості множин.

Приклад 1.3.2.

A ={1,2,3,4}, B ={3,4,5,6}, тоді *A* ∩ *B ={3,4}.*

Різницею множин A і B називається множина A \ B, що складається з тих елементів множини A, які не належать множині B:





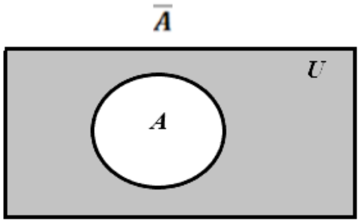
$$A \setminus B = \{x | x \in A, x \notin B\}.$$

Приклад 1.3.3.

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, тоді $A \setminus B = \{1,2\}$, $B \setminus A = \{5,6\}$.

Доповненням множини A називається така множина $\overline{A}$, що складається з тих елементів універсальної множини U, які не належать множині A:

$$\overline{A} = \{x | x \in U, \quad x \notin A\}.$$



Очевидно, $\bar{A}$=$U \setminus$ A, $\bar{\bar{A}} = A$.

Приклад 1.3.4.

$U = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,3,5\}$, тоді $\overline{A}$={2,4}, $A \setminus B = \{1,2\}$.

Симетричною різницею множин A і B називається така множина $A \Delta B$, що визначається наступним чином:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) .$$

Очевидно, симетричну різницю можна визначити так:

$$(A \cup B) \cap (A \cap B)$$

Розглянемо тепер властивості операцій над множинами. Нехай A, B і C – довільні підмножини універсальної множини U.

I. Закони комутативності:

(1) $A \cup B = B \cup A$;

(2) $A \cap B = B \cap A$;

(3) $A \Delta B = B \Delta A$.

II. Закони асоціативності:

(1) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

(2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(3) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

III. Закони дистрибутивності:

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(2) $A \cup (B \cap C)= (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(3) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

(4) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;

(5) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

IV. Закони ідемпотентності:

(1) $A \cup A = A$;

(2) $A \cap A = A$.

V. Закон виключеного третього:

(1) $A \cup \bar{A} = U$.

VI. Закон протиріччя:

(1) $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

VII. Закон подвійного заперечення:

(1) $\bar{\bar{A}} = A$.

VIII. Закони двоїстості де Моргана:

(1) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

(2) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Наведені закони корисні при перетворенні і спрощенні виразів, а також використовуються для доведення рівностей з множинами. Так, користуючись наведеними законами, операції різниці та симетричної різниці можна представити через операції обʼєднання, перетину та доповнення.

$A \setminus B = A \cap B$,

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B) \cup (B \cap A)$,

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)$.

Приклад 1.3.5. Нехай $U = \{5, 6, \dots, 30\}$ – універсальна множина, $A = \{6, 8, 9, 10, 12, 14, 20, 21, 22, 27\}$, $B = \{3x - 6 \mid x - \textit{непарне},\ x \in U\}$, $C = \{x \mid x + 4 - \textit{просте число}\}$.

Вказати перелік елементів множини $D = B \setminus \left(A \Delta \overline{C}\right)$.

Розв'язання

1) Задамо множини B та C переліком їх елементів:

B = {9,15,21,27} , C = {7,9,13,15,19,25,27}.

2) Послідовно виконаємо операції над множинами:

а) $\overline{C}$ = {5,6,8,10,11,12,14,16,17,18,20,21,22,23,24,26,28,29,30}.

б) Знайдемо симетричну різницю множини A та $\overline{C}$ C за формулою:

$$A \Delta \overline{C} = \left(A \setminus \overline{C}\right) \cup \left(\overline{C} \setminus A\right).$$

Оскільки $A\setminus\overline{C}=\{9,27\}$, $\overline{C}\setminus A=\{5,11,16,17,18,23,24,26,28,29,30\}$, то

$$A\Delta\overline{C}=\{5,9,11,16,17,18,23,24,26,27,28,29,30\}.$$

в) Знайдемо різницю множин B та $A\Delta\overline{C}$:

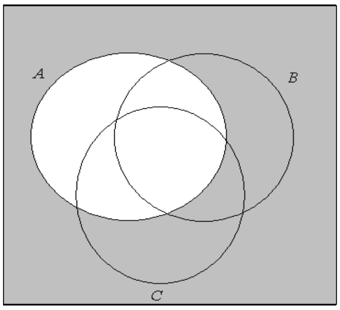
$$B\setminus\left(A\Delta\overline{C}\right)=\{15,21\}.$$

Відповідь: $D=\{15,21\}$.

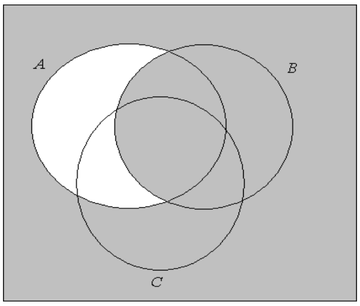
Прилад 1.3.6. На діаграмі Ейлера-Венна зобразити множину $C\setminus\overline{\overline{A}\cup B}$.

Розв'язання

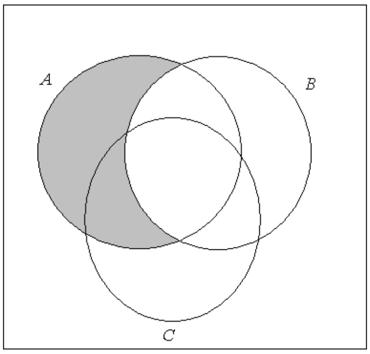
Зобразимо діаграми Венна для всіх операцій алгебри множин, які входять у формулу, в порядку виконання:



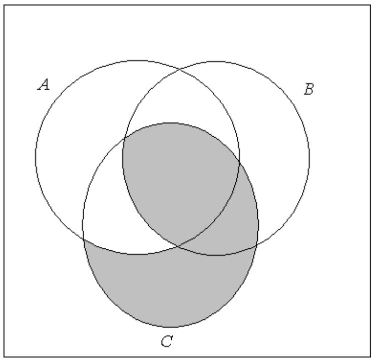
$\overline{A}$



$\overline{A}\cup B$



$\overline{\overline{A}\cup B}$



$C\setminus\overline{\overline{A}\cup B}$

Приклад 1.3.7.

Знайти множину точок площини, координати яких задовольняють таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} x-2y\le 4, \\ x^2+y^2\le 9. \end{cases}$$

Розв'язання

Побудуємо першу множину $x-2y\le 4.$ Це півплощина, границя цієї півплощини – пряма $x-2y=4.$ Складемо таблицю для побудови прямої:

x	0	4
y	-2	0

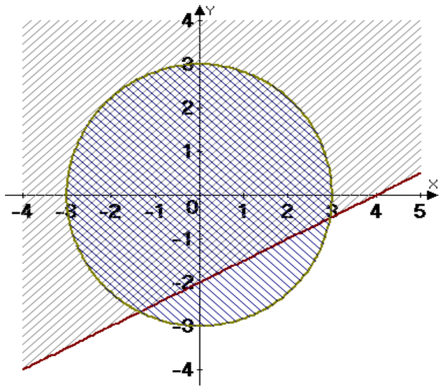
Перевіримо, чи належить точка О(0;0) півплощині $x-2y\le 4$, для цього підставляємо координати точки у рівняння півплощини:

$$0-2\cdot 0\le 4;\quad 0\le 4$$

Нерівності вірні, тому точка О(0;0) належить півплощині $x-2y\le 4$. Відносно прямої $x-2y=4$ обираємо півплощину, що містить точку О (позначена штриховкою).

Друга множина $x^2+y^2\le 9$ - це круг з центром в початку координат і радіусом $R=3$.

Перетин цих множин – множина, що зображена на рисунку (перетин штриховок).



1.4. Доведення рівностей з множинами

Існують такі методи доведення рівностей з множинами:

1) графічний метод;
2) метод двостороннього включення;
3) метод еквівалентних перетворень.

Найпростішим методом перевірки рівностей є графічний метод. Суть цього методу полягає в наступному: окремо для лівої і правої частин рівності будуються діаграми Ейлера-Венна; якщо ці діаграми співпадають, то дана рівність вірна.

Метод двостороннього включення є універсальним методом доведення рівностей з множинами і заснований на співвідношенні: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ і $B \subset A$.

Метод еквівалентних перетворень полягає в застосуванні властивостей операцій над множинами (законів I – VIII).

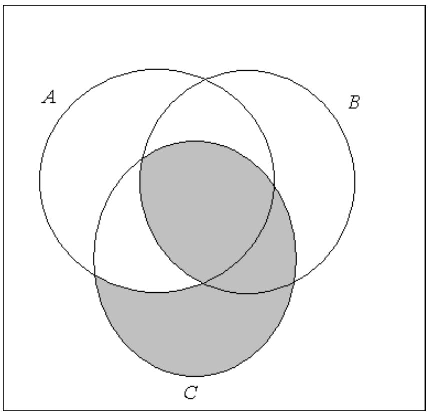
Приклад 1.4.1. Довести, що для довільних множин A, B та C справджується рівність: $C\setminus\overline{\overline{A}\cup B}=B\cap C\cup\left(C\setminus A\right)$.

Розв'язання

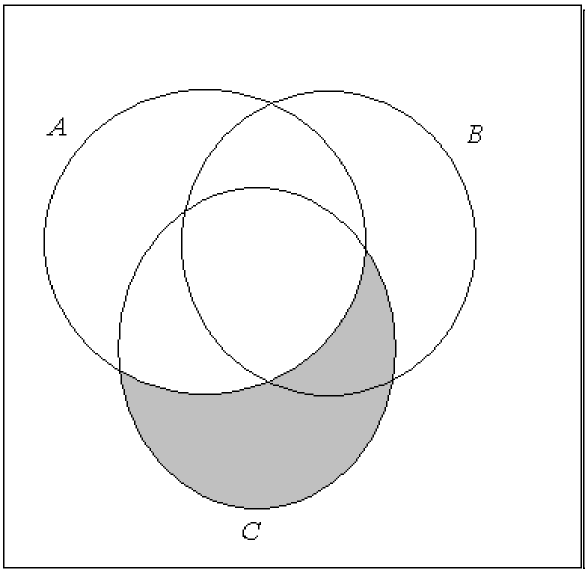
Перший спосіб.

Скористаємося діаграмами Ейлера-Венна. Для множини у лівій частині рівності відповідна їй діаграма була побудована в попередньому пункті:

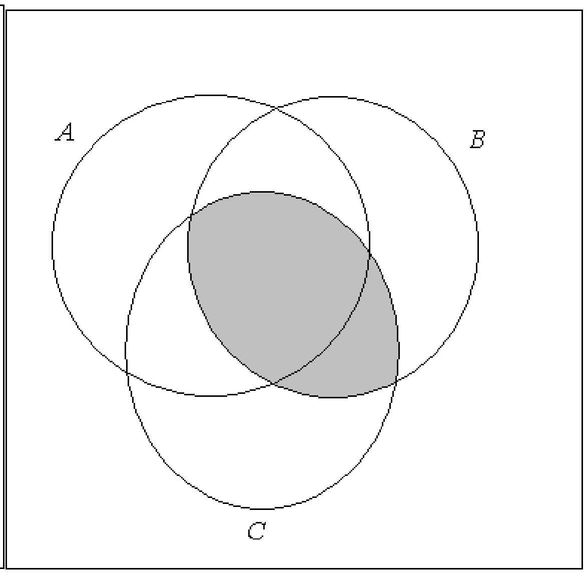
$$C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$$



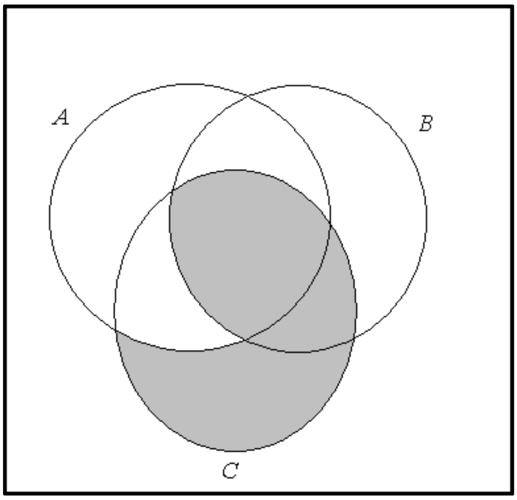
Побудуємо діаграму для множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$:



$C \setminus A$



$B \cap C$



$B \cap C \cup (C \setminus A)$

Порівнюючи діаграми, бачимо, що вони ідентичні. Тому множини $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$ та $B \cap C \cup (C \setminus A)$ рівні.

Другий спосіб.

Доведемо, що $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B} \subseteq B \cap C \cup (C \setminus A)$ та $B \cap C \cup (C \setminus A) \subseteq C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$.

а) Доведемо перше включення. Нехай $x \in C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$.

$$\begin{cases} x \in C, \\ x \notin \overline{\overline{A} \cup B}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in C, \\ x \in \overline{A} \cup B. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in C, \\ x \in \overline{\overline{A}}. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in C, \\ x \in B. \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in C, \\ x \notin A. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in C, \\ x \in B. \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in C \setminus A, \\ x \in C \cap B. \end{array} \right. \Rightarrow x \in B \cap C \cup (C \setminus A).$$

Таким чином ми показали, що довільний елемент x множини $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$ є елементом множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$. Перше включення доведено.

б) Доведемо друге включення. Нехай $x \in B \cap C \cup (C \setminus A)$.

$$\left[\begin{array}{l} x \in C \cap B, \\ x \in C \setminus A. \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in C, \\ x \in B. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in C, \\ x \notin A. \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in C, \\ x \in B. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in C, \\ x \in \overline{A}. \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} x \in C, \\ x \in \overline{A} \cup B. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in C, \\ x \notin \overline{\overline{A} \cup B}. \end{cases} \Rightarrow x \in C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}.$$

Ми показали, що довільний елемент x множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$ є елементом множини $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$. Тому друге включення доведено.

Отже, множини $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$ та $B \cap C \cup (C \setminus A)$ є рівними.

Приклад 1.4.2. Методом двостороннього включення довести рівність: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Розв'язання

1) Покажемо, що $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Візьмемо довільний елемент x із множини $A \setminus B$. Необхідно показати, що тоді обов'язково $x \in A \cap \overline{B}$. Маємо:

$x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A$ *і* $x \notin B \Rightarrow x \in A$ *і* $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in A \cap \overline{B}$.

2) Покажемо, що $A \cap \overline{B} = A \setminus B$.

Візьмемо довільний елемент x із множини $A \cap \overline{B}$. Необхідно показати, що тоді обов'язково $x \in A \setminus B$. Маємо:

$x \in A \cap \overline{B} \Rightarrow x \in A$ *і* $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in A$ *і* $x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B$. ■

Приклад 1.4.3. Методом двостороннього включення довести дистрибутивність операції перетину відносно операції об'єднання:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Розв'язання

1) $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ *і* $x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ *і* ($x \in B$ *або* $x \in C$)

($x \in A$ *і* $x \in B$) *або* ($x \in A$ *і* $x \in C$) $\Leftrightarrow$

($x \in A \cap B$) *або* ($x \in A \cap C$) $\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2) $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Leftrightarrow$ ($x \in A \cap B$) *або* ($x \in A \cap C$) $\Leftrightarrow$

($x \in A$ *і* $x \in B$) *або* ($x \in A$ *і* $x \in C$) $\Leftrightarrow$

$x \in A$ *і* ($x \in B$ *або* $x \in C$) $\Leftrightarrow x \in A$ *і* $x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cup C)$. ■

Приклад 1.4.4. Методом еквівалентних перетворень довести рівності:

1) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;

2) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$ *;*

Розвязання

1) $A \cap (B \setminus C) = A \cap (B \cap \overline{C}) = (A \cap B) \cap \overline{C} = (A \cap B) \setminus C.$
2) $A \setminus (A \cap B) = A \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) = A \setminus B.$

У рівностях, що містять операцію симетричної різниці, слід користуватися властивостями симетричної різниці, якщо це можливо, якщо ж ні – позбутися її згідно будь-якого з означень (вдалий вибір при цьому може значно спростити подальші викладки).

Приклад 1.4.5. Методом еквівалентних перетворень довести рівності:

1) $A \Delta (A \cap B) = A \setminus B$ *;*

2) $A \Delta (A \Delta B) = B$.

Розв'язання

1) $A \Delta (A \cap B) = (A \cup (A \cap B)) \setminus (A \cap (A \cap B)) = A \setminus (A \cap (A \cap B)) =$
$= A \setminus ((A \cap A) \cap B) = A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$

2)$A \Delta (A \Delta B) = (A \Delta A) \Delta B = \emptyset \Delta B = B$

1.5. Формули включення-виключення

Формули включення-виключення – формули, що дозволяють знаходити потужність об'єднання декількох скінченних множин.

Формули включення-виключення для двох і трьох скінченних множин мають відповідно вигляд:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Приклад 1.5.1. У науково-дослідному інституті працюють 67 осіб. Із них 47 знають англійську мову, 35 – німецьку мову, 23 – обидві мови. Скільки осіб в інституті не знають ні англійської, ні німецької мови? Скільки знають тільки англійську мову? Скільки знають тільки німецьку мову?

Розв'язання

В даній задачі за універсальну множину U приймемо всіх працюючих. Введемо такі позначення:

А – множина осіб, що знають англійську мову;

Н - множина осіб, що знають німецьку мову.

Тоді А∩ Н – множина осіб, що знають англійську і німецьку, А∪ Н – знають хоча б одну мову. За умовою задачі $|U| = 67$, $|A| = 47$, $|H| = 35$, $|A \cap H| = 23$.

Хоча б одну мову знають:

$$|A \cup H| = |A| + |H| - |A \cap H| = 47 + 35 - 23 = 59 \text{ (осіб)}.$$

Жодної мови не знають:

$$|U| - |A \cup H| = 67 - 59 = 8 \text{ (осіб)}.$$

Лише англійську мову знають

$$|A| - |A \cap H| = 47 - 23 = 24 \text{ (особи)},$$

а лише німецьку

$$|H| - |A \cap H| = 35 - 23 = 12 \text{ (осіб)}.$$

Приклад 1.5.2. У науково-дослідному інституті працюють 67 осіб. Із них 47 знають англійську мову, 35 – німецьку, 20 – французьку, 23 – англійську і німецьку, 12 – англійську і французьку, 11 – німецьку і французьку, 5 – усі три іноземні мови. Скільки осіб в інституті не знають жодної із іноземних мов? Скільки знають тільки англійську мову? Скільки знають тільки німецьку мову? Скільки знають тільки французьку мову?

Розв'язання

Аналогічно попередній задачі, U – множина всіх працюючих, A , H , F – множини осіб, що знають відповідно англійську, німецьку та французьку мови.

Хоча б одну мову знають:

$|A \cup H \cup F| = |A| + |H| + |F| - |A \cap H| - |A \cap F| - |H \cap F| +$

$+ |A \cap H \cap F| = 47 + 35 + 20 - 23 - 12 - 11 + 5 = 61$ (особа),

жодної мови не знають:

$|U| - |A \cup H \cup F| = 67 - 61 = 6$ (осіб),

лише англійську знають

$|A| - |A \cap H| - |A \cap F| + |A \cap H \cap F| = 47 - 23 - 12 + 5 = 17$ (осіб),

лише німецьку

$|H| - |H \cap A| - |H \cap F| + |H \cap A \cap F| = 35 - 23 - 11 + 5 = 6$ (осіб),

лише французьку

$|F| - |F \cap A| - |F \cap H| + |F \cap A \cap H| = 20 - 12 - 11 + 5 = 2$ (особи).

Контрольні запитання

1) Які існують способи визначення множин?
2) Що таке рівні множини?
3) Як визначається підмножина?
4) Що таке власні підмножини?
5) Що таке універсальна множина?
6) Як визначається потужність множини?
7) Яка множина називається зліченною?
8) Сформулювати властивості зліченних множин.
9) Дати означення рівнопотужних множин.
10) Які множини мають потужність континуум?
11) Що таке булеан даної множини?
12) Чому дорівнює потужність булеану?
13) Як визначається операція об'єднання множин?
14) Як визначається операція перетину множин?
15) Як визначається операція різниці множин?
16) Як визначається операція доповнення множини?

17) Як визначається операція симетричної різниці множин?
18) Які існують способи доведення рівностей з множинами?
19) В чому суть методу двохсторонніх включень?
20) В чому суть методу еквівалентних перетворень?
21) В чому суть формул включення-виключення?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Знайти $A \Delta (\overline{B} \cap C)$ за умови, що:

$U = \{1, 2, \ldots, 20\}$, $A = \{x - 2 : 5x + 1 - \textit{квадрат цілого числа}\}$,

$B = \{x : x^2 < 60\}$, $C = \{x : (3x - 1) - \textit{просте число}\}$.

Задача 2. Вказати перелік елементів множини $D = B\Delta\left(\overline{A} \cup C\right)$, якщо:

$U = \{5, 6, \ldots, 30\}$, $A = \{5, 7, 8, 10, 11, 14, 20, 21, 22, 26\}$,

$B = \{2x - 7 : x - \textit{непарне}\}$, $C = \{x : x^2 + 1 - \textit{просте число}\}$.

Задача 3. На діаграмі Ейлера-Венна зобразити множини:

а) $\overline{A\Delta\overline{\overline{C}}} \setminus \left(B \cup A\right)$;

б) $\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(B\Delta C\right)$.

Задача 4. Нехай A — множина трикутників, B — множина чотирикутників, C — множина правильних многокутників, D — множина многокутників, які мають принаймні один прямий кут, E — множина рівносторонніх многокутників. Вказати множини:

а) $\left(\left(D \cap A\right) \setminus \left(C \cap B\right)\right) \Delta \left(A \cap E\right)$;

б) $\overline{B \cap \left(C \cup D\right)} \cap E \cap B$.

Задача 5. Нехай S — множина усіх квадратів, R — множина усі прямокутників, L — множина усіх ромбів, P — множина усіх правильних многокутників площини. Вказати множини:

а) $\left(L \setminus S\right) \cap \left(R \setminus \overline{P}\right)$;

б) $\left(P \setminus S\right) \cup \left(R \setminus \overline{L}\right)$.

Задача 6. Перевірити рівності графічним методом та довести їх методом двостороннього включення:

1) $A \cap B = A \setminus B$ *;*

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

3) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

5) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Задача 7. Використовуючи властивості операцій над множинами, спростити вирази:

1) $(A \cup B) \cup (A \cup B)$;

2) $(A \cap B) \cap B$;

3) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$;

4) $(A \cap B \cap M) \cup (A \cap B \cap C \cap M \cap N) \cup (A \cap M \cap A)$;

5) $((A \cup B) \cap B) \cup (A \cap (A \cap B))$;

6) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

7) $(A \cap B \cap C \cap D) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (C \cap D)$;

8) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \cup B \cup C$;

9) $A \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (A \cap C))$;

10) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$.

Задача 8. В школі навчаються 1400 учнів. З них 1250 вміють кататися на лижах, 952 – на ковзанах. Ні на лижах, ні на ковзанах не вміють кататися 60 учнів. Скільки учнів вміють кататися і на лижах, і на ковзанах ?

Задача 9. Кожен учень класу – або дівчина, або особа блондин, або любить математику. В класі 20 дівчат, з них 12 блондинок, причому лише одна блондинка любить математику. Всього в класі 24 особи-блондина, 12 з них люблять математику. В класі 17 учнів, які люблять математику, з них 6 дівчат. Скільки всього учнів в цьому класі ?

Задача 10. У відділі НДІ працюють декілька осіб, кожна з яких знає хоча б одну іноземну мову. При цьому 6 осіб знають англійську мову, 6 – німецьку, 7 – французьку, 4 – англійську і німецьку, 3 – німецьку і французьку, 2 – англійську і французьку, 1 – всі три мови. Скільки осіб працюють у відділі? Скільки з них знають лише англійську мову? Лише французьку? Лише німецьку?

Індивідуальні завдання

Завдання 1. *Виконати завдання:*

В-1. 1) перелічити елементи множини М= {множина кольорів спектра};

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} |x| \geq 3, \\ x^2 + y^2 \geq 3. \end{cases}$$

В-2. 1)перелічити елементи множини М= {множина додатніх простих чисел, які менші за 40};

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} y < |x|, \\ |x| > 2. \end{cases}$$

В-3.1) перелічити елементи множини М= {множина цілих додатніх степенів 3, які менші за 250};

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 \le 9, \\ |y| < 2. \end{cases}$$

В-4.1) перелічити елементи множини М= {множина додатніх чисел кратних 5, які менші за 47};

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} y - x < 3, \\ y - 3x \ge 5. \end{cases}$$

В-5.1) перелічити елементи множини М = {множина різних однокольорових шахматних фігур};

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} x + y > 0, \\ -4x + y > 4. \end{cases}$$

В-6.1) перелічити елементи множини $M = \left\{ x : \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 3x - 4\right) = 0 \right\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 < 81, \\ x > 5. \end{cases}$$

В-7.1) перелічити елементи множини $M = \{ x : \cos x - 2 = 0 \}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} x - y > 1, \\ x^2 + y^2 > 4. \end{cases}$$

В-8.1) перелічити елементи множини $M = \{ x : -5 \le |x| \le 1, x \in \square \}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} |x| > 2, \\ y - 3x < 0. \end{cases}$$

В-9. 1) перелічити елементи множини $M = \{ x : -1 \le |x| \le 1, x \in \mathbb{Z} \}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} |x| \le 2, \\ y < x. \end{cases}$$

В-10. 1) перелічити елементи множини $M = \{ x : \cos^2 x = 4 \}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} |x| \ge 1, \\ x - y > 2. \end{cases}$$

В-11.1) перелічити елементи множини М={множина простих чисел, які менші за 57};

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} |x| \ge 3, \\ y + x \le 9. \end{cases}$$

В-12.1) перелічити елементи множини $M = \{ x : -2 \le x \le 9, x - \textit{просте число} \}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 < 4, \\ x \ne 1. \end{cases}$$

В-13.1) перелічити елементи множини $M = \{ x : x^2 \sqrt{x} - x = 0 \}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} |x| > 2, \\ (x+3)^2 + y^2 < 4. \end{cases}$$

В-14.1) перелічити елементи множини $M = \{ x : x - \sqrt{x} - 2 = 0 \}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} |x| \le 2, \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 < 16. \end{cases}$$

В-15.1) перелічити елементи множини $M = \{ x : x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} |x| > 2, \\ y + 3x \ge 0. \end{cases}$$

В-16.1) перелічити елементи множини $M = \{ x : (x^2 - 4)(x^2 + 3x - 4) = 0 \}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} x+y>2, \\ y-4x>4. \end{cases}$$

В-17. 1) перелічити елементи множини $M=\{x: 2\cos x=1\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2+(y+1)^2>1, \\ y<0. \end{cases}$$

В-18. 1) перелічити елементи множини $M=\{x: x^3-x^5=0\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2+y^2\le 1, \\ y+x<0. \end{cases}$$

В-19. 1) перелічити елементи множини $M=\{x: -2\le |x|\le 3, x - \textit{ціле число}\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} x-y>2, \\ y-3x<0. \end{cases}$$

В-20. 1) перелічити елементи множини $M=\{x: \sin x-1=2\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} |x|\le 2, \\ x^2+(y-2)^2\le 9. \end{cases}$$

В-21. 1) перелічити елементи множини $M=\{x: x^4-x^2-20=0\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} |y|>2, \\ y-3x<0. \end{cases}$$

В-22. 1) перелічити елементи множини $M=\{x: \cos^2 x-\sin 2x=0, -\pi<x<\pi\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} |y|<3, \\ x^2+y^2<4. \end{cases}$$

В-23. 1) перелічити елементи множини $M=\{x: \sin x-3=0\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} |y| > 1, \\ y + 2x < 0. \end{cases}$$

В-24. 1) перелічити елементи множини $M = \{x : (x^2 - 4)(x^2 - 3x - 4)\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} x > 2, \\ x^2 + (y-1)^2 \le 64. \end{cases}$$

В-25. 1) перелічити елементи множини $M = \{x : 3 \le x \le 27, x - \textit{просте число}\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 4, \\ y - 3x < 1. \end{cases}$$

Завдання 2. *Знайти $A \cup B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$, якщо:*

№ варіанту	A	B
1	{1, 3, 5}	{2, 4}
2	{1, 2, 4}	{3, 1, 5, 0}
3	{2, 5, 4}	{3, 1, 5}
4	[−1, 3]	] 2, 6 [
5	(0, 1)	{0, ½, 1}
6	(3, 5)	(2, 4)
7	{1, 2, 3, 4}	{2, 4, 6, 8}
8	(0, 9)	[–5, 5]
9	{1, 3, {2, 4}, 0}	{{1, 3}, 2, 4}
10	{1, {2, 5}, 6}	{1, 2, 5, 6}
11	{x∈A | x∈ℕ і ділиться на 4 і x ≤ 40}	{x∈B | x∈ ℕ і ділиться на 5 і x ≤ 40}
12	{x∈A | x∈ ℕ і ділиться на 4 і x ≤ 30}	{x∈B| x∈ ℕ і ділиться на 6 і x ≤ 40}

13	{x∈A| x∈ ℕ ділиться на 2 і x ≤ 20}	{x∈B | x∈ ℕ ділиться на 3 і x ≤ 30}
14	{x∈A | x∈ ℕ ділиться на 9 і x ≤ 100}	{x∈B | x∈ ℕ ділиться на 10 і x ≤ 100}
15	(3, 5)	[2, 4]
16	{2, 5, 4}	{2, 5, 4}
17	{2, 3, 7, 8, 9, 11, 19, 20}	{x∈B| x∈ ℕ ділиться на 2 або 3 і x ≤ 100}
18	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	{x∈B | x∈ ℕ ділиться на 2 і x ≤ 10}
19	{a, c, b}	{c, d, k}
20	{1, 5, 3, 0, 7}	{2, 4, 0, 6}
21	(2, 6]	[4, 9)
22	[2, 5]	{0, 1, 2, 3, 4, 5}
23	{x∈ℝ, x ≤ 1}	{x∈ℝ, x > 0}
24	{x∈A | x∈ ℕ ділиться на 3 і x ≤ 30}	{x∈B | x∈ ℕ ділиться на 5 і x ≤ 50}
25	{a, b, c, e, d}	{a, e, l, k, n}

Завдання 3. *Розв'язати задачу:*

1. На факультеті навчається 1200 студентів. З них 900 – ввміють кататися на лижах, а 750 – на ковзанах. Не вміють кататися на лижах і ковзанах 50 чоловік. Скільки студентів вміють кататися і на лижах, і на ковзанах?
2. У групі вчиться 25 студентів. Відомо, що 5 студентів отримали п'ятірку з математики, 8 — з програмування, 7 — з фізики. Троє студентів отримали п'ятірку з математики і програмування, 4 — з програмування та фізики, 2 — з математики та фізики. Один студент отримав п'ятірки з усіх трьох дисциплін. Знайти кількість студентів, які: а) не отримали жодної п'ятірки; б) отримали рівно одну п'ятірку.
3. Троє з 23 мандрівників не були жодного разу ні у Парижі, ні у Лондоні, ні у Римі, 12 було у Лондоні, 10 — у Римі, 4 — тільки у Парижі, 4 — і у Парижі і у Лондоні, 6 — і у

Лондоні і у Римі, 5 — і у Парижі і у Римі. Знайти кількість мандрівників, які були в усіх трьох містах.

4. В одній групі студентів 10 чоловік можуть працювати на Дельфі, 10 – на Паскалі, 6 – на Сі. По дві мови знають: 6 чоловік – Делфі і Паскаль, 4 – Паскаль і Сі, 3 – Делфі і Сі. Один студент знає всі три мови. Скільки студентів в групі?
5. В день авіації на аеродромі всіх бажаючих катали на літаку, планері, дельтаплані. На літаку літали 30 чоловік, на планері – 20, на дельтаплані -15. І на літаку і на планері каталося 10 чоловік, на літаку і дельтаплані – 12, на планері і дельтаплані -5. Двоє чоловік каталися на літаку, планері і дельтаплані. Скільки було бажаючих політати?
6. А – множина натуральних чисел, кратних одному з чисел 2, 3, 5. Серед елементів множини 70 чисел кратних 2; 60 – кратних 3; 80 – кратних 5; 32 – кратних 6; 35 – кратних 10; 38 – кратних 15 і 20 – кратних 30. Скільки елементів містить множина А?
7. На пікнік поїхали 92 студенти. При цьому бутерброди з ковбасою взяли 47 студентів, з сиром – 38, з маслом – 42, з сиром і ковбасою – 28, з ковбасою і маслом – 31, з сиром і маслом – 26. Всі три види бутербродів взяли 25 студентів, а декілька студентів брали на пікнік не бутерброди, а пиріжки. Скільки студентів брали з собою на пікнік пиріжки
8. У відділі НДІ працюють декілька осіб, кожна з яких знає хоча б одну іноземну мову. При цьому 6 осіб знають англійську мову, 6 – німецьку, 7 – французьку, 4 – англійську і німецьку, 3 – німецьку і французьку, 2 – англійську і французьку, 1 – всі три мови. Скільки осіб працюють у відділі? Скільки з них знають лише англійську мову? Лише французьку? Лише німецьку?
9. На уроці літератури вчитель зацікавився, хто із 40 учнів класу читав книги A, B і C. Результати виявились такими: книгу A прочитали 25 учнів, книгу B – 22 учні, книгу C – 22 учні, книгу A або книгу B – 33 учні, книгу A або книгу C – 32 учні, книгу B або книгу C – 31 учень, всі три книги – 10 учнів. Скільки учнів не читали жодної книги? Скільки учнів прочитали тільки 1 книгу?
10. Серед абітурієнтів, які склали вступні іспити до вузу, оцінку "5" отримали: з математики – 48, з фізики – 37, з української мови – 42, з математики або фізики – 75, з математики або української мови – 76, з фізики або української мови – 66, з усіх трьох предметів – 4. Скільки абітурієнтів отримали хоча б одну п’ятірку? Скільки з них отримали рівно одну п’ятірку? А рівно дві п’ятірки?
11. Протягом тижня в кінотеатрі демонструвались фільми X, Y, Z. Кожен із 40 студентів групи бачив або всі три фільми, або тільки якийсь один. При цьому фільм X бачили 13 студентів, фільм Y – 16 студентів, фільм Z – 19 студентів. Скільки студентів бачили усі три фільми?

12. Всі грибники повернулися додому з повними корзинами. В десятьох корзинах були білі гриби, в 18 – підберезовики, у 12 – лисички. Білі і підберезовики були в 6 корзинах, білі і лисички – в 4, підберезовики і лисички – в 5. Всі три види грибів були у двох грибників. Скільки всього було грибників?
13. Всі туристи взяли з собою консерви. 6 чоловік взяли тушонку, 5 –згущене молоко, 8 – кашу з м'ясом. В трьох рюкзаках були тушонка і згущене молоко, в двох – згущене молоко і каша, в трьох тушонка і каша. І тільки в одному рюкзаку лежали всі три види консервів. Скільки було туристів?
14. На уроці літератури учитель вирішив дізнатись, хто із учнів класу читав книжки А, В і С. Результати опитування такі: книгу А читало 25 учнів, книгу В – 22 учні, книгу С – 22 учні, книгу А або В читали 33 учні, книгу А або С - 33 учні, книгу В або С – 31 учень, всі три книги прочитали 10 учнів. Скільки учнів в класі?
15. Із 100 студентів 28 вивчають англійську мову, 30 – німецьку, 42 – французьку, 10 – англійську і французьку, 5 – німецьку і французьку, 3 – німецьку, англійську і французьку. Скільки студентів не вивчають жодної мови? Скільки студентів вивчають лише французьку, лише англійську, лише німецьку мови?
16. Кожен учень в класі вивчає англійську або французьку мови. Англійську мову вивчає 25 чоловік, французьку – 27 чоловік, а англійську і французьку – 18 чоловік. Скільки учнів в класі?
17. В дитячому садку 52 дитини. Кожний з них любить цукерки або морозиво. Половина дітей любить цукерки, а 20 чоловік – цукерки і морозиво. Скільки дітей любить морозиво?
18. В одному з відділів магазину звичайно купують або один торт, або одну коробку цукерок, або один торт і одну коробку цукерок. В один з днів було продано 57 тортів і 36 коробок цукерок. Скільки було покупців. Якщо 12 чоловік купили і торт і коробку цукерок?
19. В спортивному таборі 65% дітей вміють грати у футбол, 70% - у волейбол і 75% - у баскетбол. Яка найменша кількість дітей, які вміють грати і у футбол, і у волейбол, і у баскетбол?
20. Кожний з учнів класу у зимові канікули рівно два рази був у театрі, при цьому спектаклі А, В і С бачили відповідно 25, 12 і 23 учні. Скільки учнів в класі? Скільки з них бачили спектаклі А і В, А і С, В і С?
21. Протягом тижня у кінотеатрі демонстрували фільми А, В і С. З 40 школярів, кожний передивився або всі три фільми, або один з трьох, фільм А бачили 13, фільм В – 16, фільм С – 19. Знайти, скільки учнів переглянули всі три фільми?
22. З 40 учнів 30 уміють плавати, 27 уміють грати у шахи і тільки 5 не уміють ні того, ні іншого. Скільки дітей уміють плавати і грати у шахи?

23. В групі із 100 туристів 70 чоловік знають англійську мову, 45 знають французьку мову і 23 чоловіки знають обидві мови. Скільки туристів в групі не знають ні англійської, ні французької мови? (8 туристів з групи).
24. В школі 1400 учнів. З них 1250 уміють кататися на лижах, 952 – на ковзанах. Ні на лижах, ні на ковзанах не вміють кататися 60 учнів. Скільки учнів уміють кататися і на лижах і на ковзанах?
25. У науково-дослідному інституті працюють 67 осіб. Із них 47 знають англійську мову, 35 – німецьку мову, 23 – обидві мови. Скільки осіб в інституті не знають ні англійської, ні німецької мови? Скільки знають тільки англійську мову? Скільки знають тільки німецьку мову?

Завдання 4. *Методом еквівалентних перетворень довести рівності:*

1. $A \cap (A \cup B) = A \cap B$;
2. $A \setminus B = A \cap B$;
3. $A \Delta (A \setminus B) = A \cap B$;
4. $B \setminus (A \Delta B) = A \cap B$;
5. $A \cap (B \setminus C) = B \cap (A \setminus C)$;
6. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$;
7. $(A \Delta B) \setminus A = B \setminus A$;
8. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
9. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
10. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
11. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
12. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$;
13. $A \setminus (A \setminus (A \cap B)) = A \cap B$;
14. $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) = B$;
15. $(A \cap B) \setminus (B \setminus A) = A \cap B$;
16. $(A \setminus B) \setminus (B \setminus A) = A \setminus B$;
17. $(A \setminus B) \setminus (A \setminus B)) = A \setminus B$;
18. $A \setminus (A \setminus (A \setminus B)) = A \setminus B$;
19. $A \setminus (B \setminus (A \setminus B)) = A \setminus B$;
20. $(A \cup B) \Delta B = A \setminus B$;
21. $(A \setminus B) \Delta (B \setminus A) = A \Delta B$;
22. $(A \cup B) \Delta (A \cap B) = A \Delta B$;
23. $(A \cap B) \Delta (B \setminus A) = B$;
24. $(A \cup B) \Delta (A \setminus B) = B$;

25. $A \,\Delta\, (B \setminus A) = A \cup B$.

Тест 1. Елементи теорії множин

1. Яке з наведених тверджень є правильним?

а) Порядок запису елементів множини є суттєвим.

б) У множині можуть міститися однакові елементи кілька разів.

в) Множина визначається лише переліком своїх елементів.

г) Порядок запису елементів множини не має значення.

2. Які множини є рівними?

а) $\{1, 2, 3\}\ \ \{3, 2, 2, 1\}$. б) $\{1, 2, 3\}\ \ \{\{1, 2, 3\}\}$.

в) $\{1, 2, 3\}\ \ \{3, 2, \{1\}\}$. г) $\{1, 2, 3\}\ \ \{1, 3, 4\}$.

3. Яке твердження характеризує порожню множину?

а) Містить один елемент.

б) Містить нескінченну кількість елементів.

в) Не містить жодного елемента.

г) Є підмножиною лише самої себе.

4. Нехай $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\}$. Тоді множина A дорівнює:

а) $\{2\}$. б) $\{-2\}$. в) $\{-2,2\}$. г) $\{-4,4\}$.

5. Яке з наведених тверджень є правильним?

а) $\emptyset \in A$ для будь-якої множини A. б) $\emptyset \subset A$ для будь-якої множини A.

в) $A \subset \emptyset$ для будь-якої множини A. г) $\emptyset = A$ для будь-якої множини A.

6. Нехай $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,2,1\}$. Тоді:

а) $A \neq B$. б) $A \subset$B. в) $B \subset A$. г) $A = B$.

7. Потужність множини $A = \{2,4,6,8,10\}$ дорівнює:

а) 4. б) 5. в) 6. г) 10.

8. Яка з наведених множин є нескінченною?

а) Множина днів тижня. б) Множина місяців року.

в) Множина натуральних чисел. г) Множина букв українського алфавіту.

9. Нехай $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a, b, c\}$. Яке твердження правильне?

а) Множини не можуть бути рівнопотужними, оскільки мають різні елементи.

б) Множини рівнопотужні.

в) $A \subset B$. г) $B \subset A$.

10. Яка з множин є зліченною?

а) $\mathbb{R}$. б) Множина точок відрізка [0;1].

в) $\mathbb{N}$. г) Множина всіх дійсних чисел площини.

11. Нехай $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2,4\}$. Яке твердження правильне?

а) $B \in A$. б) $B \subset A$. в) $A \subset B$. г) $A = B$.

12. Скільки підмножин має множина $A = \{a, b, c\}$?

а) 3. б) 6. в) 8. г) 9.

13. Скільки власних підмножин має множина $A = \{1,2,3,4\}$?

а) 14. б) 15. в) 16. г) 12.

14. Яке з наведених тверджень є правильним?

а) Будь-яка множина є власною підмножиною самої себе.

б) Будь-яка множина є підмножиною самої себе.

в) Жодна множина не є підмножиною самої себе.

г) Порожня множина не є підмножиною жодної множини.

15. Нехай $A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,3,4\}$. Тоді:

а) $A = B$. б) $B \subset A$. в) $A \subset B$. г) $A \cap B = \emptyset$.

16. Нехай множина A містить 5 елементів. Тоді потужність булеану $P(A)$ дорівнює:

а) 10. б) 25. в) 32. г) 64.

17. Яка з наведених множин є булеаном множини $A = \{a\}$?

а) $\{\{a\}\}$. б) $\{\emptyset, \{a\}\}$. в) $\{a, \emptyset\}$. г) $\{a, \{a\}\}$.

18. Нехай $A = \{1,2,3,4\}, B = \{1,2\}, C = \{1,2,3\}$. Яке твердження правильне?

а) $B \subset C \subset A$. б) $A \subset C \subset B$. в) $C \subset B \subset A$. г) $B = A$.

19. Нехай $A = \{1,2,3,4\}, B = \{3,4,5,6\}$. Тоді множина $A \cup B$ дорівнює:

а) $\{3,4\}$. б) $\{1,2,5,6\}$. в) $\{1,2,3,4,5,6\}$. г) $\{1,2,3,4\}$.

20. Нехай $A = \{1,2,3,4\}, B = \{3,4,5,6\}$. Тоді множина $A \cap B$ дорівнює:

а) $\{1,2\}$. б) $\{3,4\}$. в) $\{5,6\}$. г) $\emptyset$.

21. Нехай $A = \{1,2,3,4\}, B = \{3,4,5,6\}$. Тоді множина $A \backslash B$ дорівнює:

а) $\{1,2\}$. б) $\{5,6\}$. в) $\{3,4\}$. г) $\{1,2,5,6\}$.

22. Нехай $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, A = \{2,4,6,8\}$. Тоді доповнення множини A дорівнює:

а) $\{2,4,6,8\}$. б) $\{1,3,5,7\}$. в) $\{1,2,3,4\}$. г) $\emptyset$.

23. Нехай $A = \{1,2,3,4\}, B = \{3,4,5,6\}$. Тоді симетрична різниця $A\Delta B$ дорівнює:

а) $\{3,4\}$. б) $\{1,2,5,6\}$. в) $\{1,2,3,4,5,6\}$. г) $\{1,2\}$.

24. Нехай $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4\}, C = \{3,4,5\}$. Тоді $A \cap (B \cup C)$ дорівнює:

а) $\{1,2,3\}$. б) $\{2,3\}$. в) $\{3\}$. г) $\{2,3,4\}$.

25. Для будь-якої множини A правильним є твердження:

а) $A \cup \overline{A} = \emptyset$. б) $A \cap \overline{A} = U$. в) $A \cap \overline{A} = \emptyset$. г) $\overline{A} = A$.

26. Яка формула включення-виключення для двох множин A і B є правильною?

а) $|A \cup B| = |A| + |B|$. б) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

в) $|A \cup B| = |A| - |B| + |A \cap B|$. г) $|A \cup B| = |A \cap B|$.

27. Нехай універсальна множина U складається з усіх працівників установи. Якщо $A \cup B$ – множина працівників, які знають хоча б одну з двох мов, то множина працівників, які не знають жодної мови, визначається як:

а) $|A \cup B|$. б) $|A \cap B|$. в) $|U| - |A \cup B|$. г) $|U| - |A \cap B|$.

ТЕМА 2. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

2.1. Висловлювання

Математична логіка – галузь математики, предметом якої є алгебра висловлювань. Вона спирається на формальні математичні підходи і пропонує лаконічний інструментарій разом із власною системою позначень.

В щоденній комунікації обмін відомостями відбувається через речення. Серед них особливу роль виконують речення стверджувальні та розповідні, до яких можна поставити питання – істинні вони чи хибні.

Висловлювання – це розповідне речення, про яке можна сказати істинне воно чи хибне.

Логічні значення висловлювань: – 1 (висловлювання істинне);

– 0 (висловлювання хибне).

Приклад 2.1.1.

1) числа 13 і 31 взаємно-прості;

2) Брюсель–столиця Франції.

Можна стверджувати, що 1) є істинним висловлюванням, а 2) – хибним.

Терміни „*висловлювання”*, „*істинне висловлювання”*, *„хибне висловлювання” належать* до базових, початкових понять. Завданням математичної логіки є з’ясування того, чи є дане висловлювання істинним, чи хибним. Сам же зміст висловлювання не береться до уваги.

Приклад 2.1.2.

1. $2{\times}3=6$.
2. $2<7$.
3. $x \le 2$.
4. Площа конуса менша довжини куба.
5. Має рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$ корінь $x = 5$?
6. Більше ніж три є два.
7. Слава українським студентам!
8. 4<6.

Речення 1, 2, 8 – висловлювання.

4 – не є висловлюванням, про нього не можна сказати істинне воно або хибне (відсутній зміст).

3 – не є висловлюванням. Через змінну x речення перетворюється в висловлювання при фіксації змінної, якщо $x= 1$, то висловлювання 3 – істинне, якщо $x=5$, то 3 – хибне висловлювання.

Речення 5, 7 –не є висловлюваннями. Вони не відносяться до розповідних речень.

Речення 6 – не є висловлюванням, бо відсутній зміст розповідного речення.

Таким чином, висловлювання утворюються за допомогою слів або символів. Але не будь-який набір слів та символів – висловлювання.

Позначаються висловлювання буквами: *A, B, C*....

А$\equiv$*„ 5-2=3”*

B$\equiv$„*3 –просте число*”

Знак $\equiv$ заміняє слова – „є висловлюванням”.

Розрізняють поняття– *прості* та *складені* висловлювання.

Простим називається висловлювання, в якому будь-яка його частина є висловлюванням.

Розглянемо висловлювання:

A $\equiv$ „три – непарне число”

B $\equiv$ „Одинадцять ділиться на 5”

C $\equiv$ „Київ – столиця України”.

Істинним висловлюванням (*A і C*) приписується значення 1: $A\equiv 1$, $C\equiv 1$.

Висловлювання B – хибне; позначають знаком 0, $B\equiv 0$.

Поєднуючи прості висловлювання сполученнями „і”, „або”, конструкціями „якщо..., то...”, „тоді і тільки тоді, коли...” утворюються *складені* висловлювання.

Істинність складеного висловлювання не залежить від істинності чи хибності простих висловлювань, з яких вони складаються. Тобто висловлювання можна утворювати з висловлювань, не пов’язаних за змістом.

Наприклад: Н$\equiv$ „Якщо слон – комаха, то Антарктида покрита тропічними лісами”.

Приклад 2.1.3. Висловлювання $A\equiv "6<7"$; і $B\equiv$ „число 6 – просте” – прості.

З висловлювань *A і B* утворюються складені висловлювання:

C $\equiv$ „*6<7* або *6* – просте число”;

D $\equiv$ „*6<7* і число *6* – просте”;

E $\equiv$ „*6<7* тоді і тільки тоді, коли число *6* - просте”;

F $\equiv$ „якщо *6<7*, то число *6* - просте”.

Контрольні запитання

1. Що таке математична логіка?
2. Що називається висловлюванням? Наведіть приклади.
3. Яке висловлювання називається простим? складеним? Наведіть приклади.
4. Яке висловлювання називається складеним? Наведіть приклади.
5. Як можна утворити з простих висловлювань складене?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Вказати речення, які є висловлюваннями, і ті, що не є висловлюваннями:

1) Київ–столицяУкраїни;
2) студент Центральноукраїнського національного технічного університету;
3) Місяць–супутник Землі;
4) $x < 1$;
5) $\sqrt{5}$ – ірраціональне число.

Задача 2. Вказати прості і складені висловлювання. В складених висловлюваннях виділити логічні зв'язки:

1) число 9 не ділиться на 3;
2) число 21 ділиться на 3 і на 7;
3) число 3 є дільником числа 27;
4) якщо число 15 ділиться на 5, то воно ділиться на 3;
5) число18 ділиться на 9 тоді і тільки тоді, коли 9 ділиться на 3.

2.2. Основні логічні операції

Логічні операції – це фундаментальні дії, які застосовують для об'єднання простих висловлювань у складені.

Логічні операції над висловлюваннями: *заперечення* (унарна операція); *кон'юнкція, диз'юнкція*, *імплікація, еквівалентність* (бінарні операції).

Логічним запереченням висловлювання $\boldsymbol{x}$ називається висловлювання $\neg x$, яке змінює значення на протилежне. Тобто: *істинне*, якщо x *хибне*; і *хибне*, якщо x *істинне*. Читається «не x».

Кон'юнкцією(логічне ***І***) висловлювань x і y називається висловлювання $\boldsymbol{x \wedge y}$, яке істинне, якщо обидва аргументи x і y – істинні. І хибне, якщо хоча б один з аргументів хибний. Читається «x і y».

*Диз'юнкцією(логічне **АБО**)* висловлювань x і y називається висловлювання $\boldsymbol{x \vee y}$, яке – істина, якщо хоча б один з аргументів x або y – істина. І хибне, якщо вони обидва хибні. Читається «x або y».

Імплікацією висловлювань x і y називається висловлювання $\boldsymbol{x \to y}$, якехибне, якщо x– істинне, а y –хибне. Це висловлювання істинне в усіх інших випадках. Читається «з x *виплиBає* y» або «якщо x, то y».

Еквівалентністю висловлювань x *і* y називається висловлювання $\boldsymbol{x \leftrightarrow y}$. Воно істинне, якщо обидва висловлювання x і y одночасно істинні або хибні, і хибне в усіх інших випадках. Читається «для того, щоб "висловлювання x", необхідно і достататньо, щоб "висловлювання y" ».

Будь-яку логічну операцію зручно подавати у вигляді таблиці, яку прийнято називати *таблицею істинності*.

Таблиця істинності для логічних операцій:

x	y	$\neg x$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Комбінуючи логічні операції, будують формули алгебри висловлювань. Якщо x, y, z – висловлювання, тоді $(x \wedge y) \vee z$, $(x \vee \neg y) \wedge z$, $(\neg x \wedge y) \vee \neg(z \vee y)$ – теж є висловлюванням. Послідовність операцій у формулі задається дужками. Якщо ж дужки відсутні, то діє встановлениф пріоритет операцій: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, (у спадному порядку). Замість знака кон'юнкції $\wedge$ можливий запис $\boldsymbol{ab}$. Однак саме лише знання пріоритету є недостатнім. Для однакових операцій необхідно вказувати порядок групування (зліва направо чи справа наліво): наприклад, операції $\wedge$, $\vee$ об'єднуються зліва направо, а операція $\to$ справа наліво. Через це для формули $a \wedge b \wedge c$ розстановка дужок має такий вигляд: $((a \wedge b) \wedge c)$, для формули $a \to b \to c$ дужки розставляємо так: $(a \to (b \to c))$.

Для операції $\to$ порядок групування є суттєвим. Тому для формули $a \to b \to c$ групування справа наліво приводить до запису $(a \to (b \to c))$. Для еквівалентності правил групування не вводять.

Приклад 2.2.1. Використати дужки у формулі: $a \to b \to \neg b \wedge a \to c \vee a \wedge \neg c$.

Починають з пошуку операцій найвищого пріоритету. Відповідну формулу беремо у дужки.

Найвищий пріоритет має операція *заперечення*. Отримуємо формулу $a \to b \to (\neg b) \wedge a \to c \vee a \wedge (\neg c)$. Далі, за пріоритетом операція *кон'юнкції* – $\wedge$. Операція має два аргументи. Для відповідних формул розставляємо дужки: $a \to b \to ((\neg b) \wedge a) \to c \vee (a \wedge (\neg c))$. Наступна формула з операцією *диз'юнкції* – $\vee$. Маємо $a \to b \to ((\neg b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg c)))$.

Остання операція – *імплікація* $\to$. Отримуємо результат: $(a \to (b \to (((\neg b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg c))))))$. Щоб бачити повну картину значень істинності певної логічної формули, доцільно скласти *таблицю істинності* для можливих наборів:

–виписують усі проміжні формули, з яких побудована вихідна,

–обчислюють їхні значення істинності для кожного набору змінних.

Приклад 2.2.2. Задано висловлювання $(\neg x \wedge y) \vee (\neg z \vee y)$. Скласти таблицю істинності і перевірити, на яких наборах значень змінних висловлювання істинне.

x	y	z	$\neg x$	$\neg x \wedge y$	$z \vee y$	$\neg(z \vee y)$	$(\neg x \wedge y) \vee \neg(z \vee y)$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0

Отже, дане висловлювання істинне на таких наборах значень; (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0).

Контрольні запитання

1. В якому порядку виконуються бінарні логічні операції?
2. При яких умовах кон'юнкція істинна?
3. При яких умовах диз'юнкція хибна?
4. При яких умовах вважається хибною імплікація?
5. При яких умовах вважається істинною еквіваленція?
6. Опишіть операцію заперечення.
7. Як перевірити правильність логічної формули?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Серед речень визначити висловлювання. Зробити висновок про їх істинність або хибність:

1) річка Дніпро впадає в Чорне море;
2) пийте морквяний сік;
3) всі люди–друзі;
4) математична логіка–захоплююча наука;
5) 51<4;
6) $x^2 - 4x + 7$;
7) 7) $x^2 + 5x - 9 = 0$;
8) для всіх дійсних чисел $x + y = y + x$.

Задача 2. Чи є висловлюваннями наступні твердження, встановити, істинні вони чи хибні:

1) сума коренів будь-якого зведеного квадратного рівняння дорівнює вільному члену;
2) добуток коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює вільному члену;
3) існує зведене квадратне рівняння, сума коренів якого дорівнює вільному члену.

Задача 3. Нехай x – висловлювання «Студент Петров вивчає інформатику», y – висловлювання «Студент Петров встигає з математичної логіки». Записати у вигляді речень висловлювання:

1) $x \wedge \neg y$
2)$\neg x \vee y$
3) $\neg(x \wedge y)$

Задача 4. Позначити елементарні висловлювання буквами і виразити наступні висловлювання за допомогою символів алгебри логіки:

1) $\sqrt{9} = 3$ або $\sqrt{9} = -3$
2) Якщо число 30 ділиться на 3 і 5, то воно ділиться на 15;
3) 18 кратне 3 і 21 не кратне 3;
4) 18 кратне 3 і 2 1 кратне 3;
5) Число 15–двозначне і кратне 3 а б о 5 .

Задача 5. Нехай *x і y* означають елементарні висловлювання: *x* –“я навчаюсь в ЦНТУ”; *y* – “я люблю математичну логіку”. Прочитати наступні складені висловлювання:

1) $\neg(\neg x)$; 2) $x \wedge y$; 3) $x \wedge \neg y$; 4) $\neg x \wedge \neg y$; 5) $\neg(x \wedge y)$.

Задача 6. Визначити пріоритет послідовності виконання операцій у формулі та пронумерувати їх.

1) $(a \to \neg b) \vee (\neg a \leftrightarrow c) \wedge b \vee (c \to \neg(a \leftrightarrow \mathrm{b}))$;

2) $(a \to \neg((b \lor c) \land \neg a)) \to (\neg c \lor b) \land a \leftrightarrow \neg(a \to \neg b)$;

3) $(\neg a \to \neg b) \land (a \lor \neg c \lor (a \leftrightarrow \neg b) \land c)$;

4) $((\neg b \leftrightarrow (c \lor \neg a \land \neg b)) \to (\neg a \land \neg(c \leftrightarrow b))) \land a$.

2.3. Необхідні і достатні умови

Необхідні та достатні умови встановлюють імплікаційний зв’язок між твердженнями. Коли з твердження *A* випливає твердження *B*, то прийнято казати, що *B – необхідна умова* для *A*, а *A – достатня* для *B*. Тобто висловлювання *B* називається необхідною умовою для *A*, якщо воно логічно випливає з *A*. Висловлювання *A* називається достатньою умовою для *B,* якщо *B* з нього випливає.

У випадку коли *A* і *B* рівнозначні, то говорять, *A – необхідна і достатня умова* для *B*, і навпаки.

Приклад 2.3.1.

В геометрії доведено, що з твердження «кути вертикальні» випливає твердження «кути рівні». Тому згідно даному означенню можна сказати, що рівність кутів – необхідна умова для того, щоб кути були вертикальні, а вертикальність кутів є достатньою умовою для їх рівності. У зв‘язку з цим твердження «якщо кути вертикальні, то вони рівні» можна сформулювати інакше: для того, щоб кути були вертикальні, необхідно, щоб вони були рівні; для того, щоб кути були рівні, достатньо, щоб вони були вертикальні.

Приклад 2.3.2.

Твердження: «Іван отримує стипендію». Необхідна умова: «Іван–студент». Достатня умова: «Іван навчається без трійок».

З того, що Іван–студент, ще не випливає, що він отримує стипендію. Але ця умова необхідна – якщо Іван не студент, то він не отримує стипендію.

Якщо ж Іван навчається без трійок, то він отримує стипендію. Однак студент може отримувати соціальну стипендію (у вигляді допомоги), якщо має на це підстави, навіть при наявності трійок.

Приклад 2.3.3.

Необхідна і достатня умовою існування оберненої матриці *M* – це ненульовий визначник цієї матриці.

Умови необхідності і достатньості відповідають імплікаційним зв'язкам між твердженнями. З вимоги необхідності і достатності одного твердження випливає, що перше твердження є істинним тоді і тільки тоді, коли істинне друге твердження.

Необхідна умова для твердження має бути виконана, щоб твердження було істинним. Тобто, твердження P є необхідною умовою для Q, якщо Q має на увазі P.

Приклад 2.3.4.

а) Відомо, що двійка єдине ціле число, яке одночасно і парне і просте. Для цілих чисел, які більші ніж два, необхідно бути непарними, щоб бути простими.

б) Подільності числа на 4 достатньо для його парності, а подільність на 2 є необхідною і достатньою умовою.

Приклад 2.3.5.

Необхідною умовою подільності цілого числа на 2 є те, щоб число, записане в десятковій системі числення, не закінчувалося цифрою 7. Умова ця необхідна, але не достатня, оскільки, наприклад, число 23 не закінчується цифрою 7 і все-таки не ділиться на 2. Достатньою умовою подільності числа на 2 є те, щоб воно закінчувалося цифрою 0. Ця умова достатня, але не необхідна, оскільки число 38 не закінчується цифрою 0 і все-таки ділиться на 2. Ознака подільності на 2, що зазвичай застосовується, (щоб число ділилося на 2, необхідно і достатньо, щоб остання його цифра ділилася на 2) є прикладом умови одночасно необхідної і достатньої. Часто вираз «необхідно і достатньо» замінюється виразом «тоді і лише тоді» або ж виразом «в тому і лише в тому разі».

У складних математичних проблемах пошук зручних для користування необхідних і достатніх умов інколи виявляється вельми непростим завданням. За таких обставин достатні умови намагаються формулювати якнайширше – щоб охопити якомога більше ситуацій, у яких потрібний факт має місце, а необхідні умови – якомога вужчими, тобто охоплюють можливе менше число зайвих ситуацій, у яких досліджуваний факт вже не виконується. У такий спосіб достатні умови поступово наближаються до необхідних. Класичним прикладом такого роду досліджень є вивчення умов збіжності рядів.

Контрольні запитання

1. Навести приклади необхідної умови.
2. Навести приклади достатньої умови.
3. Коли умови вважаються необхідними і достатніми?

Задачі для самостійної роботи

На місті пропусків вставити слова “*необхідно*” або “*достатньо*”.

1.«Якщо ви отримаєте щеплення від малярії, то ви будете в безпеці в тропічних країнах».

Тут твердження полягає в тому, що отримання щеплення від малярії є __________умовою безпеки в тропічних країнах.

2.«Ви повинні отримати щеплення від холери, якщо ви збираєтеся отримати візу в Індію».
Тут твердження полягає в тому, що отримання щеплення від холери є __________ умовою отримання візи в Індію.
3.«Багато людей з багатими друзями не досягають успіху в національній політиці. Але ніхто не досягає успіху в національній політиці без багатих друзів».
Тут твердження полягає в тому, що наявність багатих друзів - це __________ умова (але не умова __________) для успіху в національній політиці.
4.«Хтось холостяк, якщо він неодружений чоловік».
Тут твердження полягає в тому, що бути неодруженим чоловіком є __________умовою для того, щоб бути холостяком.
5.«Наполеглива праця гарантує успіх».
Тут твердження полягає в тому, що наполеглива праця є __________ умовою успіху.
6. «Підсудна особа винна у вбивстві першого ступеня лише в тому випадку, якщо вона заздалегідь спланувала злочин».
Тут твердження полягає в тому, что планування злочину заздалегідь є __________ умовою обвинувачення у вбивстві першого ступеня.
7. «Договір є обовязковим лише тоді, коли немає шахрайства».
Тут твердження полягає в тому, что відсутність шахрайства є __________ умовою, щоб договір був обовязковим.
8. «Якщо не ризикувати, то нічого не отримаєш».
Тут твердження полягає в тому, что ризикнути - це __________ умова для отримання чогось.

2.4. Структура та види теорем

Для того щоб сформувати повне уявлення про об’єкт, розглядають не тільки основні поняття, але і його властивості.

Основні поняття, властивості формулюються в *аксіомах* – твердженнях, які приймаються без доведення.

Відомі основні поняття геометрії: точка, пряма, площина, які включені в аксіоми.

Система аксіом будь-якої теорії надає означення, які називаються *аксіоматичними.*

Теорема – це висловлювання, істинність якого встановлюється шляхом доведення. В теоремі виділяється *умова* A(дано) і *висновок* B (треба довести).

Розрізняють чотири різновиди теорем: пряму, обернену, протилежну та обернену до протилежної.

1. $A \Rightarrow B$– пряма теорема,

2. $B \Rightarrow A$ – обернена теорема,

3.$\neg A \Rightarrow \neg B$ –протилежна теорема,

4. $\neg B \Rightarrow \neg A$– теорема, обернена до протилежної.

Приклад 2.4.1.

«Якщо кути вертикальні, то вони рівні» – пряма теорема.

A: «кути вертикальні», B: «кути рівні».

$A \Rightarrow B$ – пряма теорема.

Обернена: $B \Rightarrow A$: «Якщо кути рівні, то вони вертикальні». Це хибне твердження.

Протилежна: $\neg A \Rightarrow \neg B$: «Якщо кути не вертикальні, то вони не рівні». Це також хибне твердження.

Обернена до протилежної: $\neg B \Rightarrow \neg A$: «Якщо кути не рівні, то вони не вертикальні». Це істинне твердження.

Між переліченими видами теорем простежується певний зв'язок. Встановлено, що теореми $A \Rightarrow B$ і $\neg B \Rightarrow \neg A$ рівносильні, тобто $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$. Отриману рівносильність прийнято називати законом контрапозиції (тобто доведення від супротивного).

Контрольні запитання.

1. Що таке аксіома?

2. Зі скількох частин складається теорема?

3. Види теорем.

4. Як називають теореми, кожну з яких можна отримати з іншої, якщо поміняти місцями умову і висновок?

5. Який існує зв’язок між видами теорем?

6. Чи завжди можна отримати істинне твердження міняючи місцями умову й висновок теореми?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Виділіть умови і висновки в кожній з теорем:

1) якщо в трикутнику всі сторони рівні, то і всі кути рівні;

2) сума двох парних чисел – парне число;

3) якщо число кратне 3 і 4, то воно кратне 12;

4) для того, щоб різниця ділилась на дане число, достатньо, щоб зменшуване і від’ємник ділилось на це число;

5) для того, щоб різниця натуральних чисел a і b була натуральним числом, необхідно і достатньо, щоб a було більше b.

Задача 2. Дана теорема: «Для того, щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно, щоб його протилежні сторони були рівні». Виділіть в теоремі умову і висновок та переформулюйте її, вживаючи слово:

1) випливає; 2) будь-який; 3) достатньо.

Задача 3. Які з теорем рівносильні теоремі «У будь-якому прямокутнику діагоналі рівні»:

1) якщо чотирикутник – прямокутник, то його діагоналі рівні;

2) якщо діагоналі в чотирикутнику не рівні, то цей чотирикутник не є прямокутником;

3) якщо діагоналі в чотирикутнику рівні, то цей чотирикутник – прямокутник;

4) для того, щоб діагоналі в чотирикутнику були рівні, достатньо, щоб цей чотирикутник був прямокутником?

Задача 4. Чи є наступні пари теорем, обернені одна одній:

1) Якщо чотирикутник – квадрат, то в ньому є прямий кут. Для того, щоб чотирикутник був квадратом, достатньо, щоб в ньому був прямий кут;

2) Для того, щоб число було натуральним, необхідно, щоб воно було додатнім. Якщо число натуральне, то воно додатне.

Задача 5. Сформулюйте обернену теорему, протилежну даній, а також обернену протилежній; встановіть, які з них хибні:

1) якщо запис числа закінчується нулем, то число ділиться на 5;

2) у ромбі діагоналі взаємно перпендикулярні.

Задача 6. Сформулюйте теорему, обернену даній, і встановіть, чи можливо дану теорему і її обернену об’єднати в одну:

1) якщо кути суміжні, то їх сума дорівнює 180°;

2) якщо два кути трикутника рівні, то і сторони, що лежать проти них, теж рівні.

2.5. Найпростіші схеми правильних міркувань

У математиці істинність будь-якого твердження встановлюється не спостереженням або експериментом, а логічним доведенням. Доведенням називають послідовність логічно пов’язаних міркувань, у якій кожний крок обґрунтовується аксіомами, означеннями, раніше доведеними теоремами або безпосередньо випливає з умов задачі.

Таким чином, спосіб зв'язку аргументів від умови до висновку називається методом доведення. Усі методи поділяються на дві фундаментальні групи: прямі та непрямі.Спосіб зв'язку аргументів від умови до висновку твердження називається *методом доведення*. Методи доведення поділяють на *прямі й непрямі.*

До прийомів прямого доведення належать:

1) спосіб перетворення умови твердження (синтетичний підхід);

2) прийом перетворення умови висновку твердження – пошук достатніх обґрунтувань для висновку (висхідний аналіз);

3) виявлення необхідних ознак справедливості твердження з подальшою перевіркою оберненості міркувань (спадний аналіз);

4) спосіб поетапного перетворення то умови, то висновку твердження;

5) індуктивний метод (індукція).

До непрямих методів доведення належать:

1) метод від супротивного (зведення до абсурда);

2) метод контрапозиції (доведення оберненого твердження).

Прийоми прямого доведення

1. *Спосіб перетворення умови (синтетичний метод).* Синтетичний метод є основною формою прямого доведення. Його суть полягає у тому, що з умови твердження Y послідовно отримують нові наслідки $B_1, B_2, \ldots, B_n$, поки не буде досягнуто висновку B. Отже, доведення будується як неперервний ланцюжок логічних переходів від умови до твердження, яке потрібно довести. Схематично синтетичний метод можна подати так::

$$Y \to B_1 \to B_2 \to \ldots \to B_n \to B,$$

де Y – умова твердження, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – проміжні наслідки, а B – висновок. Кожний перехід у цьому ланцюжку має бути обґрунтований означенням, відомою властивістю, раніше доведеною теоремою або алгебраїчним перетворенням.

Доведення будується шляхом безпосереднього логічного переходу від умови до висновку, тому такий спосіб відповідає класичному доведенню імплікації виду: $Y \to B$.

Приклад 2.5.1. Довести, якщо a ділить b і a ділить $b^2 - c$, то a ділить c.

Доведення. Нехай $a|b$ і $a|(b^2 - c)$. За означенням подільності з умови $a|b$ випливає, що існує ціле число k, для якого $b = ak$. тоді $b^2 = a^2k^2$, тобто $b^2 = a \cdot ak^2$. Оскільки ak^2 є цілим числом, то $a|b^2$. Отже, маємо два числа: b^2 і $b^2 - c$, які діляться на a. Тоді $b^2 - (b^2 - c)$ діляться на a. Але $b^2 - (b^2 - c) = c$. Таким чином, c діляться на a.

Доведення відповідає синтетичні схемі:

Y: $a|b$ і $a|(b^2 - c) \to B_1$: $b = ak$ для деякого цілого $k \to B_2$: $b^2 = a^2k^2 = a \cdot ak^2 \to$

$\to B_3$: $a|b^2 \to B_4$: $a|[b^2 - (b^2 - c)] \to B$: $a|c$.

Тут кожний наступний наслідок випливає з попереднього, а міркування рухається від умови Y до висновку B.

2. Спосіб перетворення висновку (висхідний аналіз). Цей метод полягає у пошуку достатніх умов для доведення висновку. Схема міркувань має вигляд:

$$B \leftarrow B_1 \leftarrow B_2 \leftarrow B_n \leftarrow Y$$

Для доведення висновку підбирають твердження B_1, що є достатньою умовою для отримання висновку B, потім твердження B_2, достатнє для B_1, і так далі, поки буде встановлено, що умова Y є достатньою для твердження B_n. Тобто, суть методу полягає у доведенні того, що умова теореми є достатньою для її висновку.

Приклад 2.5.2. Довести, що якщо $X \backslash (T \cup Z) = \varnothing$, то $X \subseteq T \cup Z$.

Доведення. Позначимо умову Y: $X \backslash (T \cup Z) = \varnothing$. Застосуємо спосіб перетворення висновку. Потрібно довести висновок B: $X \subseteq T \cup Z$. Для цього достатнь, щоб для будь-якого елемента x з умови $x \in X$ випливало $x \in T \cup Z$. Це виконується тоді, коли не існує елемент x для якого одночасно виконуються умови $x \in X$ і $x \notin T \cup Z$. Але множина всіх таких елементів є множиною $X \backslash (T \cup Z)$. За умовою $X \backslash (T \cup Z) = \varnothing$. Отже, для кожного $x \in X$ виконується $x \in T \cup Z$. Таким чином $X \subseteq T \cup Z$.

Тому маємо схему висхідного аналізу:

$$B\colon X \subseteq T \cup Z \leftarrow B_1\colon x \in X \Rightarrow x \in T \cup Z \leftarrow B_2\colon \overline{x \in X \wedge x \notin T \cup Z} \leftarrow Y\colon X \backslash (T \cup Z) = \varnothing.$$

3. Прийом перетворення висновку (спадний аналіз). Спадний аналіз ґрунтується на припущенні, що висновок теореми вже правильний. Виходячи з цього припущення, отримують послідовність наслідків:

$$B \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \ldots \rightarrow B_n \rightarrow Y.$$

У результаті знаходять умови, необхідні для справедливості висновку. На відміну від висхідного аналізу, спадний аналіз сам по собі не є доведенням, оскільки він лише дозволяє встановити необхідні умови. Для завершення доведення необхідно перевірити, що знайдені умови є також достатніми.

4. Прийом послідовного (почергового) перетворення умови й висновку. У реальному процесі математичного доведення аналітичний і синтетичний підходи рідко застосовуються ізольовано. Зазвичай доведення розгортається одночасно у двох напрямах: від умови до висновку і від висновку до умови. Тому часто використовується спосіб почергового перетворення умови й висновку, при якому окремі етапи аналізу та синтезу взаємно доповнюють один одного.

Приклад 2.5.3. Довести, що якщо $0 \leq x \leq 2$, то $-x^3 + 4x + 1 > 0$.

Доведення. Позначимо умову Y: $0 \leq x \leq 2$, висновок B: $-x^3 + 4x + 1 > 0$.

Безпосередній перехід від умови до висновку не є очевидним, тому застосуємо прийом почергового перетворення умови й висновку.

Почнемо з аналізу висновку. Вираз $-x^3 + 4x + 1 > 0$ містить кубічний член, тому доцільно спробувати розкласти його на множники. Маємо: $-x^3 + 4x = x(2-x)(2+x)$. Отже, $-x^3 + 4x + 1 = x(2-x)(2+x) + 1$. Тому для доведення висновку достатньо встановити, що добуток $x(2-x)(2+x)$ є невідємним.

Переходимо до синтетичної частини доведення. Із умови $0 \leq x \leq 2$ випливає, що $x \geq 0,\ 2 - x \geq 0,\ 2 + x > 0$. Отже, всі множники добутку $x(2-x)(2+x)$ є невід'ємними, тому $x(2-x)(2+x) \geq 0$. Додаємо до обох частин нерівності 1, отримаємо:

$$x(2-x)(2+x) + 1 > 0,$$

Таким чином, $-x^3 + 4x + 1 > 0$. Твердження доведено.

Схематично міркування можна подати так:

Y: $0 \leq x \leq 2 \rightarrow B_1$: $x \geq 0, 2 - x \geq 0, 2 + x > 0 \rightarrow B_2$: $(2-x)(2+x) \geq 0 \leftarrow$

$\leftarrow B_3$: $-x^3 + 4x = x(2-x)(2+x) \leftarrow B$: $-x^3 + 4x + 1 > 0$.

5. Метод індукції

Слово «індукція» походить від латинського induktio – наведення. У математиці розрізняють повну та неповну індукцію.

Неповна індукція полягає у тому, що на основі дослідження окремих елементів деякої множини робиться висновок про всі елементи цієї множини. Такі висновки можуть бути як істинними, так і хибними. Наприклад, твердження про те, що кожне число, запис якого закінчується цифрою 5, ділиться на 5, є істинним. Водночас твердження «для будь-якого натурального числа n значення виразу $n^2 + n + 41$ є простим числом» хибне. Дійсно, якщо $n = 41$, то отримаємо складне число $43 \cdot 41$.

Доведення *методом повної індукції* полягає у перевірці всіх можливих випадків, при яких твердження є правильним. Такий метод застосовують тоді, коли кількість випадків є скінченною.

Приклад 2.5.4. Розглянемо таку теорему:

Теорема. Значення виразу $c = a^2 + b^2$, $(a, b\ \in \mathbb{Z})$ є число, що при діленні на 4 не має в остачі 3.

Доведення теореми проведемо, розглядаючи три випадки:

1) обидва числа парні;

2) обидва числа непарні;

3) одне число парне, друге – непарне.

1) Нехай a, b –парні, тобто $a = 2m, \ b = 2n, \ (n, m \in \mathbb{Z})$. Дістанемо:

$c = (2m)^2 + (2n)^2 = 4m^2 + 4n^2 = 4 \cdot (m^2 + n^2) \vdots 4,$ тобто остача 0.

2) Нехай a, b – непарні числа, тобто $a = 2m + 1, \ b = 2n + 1, \ (n, m \in \mathbb{Z})$. Маємо

$c = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = 4 \cdot (m^2 + n^2 + m + n) + 2$,

а це означає, що при діленні c на 4 дістанемо остачу 2, а не 3.

Випадок 3) пропонується розглянути самостійно.

Особливе місце у математиці займає метод математичної індукції. Його використовують для доведення тверджень, що залежать від натурального параметра n.

Принцип математичної індукції.

Нехай твердження, у формулюванні якого є натуральне число n, істинне при n=1 , та з справедливості даного твердження при $n = k$ випливає його справедливість при $n = k + 1$, тоді твердження є істинним для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Доведення методом математичної індукції проводиться за такою схемою.

1. Перевіряють твердження при $n = 1$. Цей крок доведення прийнято називати *базою індукції.*
2. Виконують індуктивний крок: показують справедливість твердження при $n = k + 1$ за припущення, що воно справедливе при $n = k$.

Приклад 2.5.5. Довести, що $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

1. Перевіримо, чи це твердження справджується для першого значення $n = 1$, підставивши його у вираз:

$2 - 1 = 1^2$

2. Припустімо, що це твердження справджується для $n = k$, так що (використовуючи вираз, даний в умові задачі, тільки замінюючи n на k :

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad (1)$$

3. Потрібно показати, що це справджується для $n = k + 1$, так що (використовуючи вираз, даний в умові задачі, тільки замінюючи n на $k + 1$):

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2 \ (2)$$

4. Переходимо до розрахункової частини доведення. Починаємо з лівої частини (2) й продовжуємо з використанням припущення (1).

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2(k + 1) - 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Непрямі методи доведення

1. Метод від супротивного (або зведення до абсурда) є непрямим методом доведення, який ґрунтується на припущенні, що твердження, яке потрібно довести, є хибним. Якщо з такого припущення логічно випливає суперечність, то робиться висновок, що початкове твердження є істинним.

Нехай потрібно довести теорему виду $A \Rightarrow B$. У методі від супротивного припусують, що умова A виконується, а висновок B є хибним. Після цього, спираючись на означення, аксіоми, раніше доведені теореми та логічні міркування, виводять наслідки з такого припущення. Якщо в результаті отримують суперечність, то це означає, що припущення про хибність висновку B було неправильним. Отже, висновок B є істинним. Тому імплікація $A \Rightarrow B$ є правильною.

Приклад 2.5.6. Розглянемо теорему:

Теорема. Якщо дві різні прямі a і b паралельні третій прямій c, то вони паралельні між собою.

Припустимо $\neg B$, тобто a і b не паралельні. Тоді вони перетинаються в якійсь точці K, яка не належить c. Дістанемо, що через точку K поза прямою c можна провести дві прямі a і b, які паралельні c, а це суперечить аксіомі паралельності, тобто є хибним твердженням. Отже, правильним твердженням є B.

Приклад 2.5.7. Довести, що в трикутнику може бути тільки один тупий кут.

Доведення. Припустимо супротивне, тобто що в трикутнику існують два тупі кути. Оскільки міра кожного тупого кута більша за 90°, то сума двох тупих кутів є більшою за 180°. Тоді сума всіх кутів трикутника також буде більшою за 180°. Але це суперечить теоремі про суму кутів трикутника, згідно з якою сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180°. Отримали суперечність. Отже, припущення про існування двох тупих кутів є хибним. Тому в трикутнику може бути не більше одного тупого кута.

2. Метод контрапозиції (доведення оберненого твердження) ґрунтується на тому, що імплікації $A \Rightarrow B$ і $\neg B \Rightarrow \neg A$ є логічно рівносильними. Тому замість доведення твердження $A \Rightarrow B$ можна довести його контрапозицію $\neg B \Rightarrow \neg A$. У багатьох випадках такий спосіб є простішим, ніж пряме доведення.

Метод контрапозиції містить такі етапи:

1. Формулюють контрапозицію твердження: $\neg B \Rightarrow \neg A$.

2. Припускають, що висновок B є хибним.

3. Використовуючи означення, аксіоми та раніше доведені теореми, доводять хибність умови A.

4. Роблять висновок про істинність початкової імплікації $A \Rightarrow B$.

Приклад 2.5.8. Розглянемо теорему:

Теорема. Довести, що коли добуток двохцілих чисел ab є непарним, то обидва множники a і b є непарними.

Позначимо A: «добуток ab – непарне число», T: «a – непарне число», S: «b – непарне число». Тоді теорема скорочено запишеться так:

$$A \Rightarrow S \wedge T, \text{ або } A \Rightarrow B, \text{ де } B\text{- «}S \wedge T\text{»}.$$

Припустимо, що $\neg B = \neg(S \wedge T) = \neg S \vee \neg T$, тобто один із множників a або b є парним числом. Нехай, наприклад, a – парне, тобто $a = 2m,\ \ m \in \mathbb{Z}$. Тоді $ab = 2mb$ –парне число, тоді дістали $\neg$A. Таким чином, теорема $\neg$B $\Rightarrow$ $\neg$A доведена, а значить доведена і дана теорема $A \Rightarrow B$.

Чи можливо застосувати метод від супротивного до будь-якої теореми? Так. Кожне пряме доведення теореми можна перетворити в доведення способом від супротивного. Робиться це дуже просто: припускаємо "супротивне", а потім повторюємо "пряме" доведення. В результаті отримуємо суперечність, яка і доводить теорему. Інша справа, чи потрібно будь-яку теорему доводити методом від супротивного? Звісно, ні.

Щоб впевнитися в тому, що твердження "Якщо A, то B" - хибне, достатньо навести принаймні один випадок, який демонструє, що A виконується, а водночас B - ні. Ця демонстрація і називається контрприкладом.

Цей спосіб можна використовувати при доведенні від супротивного теорем існування. Наприклад, існує об'єкт, якому притаманна дана властивість P. У цьому випадку заперечення звучить таким чином: "який би не був об'єкт, для нього властивість P не виконується". Якщо після цього ми приведемо контрприклад, то цим спростуємо заперечення і доведемо потрібне.

Контрольні запитання

1. Як називається метод доведення теореми, коли ми припускаємо, що висновок теореми неправильний?
2. Які основні види прямих доведень?
3. Які основні види непрямих доведень?
4. Що таке повна індукція?
5. Що відбудеться, якщо доводити методом від супротивного хибне твердження?
6. В якому випадку при доведенні від супротивного можна використовувати спосіб контрприкладу?
7. У чому полягає спосіб перетворення умови твердження (синтетичний метод)?
8. Якою є схема синтетичного методу?

9. У чому полягає спосіб перетворення висновку (висхідний аналіз)?
10. Якою є схема висхідного аналізу?
11. У чому полягає прийом перетворення висновку (спадний аналіз)?
12. Чому спадний аналіз сам по собі не є повним доведенням?
13. У чому полягає прийом послідовного перетворення умови й висновку?
14. Чому в математичних доведеннях часто поєднують аналіз і синтез?
15. У чому полягає метод від супротивного?
16. Якою є схема доведення методом від супротивного?
17. Що означає зведення до абсурда?
18. У чому полягає метод контрапозиції?
19. Чому твердження «P⇒Q» є рівносильним твердженню «¬Q⇒¬P»?
20. У яких випадках доцільно використовувати метод контрапозиції?
21. Що називається контрприкладом?
22. Для чого використовують контрприклади?
23. Чому наявність одного контрприкладу спростовує загальне твердження?
24. Чим відрізняється пряме доведення від непрямого?
25. Які переваги має пряме доведення?
26. Які труднощі можуть виникати під час доведення методом від супротивного?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Доведіть нерівність $a^2+b^2+c^2+3$, використовуючи прямий метод доведення і метод доведення від супротивного.

Задача 2. Довести теорему, обернену до даної, методом від супротивного:
Якщо дискримінант додатний, то квадратне рівняння має дійсні та різні корені.

Задача 3. Довести методом математичної індукції твердження:
а) $1+3+5+\cdots+2(n-1)=n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
б) $(1+2^{3n-2}+4^{3n-2}) \vdots 7 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$;
в) $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)$.

Задача 4. Використовуючи синтетичний метод, довести, що сума трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3.

Задача 5. Використовуючи синтетичний метод, довести, що якщо діагоналі паралелограма рівні, то цей паралелограм є прямокутником.

Задача 6. Використовуючи спосіб перетворення висновку (висхідний аналіз), довести, що якщо $A \subseteq B$, $A \cap C \subseteq B \cap C$.

Задача 7. Використовуючи метод від супротивного, довести, що якщо квадрат числа є парним, то саме число є парним.

Задача 8. Методом від супротивного, довести, що число $\sqrt{2}$ є ірраціональним.

Задача 9. Довести методом контрапозиції, що якщо r – ірраціональне число, то $\sqrt{r}$ також є ірраціональним числом

Задача 10. Навести контрприклад до твердження: «Якщо число ділиться на 4, то воно ділиться на 8».

Задача 11. Для кожного твердження:

а) записати імплікацію;

б) записати контрапозицію;

в) визначити, чи доцільно застосовувати метод контрапозиції.

Якщо сума двох натуральних чисел є непарною, то одне з них є парним.

Якщо квадрат числа є парним, то саме число є парним.

2.6. Формули алгебри логіки

Складене висловлювання, яке ожна отримати з простих висловлювань в результаті застосування логічних операцій, називається формулою алгебри логіки.

Ще раз нагадаємо порядок виконання бінарних логічних операцій: спочатку – конюнкція, потім дизюнкція і в останню чергу – імплікація і єквівалентність. Логічні значення формули алгебри логіки описуються таблицями істинності.

Формула, яка є істинною для всіх значень змінних, називається *тотожньо істинною(загальнозначущою)* або *тавтологією*.

Формула, яка є хибною для всіх значень змінних, називається *тотожньо хибною(суперечливою)* або *протиріччям*.

Формула, яка є істинною хоча б на одному наборі змінних і не є тавтологією, називається *виконуваною(несуперечливою).*

Тавтології мають іншу назву – логічні закони, або закони алгебри висловлювань.

Способи доведення логічних законів:

1) побудова таблиць істинності;
2) пряма перевірка за означеннями логічних операцій того, що формула в жодному наборі не приймає значення нуль;
3) тотожні перетворення логічних формул.

Основні логічні закони

1) Закон тотожності (якщо x, то x): $X \to X$.

2) Закон суперечності (не можуть одночасно бути істинними висловлення X та $\neg X$: $\neg(X \wedge \neg X)$.

3) Закон вилучення третього (з двох висловлювань X та $\neg X$ принаймні одне істинне): $X \vee \neg X$.

4) Закон подвійного заперечення: $\neg(\neg X) = X$.

5)Формули (закони) де Моргана: $\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$; $\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$

Кожну логічну операцію можна подати через інші логічні операції:

1) $X \vee Y = \neg(\neg X \wedge \neg Y)$;

2) $X \wedge Y = \neg(\neg X \vee \neg Y)$;

3)$X \to Y = \neg X \vee Y$;

4)$X \to Y = \neg(X \wedge \neg Y)$;

5) $X \leftrightarrow Y = (X \to Y) \wedge (Y \to X)$.

Іноді для встановлення того, чи є формула тавтологією, користуються так званим прийомом пошуку контрприкладу (інакше – методом від супротивного). Розглянемо його дію на прикладах.

Нехай потрібно перевірити, чи є тавтологією формула

$$A = (((a \to \neg b) \wedge (b \to (a \wedge c))) \wedge (\neg c \to \neg a)) \to (a \vee \neg c).$$

Припустимо, що формула A не є тавтологією. Тоді принаймні на одному наборі значень формула A набуває значення 0. Спробуємо відшукати цей набір. Оскільки останньою операцією формули A є імплікація, то $a = 0$ *і* $c = 1$. Звідси $(a \to \neg b) = 1$ *і* $(\neg c \to \neg a) = 1$. Залишилось з'ясувати, чи може за цих умов вираз $(b \to (a \wedge c))$ дорівнювати одиниці. Відповідь позитивна. Отже, ми знайшли набір (0, 0, 1), на якому формула A набуває значення 0, тобто відшукали контрприклад, який свідчить, що формула A не є тавтологією.

У разі, коли при спробі відшукати контрприклад для певної формули A приходимо до суперечності, можемо стверджувати, що A — тавтологія. Наприклад, для формули

$$B = (((a \to \neg b) \wedge (b \to (a \wedge c))) \wedge (\neg c \to \neg a)) \to (a \vee \neg b),$$

яка є дещо зміненим варіантом попередньої формули A, матимемо $a = 0$ *і* $b = 1$, тобто $(a \to \neg b) = 1$, $(\neg c \to \neg a) = 1$, однак $(b \to (a \wedge c)) = 0$, що суперечить припущенню $(b \to (a \wedge c)) = 1$. Отже, формула B — тавтологія.

Кожній формулі логіки висловлювань можна співставити певне складене реченя природної мови, і, навпаки, «правильно» сформульоване складене речення можна записати у вигляді логічної формули. Аналіз складеного речення варто починати з перевірки: чи не є воно скороченим варіантом ширшого складеного речення? Якщо так – короткий варіант розгортають у повний. Далі виділяють прості речення і беруть їх у дужки, залишаючи поза ними службові слова, що з'єднують прості речення. Цю процедуру повторюють доти, доки все складене речення цілком не опиниться у дужках. Після цього сполучники та звороти живої мови замінюють відповідними логічними зв'язками, а прості речення —формулами.

Приклад 2.6.1. Записати у вигляді формули логіки висловлювань таке речення: *«Оскільки яліг пізно спати, я проспав і через це не пішов на пару».*

Розв'язок. Виділимо прості речення у цьому складеному реченні та візьмемо їх у дужки, залишаючи службові слова поза їх межами:
«(Оскільки (я ліг пізно спати), (я проспав)) і через це не (пішов на пару)».
Всі три речення зв'язані службовими словами, що виражають логічні відношення. Крім цього, перед третім простим реченням стоїть частка «*не*», що відповідає логічній операції «заперечення». Третє просте речення не є повним, оскільки розділяє спільний підмет «*я*» з другим простим реченням. Доповнимо третє речення відсутнім підметом і введемо P, *Q, S* таким чином:
P — «Я ліг пізно спати»;
Q— «Я проспав»;
S — «Я пішов на пару».
Замінимо прості речення символами, а службові слова — логічними зв'язками, одержимо формулу логіки висловлень:

$$(P \to Q) \to \neg S.$$

Приклад 2.6.2. Побудувати формулу і таблицю істинності для висловлень: *«Якщо студент не підготувався до іспиту або йому попався складний білет, то він не складе іспит на позитивну оцінку».* Визначити, в яких випадках це висловлення виявиться хибним.

Розв'язок. Виділимо прості висловлення і послідовність їх поєднання службовими словами за допомогою дужок: «Якщо ((студент не підготувався до іспиту) або (йому попався складний білет)), то (він не складе іспит на позитивну оцінку)». Позначимо:
A— «Студент підготувався до іспиту»;
B— «Студенту попався складний білет»;
C— «Студент складе іспит на позитивну оцінку».

Одержана формула має вигляд: $(\neg A \vee B) \to \neg C$. Побудуємо відповідну таблицю істинності:

Таблиця істинності $(\neg A \vee B) \to \neg C$.

A	B	C	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$\neg C$	$\neg A \vee B \to \neg C$
0	0	0	1	1	1	1

0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0

З таблиці ми бачимо, що існують три інтерпретації: $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$, на яких вихідне твердження виявляється хибним. Інтерпретація $(0, 0, 1)$, означає, що студент не підготувався до іспиту, але одержав нескладний білет, і йому вдалося скласти іспит на позитивну оцінку. У випадку (1, 1, 1) студенту попався важкий білет, але він підготовлений до цього іспиту і склав іспит на позитивну оцінку. В інтерпретації $(0, 1, 1)$ студент не підготувався до іспиту, йому попався важкий білет, але він все одно склав іспит на позитивну оцінку.

Контрольні запитання

1) Що називається логічним законом?
2) Що називається логічною суперечністю?
3) Що називається твердженням, що логічно виконується?
4) Назвати та записати основні закони алгебри логіки.
5) Як довести, що формула є тавтологією?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Чи є такі формули загальнозначущими, суперечливими або несуперечливими:

а) $\neg(\neg A) \to A$;

б) $(A \to B) \to (B \to A)$;

в) $(A \wedge (B \to A)) \to A$;

г) $(A \vee \neg B) \vee (\neg A \vee B)$.

Задача 2. Розставити різними способами дужки у таких формулах:

а) $\neg A \vee \neg B \wedge C$;

б) $A \to B \to C \to D$.

Задача 3. Виключити якомога більше число дужок у формулі:

а) $(\neg((A) \vee (C))) \vee (B)$;

б) $(((A) \to (B)) \to (C) \vee ((A) \to ((B) \to (C)))$;

в) $((B) \leftrightarrow (\neg(C))) \vee (((A) \to (A)) \to ((B) \vee (D)))$;

г) $\neg((\neg((A) \vee (B))) \neg (C)) \to ((\neg((C) \to (D))) \vee E))$;

д) $(\neg((B) \leftrightarrow (C))) \wedge ((\neg(E)) \vee (\neg(A)))$;

е) $((\neg((A) \to (B))) \vee (\neg((C) \vee (D))) \wedge \neg(F))$.

Задача 4. Побудуйте складені висловлення з використанням тільки зазначених операцій:

а) еквівалентність;

б) імплікація і кон'юнкція;

в) заперечення, кон'юнкція і диз'юнкція.

Задача 5. Доведіть, що заперечення висловлювання «A є достатня та необхідна умова для B» еквівалентне висловлюванню «$\neg A$ є достатня і необхідна умова для $\neg B$».

Задача 6. Побудуйте висловлювання, еквівалентне $A \vee B$, використовуючи тільки операції заперечення і кон'юнкції.

Задача 7. Побудуйте складене висловлювання, еквівалентне $A \vee B$, використовуючи тільки операції кон'юнкції і заперечення.

Задача 8. Побудуйте складене висловлювання, еквівалентне $\mathrm{A} \wedge B$, використовуючи тільки операції диз'юнкції і заперечення.

Задача 9. Побудуйте два складених висловлювання, еквівалентних $A \to B$, використовуючи тільки:

а) операції диз'юнкції і заперечення;

б) заперечення і кон'юнкції.

Задача 10. Використовуючи тотожності, спростіть формули логіки висловлювань:

а) $\neg\, (A \vee B \vee C)\, (A\, (B \vee \neg C)) \wedge \neg B$;

б) $(A \vee B) \wedge \neg C \vee A \vee \neg C \vee B \vee A$.

2.7. Булеві функції. Основні поняття

2.7.1. Булеві змінні та булеві функції

Розглянемо множину $B = \{0; 1\}$ і n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, кожна з яких може набувати лише значення 0 або 1. Змінні $x_i \in B$, де $i = 1, 2, \dots, n$ називають *булевими* або *логічними змінними*. Значення 0 і 1 булевих змінних називаються *булевими константами*. Набір (кортеж) $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ з конкретними значеннями змінних називають *двійковим словом* (n-словом) або *булевим набором* довжини n, або *двійковим вектором* довжини n.

Функція виду $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка задає однозначне відображення множини всіх булевих наборів$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у множину $B = \{0; 1\}$ називається *булевою функцією* (або *логічною функцією*, або *функцією алгебри логіки*, або *перемикальною функцією*).

Під *інтерпретацією* булевої функції розуміють фіксований значень змінних $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Лема. Число різних булевих наборів довжини n дорівнює 2^n.

Теорема. Число різних булевих функцій від n аргументів дорівнює 2^{2^n}.

Приклад 2.7.1. Визначити кількість булевих функцій, які залежать від 5-ти булевих змінних.

Розв'язання. Число різних булевих функцій від 5 аргументів дорівнює

$$2^{2^5} = 2^{32} = 4294967296.$$

2.7.2. Способи задання булевих функцій

Булеві функції можна задати такими способами:

1. За допомогою таблиці істинності (значення на кожній з інтерпретацій).

Таблиця, в якій кожному набору аргументів поставлено у відповідність значення функції, називається таблицею істинності.

Обмежимось розглядом елементарних функцій, які є залежними від одного і двох аргументів.

а) Булеві функції однієї змінної f(x).

$n = 1$. Для одного аргументу є 2^{2^1} – чотири булеві функції.

Задамо табличним способом (таблицею істинності) всі елементарні булеві функцій однієї змінної.

	0	x	$\overline{x}$	1
x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Аналітично (формулою) вони записуються так: $f_0(x) = 0, f_1(x) = x, f_2(x) = \overline{x}$, $f_3(x) = 1$.

Відповідно кожна із чотирьох функцій $f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ має свою назву, а саме:

- функція $f_0(x)$ – абсолютно хибна, тобто тотожньо дорівнює нулю, її ще називають тотожний нуль або константа нуля;

- функція $f_1(x)$ – змінна x (повторює значення змінної x і тому збігається з її значеннями);

- функція $f_2(x)$ – логічне заперечення, вона набирає значення, протилежні до значення аргумента x, її називають "інверсія x " або "заперечення x;

- функція $f_3(x)$ – абсолютно істинна, тобто тотожньо дорівнює одиниці, її ще називають константою одиниці.

б) Булеві функції двох змінних $f(x_1, x_2)$.

$n = 2$. Від двох аргументів маємо $2^{2^2} = 16$ елементарних булевих функцій.

Загальна таблиця відповідності для булевих функцій двох змінних має вигляд.

№	x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
2	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
3	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
			0	$\wedge$	$\overline{\rightarrow}$	x_1	$\overline{\leftarrow}$	x_2	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\overline{x}_2$	$\leftarrow$	$\overline{x}_1$	$\rightarrow$	$\vert$	1

Кожна із наведених функцій має наступні назви:

- $f_0(x_1, x_2) = 0$ – тотожний нуль;

- $f_{15}(x_1, x_2) = 1$ – тотожна одиниця;

- $f_1(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ – кон'юнкція (логічне множення);

- $f_{14}(x_1, x_2) = x_1 | x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2}$ – штрих Шефера або інверсія (заперечення) кон'юнкції

- $f_7(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ – диз'юнкція (логічне додавання);

- $f_8(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$ – стрілка Пірса або інверсія (заперечення) кон'юнкції;

- $f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$ – імплікація від x_1 до x_2;

- $f_2(x_1, x_2) = \overline{x_1 \rightarrow x_2}$ – інверсія (заперечення) імплікації від x_1 до x_2;

- $f_{11}(x_1, x_2) = x_2 \rightarrow x_1$ – (обернена) імплікація від x_2 до x_1;

- $f_4(x_1, x_2) = \overline{x_2 \rightarrow x_1}$ – інверсія (заперечення) імплікації від x_2 до x_1;

- $f_9(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$ – еквіваленція (рівносильність);

- $f_6(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \leftrightarrow x_2}$ – сума за модулем 2 або сума Жегалкіна або нерівносильність;

- $f_3(x_1, x_2) = x_1$;

- $f_{12}(x_1, x_2) = \overline{x}_1$ – інверсія (заперечення) x_1;

- $f_3(x_1, x_2) = x_2$;

- $f_{12}(x_1, x_2) = \overline{x}_2$ – інверсія (заперечення) x_2.

Порядок виконання операцій: $\overline{}$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Приклад 2.7.2. Побудувати таблицю істинності для булевої функції

$$f(x, y, z) = (x \oplus y) \wedge z \rightarrow \overline{x} \vee \overline{z}.$$

Розв'язання

x	y	z	$\overline{x}$	$\overline{z}$	$x \oplus y$	$(x \oplus y) \wedge z$	$\overline{x} \vee \overline{z}$	f

0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1

2. Векторний спосіб.

Булева функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, подається у вигляді вектора своїх значень.

Приклад 2.7.3. Булеву функцію з попереднього прикладу представити у вигляді вектора своїх значень.

Розв'язання

11111011.

3. Порядковим номером, який має ця функція.

Кожній функції привласнюється порядковий номер у вигляді натурального числа, двійковий код якого зображує стовпчик значень функції у таблиці істинності. Молодшим розрядом вважається самий нижній рядок, інтерпретація $(1,1, \ldots, 1)$, а старшим – самий верхній $(0, 0, \ldots, 0)$. Вказаний порядковий номер функції як двійковий, так і десятковий, повністю визначає функцію.

Приклад 2.7.4. Функція задана таблицею істинності. Знайти її порядковий номер.

а)

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Розв'язання

$0110_2 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 6.$

Маємо булеву функцію з порядковим номером 6 – це $f_6 = f_6(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$.

б)

x_1	x_2	x_3	$f(x_1;\ x_2; x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$01010111_2 = 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 +$

$+0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 16 +$

$+4 + 2 + 1 = 87$

Маємо булеву функцію з порядковим номером 87.

Приклад 2.7.5. Побудувати таблицю істинності для булевої функції з порядковим номером 14.

Розв'язання

Знайдемо двійкове число, яке відповідає десятковому числу 14. Зобразивши це число, як суму степенів числа 2, одержимо

$$14 = 8 + 6 = 2^3 + 4 + 2 = 2^3 + 2^2 + 2^1 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1110_2.$$

Таким чином, $f_{14}(x, y)$ відповідає двійковому числу 1110_2.

x	y	f_{14}
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

4. Аналітично – формулою.

Булеві функції можуть бути задані аналітично, тобто формулами.

Нехай X – множина булевих змінних, $F = \{\overline{\ \ }, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \ldots\}$ – множина логічних зв'язок (базис).

Формулою над F називається будь-який вираз виду:

1) будь-яка змінна x з множини X;

2) символи 0 і 1;

3) якщо A і B формули над F, то $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ – формули;

4) інших формул, крім визначених в пп. 1-3 не існує.

Про формулу, яка задає булеву функцію, кажуть, що вона реалізує або представляє цю функцію.

Для спрощення запису формул над множиною логічних зв'язок F:

1) зовнішні дужки опускають;

2) за умовчання приймається такий пріорітет основних логічних зв'язок: заперечення $\overline{\ \ }$, кон'юнкція $\wedge$, диз'юнкція $\vee$, імплікація $\rightarrow$ та еквівалентність $\leftrightarrow$.

Формули, що зображують одну й ту ж функцію, називаються еквівалентними або рівносильними.

Еквівалентність формул можна перевірити за допомогою таблиць істинності. Їх будують для кожної формули; отримані результати порівнюють для всіх можливих інтерпретацій. Еквівалентність формул позначають знаком рівності. Якщо формули еквівалентні, їх можна замінювати одну на іншу. Але цей спосіб не зручний, найчастіше для перевірки формул на еквівалентність використовують основні закони булевої алгебри, які мають такий вигляд:

№ п/п	Назва закону	Логічний запис
1	Закон комутативності (переставний)	$x \wedge y = y \wedge x$; $x \vee y = y \vee x$; $x \oplus y = y \oplus x$
2	Закон асоціативності (сполучний)	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$; $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
3	Закон дистрибутивності (розподільний)	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$; $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ $x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$
4	Закон подвійності (теорема де Моргана)	$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$; $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$
5	Закон поглинання	$x \wedge (y \vee x) = x$; $x \vee (x \wedge y) = x$
6	Закон іденпотентності	$x \wedge x = x$; $x \vee x = x$
7	Закон суперечності	$\overline{x \wedge \bar{x}} = 1$;
8	Закон виключення третього	$x \vee \bar{x} = 1$
9	Закон подвійного заперечення	$x = \bar{\bar{x}}$
10	Закони склеювання	$(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x$; $(x \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y) = x$
11		$x \to y = \bar{x} \vee y$

Приклад 2.7.6. Довести істинніс формули $\bar{x} \to \overline{\bar{x}y} = \vee\bar{y}$.

Розв'язання

$\bar{x} \to \overline{\bar{x}y} = \bar{x} \to \overline{\bar{x} \wedge y} =_{10} \bar{x} \to \left(\bar{\bar{x}} \vee \bar{y}\right) =_{9} \bar{x} \to (x \vee \bar{y}) =_{11} \bar{\bar{x}} \vee (x \vee \bar{y}) =_{9,2}= (x \vee x) \vee \bar{y} =$

$=_{4} x \vee \bar{y}$

5. Геометричний спосіб.

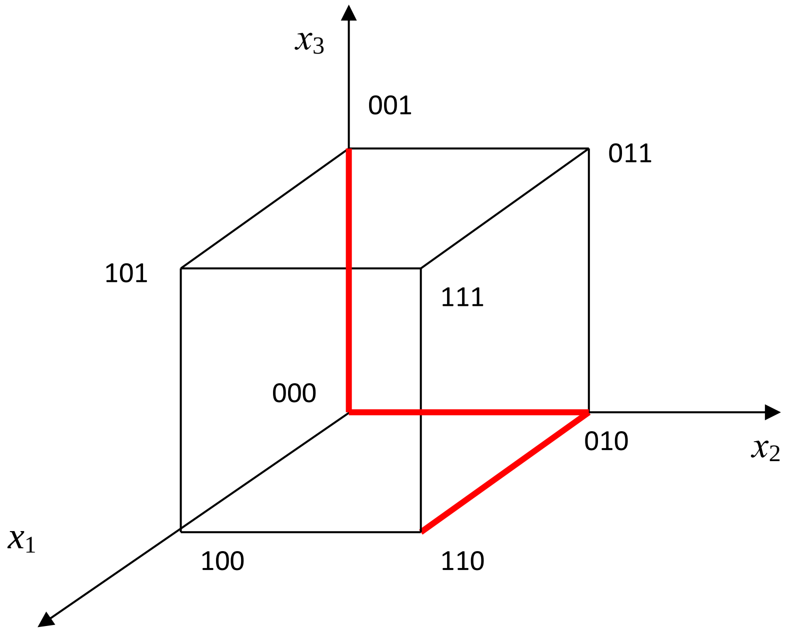
При геометричному способі задання область визначення булевої функції інтерпретується як координати вершин *n*-вимірного одиничного (булевого) куба. Суто геометрична інтерпретація ефективна для невеликого числа змінних.

Також булеві функції можна представити релейно-контактними схемами або схемами з функціональних елементів. Про це розмова піде у наступному пункті.

Приклад 2.7.7. Зобразити графічно функцію, таблиця істинності якої має вигляд:

№ набору	*x*	*y*	*z*	*f(x,y,z)*
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Графічне зображення заданої булевої функції матиме вигляд (жирними червоними лініями задана графічно функція):



Графічне подання булевих функцій є зручним при дослідженні їх мінімізації.

2.7.3. Використання булевих функцій у техніці

Релейно-контактна схема є пристроєм, що складається з провідників і контактів, які з'єднують полюси джерела струму. Контакти поділяються на замикальні та розмикальні.

Кожен контакт пов’язаний із певним реле. Якщо реле спрацьовує, то всі підключені до нього замикальні контакти замикаються, а розмикальні – розмикаються.

Булеві функції широко застосовуються під час аналізу та синтезу релейно-контактних схем. Будь-якій булевій функції можна поставити у відповідність деяку релейно-контактну схему. І навпаки, для кожної релейно-контактної схеми можна записати відповідну булеву функцію.

Основні логічні операції моделюються такими з’єднаннями:

кон’юнкція – послідовним з’єднанням контактів;

диз’юнкція – паралельним з’єднанням контактів.

Розглянемо схеми, подані на рисунках 1 і 2.

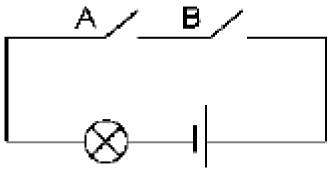


Рис. 2.1. Послідовне з’єднання контактів

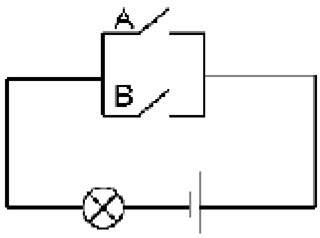


Рис. 2.2. Паралельне з’єднання контактів

Складемо таблицю залежностей стану ланцюгів від різних станів контактів. Введемо позначення: **1** – контакт замкнутий, струм у ланцюзі є; **0** – контакт розімкнуто, струм у ланцюзі відсутній.

A	*B*	**Стан ланцюга з послідовним з'єднанням**	**Стан ланцюга з паралельним з'єднанням**
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Як видно з таблиці, ланцюг з послідовним з'єднанням відповідає логічній операції кон'юнкція, так як струм у ланцюзі з'являється лише при одночасному замиканні контактів *A* і *B*.

Ланцюг з паралельним з'єднанням відповідає логічної операції диз'юнкції, так як струм в ланцюзі відсутній тільки в момент, коли обидва контакти розімкнуті.

Контрольні запитання

1. Що називається булевою змінною? Які значення може набувати булева змінна?

2. Що називають булевими константами? Що називають булевим набором довжини n? Що називають двійковим словом?

3. Що називають булевою функцією? Що розуміють під інтерпретацією булевої функції?

4. Чому дорівнює число різних булевих наборів довжини n?

5. Чому дорівнює число різних булевих функцій від n аргументів? Скільки існує булевих функцій однієї змінної? Скільки існує булевих функцій двох змінних?

6. Що називається таблицею істинності?

7. Які способи задання булевих функцій існують?

8. Що називається формулою над множиною логічних зв'язок?

9. Який порядок виконання логічних операцій?

10. Що називається геометричним способом задання булевої функції? Як інтерпретується область визначення булевої функції при геометричному способі задання? Для чого використовують геометричне подання булевих функцій?

11. Що таке релейно-контактна схема?

12. Як булеві функції застосовуються в релейно-контактних схемах?

13. Яка логічна операція моделюється послідовним з'єднанням контактів? Яка логічна операція моделюється паралельним з'єднанням контактів?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Побудувати таблицю істинності функції $f(x,y,z) =$

$(\overline{x}\wedge \overline{y}\wedge \overline{z})\vee(\overline{x}\wedge y\wedge \overline{z})\vee(x\wedge y\wedge \overline{z})$

і знайти її вектор значень та порядковий номер. Зобразити графічно функцію.

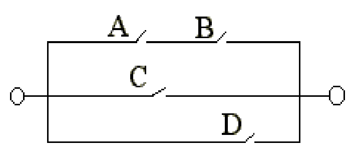
Задача 2. Побудувати таблицю істинності для булевої функції з порядковим номером 22. Зобразити графічно функцію.

Задача 3. Довести істинність формули

$$\overline{\overline{x}\wedge z\wedge y} = x\vee\overline{z}\vee\overline{y}.$$

Задача 4. Побудувати релейно-контактну схему для наступної формули: $A\vee B\wedge C$.

Задача 5. Побудувати формулу алгебри логіки, що відповідає даній схемі:



Індивідуальні завдання

1. ***Побудувати таблицю істинності для висловлювання, заданого формулою:***

№	Формула	№	Формула
1.	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg p$	2.	$\neg(\neg(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$
3.	$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$	4.	$\neg(p \leftrightarrow \neg(p \rightarrow p)$
5.	$(p \vee q) \leftrightarrow pq$	6.	$\neg(\neg(p \leftrightarrow p) \rightarrow p)$
7.	$(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)$	8.	$\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow q$
9.	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	10.	$\neg(p \leftrightarrow q) \rightarrow p$
11.	$(p \leftrightarrow p) \vee (q \leftrightarrow q)$	12.	$p \rightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$
13.	$p \leftrightarrow q \vee p$	14.	$p \vee q \wedge (p \rightarrow q)$
15.	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$	16.	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow q$
17.	$p \leftrightarrow \neg p$	18.	$p \vee q \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
19.	$(((p \rightarrow q) \rightarrow pq) \rightarrow p)$	20.	$pq \leftrightarrow \neg p \neg q$
21.	$p \leftrightarrow q \leftrightarrow p \leftrightarrow q$	22.	$pq \leftrightarrow \neg p \neg q$
23.	$(pq \rightarrow p) \rightarrow q$	24.	$(p \leftrightarrow q) \vee (p \rightarrow q)$
25.	$(pq \rightarrow \neg p) \leftrightarrow q$		

2. ***Записати речення у вигляді формул***

1. Я піду додому або залишуся тут і вип'ю чашку чаю, я не піду додому, отже, я залишуся і вип'ю чашку чаю.
2. Якщо Олег ляже сьогодні пізно, він буде вранці в отупінні, якщо він ляже не пізно, то йому здаватиметься, що не варто жити, отже, або Олег буде завтра в отупінні, або йому здаватиметься, що не варто жити.
3. Заперечення диз'юнкції двох висловлювань еквівалентно кон'юнкції заперечень кожного з цих висловлювань.
4. Якщо 2 – просте число, то це найменше просте число, якщо 2 – найменше просте число, то 1 не є простим числом; число 1 не є простим числом, отже, 2 –просте число.
5. Ігор або втомився, або хворий, якщо він втомився, то він злий; він не злий, отже, він хворий.
6. Якщо завтра буде холодно, я одягну тепле пальто, якщо рукав буде полагоджений; завтра буде холодно, а рукав не буде полагоджений, отже, я не одягну тепле пальто.
7. Ні Північ, ні Південь не перемогли в громадянській війні.
8. Людину не підкуповують лестощі, якщо розум у людини є.

9. Іван прийде на іспит і він або Сергій отримає п’ятірку.
10. Якщо не можеш визнати похвали заслуженими, то вважай їх лестощами.
11. Якщо буде гарна погода, то я подзвоню друзям, і ми поїдемо до моря.
12. Якщо я втомився або голодний, я не можу займатися.
13. Натуральне число n ділиться на 3 тоді і лише тоді, коли сума цифр числа n ділиться на 3.
14. Якщо вранці буде злива, то я або залишуся вдома, або вимушений буду взяти таксі.
15. Сьогодні наша команда не виграла і, отже, не вийшла у фінал.
16. Якщо я сьогодні встану і піду на заняття, моя мама буде задоволена, а якщо я не встану, то мама не буде задоволена.
17. Якщо він хоче досягти мети, він повинен багато знати і бути удачливим.
18. Сьогодні ясно, отже сьогодні не йде ні дощ, ні сніг.
19. Вчора було похмуро, а сьогодні тепло і ясно.
20. Якщо сьогодні хмарно, то це означає, що завтра буде дощ, або вітер розганятиме хмари.
21. Ти успішно складеш іспит тоді і лише тоді, коли добре підготуєшся; якщо ти не складеш іспит успішно, то позбудешся стипендії.
22. Математичні відомості можуть застосовуватися вміло і бути корисними лише в тому випадку, якщо вони засвоєні творчо.
23. Якщо у розпалі пристрасті розум сумнівається, то коли пристрасть остигне, він засудить твій вчинок.
24. Якщо головний визначник системи лінійних рівнянь не дорівнює нулю, то система рівнянь визначена, тобто має єдиний розв’язок.
25. Другом можна вважати того і лише того, хто щасливий, якщо щасливий його друг, і зажурений, якщо той зажурений.

3. Вказати умову та наслідок. Переформулювати твердження

1. Чотирикутник є прямокутником тоді, коли дві його протилежні сторони і три його кути рівні.
2. Сума двох цілих чисел є парним числом, тільки коли кожний доданок парне число.
3. Щоб чотирикутник був ромбом, достатньо, щоб його діагоналі були перпендикулярні.
4. Щоб чотирикутник мав вісь симетрії, необхідно, щоб він був ромбом.
5. Чотирикутник є прямокутником тільки тоді, коли один з його кутів дорівнює 90, а дві протилежні сторони рівні.
6. Чотирикутник $ABCD$, у якого $AC=BD$, $\angle A=\angle C=90^0$, є прямокутником.
7. Чотирикутник є квадратом тоді, коли він має центр симетрії.

8. Трикутник є прямокутним тільки тоді, коли квадрат однієї з його сторін дорівнює сумі квадратів двох інших сторін.
9. Послідовність обмежена, якщо тільки вона має границю.
10. Для сумісності системи необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
11. Рівність двох фігур є достатньою умовою їх рівновеликості.
12. Щоб функція булла диференційованою в точці, достатньо, щоб вона була неперервною в цій точці.
13. Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів є умова рівності нулю змішаного добутку цих векторів.
14. Щоб чотирикутник був прямокутником, достатньо, щоб він мав прямий кут і вісь симетрії.
15. Чотирикутник є прямоукутником тоді, коли він має вісь симетрії і два прямих суміжних кути.
16. Чотирикутник є прямокутником, якщотільки його діагоналі рівні.
17. Якщо два прямокутники рівновеликі, то вони рівні.
18. Чотирикутник має вісь симетрії і два прямих кути, я к щ о тільки він є прямокутником.
19. Дві подібні фігури рівновеликі тільки тоді, коли вони рівні.
20. Рівність двох протилежних сторін чотирикутника є достатньою умовою того, що чотирикутник є паралелограмом.
21. Щоб чотирикутник мав рівні діагоналі і вісь симетрії, необхідно, щоб він був прямокутником.
22. Існування вписаного в чотирикутник кола – достатня ознака ромба.
23. Щоб паралелограм був ромбом, достатньо, щоб він мав вісь симетрії.
24. Трикутник є гострокутним тоді, коли квадрат однієї з його сторін менше суми квадратів двох інших сторін.
25. Для існування границі функції в точці необхідно і достатньо, щоб в цій точці існували і були рівні між собою обидві односторонні границі.

4. Довести твердження методом математичної індукції:

1) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N};$

2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N};$

3) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N};$

4) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N};$

5) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\quad \forall n\in\mathbb{N};$

6) $2\cdot 1+2\cdot 3+2\cdot 5+\cdots+2\cdot(2n-1)=2n^2\quad \forall n\in\mathbb{N};$

7) $1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\cdots+n(2n+1)=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}\quad \forall n\in\mathbb{N};$

8) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}\quad \forall n\in\mathbb{N};$

9) $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\quad \forall n\in\mathbb{N};$

10) $1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\quad \forall n\in\mathbb{N};$

11) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2\quad \forall n\in\mathbb{N};$

12) $1+x^2+x^3+\cdots+x^n=\frac{x^{n-1}-1}{x-1}\quad x\neq 1;$

13) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots n\cdot n!-(n+1)!-1\quad \forall n\in\mathbb{N};$

14) $\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+1)}{n+2}\quad \forall n\in\mathbb{N};$

15) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N};$

16) $(6^{2n-1}+1)\ \vdots\ 7\ \ \forall n\in\mathbb{N};$

17) $(4^n+15n-1)\ \vdots\ 9\ \ \forall n\in\mathbb{N};$

18) $(10^n+18n-28)\ \vdots\ 27\ \ \forall n\in\mathbb{N};$

19) $(5^n-3^n+2n)\ \vdots\ 4\ \ \forall n\in\mathbb{N};$

20) $(11^{n+2}+12^{2n+1})\ \vdots\ 133\ \ \forall n\in\mathbb{N};$

21) $(7^n-1)\ \vdots\ 6\ \ \forall n\in\mathbb{N};$

22) $(11\cdot 3^n+10\cdot 2^n)\ \vdots\ 7\ \ \forall n\in\mathbb{N};$

23) $\left(\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+n^3\right)\ \vdots\ 6\ \ \forall n\in\mathbb{N};$

24) $(11^{2n}-1)\ \vdots\ 6\ \ \forall n\in\mathbb{N};$

25) $(1+2^{3n-1}+4^{3n-1})\ \vdots\ 7\ \ \forall n\in\mathbb{N}.$

5. Булеву функцію задано формулою $f(x,y,z)$. Потрібно задати цю функцію: таблицею істинності; вектором значень; графічно.

1) $(x\to y)\wedge(y\to z);$

2) $x\oplus(y\to z);$

3) $(x\wedge y)\oplus(x\wedge z)\oplus(y\wedge z);$

4) $(x\vee\bar{y})\oplus(y\to z);$

5) $x\wedge y\vee x\wedge y\wedge y\wedge z;$

6) $(x\oplus y)\to y\wedge z;$

7) $x\wedge(x|y)\vee z;$

8) $(x\vee y)\wedge(y\oplus z);$

9) $x\wedge y\to z;$

10) $(x\to y)\oplus(y\vee z);$

11) $(x\oplus y)\downarrow(y|z);$

12) $(x\oplus y)\vee(y|z);$

13) $(x\wedge y)\to(y|z);$

14) $(x\downarrow y)\to(y|z);$

15) $(x|y)\downarrow(y|z);$

16) $x\vee y\oplus z;$

17) $x \to (y|z)$;

18) $x|(y \to z)$;

19) $x|z \to (y|z)$;

20) $(x \to z) \wedge (y \oplus z)$;

21) $(x \to y) \wedge (x \oplus z)$;

22) $(x \to z) \wedge (y \oplus z)$;

23) $(x \downarrow z) \wedge (y \oplus z)$;

24) $(y \to z) \vee (y \oplus z)$;

25) $(x \wedge z) \vee (y \oplus z)$.

Тест 2. Елементи математичної логіки

1. Яке з наведених речень є висловлюванням?

а) Розв'яжіть рівняння $x^2 - 4=0$. б) Чи є число 17 простим?

в) Число 17 є простим. г) Нехай x – дійсне число.

2. Висловлюванням називається речення, про яке:

а) можна сказати, що воно красиве або некрасиве;

б) можна однозначно встановити його істинність або хибність;

в) містить математичні символи;

г) містить хоча б одне число.

3. Яке з наведених речень не є висловлюванням?

а) 5+7=12. б) Київ є столицею України.

в) $x^2-1=0$. г) Число 13 є простим.

4. Яке з наведених висловлювань є хибним?

а) 2+2=4. б) 15 ділиться на 5.

в) 9 є простим числом. г) Кожен квадрат є прямокутником.

5. Як називається висловлювання, яке не містить інших висловлювань як складових частин?

а) складене; б) еквівалентне;

в) елементарне (просте); г) заперечне.

6. Яке з наведених висловлювань є складеним?

а) 17 – просте число. б) 5<9.

в) 8 є парним і 11 є простим. г) 12 кратне 4.

7. Яке з наведених речень має істиннісне значення?

а) x+5=12. б) Яке сьогодні число?

в) Зачиніть двері. г) Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

8. Кон'юнкція $x \wedge y$ є істинною тоді і тільки тоді, коли:

а) хоча б один аргумент істинний; б) обидва аргументи істинні;

в) обидва аргументи хибні; г) x істинний.

9. Диз'юнкція $x \vee y$ є хибною тоді і тільки тоді, коли:

а) $x = 1, y = 1$; б) $x = 1, y = 0$; в) $x = 0, y = 1$; г) $x = 0, y = 0$.

10. Імплікація $x \rightarrow y$ є хибною лише у випадку:

а) $x = 1, y = 0$; б) $x = 0, y = 1$; в) $x = 0, y = 0$; г) $x = 1, y = 1$.

11. Еквівалентність $x \leftrightarrow y$ є істинною, якщо:

а) $x = 1, y = 0$; б) $x = 0, y = 1$

в) x і y мають однакові значення істинності;

г) хоча б один аргумент істинний.

12. Який пріоритет операцій є правильним згідно з текстом посібника?

а) $\rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge, \overline{\quad}$; б) $\overline{\quad}, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;

в) $\wedge, \overline{\quad}, \vee, \leftrightarrow, \rightarrow$; г) $\vee, \wedge, \overline{\quad}, \rightarrow, \leftrightarrow$

13. Для набору значень $x = 0, y = 1$ значення кон'юнкції $x \wedge y$ дорівнює:

а) 1; б) 0; в) не визначено; г) залежить від порядку операцій

14. Яка з наведених операцій є унарною?

а) кон'юнкція; б) диз'юнкція; в) імплікація; г) заперечення.

15. Якщо з твердження A випливає твердження B, то:

а) A є необхідною умовою для В; б) B є достатньою умовою для A;

в) B є необхідною умовою для A; г) A і B не пов'язані.

16. Якщо з твердження A випливає твердження B, то:

а) A є достатньою умовою для B; б) B є достатньою умовою для A;

в) A є необхідною умовою для B; г) A і B рівносильні.

17. Нехай A – твердження «два кути вертикальні», B – твердження «ці кути рівні». Яке твердження правильне?

а) A є необхідною умовою для B; б) A є достатньою умовою для B;

в) A є необхідною і достатньою умовою для B; г) A не пов'язане з B.

18. Яке твердження є правильним?

а) Якщо A – достатня умова для B, то з B випливає A.

б) Якщо A – достатня умова для B, то з A випливає B.

в) Якщо A – необхідна умова для B, то A і B рівносильні.

г) Якщо A – необхідна умова для B, то B хибне.

19. Необхідною і достатньою умовою існування оберненої матриці M є:

а) матриця M є квадратною; б) визначник матриці M відмінний від нуля;

в) матриця M є квадратною і її визначник відмінний від нуля;

г) матриця M є симетричною.

20. Твердження, яке приймається без доведення, називається:

а) лемою; б) теоремою; в) аксіомою; г) наслідком.

21. Яка теорема називається оберненою до теореми «Якщо A, то B»?

а) Якщо $\overline{A}$, то $\overline{B}$. б) Якщо B, то A.

в) Якщо $\overline{B}$, то $\overline{A}$. г) A тоді і тільки тоді, коли B.

22. Яка теорема називається протилежною до теореми «Якщо A, то B»?

а) Якщо B, то A. б) Якщо $\overline{A}$, то $\overline{B}$.

в) Якщо $\overline{B}$, то $\overline{A}$. г) $A \leftrightarrow B$.

23. Які з наведених теорем є рівносильними?

а) пряма і обернена; б) пряма і протилежна;

в) обернена і обернено-протилежна; г) пряма і обернено-протилежна.

24. Теорема виду «A тоді і тільки тоді, коли B» еквівалентна системі тверджень:

а) $A \to B$; б) $B \to A$; в) $A \to B$ і $B \to A$; г) $A \vee B$.

25. Булевою змінною називається змінна, яка може набувати значень:

а) будь-яких цілих чисел; б) тільки значень 0 або 1;

в) тільки значень −1 або 1; г) будь-яких дійсних чисел.

26. Функція виду $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка відображає множину всіх булевих наборів у множину $B = \{0; 1\}$, називається:

а) арифметичною функцією; б) булевою функцією;

в) предикатом; г) множиною.

27. Під інтерпретацією булевої функції розуміють:

а) таблицю істинності; б) фіксований набір значень змінних;

в) значення функції; г) множину всіх булевих наборів.

28. Скільки різних булевих наборів існує для трьох змінних?

а) 3; б) 6; в) 8; г) 9.

29. Булева функція має порядковий номер 14. Яке значення вона приймає на наборі (1,1)?

а) 0; б) 1; в) залежить від порядку інтерпретацій; г) неможливо визначити.

30. Таблиця, в якій кожному набору аргументів поставлено у відповідність значення функції, називається:

а) матрицею суміжності; б) таблицею істинності;

в) вектором значень; г) булевим кубом.

31. Порядковий номер булевої функції визначається як:

а) кількість її аргументів; б) кількість одиниць у таблиці істинності;

в) натуральне число, двійковий код якого утворює стовпчик значень функції;

г) номер рядка таблиці істинності.

Тема 3. Елементи теорії графів

На рівні наших звичайних уявлень граф – це сукупність будь-яких об'єктів, між якими існують певні зв’язки (зазвичай їх зображують у вигляді точок, з'єднаних неорієнтованими чи орієнтованими лініями). Зокрема, у вигляді графів можна подати електричні схеми, маршрути перевезень, схеми взаємозв'язків підрозділів підприємства, грошові та ресурсні потоки, системи керування різними об'єктами тощо.

Розпочалася історія графів зі статті Л. Ейлера 1736 року, у якій розглядалася задача про кьонігсбергські мости. У місті Кьонігсберг було два острови, з’єднаних сімома мостами з берегами річки Прегель і між собою, як показано на рис. 3.1. Необхідно було знайти відповідь на питання: чи можна обійти всі чотири частини суші, проходячи кожним мостом рівно один раз, і повернутися у вихідну точку. Л. Ейлер узагальнив постановку цієї задачі та знайшов критерій існування такого маршруту. Л. Ейлера вважають засновником теорії графів.

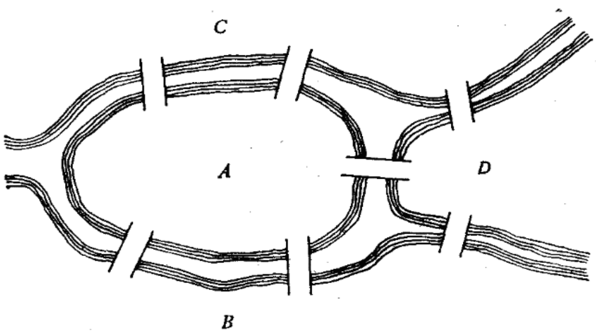


Рисунок 3.1 Ілюстрація до задачі про кьонігсбергські мости

Інтерес до графів відродився у XIX столітті. Німецький фізик Г. Кірхгоф (1847) використовував графи при дослідженні електричних мереж, англійський математик А. Келли (1857; 1874) – у задачах з органічної хімії, а ірландський математик В. Гамільтон – при розв’язанні математичних головоломок. На початку XX століття теорія графів поступово сформувалася як самостійний розділ дискретної математики. Значний внесок у її розвиток зробили роботи Д. Пойа, пов’язані з комбінаторними методами та задачами переліку. Важливою подією стало видання у 1936 році монографії угорського математика Д. Кьоніга «Теорія скінченних і нескінченних графів», яка стала першою систематичною працею з теорії графів і значною мірою узагальнила результати майже двохсотрічного розвитку цієї теорії. Після Другої світової війни теорія графів пережила стрімкий розвиток. Значний внесок у її становлення зробили роботи математиків багатьох країн. Угорська школа представлена працями П. Ердеша та А. Реньї, які заклали основи сучасної теорії випадкових графів. Важливі результати в галузі екстремальної теорії графів, теорії графових алгоритмів та комбінаторної оптимізації були отримані в роботах К. Куратовського, О. Оре, Ф. Харарі, В. Тутте, К. Бержа та інших дослідників. У другій половині XX століття теорія графів перетворилася на один із провідних напрямів дискретної математики, а її методи стали широко використовуватися в інформатиці, дослідженні операцій, економіці, телекомунікаціях і транспортних системах.

В Україні дослідження з теорії графів та суміжних розділів дискретної математики активно розвиваються з другої половини XX століття. Вони пов'язані з діяльністю наукових шкіл Віктора Михайловича Глушкова, Івана Васильовича Сергієнка та їхніх послідовників у галузі кібернетики, дискретної оптимізації та математичного моделювання.

3.1. Поняття графу

Неорієнтованим графом (або *графом*) G називається сукупність двох множин $(V,\ E)$, де V – непорожня скінченна множина, елементи якої називають *вершинами*, а E – скінченна множина неупорядкованих пар вершин, які називають *ребрами*. Надалі термін «неорієнтований» опускатимемо.

Число вершин графу $G = (V,\ E)$ називається його *порядком*, а число ребер – *розміром*.

Граф $G = (V,\ E)$ називають *звичайним* (надалі просто «граф»), якщо кожну пару вершин сполучає не більше одного ребра.

Дві вершини графу називають *суміжними*, якщо вони є кінцями одного і того ж ребра. Вершина *інцидентна* ребру, якщо вона є його кінцем. Два ребра, що інцидентні одній тій самій вершині (тобто мають спільну вершину) називають *суміжними.*

Якщо ребро e графу G з'єднує дві його вершини u і v, то це ребро позначатимемо $\{u, v\}$ або $\{v, u\}$. В цьому випадку маємо:

вершини u та v *суміжні,*

вершини u та v *інцидентні* ребру e,

ребро e *інцидентне* вершинам u та v.

Множина вершин графу G, суміжних з вершиною $v \in V(G)$, називається *множиною суміжності вершини* v (або *околом вершини* v), будемо її позначати $\text{См}(v)$. Таким чином, $\text{См}(v) = \{u \in V(G) | \{u, v\} \in E(G)\}$.

Степенем вершини v графу G називається число ребер, інцидентних цій вершині, її позначають через $deg(v)$. Для звичайного графу степінь вершини v дорівнює потужності її множини суміжності, тобто $deg(v) = |\text{См}(v)|$. Максимальний і мінімальний степені вершин графу G позначаю символами $\Delta(G)$ і $\delta(G)$ відповідно.

Вершина $v \in V(G)$ називається *ізольованою*, якщо $deg(v) = 0$ і *висячою* або *кінцевою*, якщо $deg(v) = 1$. Ребро, інцидентне кінцевій вершині, також називається *висячим* або *кінцевим*.

Якщо всі вершини графу G мають однаковий степінь r, то граф називається *регулярним* (або *однорідним*) степеня r, або r-*регулярним*. У цьому випадку $\Delta(G) = \delta(G) = r$.

Між степенями вершин графу та кількістю його ребер існує фундаментальний зв'язок, який формулюється у вигляді наступної теореми.

Теорема 3.1. Сума степенів всіх вершин графу $G = (V,\ E)$ є парним числом і дорівнює подвіному числу ребер, тобто

$$\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2 \cdot |E|\,.$$

Наслідок 3.1.1. У будь-якому графі число вершин непарного степеня парне.

З теореми 3.1 випливає, що не існує регулярного графу, порядок і степінь якого непарні одночасно.

У деяких задачах вершини, інцидентні ребру, відіграють різні ролі і тому розглядаються у заданому порядку. У цьому випадку кожному ребру можна приписати напрямок від однієї вершини до іншої, і таке ребро стає орієнтованим. Граф, у якого всі ребра є орієнтованими, називають *орієнтованим* або *орграфом*. Такий граф позначатимемо $\vec{G} = (V,\ E)$.

Якщо граф $\vec{G} = (V,\ E)$ орієнтований, то множина E складається з упорядкованих пар елементів множини V. Ребро e орграфу $\vec{G}$, що виходить з вершини u і заходить у вершину v, позначають через $e = (u, v)$ і зазвичай його називають *дугою* або *орієнтованим ребром*. Вершини u і v дуги $e = (u, v)$ називають *кінцевими*, при цьому u є *початком*, а v – *кінцем* дуги e.

Якщо дві вершини графу G сполучені більше ніж одним ребром, то ці ребра називають *кратними*.

В орграфі $\vec{G}$ дуги, які мають однакову пару початкових та кінцевих вершин називають *паралельними*.

Петля – це ребро графу або орграфу, інцидентне одній і тій самій вершині.

Мультиграф – це граф з кратними ребрами, який не містить петель.

Псевдограф – це граф в якому допускаються не тільки кратні ребра, але й петлі.

Поняття степеня вершини і теорема 3.1 зберігаються для мульти- і псевдографів.

Кожна петля додає до степеня відповідної вершини дві одиниці.

Приклад 3.1. Задано граф $G = (V, E)$. Визначити його порядок і розмір. Навести приклад суміжних вершин, суміжних ребер. Визначити, чи містить граф G петлі, кратні ребра. Якщо так, то вказати їх. Знайти степені всіх вершин графу.

а) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$, знайти множину суміжності вершин v_2 і v_5.

Розв'язання

Граф G не містить петель та кратних ребер, він є звичайним графом. Його порядок дорівнює 5, а розмір дорівнює 4, оскільки $|V| = 5, |E| = 4$.

Вершина v_1 суміжна з вершинами v_2 і v_4, а ребро $\{v_1, v_4\}$ суміжне з ребром $\{v_2, v_4\}$, оскільки вони інцидентні вершині v_4.

Степені вершин графу G:

$deg(v_1) = 2, deg(v_2) = 3, deg(v_3) = 1, deg(v_4) = 2, deg(v_5) = 0.$

Вершина v_5 є ізольованою.

$\text{См}(v_2) = \{v_1, v_3, v_4\}$ – множина суміжності вершини v_2;

$\text{См}(v_5) = \emptyset$ – множина суміжності вершини v_5.

б) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_2\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$. Перевірити виконання умови теореми 3.1.

Розв'язання

Порядок графу G дорівнює 5, а розмір дорівнює 7, оскільки $|V| = 5$, $|E| = 7$. Граф G містить кратні ребра $\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\}$ і петлю $\{v_2, v_2\}$, тому він є псевдографом.

Вершина v_1 суміжна з вершинами v_2 і v_3, а ребро $\{v_1, v_2\}$ суміжне з кожним із кратних ребер $\{v_1, v_3\}$, так як вони інцидентні вершині v_1.

Степені вершин графу G:

$deg(v_1) = 3, deg(v_2) = 4, deg(v_3) = 3, deg(v_4) = 2, deg(v_5) = 2.$

Перевіримо виконання умови теореми 3.1:

$$deg(v_1) + deg(v_2) + deg(v_3) + deg(v_4) + deg(v_5) = 3 + 4 + 3 + 2 + 2 = 14,$$
$$|E| = 7,\ 2 \cdot |E| = 14.$$

Одержали:

$$deg(v_1) + deg(v_2) + deg(v_3) + deg(v_4) + deg(v_5) = 2 \cdot |E|.$$

Отже, умова теореми 3.1 виконується.

Для орграфу $\vec{G}$ кажуть, що *дуга* $e = (u, v)$ *інцидентна* своїм кінцевим вершинам u і v. Вершини u і v орграфу $\vec{G} = (V, E)$ *суміжні*, якщо вони є кінцевими для однієї дуги, тобто $(u, v) \in E$ або $(v, u) \in E$.

Степенем $deg(v)$ вершини v орграфу $\vec{G} = (V,\ E)$ називають число інцидентних їй дуг. *Півстепенем заходу* $deg^-(v)$ вершини $v \in V(\vec{G})$ є число дуг, що заходять у v (тобто v для цих дуг є кінцем), *півстепенем виходу* $deg^+(v)$ – число дуг, що виходять з v (тобто v для цих дуг є початком). Символи δ^- і δ^+ використовують для позначення мінімальних півстепенів заходу і виходу. Аналогічно символами Δ^- і Δ^+ позначають максимальні півстепені заходу і виходу. Множини суміжності $\Gamma^-(v)$ і $\Gamma^+(v)$ визначають наступним чином:

$$\Gamma^-(v) = \{u \big| (u,v) \in E(\vec{G})\}, \qquad \Gamma^+(v) = \{u \big| (v,u) \in E(\vec{G})\}.$$

Зауважимо, що петля збільшує півстепінь як заходу, так і виходу цієї вершини.

Для будь-якої вершини $v \in V(\vec{G})$ виконується рівність $deg(v) = deg^-(v) + deg^+(v)$. Тоді згідно з теоремою 3.1 для орграфу $\vec{G} = (V,\ E)$ маємо

$$\sum_{v \in V(G)} deg^-(v) + \sum_{v \in V(G)} deg^+(v) = 2 \cdot |E|\,.$$

Оскільки кожна дуга орграфу враховується один раз у півстепені виходу деякої вершини і один раз у півстепені заходу деякої вершини, то справедлива наступна теорема.

Теорема 3.2. В орграфі $\vec{G} = (V,\ E)$ сума півстепенів заходу дорівнює сумі півстепенів виходу і дорівнює числу дуг цього орграфу, тобто

$$\sum_{v \in V(G)} deg^-(v) = \sum_{v \in V(G)} deg^+(v) = |E|\,.$$

Приклад 3.2. Задано орграф $\vec{G} = (V,\ E)$. Визначити його порядок і розмір. Навести приклад суміжних вершин. Визначити чи містить $\vec{G}$ петлі, паралельні дуги. Якщо так, то вказати їх. Знайти степені всіх вершин орграфу, а також півстепені заходу і виходу, множини суміжності $\Gamma^-(v_2)$ і $\Gamma^+(v_2)$. Перевірити виконання умов теорем 3.1 і 3.2.

а) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_4, v_1), (v_5, v_1), (v_5, v_3)\}$.

Розв'язання

$\vec{G}$ є орієнтованим графом, його порядок дорівнює 5, а розмір дорівнює 7, оскільки $|V| = 5, |E| = 7$. Вершина v_2 суміжна з вершинами v_1 і v_3. Орграф не містить паралельних дуг та петель.

Степені вершин орграфу $\vec{G} = (V,\ E)$:

$deg(v_1) = 4, deg(v_2) = 3, deg(v_3) = 4, deg(v_4) = 1, deg(v_5) = 2;$

півстепені заходу:

$deg^-(v_1) = 2, deg^-(v_2) = 2, deg^-(v_3) = 3, deg^-(v_4) = 0, deg^-(v_5) = 0;$

півстепені виходу:

$deg^+(v_1) = 2, deg^+(v_2) = 1, deg^+(v_3) = 1, deg^+(v_4) = 1, deg^+(v_5) = 2.$

Множини суміжності: $\Gamma^{-}(v_2) = \{v_1, v_3\}$; $\Gamma^{+}(v_2) = \{v_3\}$.

Перевіримо виконання умови теореми 3.1:

$$\left(deg^{-}(v_1) + deg^{-}(v_2) + deg^{-}(v_3) + deg^{-}(v_4) + deg^{-}(v_5)\right) +$$
$$= \left(deg^{+}(v_1) + deg^{+}(v_2) + deg^{+}(v_3) + deg^{+}(v_4) + deg^{+}(v_5)\right) =$$
$$= (2 + 2 + 3 + 0 + 0) + (2 + 1 + 1 + 1 + 2) = 7 + 7 = 14,$$
$$|E| = 7,\ 2 \cdot |E| = 14.$$

Отже, для даного орграфу умова теореми 3.1 виконується.

Перевіримо виконання умови теореми 3.2:

$deg^{-}(v_1) + deg^{-}(v_2) + deg^{-}(v_3) + deg^{-}(v_4) + deg^{-}(v_5) = 7$;

$deg^{+}(v_1) + deg^{+}(v_2) + deg^{+}(v_3) + deg^{+}(v_4) + deg^{+}(v_5) = 7$;

$$|E| = 7.$$

Отже, для даного орграфу умова теореми 3.2 виконується.

б) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_4, v_1), (v_5, v_3)\}$.

Розв'язання.

$\vec{G}$ є орієнтованим графом, його порядок і розмір дорівнюють 6, так як $|V| = |E| = 6$. Вершина v_2 суміжна тільки з вершиною v_3. Граф містить паралельні дуги $(v_2, v_3), (v_2, v_3)$ та петлю (v_1, v_1).

Степені вершин орграфу $\vec{G} = (V, E)$:

$deg(v_1) = 4, deg(v_2) = 2, deg(v_3) = 4, deg(v_4) = 1, deg(v_5) = 1, deg(v_6) = 0.$

півстепені заходу:

$$deg^{-}(v_1) = 2, deg^{-}(v_2) = 0, deg^{-}(v_3) = 4, deg^{-}(v_4) = 0, deg^{-}(v_5) = 0, deg^{-}(v_6) = 0;$$

півстепені виходу:

$$deg^{+}(v_1) = 2, deg^{+}(v_2) = 2, deg^{+}(v_3) = 0, deg^{+}(v_4) = 1, deg^{+}(v_5) = 1, deg^{+}(v_6) = 0.$$

Множини суміжності: $\Gamma^{-}(v_2) = \emptyset$; $\Gamma^{+}(v_2) = \{v_3\}$.

Перевіримо виконання умови теореми 3.1:

$$\left(deg^{-}(v_1) + deg^{-}(v_2) + deg^{-}(v_3) + deg^{-}(v_4) + deg^{-}(v_5) + deg^{-}(v_6)\right) +$$
$$+\left(deg^{+}(v_1) + deg^{+}(v_2) + deg^{+}(v_3) + deg^{+}(v_4) + deg^{+}(v_5) + deg^{+}(v_6)\right) =$$
$$= (2 + 0 + 4 + 0 + 0 + 0) + (2 + 2 + 0 + 1 + 1 + 0) = 6 + 6 = 12,$$
$$|E| = 6,\ 2 \cdot |E| = 12.$$

Отже, для даного орграфу умова теореми 3.1 виконується.

Перевіримо виконання умови теореми 3.2:

$deg^{-}(v_1) + deg^{-}(v_2) + deg^{-}(v_3) + deg^{-}(v_4) + deg^{-}(v_5) + deg^{-}(v_6) = 6$;

$deg^{+}(v_1) + deg^{+}(v_2) + deg^{+}(v_3) + deg^{+}(v_4) + deg^{+}(v_5) + deg^{+}(v_6) = 6$;

$$|E| = 6.$$

Отже, для даного орграфу умова теореми 3.2 виконується.

Контрольні питання

1. Що називають неорієнтованим графом?

2. Що називають порядком і розміром графа?

3. Який граф називають звичайним?

4. Які вершини графа називають суміжними?

4. Що означає вершина інцидентна ребру або ребро інцидентне вершині?

5. Які ребра називають суміжними?

6. Які ребра називають кратними?

7. Що називають петлею?

8. Як називається граф з кратними ребрами?

9. Який граф називають псевдографом?

10. Що називають множиною суміжності вершини графа?

11. Що називають степенем вершини графа?

12. Який граф називають регулярним?

13. Яка вершина називається ізольованою, висячою?

14. Чому дорівнює сума степенів всіх вершин графа?

15. Що можна сказати про число вершин непарного степеня графа?

16. Який граф називають орієнтованим (або орграфом)?

17. Як називають ребра орієнтованого графа?

18. Які ребра називаються паралельними в орієнтованому графі?

19. Які вершини в орграфі суміжні?

20. Що називають степенем вершини в орграфі?

21. Що називають півстепенем заходу, півстепенем виходу в орграфі?

22. Як між собою пов'язані суми півстепенів заходу і виходу в орграфі?

Задачі для самостійного розв’язування

Задача 1. Для заданого графу $G=(V,\,E)$, де $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$, $E=\big\{\{v_1,v_3\},\{v_1,v_4\},\{v_1,v_6\},\{v_2,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_2,v_3\},\{v_2,v_6\},\{v_3,v_4\}\big\}$, знайти:

1) петлі і кратні ребра, якщо граф G їх містить;

2) порядок і розмір графу G;

3) множину суміжності вершин v_1 і v_5;

4) степені вершин графу G.

Вказати ізольовані та висячі вершини графу G, якщо він їх містить.

Вказати тип графу: звичайний граф, мультиграф, псевдограф, орієнтований граф. Перевірити виконання умови теореми 3.1.

Чи буде даний граф регулярним? Відповідь поясніть.

Задача 2. Для заданого орграфу $\vec{G} = (V,\ E)$, де $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, $E = \{(v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_6), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_4, v_5), (v_5, v_3), (v_6, v_5)\}$, знайти:

1) петлі і паралельні дуги, якщо орграф $\vec{G}$ їх містить;

2) порядок і розмір орграфу $\vec{G}$;

3) півстепені заходу і виходу орграфу $\vec{G}$;

4) множини суміжності $\Gamma^-(v_5)$ і $\Gamma^+(v_5)$.

Перевірити виконання умов теорем 3.1 і 3.2.

3.2. Способи задання графів

Граф вважають заданим, якщо вказана множина вершин і ребер. Існують різні способи задання графів. Розглянемо деякі з них, а саме: переліком елементів множини вершин і множини ребер, діаграмою, матрицею суміжності та інцидентності.

3.2.1 Задання графу переліком елементів

Спосіб представлення графу за допомогою переліку елементів множини вершин і множини ребер розглянуто в пункті 3.1.

3.2.2 Геометричне задання графу

Наочним є геометричне подання графу, коли на площині зображують його вершини точками або кружками, а ребра відрізками або дугами. Таке зображення називають *діаграмою* графу.

Діаграма орграфу відрізняється від діаграми звичайного графу тим, що дуги орграфу зображають напрямленими лініями (відрізками чи кривими). Напрямок ліній позначають стрілкою.

Приклад 3.3. Зобразити граф $G = (V,\ E)$ з прикладу 3.1.

а) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \big\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\big\}$.

Розв'язання

На рис. 3.2 наведено діаграму даного графу.

б) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_2\}, \{v_2, v_4\}\ \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$.

Розв'язання

На рис. 3.3 наведено діаграму даного графу.

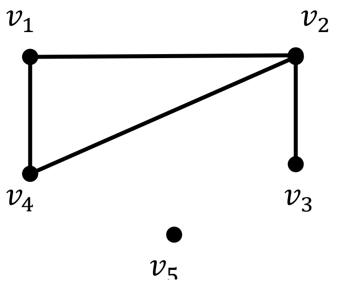


Рисунок 3.2

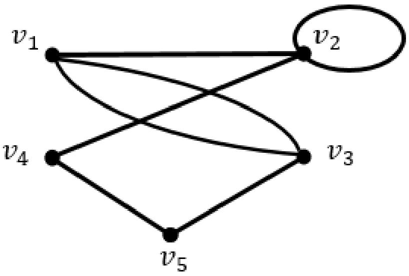


Рисунок 3.3

Приклад 3.4. Зобразити орграф $\vec{G} = (V,\ E)$ з прикладу 3.2.

а) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,

$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_4, v_1), (v_5, v_1), (v_5, v_3)\}$.

Розв'язання

На рис. 3.4 наведено діаграму даного орграфу.

б) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,

$E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_4, v_1), (v_5, v_3)\}$.

Розв'язання

На рис. 3.5 наведено діаграму даного орграфу.

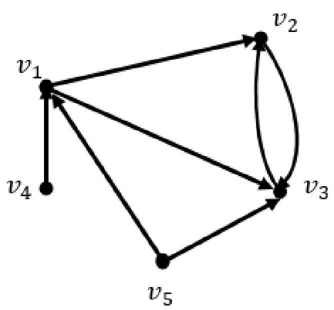


Рисунок 3.4

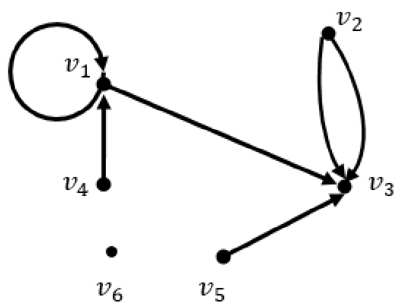


Рисунок 3.5

3.2.3 Матриця суміжності

Матрицею суміжності вершин графу G називають квадратну матрицю $A = A(G)$, порядок якої дорівнює порядку графу G, а її елементи визначаються за правилом: $a_{ij} = 1$, якщо вершини v_i та v_j суміжні, в інших випадках $a_{ij} = 0$.

Матриця суміжності вершин A звичайного графу G має властивості:

1) бінарна з елементами 0 і 1;

2) симетрична: $a_{ij} = a_{ji}$;

3) всі елементи головної діагоналі нулі;

4) сума елементів i-го рядка або i-го стовпця матриці A дорівнює степені вершини v_i;

5) сума елементів матриці A, розташованих вище (або нижче головної діагоналі) дорівнює числу ребер графу.

Отже, число ребер графу дорівнює кількості одиниць, розташованих вище або нижче головної діагоналі матриці суміжності.

Аналогічно визначається матриця суміжності мульти- і псевдографів: елемент a_{ij} дорівнює числу ребер, що сполучають вершини v_i та v_j. При цьому петля дає внесок 2 у відповідний діагональний елемент матриці суміжності.

Приклад 3.5. Для графу $G = (V,\ E)$ з прикладу 3.1 записати матрицю суміжності.

а) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \big\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\big\}$.

Розв'язання

Напишемо матрицю суміжності A у вигляді таблиці:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	0	1	0
v_2	1	0	1	1	0
v_3	0	1	0	0	0
v_4	1	1	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0

Також матрицю A можна записати у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Достатньо обрати один зі способів запису матриці суміжності.

б) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_2\}, \{v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$.

Розв'язання

Напишемо матрицю суміжності A для заданого графу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Елемент $a_{13} = 2$, оскільки вершини v_1 і v_3 сполучені двома кратними ребрами. Елемент $a_{22} = 2$, оскільки вершина v_2 містить петлю.

Матрицею суміжності вершин орграфу $\vec{G}$ називають квадратну матрицю $A = A(\vec{G})$, порядок якої, дорівнює порядку графу $\vec{G}$, а елементи визначаються за правилом: $a_{ij} = 1$, якщо $(v_i, v_j) \in E(\vec{G})$, в інших випадках $a_{ij} = 0$.

Приклад 3.6. Для орграфу $\vec{G} = (V,\ E)$ з прикладу 3.2 записати матрицю суміжності.

а) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_4, v_1), (v_5, v_1), (v_5, v_3)\}$.

Розв'язання

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_4, v_1),\ (v_5, v_3)\}$.

Розв'язання

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Елемент $a_{11} = 1$, оскільки орграф містить петлю (v_1, v_1). Елемент $a_{23} = 2$, оскільки вершини v_2 і v_3 сполучені двома паралельними дугами.

Очевидно, що будь-яка квадратна бінарна симетрична матриця з нульовою головною діагоналлю є матрицею суміжності деякого звичайного графу. Будь-яка квадратна симетрична матриця з невід'ємними цілими елементами є матрицею суміжності деякого мультиграфу. Якщо при цьому допускаються ненульові парні елементи головної діагоналі, то така матриця є матрицею суміжності деякого псевдографу. Будь-яка квадратна бінарна матриця є матрицею суміжності певного орграфу.

Приклад 3.7. Задано матрицю суміжності графу. Побудувати його діаграму.

а)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Побудуємо діаграму графу, заданого матрицею суміжності його вершин:

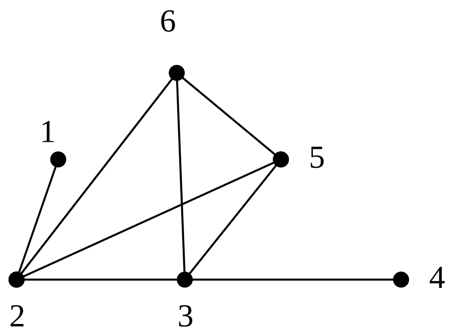


Рисунок 3.6

б)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Побудуємо діаграму орграфу, заданого матрицею суміжності його вершин:

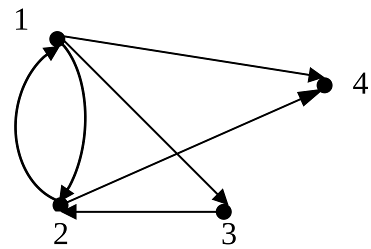


Рисунок 3.7

3.2.4 Матриця інцидентності

Матрицею інцидентності графу $G=(V,E)$ порядку p і розміру q, де $V=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$, $E=\{e_1,e_2,\dots,e_q\}$, називають матрицю $B=B(G)$ розміру $p\times q$ з елементами b_{ij}, що визначаються за правилом: $b_{ij}=1$, якщо вершина v_i та ребро e_j інцидентні в графі G, в інших випадках $b_{ij}=0$.

Матриця $B(G)$ для звичайного графу є бінарною, але не обов'язково квадратною. Число одиниць у кожному стовпці матриці $B(G)$ дорівнює двом, оскільки кожне ребро звичайного графу інцидентне двом вершинам.

Для мультиграфів матриця інцидентності також є бінарною, а для псевдографів може містити елемент 2, який відповідає петлі.

Матрицею інцидентності орграфу $\vec{G}=(V,E)$ порядку p і розміру q, де $V=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$, $E=\{e_1,e_2,\dots,e_q\}$, називають матрицю $B=B(\vec{G})$ розміру $p\times q$ з елементами b_{ij}, що визначаються за правилом:

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \text{якщо вершина } v_i \text{ є початком дуги } e_j,\\ -1, \text{якщо вершина } v_i \text{ є кінцем дуги } e_j,\\ 0, \text{якщо вершина } v_i \text{ не інцидентна дузі } e_j.\end{cases}$$

Для оргафу без петель у кожному стовпці матриці $B(\vec{G})$ міститься одна 1, одна –1, а всі інші елементи є нулями.

Приклад 3.8. Для графу $G=(V,\ E)$ з прикладу 3.1 записати матрицю інцидентності.

а) $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$, $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, де $e_1=\{v_1,v_2\}, e_2=\{v_1,v_4\}$, $e_3=\{v_2,v_3\}$, $e_4=\{v_2,v_4\}$.

Розв'язання

Напишемо матрицю інцидентності B у вигляді таблиці:

	e_1	e_2	e_3	e_4
v_1	1	1	0	0
v_2	1	0	1	1
v_3	0	0	1	0
v_4	0	1	0	1
v_5	0	0	0	0

Також матрицю інцидентності B можна записати у вигляді:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Достатньо обрати один зі способів запису матриці інцидентності B.

б) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, де $e_1 = \{v_1, v_2\}, e_2 = \{v_1, v_3\}$, $e_3 = \{v_1, v_3\}$, $e_4 = \{v_2, v_2\}$, $e_5 = \{v_2, v_4\}$, $e_6 = \{v_3, v_5\}$, $e_7 = \{v_4, v_5\}$.

Розв'язання

Матриця інцидентності B заданого псевдографу має вигляд:

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Приклад 3.9. Для орграфу $\vec{G} = (V, E)$ з прикладу 3.2 а) записати матрицю інцидентності, де $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ і $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_1, v_3), e_3 = (v_2, v_3)$, $e_4 = (v_3, v_2), e_5 = (v_4, v_1)$, $e_6 = (v_5, v_1), e_7 = (v_5, v_3)$.

Розв'язання

Матриця інцидентності B заданого орграфу має вигляд:

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Приклад 3.10. Задано матрицю інцидентності графу. Побудуйте його діаграму.

а)

$$B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Розв'язання

Матриця B є матрицею інцидентності неорієнтованого графу. Кількість рядків матриці визначає число вершин графа, а кількість стовпців – число його ребер. Отже, граф має 5 вершин і 6 ребер, його діаграма наведена на рис.3.8.

б)

$$B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Розв'язання

Матриця B є матрицею інцидентності неорієнтованого графу порядку 4 і розміру 5. Діаграма цього графу наведена на рис.3.9.

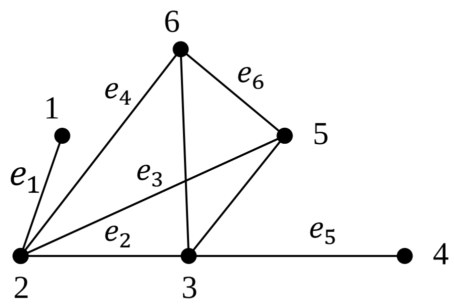


Рисунок 3.8

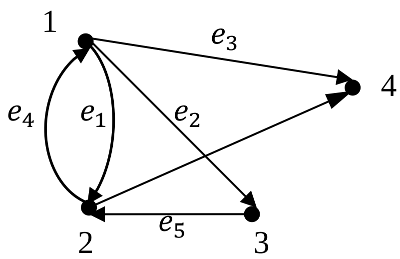


Рисунок 3.9

Контрольні питання

1. Які способи задання графа Ви знаєте?

2. Що означає представлення графа за допомогою переліку елементів множини вершин і множини ребер? Навести приклад.

3. Що таке діаграма звичайного і орієнтованого графа? Навести приклади.

4. Що називають матрицею суміжності вершин графа?

5. Які властивості матриці суміжності вершин звичайного графа?

6. Як визначається матриця суміжності мультиграфа і псевдографа?

7. Що називають матрицею суміжності вершин орграфа?

8. Що називають матрицею інцидентності графа? Які вона має властивості?

9. Якщо ребро e_j є петлею в вершині v_i графа G, то чому дорівнює елемент b_{ij} матриці інцидентності $B(G)$?

10. Що називають матрицею інцидентності орграфа? Які вона має властивості?

11. Як за допомогою матриці суміжності визначити:

а) кількість ребер в графі;

б) степені вершин графа?

11. Як за допомогою матриці інцидентності визначити степені вершин графу?

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Дано граф $G = (V,\ E)$, де

а) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,

$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}\}$.

б) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,

$E = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}\}$.

Побудувати діаграму графу G. Знайти його матриці суміжності та інцидентності.

Задача 2. Дано граф $\vec{G} = (V,\ E)$, де $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, $E = \{(v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_6),$
$(v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_4, v_5), (v_5, v_3), (v_6, v_5)\}$.

Побудувати діаграму орграфу $\vec{G}$. Знайти його матриці суміжності та інцидентності.

Задача 3. Граф задано матрицею суміжності A. Побудувати його діаграму.

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Граф задано матрицею інцидентності B. Побудувати його діаграму.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Побудувати матриці суміжності та інцидентності для кожного графу, заданого діаграмою на рис. 3.10.

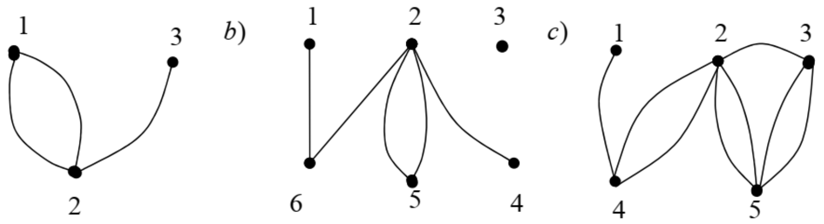


Рисунок 3.10

3.3. Маршрути, зв'язність та метричні характеристики графів. Спеціальні графи, підграфи

Маршрутом у графі $G = (V, E)$ називають послідовність, у якій вершини чергуються з ребрами і яка починається вершиною і закінчується вершиною:

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, e_{n-1}, v_{n-1}, \ e_n, v_n \tag{3.1}$$

де кожне ребро e_i, $i = 1, 2, \dots, n$ інцидентне вершинам v_{i-1} і v_i.

Маршрут (3.1) прокладено між вершинами v_0 і v_n, його можна задавати послідовністю вершин $v_0, v_1, \ v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$, якщо наявність ребер мається на увазі. Вершина v_0 є початком маршруту, а вершина v_n – його кінцем. *Довжина маршруту* дорівнює кількості ребер у ньому. Маршрут замкнений, якщо $v_0 = v_n$, і відкритий – у протилежному випадку.

Маршрут називають *ланцюгом*, якщо всі його ребра різні і *простим ланцюгом*, якщо всі вершини (а отже і ребра) різні.

Замкнутий ланцюг називають *циклом*, а замкнутий простий ланцюг – *простим циклом*.

Відстанню $d(u, v)$ між вершинами u і v називають довжину найкоротшого з ланцюгів, що з'єднує вершини u і v у графі $G = (V, E)$, де $u, v \in V$. Якщо вершини u і v не з'єднані маршрутом, то покладаємо $d(u, v) = \infty$.

Приклад 3.11. Граф $G = (V, E)$ задано діаграмою (рис.3.11). Вкажіть, яка з наведених послідовностей вершин є маршрутом, ланцюгом, простим ланцюгом, циклом, простим циклом:

1) v_1, v_2, v_3, v_2, v_5;

2) v_3, v_4, v_5, v_1, v_2;

3) $v_3, v_4, v_2, v_5, v_4, v_1$;

4) v_1, v_4, v_2, v_3, v_5;

5) v_1, v_2, v_3, v_4, v_1.

Знайдіть довжину кожного маршруту. Визначити відстань між вершинами v_1 і v_5.

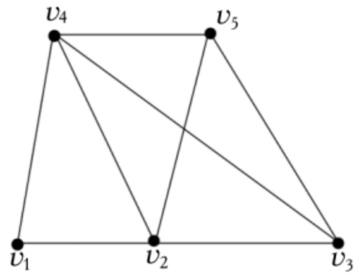


Рисунок 3.11. Діаграма графу $G = (V, E)$

Розв'язання

Послідовність вершин 2) v_3, v_4, v_5, v_1, v_2 не є маршрутом, оскільки ребро між вершинами v_1 і v_5 не існує у графі G. Усі інші послідовності вершин є маршрутами.

Послідовності 3) $v_3, v_4, v_2, v_5, v_4, v_1$ і 4) v_1, v_4, v_2, v_3, v_5 є ланцюгами. При цьому послідовність v_1, v_4, v_2, v_3, v_5 є простим ланцюгом, а v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 – простим циклом.

Довжина маршруту $v_3, v_4, v_2, v_5, v_4, v_1$ дорівнює 5, а довжина кожного з маршрутів v_1, v_2, v_3, v_2, v_5; v_1, v_4, v_2, v_3, v_5 та v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 дорівнює 4.

Найкоротший ланцюг між вершинами v_1 і v_5 містить два ребра, тому відстань між v_1 і v_5 дорівнює 2, тобто $d(v_1, v_5) = 2$.

Під *матрицею відстаней* звичайного графу $G = (V, E)$ розуміємо квадратну матрицю $D = D(G)$, порядок якої дорівнює порядку графу G, а елементи визначаються за правилом: $d_{ij} = d(i, j)$, де $d(i, j)$ – відстань між вершинами $v_i \in V$ та $v_j \in V$.

Діаметром $d(G)$ графу $G = (V, E)$ називають найбільшу відстань між двома його вершинами, тобто $d(G) = \max d(u, v)$, де максимум береться по всіх парах вершин $u, v \in V$. Дві вершини графу, відстань між якими дорівнює $d(G)$, називають *діаметрально протилежними*.

Ексцентриситетом $\varepsilon(u)$ вершини u у графі $G = (V, E)$ називають число $\varepsilon(u) = \max d(u, v)$, де максимум береться по всіх $v \in V$. Радіус графу $r(G)$ – це найменшій із ексцентриситетів його вершин, тобто $r(G) = \min \varepsilon(u)$, де мінімум береться по всіх $u \in V$. Діаметр графу дорівнює найбільшому з ексцентриситетів його вершин.

Вершину u графу G називають *центральною*, якщо $\varepsilon(u) = r(G)$.

Множину $Z(G)$ всіх центральних вершин графу G називають його *центром*.

Теорема 3.3. Для будь-якого зв'язного графу G маємо $r(G) \leq d(G) \leq 2r(G)$.

Приклад 3.12. Знайти ексцентриситети вершин графу G (рис. 3.12), його радіус, діаметр, центр і діаметрально протилежні вершини. Перевірити виконання нерівностей теореми 3.3 для даного графу.

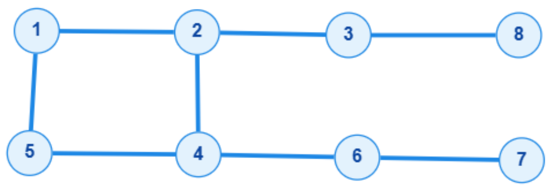


Рисунок 3.12. Діаграма графу G

Розв'язання

Запишемо матрицю відстаней графу у вигляді таблиці, в яку додамо стовпець значень ексцентриситетів $\varepsilon(\,i)$ вершин, де $i = 1, 2, \dots, 8$.

Номер вершини	1	2	3	4	5	6	7	8	$\varepsilon(\,i)$
1	0	1	2	2	1	3	4	3	4
2	1	0	1	1	2	2	3	2	3
3	2	1	0	2	3	3	4	1	4
4	2	1	2	0	1	1	2	3	3
5	1	2	3	1	0	2	3	4	4
6	3	2	3	1	2	0	1	4	4
7	4	3	4	2	3	1	0	5	5
8	3	2	1	3	4	4	5	0	5

$r(G) = \varepsilon(\,2) = \varepsilon(\,4) = 3$ – радіус графу G;

$d(G) = \varepsilon(\,7) = \varepsilon(\,8) = 5$ – діаметр графу G;

$Z(G) = \{2, 4\}$ – центр графу G.

Граф G має одну пару діаметрально протилежних вершин – це вершини 7 і 8.

Перевіримо виконання теореми 3.3: $r(G) \le d(G) \le 2r(G) \;\Leftrightarrow\; 3 \le 5 \le 6$. Нерівності виконуються.

Граф G називається *зв'язним*, якщо будь-яка пара його вершин з'єднана деяким маршрутом. Ізольовану вершину вважають зв'язаною саму з собою.

Максимальний зв'язний підграф графу G називається *компонентою зв'язності*, або просто *компонентою* графу G. Число компонент зв'язності графу G позначатимемо через $k(G)$ або k.

Приклад 3.13. Граф $G = (V, E)$ задано діаграмою (рис.3.13). Чи буде граф зв'язним? Скільки компонент зв'язності він містить?

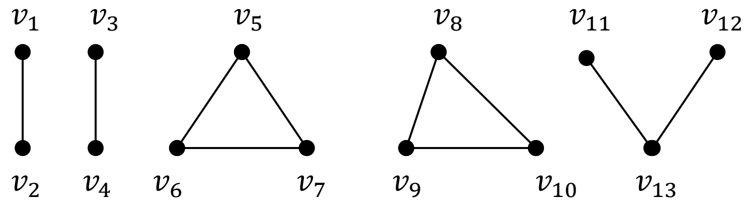


Рисунок 3.13. Діаграма графу G

Розв'язання

У графі G, зображеному на рис. 3.13, існують вершини не з'єднані маршрутом, наприклад v_1 і v_3. Отже, граф G не є зв'язним.

Граф G містить 5 максимально зв'язних підграфів, тому число його компонент зв'язності дорівнює 5, тобто $k(G) = 5$.

Для орієнтованого графу вводиться поняття *орієнтованого маршруту* – це маршрут виду (3.1), у якому дуга $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Орієнтований маршрут називають орієнтованим *ланцюгом*, якщо всі його дуги різні. Орієнтований простий ланцюг називають *орієнтованим шляхом* або *просто шляхом*. Замкнений орієнтований ланцюг називають *орієнтованим циклом* або *контуром*. Якщо всі вершини такого контуру, крім першої та останньої, різні, то контур називають *простим*.

Орієнтований граф називається *зв'язним*, якщо зв'язним є відповідний неорієнтований граф, який одержують після зняття орієнтації з усіх дуг.

Вершини v_i і v_j орієнтованого графу $\vec{G}$ називаються *сильно зв'язними*, якщо в $\vec{G}$ існує шлях з v_i у v_j і шлях з v_j у v_i. Будь-яка вершина є сильно зв'язною сама з собою.

Орієнтований граф називається *сильно зв'язним*, якщо будь-які дві його вершини є сильно зв'язними.

Максимальний сильно зв'язний підграф орієнтованого графу $\vec{G}$ називається *сильно зв'язною компонентою* графу $\vec{G}$.

Приклад 3.14. Граф $\vec{G} = (V, E)$ задано діаграмою (рис.3.14).

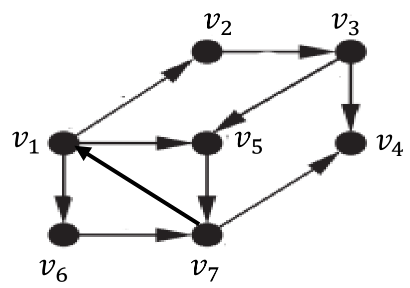


Рисунок 3.14. Діаграма графу $\vec{G}$

Вказати, яка з наведених послідовностей вершин є орієнтованим маршрутом, орієнтованим ланцюгом, орієнтованим шляхом, контуром:

1) $v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_5$;

2) v_1, v_5, v_7, v_1;

3) v_2, v_3, v_5, v_7, v_4.

Знайти довжину кожного орієнтованого маршруту. Визначити відстань між вершинами v_1 і v_4. Чи буде орграф $\vec{G}$ звязним, сильно звязним?

Розв'язання

Послідовність вершин 1) $v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_5$ не є орієнтованим маршрутом, оскільки дуги (v_4, v_7) і (v_7, v_5) відсутні в орграфі $\vec{G}$.

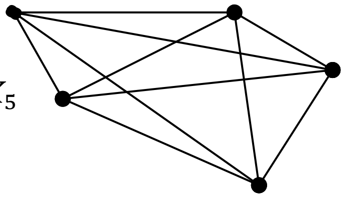
Послідовності вершин 2) v_1, v_5, v_7, v_1 і 3) v_2, v_3, v_5, v_7, v_4 є орієнтованими маршрутами в орграфі $\vec{G}$, причому 2) є контуром, а 3) – орієнтованим шляхом.

Довжина орієнтованого маршруту v_1, v_5, v_7, v_1 дорівнює 3, а довжина орієнтованого маршруту v_2, v_3, v_5, v_7, v_4 дорівнює 4.

Найкоротший орієнтований ланцюг між вершинами v_1 і v_4 містить три дуги, тому відстань між v_1 і v_4 дорівнює 3, тобто $d(v_1, v_4) = 3$.

Орграф $\vec{G}$ є зв'язним, але він не буде сильно зв'язним, так як, наприклад, вершини v_1 і v_4 не є сильно зв'язними.

Деякі графи, що часто зустрічаються, мають назви та позначення, це так звані *спеціальні графи*. Розглянемо деякі з них.



K_5

Рисунок 3.15. Діаграма K_5

Граф порядку n називається *повним*, якщо будь-які дві його вершини суміжні. Позначається K_n. На рис. 3.15 зображений повний граф K_5 порядку 5.

Граф називається *порожнім* (*нульовим*), якщо в ньому немає ребер. Порожній граф порядку n позначається O_n.

Циклом довжини n ($n \geq 3$) називають простий цикл на n вершинах, його позначають C_n (рис.3.16). *Ланцюг* довжини $n - 1$ – це простий ланцюг на n вершинах, його позначають P_n (рис.3.17).

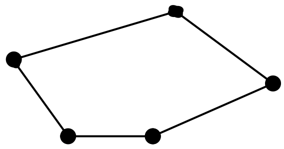


Рисунок 3.16. Діаграма цикла C_5

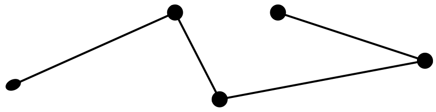


Рисунок 3.17. Діаграма ланцюга P_5

Двочастковий граф – це граф $G = (V, E)$, множину вершин V якого можна розбити на дві підмножини V_1 і V_2, які не перетинаються, таким чином, що кожне ребро графу G з'єднує вершини з різних підмножин. Якщо при цьому будь-які дві вершини, що входять у різні підмножини, суміжні, то граф називається *повним двочастковим* і позначається $K_{m,n}$ (рис.3.18), $|V_1| = m,\ |V_2| = n$.

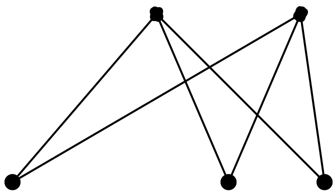


Рисунок 3.18. Діаграма повного двочасткового графа $K_{2,3}$

Аналогічно двочастковому визначаються k-*частковий* і *повний* k-*частковий* графи для $k = 3, 4, \ldots$

Граф $K_{1,n-1}$ називають *зіркою* порядку n.

Граф без циклів називають *ациклічним*. Ациклічний зв'язний граф називають *деревом*. Довільний ациклічний граф – це *ліс*. Компонентами зв'язності лісу є дерева. Вершини дерева степеня 1 називаються *листками*.

Теорема 3.4. Кожне дерево має центр, що складається з однієї або двох суміжних вершин.

Орієнтованим деревом називається вільний від петель орієнтований граф, який після зняття орієнтації з дуг стає деревом.

Щоб одержати *кореневе дерево*, треба довільно обрати в ньому вершину, цю вершину називають *коренем*.

Граф $G' = (V', E')$ називається *підграфом* графу $G = (V, E)$ (позначається $G' \subseteq G$), якщо $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$. В цьому випадку граф G називають *надграфо*м G'.

Підграф $G' = (V', E')$ називається *остовним підграфом* (або *фактором*) графу $G = (V, E)$, якщо $V' = V$.

Якщо $V' \subset V$ або $E' \subset E$ ($V' \neq V$ або $E' \neq E$), то G' називається *власним підграфом* графу G.

На рис.3.19 представлено граф і три його підграфи: G_1 – остовний підграф; G_1, G_2 і G_3 – власні підграфи графу G. Підграф G_1 містить ізольовані вершини.

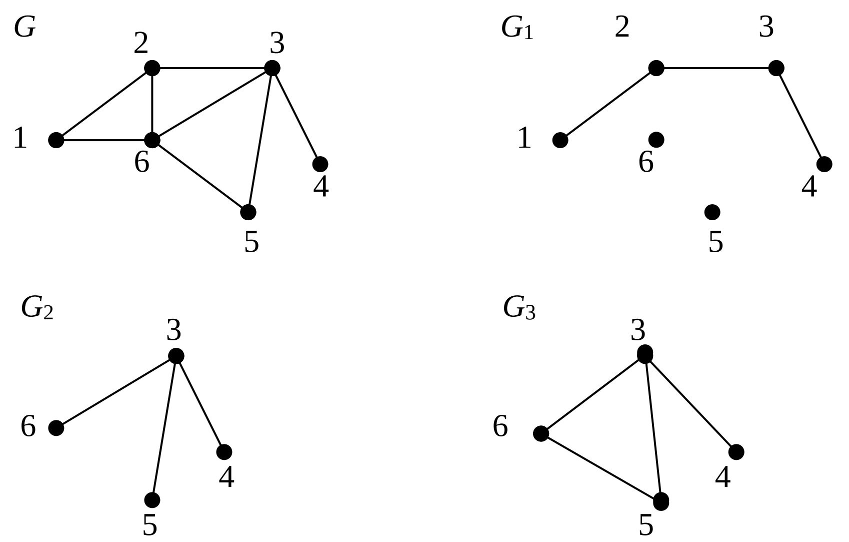


Рисунок 3.19. Діаграми графу і його підграфів

Граф $\overline{G} = (V, E_1)$ називають *доповненням* графу $G = (V, E)$, якщо їх множини вершин збігаються і вершини в $\overline{G}$ суміжні тільки тоді, коли вони не суміжні в G. Таким чином, $G \cup \overline{G} = K_n$, де $n = |V|$, $E(G) \cup E_1(\overline{G}) = E(K_n)$.

Приклад 3.15. Граф $G = (V, E)$ задано діаграмою (рис.3.11). Знайти доповнення $\overline{G}$ даного графу G.

Розв'язання

Задамо граф G переліком елементів множини вершин та множини ребер:

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,

$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$.

Множини вершин графів G і $\overline{G}$ збігаються. $\overline{G}$ має множину ребер E_1, яка складається тільки з тих ребер, які з'єднують несуміжні вершини в графі G:

$$E_1 = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_5\}\}.$$

Діаграма графу $\overline{G}$ представлена на рис. 3.20.

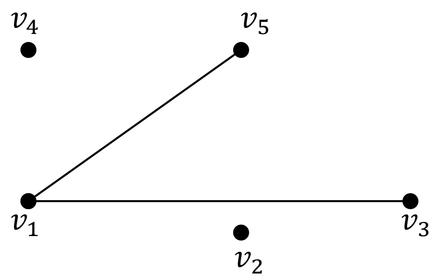


Рисунок 3.20. Діаграма графу $\overline{G}$

Контрольні питання.

1. Що називають маршрутом у графі?
2. Що називають довжиною маршруту у графі?
3. Який маршрут називають ланцюгом, простим ланцюгом, циклом, простим циклом?
4. Що називають відстанню між двома вершинами графу?
5. Якщо вершини u і v не з'єднані маршрутом, що приймають за відстань між ними?
6. Який граф називають зв'язним?
7. Що називають компонентою зв'язності графу?
8. Що називають орієнтованим маршрутом в орграфі?
9. Що є аналогом ланцюга в орграфі?
10. Що називають контуром в орграфі?
11. Які вершини в орграфі називаються сильно зв'язними?
12. Який орграф називається сильно зв'язним?
13. Які спеціальні графи Ви знаєте? Наведіть приклади.
14. Який граф називають двочастковим?
15. Який граф називається деревом, лісом?
16. Який граф називається орієнтованим деревом?
17. Що називають підграфом даного графу?
18. Який підграф називають остовним, власним?
19. Що називають доповненням даного графу?

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Граф $G = (V, E)$ задано діаграмою на рис. 3.21.

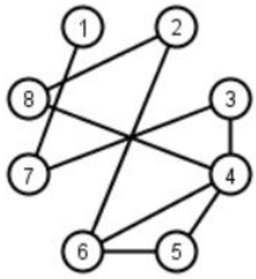


Рисунок 3.21. Діаграма графу G

1) Наведіть приклад маршруту, ланцюга, простого ланцюга, циклу, простого циклу.

2) Знайдіть відстань між вершинами 1 і 5.

3) Чи буде граф зв'язним? Знайти число компонент зв'язності.

4) Наведіть приклад підграфу, остовного підграфу, власного підграфу для даного графу.

5) Побудуйте доповнення даного графу.

Задача 2. Наведіть приклад графу з k компонентами звязності, якщо а) $k = 3$, б) $k = 6$.

Задача 3. Орграф $\vec{G} = (V, E)$ задано діаграмою на рис. 3.21.

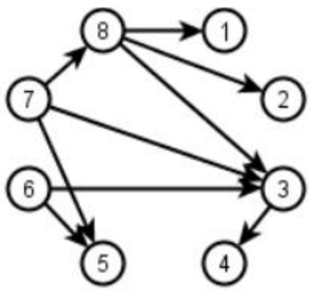


Рисунок 3.22. Діаграма графу $\vec{G}$

1) Наведіть приклад орієнтованого маршруту в $\vec{G}$?

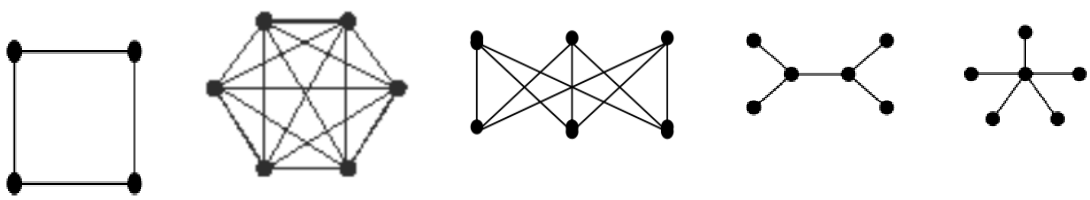
2) Чи існує в $\vec{G}$ контур? Відповідь поясніть.

3) Чи буде орграф $\vec{G}$ сильно зв'язним? Відповідь поясніть.

Задача 4. Спеціальні графи задані діаграмою на рис. 3.23.

Як називається кожний із заданих графів?

Визначте, який серед цих графів є регулярним і вкажіть його степінь регулярності. Знайдіть мінімальний і максимальний степінь кожного графу.



а) б) в) г) д)

Рисунок 3.23

Задача 5. Які з графів, представлених на діаграмі (рис. 3.24), є деревами?

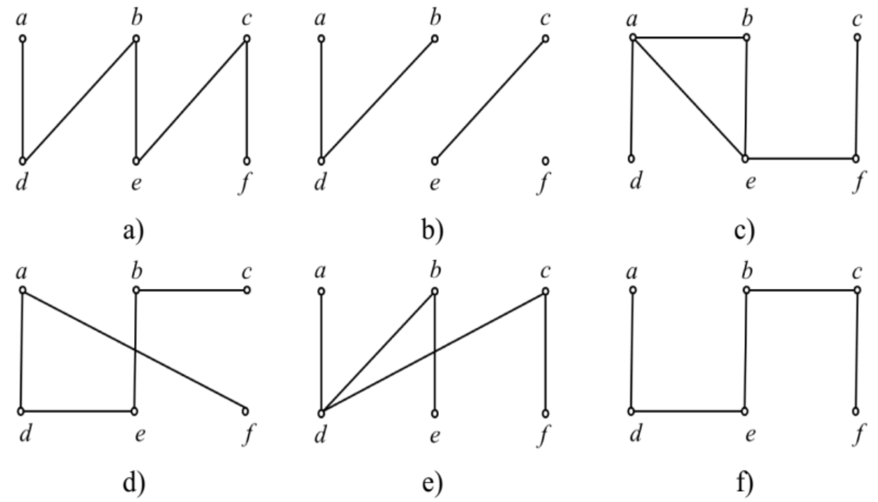


Рисунок 3.24

Задача 6. Вкажіть, які з графів наведених на рис. 3.25 є повними дводольними.

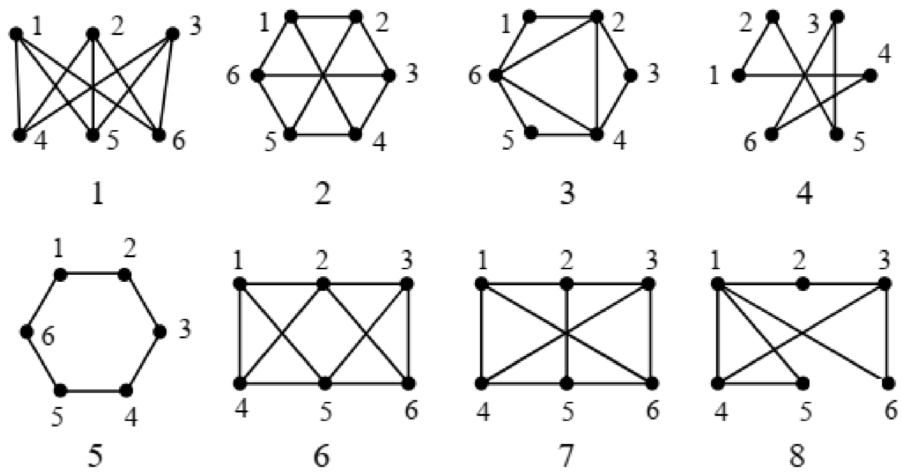


Рисунок 3.25

Задача 7. Скільки ребер містить повний трьохдольний граф $G = (V, E)$, якщо $|V_1| = 3$, $|V_2| = 4$, $|V_3| = 5$, де $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ і V_1, V_2, V_3 – множини вершин трьох його часток.

Задача 8. В повному дводольному графі $G = (V, E)$, де $V = V_1 \cup V_2$, міститься 119 ребер. Знайти величини $|V_1|$ і $|V_2|$, якщо відомо, що $|V_1| > 1$ і $|V_2| > 15$.

Задача 9. Побудувати дерево, яке містить:

а) 8 вершин;

б) 8 ребер.

Задача 10. Побудувати ліс, який містить 4 дерева.

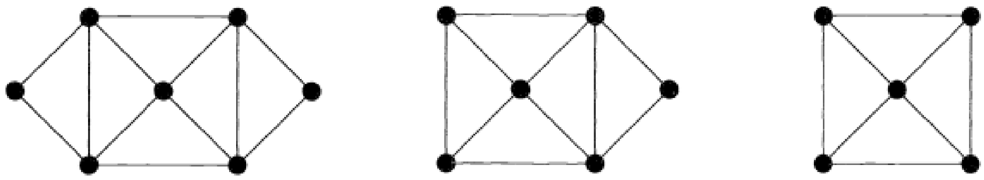
3.4 Ейлерові та гамільтонові графи

У теорії графів важливе місце займають задачі обходу графу, де потрібно побудувати маршрут, який проходить через певні елементи графу без повторень. Розглянемо дві класичні задачі, в основі яких лежить ця ідея.

3.4.1. Задача про Ейлерові обходи

Історично поняття ейлерового графу пов'язане із задачею про кьонігсбергські мости. *Ейлеровим ланцюгом* називають ланцюг, який проходить через кожне ребро графу рівно один раз. Якщо такий ланцюг є замкненим, то його називають *ейлеровим циклом*.

Граф називають *ейлеровим*, якщо він містить ейлерів цикл і *напівейлеровим*, якщо містить ейлерів ланцюг. На рис. 3.26 зображено а) ейлеровий, б) напівейлеровий та в) неейлеровий графи.



а) *б*) *в*)

Рисунок 3.26. Діаграми графів

Теорема 3.5 (Ейлер, 1736). Зв'язний граф є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли степінь кожної його вершини є парним числом.

Наслідок 3.4.1. Зв'язний граф є напівейлеровим тоді і тільки тоді, коли він має рівно дві вершини непарного степеня.

Приклад 3.16. Довести, що якщо граф $G = (V, E)$ є ейлеровим, то степінь кожної його вершини є парним числом.

Доведення. Доведення виконаємо з використанням прийому перетворення висновку, тобто спадного аналізу (див. п. 2.5). Припустимо, що висновок теореми правильний, тобто $\deg(v)$ – парне число для кожної вершини $v \in V(G)$.

Щоб степінь вершини був парним, необхідно, щоб усі ребра, інцидентні цій вершині, можна було розбити на пари. Таке попарне групування можливе лише тоді, коли кожному входу по ребру у вершину відповідає вихід із неї по іншому ребру. Це виконується тоді, коли існує замкнений маршрут, який проходить через кожне ребро графу рівно один раз, тобто ейлерів цикл.

Таким чином, одержуємо послідовність наслідків

B: $\deg(v)$ – парне число $\rightarrow$ B_1: ребра при вершині можна розбити на пари $\rightarrow$ B_2: кожному входу у вершину відповідає вихід $\rightarrow Y$: $G = (V,\ E)$ має ейлерів цикл.

Однак спадний аналіз сам по собі ще не є доведенням, оскільки він встановлює лише необхідність умови. Для завершення доведення потрібно перевірити, що знайдена умова є також достатньою.

Нехай граф G є ейлеровим. Тоді в ньому існує ейлерів цикл, який проходить через кожне ребро графа рівно один раз.

Розглянемо довільну вершину $v \in V(G)$. Кожного разу, коли ейлерів цикл входить у вершину v по деякому ребру, він виходить із неї по іншому ребру. Отже, ребра, інцидентні вершині v, утворюють пари: ребро входу і ребро виходу. Отже, кількість цих ребер є парною, тобто степінь вершини v парна. Оскільки вершина v була вибрана довільно, то степінь кожної вершини графу G є парним числом.

Для побудови ейлерового циклу існують спеціальні алгоритми. Одним із найвідоміших є алгоритм французького математика М. Флері, запропонований у 1883 році. Його ідея полягає в послідовному проходженні ребер графу таким чином, щоб, за можливості, не використовувати мости.

Ребро графу називається *мостом*, якщо його видалення збільшує число компонент зв'язності графу.

Алгоритм Флері

Нехай зв'язний граф $G = (V, E)$ містить ейлерів цикл. Необхідно побудувати цей цикл.

1. Обирають довільну початкову вершину графу.

2. Із поточної вершини переходять по ребру, яке не є мостом серед ще не використаних ребер. Якщо всі можливі ребра є мостами, то вибирають будь-яке з них.

3. Після проходження ребро видаляють із графу. Якщо внаслідок цього деяка вершина стає ізольованою, її також видаляють.

4. Процес повторюють доти, поки не будуть використані всі ребра даного графу.

Приклад 3.17. Розглянемо виконання алгоритму Флері для графу G, зображеного на рис. 3.27.

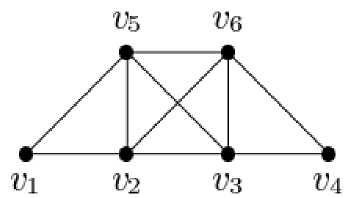


Рисунок 3.27 Діаграма графу G

Розв'язання

Граф є зв'язним. Степені його вершин дорівнюють:

$$\deg(v_1) = 2, \deg(v_2) = 4, \deg(v_3) = 4, \deg(v_4) = 2, deg(v_5) = 4, deg(v_6) = 4$$

Оскільки степені всіх вершин зв'язного графу G парні, то за теоремою 3.5 G є ейлеровим. Побудуємо для нього ейлерів цикл за алгоритмом Флері.

Почнемо обхід із вершини v_1. Переходимо по ребру $\{v_1, v_2\}$ у вершину v_2 та видаляємо це ребро з графу. Отримаємо граф, зображений на рис. 3.28. Із вершини v_2 переходимо по ребру $\{v_2, v_3\}$ у вершину v_3. Після проходження видаляємо це ребро (рис. 3.29). Далі з вершини v_3 переходимо у вершину v_4 по ребру $\{v_3, v_4\}$ і видаяємо його (рис. 3.30).

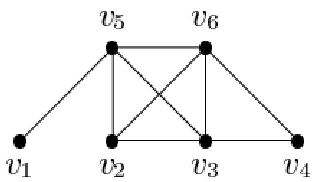


Рисунок 3.28

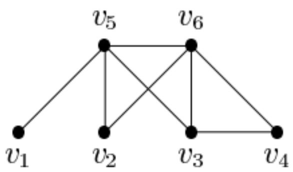


Рисунок 3.29

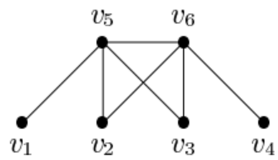


Рисунок 3.30

Оскільки після цього у вершини v_4 залишається лише одне інцидентне ребро, наступним кроком переходимо по ребру $\{v_4, v_6\}$, яке є мостом, у вершину v_6. Вершина v_4 стає ізольованою, видалимо її і отримаємо граф, зображений на рис. 3.31. Продовжуючи аналогічно виконувати алгоритм Флері, послідовно проходимо всі ребра графу рівно один раз. Процес видалення елементів графу представлено на рис. 3.32-3.29. У результаті одержуємо ейлерів цикл:

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_6 \rightarrow v_3 \rightarrow v_5 \rightarrow v_6 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5 \rightarrow v_1.$$

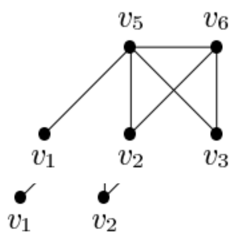


Рисунок 3.31

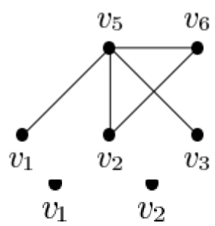


Рисунок 3.32

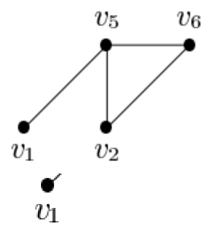


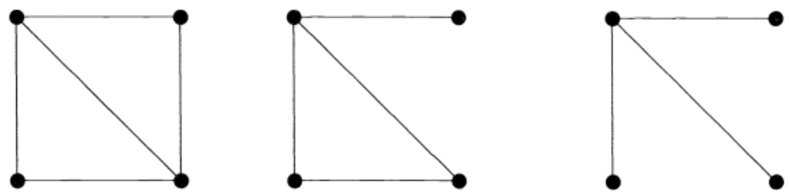
Рисунок 3.33

Слід зауважити, що для одного й того самого ейлерового графу алгоритм Флері може побудувати різні ейлерові цикли, оскільки на окремих кроках вибір ребра може бути неоднозначним.

3.4.2. Задача про гамільтонові обходи

Назва «гамільтонів» походить від імені ірландського математика Вільяма Роуена Гамільтона. У середині XIX століття він досліджував задачу обходу вершин додекаедра. У 1857 році Гамільтон створив математичну гру «Icosian Game», у якій потрібно було знайти цикл на графі додекаедра, проходячи через кожну вершину рівно один раз і повертаючись у початкову вершину. Саме ця задача стала одним із перших прикладів дослідження гамільтонових циклів.

Ланцюг, що проходить через кожну вершину графу рівно один раз, називають *гамільтоновим*. Якщо такий ланцюг є замкненим, то його називають *гамільтоновим циклом*. *Граф* називають *гамільтоновим*, якщо він містить гамільтонів цикл і *напів гамільтоновим*, якщо містить гамільтонів ланцюг. На рис. 3.37 зображено відповідно а) гамільтонів, б) напів гамільтонів та в) не гамільтонів графи.



а) *б*) *в*)

Рисунок 3.37 Діаграми графів

На відміну від ейлерових, для гамільтонових графів не існує простого необхідного і достатнього критерію. Тому в теорії графів досліджуються переважно достатні умови існування гамільтонових циклів.

Одним із класичних результатів є теореми Оре і Дірака.

Теорема 3.6 (Оре, 1960). Нехай G – граф з n вершинамиє і $\deg(v) + \deg(u) \geq n$ для кожної пари несуміжних вешин v і u. Тоді граф G є гамільтоновим.

Теорема 3.7 (Дірак, 1952). Нехай G – граф з n вершинамиє і $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ для кожної вешин $v \in V(G)$. Тоді граф G є гамільтоновим.

Контрольні питання.

1. Який граф називається ейлеровим?
2. Що таке ейлерів ланцюг?
3. Який граф називається напівейлеровим?
4. Сформулюйте теорему Ейлера про ейлерові графи.

5. Яка умова є необхідною і достатньою для існування ейлерового циклу у зв'язному графі?

6. Чому в ейлеровому графі всі вершини мають парний степінь?

7. Сформулюйте критерій напівейлеровості графа.

8. Скільки вершин непарного степеня може мати напівейлеровий граф?

9. Що таке гамільтонів цикл?

10. Який граф називається гамільтоновим?

11. Який граф називається напівгамільтоновим?

12. У чому полягає принципова відмінність між ейлеровими та гамільтоновими графами?

13. Хто вперше досліджував гамільтонові цикли?

14. Сформулюйте теорему Оре.

15. Які умови накладає теорема Оре на степені несуміжних вершин?

16. Сформулюйте теорему Дірака.

17. Яка мінімальна умова на степінь вершини в теоремі Дірака?

18. Які повні двочасткові графи є гамільтоновими?

19. Чому двочастковий граф з непарною кількістю вершин не може бути гамільтоновим?

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Які з наведених графів є ейлеровими? Напівейлеровими?

а) повний граф K_5; б) повний двочастковий граф $K_{2,3}$;

в) граф Петерсена (рис. 3.38).

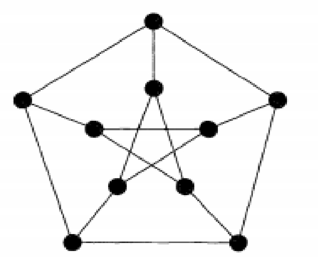


Рисунок 3.38. Граф Петерсена

Задача 2. Для яких значень n повний граф K_n є ейлеровими?

Задача 3. Які повні двочасткові графи є ейлеровими?

Задача 4. Нехай G – зв'язний граф з $k > 0$ вершинами непарного степеня. Покажіть, що мінімальна кількість маршрутів, які разом містять усі ребра графу G і не мають спільних ребер, дорівнює $\frac{k}{2}$.

Задача 5. Які з наведених графів є ейлеровими? Напівейлеровими?

а) Повний граф K_5; б) Повний двочастковий граф $K_{2,3}$.

Задача 6. Які з наведених на рис.3.39 графів мають ейлерів цикл? Якщо граф має ейлерів цикл, знайдіть його за алгоритмом Флері.

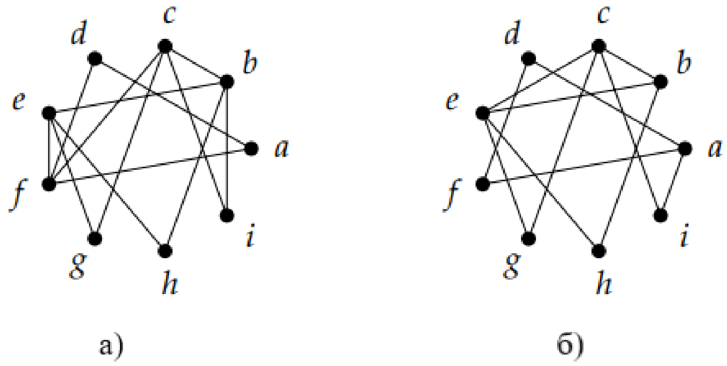


Рисунок 3.39. Діаграми графів

Задача 7. Для яких значень n повний граф K_n є гамільтоновим?

Задача 8. Чи є граф Петерсена (рис. 3.38) гамільтоновим?

Задача 9. Вкажіть гамільтонові графи та графи, які містять ейлерів ланцюг (рис. 3.40).

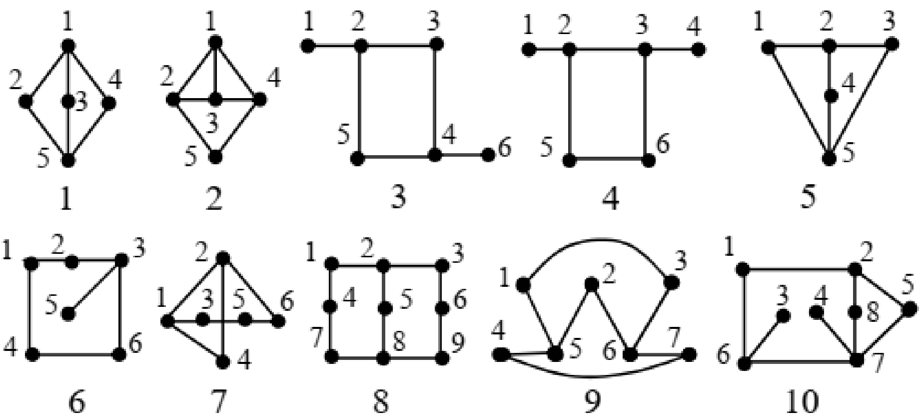


Рисунок 3.40. Діаграми графів

Задача 10. Доведіть, що якщо G – двочастковий граф з непарною кількістю вершин, то G є негамільтоновим.

Задача 11. Наведіть приклад, який показує, що умову $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ у теоремі Дірака не можна замінити умовою $\deg(v) \geq \frac{n-1}{2}$.

Задача 12. Нехай G – граф з n вершинами та $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ ребрами. Використайте теорему 3.5, щоб довести, що G є гамільтоновим.

3.5 Зважені графи. Алгоритм Дейкстри

3.5.1 Зважені графи

Будемо використовувати позначення $G = (V,\ E)$ як для неорієнтованого, так і для орієнтованого графів.

Граф $G = (V,\ E)$ називається *зваженим*, якщо кожному ребру $e \in E(G)$ поставлено у відповідність число $w(e)$. Число $w(e)$ називають *вагою* (або *довжиною*, або *вартістю*) ребра. Аналогічне означення вводиться для зваженого орієнтованого графу.

Зауваження. Будь-яким елементам графу (ребрам і/або вершинам) можна ставити у відповідність числа. Такий граф також вважають зваженим. Надалі будемо розглядати такі зважені графи, у яких тільки ребра мають вагу.

Довжиною (або *вагою*, або *вартістю*) *маршруту* (*шляху*) між двома вершинами зваженого графу називається число, яке дорівнює сумі ваг ребер (дуг), які утворюють цей маршрут (шлях).

Відстань $d(i,j)$ *між двома вершинами* i та j зваженого графу дорівнює довжині найкоротшого маршруту, що їх з'єднує. Якщо між двома вершинами не існує маршруту, то приймають відстань між ними рівною ∞.

Якщо граф незважений, то вагу ребер (дуг) вважають рівною одиниці та отримують раніше введене поняття довжини маршруту (шляху) як кількості ребер (дуг) у ньому.

Зважений граф є зручною моделлю під час дослідження цілого ряду задач у транспорті, зв'язку та інших областях, пов'язаних з дійсним або уявним рухом товарів, інформації або людей.

Матрицею ваг графу G називають квадратну матрицю $W = W(G)$, порядок якої дорівнює порядку графу G, а елементи визначаються за правилом: $w_{ij} = w(i,j)$, де $w(i,j)$ – вага ребра (дуги) між суміжними вершинами i та j для $i \neq j$, $w_{ii} = 0$, в інших випадках приймають $w_{ij} = \infty$.

Приклад 3.18.

а) Зважений граф G, заданого діаграмою рис.3.41. Біля кожного ребра вказана його вага. Записати матрицю ваг.

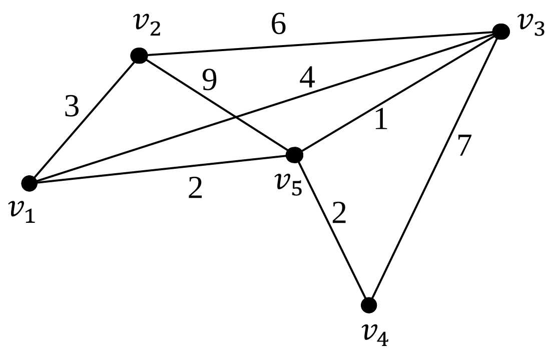


Рисунок 3.41 Діаграма графу G

Розв’язання

Матриця ваг графу G має вигляд:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & \infty & 2 \\ 3 & 0 & 6 & \infty & 9 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 1 \\ \infty & \infty & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 9 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Зважений граф $\vec{G}$ задано діаграмою на рис.3.42. Біля кожного ребра вказана його вага. Записати матрицю ваг.

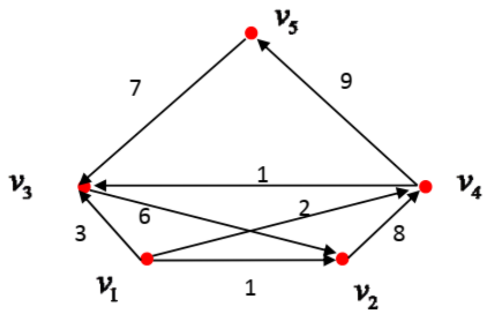


Рисунок 3.42

Розв’язання

Матриця ваг графа $\vec{G}$ має вигляд:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 8 & \infty \\ \infty & 6 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 9 \\ \infty & \infty & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

3.5.2 Алгоритм Дейкстри

Розглянемо клас задач оптимізації, в яких математичною моделлю виступає граф або орграф і необхідно знайти найкоротший маршрут (шлях) від заданої вершини до інших вершин графу. Універсальним алгоритмом для знаходження розв'язку цих задач є алгоритм Дейкстри.

Зауваження. У наведеному класі задач оптимізації вагами ребер можуть виступати будь-які додатні числові одиниці. Наприклад, якщо вага ребра дорівнює часу, то шукають мінімальний час. Якщо вага дорівнює кількості грошових одиниць, то шукають мінімальну вартість і т.п.

Будемо шукати в графі $G = (V, E)$ порядку n найкоротші шляхи з вершини a, яку називають *початковою* (або *джерелом* в орграфі) до всіх інших вершин G, досяжних з a.

Під час роботи алгоритму вводитимемо мітки вершин. Мітка $l(v)$ вершини v може буде постійною або тимчасовою. Величина постійної мітки дорівнює довжині найкоротшого шляху, який проходить від початкової вершини a через вершини з постійними мітками до v. Деякі вершини $v \neq a$ під час роботи алгоритму наділяються тимчасовими мітками $l(v)$, які дорівнюють мінімальній відстані від початкової вершини a до v серед довжин усіх тих маршрутів, які проходять через вершини з постійними мітками.

На кожному кроці будемо формувати множину вершин S, в яку входять тільки вершини з постійними мітками. Решта вершин буде мати тимчасові мітки.

Опишемо основні етапи роботи алгоритму Дейкстри знаходження довжин мінімальних шляхів від початкової вершини a до всіх інших вершини графу, досяжних з вершини a.

1. Вершині a приписуємо мітку 0 (нульова відстань до самої себе), а кожній з $(n-1)$ вершин, що залишилися, присвоюється тимчасова мітка ∞. Одержимо

$$l(a) := 0; \; l(v) := \infty \quad \forall v \neq a,$$

$l(a)$ – постійна мітка, $l(v)$ – тимчасові мітки для всіх $v \neq a$, $S = \{a\}$; $P = V \setminus S$ – множина вершин графу з тимчасовими мітками, V – множина вершин даного графу.

2. Правило перерахунку міток. Нехай вершина x має сталу мітку, одержану на попередньому кроці. Для кожної вершини $v \in P$ з тимчасовою міткою замінити мітки, якщо $v \in \text{См}(x)$:

$$l(v) = \min\{\, l(v), l(x) + w(x, v)\},$$

де $\text{См}(x)$ – множина вершин v з тимчасовими мітками суміжних з x для неорієнтованого графу і для яких існує дуга (x, v) в орієнтованому графі.

3. Перетворення мітки на постійну. Серед усіх вершин з тимчасовими мітками знайти вершину з мінімальною міткою, тобто знайти v^* наступним чином:

$$l(v^*) = \min\{\, l(v) \mid v \in P = V \setminus S\}.$$

Мітка $l(v^*)$ перетворюється на постійну. Покладаємо $S = S \cup \{v^*\}$, $P = V \setminus S$.

4. Правило виходу з алгоритму. Якщо $S \neq V$, то переходимо на крок 2, інакше $l(v^*)$ – довжина мінімального шляху з вершини a у вершину v.

Зауваження. Якщо $l(v) = \infty$ по закінченню роботи алгоритму, то шляху з вершини a у вершину v на графі не існує, тобто v не досяжна з a.

Шлях від вершини a до вершини v відновлюється за відомими мітками вершин, отриманими за допомогою алгоритму Дейкстри, крок за кроком від вершини v до повернення у вершину a.

Приклад 3.19. Для графу, діаграма якого наведена на рис. 3.43, знайти довжини мінімальних шляхів від вершини v_0 до всіх інших і відновити мінімальний шлях від v_0 до c.

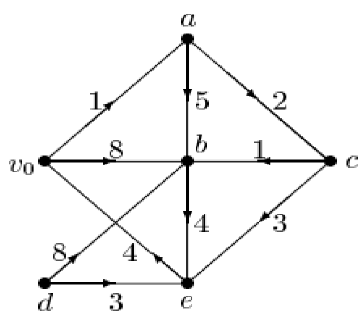


Рисунок 3.43

Розв'язання

Застосуємо алгоритм Дейкстри. Процес призначення міток вершинам графу на кожному кроці зручно подати у вигляді таблиці 3.1.

Напишемо множину вершин даного графу досяжних із v_0:

$$V = \{v_0, a, b, c, e\}.$$

Вершина d не досяжна з вершини v_0. Отже, не існує шляху з v_0 в d і відстань між ними вважають рівною ∞.

Крок 0. Початкова вершина v_0 отримує постійну мітку 0, всі інші вершини будуть мати тимчасові мітки ∞:

$$l(v_0) := 0 - \text{постійна мітка};\ l(a) = l(b) = l(c) = l(d) = l(e) = \infty.$$

Ці значення занесемо в рядок таблиці 3.1, що відповідає кроку 0.

Крок 1. $\text{См}(v_0) = \{a, b\}$, для вершин a, b з тимчасовими мітками, для яких існує дуга з вершини v_0 з постійною міткою, оновлюємо мітки:

$l(a) = \min\{\, l(a), l(v_0) + w(v_0, a)\} = \min\{\infty, 0 + 1\} = 1;$

$l(b) = \min\{\, l(b), l(v_0) + w(v_0, b)\} = \min\{\infty, 0 + 8\} = 8;$

$\min\{l(a), l(b),\ l(c), l(d), l(e)\} = \min\{\mathbf{1}, \mathbf{8}, \infty, \infty, \infty\} = \mathbf{1} = l(a)$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці 3.1, що відповідає кроку 1.

Крок 2. $\text{См}(a) = \{b, c\}$, для вершин b, c з тимчасовими мітками, для яких існує дуга з вершини a з постійною міткою, оновлюємо мітки:

$l(b) = \min\{\, l(b), l(a) + w(a, b)\} = \min\{\mathbf{8}, 1 + 5\} = \min\{8{,}6\} = \mathbf{6}$;

$l(c) = \min\{\, l(c), l(a) + w(a, c)\} = \min\{\infty, 1 + 2\} = \min\{\infty, 3\} = \mathbf{3}$;

$\min\{\, l(b),\ l(c), l(d), l(e)\} = \min\{\mathbf{6}, \mathbf{3}, \infty, \infty\} = \mathbf{3} = l(c)$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці 3.1, що відповідає кроку 2.

Крок 3. $\text{См}(c) = \{b, e\}$, для вершин b, e з тимчасовими мітками, для яких існує дуга з вершини c з постійною міткою, оновлюємо мітки:

$l(b) = \min\{\, l(b), l(c) + w(c, b)\} = \min\{6, 3 + 1\} = \min\{\mathbf{6}, 4\} = \mathbf{4}$;

$l(e) = \min\{\, l(e), l(c) + w(c, e)\} = \min\{\infty, 3 + 3\} = \min\{\infty, 6\} = \mathbf{6}$;

$\min\{\, l(b), l(d), l(e)\} = \min\{\mathbf{4}, \infty, \mathbf{6}\} = \mathbf{4} = l(b)$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці 3.1, що відповідає кроку 3.

Крок 4. $\text{См}(b) = \{e\}$, для вершини e з тимчасовою міткою, для якої існує дуга з вершини b з постійною міткою, оновлюємо мітки:

$l(e) = \min\{\, l(e), l(b) + w(b, e)\} = \min\{6, \mathbf{4} + 4\} = \min\{6{,}8\} = \mathbf{6}$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці 3.1, що відповідає кроку 4.

Таблиця 3.1

Кроки	v_0	a	b	c	d	e	Множини S, $V \backslash S$
0	0	∞	∞	∞	∞	∞	$S = \{v_0\}$, $P = V \backslash S = \{a, b, c, d, e\}$
1	0	1	8	∞	∞	∞	$S = S \cup \{a\} = \{v_0, a\}$, $P = V \backslash S = \{b, c, d, e\}$
2	0	1	6	3	∞	∞	$S = S \cup \{c\} = \{v_0, a, c\}$, $P = V \backslash S = \{b, d, e\}$
3	0	1	4	3	∞	6	$S = S \cup \{b\} = \{v_0, a, c, b\}$, $P = V \backslash S = \{\, d, e\}$
4	0	1	4	3	∞	6	$S = S \cup \{e\} = \{v_0, a, c, b, e\}$, $P = V \backslash S = \emptyset$

Довжини мінімальних шляхів від вершини v_0 до інших вершин, досяжних з вершини v_0, виділені в таблиці червоним кольором.

Мінімальний шлях від вершини v_0 до вершини e наступний: v_0, a, c, e, він має довжину 6.

Приклад 3.20. Розглянемо схему автомобільних доріг між населеними пунктами. Її математичною моделлю є граф, зображений на рис. 3.44. Вага кожного ребра дорівнює кількості годин, що витрачається в середньому на шлях між відповідними населеними пунктами. Обчислити мінімальний час, витрачений на маршрут від пункту 1 до всіх інших і відновити мінімальний маршрут від пункту 1 до пункту 7.

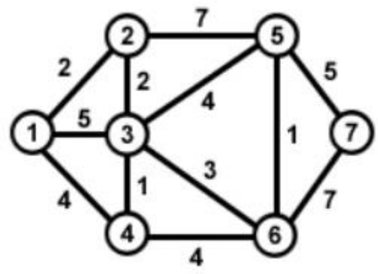


Рисунок 3.44

Розв'язання

Застосуємо алгоритм Дейкстри.

Напишемо множину вершин даного графу досяжних з 1:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Крок 0. Початкова вершина 1 отримує постійну мітку 0, всі інші вершини будуть мати тимчасові мітки ∞:

$$l(1) := 0 - \text{стала мітка;} \quad l(2) = l(3) = l(4) = l(5) = l(6) = l(7) = \infty.$$

Ці значення занесемо в рядок таблиці 3.2, що відповідає кроку 0.

Крок 1. $\text{См}(1) = \{2, 3, 4\}$, для вершин 2, 3, 4 з тимчасовими мітками оновлюємо мітки:

$l(2) = \min\{\, l(2), l(1) + w(1,2)\} = \min\{\infty, 0 + 2\} = 2;$

$l(3) = \min\{\, l(3), l(1) + w(1,3)\} = \min\{\infty, 0 + 5\} = 5;$

$l(4) = \min\{\, l(4), l(1) + w(1,4)\} = \min\{\infty, 0 + 4\} = 4;$

$\min\{l(2), l(3), l(4), l(5), l(6), l(7)\} = \min\{\mathbf{2}, \mathbf{5}, \mathbf{4}, \infty, \infty, \infty\} = \mathbf{2} = l(2)$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці 3.2, що відповідає кроку 1.

Крок 2. $\text{См}(2) = \{3,5\}$, для вершин 3, 5 з тимчасовими мітками оновлюємо мітки:

$l(3) = \min\{\, l(3), l(2) + w(2,3)\} = \min\{\mathbf{5}, 2 + 2\} = \min\{5, 4\} = \mathbf{4};$

$l(5) = \min\{\, l(5), l(2) + w(2\ ,5)\} = \min\{\infty, 2 + 7\} = \min\{\infty, 9\} = \mathbf{9};$

$\min\{\, l(3), l(4), l(5), l(6), l(7)\} = \min\{\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{9}, \infty, \infty\} = \mathbf{4} = l(3)$ – постійна мітка.

Вершини 3 і 4 мають однакові мітки $l(3) = l(4) = 4$, обираємо будт-яку з цих вершин. Ми обрали вершину 3.

Ці значення занесемо в рядок таблиці 3.2, що відповідає кроку 2.

Крок 3. $\text{См}(3) = \{4, 5, 6\}$, для вершин 4, 5, 6 з тимчасовими мітками, оновлюємо мітки:

$l(4) = \min\{\, l(4), l(3) + w(3, 4)\} = \min\{4, 4 + 1\} = \min\{\mathbf{4}, 5\} = \mathbf{4};$

$l(5) = \min\{\, l(5), l(3) + w(3, 5)\} = \min\{9, 4 + 4\} = \min\{9, 8\} = \mathbf{8};$

$l(6) = \min\{\, l(6), l(3) + w(3, 6)\} = \min\{\infty, 4 + 3\} = \min\{\infty, 7\} = \mathbf{7};$

$\min\{l(4), l(5), l(6), l(7)\} = \min\{\mathbf{4}, \mathbf{8}, \mathbf{7}, \infty\} = \mathbf{4} = l(4)$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці 3.2, що відповідає кроку 3.

Крок 4. $\text{См}(4) = \{6\}$, для вершини 6 з тимчасовою міткою оновлюємо мітки:

$l(6) = \min\{ l(6), l(4) + w(4{,}6)\} = \min\{7, \mathbf{4} + 4\} = \min\{7, 8\} = \mathbf{7}$;

$\min\{l(5), l(6), l(7)\} = \min\{ \mathbf{8}, \mathbf{7}, \infty\} = \mathbf{7} = l(6)$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці 3.2, що відповідає кроку 4.

Крок 5. $\text{См}(6) = \{5{,}7\}$, для вершин 5,7 з тимчасовими мітками оновлюємо мітки:

$l(5) = \min\{ l(5), l(6) + w(6, 5)\} = \min\{8, \mathbf{7} + 1\} = \min\{8, 8\} = \mathbf{8}$;

$l(7) = \min\{ l(7), l(6) + w(6{,}7)\} = \min\{\infty, \mathbf{7} + 7\} = \min\{\infty, 14\} = \mathbf{14}$;

$\min\{l(5), l(7)\} = \min\{ \mathbf{8}, \mathbf{14}\} = \mathbf{8} = l(5)$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці 3.2, що відповідає кроку 5.

Крок 6. $\text{См}(5) = \{7\}$, для вершини 7 з тимчасовою міткою оновлюємо мітки:

$l(7) = \min\{ l(7), l(5) + w(5, 7)\} = \min\{14, \mathbf{8} + 5\} = \min\{14, 13\} = \mathbf{13}$ – постійна мітка.

Ці значення занесемо в рядок таблиці 3.2, що відповідає кроку 6.

Виконання алгоритму представимо в таблиці 3.2.

Таблиця 6.2

кроки	1	2	3	4	5	6	7	Множини S, $V\backslash S$
0	**0**	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$S = \{1\}$, $P = V\backslash S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
1	0	**2**	5	4	∞	∞	∞	$S = S \cup \{2\} = \{1, 2\}$, $P = V\backslash S = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
2	0	2	**4**	4	9	∞	∞	$S = S \cup \{3\} = \{1, 2, 3\}$, $P = V\backslash S = \{4, 5, 6{,}7\}$
3	0	2	4	**4**	8	7	∞	$S = S \cup \{4\} = \{1, 2, 3, 4\}$, $P = V\backslash S = \{5, 6{,}7\}$
4	0	2	4	4	8	**7**	∞	$S = S \cup \{6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $P = V\backslash S = \{5{,}7\}$
5	0	3	4	4	**8**	7	14	$S = S \cup \{5\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 5\}$, $P = V\backslash S = \{7\}$
6	0	2	4	4	8	7	**13**	$S = S \cup \{7\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 5, 7\}$, $P = V\backslash S = \emptyset$

Мінімальний час від пункту 1 до інших пунктів виділені в таблиці червоним кольором.

Мінімальний шлях з вершини 1 до вершини 7 наступний: $1, 2, 3, 4, 6, 5, 7$, на нього витрачається час, рівний 13 годинам.

Контрольні запитання.

1. Який граф називається зваженим?
2. Що називають вагою або довжиною ребра у зваженому графі?
3. Що називають довжиною (або вартістю, або вагою) матршруту між двома вершинами графу?
4. Що називають відстанню між двома вершинами графу?
5. Що називають матрицею ваг графу?
6. Для якого класу задач застосовують алгоритм Дейкстри?
7. Наведіть основні етапи роботи алгоритму Дейкстри.

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Який із наведених графів, поданих на рис. 3.45, є зваженим?

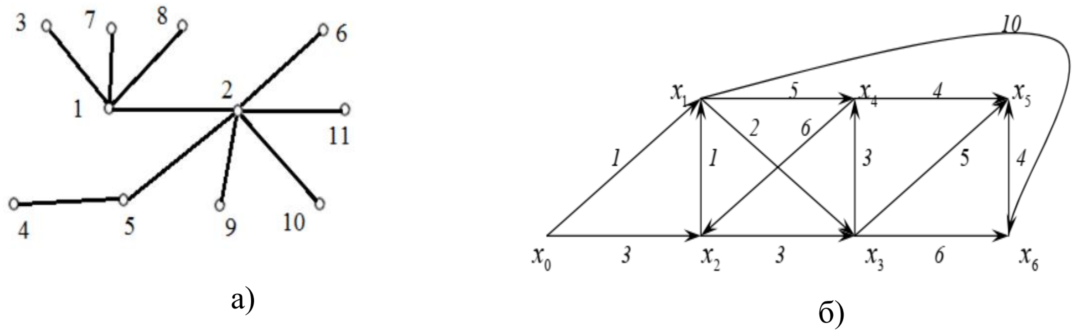
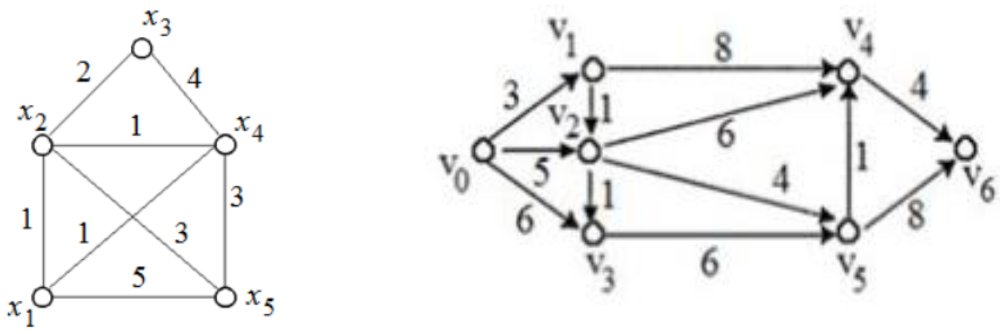


Рисунок 3.45

Задача 2. Для орграфу, заданого діаграмою на рис.3.45 б) знайти довжину маршруту x_1, x_2, x_4, x_5. За алгоритмом Дейкстри обчислити найкоротший шлях від вершини x_0 до всіх інших вершин цього орграфу.

Задача 3. Для графів, заданих діаграмами на рис. 3.46, записати матриці ваг.

Для орграфу, заданого діаграмою на рис. 3.46 а) знайти відстань між вершинами x_1 і x_5. Для орграфу, заданого діаграмою на рис. 3.46 б), за алгоритмом Дейкстри обчислити найкоротший шлях від вершини v_0 до всіх інших вершин.



а) б)

Рисунок 3.46

3.5. Потоки у транспортній мережі
3.5.1 Основні поняття

Розглядатимемо скінчені зважені орієнтовані графи.

Вершину орграфу $\vec{G}$ з нульовим півстепенем заходу, тобто таку, з якої лише виходять дуги, називають *джерелом* і позначають $\boldsymbol{s}$. Вершину орграфу $\vec{G}$ з нульовим півстепенем виходу, тобто таку, в яку лише входять дуги, називають *стоком* і позначають $\boldsymbol{t}$.

Пропускною здатністю дуги $e = (i, j)$ називають будь-яке невід'ємне число $c(e)$ або $c(i, j)$, яке визначає максимальний потік, що може проходити через цю дугу.

Транспортною мережою (або просто *мережою*) $N = (V,\ E)$ називають зв'язний зважений орієнтований граф без петель, який задовольняє такі умови:

1) існує тільки одне джерело $\boldsymbol{s}$;

2) існує тільки один сток $\boldsymbol{t}$;

3) кожна дуга $e = (i, j)$ має пропускну здатність $c(e)$ або $c(i, j)$. Якщо не існує дуги e, орієнтованої з i в j, то покладають $c(i, j) = 0$.

Транспортна мережа може слугувати моделлю мережі перевезення вантажу від центру виробництва до споживача через шляхи, що їх пов'язують. Пропускна спроможність дуги може розглядатися як максимальна швидкість з якою вантаж транспортується вздовж дуги.

Потоком f у транспортній мережі $N = (V,\ E)$ називають функцію, яка кожній дузі $e = (i, j)$ ставить у відповідність невідємне дійсне число $f(e) = f(i, j)$, що задовольняє умовам:

1) обмеження пропускної здатності:

$$0 \leq f(i, j) \leq c(i, j) \quad \forall\ i, j\ \in V; \tag{3.2}$$

2) Умова збереження потоку:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} f(i,j) = \sum_{j:(j,i)\in E} f(j,i) \qquad \forall\ i \in V\backslash\{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}\}. \qquad (3.3)$$

У формулі (3.3) ліва частина визначає сумарний потік, що виходить із вершини i, а права частина – сумарний потік, що входить у вершину i.

Функція $f(e)$ може інтерпретуватися як кількість речовини (або швидкість з якою відбувається перевезення вантажу, або обсяг вантажу за одиницю часу і т.п.), що проходить по дузі $e = (i,j)$ з i у j (за одиницю часу). Умову (3.2) називають *обмеженням пропускної здатності*. Вона вимагає, щоб величина потоку $f(e)$ не перевищувала пропускної здатності $c(e)$. Умову (3.3) називають *умовою збереження потоку*. Відповідно до неї для будь-якої вершини $i \neq \boldsymbol{s},\boldsymbol{t}$ даної мережі кількість речовини, що надходить в i, дорівнює кількості речовини, що виходить з i. Це означає, що речовина не може накопичуватися в жодній вершині транспортної мережі за винятком джерела і стоку.

Величину потоку f у мережі N позначають $\mathrm{val}(f)$ і визначають виразом

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{j:(s,j)\in E} f(s,j). \qquad (3.4)$$

Із умови збереження потоку випливає, що величину потоку можна також обчислювати як сумарний потік, що надходить у стік:

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{j:(s,j)\in E} f(s,j) = \sum_{j:(j,t)\in E} f(j,t)$$

Введемо поняття розрізу орієнтованого графу $\vec{G} = (V,\ E)$. Нехай множина вершин V розбита на дві підмножини S і T, тобто $S\subset V, T\subset V,\ S \cap T = \emptyset$ і $S \cup T = V$, причому $s \in\ S$, $t \in T$. Тоді $\langle S,T\rangle$-*розрізом* орграфу $\vec{G}$ називають множину всіх дуг, що мають початок у множині S і кінець у множині T.

Оскільки множина T однозначно визначається множиною S як доповнення до V, тобто $T = V \setminus S$, то замість $\langle S,T\rangle$ часто використовують позначення $\langle S,\overline{S}\rangle$, де $\overline{S} = V \setminus S$.

Розріз $\langle S,\overline{S}\rangle$ у транспортній мережі $N = (V,\ E)$ розділяє джерело s і стік t, якщо $s \in\ S$, а $t \in\ \overline{S}$. Пропускна здатність $c\left(S,\overline{S}\right)$ розрізу $\langle S,\overline{S}\rangle$ визначається виразом

$$c\left(S,\overline{S}\right) = \sum_{\substack{i\in S\\ j\in \overline{S}}} c(i,j). \qquad (3.5)$$

Зауважимо, що пропускна здатність дуг, які орієнтовані з $\overline{S}$ у S, не збільшує пропускну здатність розрізу $\langle S,\overline{S}\rangle$. Позначимо через $f\left(S,\overline{S}\right)$ суму потоків по дугах, орієнтованих з S у $\overline{S}$. Величину $f\left(\overline{S},S\right)$ визначають аналогічно.

Приклад 3.21. Розглянемо мережу наведену на рис. 3.47. Біля кожної дуги e подано пару чисел: перше число – це пропускна здатність $c(e)$, друге число – це потік $f(e)$. Знайти пропускну здатність $\langle S, \overline{S} \rangle$, де $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$; суму потоків по ребрах, орієнтованих з S в $\overline{S}$ і з $\overline{S}$ в S.

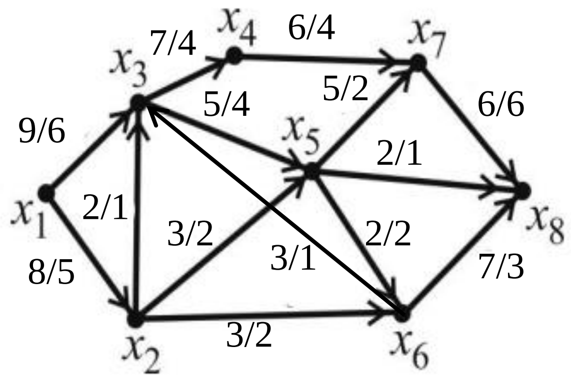


Рисунок 3.47

Розв'язання

Граф мережі має одне джерело – вершину x_1 і один сток – вершину x_8.

За умовою задачі $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, тоді $\overline{S} = \{x_6, x_7, x_8\}$.

Дугами, орієнтованими з S в $\overline{S}$, є дуги (x_4, x_7), (x_5, x_6), (x_5, x_7) та (x_5, x_8). Тому пропускна здатність розрізу $\langle S, \overline{S} \rangle$ дорівнює

$$c(S, \overline{S}) = c(x_4, x_7) + c(x_5, x_6) + c(x_5, x_7) + c(x_5, x_8) = 6 + 2 + 5 + 2 = 15.$$

Обчислимо суму потоків по дугахх, орієнтованих з S в $\overline{S}$:

$$f(S, \overline{S}) = f(x_4, x_7) + f(x_5, x_6) + f(x_5, x_7) + f(x_5, x_8) = 4 + 2 + 2 + 1 = 9.$$

Дугами, орієнтованими з $\overline{S}$ у S є дуга (x_6, x_3). Тому сума потоків по дугах, орієнтованих з $\overline{S}$ у S, дорівнює

$$f(\overline{S}, S) = f(x_6, x_3) = 1.$$

Розглянутий приклад показує, що величина потоку через мережу тісно пов'язана з пропускною здатністю розрізів, які відокремлюють джерело від стоку. Цей зв'язок встановлюється наступними теоремами.

Теорема 3.8. Для будь-якого потоку f і будь-якого s-t-розрізу $\langle S, \overline{S} \rangle$ транспортної мережі $N = (V, E)$ виконується наступна рівність

$$\mathrm{val}(f) = f(S, \overline{S}) - f(\overline{S}, S). \tag{3.6}$$

Наслідок 3.5.1. Для будь-якого потоку f і будь-якого s-t-розрізу $\langle S, \overline{S} \rangle$ в транспортній мережі $N = (V, E)$ виконується наступна нерівність

$$\mathrm{val}(f) \le c(S, \overline{S}). \tag{3.7}$$

Наслідок 3.5.2. Нехай f – потік, а $\langle S, \overline{S} \rangle$ такий s-t-розріз, що $\mathrm{val}(f) = c(S, \overline{S})$. Тоді потік f є максимальним потоком, а розріз $\langle S, \overline{S} \rangle$ є мінімальним s-t-розрізом.

Теорема 3.9 (теорема Форда і Фалкерсона)**.** Максимальний потік у транспортній мережі дорівнює пропускній здатності мінімального розрізу.

Збільшуваним (*доповнювальним*) називають s-t-ланцюг, вздовж якого можна збільшити величину потоку.

Теорема 3.10. Потік f у транспортній мережі $N = (V,\ E)$ є максимальним тоді і тільки тоді, коли в мережі відсутній збільшуваний ланцюг.

Дугу $e = (i, j)$ транспортної мережі називають f-*насиченою*, якщо $f(i, j) = c(i, j)$ і f-*ненасиченою* в іншому випадку.

Дугу $e = (i, j)$ транспортної мережі називають f-*додатною*, якщо $f(i, j) > 0$ і f-*нульовою*, якщо $f(i, j) = 0$.

3.5.2 Алгоритм пошуку максимального потоку в транспортній мережі (алгоритм Форда-Фалкерсона)

Розглянемо ланцюг P в транспортній мережі $N = (V,\ E)$, який сполучає джерело s з деякою вершиною $v \in V \backslash \{s\}$ (рис.3.48). Не обов’язково, щоб ланцюг P був орієнтованим.

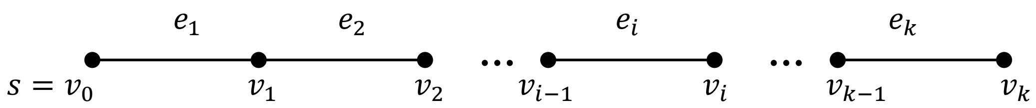


Рисунок 3.48

Дугу e_i ланцюга P називають *прямою*, якщо вона орієнтована з вершини v_{i-1} у вершину v_i. Інакше дугу e_i називається *оберненою*. Нехай для кожної дуги e_i ланцюга P

$$\varepsilon_i(P) = \begin{cases} c(e_i) - f(e_i), \text{якщо } e_i \text{ є прямою дугою,} \\ f(e_i), \quad \text{якщо } e_i \text{ є оберненою дугою.} \end{cases}$$

Поставимо у відповідність ланцюгу P невід’ємне число $\varepsilon(P)$, що визначається виразом

$$\varepsilon(P) = \min_i \{\varepsilon_i(P)\}.$$

Ланцюг називають f-*насиченим*, якщо всі його прямі дуги є f-насиченими, а всі обернені дуги – f-додатними.

s-t-Ланцюг P називається f-*доповнювальним ланцюгом*, якщо він не є f-насиченим.

Максимальний потік у транспортній мережі визначатимемо за алгоритмом Форда-Фалкерсона. Він базується на теоремі 3.10 і складається з двох етапів.

На першому етапі вершинам ставлять у відповідність мітки виду $(u^{\pm}, \Delta_v)$, де $u^{\pm}$ вказує на вершину u, з якої вершина v одержала мітку. Символ «+» використовують, якщо дуга (u, v) є прямою і «–», якщо вона є оберненою.

Припустимо, що вершина u має мітку, а вершина v ні. Нехай e – дуга, що сполучає вершини u і v.

Пряме розмічування. Якщо $e = (u, v)$, то пряме розмічування вершини v з вершини u вздовж дуги e можливе за умови $c(e) > f(e)$. Тоді вершина v отримає мітку (u^+, Δ_v), де $\Delta_v = \min\{\Delta_u, c(e) - f(e)\}$.

Обернене розмічування. Якщо $e = (v, u)$, то обернене розмічування вершини v з вершини u вздовж дуги e можливе за умови $f(e) > 0$. Тоді вершина v отримає мітку (u^-, Δ_v), де $\Delta_v = \min\{\Delta_u, f(e)\}$.

На першому етапі кожна вершина отримає мітку не більше одного разу. Перший етап завершується, якщо

1) стік t отримав мітку

або

2) стік t не отримав мітку і жодну нову вершину більше неможливо розмітити.

Якщо на першому етапі стік t отримає мітку, то існує f-доповнювальний ланцюг P, причому $\varepsilon(P) = \Delta_t$.

На другому етапі ланцюг P простежують у зворотному напрямку за допомогою символів u^- і будують новий потік $\hat{f}$.

Після цього перший етап повторюється по відношенню до потоку $\hat{f}$.

Якщо перший етап завершується без розмічування стоку t, то f-доповнювальний ланцюг не існує, а потік f є максимальним.

Опишемо алгоритм Форда-Фалкерсона знаходження максимального потоку в транспортній мережі:

1. Вибрати початковий потік f від джерела s до стоку t у транспортній мережі $N = (V,\ E)$. Зокрема, можна покласти $f(e) = 0$ для кожної дуги $e \in E$.

2. (Початок першого етапу.) Призначити вершині s мітку $(-, \infty)$.

3. Якщо існує непомічена вершина, яку можна помітити з допомогою прямого або оберненого розмічування, то вибрати одну таку вершину v, і призначити їй мітку, а далі перейти до кроку 4. Інакше перейти до кроку 7.

4. Якщо $v = t$, то перейти до кроку 5. (Перший етап завершено.) Інакше повернутися до кроку 3.

5. (Початок другого етапу.) Нехай вершина v має мітку $(u^{\pm}, \Delta_v)$. Тоді виконуємо наступні дії:

5.1) якщо маємо мітку u^{+}, то покласти $f(u, v) = f(u, v) + \Delta_t$,

5.2) якщо маємо мітку u^{-}, то покласти $f(v, u) = f(v, u) - \Delta_t$.

6. Якщо $u = s$, то видалити всі мітки (другий етап завершено) і перейти до кроку 2. Інакше покласти $v = u$ і перейти до кроку 5.

7. Отриманий потік f є масимальним.

Проілюструємо роботу алгоритму Форда-Фалкерсона на прикладі.

Приклад 3.22. Транспортна мережа $N = (V, E)$, наведена на рис. 3.49, описує систему перевезення вантажу зі складу $s = v_0$ до пункту призначення $v_5 = t$ через проміжні транспортні вузли v_1, v_3, v_2, v_4. Для кожної дуги на рис. 3.49 вказано її пропускну здатність $c(e)$.

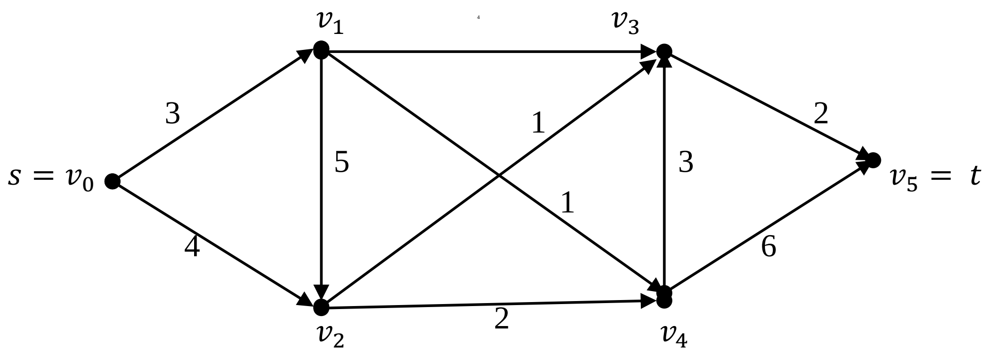


Рисунок 3.49

Потрібно визначити максимальний обсяг вантажу, який можна доставити зі складу s до пункту призначення t, використовуючи алгоритм Форда-Фалкерсона.

Розв'язання

За початковий потік беремо нульовий потік, тобто вважаємо, що в усіх дугах мережі потік дорівнює нулю. Розмічування вершин починаємо з джерела $s = v_0$, якому надаємо мітку $(-, \infty)$. Відповідно до кроку 3 алгоритму Форда-Фалкерсона послідовно розмічуємо вершини v_1, v_3, v_2, v_4 і $v_5 = t$ у вказаному порядку (рис. 3.50). Оскільки вершина t отримала мітку, першій етап завершено можна перейти до побудови доповняльного ланцюга.

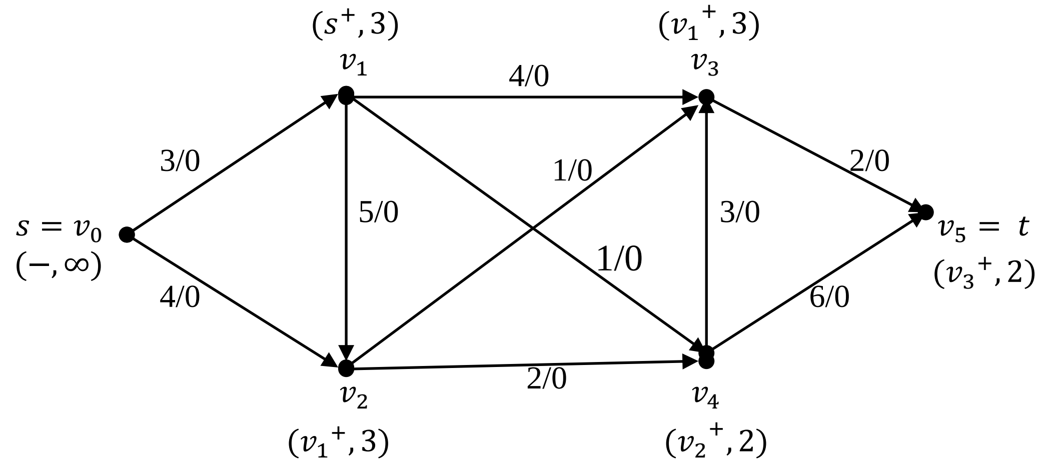
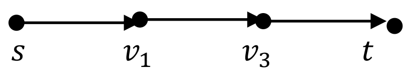


Рисунок 3.50

На другому етапі за отриманими мітками відновлюємо доповнювальний ланцюг P_1 і будуємо новий потік f_1 (кроки 3 і 6). Перший символ у мітці вершини t є $v_3{}^+$. Це означає, що в доповняльному ланцюгу P_1 вершина v_3 передує t. Перший символ у мітці вершини v_3 є $v_1{}^+$, тому вершина v_1 передує v_3. Аналогічно встановлюємо, що джерело s передує вершині v_1. Таким чином, маємо наступний доповнювальний ланцюг P_1:



Усі дуги ланцюга P є прямими. Для вершини t маємо $\Delta_t = 2$. Тому для одержання нового потоку f_1, збільшуємо потоки по всіх дугах P на $\Delta_t = 2$. У результаті одержуємо потік f_1 величини $\text{val}(f_1) = 2$, який зображено на рис. 3.51.

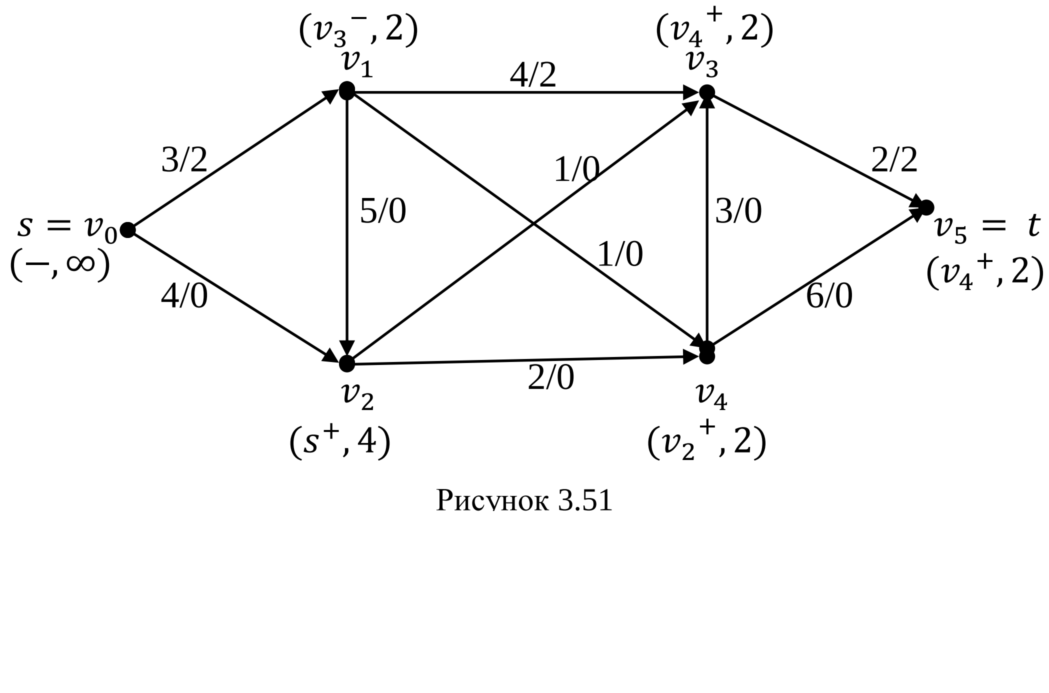


Рисунок 3.51

Доповняльний ланцюг P_2 по відношенню до потоку f_1 складається з вершин s, v_2, v_4, t у вказаному порядку, тобто $P_2 = s \to v_2 \to v_4 \to t$. Всі дуги в цьому ланцюзі прямі. Потоки в цих ребрах збільшуються на $\Delta_t = 2$. Новий потік f_2 має величину рівну $\mathrm{val}(f_2) = 2$ і зображено на рис. 3.52. Мітки всіх вершин оновлюємо, нові значення вказані на рис. 3.52.

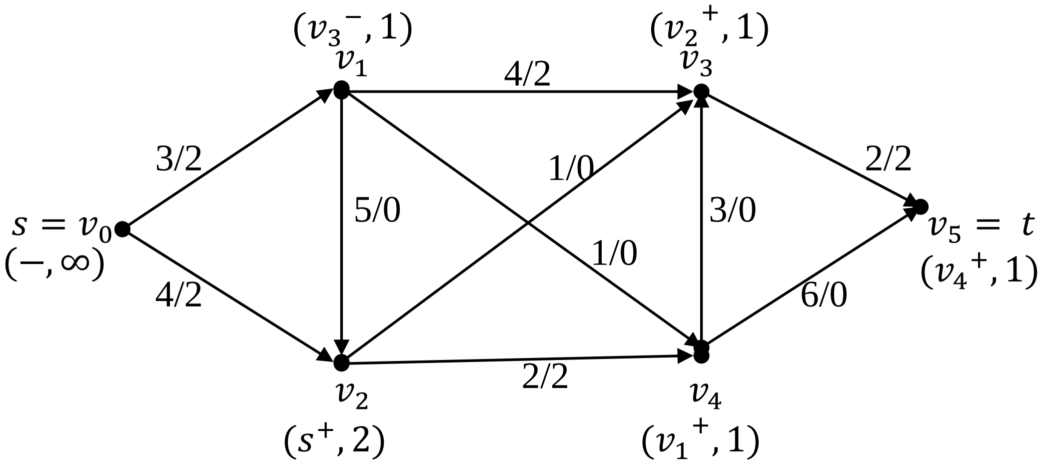


Рисунок 3.52

Доповняльний ланцюг P_3 по відношенню до потоку f_2 складається з вершин s, v_2, v_3, v_1, v_4, t у вказаному порядку. Дуга, що з'єднує вершини v_1 та v_3, є оберненою в цьому ланцюзі, а всі інші дуги – прямі. Збільшуємо потоки в прямих дугах на 1 і на 1 зменшимо потік в оберненій дузі. Новий потік f_3 зображено на рис. 3.53.

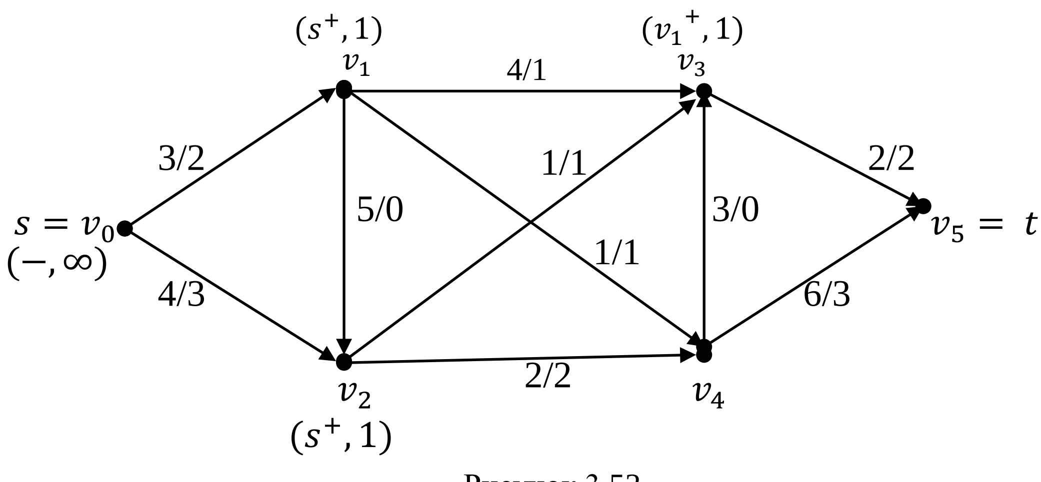


Рисунок 3.53

Мітки всіх вершин оновлюємо, нові значення вказані на рис. 3.53, розмічування вершин завершується в цьому стані, коли вершина t ще не має мітку. Таким чином, не існує доповняльного ланцюга по відношенню до f_3. Тому одержуємо потік величини $\mathrm{val}(f_3) = 5$ і f_3 є максимальним.

Таким чином, транспортна мережа здатна забезпечити перевезення не більше 5 одиниць вантажу за одиницю часу від джерела s до стоку t.

Множина вершин $S = \{s, v_1, v_2, v_3\}$, які залишилися розміченими після завершення алгоритму, визначає мінімальний розріз мережі. Пропускна здатність цього розрізу також дорівнює 5, тому значення максимального потоку збігається з пропускною здатністю мінімального розрізу, що узгоджується з теоремою Форда-Фалкерсона.

Контрольні запитання

1. Яку вершину орграфу називають джерелом, стоком?
2. Що називається пропускною здатністю дуги?
3. Що називається транспортною мережею?
4. Що називається потоком у транспортній мережі?
5. Якою є умова обмеження по пропускної здатності?
6. Якою є умова збереження потоку?
7. Як позначють і визначають величину потоку у транспортній мережі?
8. Що розуміють під $\langle s, t\rangle$-розрізом орграфу $\vec{G} = (V,\ E)$? Відповідь поясніть.
9. Що розуміють під $\langle S, \overline{S}\rangle$ розрізом орграфу $\vec{G} = (V,\ E)$? Відповідь поясніть.
10. Як визначають пропускну здатність $c\left(S, \overline{S}\right)$ розрізу $\langle S, \overline{S}\rangle$ у транспортній мережі?
11. Як визначають величину $f\left(\overline{S}, S\right)$?
12. Як пов’язана величина потоку $\mathrm{val}(f)$ з потоком через розріз $\langle S, \overline{S}\rangle$?
13. У якому випадку потік у мережі є максимальним, а розріз – мінімальним?
14. Яку дугу траспортної мережі називають насиченою? Ненасиченою?
15. Яку дугу траспортної мережі називають додатною? Нульовою?
16. Яку дугу ланцюга P у траспортній мережі називають прямою? Оберненою?
17. Який ланцюг називають насиченим? Доповнювальним?
18. Що означає пряме розмічування вершин?
19. Що означає обернене розмічування вершин?
20. Опишіть роботу алгоритму Форда-Фалкерсона.

Задачі для самостійного розвязування

Задача 1. Для мережі, зображеної на рис. 3.54, знайти пропускну здатність розрізу $\langle S, \overline{S}\rangle$, де $S = \{x_0, x_2, x_3, x_4\}$, а також суму потоків по дугах, орієнтованих із S в $\overline{S}$ та з $\overline{S}$ в S.

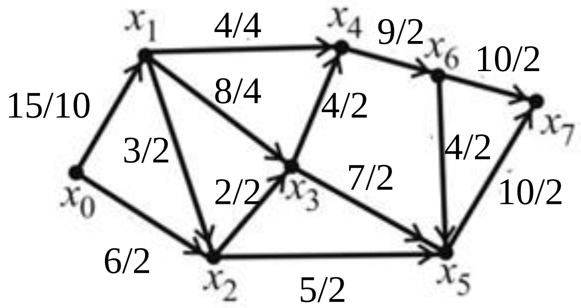


Рисунок 3.54

Біля кожної дуги e подано пару чисел: перше число – це пропускна здатність $c(e)$, друге число – це потік $f(e)$.

Задача 2. Для транспортної мережі відомо, що $f(S,\overline{S}) = 12$ і $f(\overline{S},S) = 5$. Знайти $\mathrm{val}(f)$. Чи можна на підставі цих даних зробити висновок, що потік потік f є максимальним, а розріз $\langle S,\overline{S}\rangle$ – мінімальним?.

Задача 3. Для транспортної мережі із задачі 1 записати насичені дуги, якщо такі існують.

Задача 4. Для транспортної мережі з задачі 1 розглянемо ланцюг $P = x_0 \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_5 \to x_6 \to x_7$. Визначити прямі і обернені дуги цього ланцюга.

Задача 5. Розглянемо транспортну мережу $N = (V,\ E)$, представлену на рис. 3.55.

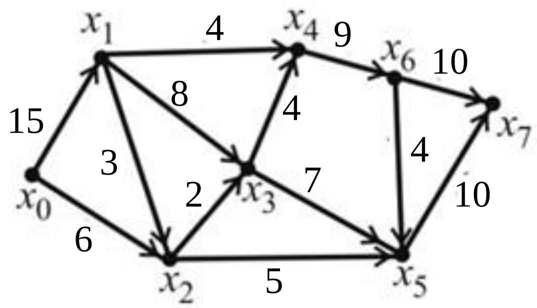


Рисунок 3.55

Для кожної дуги e вказано її пропускну здатність $c(e)$. Знайти максимальний потік по мережі за алгоритмом Форда-Фалкерсона.

Індивідуальні завдання

Завдання 1. Граф $G = (V,\ E)$ задано діаграмою.

1.1. Визначити

а) порядок та розмір графу G;

б) степені всіх вершин графу G.

1.2. Задати граф G

а) переліком елементів;

б) матрицею суміжності;

в) матрицею інцидентності.

1.3. Знайти для графу G, якщо існує

а) простий ланцюг, що веде з вершини 1 у вершину 5;

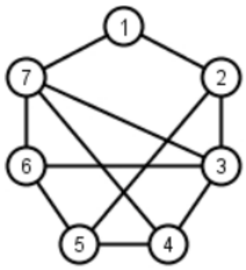
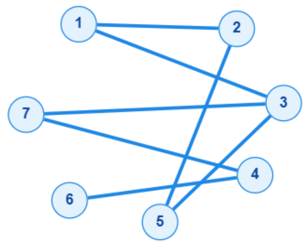
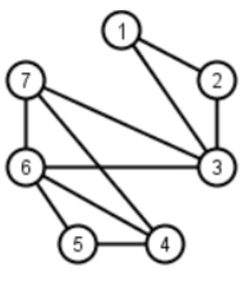
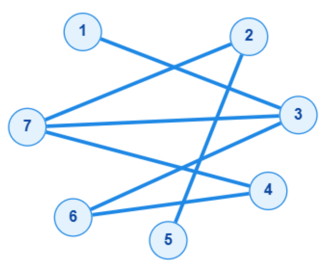
в) простий цикл;

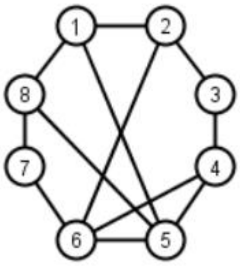
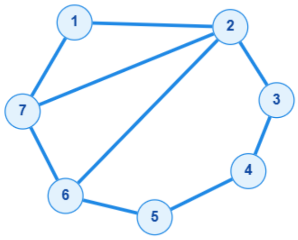
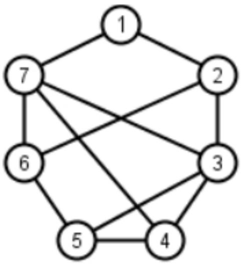
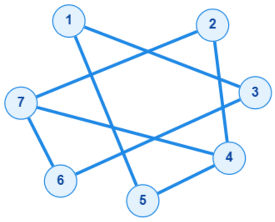
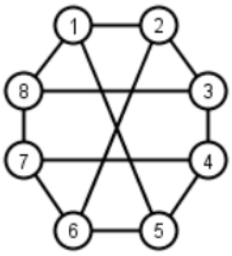
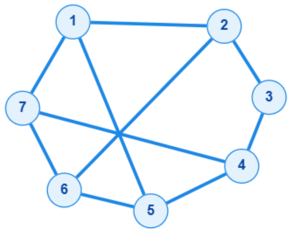
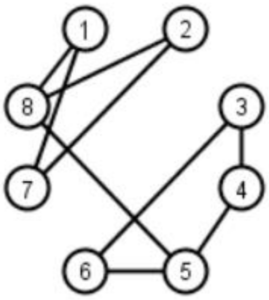
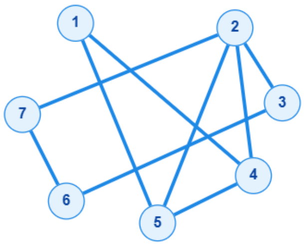
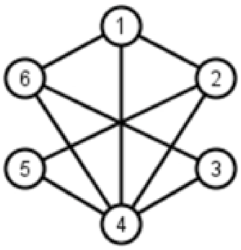
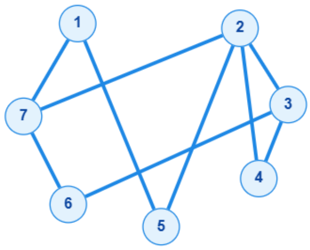
г) підграф порядку 4;

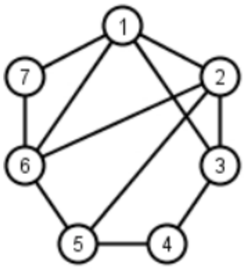
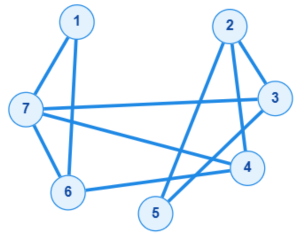
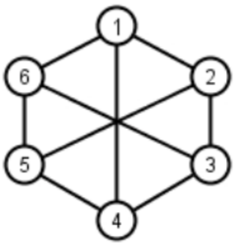
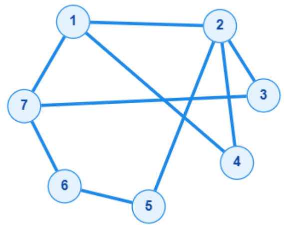
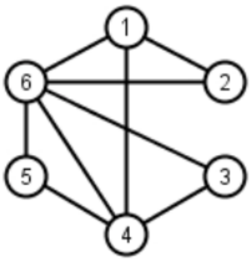
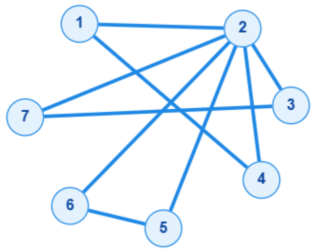
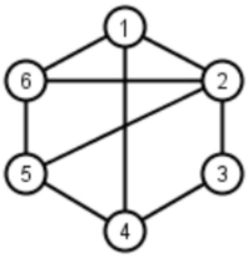
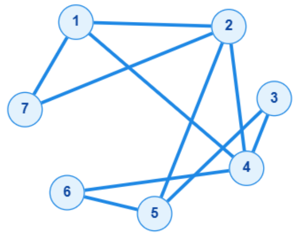
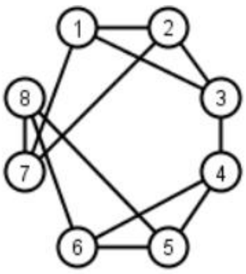
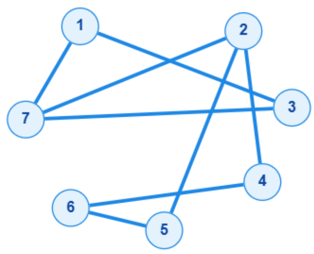
д) остовний підграф.

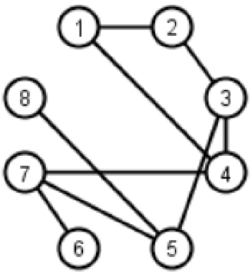
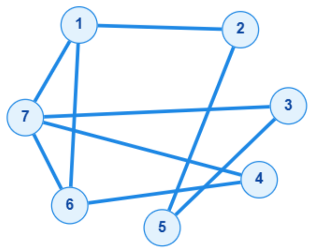
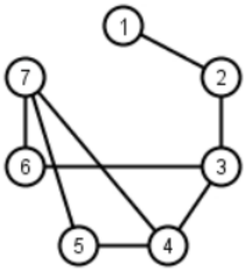
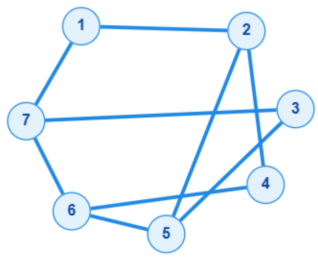
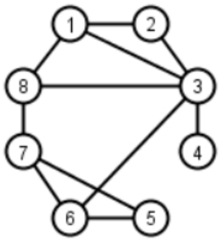
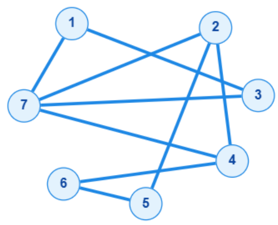
1.4. Визначити чи є граф G ейлеровим, напівейлеровим? Чи має граф G гамільтонів цикл?

1.5. Знайти ексцентриситет, радіус, діаметр і центр графу G.

№	Граф $G = (V,\ E)$	№	Граф $G = (V,\ E)$
1.		2.	
3.		4.	

5.		6.	
7.		8.	
9.		10.	
11.		12.	
13.		14.	

15.		16.	
17.		18.	
19.		20.	
21.		22.	
23.		24.	

25.	 	26	
27	 	28	
29	 	30	

Завдання 2. Орієнтований граф задано множиною вершин і ребер. Побудувати його діаграму. Задати граф матрицею суміжності. Визначити півстепені заходу та виходу для кожної вершини. Знайти, якщо вони існують: шлях, що веде з вершини 1 у вершину 5 та контур.

№ вар.	Завдання
01	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_3),(x_2,x_1),(x_2,x_6),(x_3,x_2),(x_4,x_3),(x_4,x_5),(x_5,x_3),(x_5,x_6),(x_6,x_1),(x_6,x_4)\}$
02	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_4),(x_3,x_2),(x_3,x_4),(x_4,x_5),(x_5,x_2),(x_5,x_3),(x_5,x_6),(x_6,x_4)\}$
03	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_2,x_5),(x_2,x_6),(x_3,x_4),(x_4,x_1),(x_4,x_5),(x_4,x_6)\}$
04	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_5),(x_2,x_5),(x_3,x_2),(x_3,x_4),(x_3,x_5),(x_4,x_2),(x_4,x_5),(x_4,x_7),(x_6,x_1),$ $(x_6,x_5),(x_6,x_7),(x_7,x_5)\}$
05	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_4),(x_1,x_5),(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_3,x_5),(x_4,x_2),(x_5,x_6),(x_6,x_3)\}$

06	$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_4),(x_3,x_2),(x_3,x_4),(x_3,x_6),(x_5,x_4),(x_5,x_6),(x_7,x_4),(x_7,x_6)\}$
07	$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ $U=\{(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_3,x_4),(x_3,x_7),(x_4,x_5),(x_5,x_6),(x_6,x_3),(x_7,x_8),(x_8,x_2),(x_9,x_4)\}$
08	$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ $U=\{(x_1,x_5),(x_1,x_6),(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_2,x_4),(x_2,x_5),(x_3,x_4),(x_3,x_7),(x_6,x_2),(x_6,x_3),$ $(x_6,x_5),(x_7,x_1),(x_7,x_2),(x_7,x_4)\}$
09	$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ $U=\{(x_1,x_8),(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_3,x_5),(x_3,x_7),(x_4,x_2),(x_4,x_3),(x_5,x_4),(x_6,x_5),(x_6,x_7),$ $(x_7,x_1),(x_8,x_6),(x_8,x_7)\}$
10	$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ $U=\{(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_2,x_4),(x_3,x_4),(x_4,x_5),(x_5,x_7),(x_6,x_5),(x_6,x_7),(x_6,x_8)\}$

11	$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_4),(x_1,x_6),(x_1,x_{10}),(x_2,x_3),(x_3,x_5),(x_3,x_8),(x_4,x_2),(x_4,x_6),(x_5,x_2),$ $(x_5,x_4),(x_6,x_7),(x_6,x_{10}),(x_8,x_5),(x_8,x_7),(x_9,x_7),(x_9,x_8),(x_{10},x_7),(x_{10},x_9)\}$
12	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\}$ $U=\{(x_2,x_1),(x_2,x_4),(x_4,x_3),(x_4,x_5),(x_6,x_1),(x_6,x_2),(x_6,x_3),(x_6,x_4),(x_6,x_5),(x_6,x_7),$ $(x_6,x_8),(x_6,x_9),(x_7,x_1),(x_7,x_9),(x_8,x_5),(x_8,x_9)\}$
13	$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U=\{(x_1,x_4),(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_3,x_4),(x_4,x_5),(x_4,x_6),(x_5,x_2),(x_6,x_2)\}$
14	$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_6),(x_2,x_8),(x_3,x_7),(x_4,x_2),(x_5,x_4),(x_5,x_{10}),(x_6,x_3),(x_6,x_5),(x_7,x_4),$ $(x_8,x_3),(x_9,x_1),(x_9,x_7),(x_{10},x_8),(x_{10},x_9)\}$
15	$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_1,x_4),(x_2,x_4),(x_3,x_4),(x_5,x_4),(x_6,x_4),(x_7,x_4),(x_7,x_5),(x_7,x_6)\}$

16	$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_6),(x_3,x_2),(x_4,x_5),(x_5,x_6),(x_6,x_4)\}$
17	$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ $U=\{(x_1,x_3),(x_2,x_8),(x_3,x_5),(x_4,x_2),(x_5,x_7),(x_6,x_4),(x_7,x_1),(x_8,x_6)\}$
18	$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_2,x_5),(x_3,x_1),(x_4,x_3),(x_5,x_4),(x_5,x_6),(x_6,x_4),(x_6,x_7),(x_7,x_5)\}$
19	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_2,x_4),(x_2,x_5),(x_3,x_1),(x_3,x_4),(x_5,x_4),(x_5,x_6),(x_6,x_7),(x_7,x_3),(x_7,x_4)\}$
20	$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ $U=\{(x_1,x_4),(x_2,x_6),(x_3,x_2),(x_4,x_8),(x_5,x_1),(x_6,x_1),(x_6,x_7),(x_7,x_3),(x_8,x_3),(x_8,x_5)\}$

21	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_3),(x_2,x_6),(x_3,x_5),(x_4,x_2),(x_5,x_1),(x_6,x_4)\}$
22	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_6),(x_2,x_7),(x_3,x_7),(x_4,x_7),(x_5,x_3),(x_5,x_4),(x_7,x_1),(x_7,x_5),(x_7,x_6)\}$

23	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_3),(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_3,x_6),(x_4,x_2),(x_4,x_5),(x_5,x_1),(x_6,x_4),(x_6,x_5)\}$
24	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_4,x_2),(x_5,x_2),(x_5,x_3),(x_5,x_4),(x_5,x_6)\}$
25	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_3),(x_2,x_1),(x_2,x_5),(x_3,x_2),(x_4,x_1),(x_4,x_3),(x_5,x_4),(x_5,x_6)\}$

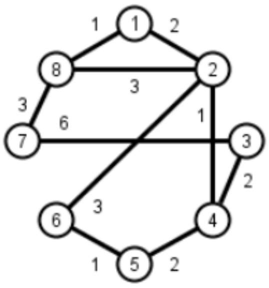
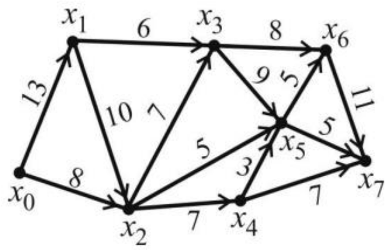
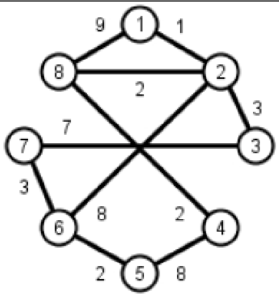
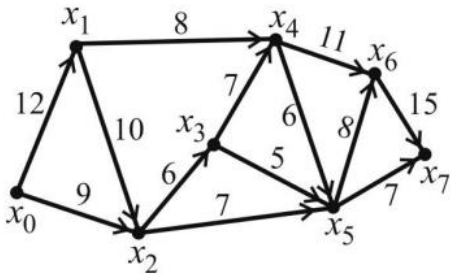
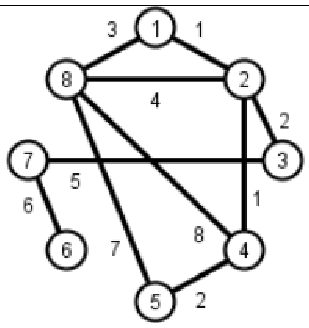
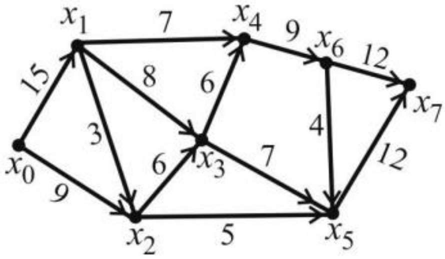
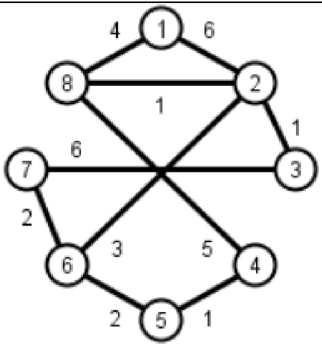
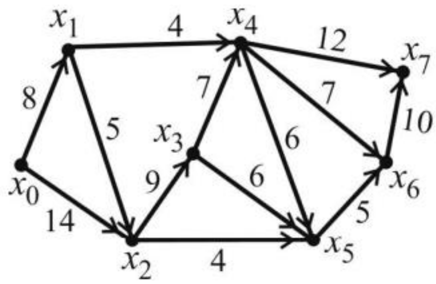
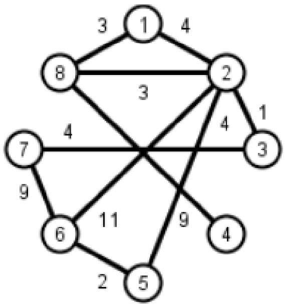
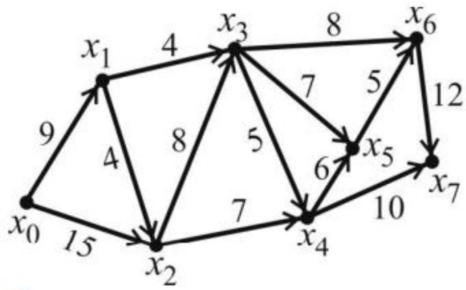
26	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$ $U=\{(x_1,x_3),(x_2,x_4),(x_3,x_5),(x_3,x_7),(x_4,x_6),(x_4,x_8),(x_5,x_2),(x_5,x_4),(x_6,x_1),(x_6,x_3),$ $(x_7,x_5),(x_8,x_6)\}$
27	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$ $U=\{(x_1,x_4),(x_2,x_1),(x_3,x_2),(x_4,x_5),(x_5,x_8),(x_6,x_3),(x_7,x_6),(x_8,x_7)\}$
28	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_2,x_1),(x_2,x_5),(x_3,x_2),(x_3,x_4),(x_4,x_2),(x_4,x_6),(x_5,x_3),(x_5,x_4),(x_5,x_6),$ $(x_6,x_2),(x_6,x_3)\}$
29	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_7),(x_2,x_3),(x_3,x_4),(x_3,x_6),(x_3,x_7),(x_4,x_1),(x_4,x_5),(x_5,x_6),(x_5,x_7),$ $(x_6,x_4),(x_7,x_4)\}$
30	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_2,x_6),(x_3,x_4),(x_3,x_5),(x_3,x_6),(x_4,x_1),(x_4,x_5),(x_5,x_6)\}$

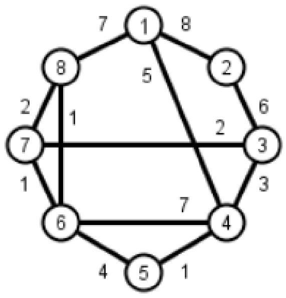
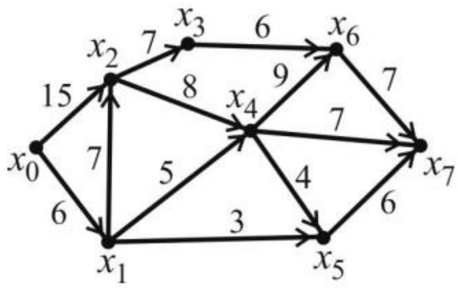
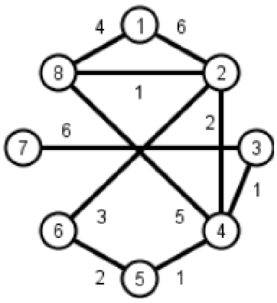
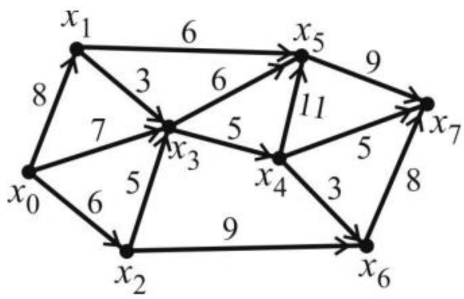
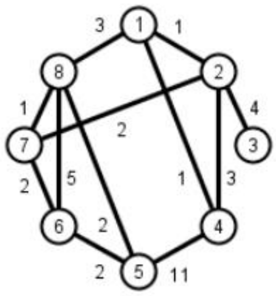
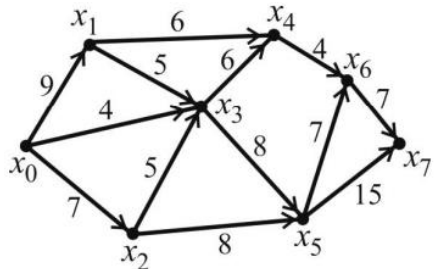
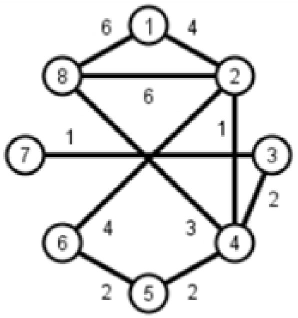
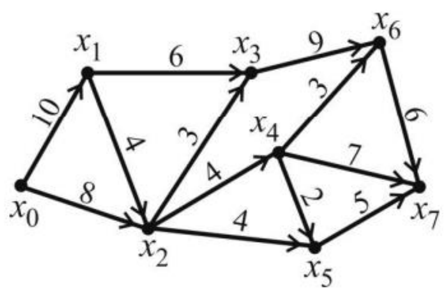
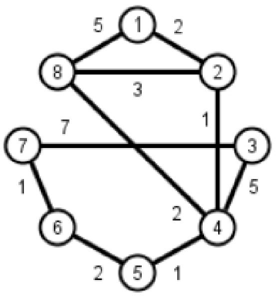
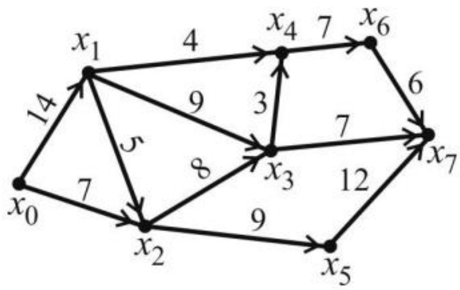
Завдання 3. Графи в непарних варіантах є моделями транспортної мережі. Ваги ребер дорівнюють часу, що витрачено на транспортування вантажу між парами вершин, які відповідають населеним пунктам.

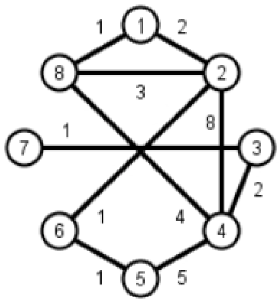
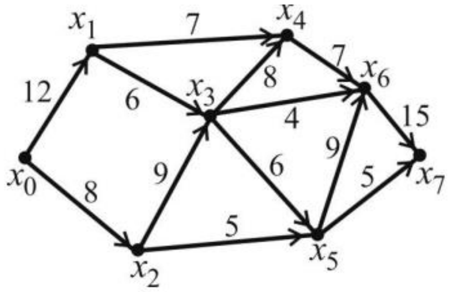
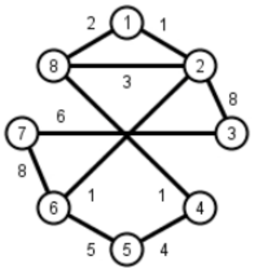
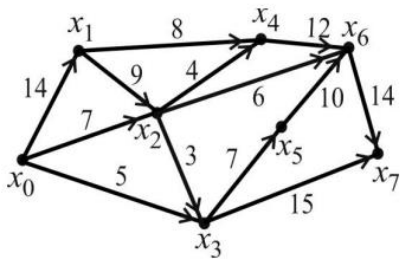
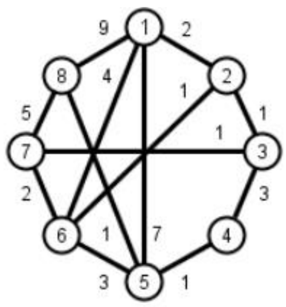
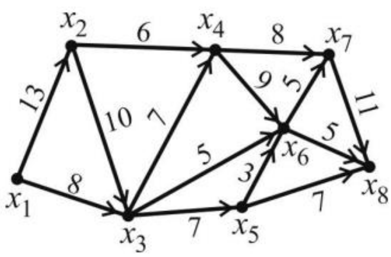
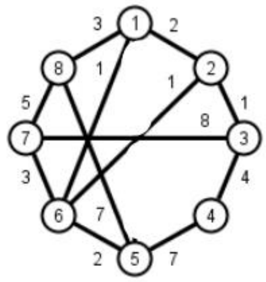
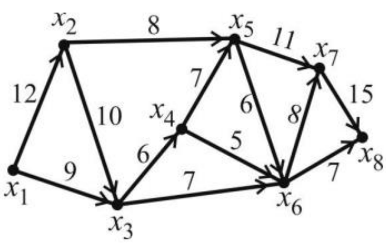
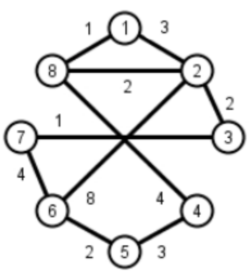
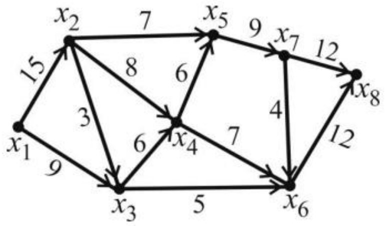
Задати граф матрицею ваг. Знайти мінімальний по часу маршрут від вершини **1** до всіх інших вершин графу і від вершини **1** до вершини **5**.

Орграфи в парних варіантах є моделями трубопроводу. Ваги ребер дорівнюють вартості, що витрачено на транспортування нафти між парами вершин, які відповідають пунктам розгалуження трубопроводу.

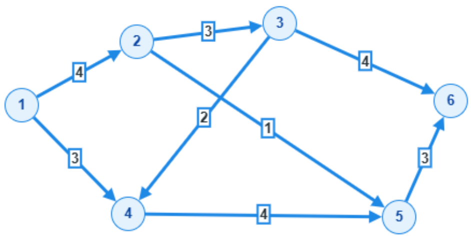
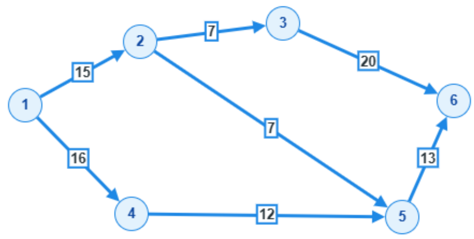
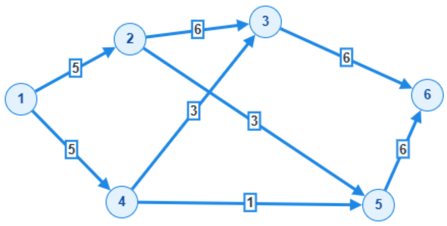
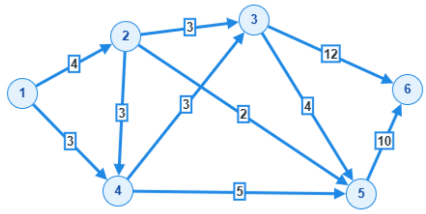
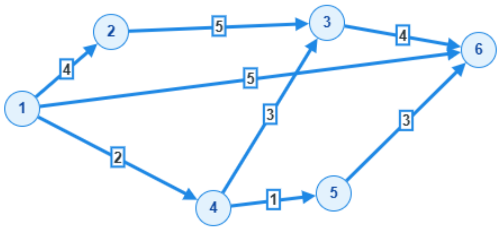
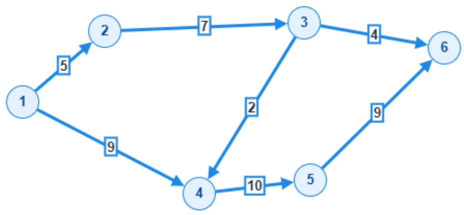
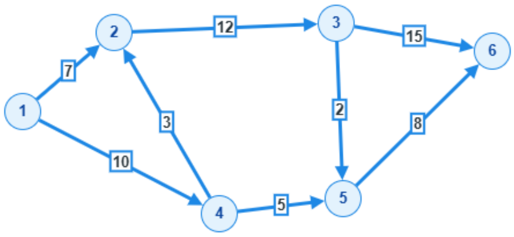
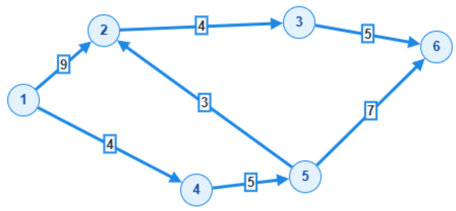
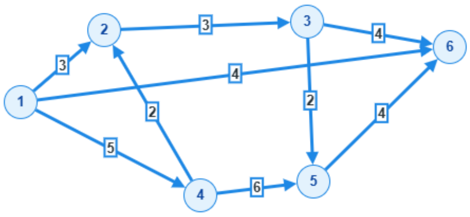
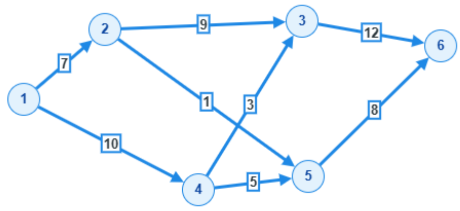
Задати граф матрицею ваг. Знайти мінімальний по вартості маршрут від вершини x_0 до всіх інших вершин орграфу і від вершини x_0 до вершини x_7.

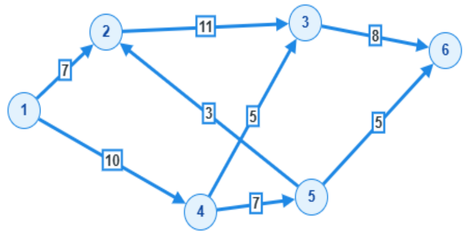
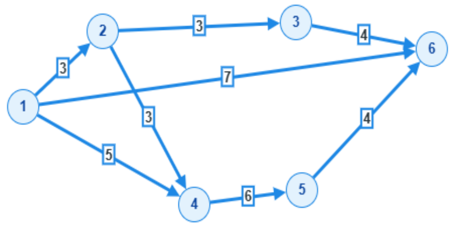
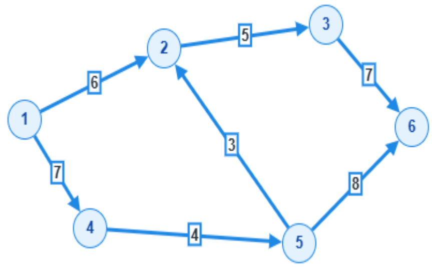
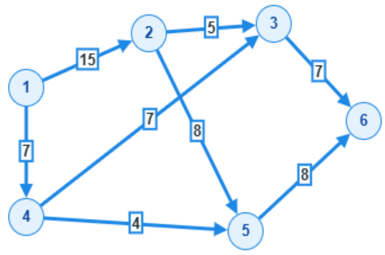
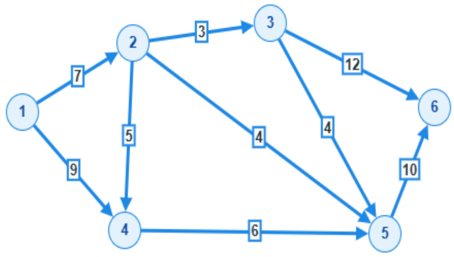
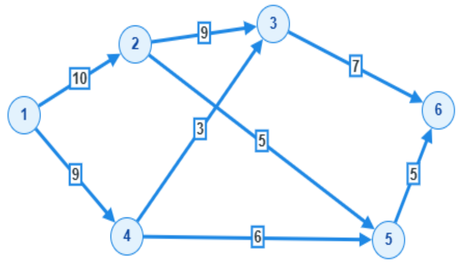
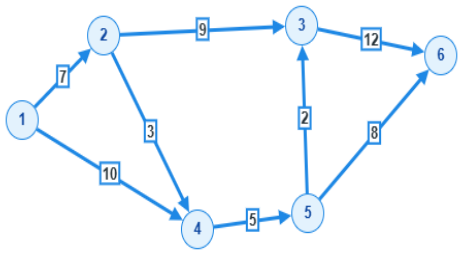
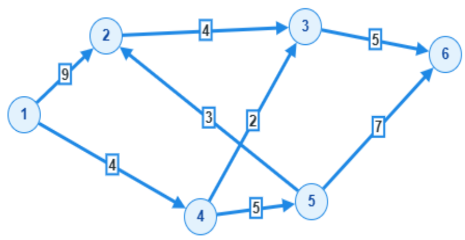
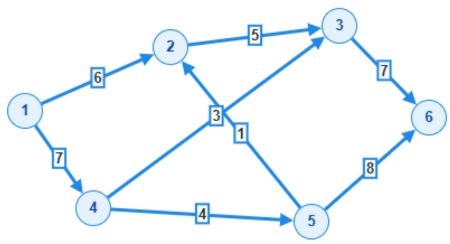
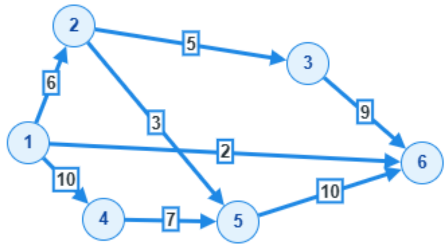
№	Граф $G = (V,\ E)$	№	Орграф $\vec{G} = (V,\ E)$
1.		2.	
3.		4.	
5.		6.	
7.		8.	
9.		10.	

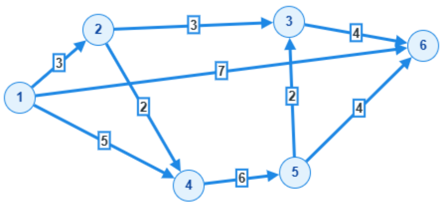
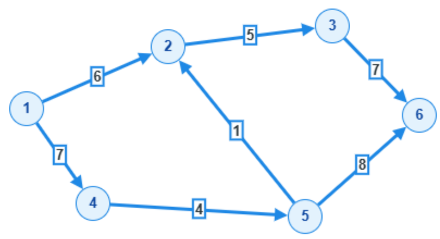
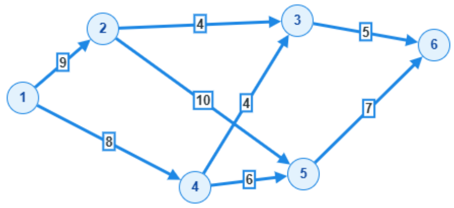
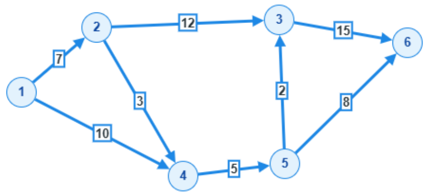
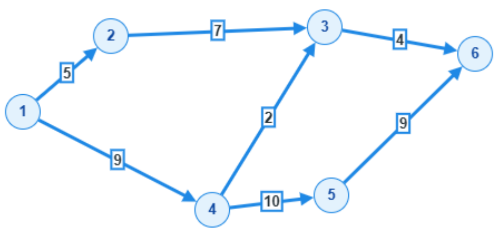
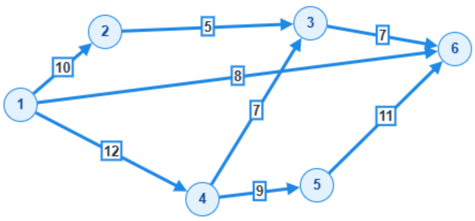
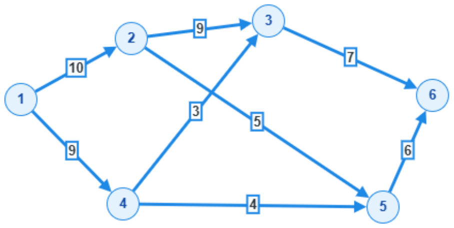
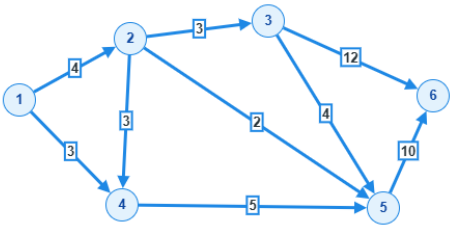
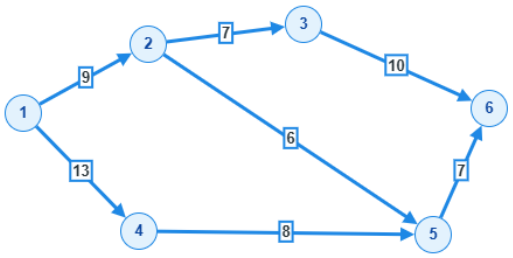
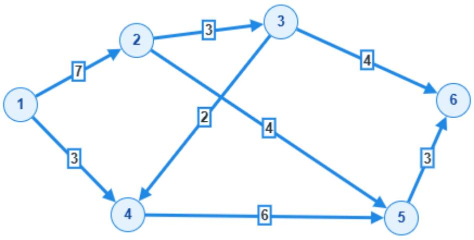
11.		12.	
13.		14.	
15.		16.	
17.		18.	
19.		20.	

21.		22.	
23.		24.	
25.		26	
27		28	
29		30	

Завдання 4. Для заданої транспортної мережі G знайти максимальний потік від джерела 1 до стоку 6. У дужках біля кожної дуги вказано її пропускну здатність.

№	Завдання	№	Завдання
01		02	
03		04	
05		06	
07		08	
09		10	

11		12	
13		14	
15		16	
17		18	
19		20	

21		22	
23		24	
25		26	
27		28	
29		30	

Тест 3. Елементи теорії графів

1. Мультиграф – це граф:

а) без ребер; б) з кратними ребрами, але без петель;

в) тільки з петлями; г) тільки з орієнтованими дугами.

2. Порядком графу називається:

а) число ребер; б) число вершин;

в) число компонент; г) число маршрутів.

3. Розміром графу називається:

а) число вершин; б) число ребер;

в) максимальний степінь вершини; г) мінімальний степінь вершини.

4. Дві вершини графу називають суміжними, якщо:

а) вони мають однаковий степінь; б) вони є кінцями одного ребра;

в) вони належать різним компонентам; г) між ними немає ребра.

5. Вершина інцидентна ребру, якщо:

а) вона є його кінцем; б) вона не належить графу;

в) вона має степінь 0; г) вона суміжна з усіма вершинами графу.

6. Множина суміжності вершини v – це:

а) множина всіх ребер графу;

б) множина вершин, суміжних з v;

в) множина ізольованих вершин;

г) множина всіх маршрутів, що починаються у v.

7. У графі вершини мають степені 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 3. Скільки ребер має граф?

а) 12; б) 13; в) 15; г) 30.

8. Кожна петля додає до степеня відповідної вершини:

а) 0; б) 1; в) 2; г) 3.

9. Псевдограф — це граф, у якому допускаються:

а) тільки звичайні ребра; б) тільки петлі;

в) кратні ребра і петлі; г) тільки ізольовані вершини.

10. Для вершини v орграфу виконується рівність:

а) $\deg(v)=\deg^{-}(v)-\deg^{+}(v)$; б) $\deg(v)=\deg^{-}(v)+\deg^{+}(v)$;

в) $\deg(v)=\deg^{-}(v)\cdot\deg^{+}(v)$; г) $\deg(v)=|V|$.

11. Матриця суміжності звичайного графу є:

а) несиметричною; б) симетричною з нулями на головній діагоналі;

в) завжди одиничною; г) прямокутною.

12. Сума елементів i-го рядка матриці суміжності звичайного графу дорівнює:

а) числу ребер графу; б) степеню вершини v_i;

в) порядку графу; г) числу компонент графу.

13. Матриця інцидентності звичайного графу порядку p і розміру q має розмір:

а) $q \times p$; б) $p \times q$; в) $p \times p$; г) $q \times q$.

14. У кожному стовпці матриці інцидентності звичайного графу міститься:

а) одна одиниця; б) дві одиниці;

в) один нуль; г) одна 1 і одна −1.

15. В орієнтованому графі матриця інцидентності має в стовпці дуги:

а) тільки нулі; б) дві одиниці;

в) одну 1 у початку дуги і одну −1 у кінці дуги; г) тільки −1.

16. Матриця $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ є матрицею суміжності графу. Який степінь має вершина v_3?

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

17. Матриця інцидентності графа має розмір 7×10. Скільки вершин і ребер має граф?

а) 10 вершин, 7 ребер; б) 7 вершин, 10 ребер;

в) 17 вершин, 70 ребер; г) визначити неможливо.

18. Для орграфа маємо $\sum deg^+(v_i) = 27$. Чому дорівнює число дуг?

а) 13; б) 27; в) 54; г) визначити неможливо.

19. У графі степені семи вершин дорівнюють 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5. Яке твердження правильне?

а) такий граф не існує; б) граф має 11 ребер;

в) граф має 22 ребра; г) граф є зв'язним.

20. Граф має 12 вершин і 4 компоненти зв'язності. Яке з тверджень правильне?

а) граф незв'язний; б) граф має цикл;

в) граф є лісом; г) граф є деревом.

21. Граф має 10 вершин і 9 ребер. Відомо, що він зв'язний. Тоді граф:

а) є деревом; б) містить рівно один цикл;

в) є повним; г) є двочастковим.

22. Повний граф K_n має стільки ж ребер, скільки цикл C_m. Якщо $n = 5$, то m дорівнює:

а) 5; б) 10; в) 15; г) 20.

23. Скільки ребер треба видалити з графа K_6 , щоб отримати дерево на тих самих вершинах?

а) 5; б) 10; в) 15; г) 20.

24. Повний двочастковий граф $K_{3,7}$ має:

а) 10 вершин і 21 ребро; б) 21 вершину і 10 ребер;

в) 10 вершин і 10 ребер; г) 7 вершин і 21 ребро.

25. У дереві є 12 вершин. Сума степенів усіх вершин дорівнює:

а) 11; б) 12; в) 22; г) 24.

26. Зв'язний граф має степені вершин 1, 2, 2, 3, 4. Яке твердження правильне?

а) граф є ейлеровим; б) граф є напівейлеровим;

в) граф є гамільтоновим; г) граф є деревом.

27. Гамільтоновим циклом називають:

а) замкнений ланцюг, що проходить через кожну вершину рівно один раз;

б) ланцюг, що проходить через кожне ребро рівно один раз;

в) будь-який цикл у зв'язному графі;

г) цикл, усі вершини якого мають парний степінь.

28. Алгоритм Дейкстри використовується для знаходження:

а) ейлерового циклу; б) гамільтонового циклу;

в) найкоротших шляхів від заданої вершини до інших вершин;

г) компонент зв'язності графу.

29. Для зв'язного графа задано матрицю відстаней: $\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ексцентриситет вершини v_2 дорівнює:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

30. Для матриці відстаней графу $\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

діаметр і радіус дорівнюють відповідно:

а) 1 і 3; б) 2і 2; в) 3 і 2; г) 2 і 3.

31. Для графу відомо, що радіус $r(G)$ =4. Яке з наведених значень може бути діаметром цього графу?

а) 3; б) 5; в) 9; г) 10.

32. Граф має 6 вершин. Його доповнення містить ребра тільки між тими парами вершин, які не суміжні в початковому графі. Якщо у початковому графі 9 ребер, то скільки ребер має його доповнення?

а) 3; б) 6; в) 9; г) 15.

33. Підграф G' графу G має ту саму множину вершин, що й G, ребра G' є ребрами G, але

$|E(G')| < |E(G)|$. Такий підграф є:

а) остовним і власним; б) тільки доповненням;

в) повним графом; г) не може бути підграфом.

34. Зв'язний граф має степені вершин 2, 4, 4, 6, 2, 2. Який висновок правильний?

а) граф напівейлерів; б) граф ейлерів;

в) граф не є ейлеровим; г) визначити неможливо.

35. Граф має 10 вершин. Для будь-яких несуміжних вершин u і v виконується $\deg(u) + \deg(v) \geq 6$. Чи буде граф:

а) гамільтоновим; б) деревом;

в) циклом; г) ланцюгом.

36. Джерелом транспортної мережі називають вершину орграфа:

а) з нульовим півстепенем виходу; б) з нульовим півстепенем заходу;

в) найбільшого степеня; г) через яку проходить максимальний потік.

37. Стоком транспортної мережі називають вершину орграфа:

а) з нульовим півстепенем заходу; б) найбільшого степеня;

в) з нульовим півстепенем виходу; г) через яку проходить мінімальний потік.

38. Для деякої дуги мережі задано $c(i,j) = 15$, $f(i,j) = 12$. Яке максимальне додаткове значення потоку ще можна пропустити через цю дугу?

а) 3; б) 12; в) 15; г) 27.

39. Для деякої дуги виконується $f(i,j) = c(i,j)$. Така дуга називається:

а) додатньою; б) насиченою;

в) критичною; г) зворотною.

40. У транспортній мережі для проміжної вершини v сума вхідних потоків дорівнює 18. Чому повинна дорівнювати сума вихідних потоків?

а) 0; б) 9; в) 18; г) залежить від пропускних здатностей.

41. Нехай для деякого потоку $f(S,\overline{S}) = 25, f(\overline{S},S) = 7$. Чому дорівнює величина потоку?

а) 18; б) 25; в) 32; г) 7.

42. Для деякого розрізу мережі $c(S,\overline{S}) = 40$. Яке з наведених значень може бути величиною потоку?

а) 45; б) 42; в) 40; г) 51.

43. У мережі знайдено потік величини 32. Для деякого розрізу пропускна здатність також дорівнює 32. Який висновок можна зробити?

а) потік обов'язково максимальний; б) потік не максимальний;

в) мережа не має джерела; г) розріз не є мінімальним.

44. У доповнювальному ланцюгу залишкові пропускні здатності дуг дорівнюють 8, 5, 11, 4, 9. На скільки можна збільшити потік уздовж цього ланцюга?

а) 37; б) 11; в) 4; г) 5.

45. Під час виконання алгоритму Форда–Фалкерсона стік не отримав мітки. Це означає, що:

а) алгоритм потрібно почати заново; б) знайдений потік є максимальним;

в) усі дуги насичені; г) мережа не має розрізів.

46. Після завершення алгоритму Форда-Фалкерсона всі вершини, що залишилися розміченими, утворюють множину S. Для чого вона використовується?

а) для побудови ейлерового циклу;

б) для знаходження мінімального розрізу;

в) для побудови дерева найкоротших шляхів;

г) для перевірки гамільтоновості мережі.

47. У мережі існує доповнювальний ланцюг від джерела до стоку. Який висновок правильний?

а) потік максимальний; б) потік можна збільшити;

в) мережа не має мінімального розрізу; г) усі дуги насичені.

48. Для деякої дуги мережі $c(i,j) = 20$, $f(i,j) = 0$. Яке твердження правильне?

а) дуга насичена;

б) дуга не може входити до доповнювального ланцюга;

в) по дузі ще можна пропустити 20 одиниць потоку;

г) дуга повинна бути видалена з мережі.

Рекомендована література

1. Chartrand G., Lesniak L., Zhang P. Graphs & Digraphs/ 6th Edition – New York: Chapman and Hall/CRC, 2015 – 640 p.
2. Hartsfield N., Ringel G. Pearls in Graph Theory. – Dover, 2003. – 249 p.
3. Handbook of Graph Theory, Combinatorial Optimization, and Algorithms. Edited by Krishnaiyan "KT" Thulasiraman, Subramanian Arumugam, Andreas Brandstädt, Takao Nishizeki, 1-st Edition. – New York: Chapman and Hall/CRC, 2015 – 1244 p.
4. Joyner D., Nguyen M. V., Cohen N. Algorithmic Graph Theory. Version 0.7, 2013 March 24 https://static.latexstudio.net/wp-content/uploads/2013/03/book.pdf
5. Wilson R. J. Introduction to Graph Theory, 5th edition. Harlow: Pearson Education Limited, 2010. 184 p.
6. Андрійчук В.І., Комарницький М.Я., Іщук Ю.Б. Вступ до дискретної математики: Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, 2004. – 254 с.
7. Базилевич Л. Дискретна математика у прикладах і задачах: Підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков. – 2013. – 487 с.
8. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є. Дискретна математика. Підручник. – К.: Вища школа, 2002. – 287 с.
9. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп’ютерна дискретна математика. — Харків: "Компанія Сміт", 2004. — 480 с.
10. Коцовський В.М. Основи дискретної математики: навчальний посібник. – Ужгород: Рік-У, 2020. – 123 с.
11. Кривий С.Л. Курс дискретної математики: навчальний посібник – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2007. – 432с.
12. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. Підручник. – Львів: "Магнолія Плюс", 2005. – 608 с.
13. Основи дискретної математики: Підручник / Ю.В. Капітонова, С.Л. Кривий, О.А. Летичевський, Г.М. Луцький, М.К. Печурін; за ред. Т.С. Мельник. – К.: Наукова думка, 2002. – 580 с.
14. Hammack R. Book of Proof. 3rd ed. Richmond : Richard Hammack, 2018. 382 p. https://richardhammack.github.io/BookOfProof/Main.pdf?utm_source=chatgpt.com
15. Swamy M. N. S., Thulasiraman K. Graphs, Networks, and Algorithms. New York : Wiley. 1981. 592 p.
16. Філімоніхіна І.І. Методи прикладної математики в транспортних технологіях. Елементи математичної логіки. – Кропивницький, ЦНТУ, 2023. – 26 с.
17. Ямненко Р.Є. Дискретна математика. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 104 с.

18. Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Комп’ютерна дискретна математика» для студентів усіх форм навчання напрямку 6.050103 – Програмна інженерія /Упоряд.: Н.В. Білоус, І. В. Куцевич, Т.А. Разівілова. – Харків: ХНУРЕ, 2010. – 98 с.
19. Дискретна математика: навч. посіб. / [Стрелковська І.В., Буслаєв А.Г., Харсун О.М., Пашкова Т.Л., Баранов М.І., Григор’єва Т.І., Вишневська В.М., Кольцова Л.Л.] − Одеса: ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2010. − 196 с.
20. Філімоніхіна І.І. Методи прикладної математики в транспортних технологіях. Елементи математичної логіки – Кропивницький, ЦНТУ, 2023. - 39 с.
21. Методи прикладної математики в транспортних технологіях. Елементи теорії графів : метод. рекомендації для студ. спец. - Транспортні технології / [уклад. М. Ф. Семенюта] ; М-во освіти і науки України, Центральноукраїн. нац. техн. ун-т. - Кропивницький : ЦНТУ, 2024. - 55 с.