Міністерство освіти і науки України
Центральноукраїнський національний технічний університет
Кафедра кібербезпеки та програмного забезпечення

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

з навчальної дисципліни

"СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ"

для студентів денної та заочної форм навчання
за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки»

Кропивницький
2024

Міністерство освіти і науки України
Центральноукраїнський національний технічний університет
Кафедра кібербезпеки та програмного забезпечення

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

з навчальної дисципліни

“СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ”

для студентів денної та заочної форм навчання
за спеціальністю 122 «Комп’ютерні науки»

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні кафедри
кібербезпеки та програмного
забезпечення,
Протокол № 3 від 18.09.2024

Кропивницький
2024

Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни “Системний аналіз” [для студ. денної та заочної форми навч. за спеціальністю 122 “Комп’ютерні науки”] / Уклад. І. А. Лисенко – Кропивницький: ЦНТУ, 2024.– 100 с.

Укладач: Лисенко І.А., канд. техн. наук

Рецензенти: Смірнов О. А., д-р техн. наук, професор;
Якименко Н. М., канд. фіз.-мат. наук, доцент.

Методичні рекомендації висвітлюють організаційні та практичні аспекти виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни “Системний аналіз” для студентів денної та заочної форм навчання за спеціальністю 122 “Комп’ютерні науки”, а також рекомендації щодо ходу виконання робіт, підготовки та представлення отриманих результатів.

ЗМІСТ

Вступ

Системний аналіз – це методологія дослідження таких властивостей та відношень в об'єктах, які важко спостерігаються та важко розуміються, за допомогою представлення цих об'єктів у вигляді цілеспрямованих систем та вивчення властивостей цих систем та взаємних відношень як відношень між цілями та засобами їх реалізації.

Системні уявлення, системність властиві процесу наукового пізнання, починаючи з різноманітних класифікацій людських знань і закінчуючи спробами наукового підходу до проблем керування державою. Сенс терміну хорет (гібернет) як особи, що керує ресурсами та людьми, що населяють певну територію, був зрозумілий ще задовго до робіт Норберта Вінера, а виникнення загальної теорії систем пов'язане з дослідженнями австрійського фізіолога Людвіга фон Берталанфі.

Інформаційні системи – це основний інструмент підвищення обґрунтованості керуючих рішень, вони є складними організаційними, програмно-апаратними та телекомунікаційними комплексами, а тому розглядаються у якості самостійного об'єкту досліджень. Питання архітектури таких систем та організації керування в них є одним з основних напрямків системного аналізу в галузі управління як застосування методів системного аналізу та прикладної інформатики в прикладних предметних областях (Management Information Systems, Business Information Systems, Data Mining Systems, Decision Support Systems). Методи системного аналізу та інформатики й є «мостом» між теорією та практикою побудови прикладних корпоративних інформаційних систем.

В системному аналізі широко застосовується моделювання.

Моделювання – це метод опосередкованого пізнання за допомогою штучних або природних систем, які зберігають деякі особливості об'єкту дослідження і таким чином заміщають його, що дає можливість отримати нові знання про об'єкт-оригінал.

У системному аналізі моделі є дуже важливим компонентом дослідження та проектування нової системи і зазвичай використовується множина моделей для забезпечення більш якісного дослідження.

Імітаційні моделі складних систем є найрозповсюдженішими внаслідок своєї універсальності, можливості проведення числових експериментів, планування різноманітних змін. Основу імітаційних моделей складають сукупні знання експертів з даної проблеми. Імітаційні моделі дозволяють дослідити загальносистемні властивості, поведінку системи в особливих ситуаціях, знайти кращі значення параметрів системи, які до початку дослідження були вільними, прогнозувати поведінку системи в часі. Алгоритмічна структура імітаційних моделей сприяє реалізації різноманітних

Наука про системи досліджує застосування системних концепцій в фізичних, суспільних науках та науках про поведінку емпіричним чином. Увага зосереджується на науковому вивченні цілого та цілісності на противагу до поелементного, редукціоністського підходу. Реалізуються спроби оцінки рівнів складності та способів взаємодії і взаємних стосунків між компонентами системи, що аналізується. Широко використовуються математичні моделі для визначення подібності та ізоморфізмів у різних видах систем.

Системна технологія розглядає проблеми, що виникають в промисловості та суспільстві, які можна досліджувати шляхом застосування теорії систем. В системному аналізі, науці про управління, дослідженні операцій, інформатиці та промисловій інженерії, концепції трансформуються при пошуку практичних розв’язань конкретних проблем.

Системна філософія намагається концептуалізувати взаємні зв’язки та взаємні залежності між теоріями, що сформульовані у різних сферах наукових досліджень, є спробою об’єднати розділи традиційної науки в межах філософських концепцій загальних систем.

Суттєвим в системному аналізі є наступне:

• аналіз систем є способом розгляду проблеми;

• математичний апарат і комп’ютери можуть бути доцільними але іноді достатніми можуть бути серйозні роздуми над проблемою;

• в будь-якому аналізі що пов’язаний з прийняттям рішення в умовах невизначеностей, метою якого є вплив на вибір способу дії, незалежно від його складності, наявні такі елементи: ціль (цілі); альтернативи (способи досягнення цілей); виграти чи ресурси (те, що необхідно витратити для реалізації кожної з альтернатив); модель; критерії, згідно яких обирається альтернатива.

Найхарактернішою рисою системного підходу є те, що в дослідницькій роботі не може бути аналітичного вивчення якогось часткового об’єкту без точної ідентифікації цього часткового в великій системі. Таким чином, системний підхід виник як реакція на бурхливий розвиток аналітичних підходів у науці, що все більш віддаляли творчу думку від проблеми «цілісного організму».

Системний аналіз спрямований на розв’язання складних проблем. Проблема виникає тоді, коли с розходження між бажаним та дійсним, тобто це абстрактна категорія, що відображає розуміння людьми мотивів своєї діяльності. *Проблеми породжуються та розв’язуються людьми, а тому поняття «проблема» має людські риси сприйняття, що породжує наступні труднощі*:

• неясність розуміння проблеми;

• складнощі постановки проблем на віддалену перспективу;

• складність класифікації проблем і як наслідок вибір неадекватних засобів їх розв'язання;

• спотворена оцінка проблем (близькі, але дрібні проблеми затуляють великі, але віддалені);

• неправильна оцінка значимості проблеми, з вини респондента, через спотворену точку зору;

• змішування цілей, які необхідно досягнути, із засобами їх досягнення.

Метою застосування СА до конкретної проблеми є підвищення ступеню обґрунтованості рішення, що приймається. Для СА важливі такі *методологічні принципи*:

• органічна єдність суб’єктивного та об’єктивного;

• структурність системи, що визначає цілісність та стійкість її характеристик;

• динамізм системи;

• міждисциплінарний характер системних досліджень;

• органічна єдність формального та неформального при проведенні СА.

СА - це скоріше особливий тип науково-технічного мистецтва, що виникає власне внаслідок органічної єдності суб’єктивного і об’єктивного, а тому досвідчений аналітик досягає значних результатів, тобто механічне застосування методик і прийомів СА недостатньо кваліфікованими особами не дозволяє отримати корисні результати.

Для успішного застосування системний аналіз повинен базуватися на певному теоретичному фундаменті, а з іншого боку, успішні приклади застосування СА повинні служити прикладами для наслідування. Теоретичне обґрунтування привело до формування таких напрямків системних досліджень, як системна динаміка, евристичне програмування, імітаційне моделювання та ін.

На відміну від довільно широкої системної методології *СА обмежують дві наступні особливості*:

• системні аналітики вивчають лише штучно створені системи, в яких людині належить надзвичайно важлива, а в багатьох випадках і вирішальна роль;

• головна задача СА - прийняття рішень і управління.

Системний аналіз — це методологія дослідження таких властивостей та відношень в об’єктах, які важко спостерігаються та важко розуміються, за допомогою представлення цих об’єктів у вигляді цілеспрямованих систем та вивчення властивостей цих систем та взаємних відношень як відношень між цілями та засобами їх реалізації.

СА відрізняється від інших методів дослідження тим, що:

• враховує принципову складність об’єкта, що досліджується;

• бере до уваги розгалужені та стійкі взаємні зв’язки його з оточенням;

• враховує неможливість спостереження ряду властивостей об’єкту та оточуючого середовища;

• реальні явища, їх властивості та зв’язки з оточенням переводяться далі в абстрактні категорії теорії систем;

• дозволяє виявити нові конкретні властивості та взаємні зв'язки конкретного об'єкта дослідження, ґрунтуючись на відомих властивостях складних систем;

• включає як один з важливих етапів визначення об'єкту, його знаходження чи конструювання, на відміну від інших методів, в яких об'єкти є точно визначеними;

• орієнтується не на розв'язання правильно сформульованих задач, а га створення правильної постановки задачі, вибір відповідних методів до ї розв'язання;

• основне у СА – знайти шлях, яким можна перетворити складну задачу у ряд простіших, проблему перетворити у ряд задач, для яких відомі методи розв'язання;

• СА – завжди конкретний, завжди має справу з конкретною проблемою, конкретним об'єктом дослідження, є продуктивним тоді, коли застосовується для розв'язання завдань певного типу.

СА не протиставляється іншим методам аналізу проблем та прийняття рішень. Новим є синтез в єдиній методології певного взаємопов'язаного кола понять, методів та прийомів, які раніше використовувалися розрізнено при розв'язанні окремих часткових проблем. Цей комплекс системних понять та методів розповсюджується на нові області - планування та керування. Сила СА в тому, що він дозволяє розкласти складну проблему на компоненти аж до постановки конкретних задач, для яких існують методи розв'язання, і з іншого боку, зберігає цілісність цієї проблеми.

СА застосовується для розв'язання складних проблем, що пов'язанні з діяльністю людей. Людську діяльність умовно можна поділити на дві області:

• рутинна діяльність, розв'язання регулярних, щоденних завдань;

• розв'язання нових задач, які виникають вперше.

Окрім того, *проблеми розрізняються за ступенем їх структурованості*:

• добре структуровані та сформульовані кількісно;

• слабо структуровані, в яких зустрічаються як кількісні, так і якісні оцінки;

• неструктуровані, якісні.

Перший тип проблем не потребує СА, оскільки існує потужний апарат математичного моделювання та формальні кількісні методи їх розв’язання. Основною областю застосування методів СА є слабоструктуровані проблеми, а для розв’язання неструктурованих проблем в більшості застосовуються евристичні методи.

Потреба в СА виникає в наступних ситуаціях:

• розв’язується нова проблема, і за допомогою СА вона формулюється, визначається, що і про що потрібно взнати, і хто повинен знати;

• розв’язання проблеми передбачає координацію цілей з множиною засобів їх досягнення;

• проблема має розгалужені зв’язки, що викликають віддалені наслідки в різних галузях, і прийняття рішення в таких випадках потребує врахування сукупної ефективності та повних затрат;

• існують варіанти розв’язання проблеми або досягнення взаємопов’язаного комплексу цілей, які важко порівняти;

• здійснюється вдосконалення, реконструювання виробництва, необхідна реінженерія бізнес-процесів;

• при створенні інформаційних систем та комп’ютеризованих систем керування;

• коли важливі рішення повинні прийматися за наявності невизначеності та ризику та (або) на достатньо віддалену перспективу.

Різноманітність задач, цілей дослідження, об’єктів дослідження природньо приводить до існування різних методик СА, які базуються на єдиній методології. Це пояснюється тим, що існують певні об’єктивні закони людської діяльності, які виявляються при розв’язанні різних проблем. Ці закономірності, виявлені шляхом узагальнення досвіду та теоретичних досліджень, і становлять основу методології СА.

Тому методики розв’язування системних задач, розроблені для різних конкретних випадків, подібні між собою.

Центральною ідеєю дослідження та побудови систем, на що по суті скеровані методи СА, є те, що система повинна бути достатньо надійною для досягнення певної мети, тобто система повинна бути стійкою в цьому сенсі. Дослідження систем реалізується з метою їх побудови, керування та модифікації, і спрямоване на досягнення певної мети (наприклад, людина є системою, що діє з метою збереження власного життя).

Система функціонує для того, щоб реалізувати певне призначення, і при цьому на неї діють збурення, а також не всі проблеми, які можуть з'явитися в майбутньому, можуть бути враховані в процесі її проектування, саме тому вона повинна мати здатність коригувати свою поведінку та використовувати механізми оберненого зв'язку для забезпечення стійкості.

Таким чином *аналіз стійкості системи має першочергове значення і включає наступні аспекти:*

• аналіз стійкості всіх компонентів системи;

• аналіз стійкості структури та потоку системи;

• аналіз стійкості цілей системи, які змінюються та є джерелом конфліктів;

• аналіз стійкості взаємних зав'язків з іншими системами;

• аналіз стійкості у взаємодії системи та зовнішнього середовища у випадках проблеми на коли внутрішні зміни не можуть стабілізувати систему.

Результати аналізу стійкості формулюються в термінах збурень, що розглядаються як неперервний феномен, однак за певних умов можливе виникнення розривної поведінки, що виявляється у формі катастрофи як непередбачуваного розриву або раптової нестійкості в структурі та потоці.

З метою раціонального сприйняття системи необхідно враховувати наступні аспекти:

• припустимими є нечіткі значення та конфліктне сприйняття призначень системи, система досліджується як процес, потреби якого розглядаються у взаємодії із зовнішнім середовищем;

• призначення системи базуються як на ґрунті визначень розробників-«творців» системи, так і на визначеннях користувачів;

• описується система та її оточення (оточенням є та частина, що безпосередньо взаємодіє з системою);

• описуються елементи системи та взаємні зв’язки між ними;

• ідентифікуються потоки та функції системи і їх зміни;

• проблеми конкретизуються з врахуванням досвіду користувачів;

• досліджуються умови, які визначають рівновагу, що відповідає призначенню в елементах та в системі, а також в глобальній взаємодії системи із зовнішнім середовищем;

• визначаються способи реалізації керуючих дій, що сприяють загальній стійкості (або нестійкості) системи.

При аналізі систем в різних галузях знань використовують специфічні для кожної з них представлення. Інженери зазвичай досліджують системи мовою входів, виходів та функціональних перетворень входів у виходи, фахівці в галузях дослідження операцій та прикладній математиці ототожнюють систему з певною системою рівнянь, обмежень та формалізованою функцією якості, вчені-фізики орієнтовані структурніше – на проведення експерименту та точні методи вимірювань.

Зовсім іншою є ситуація в системах, до яких залучені безпосередньо люди або в яких добробут людини, її твердження та переваги є складовою системи. У цьому випадку, якщо існує проблема, слід взаємодіяти з особами, що залучені до побудови системи чи до оцінювання її функціонування. В інших випадках проблема полягає в тому, як визначити та модифікувати призначення системи, спроектувати систему, що прагне бажаного стану та пристосовується до оточення чи пристосовує оточення до себе, як врахувати різноманітні дії оточуючого середовища на систему. Ці аспекти є скоріше проблемами реконструювання, аніж «розв’язання проблем».

В окремих випадках не вдається дослідити наслідки впровадження розв’язання проблеми на функціонування інших складових системи в межах самої системи. Якщо неможливо модифікувати систему таким чином, щоб вона виконала своє призначення і відповідала цілям, можливо або залишити проблему нерозв'язаною, або сконструювати нову з врахуванням змін в цілях, середовищі та поведінці старої системи.

Таким чином *для забезпечення успіху СА потрібно*:

• застосовувати його у тих випадках, для яких він призначений;

• наявність потреби, зрозумілої мети та (або) призначення;

• відповідальне ставлення як аналітика, так і організації-замовника;

• наявність накопиченої інформації, досвіду, ідей та уявлень про предмет дослідження;

• відображення в результатах СА реального стану справ та реальних шляхів розв'язання проблем, а не «обґрунтування» суб'єктивних рішень;

• наявність ресурсів- кваліфікованих експертів, обладнання, грошових засобів;

• аналіз можливого впливу сторонніх побічних факторів (прогноз наукових відкриттів, винаходів, політичної ситуації).

Лабораторна робота № 1

Тема: ***Етапи системного аналізу на прикладі розв'язання задач лінійного програмування***

Теоретичні відомості

Завдання лінійного програмування (ЗЛП) в загальному вигляді записують таким чином:

$$f=\sum_{j=1} c_j x_j \longrightarrow opt \qquad (1)$$

$$\sum_{d=1}^{n} a_{ij}\, x_j \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b \qquad (i=\overline{1,m}) \qquad (2)$$

Функцію f називають цільовою функцією. Вирази (2) є системою лінійних обмежень ЗЛП. У завданні потрібно визначити такі значення змінних X_1, X_2, X_3 ,…., X_n, які задовольняють лінійним обмеженням (2) і за цією умовою оптимізують (мінімізують або максимізують) цільову функцію (1). Кожен набір значень змінних, який задовольняє системі (2), називають допустимим рішенням або планом ЗЛП. Безліч всіх допустимих рішень називають областю допустимих рішень (ОДР).

Допустиме рішення, що оптимізує цільову функцію, називають оптимальним рішенням або оптимальним планом.

Для розв'язання двовимірних задач лінійного програмування, тобто задач із двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування.

Геометричне рішення розбивають на два етапи. Спочатку будують ОДР завдання, як геометричне місце точок (X_1 , X_2), що задовольняють всім обмеженням. Потім будують лінії рівня цільової функції, тобто прямі $c_1 x_1 + c_2 x_2 = a$ і геометрично відшукують лінію рівня, відповідну оптимальному значенню параметра а. Всі точки ОДР, через які проходить така лінія рівня, відповідають оптимальному плану ЗЛП.

Канонічний вигляд ЗЛП:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b \qquad (i = \overline{1 \cdot m}) \qquad (4)$$

$$x_j = 0 \qquad (j = \overline{1 \cdot n}) \qquad (5)$$

Будь-яку ЗЛП можна привести до канонічного вигляду. Розглянемо приклад задачі, побудуємо математичну модель та розв'яжемо її графічним методом.

Задача. Фірма спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема вона випускає дві моделі збірних книжкових полиць *A* та *B*. Полиці обох моделей обробляються на верстатах 1 і 2. Тривалість обробки (у хвилинах) однієї полиці моделі *A* на верстатах 1 і 2 – 30 і 12 хв., а моделі *B* відповідно 15 і 26 хв. Час роботи верстатів 1 і 2 становить відповідно 40 і 36 год на тиждень. Прибуток фірми від реалізації однієї полиці моделі *A* дорівнює 50 у.о., а моделі *B* – 30 у.о. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на полиці моделі *A* ніколи не перевищує попиту на моделі *B* більше, як на 30 одиниць, а попит на полиці моделі *B* не перевищує 80 одиниць на тиждень.

Визначити обсяги виробництва книжкових полиць різних моделей, що максимізують прибуток фірми. Побудувати економіко- математичну модель задачі та розв'язати її графічно.

Побудова математичної моделі. Нехай x_1 – кількість полиць моделі А, що виготовляється фірмою за тиждень, а x_2 – відповідна кількість полиць моделі В. Цільова функція моделі – максимізація прибутку фірми від реалізації продукції. Математично вона записується так:

$$Z = 50x_1 + 30x_2 \to \max$$

Обмеження математичної моделі враховують час роботи верстатів 1 і 2 для обробки продукції та попит на полиці різних моделей.

Обмеження на час роботи верстатів 1 і 2 набувають такого вигляду:
для верстата 1

$$30x_1 + 15x_2 \leq 2400 \text{ (хв.)};$$

для верстата 2

$$12x_1 + 26x_2 \leq 2160 \text{ (хв.)}.$$

Обмеження на попит набувають вигляду:

$$x_1 - x_2 \leq 30 \text{ і } x_2 \leq 80.$$

Отже, економіко-математична модель поставленої задачі має вигляд

$$\begin{aligned}
&Z = 50x_1 + 30x_2 \to \max,\\
&30x_1 + 15x_2 \leq 2400,\\
&12x_1 + 26x_2 \leq 2160,\\
&x_1 - x_2 \leq 30,\\
&x_2 \leq 80.
\end{aligned}$$

Розв'язання. Замінимо знаки нерівностей на знаки рівностей і побудуємо графіки відповідних прямих (рис. 1.3). Кожна з побудованих прямих поділяє площину системи координат на дві півплощини.

Координати точок однієї задовольняють розглянуту нерівність, а іншої – не задовольняють. Щоб визначити необхідну півплощину (на рис. 1.3 її напрям позначено стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку та перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. У протилежному випадку таким зображенням є інша півплощина. Умова невід'ємності змінних $x1 \geq 0, x2 \geq 0$ обмежує область допустимих планів задачі першим квадрантом системи координат. Перетин усіх півплощин визначає область допустимих планів задачі – шестикутник *OABCDE*.

Поставлену задачу буде розв'язано, якщо ми відшукаємо таку вершину багатокутника *OABCDE*, в якій цільова функція *Z* набуває найбільшого значення.

Для цього будуємо вектор $N = \{50;\ 30\}$. Він задає напрям збільшення значень цільової функції *Z*, а вектор, протилежний йому, – напрям її зменшення. Побудуємо лінію, що відповідає, наприклад, значенню $Z = 0$. Це буде пряма $50x_1 + 30x_2 = 0$, яка перпендикулярна до вектору N і проходить через початок координат.

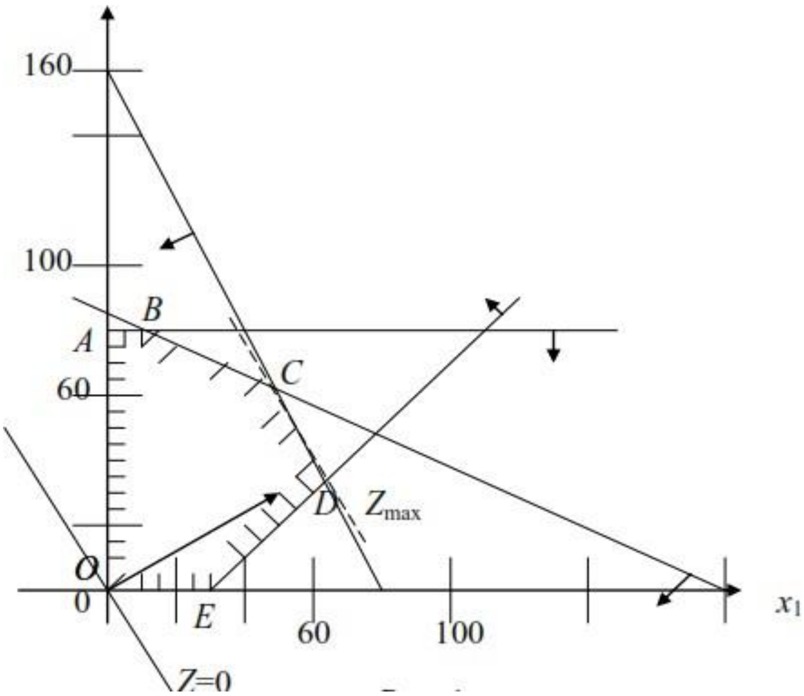


Рисунок 1.3 – Графічне зображення розв'язку ЗЛП

Оскільки маємо визначити найбільше значення цільової функції, то пересуваємо пряму $50x_1 + 30x_2 = 0$ в напряму вектору N доти, доки не визначимо вершину багатокутника, яка відповідає оптимальному плану задачі. Останньою спільною точкою цієї прямої та багатокутника *OABCDE* є точка *C*. Координати цієї точки визначають оптимальний план задачі.

Координати точки *C* визначаються перетином прямих

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 = 2400, \\ 12x_1 + 26x_2 = 2160. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, дістанемо $x_1 = 50$, $x_2 = 60$. Отже, $X = (50; 60)$; $\max Z = 50 \cdot 50 + 30 \cdot 60 = 4300$.

Це означає, що коли фірма щотижня виготовлятиме 50 збірних книжкових полиць моделі *A* та 60 – моделі *B*, то вона отримає максимальний прибуток в 4300 у.о. При цьому тижневий фонд роботи верстатів 1 і 2 буде використано повністю.

Контрольні питання

1. Яким чином визначаються обмеження?
2. Що включає в себе цільова функція?
3. Особливості рішення ЗЛП графічним методом.
4. Основні кроки для вирішення ЗЛП задач.

Завдання:

1. На всі контрольні питання сформулювати відповіді.
2. Згідно свого номера у списку групи виконати задачу.
3. Оформити звіт.

Розв'язати графічним методом задачу лінійного програмування

1. $F = x_1 + x_2 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ x_1 + 3x_2 \geqslant 9, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

2. $F = x_1 + x_2 \to \max$, $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \leqslant 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \geqslant 24, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

3. $F = x_1 + 2x_2 \to \max$, $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leqslant 12, \\ -x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geqslant 16, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

4. $F = -2x_1 + x_2 \to \min$, $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leqslant 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

5. $F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$, $\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ 6x_1 + 2x_2 \geqslant 8, \\ x_1 + 5x_2 \geqslant 4, \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 3, \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 3. \end{cases}$

6. $F = 2x_1 + 3x_2 \to \min$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geqslant 8, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

7. $F = x_1 + 2x_2 \to \min$, $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leqslant 12, \\ -x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geqslant 16, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

8. $F = -2x_1 + x_2 \to \max$, $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leqslant 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

9. $F = -3x_1 + 6x_2 \to \max$, $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leqslant 4, \\ x_1 - 2x_2 \geqslant -4, \\ x_1 + x_2 \geqslant 4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

10. $F = 4x_1 + 2x_2 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 18, \\ -x_1 + 3x_2 \leqslant 9, \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 10, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

11. $F = -2x_1 + x_2 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 8, \\ x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ -3x_1 + 2x_2 \geqslant 3, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

12. $F = 2x_1 + 3x_2 \to \min$, $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geqslant 6, \\ 9x_1 + 8x_2 \leqslant 62, \\ -3x_1 + 11x_2 \geqslant 16, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

13. $F = x_1 + 4x_2 \to \min$, $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 \leqslant 29, \\ 50x_1 - 27x_2 \leqslant 180, \\ 5x_1 + 3x_2 \leqslant 31, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

14. $F = 5x_1 - 3x_2 \to \min$, $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geqslant 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \geqslant -6, \\ x_1 - x_2 \leqslant 4, \\ 4x_1 + 7x_2 \leqslant 28, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

15. $F = x_1 + 2x_2 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 14, \\ -3x_1 + 2x_2 \leqslant 9, \\ 3x_1 + 4x_2 \geqslant 27, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

16. $F = x_1 + 2x_2 \to \max$, $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leqslant 4, \\ x_1 - 2x_2 \geqslant -4, \\ x_1 + x_2 \geqslant 4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

17. $F = 2x_1 - 4x_2 \to \max$, $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leqslant 16, \\ x_1 + 3x_2 \geqslant 2, \\ 2x_1 + 7x_2 \leqslant 9, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

18. $F = -2x_1 + x_2 \to \min$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 8, \\ x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ -3x_1 + 2x_2 \geqslant 3, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

19. $F = 3x_1 - 15x_2 \to \max$, $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leqslant 9, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 10, \\ -x_1 + 4x_2 \geqslant 0, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

20. $F = -31 + 8x_1 + 3x_2 \to \min$, $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant -2, \\ x_1 - 3x_2 \geqslant -9, \\ 4x_1 + 3x_2 \leqslant 24, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

21. $F = 3x_1 + 10x_2 \to \max$, $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leqslant 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ 4x_1 + 2x_2 \geqslant 8, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

22. $F = -2x_1 - 2x_2 \to \min$, $\begin{cases} 6x_1 - x_2 \leqslant 11, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 8, \\ 3x_1 - x_2 \leqslant 4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

23. $F = x_1 + x_2 \to \max$, $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 10, \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 2, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

24. $F = x_1 - 2x_2 \to \min$, $\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 1, \\ x_1 + x_2 \geqslant 2, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 0, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

25. $F = x_1 + 3x_2 \to \min$, $\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 1, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 2, \\ x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

Лабораторна робота № 2

Тема: *Розв'язання задач лінійного програмування засобами електронних таблиць*

Теоретичні відомості

Умова задачі. Для виробництва двох видів продукції А і В використовується два види ресурсів. Норми витрат ресурсів на кг продукції, а також прибуток від реалізації наводяться в таблиці:

Продукція	Норми витрат ресурсу на кг продукції, *кг*		Прибуток від реалізації кг продукції, *грн*
	I	II	
A	1	2	3
B	2	1	2
Обсяг ресурсу на складі, *кг*	6	8	

Відомо, що кількість кг продукції А повинна бути більшою за кількість кг продукції В принаймні на 1 кг. Кількість кг виготовленої продукції В не повинна перевищувати 2 кг. Знайти план випуску виробів А і В, що забезпечує найбільший прибуток від їх реалізації. У відповіді вказати найбільший прибуток.

Розв'язання. Побудуємо математичну модель задачі.

Нехай x_1 – кількість *кг* виготовленої продукції А, а x_2 – кількість кг виготовленої продукції В. Цільова функція має вигляд

$$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to \max .$$

Обмеження на ресурси мають вигляд:

$$x_1 + 2x_2 \le 6,$$

$$2x_1 + x_2 \le 8.$$

Обмеження на кількість виготовленої продукції мають вигляд

$$x_1 + 1 \ge x_2, \text{ або } -x_1 + x_2 \le 1,$$

$$x_2 \le 2.$$

Добавляємо уявну умову невід'ємності змінних та отримаємо математичну модель.

Знайти

$$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1, & (3) \\ x_2 \le 2, & (4) \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Побудуємо прямі обмежень, для чого обчислимо координати точок перетину цих прямих з осями координат (рис. 1.5).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8 & (2) \\ -x_1 + x_2 = 1 & (3) \\ x_2 = 2 & (4). \end{cases}$$

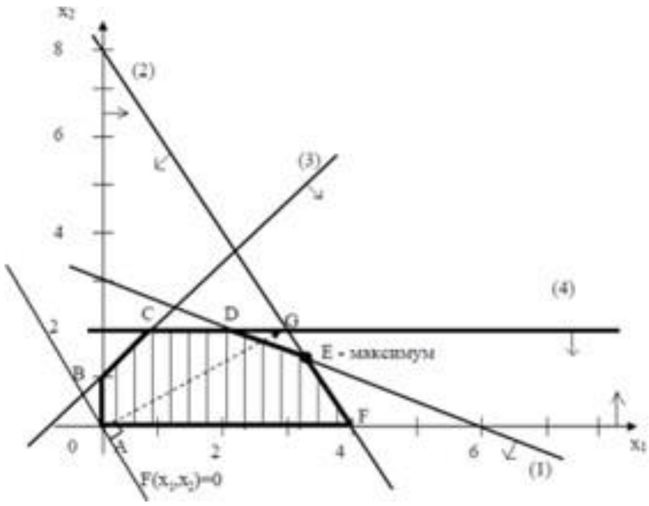
$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (2) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (3) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

$$x_1 + 1 \ge x_2, \text{ або } -x_1 + x_2 \le 1,$$

$$x_2 \le 2.$$

Пряма (4) проходить через точку $x_2 = 2$ паралельно осі x_1. Визначимо область допустимих розв'язків. Наприклад, підставимо точку (0; 0) у вихідне обмеження (3), дістанемо $0 < 1$, що є істинною нерівністю, тому стрілкою позначимо півплощину, що містить точку (0; 0), тобто розташовану правіше і нижче прямої (3). Аналогічно визначимо допустимі півплощини для інших обмежень і вкажемо їх стрілками біля відповідних прямих обмежень. Загальною областю, дозволеною всіма обмеженнями, тобто областю допустимих розв'язків є багатокутник ABCDEF (рис. 1.5).

Будуємо градієнт *G* з точки (0; 0) у точку (3; 2), так як цільова функція лінійна і значення частинних похідних будуть дорівнювати значенням коефіцієнтів при керованих змінних цільової функції. Лінії рівня цільової функції завжди перпендикулярні до вектору *G*. Точка *E* – це остання вершина багатокутника допустимих розв'язків ABCDEF, через яку проходить лінія рівня цільової функції, рухаючись за напрямком вектору *G*. Тому *E* – це точка максимуму цільової функції. Визначимо координати точки Е з системи рівнянь прямих обмежень (1) і (2):



$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{3} \\ x_2 = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$E = \left(3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right).$$

Рисунок. 1.5 – Графічний метод вирішення ЗЛП

Максимальне значення цільової функції дорівнює:

$$F^* = 3 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}.$$

Розв’яжемо дану задачу за допомогою електронних таблиць Microsoft Excel, занесемо усю необхідну інформацію на аркуш Microsoft Excel (рис. 1.6).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Цільова функція										
2	z=	3	x1	+	2	x2					
3	Обмеження										
4		1	x1	+	2	x2	<	=	6		=B4*C12+E4*C13
5		2	x1	+	1	x2	<	=	8		=B5*C12+E5*C13
6		-1	x1	+	1	x2	<	=	1		=B6*C12+E6*C13
7		0	x1	+	1	x2	<	=	2		=B7*C12+E7*C13
8						x1	>	=	0		
9						x2	>	=	0		
10	Результат										
11	z	=	=B2*C12+E2*C13								
12	x1	=	0								
13	x2	=	0								

Рисунок 1.6 – Вигляд вихідних даних задач з реалізованими формулами

Перед запуском **Пошук рішень** маємо дані, які подано на рис. 1.7

C11 fx =B2*C12+E2*C13

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Цільова функція											
2	z=	3	x1	+	2	x2						
3	Обмеження											
4		1	x1	+	2	x2	<	=	6		0	
5		2	x1	+	1	x2	<	=	8		0	
6		-1	x1	+	1	x2	<	=	1		0	
7		0	x1	+	1	x2	<	=	2		0	
8						x1	>	=	0			
9						x2	>	=	0			
10	Результат											
11	z	=	0									
12	x1	=	0									
13	x2	=	0									
14												

Рисунок 1.7 – Вихідні дані

Запускаємо **Пошук рішень** та заносимо усю необхідну інформацію, як показано на рис. 1.8. Отримаємо результат, який подано на рис. 1.9.

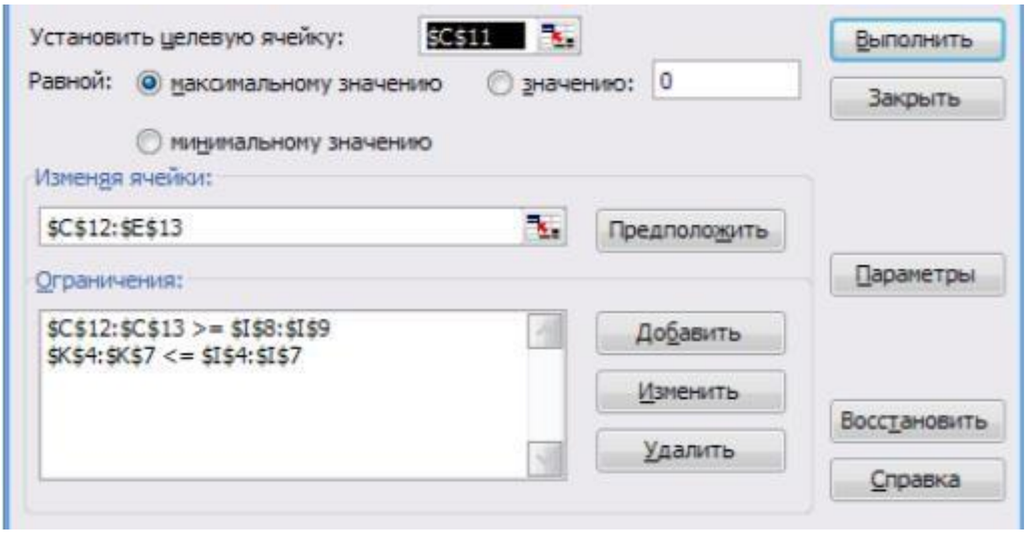


Рисунок 1.8 – Вікно **Пошук рішень**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Цільова функція										
2	z=	3	x1	+	2	x2					
3	Обмеження										
4		1	x1	+	2	x2	<	=	6		6
5		2	x1	+	1	x2	<	=	8		8
6		-1	x1	+	1	x2	<	=	1		-2
7		0	x1	+	1	x2	<	=	2		1,3
8						x1	>	=	0		
9						x2	>	=	0		
10	Результат										
11	z	=	12,67								
12	x1	=	3,33								
13	x2	=	1,33								
14											

Рисунок 1.9 – Результуючі дані

Таким чином, порівнявши отримані результати можна зробити висновок, що розв'язки співпадають. Відповідь: для того, щоб отримати максимальний прибуток у 12,67 грн необхідно виготовляти 3,33 кг продукту А та 1,33 кг продукту В.

Контрольні питання

1. За допомогою якої надбудови в електронних таблицях можна вирішувати задачі лінійного програмування?

2. Яким чином можна визначити обмеження під час вирішення ЗЛП за допомогою електронних таблиць?

3. Яким чином задати параметри максимізації у надбудові Пошук рішень?

Завдання:

1. На всі контрольні питання сформулювати відповіді.
2. Згідно свого номера у списку групи виконати задачу.
3. Оформити звіт.

Обрати варіант згідно з номером у списку. Скласти математичну модель задачі. Розв'язати її графічно та за допомогою електронних таблиць Microsoft Excel (без урахування умови цілочисловості). Порівняти отримані результати.

Формат звіту. Оформити у текстовому редакторі. Малюнки оформити у графічному редакторі та перенести у текстовий документ та додати

скріншоти результатів обчислень у табличному редакторі. Оформити в табличному редакторі результати обчислень. Звіт повинен мати, титульний лист (із зазначенням, навчального закладу, кафедри, номеру практичного заняття, теми, ПІБ та шифр групи).

Варіант №1

Фінансовий консультант фірми «Н» консультує клієнта по оптимальному інвестиційним портфелем. Клієнт хоче вкласти кошти (не більше 25 000 грн.) В два найменування акцій великих підприємств в складі холдингу «Х».

Аналізуються акції цієї фірми «А» і «В». Ціни на акції: «А» - 5 грн. За акцію; «В» - 3 грн. За акцію.

Клієнт уточнив, що він хоче придбати максимум 6000 акцій обох найменувань, при цьому акцій одного з найменувань повинно бути не більше 5000 штук.

За оцінками «Х», прибуток від інвестицій в ці акції в наступному році складе: «А» - 1,1 грн .; «В» - 0,9 грн.

Завдання консультанта полягає в тому, щоб видати клієнту рекомендації щодо оптимізації прибутку від інвестицій.

Варіант №2

Господарству потрібно не більше 10 тритонних автомашин і не більше

8 п'ятитонних. Відпускна ціна автомашини першої марки 2 000 грн., другий марки 4 000 грн. Господарство може виділити для придбання машин 40 000 грн. скільки слід придбати автомашин кожної марки окремо, щоб їх загальна (сумарна) вантажопідйомність була максимальною. Побудувати економіко-математичну модель задачі, отримати рішення графічним методом.

Варіант №3

Деяка фірма випускає два набору добрив для газонів: звичайний і покращений. У звичайний набір входить 3 кг азотних, 4 кг фосфорних і 1 кг калійних добрив, а в покращений - 2 кг азотних, 6 кг фосфорних і 3 кг калійних добрив. Відомо, що для деякого газону потрібно, щонайменше, 10 кг азотних, 20 кг фосфорних і 7 кг калійних добрив. Звичайний набір коштує 3 грн., а поліпшений - 4 грн. Які і скільки наборів добрив потрібно купити, щоб забезпечити ефективне харчування ґрунту і мінімізувати вартість?

Варіант №4

Фермер для годування тварин використовує два види корму. У денному раціоні тваринного повинно міститися 6 одиниць поживної речовини А і не менше 12 одиниць поживної речовини В. Скільки потрібно витрачати корму кожного виду щодня на одну тварину при мінімальних витратах? Використовуйте дані таблиці.

поживна речовина	Кількість поживних речовин в 1 кг корму	
	Вид I	Вид II
A	2	1
B	2	4
Ціна 1 кг корму (грн.)	0,2	0,3

Побудувати економіко-математичну модель задачі, дати необхідні коментарі до її елементів і отримати рішення графічним методом. Що відбудеться, якщо вирішувати задачу на максимум, і чому?

Варіант № 5

На наявних у фермера 400 га землі він планує посіяти кукурудзу і сою. Сівба та збирання кукурудзи вимагають на кожен гектар 200 грн. витрат, а сої - 100 грн. На покриття витрат, пов'язаних із сівбою і збиранням, фермер отримав позику в 60 тис. грн. Кожен гектар, засіяний кукурудзою, принесе 30 центнерів, а кожен гектар, засіяний соєю, - 60 центнерів. Фермер уклав договір на продаж, по якому кожен центнер кукурудзи принесе йому 3 грн., а кожен центнер сої – 6 грн. Однак згідно з цим договором фермер зобов'язаний зберігати прибране зерно протягом декількох місяців на складі, максимальна місткість якого дорівнює 21 тис. центнерів.

Фермеру хотілося б знати, скільки гектарів потрібно засіяти кожної з цих культур, щоб отримати максимальний прибуток. Побудувати економіко-математичну модель задачі, дати необхідні коментарі до її елементів і отримати рішення графічним методом. Що відбудеться, якщо вирішувати задачу на мінімум, і чому?

Варіант №6

Продукція двох видів (фарба для внутрішніх і зовнішніх робіт) надходить в оптову продаж. Для виробництва фарб використовуються два вихідних продукту А і В. Максимально можливі добові запаси цих продуктів складають 6 і 8 тон, відповідно. Витрати продуктів А і В на 1 т відповідних фарб наведені в таблиці.

Вихідний продукт	Витрата вихідних продуктів на тонну фарби, т		Максимально можливий запас, т
	Фарба Е для зовнішніх робіт	Фарба для внутрішніх робіт	
A	1	2	6
B	2	1	8

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу для внутрішніх робіт ніколи не перевищує попиту на фарбу для зовнішніх робіт більш ніж на 1 т. Крім того, встановлено, що попит на фарбу для внутрішніх робіт ніколи не перевищує 2 т на добу. Оптові ціни однієї тони фарби дорівнює 3000 грн. для фарби для зовнішніх робіт і 2000 грн. для фарби для внутрішніх робіт.

Яку кількість фарби кожного виду повинна виробляти фабрика, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним?

Побудувати економіко-математичну модель задачі, дати необхідні коментарі до її елементів і отримати рішення графічним методом. Що станеться, якщо вирішувати задачу на мінімум і чому?

Варіант №7

Фірма виробляє два широко популярних безалкогольних напою - «А» і «В». Фірма може продати всю продукцію, яка буде вироблена. Однак, обсяг виробництва обмежений кількістю основного інгредієнта і виробничою потужністю наявного обладнання. Для виробництва 1 л «А» потрібно 0,02 год. роботи устаткування, а для виробництва 1 л «В» - 0,04 г. Витрата спеціального інгредієнта становить 0,01 кг і 0,04 кг на 1 л «А» і « В » відповідно. Щодня в розпорядженні фірми є 24 години часу роботи обладнання і 16 кг спеціального інгредієнта. Прибуток фірми становить 0,10 грн. за 1 л «А» і 0,30 грн. за 1 л «В». Скільки продукції кожного виду слід виробляти щодня, якщо мета фірми полягає в максимізації щоденного прибутку?

Побудувати економіко-математичну модель задачі, дати необхідні коментарі до її елементів і отримати рішення графічним методом. Що станеться, якщо вирішувати задачу на мінімум, і чому?

Варіант №8

Для годівлі великої рогатої худоби потрібно скласти добову дієту (раціон), що включає поживні речовини А, В, С (наприклад білки, кальцій і тощо: поживної речовини А не менше 1000 од., В - не менше 80 од., С - не менше 300 од. Ці поживні речовини не можуть бути дані в чистому вигляді, а містяться в кормах двох видів I і II (наприклад, в концентраті, силосі). Відомо вміст поживних речовин А, В, С (в од.) на 1 кг корму кожного виду і собівартість кормів відповідно 4 і 3 грн .. за 1 кг. Крім того, добовий раціон повинен містити не більше 25 кг корму виду I і 20 кг корму виду II.

Поживні речовини	Вміст (на од.) в 1 кг корму виду		Мінімальна норма поживних речовин (од.)
	I – концентрат	II – силос	
A (білок)	50	20	1000
B (кальцій)	2	4	80
C (фосфор)	15	10	300

Визначити, скільки кілограмів корму кожного виду треба взяти для складання добового раціону, щоб він був досить поживним і мав найменшу собівартість.

Варіант №9

Деяка фірма випускає два набору добрив для газонів: звичайний і покращений. У звичайний набір входить 5 кг азотних, 4 кг фосфорних і 1 кг калійних добрив, а в покращений - 4 кг азотних, 8 кг фосфорних і 3 кг калійних добрив. Відомо, що для деякого газону потрібно, щонайменше, 10 кг азотних, 30 кг фосфорних і 7 кг калійних добрив. Звичайний набір коштує 5 грн., а поліпшений - 6 грн. Які і скільки наборів добрив потрібно купити, щоб забезпечити ефективне харчування ґрунту і мінімізувати вартість?

Варіант №10

В раціоні тваринного повинно міститися 9 одиниць поживної речовини А і не менше 15 одиниць поживної речовини В. Скільки потрібно витрачати корму кожного виду щодня на одну тварину при мінімальних витратах? Використовуйте дані таблиці.

Поживна речовина	**Кількість поживних речовин в 1 кг корму**	
	Вид I	Вид II
A	3	1
B	5	4
Ціна 1 кг корму (грн.)	0,2	0,3

Побудувати економіко-математичну модель задачі, дати необхідні коментарі до її елементів і отримати рішення графічним методом. Що відбудеться, якщо вирішувати задачу на максимум, і чому?

Варіант №11

На наявних у фермера 800 га землі він планує посіяти кукурудзу і сою. Сівба та збирання кукурудзи вимагають на кожен гектар 500 грн. витрат, а сої - 1000 грн. На покриття витрат, пов'язаних із сівбою і збиранням, фермер отримав позику в 100 тис. грн. Кожен гектар, засіяний кукурудзою, принесе 40 центнерів, а кожен гектар, засіяний соєю, - 80 центнерів. Фермер уклав договір на продаж, по якому кожен центнер кукурудзи принесе йому 3 грн., а кожен центнер сої – 6 грн. Однак згідно з цим договором фермер зобов'язаний зберігати прибране зерно протягом декількох місяців на складі, максимальна місткість якого дорівнює 30 тис. центнерів.

Фермеру хотілося б знати, скільки гектарів потрібно засіяти кожної з цих культур, щоб отримати максимальний прибуток. Побудувати економіко-математичну модель задачі, дати необхідні коментарі до її елементів і отримати рішення графічним методом. Що відбудеться, якщо вирішувати задачу на мінімум, і чому?

Варіант №12

Продукція двох видів (фарба для внутрішніх і зовнішніх робіт) надходить в оптову продаж. Для виробництва фарб використовуються два вихідних продукту A і B. Максимально можливі добові запаси цих продуктів складають 8 і 10 тон, відповідно. Витрати продуктів A і B на 1 т відповідних фарб наведені в таблиці.

Вихідний продукт	**Витрата вихідних продуктів на тонну фарби**		**Максимально можливий запас, т**
	Фарба для зовнішніх робіт	**Фарба для внутрішніх робіт**	
A	1	3	8
B	3	2	10

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу для внутрішніх робіт ніколи не перевищує попиту на фарбу для зовнішніх робіт більш ніж на 1 т. Крім того, встановлено, що попит на фарбу для внутрішніх робіт ніколи не перевищує 2 т на добу. Оптові ціни однієї тони фарби дорівнює 4000 грн. для фарби для зовнішніх робіт і 3000 грн. для фарби для внутрішніх робіт.

Яку кількість фарби кожного виду повинна виробляти фабрика, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним?

Побудувати економіко-математичну модель задачі, дати необхідні коментарі до її елементів і отримати рішення графічним методом. Що станеться, якщо вирішувати задачу на мінімум і чому?

Варіант №13

Фірма виробляє два широко популярних безалкогольних напою - «А» і «В». Фірма може продати всю продукцію, яка буде вироблена. Однак, обсяг виробництва обмежений кількістю основного інгредієнта і виробничою потужністю наявного обладнання. Для виробництва 1 л «А» потрібно 0,05 год. роботи устаткування, а для виробництва 1 л «В» - 0,08 г.

Витрата спеціального інгредієнта становить 0,02 кг і 0,04 кг на 1 л «А» і « В » відповідно. Щодня в розпорядженні фірми є 24 години часу роботи обладнання і 20 кг спеціального інгредієнта. Прибуток фірми становить 0,20 грн. за 1 л «А» і 0,30 грн. за 1 л «В». Скільки продукції кожного виду слід виробляти щодня, якщо мета фірми полягає в максимізації щоденного прибутку?

Побудувати економіко-математичну модель задачі, дати необхідні коментарі до її елементів і отримати рішення графічним методом. Що станеться, якщо вирішувати задачу на мінімум, і чому?

Лабораторна робота № 3

Тема: *Аналіз чутливості в задачах лінійного програмування*

Теоретичні відомості

Неминуче коливання значень таких економічних параметрів, як ціни на продукцію і сировину, запаси сировини, попит на ринку тощо, може призвести до не оптимальності або непридатності колишнього режиму роботи. Для обліку подібних ситуацій проводиться аналіз чутливості, тобто аналіз того, як можливі зміни параметрів початкової моделі вплинуть на отримане раніше оптимальне рішення задачі ЛП.

Для вирішення завдань аналізу чутливості обмеження лінійної моделі класифікуються наступним чином. **Зв'язуючи** обмеження проходять через оптимальну точку. **Незв'язуючи** обмеження не проходять через оптимальну точку. Аналогічно ресурс, що представляється зв'язує обмеженням, називають дефіцитним, а ресурс, що представляється незв'язуючим обмеженням – недефіцитним. Обмеження називають надлишковим в тому випадку, якщо його виключення не впливає на ОДР і, отже, на оптимальне рішення.

Виділяють наступні три завдання аналізу на чутливість:

1. Аналіз скорочення або збільшення ресурсів:

   • на скільки можна збільшити запас дефіцитного ресурсу для поліпшення оптимального значення ЦФ?

   • на скільки можна зменшити запас недефіцитних ресурсу при збереженні оптимального значення ЦФ?

2. Збільшення запасу якого з ресурсів найвигідніше?

3. Аналіз зміни коефіцієнтів ЦФ: який діапазон зміни коефіцієнтів ЦФ, при якому не змінюється оптимальне рішення?

Методика графічного аналізу чутливості оптимального рішення.

Перше завдання аналізу на чутливість (аналіз на чутливість до правої частини обмежень).

Розглянемо на прикладі економічний зміст цих задач.

Приклад. Фабрика випускає два види продукції фарб: перший – для зовнішніх, а другий – для внутрішніх робіт. Для виробництва фарб використовуються два інгредієнти: *A* та *B*. Максимально можливі добові запаси цих інгредієнтів складають 6 та 8 *т* відповідно. Відомі витрати *A* та *B* на 1 *т* відповідних фарб (табл. 1.2). Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу 2-го виду ніколи не перевищує попиту на фарбу 1-го виду більше, ніж на 1 *т*. Крім того встановлено, що попит на фарбу 2-го виду ніколи не перевищує 2 *т* на добу. Оптові ціни однієї тони фарби відповідно дорівнюють: 3 тис. грн для 1-го виду, 2 тис. грн для 2-го виду.

Таблиця 1.2

Інгредієнти	Витрати інгредієнтів, *т інгр./т* фарби		Прибуток від реалізації продукції, *грн*
	I	II	
A	1	2	3
B	2	1	2
Обсяг ресурсу на складі, *т*	6	8	

Проаналізуємо на чутливість оптимальний розв’язок задачі, яка представлена на рис. 1.11.

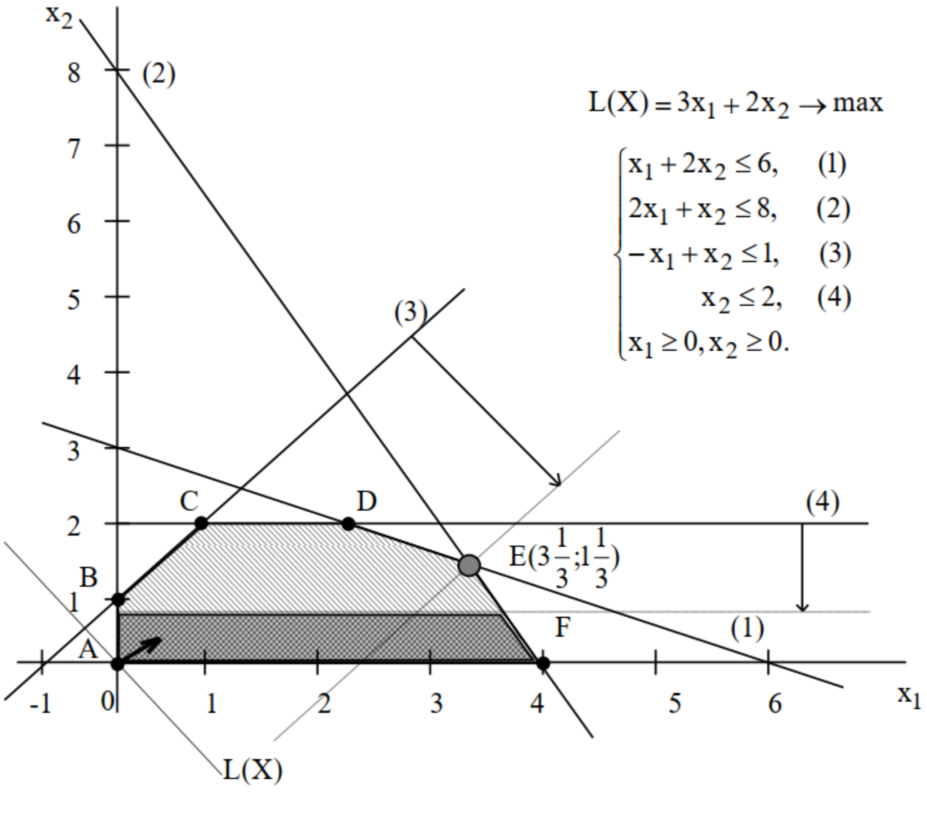


Рисунок 1.11 – Графічний розв’язок задачі

В оптимальній точці *E* перетинаються прямі (1) і (2). Тому обмеження (1) і (2) є зв'язуючими, а відповідні їм ресурси (інгредієнти *A* і *B*) – дефіцитними. Розглянемо економічний зміст цих понять. Точка максимуму ЦФ *E* відповідає добовому виробництву $3\frac{1}{3}$ m фарби 1-го виду і $1\frac{1}{3}$ m фарби 2-го виду. У виробництві фарб використовуються інгредієнти *A* і *B*. Добовий запас на складі інгредієнтів *A* і *B* – це праві частини зв'язуючих обмежень (1) і (2) (6 і 8 т інгр. / добу). Згідно з цими обмеженням, на виробництво в точці *E* витрачається:

$1 \cdot 3\frac{1}{3} + 2 \cdot 1\frac{1}{3} = 6$ [т інгр. А/добу] (1) та $2 \cdot 3\frac{1}{3} + 1 \cdot 1\frac{1}{3} = 8$ [т інгр. В/добу] (2)

Таким чином, поняття "зв'язуюче обмеження" (1) і (2) означає, що при виробництві фарб в точці $E\left(3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$ запаси інгредієнтів *A* і *B* витрачаються повністю і з цієї причини неможливо подальше нарощування виробництва. У цьому полягає економічний зміст поняття дефіцитності ресурсів, тобто якщо фірма зможе збільшити добові запаси інгредієнтів, то це дозволить збільшити випуск фарб. У зв'язку з цим виникає питання: до якого рівня доцільно збільшити запаси інгредієнтів і на скільки при цьому збільшиться *оптимальне* виробництво фарб?

Правило №1

Щоб графічно визначити максимальне збільшення запасу дефіцитного ресурсу, що викликає поліпшення оптимального рішення, необхідно пересувати відповідну пряму в напрямку поліпшення ЦФ до тих пір, поки це обмеження не стане надмірним.

При проходженні прямої (1) через точку *К* (рис.1.12) багатокутник *ABCKF* стає ОДР, а обмеження (1) – надмірним. Дійсно, якщо видалити пряму (1), що проходить через точку *К*, то ОДР *ABCKF* не зміниться. Точка *К* стає *оптимальною*, в цій точці обмеження (2) і (4) стають *зв'язуючими*.

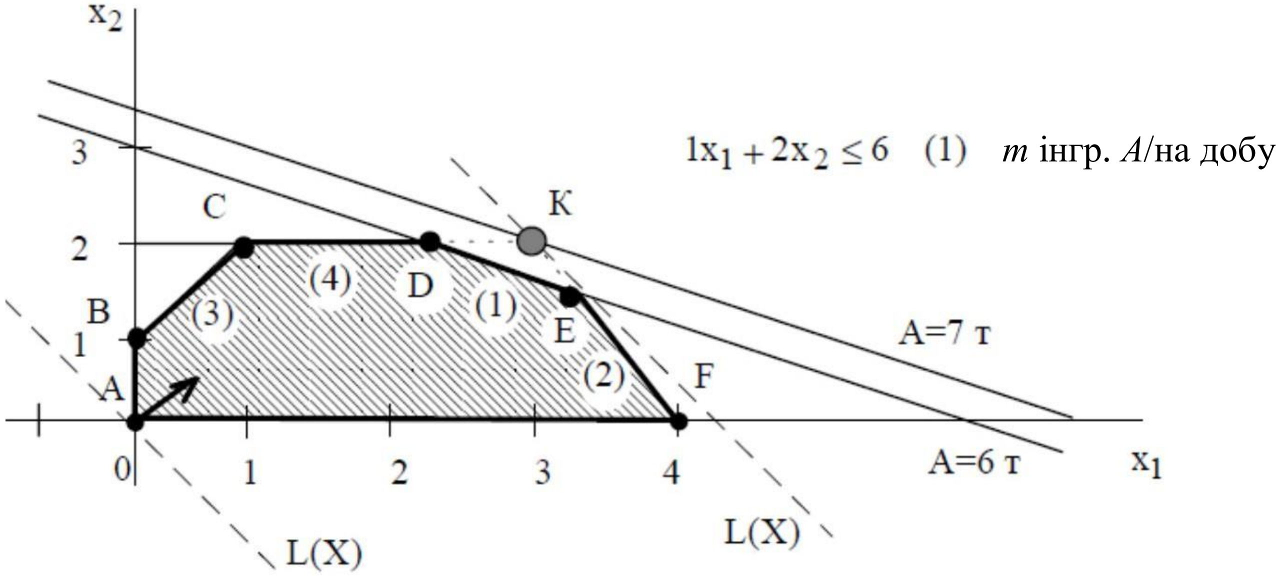


Рисунок 1.12 – Аналіз збільшення ресурсу *А*

Правило №2

Щоб чисельно визначити максимальну величину запасу дефіцитного ресурсу, що викликає поліпшення оптимального рішення, необхідно:

1) визначити координати точки $(x_1; x_2)$, в якій відповідне обмеження стає надмірним;
2) підставити координати $(x_1; x_2)$ в ліву частину відповідного обмеження.

Координати точки *К* (3; 2) знаходяться шляхом рішення системи рівнянь прямих (2) і (4). Тобто в цій точці фірма буде виробляти 3 *т* фарби 1-го виду і 2 *т* фарби 2-го виду. Підставами $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$ в ліву частину обмеження (1) і отримаємо максимально допустимий запас інгредієнта *А*.

$$x_1 + 2x_2 = 3 + 2 \cdot 2 = 7 \text{ [т інгр. } A\text{/на добу]}.$$

Подальше збільшення запасу інгредієнта *А* недоцільно, тому що це не змінить ОДР і не призведе до іншого оптимального рішення (див. рис. 1.12). Дохід від продажу фарб в обсязі, відповідному точці *К*, можна розрахувати, підставивши її координати (3, 2) в вираз ЦФ

$$3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13 \text{ [тис. грн./ на добу]}.$$

Розглянемо питання про доцільність збільшення запасу інгредієнта В. Згідно з правилом №1, відповідне обмеження (2) стає надлишковим в точці *J*, в якій перетинаються пряма (1) і вісь змінної (рис.1.13). Багатокутник *ABCDJ* стає ОДР, а точка *J* (6; 0) – оптимальним рішенням.

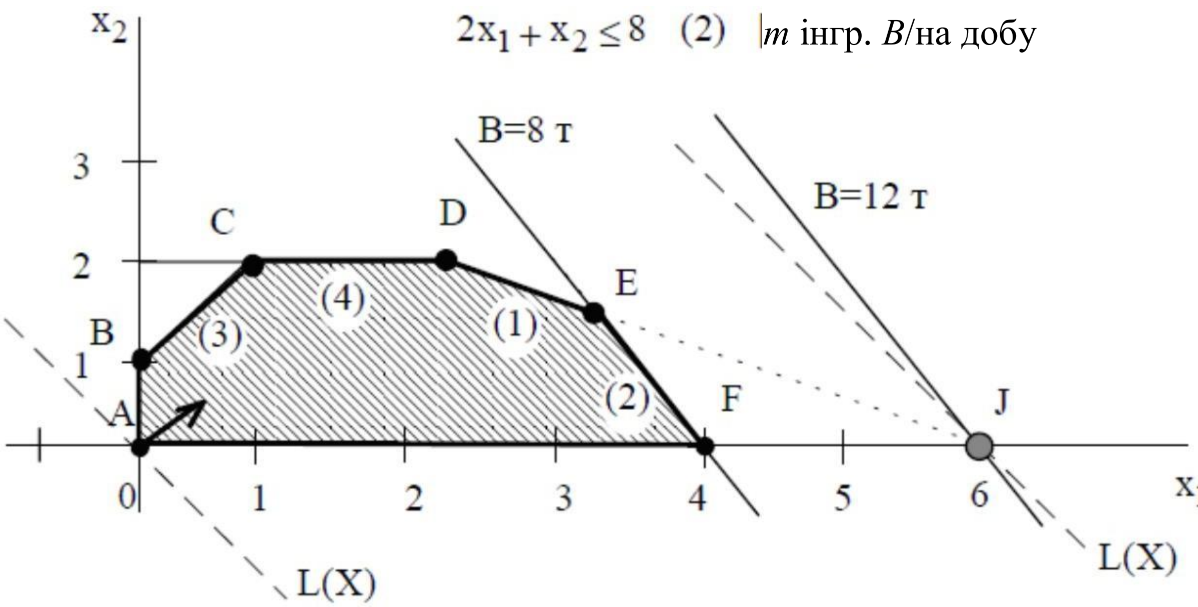


Рисунок 1.13 – Аналіз збільшення ресурсу *В*

У точці *J* вигідно виробляти тільки фарбу 1-го виду (6 *т* на добу). Дохід від продажу при цьому складе:

$$3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 18 \text{ [тис. грн./ на добу].}$$

Щоб забезпечити такий режим роботи, згідно з правилом №2, запас інгредієнта *В* треба збільшити до величини:

$$2x_1 + x_2 = 2 \cdot 6 + 0 = 12 \text{ [т інгр. } B\text{/ на добу].}$$

Обмеження (3) і (4) є не зв'язуючими, тому що не проходять через оптимальну точку *Е* (див. рис.1.13). Відповідні їм ресурси (попит на фарби) є недефіцитним. З економічної точки зору це означає, що в даний момент рівень попиту на фарби безпосередньо не визначає обсяги виробництва. Тому деякі його коливання можуть ніяк не вплинути на оптимальний режим виробництва в точці *Е*.

Наприклад, збільшення (зменшення) попиту на фарбу 2-го виду буде відповідати переміщенню прямої обмеження $x_2 \le 2$ (4) вверх (вниз). Переміщення прямої (4) вгору ніяк не може змінити точку *E* максимуму ЦФ. Переміщення ж прямий (4) вниз не впливає на існуюче оптимальне рішення тільки до перетину з точкою *E* (див. Правило №3). З рис. 1.13 видно, що подальше переміщення (4) призведе до того, що точка *E* буде за межами нової ОДР, виділеної більш темним кольором. Крім того, будь-який оптимальне рішення для цієї нової ОДР буде гірше точки *E*.

Правило №3

Щоб визначити максимальне зменшення запасу недефіцитного ресурсу, *яке не змінює* оптимальне рішення, ***необхідно*** пересувати відповідну пряму до перетину з оптимальною точкою.

Правило №4

Щоб чисельно визначити мінімальну величину запасу недефіцитного ресурсу, що не змінює оптимальне рішення, ***необхідно*** підставити координати оптимальної точки в ліву частину відповідного обмеження.

Щоб з'ясувати, до яких меж падіння попиту на фарбу 2-го виду не вплине на виробництво в точці $E\left(3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$, використовуємо правило №4. Підставляємо в ліву частину обмеження (4) координати точки *E*, отримуємо

$$x_2 = 1\frac{1}{3}.$$

Робимо висновок: граничний рівень, до якого може впасти попит на фарбу 2-го виду та при якому не зміниться оптимальність отриманого раніше рішення, дорівнює $1\frac{1}{3}$ *т* фарби на добу.

Економічний сенс обмеження (3)

$$-x_1 + x_2 \le 1[\text{т фарби на добу}]$$

в тому, що обсяг продажів фарби 2-го виду може перевищити обсяг продажів фарби 1-го виду максимум на 1 *т*. Подальше збільшення продажів фарби 2-го виду в порівнянні з фарбою 1-го виду графічно відобразиться переміщенням прямої (3) вліво і вгору, але ніяк не вплине на оптимальність точки *E*. Але якщо різниця попиту на фарбу 2-го і 1-го видів буде зменшуватися, то пряма (3) буде переміщатися нижче і правіше. Останнім положенням прямої (3), при якому точка *E* залишається оптимальною, є перетин з точкою *E* (див. рис. 1.13). Згідно з правилом №4, підставимо координати точки $E\ \left(3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$ в ліву частину обмеження (3)

$$-x_1 + x_2 = -3\,\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = -2 \text{ [}\textit{т фарби}\text{]}$$

Отримуємо, що різниця попиту на фарбу 2-го і 1-го виду в точці стала негативною. Тобто, проходження прямої (3) через точку *E* означає, що фарбу 2-го виду будуть купувати в меншому обсязі, ніж фарбу 1-го виду

$$x_2 - x_1 = 2 \text{ [}\textit{т фарби/на добу}\text{]}$$

Робимо висновок: максимальне перевищення попиту на фарбу 1-го виду над попитом на фарбу 2-го виду, при якому оптимальне рішення в точці *E* не зміниться, становить 2 *т* фарби на добу.

Результати вирішення першого завдання аналізу оптимального рішення на чутливість представлені в табл. 1.2

Таблиця 1.2

Результати аналізу ресурсів завдання

№	Тип ресурсу	Максимальне змінення ресурсу, $\max \Delta R_i$, *т/на добу*	Максимальне змінення доходу, $\max \Delta L\left(X^*\right)$, *тис. грн./на добу*	Вартість додаткової одиниці ресурсу $y_i = \frac{max\Delta L(X*)}{max\Delta R_i}$, *тис. грн./т*
(1)	Дефіцитний	7-6=+1	$13 - 12\frac{2}{3} = +\frac{1}{3}$	$y_1 = \left[\frac{1}{3}/1\right] = \frac{1}{3}$
(2)	Дефіцитний	12-8=+4	$18 - 12\frac{2}{3} = +5\frac{1}{3}$	$y_2 = \left[5\frac{1}{3}/4\right] = 1\frac{1}{3}$
(3)	Недефіцитний	-2-1= -3	$12\frac{2}{3} - 12\frac{2}{3} = 0$	$y_4 = [0/(-3)] = 0$
(4)	Недефіцитний	$1\frac{1}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$	$12\frac{2}{3} - 12\frac{2}{3} = 0$	$y_4 = \left[0/\left(-\frac{2}{3}\right)\right] = 0$

Друге завдання аналізу на чутливість

Аналіз табл. 1.2 показує, що до поліпшення оптимального рішення, тобто до збільшення добового доходу призводить збільшення дефіцитних ресурсів. Для визначення вигідності збільшення цих ресурсів використовують поняття цінності додаткової одиниці і-го ресурсу y_i

$$y_i = \frac{max\Delta L(X*)}{max\Delta R_i},$$

де $\max \Delta L\left(X*\right)$ – максимальне збільшення оптимального значення ЦФ;

$\max \Delta R$ – максимально допустимий приріст обсягу *і*-го ресурсу.

Наприклад, з табл.1.1 випливає, що збільшення добового запасу інгредієнта *A* [обмеження (1)] на 1 *т* дозволить отримати додатковий дохід, рівний $y_1 = \frac{1}{3}$ *тис. грн./на добу*, в той час як збільшення запасу *B* [обмеження (2)] на 1 *т* принесе $y_2 = 1\frac{1}{3}$ *тис. грн./на добу*. Недефіцитні ресурси мають нульові цінності, оскільки зміна цих ресурсів не призводить до збільшення доходу.

Висновок: додаткові вкладення в першу чергу необхідно направляти на збільшення ресурсу *B*, а лише потім на ресурс *A*. Змінювати недефіцитні ресурси немає необхідності.

Третє завдання аналізу на чутливість

Графічний аналіз допустимого діапазону зміни цін.

Зміна цін на продукцію, тобто зміна коефіцієнтів ЦФ, представляється на графіку обертанням цільової прямий навколо оптимальної точки. Так, при збільшенні коефіцієнта ЦФ c_1 або зменшенні c_2 цільова пряма обертається за годинниковою стрілкою. При зменшенні c_1 або ж збільшенні c_2 цільова пряма обертається проти годинникової стрілки (рис.1.14).

При таких поворотах точка Е залишатиметься оптимальною до тих пір, поки нахил цільової прямої не вийде за межі, обумовлені нахилами прямих обмежень (1) і (2). Так, наприклад, якщо нахил цільової прямої співпаде з нахилом прямої (1), то оптимальним рішенням будуть точки відрізка *DE*.

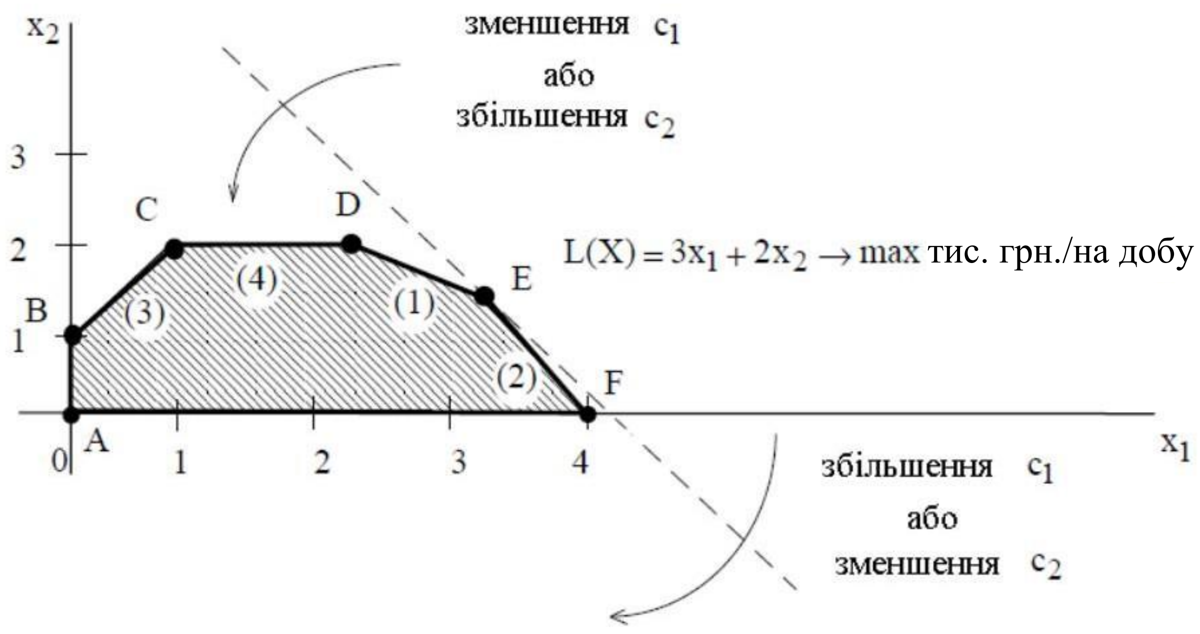


Рисунок 1.14 – Аналіз зміни цін

При збігу з прямою (2) оптимальним рішенням будуть точки відрізка *EF*. Якщо цільова пряма вийде за межі нахилу (1) або (2), то оптимальною точкою стане відповідно *D* або *F*.

Припустимо, що ціна на фарбу 2-го виду не змінюється, тобто зафіксуємо значення цільового коефіцієнта c_2. Проаналізуємо графічно результати зміни значення цільового коефіцієнт c_1, тобто ціни на фарбу 1-го виду. Оптимальний розв'язок в точці *E* не буде змінюватись при збільшенні c_1 до тих пір, поки цільова пряма не співпаде з прямою (2). Аналогічно, оптимальне рішення в точці *E* не буде змінюватись при зменшенні пір, поки цільова пряма не співпаде з прямою (1).

Аналітичний пошук допустимого діапазону зміни цін

Збіг в процесі обертання цільової прямої з прямою обмеження означає, що кути їх нахилу щодо горизонтальної осі зрівнялися, а значить, стали рівні тангенси кутів нахилу цих прямих.

Правило №5

Щоб визначити межі допустимого діапазону зміни коефіцієнта ЦФ, наприклад $\min c_1$ та $\max c_1$, ***необхідно*** прирівняти тангенс кута нахилу цільової прямий $tg\alpha$ ЦФ по черзі до тангенсів кутів нахилу прямих зв'язуючих обмежень, наприклад $tg\alpha_{(1)}$ та $tg\alpha_{(2)}$ (рис.1.15 та 1.16).

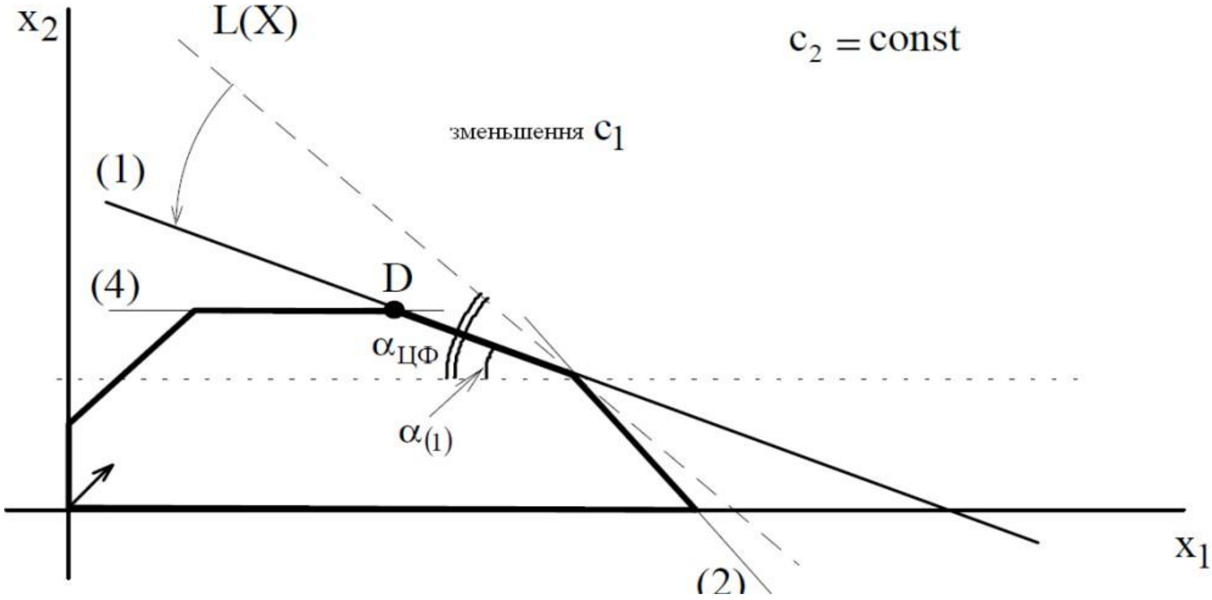


Рисунок 1.15 – Визначення min c_1

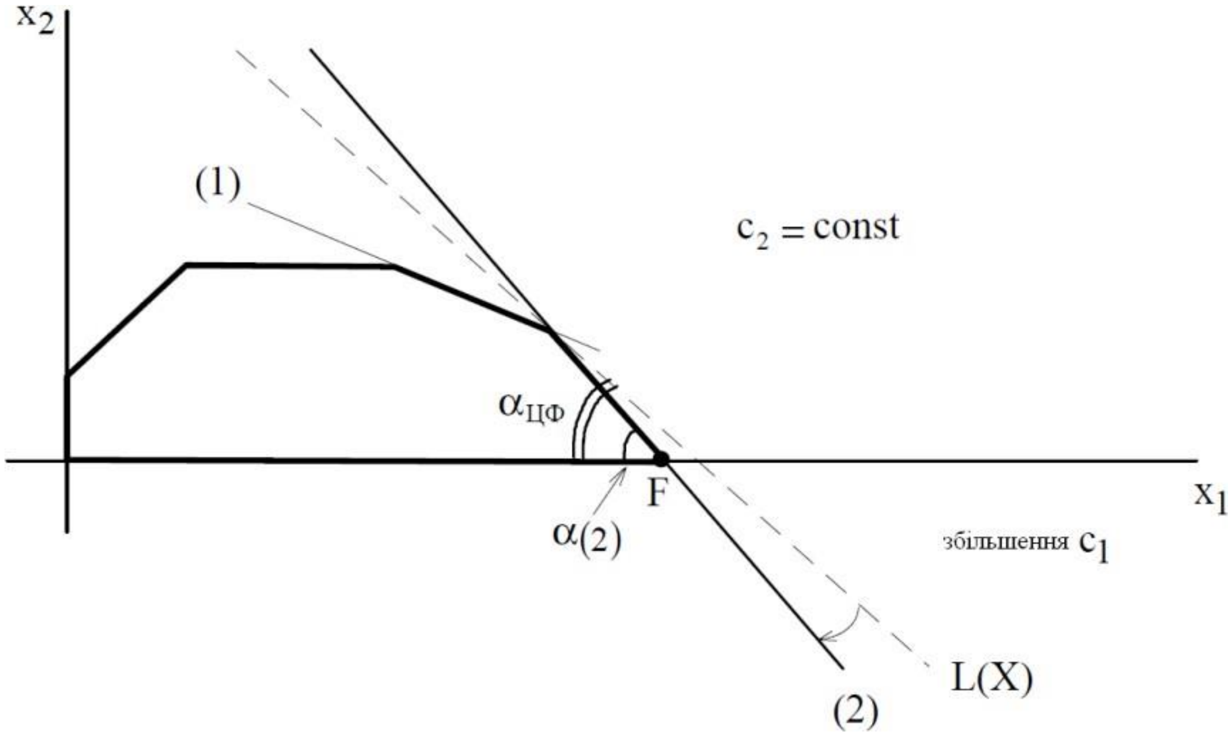


Рисунок 1.16 – Визначення $\max c_1$

Визначимо наскільки максимально може знизитися ціна на фарбу 1-го виду, не змінюючи оптимальну точку *E*. Для цього застосуємо правило №5 і формулу розрахунку тангенса кута нахилу прямої (рис.1.17).

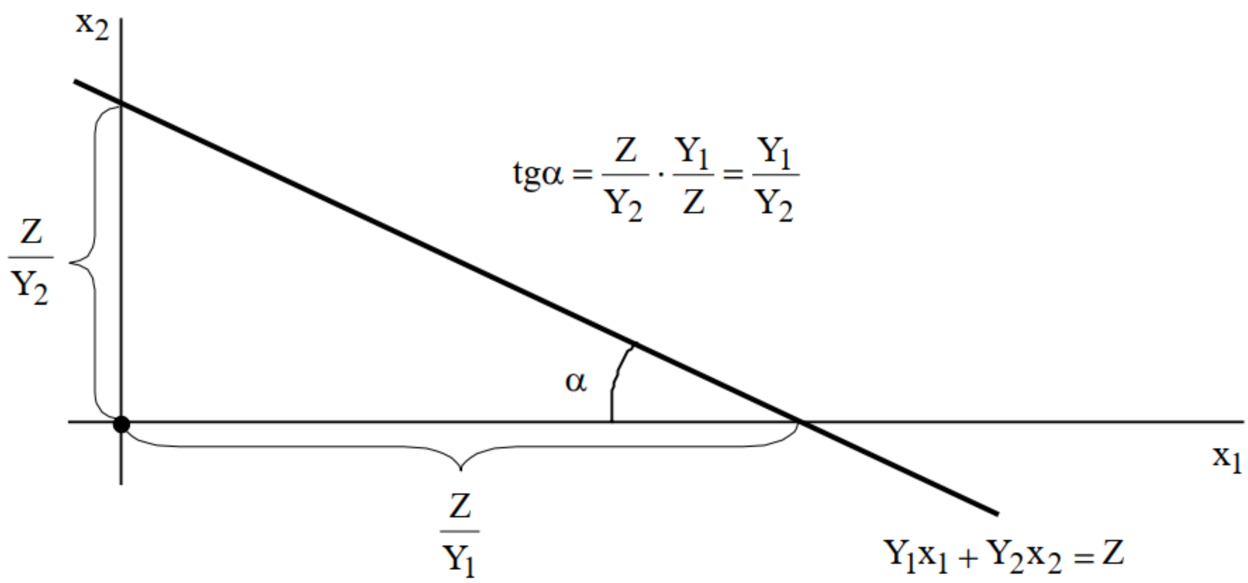


Рисунок 1.17 – Визначення тангенса кута нахилу tgα $Y_1 x_1 + Y_2 x_2 = Z$

Визначимо тангенси кутів нахилу:

1) цільової прямої $L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to max$, враховуючи, що $c_2 = 2$ фіксовано:

$$tg\alpha_{ЦФ} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_2}{c_1};$$

2) зв'язуючого обмеження $x_1 + 2x_2 \leq 6$ (1)

$$tg\alpha_{(1)} = \frac{1}{2};$$

3) зв'язуючого обмеження $2x_1 + x_2 \leq 8$ (2)

$$tg\alpha_{(2)} = \frac{2}{1} = 2;$$

для знаходження $\min c_1$ цільова пряма повинна збігтися з прямою (1) (див. рис.1.15):

$$tg\alpha_{ЦФ} = tg\alpha_{(1)};$$
$$\frac{c_1}{2} = \frac{1}{2};$$

$\min c_1 = 1$ [*тис. грн./т*].

для знаходження $\max c_1$ цільова пряма повинна збігтися з прямою (1) (див. рис.1.16):

$$tg\alpha_{ЦФ} = tg\alpha_{(2)};$$
$$\frac{c_1}{2} = 2;$$

$\max c_1 = 4$ [*тис .грн./т*].

Таким чином, якщо ціни на фарбу першого виду будуть коливатися в межах $1 < c_1 < 4$ тис. грн./*т*, то оптимальне рішення задачі не зміниться.

З наведених вище розрахунків та графічної їх ілюстрації слід, що якщо ціна на фарбу першого виду стане менше 1 тис. грн. / Т ($c_1 < 1$), то найбільш вигідним буде виробництво фарб в точці D (див. рис.1.14). При цьому загальне споживання інгредієнта В знизиться, що призведе до його недефіцитності [ресурс (2)], а дефіцитними будуть ресурси (1) і (4).

Контрольні питання:

1. Які задачі вирішується під час аналізу на чутливість оптимального розв'язку?
2. Що розуміють під зв'язуючими та незв'язуючими обмеженнями?
3. Що необхідно зробити, що графічно визначити максимальне збільшення запасу дефіцитного ресурсу, що викликає поліпшення оптимального рішення?
4. Що необхідно зробити, Щоб чисельно визначити максимальну величину запасу дефіцитного ресурсу, що викликає поліпшення оптимального рішення?
5. Розкрийте особливості графічного аналізу допустимого діапазону зміни цін.

Завдання:

1. На всі контрольні питання сформулювати відповіді.
2. Згідно свого номера у списку групи виконати задачу.
3. Оформити звіт.

Проаналізувати на чутливість оптимальний розв'язок задачі, яку вирішували у попередній лабораторній роботі №2, згідно свого варіанту.

Лабораторна робота № 4

Тема: *Приклади математичного моделювання*

Теоретичні відомості

Людина – один з найцікавіших, складніших і доступніших об'єктів дослідження. Уперше термін «екологія людини» з'явився в 1921 р. в працях американських дослідників Р. Е. Парка і Е. В. Берджеса, які використовували його в соціологічних дослідженнях. Екологія людини - це наука, що вивчає закономірності взаємодії людини як біосоціальної істоти із складним багатокомпонентним навколишнім світом, з динамічним, постійно таким, що ускладнюється місцем існування, проблеми збереження і зміцнення здоров'я. Екологія людини вивчає антропосистеми різного рівня – від глобального до локального і мікролокального. У рамках екології людини виділяються такі розділи, як екологія міста (урбоекологія), технічна екологія, екологічна етика, психологічна екологія, етноекологія, палеоекологія, медична екологія і тому подібне.

Екологію людини на всіх стадіях історичного розвитку цікавить наступне:

1) чисельність окремих спільностей людей і усього людства;

1) вікова і статева структура спільностей;

2) рівень здоров'я людей, який може бути виражений через середню тривалість життя, найбільш характерні хвороби і поширені причини смерті;

3) специфіка харчування людей кожної епохи, калорійність їжі, способи її приготування;

4) тип трудової діяльності, механізми і знаряддя праці, джерела енергії, використовувані в господарстві і побуті;

5) система розселення;

6) культурні і гігієнічні навички.

Аналіз вказаних вище характеристик дозволяє отримати знання деяких важливих величин, які в кількісній формі відбивають взаємодію людини з місцем його існування. У екології найчастіше вивчають не окрему людину, а цілі групи людей. Це дозволяє виявити загальні закономірності зміни показників стану організму і встановити взаємозв'язки між ними. Усі живі організми, у тому числі людина, пристосовані до ритмічних змін довкілля, відповідно до яких періодично прискорюються і сповільнюються функції систем органів. Будучи складовою частиною біосфери, людина сильно залежить від довкілля. Так, без повітря людина може прожити лише три хвилини, без води - три дні, без їжі - тридцять днів. Те ж відноситься і до зовнішніх параметрів середовища : температурі, тиску, вологості, опроміненню, дії різних фізичних полів. В ході еволюційного розвитку організм людини адаптувався до дії широкого спектру природних умов. Зміни умов довкілля ритмічні.

Упродовж усієї своєї історії людство пов'язане з добовими, місячними, сезонними, річними ритмами, обумовленими планетарними явищами і впливаючими на геологічні, кліматичні і біологічні процеси.

Під ритмами розуміють повторення однієї і тієї ж події або стану через строго певні проміжки часу. Тривалість циклу від початку до чергового повтору називається періодом.

Ритмічність процесів, властива усім живим організмам, носить назву біологічних ритмів.

Існує легенда про те, що в древньому Китаї ченці день за днем вели спостереження за людиною, записуючи параметри його фізичної активності, розумових здібностей і емоційного стану. В результаті багаторічних досліджень вони дійшли висновку, що ці три функції є періодичними - для фізичної активності 23 дні, емоційною - 28 днів і інтелектуальною 33 дні.

Найважливішим ритмом для усього живого на Землі являється добовий ритм, визначуваний такими чинниками як обертання Землі, коливання температури і вологості.

Ритми біологічної активності з періодом близько доби (20 – 23 години) носять назву циркадних. Циркадні ритми знаходяться в фазових співвідношеннях з трьома різними періодами зовнішніх ритмів, що відповідають руху Землі по відношенню до Сонця, Місяця і зірок : перший період – сонячна доба, другий – місячна доба, третій період – зоряна доба, яка називається сидеричною. Вимірюється доба в годинах, хвилинах і секундах. Умовно в добі 24 години, проте насправді тривалість кожної доби різна. Інтерференція білядобових ритмів призводить до періодичності, рівної 29,5 діб синодичного місяця. Синодичний місяць – це проміжок між двома послідовними однаковими фазами місяця. Він рівний в середньому 29 добам 12 годинам 44 хв. 2,8 сек. Вивчення закономірностей цих ритмів набуває усього зростаючого практичного значення у зв'язку з цілодобовою роботою підприємств, життям в північних широтах, освоєнням Світового океану, з тривалим перебуванням під водою, міжконтинентальними перельотами, розвитком космонавтики. Ритм добової зміни сну і пильнування, спокою і діяльності наклав свій відбиток на усі фізіологічні функції організму, аж до обміну речовин. Відповідно до теорії біоритмів людина з дня народження знаходиться в трьох біологічних ритмах: фізичному, емоційному і інтелектуальному. Це не залежить ні від раси, ні від національності людини, ні від яких або інших зовнішніх чинників. Фізичний цикл (23 дні) визначає енергію людини, його силу, витривалість, координацію руху. Емоційний цикл (28 днів) обумовлює стан нервової системи і настрій. Інтелектуальний цикл (33 дні) визначає творчу здатність особи (регулює пам'ять, пильність, сприйнятливість до знань, логічні і аналітичні функції мислення).

Будь-який з циклів складається з двох напівперіодів, позитивного і негативного.

Впродовж першої половини фізичного циклу людина енергійна і досягає кращих результатів у своїй діяльності; у другій половині циклу енергійність падає. У першій половині емоційного циклу людина весел, агресивний, оптимістичний, переоцінює свої можливості, в другій половині — дратівливий, легко збудливий, недооцінює свої можливості, песимістичний, усе критично аналізує. Перша половина інтелектуального циклу характеризується творчою активністю, в другій половині відбувається творчий спад. Дні переходу від позитивної фази до негативної є критичними, що проявляється у фізичному циклі нещасними випадками, в емоційному - нервовими зривами, в інтелектуальному – погіршенням якості розумової роботи. Найбільш несприятливою є ситуація, коли критичні дні різних циклів співпадають.

Вважають, що механізм «біологічного годинника» вбудований в гіпоталамус і представляє складну функціональну структуру, де провідну роль грають гормональні чинники. «Годинник» працює нерівномірно, хід їх або сповільнюється, або прискорюється, що позначається на характері протікання обміну речовин в клітинах і внутрішніх органах тіла. Сильне охолодження, а також наркоз викликають зміщення біологічних ритмів. Ліки, отрути, пригноблюючі обмін речовин, знижують амплітуду і циклічність коливань. Алкалоїди, наприклад, подовжують періоди біологічних ритмів.

Максимальний підйом творчості людей пов'язаний з сонячною активністю. Виникає він на 2-й рік, що йде за роком максимуму сонячної активності. Максимальна сонячна активність повторюється через 11 років і триває близько 6 міс. В рік сильної сонячної активності фіксується підвищене число катастроф. Зокрема, через 2 дні після спалаху на Сонці в 4 рази збільшується кількість дорожньо-транспортних подій, тому що в цей час на Землю випромінюється велика кількість низькочастотних хвиль і у людини сповільнюються реакції в організмі. При спалахах на Сонці здійснюється прорив високоенергетичних космічних променів через атмосферу, що спричиняє за собою зміну магнітного поля Землі, структури іоносфери, врожайності, числа звірів в популяції і т. п. Проходження плям через центральний меридіан Сонця збільшує на 84% загострення хронічних захворювань, інсультів, інфарктів міокарду. У рік сильної сонячної активності люди, що народилися в січні, лютому, березні і першій половині квітня, мають більше шансів захворіти шизофренією. Встановлено, що чим вище сонячна активність, тим нижче кислотність шлункового соку. Тому в період сильної сонячної активності відзначається підвищена кількість захворювань шлунково-кишкового тракту, а також інфекційних захворювань (холера, дизентерія). Сонячна активність впливає на вміст гемоглобіну в крові людини. Максимальний вміст гемоглобіну в крові у чоловіків спостерігається у березні, у жінок – в січні, мінімальне – у чоловіків – в серпні, у жінок – в липні.

Одним з критеріїв ендогенної організації біологічних ритмів є тривалість індивідуальної хвилини (ІХ). У здорових людей величина ІХ є відносно стійким показником, що характеризує ендогенну організацію часу і адаптаційні здібності організму (у осіб з високими здібностями до адаптації ІХ перевищує хвилину фізичного часу - 62,90 - 69,71 с.; у осіб з невисокими здібностями до адаптації ІХ складає в середньому - 47,0 - 46,2 с.). ІХ має циркасептальний ритм – її величина максимальна у вівторок і середу і мінімальна в п'ятницю і суботу. За величиною ІХ можна судити про настання стомлення.

Мета моделювання

На основі аналізу індивідуальних біоритмів прогнозувати несприятливі дні, вибирати сприятливі дні для різного роду діяльності.

II етап. Розробка моделі **Інформаційна модель**

Об'єкт	Параметри	
	назва	значення
Людина	Дата народження	Початкові дані
	День відліку	Початкові дані
	Тривалість прогнозу	Початкові дані
	Кількість прожитих днів	Розрахункові дані
	Фізичний біоритм	Результати
	Емоційний біоритм	Результати
	Інтелектуальний біоритм	Результати

Зазначені цикли можна описати наведеними нижче виразами, в яких змінна х - кількість прожитих людиною днів:

Фізичний цикл $(x) = \sin\,(2px/23);$

Емоційний цикл $(x) = \sin\,(2px/28);$

Інтелектуальний цикл $(x) = \sin\,(2px/33).$

Комп'ютерна модель

Для моделювання обираємо середовище табличного процесора. У цьому середовищі інформаційна та математична моделі об'єднуються в таблицю, яка містить дві області: вихідні дані; розрахункові дані (результати).

Складіть комп'ютерну модель за наведеним зразком. Введіть в осередку вихідні дані, розрахункові формули:

Ячейка	Формула	
A9	=B5	(1)
A10	=A9+1	(2)
B9	=SIN(2*ПИ()*(A9–B4)/23)	(3)
C9	=SIN(2*ПИ()*(A9–B4)/28)	(4)
D9	=SIN(2*ПИ()*(A9–B4)/33)	(5)

Примітка. Зверніть увагу! У кожну формулу входить вираз (A9- B4), яке обчислює кількість днів, прожитих людиною. І хоча цей вислів містить посилання на комірки, в яких записані дати, середовище табличного процесора автоматично обчислює кожну дату як кількість днів, що пройшли з 1 січня 1900 року, а потім визначає різницю між ними. При записи формул використовувати вставку стандартних функцій SIN (...) і ПІ (...).

	A	B	C	D
1	Біоритми			
2				
3	вихідні дані			
4	дата народження	16.07.1984		
5	дата відліку	01.03.2019		
6	тривалість прогнозу	30		
7	результати			
8	Порядковий день	фізичне	емоційне	інтелектуальне
9	Формула 1	Формула 3	Формула 4	Формула 5
10	Формула 2			
11	Заповнити			
12				
13				

Дата заповнюється за форматом 00.00.0000. Якщо дата набрана правильно, то осередку автоматично буде присвоєно формат дата. Ознакою правильного набору дати є вирівнювання значення вправо.

Після чого отримаємо наступні результати.

8	Порядковий день	фізичне	емоційне	інтелектуальне
9	01.03.2019	-0,89	-0,78	0,97
10	02.03.2019	-0,73	-0,90	1,00
11	03.03.2019	-0,52	-0,97	0,99
12	04.03.2019	-0,27	-1,00	0,95
13	05.03.2019	0,00	-0,97	0,87
14	06.03.2019	0,27	-0,90	0,76

Та на основі цих результатів отримаємо наступну діаграму (див. рис.1.19).

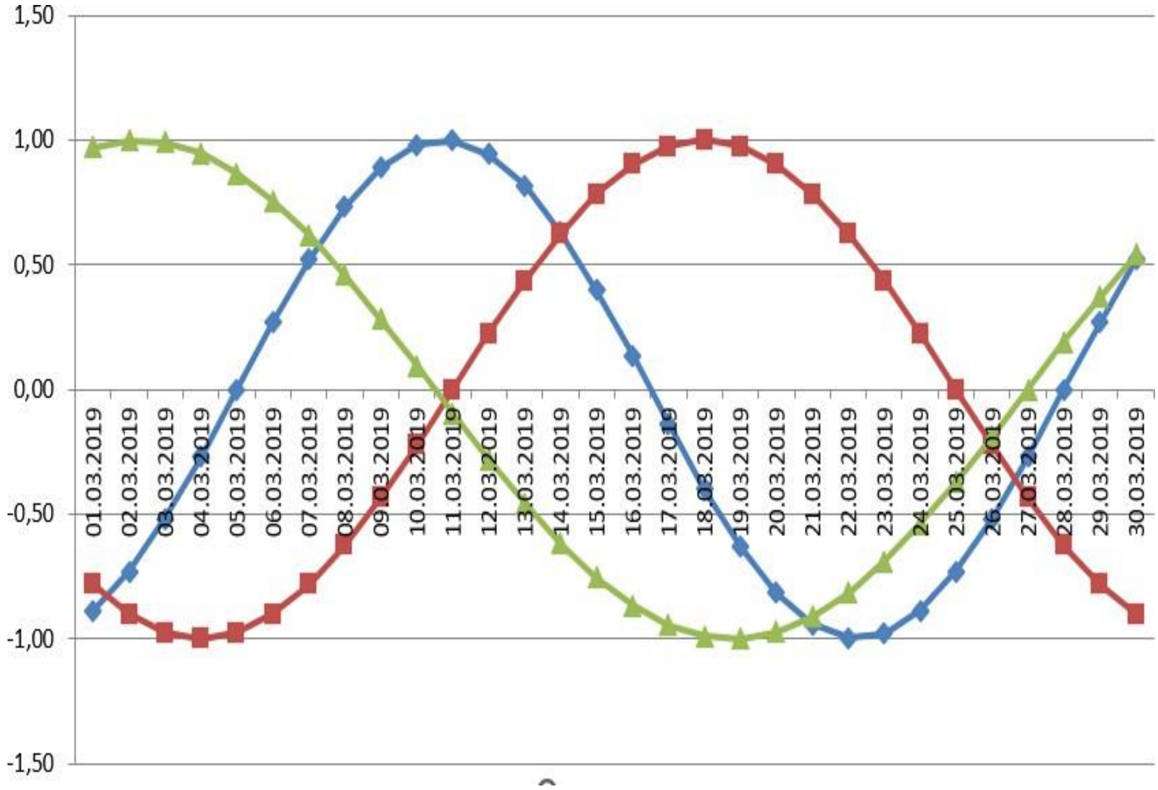


Рисунок 1.19 – Діаграма біоритмів

Контрольні питання:

1. На чому базується модель біоритмів людини?
2. Яка вбудована функція використовується для опису моделі біоритмів?
3. Які напівперіоди біоритмів описують спади і підйоми?
4. Яка формула використовується для опису емоційною складовою біоритму?
5. Які константи використовуються в чисельній моделі біоритмів людини?

Завдання:

1. На всі контрольні питання сформулювати відповіді.
2. Згідно свого номера у списку групи виконати задачу.
3. Оформити звіт.

1. Розрахувати власні біоритми.
2. а) Проаналізувавши діаграму, вибрати несприятливі для здачі заліку з фізкультури дні (поганий фізичний стан).

б) Обрати день для походу в цирк, театр або на дискотеку (емоційний стан гарне).

в) За кривої інтелектуального стану вибрати дні, коли відповіді на заняттях будуть найбільш / найменш вдалими.

г) Як ви думаєте, що буде показувати графік, якщо скласти всі три біоритми? Чи можна по такій кривій що-небудь визначити?

3. Сумісність людей по біоритмам.

Коли у двох людей збігаються або дуже близькі графіки по одному, двом або навіть усіх трьох біоритмів, то можна припустити досить високу сумісність цих людей.

Побудувати модель фізичної, емоційної та інтелектуальної сумісності двох друзів.

Лабораторна робота № 5

Тема: ***Розв'язання транспортної задачі***

Теоретичні відомості

Математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \to \min \qquad (1)$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ \ (i = \overline{1,m}), \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ \ (j = \overline{1,n}), \qquad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0 \ (\ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}), \qquad (4)$$

де xij – кількість продукції, що перевозиться від i-го постачальника до j- го споживача; cij – вартість перевезення одиниці продукції від i-го постачальника до j-го споживача; ai – запаси продукції i-го постачальника; bj – попит на продукцію j-го споживача.

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \, , \qquad (5)$$

то таку транспорту задачу називають збалансованою, або закритою. Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають незбалансованою або відкритою.

Планом транспортної задачі називають будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (2) – (4) транспортної задачі, який позначають матрицею $X = (x_{ij}) \ (i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n})$.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X*$, яка задовольняє умови задачі (2) – (4) і для якої цільова функція (1) набуває найменшого значення.

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \tag{5}$$

то таку транспорту задачу називають збалансованою, або закритою. Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають незбалансованою або відкритою.

Планом транспортної задачі називають будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (2) – (4) транспортної задачі, який позначають матрицею

$$X = (x_{ij})\ (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}).$$

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю X^*, яка задовольняє умови задачі (2) – (4) і для якої цільова функція (1) набуває найменшого значення.

Необхідною й достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її збалансованість, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,.$$

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, яку можна розв'язувати сиплекс-методом. Але специфічна структура транспортної задачі дає змогу використовувати для її розв'язування ефективніший метод, який повторює, по суті, кроки симплекс- алгоритму. Таким є метод потенціалів.

Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів:

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрита).
2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі.
3. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.
4. Якщо умова оптимальності виконується, то маємо оптимальний розв'язок транспортної задачі, і алгоритм зупиняється. Якщо ж умова оптимальності не виконується, необхідно перейти до наступного опорного плану.
5. Новий план знову перевіряють на оптимальність, тобто повторюють дії п. 3 і т.п.

Розглянемо докладно кожний етап цього алгоритму.

Якщо під час перевірки збалансованості (5) виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це виконується введенням фіктивного постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами $(\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i)$ із запасом

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів $(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j)$, то до закритого типу задача зводиться введенням фіктивного умовного споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції для фіктивного постачальника A_{m+1} або фіктивного споживача B_{n+1} вважається такою, що дорівнює нулю.

Для побудови початкового опорного плану транспортної задачі існує кілька методів: північно-західного кута, мінімальної вартості, подвійної переваги, апроксимації Фогеля. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції є рядками, а споживачі – стовпчиками.

Побудову першого опорного плану за методом північно-західного кута починають із заповнення лівої верхньої клітинки таблиці (x_{11}), в яку записують менше з двох чисел a_1 та b_1. Далі переходять до наступної клітинки в рядку або стовпчику і заповнюють її і т. п. Закінчують заповнювати таблицю в правій нижній клітинці.

Ідея методу мінімальної вартості полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілена вся продукції між постачальниками та споживачами.

Задача 1. Компанія контролює три фабрики A_1, A_2, A_3, здатні виготовляти 150, 60 та 80 тис. од. продукції щотижня. Компанія уклала договір із чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, B_4, яким потрібно щотижня відповідно 110, 40, 60 та 80 тис. од. продукції. Вартість виробництва й транспортування 1000 од.

продукції замовникам з кожної фабрики наведено в таблиці.

Фабрика	Вартість виробництва і транспортування 1000 од. продукції за замовниками			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити для кожної фабрики оптимальний план перевезення продукції до замовників, що мінімізує загальну вартість виробництва і транспортних послуг.

Побудова математичної моделі.

Нехай x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться з i-тої фабрики до j-го замовника $(i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4})$.

$(\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 290)$, то математична модель задачі матиме вигляд:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80.$$

Економічний зміст записаних обмежень полягає в тому, що вироблена на підприємствах продукція має вивозитися до замовника повністю.

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60,$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80.$$

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: продукція, що надходить до споживача, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:

Загальні витрати, пов'язані з виробництвом і транспортуванням продукції, складаються як добуток обсягу перевезеної продукції та питомої вартості перевезень за відповідним маршрутом і за умовою задачі мають бути мінімальними.

Тому

$$Z = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} +$$
$$+ x_{23} + 2x_{24} + 2x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 3x_{34} \rightarrow \min.$$

У цілому математичну модель поставленої задачі можна записати так:

$$Z \rightarrow \min,$$
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80, \\ x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Розв'язування. Розв'язування задачі подано в таблицях, які називають транспортними. Перший опорний план задачі побудуємо методом мінімальної вартості

A_i	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 110	4	2 $\boxed{2}$ +	5 40 –	$u_1 = 5$
$A_2 = 60$	5	3	1 60	2 0 +	$u_2 = 2$
$A_3 = 80$	2	1 40	4	2 40	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = -1$	$v_2 = -1$	$v_3 = -1$	$v_4 = 0$	

Тому $Z_1 = 4 \cdot 110 + 5 \cdot 40 + 1 \cdot 60 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 820$ ум.од.

Перший опорний план транспортної задачі вироджений, оскільки кількість заповнених клітинок у таблиці дорівнює п'яти, а $m + n - 1 = 6$.

Для подальшого розв'язування задачі необхідно в одну з порожніх клітинок записати «нульове перевезення» так, щоб не порушити опорності плану, тобто можна знайти будь-яку вільну клітинку, яка не утворює замкненого циклу. Наприклад, заповнимо клітинку $A2B4$. Тепер перший план транспортної задачі невироджений, і його можна перевірити на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складено систему рівнянь для визначення потенціалів плану:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4 \\ u_1 + v_4 = 5 \\ u_2 + v_3 = 1 \\ u_2 + v_4 = 2 \\ u_3 + v_2 = 1 \\ u_3 + v_4 = 2 \end{cases}$$

Записана система рівнянь невизначена, і один із її розв’язків дістанемо, якщо, наприклад, $v_4 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються так:

$$u_1 = 5,\ u_2 = 2,\ u_3 = 2,\ v_1 = -1,\ v_2 = -1,\ v_3 = -1.$$

Далі, згідно з алгоритмом методу потенціалів, перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ (для порожніх клітинок таблиці):

$A_1B_2 : u_1 + v_2 = 5 + (–1) =4;$
$A_1B_3 : u_1 + v_3 = 5 + (–1) = >2;$

$A_2B_1 : u_2 + v_1 = 2 + (–1) = 1 < 5$

$A_2B_2 : u_2 + v_2 = 2 + (–1) = 1 < 3;$

$A_3B_1 : u_3 + v_1 = 2 + (–1) = 1 < 2;$

$A_3B_3 : u_3 + v_3 = 2 + (–1) = 1 < 4.$

Умова оптимальності не виконується для клітинки A_1B_3.

Порушення $\Delta_{13} = (u_1 + v_3) - c_{13} = 4 - 2 = 2$ записуємо у лівому нижньому кутку відповідної клітинки.

Перший опорний план транспортної задачі неоптимальний. Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх клітинок таблиці.

Потрібно заповнити клітинку $A1B3$, в якій є єдине порушення умови оптимальності. Ставимо в ній знак «+». Для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл, починаючи з клітинки $A1B3$, та позначаємо вершини циклу почергово знаками «–» та «+». Тепер необхідно перемістити продукцію в межах побудованого циклу. Для цього у вільну клітинку $A1B3$ переносимо менше з чисел xij, які розміщуються у клітинках зі знаком «–». Одночасно це саме число xij додаємо до відповідних чисел, що знаходяться у клітинках зі знаком «+», та віднімаємо від чисел, що розміщаються у клітинках, позначених знаком «–».

У даному випадку min{60, 40} = 40, тобто minxij = 40. Виконавши перерозподіл продукції згідно з записаними правилами, дістанемо такі нові значення: клітинка $A1B3$ – 40 од. продукції, $A2B3$ – (60 – 40) = 20 од., $A2B4$ – (0 + 40) = 40 од. Клітинка $A1B4$ звільняється й у новій таблиці буде порожньою. Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписують у другу таблицю без змін. Кількість заповнених клітинок у новій таблиці також має відповідати умові невиродженості, тобто дорівнювати (n + m – 1).

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме такий вигляд:

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 - 110	4	2 40 +	5	$u_1 = 0$
$A_2 = 60$	5	3	1 – 20	2 40 +	$u_2 = -1$
$A_3 = 80$	2 1 +	1 40	4	2 40 –	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = 2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	

Тому:

$Z_2 = 4 \cdot 110 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 740$ ум. од.

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані раніше дії. Другий план транспортної задачі також неоптимальний (порушення для клітинки $A3B1$). За допомогою побудованого циклу виконаємо перехід до третього опорного плану транспортної задачі й дістанемо таку таблицю:

A_j	B_j				u_i
	B_1 = 110	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
A_1 = 150	4 90	4	2 60	5	$u_1 = 2$
A_2 = 60	5	3	1	2 60	$u_2 = 0$
A_3 = 80	2 20	1 40	4	2 20	$u_3 = 0$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 0$	$v_4 = 2$	

Тому:

$Z_3 = 4 \cdot 90 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 720$ ум. од.

$$X^* = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 40 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він оптимальний. Тому за оптимальним планом перевезень перший замовник отримує 90 тис. од. продукції з першої фабрики та 20 тис. од. продукції – з третьої. Другий споживач задовольняє свій попит за рахунок виробництва та перевезення 40 тис. од. продукції з третьої фабрики і т.п. При цьому загальна вартість виробництва й перевезення всієї продукції найменша і становить 720 ум. од.

Контрольні питання:

1. Постановка транспортної задачі.
2. Відкриті і закриті транспортні задачі.
3. Умова оптимальності опорного плану транспортної задачі.
4. Алгоритм розв’язання транспортної задачі.
5. Метод побудови опорних планів перевезень.
6. Фіктивні постачальники. Фіктивні споживачі.

Завдання:

Обрати варіант задачі згідно з порядковим номером у списку. Визначити оптимальний план поставленої транспортної задачі методом потенціалів.

Формат звіту. Оформити у текстовому редакторі. Звіт повинен мати, титульний лист (із зазначенням, навчального закладу, кафедри, номеру практичного заняття, теми, ПІБ та шифр групи).

Варіанти завдань:

Варіант 1

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & & & & & a_i \\
 & & 1 & 8 & 2 & 3 & 30 \\
C= & & 4 & 7 & 5 & 1 & 50 \\
 & & 5 & 3 & 4 & 4 & 20 \\
\end{array}
$$

b_i 15 15 40 30

Варіант 2

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & & & & & a_i \\
 & & 2 & 4 & 5 & 1 & 60 \\
C= & & 2 & 3 & 9 & 4 & 70 \\
 & & 3 & 4 & 22 & 5 & 20 \\
\end{array}
$$

b_i 40 30 30 50

Варіант 3

a_i

Варіант 4

Варіант 5

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & & & & & a_i \\
 & & 2 & 4 & 3 & 2 & 60 \\
C= & & 3 & 1 & 2 & 3 & 65 \\
 & & 5 & 4 & 1 & 5 & 70 \\
\end{array}
$$

b_i 40 60 70 25

Варіант 6

$$
\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & & 2 & 6 & 3 & 4 & 8 & 40 \\
C= & & 1 & 5 & 6 & 9 & 7 & 30 \\
 & & 3 & 4 & 1 & 6 & 10 & 35 \\
\end{array}
$$

b_i 20 34 16 10 15

Варіант 7

$$\begin{array}{ll} & a_i \\ C=\left\|\begin{matrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 2 \\ 7 & 1 & 5 & 7 \end{matrix}\right\| & \begin{matrix} 50 \\ 20 \\ 30 \\ 20 \end{matrix} \\ b_i \quad 40 \quad 30 \quad 35 \quad 15 & \end{array}$$

Варіант 8

$$\begin{array}{ll} & a_i \\ C=\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 & 1 \end{matrix}\right\| & \begin{matrix} 40 \\ 30 \\ 20 \end{matrix} \\ b_i \quad 30 \quad 25 \quad 18 \quad 20 & \end{array}$$

Варіант 9

$$\begin{array}{ll} & a_i \\ C=\left\|\begin{matrix} 10 & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 9 & 10 \\ 6 & 14 & 8 & 7 \end{matrix}\right\| & \begin{matrix} 40 \\ 25 \\ 35 \end{matrix} \\ b_i \quad 15 \quad 40 \quad 30 \quad 15 & \end{array}$$

Варіант 10

$$\begin{array}{ll} & a_i \\ C=\left\|\begin{matrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \end{matrix}\right\| & \begin{matrix} 50 \\ 40 \\ 20 \end{matrix} \\ b_i \quad 30 \quad 25 \quad 35 \quad 20 & \end{array}$$

Варіант 11

$$\begin{array}{ll} & a_i \\ C=\left\|\begin{matrix} 2 & 8 & 6 & 8 & 2 & 10 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 4 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{matrix}\right\| & \begin{matrix} 130 \\ 90 \\ 100 \\ 140 \end{matrix} \\ b_i \quad 110 \quad 50 \quad 30 \quad 80 \quad 100 \quad 90 & \end{array}$$

Варіант 12

$$\begin{array}{ll} & a_i \\ C=\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 9 & 7 \\ 3 & 40 & 15 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \\ 24 & 3 & 3 & 1 \end{matrix}\right\| & \begin{matrix} 60 \\ 55 \\ 40 \\ 35 \end{matrix} \\ b_i \quad 70 \quad 5 \quad 45 \quad 70 & \end{array}$$

Варіант 13

$$\begin{array}{ll} & a_i \\ C=\left\|\begin{matrix} 3 & 7 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 8 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 4 & 2 \end{matrix}\right\| & \begin{matrix} 30 \\ 5 \\ 45 \\ 70 \end{matrix} \\ b_i \quad 10 \quad 35 \quad 15 \quad 25 \quad 35 & \end{array}$$

Варіант 14

$$\begin{array}{ll} & a_i \\ C=\left\|\begin{matrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & 4 & 5 \end{matrix}\right\| & \begin{matrix} 20 \\ 20 \\ 40 \\ 45 \end{matrix} \\ b_i \quad 25 \quad 30 \quad 40 \quad 15 & \end{array}$$

Варіант 15

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{r} a_i \end{array} \\ C=\left\|\begin{array}{ccccc} 8 & 12 & 4 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 15 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 12 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right\| & \begin{array}{r} 60 \\ 40 \\ 100 \\ 50 \end{array} \end{array}$$

$$b_i \quad 30 \quad 80 \quad 65 \quad 35 \quad 40$$

Варіант 16

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{r} a_i \end{array} \\ C=\left\|\begin{array}{cccc} 18 & 2 & 9 & 7 \\ 30 & 4 & 1 & 55 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \end{array}\right\| & \begin{array}{r} 68 \\ 55 \\ 40 \end{array} \end{array}$$

$$b_i \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 16$$

Варіант 17

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{r} a_i \end{array} \\ C=\left\|\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{array}\right\| & \begin{array}{r} 20 \\ 16 \\ 14 \\ 11 \end{array} \end{array}$$

$$b_i \quad 16 \quad 18 \quad 12 \quad 15$$

Варіант 18

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{r} a_i \end{array} \\ C=\left\|\begin{array}{ccccc} 4 & 5 & 6 & 8 & 10 \\ 10 & 3 & 2 & 3 & 15 \\ 4 & 10 & 5 & 1 & 16 \end{array}\right\| & \begin{array}{r} 130 \\ 90 \\ 40 \end{array} \end{array}$$

$$b_i \quad 110 \quad 30 \quad 50 \quad 80 \quad 90$$

Варіант 20

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{r} a_i \end{array} \\ C=\left\|\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{array}\right\| & \begin{array}{r} 30 \\ 20 \\ 40 \\ 50 \end{array} \end{array}$$

$$b_i \quad 35 \quad 20 \quad 55 \quad 30$$

Варіант 19

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{r} a_i \end{array} \\ C=\left\|\begin{array}{cccc} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 8 \end{array}\right\| & \begin{array}{r} 45 \\ 35 \\ 70 \end{array} \end{array}$$

$$b_i \quad 20 \quad 60 \quad 55 \quad 45$$

Варіант 21

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{r} a_i \end{array} \\ C=\left\|\begin{array}{cccccc} 2 & 8 & 6 & 8 & 2 & 10 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 4 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right\| & \begin{array}{r} 130 \\ 90 \\ 100 \\ 140 \end{array} \end{array}$$

$$b_i \quad 110 \quad 50 \quad 30 \quad 80 \quad 100 \quad 90$$

Варіант 22

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{r} a_i \end{array} \\ C=\left\|\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right\| & \begin{array}{r} 20 \\ 20 \\ 40 \\ 45 \end{array} \end{array}$$

$$b_i \quad 25 \quad 30 \quad 40 \quad 15$$

Варіант 23

$$
C=\left\|\begin{matrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 8 \end{matrix}\right\| \begin{matrix} a_i \\ 45 \\ 35 \\ 70 \end{matrix}
$$

b_i 20 60 55 45

Варіант 24

$$
C=\left\|\begin{matrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 5 \end{matrix}\right\| \begin{matrix} a_i \\ 10 \\ 20 \\ 35 \\ 45 \end{matrix}
$$

b_i 25 30 40 15

Лабораторна робота № 6

Тема: *Розв'язування задач з прийняття рішень в умовах конфлікту*

Теоретичні відомості

У ринкових умовах часто виникають ситуації, які характеризуються розбіжностями у інтересах окремих суб'єктів господарювання, їх взаємною протидією, а також необхідністю врахування можливих дій суперників при розробці господарських рішень. Такі ситуації називають конфліктними.

Конфліктна ситуація – це ситуація, у якій стикаються інтереси двох чи більше сторін, що мають суперечливі цілі, причому виграш кожної зі сторін залежить від того, як поводитимуться інші

Отже, конфліктні ситуації можуть виникати з різних причин, що зумовлює необхідність розв'язання цих ситуацій за допомогою спеціальних методів. Якщо потрібно знайти найкраще рішення в умовах економічного конфлікту, доцільно скористатися положеннями теорії ігор.

Предметом теорії ігор *є* такі ситуації, у яких важливу роль відіграють конфлікти та спільні дії сформулюємо основні поняття теорії ігор, що використовуються в умовах конфлікту.

Гра – це спрощена формалізована модель реальної конфліктної ситуації. Математично формалізація означає, що розроблено певні правила дії сторін в процесі гри: варіанти дії сторін; результат гри при даному варіанті дії; обсяг інформації кожної сторони щодо поведінки інших сторін.

Гравець – одна зі сторін у конфліктній ситуації.

Результат гри називається ***виграшом, програшом*** або ***нічиєю.*** Зазвичай результати гри мають кількісне вираження.

Правила гри – перелік прав та обов'язків гравців.

Ходом називається вибір гравцем однієї з передбачених правилами гри дій і її здійснення. Ходи поділяють на особисті та випадкові. ***Особистий хід*** – це свідомий вибір гравця, ***випадковий хід*** – вибір дії, що не залежить від його волі.

Залежно від кількості можливих ходів у грі розрізняють скінченні та нескінченні ігри. ***Скінченні ігри*** передбачають скінченне число ходів (наприклад, гра "орел-решка"), ***нескінченні*** – навпаки (наприклад, встановлення цін на товар продавцем і покупцем). Деякі ігри в принципі мають вважатися скінченними, але мають так багато ходів, що належать до нескінченних (наприклад, шахи).

Стратегія гравця – це сукупність правил, що визначають вибір варіанту дій у кожному особистому ході.

Оптимальною стратегією гравця вважається стратегія, що забезпечує йому максимальний виграш. Завданням теорії ігор є виявлення оптимальної стратегії гравців.

Ігри, що складаються тільки з випадкових ходів, називаються ***азартними*** та не розглядаються в теорії ігор. Її метою є оптимізація поведінки гравця у ***стратегічних іграх***, в яких поряд з випадковими є особисті ходи.

Гра називається ***грою з нульовою сумою***, якщо сума виграшів всіх гравців дорівнює нулеві, тобто один гравець отримує виграш за рахунок програшу інших гравців. Гра називається ***парною,*** якщо в неї грають два гравці. Якщо в грі беруть участь більше двох гравців, гра називається ***множинною***. Парна гра з нульовою сумою називається ***антагоністичною***. Такі ігри найчастіше розглядаються у теорії ігор.

Теорія ігор виходить з того, що гравець та його супротивник є однаково розумними та зловмисними. Це означає, що кожний з гравців прагне забезпечити собі максимальний виграш, завдаючи збитків супротивнику.

Припускається, що у грі грають два гравці, наприклад гравець $\boldsymbol{A}$ та гравець $\boldsymbol{B}$. Себе зазвичай ототожнюють з гравцем $\boldsymbol{A}$. Якщо в $\boldsymbol{A}$ є от можливих стратегій: $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2 \ldots \boldsymbol{A}_m$, а в його супротивника B – $\boldsymbol{n}$ можливих стратегій: $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2 \ldots \boldsymbol{B}_n$. Така гра називається ***грою*** $\boldsymbol{m \times n}$.

Виграш гравця $\boldsymbol{A}$ за умови вибору ним стратегії $\boldsymbol{A},$ та стратегії супротивника $\boldsymbol{B_j}$ позначають як $\boldsymbol{a}_{ij}$. Кількість таких ситуацій дорівнюватиме $\boldsymbol{m \times n}$. Всі значення виграшів у грі можна звести у таблицю, яку називають ***платіжною матрицею або матрицею виграшів, матрицею гри.***

Кількість рядків у матриці відповідає кількості стратегій гравця $\boldsymbol{A}$, а кількість стовпців – кількості стратегій гравця $\boldsymbol{B}$. На перетині рядків і стовпців знаходяться виграші гравця ***A*** та, відповідно, програші гравця ***B***.

Зведення гри до матричної форми є досить складним, а іноді і нездійсненним завданням через незнання всіх можливих стратегій, їх значну кількість та складність оцінки виграшу, що свідчить про обмеженість можливостей теорії ігор при розв'язанні задач.

Оскільки скінченну парну гру з нульовою сумою можна представити у вигляді матриці, таку гру називають ***матричною.***

За загальним виглядом платіжні матриці (матриці виграшів) в умовах конфлікту та в умовах невизначеності й ризику є подібними. Відмінність полягає в тому, що в умовах конфлікту як розумні суперники (гравці) виступають свідомі суб'єкти управління, які будують свою стратегію відповідно до дій один одного; а в умовах невизначеності та ризику "суперником" суб'єкта управління є економічне середовище, протидія якого не є свідомою та яке не може реагувати на дії суб'єкта управління. Тому ігри, які відповідають конфліктним ситуаціям, називаються ***стратегічними*** ігри, що відповідають умовам невизначеності та ризику – ***статистичними.***

Аналіз платіжної матриці дозволяє розробити рекомендації щодо вибору оптимальних рішень гравців.

Оптимальні рішення гравців можуть бути визначені на основі чистих стратегій, якщо гра має сідлову точку. Отже, треба встановити наявність чи відсутність сідлової точки у грі та, виходячи з результатів, знайти рішення гри. Гравець ***A*** може обрати будь-яку з чистих стратегій аналогічно для гравця ***B*** $A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_m$.

Для визначення сідлової точки обчислюють нижню та верхню ціну гри.

Нижньою ціною *гри* називається елемент матриці, для якого виконується умова: $\alpha = max_i\ min_j\ \alpha_{ij}$.

Нижня ціна гри показує, що яку б стратегію не обрав гравець ***B***, виграш гравця ***A*** буде не менший, ніж ***a.*** Тобто гравець ***A*** обирає ***максимінну стратегію***.

Верхньою ціною гри називається елемент матриці, що задовольняє умові: $\beta = min_j\ max_i\ a_{ij}$.

Верхня ціна гарантує гравцю ***B***, що гравець ***A*** не отримає виграшу, більшого за β. Тобто гравець ***B*** обирає ***мінімаксну стратегію***.

Якщо $\alpha = \beta$, кажуть, що гра має сідлову точку, а елемент матриці, для якого виконується ця умова, називається ***сідловою точкою (елементом)***. У цій точці найбільший з мінімальних виграшів гравця ***A*** дорівнює найменшому з максимальних програшів гравця ***B***, тобто мінімум у будь-якому рядку матриці збігається з максимумом у будь-якому стовпці. Величина сідлового елемента називається ***чистою ціною гри***.

Отже, стратегії, що відповідають сідловій точці, дозволяють врахувати інтереси обох гравців. Оптимальним рішенням для обох гравців є вибір ***максимінної*** для ***A*** і ***мінімаксної*** для ***B*** стратегії. Обрані стратегії дозволяють гравцям діяти так, щоб за найгіршої поведінки супротивника отримати максимальний виграш. Будь-яке відхилення гравцями від цих стратегій буде невигідним для них.

В економічній практиці у більшості ігор сідлова точка у чистих стратегіях відсутня, що не дозволяє однозначно визначити оптимальні стратегії гравців. В таких випадках використовуються змішані стратегії, у яких випадковим чином чергуються особисті стратегії. Цей метод широко використовується в господарській практиці, що виражається у стратегії диверсифікації. Наприклад, виробники, не знаючи заздалегідь точних даних щодо попиту, прагнуть розширити асортимент продукції; інвестори вкладають кошти у різні цінні папери, проекти і т. д. Отже, гравці намагаються отримати максимальний виграш (мінімальний програш), застосовуючи не одну, а кілька стратегій.

Точний метод знаходження оптимальної змішаної стратегії зводиться до задачі лінійного програмування.

Змішана стратегія гравця – це повний набір застосування його чистих стратегій при багаторазовому повторенні гри в тих самих умовах із заданими ймовірностями.

Умови застосування змішаних стратегій:

– гра не має сідлової точки;

– гравці використовують випадкове поєднання чистих стратегій із заданими ймовірностями;

– гра багаторазово повторюється в подібних умовах;

– при кожному з ходів жоден гравець не інформований про вибір стратегії іншим гравцем;

– допускається осереднення результатів ігор.

При використанні змішаних стратегій використовують наступні основні положення.

Для гравця ***A*** змішана стратегія полягає в застосуванні чистих стратегій A_1, A_2, … , A_m з відповідними ймовірностями p_1, p_2, … , p_m, що позначається матрицею:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots , \mathrm{A}_m \\ p_1, p_2, \dots , p_m \end{pmatrix}, \tag{1}$$

за умови, що $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1, p_j \geq 0.$

Для гравця ***B***:

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_1, B, \dots , B_n \\ p_1, p_2, \dots , p_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

за умови, що $q_j = 0$, де q_j – ймовірність застосування чистої стратегії ***B***. В окремому випадку, коли $p_i = 1$, для гравця ***A*** маємо чисту стратегію:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots \ \mathrm{A}_i, \dots \mathrm{A}_m \\ 0, 0, \dots \ 1, \dots 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

Чисті стратегії гравця є єдино можливими неспільними подіями. У матричній грі при заданих векторах $\overline{p}$ і $\overline{q}$ можна визначити середній виграш гравця ***A***:

$$M(A, \bar{p}, \bar{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j, \tag{4}$$

де $\bar{p}$ і $\bar{q}$ – вектори відповідних ймовірностей;

p і q– компоненти цих векторів.

Шляхом застосування своїх змішаних стратегій гравець ***A*** прагне максимально збільшити свій середній виграш, а гравець ***B*** – мінімізувати виграш гравця ***A***. Гравець ***A*** прагне досягти виконання умови:

$$\beta = \min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} M(A, \bar{p}, \bar{q}). \tag{5}$$

Гравець ***B*** домагається виконання протилежної умови:

$$\alpha = \max_{\bar{p}} \min_{\bar{q}} M(A, \bar{p}, \bar{q}). \tag{6}$$

Вектори, що відповідають оптимальним змішаним стратегіям гравців ***A*** і ***B***, позначимо як $\bar{p}^0$ і $\bar{q}^0$. Для цих векторів виконується рівність:

$$\min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} M(A, \bar{p}, \bar{q}) = \max_{\bar{p}} \min_{\bar{q}} M(A, \bar{p}, \bar{q}) = M(A, \bar{p}^0, \bar{q}^0) \tag{7}$$

Ціна гри γ – середній виграш гравця ***A*** при використанні обома гравцями змішаних стратегій.

Розв'язком матричної гри є оптимальна змішана стратегія гравця ***A*** ($\bar{p}^0$); оптимальна змішана стратегія гравця ***B*** ($\bar{q}^0$) та ціна гри (γ).

Змішані стратегії будуть оптимальними ($\bar{p}^0$ і $\bar{q}^0$), якщо вони утворюють сідлову точку для функції $M(A, \bar{p}^0, \bar{q}^0)$, тобто

$$M(A, \bar{p}^0, \bar{q}^0) \geq M(A, \bar{p}^0, \bar{q}) \tag{8}$$

Основна теорема теорії ігор. Для матричної гри з будь-якою матрицею ***A*** величини $\alpha = \max_{\bar{p}} \min_{\bar{q}} M(A, \bar{p}, \bar{q})$ і $\beta = \min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} M(A, \bar{p}, \bar{q})$ існують, вони рівні між собою і дорівнюють ціні гри: $\alpha = \beta = \gamma$.

При виборі оптимальних стратегій гравцю ***A*** завжди буде гарантований середній виграш, не менший, ніж ціна гри, за будь-якої фіксованої стратегії гравця ***B*** (а для гравця ***B*** – навпаки).

Активними стратегіями гравців ***A*** і ***B*** називають стратегії, що входять до складу оптимальних змішаних стратегій відповідних гравців з ймовірностями, відмінними від нуля. Отже, до складу оптимальних змішаних стратегій можуть входити не всі апріорі задані їх стратегії.

Розглянемо окремий випадок розв'язання задач на основі змішаних стратегій. Найпростіша гра може бути описана матрицею 2 × 2. За відсутності сідлової точки можна отримати дві оптимальні змішані стратегії, які записуються так:

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1, A_2 \\ p_1, p_2 \end{pmatrix}; \tag{9}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_1, B_2 \\ p_1, p_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Отже, є платіжна матриця:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

При цьому

$$\begin{aligned} & a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \gamma \\ & a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \gamma \\ & p_1 + p_2 = 1 \\ & a_{11}p_1 + a_{21}(1 - p_1) = a_{12}p_1 + a_{22}(1 - p_1) \\ & a_{11}p_1 + a_{21} - a_{21}p_1 = a_{12}p_1 + a_{22} - a_{22}p_1 . \end{aligned}$$

Звідси одержуємо оптимальні значення p_1^0 та p_2^0.

$$p_1^0 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}; \tag{12}$$

$$p_2^0 = 1 - p_1 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}. \quad (13)$$

Знаючи p_1^0 та p_2^0, знаходимо γ:

$$\gamma = \frac{a_{11}(a_{22} - a_{21})}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})} + \frac{a_{21}(a_{11} - a_{12})}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}. \quad (14)$$

Обчисливши γ, знаходимо q_1^0 та q_2^0:

$$\begin{aligned} &a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \gamma \\ &q_1 + q_2 = 1 \\ &a_{11}q_1 + a_{21}(1 - q_1) = \gamma. \end{aligned}$$

$$q_1^0 = \frac{\gamma - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}; \quad (15)$$

$$q_2^0 = 1 - q_1^0 = \frac{a_{11} - \gamma}{a_{11} - a_{12}}, \text{ при } a_{11} \neq a_{12}. \quad (16)$$

Задачу розв'язано, оскільки знайдено вектори $\vec{q}^0 = \begin{pmatrix} q_1^0 \\ q_2^0 \end{pmatrix}$; $\vec{p}^0 = \begin{pmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \end{pmatrix}$ ціна гри γ. Це завдання можна розв'язати графічним методом, використовуючи наступний алгоритм:

– по осі абсцис відкладається відрізок одиничної довжини;

– по осі ординат відкладаються виграші при стратегії A_1,

– на лінії, паралельній осі ординат, у точці 1 відкладаються виграші при стратегії A_2;

– кінці відрізків позначаються для $a_{11} - b_{11}$, $a_{12} - b_{21}$; $a_{22} - b_{22}$; $a_{21} - b_{12}$ та проводяться прямі лінії $b_{11}b_{12}$ та $b_{21}b_{22}$;

– визначається ордината точки перетину проведених прямих ліній, яка позначається с. Висота перпендикуляру, опущеного з цієї точки на ось абсцис, дорівнює γ. Абсциса точки *C* дорівнює p_1 ($p_1 = 1 - p_2$).

Графічне зображення цього алгоритму наведено на рис. 2.16.

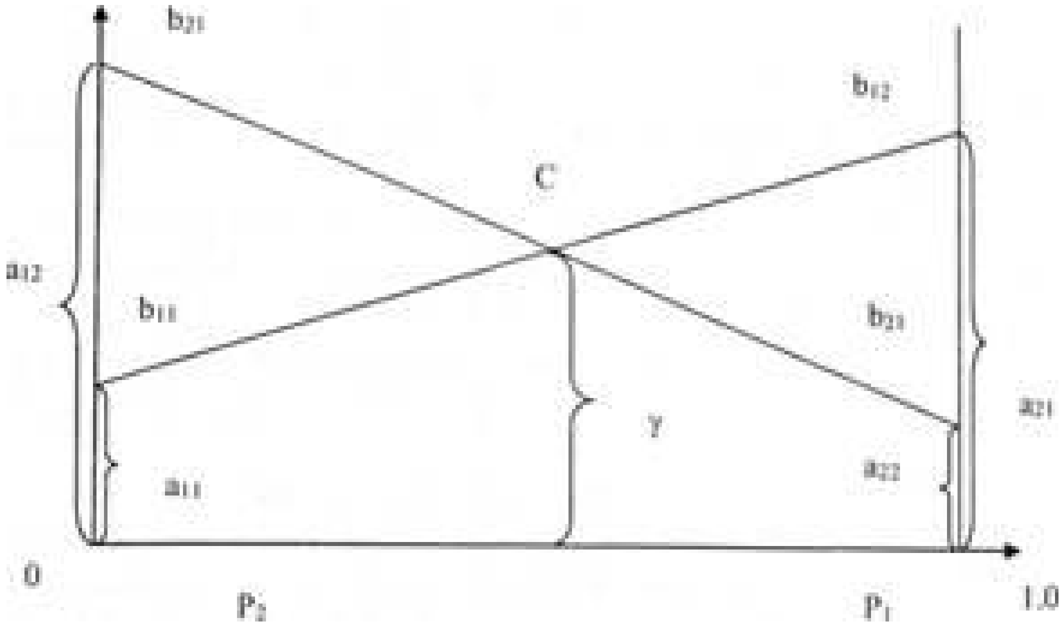


Рисунок 2.16 – Графічний метод знаходження оптимальної змішаної стратегії

Даний метод має досить широку сферу використання, що ґрунтується на загальній властивості ігор $m \times n$, яка полягає в тому, що у будь-якій грі $m \times n$ кожен гравець має оптимальну змішану стратегію, у якій кількість чистих стратегій не перевищує $\min(m,n)$. З цієї властивості випливає, що у будь-якій грі $2 \times n$ та $m \times 2$ кожна оптимальна стратегія S_1^* та S_2^* містить не більш двох активних стратегій. Отже, будь-яка гра $2 \times n$ або $m \times 2$ може бути зведена до гри 2×2 та розв'язана графічним методом. Якщо матриця скінченної гри має розмірність $m \times n$, де $m > 2$ і $n > 2$, то для визначення оптимальних змішаних стратегій використовується лінійне програмування симплекс методом.

Приклад вирішення задачі змішаних стратегій 2 x m Знайти рішення й ціну гри, заданою платіжною матрицею

$$p = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Рішення. Визначимо наявність сідлової точки.

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	3	2	7	4	2
A_2	2	4	3	3/2	3/2
β_j	3	4	7	4	

$\alpha = 2$, $\beta = 3$.

Таким чином, $\alpha \neq \beta$, отже сідлової точки задача не має.

Знайдемо оптимальну змішану стратегію $S_A(p_1, p_2)$ й ціну гри g графічним методом. Геометричний аналіз можливий, тому що маємо платіжну матрицю розмірності 2×4. Гравець ***A***, виходячи зі своїх інтересів зацікавлений виграти якнайбільше й тому буде прагнути одержати виграш, що перевищує ціну гри. При застосуванні гравцем У своїх чистих стратегій B_1, B_2, B_3 і B_4 це прагнення гравця ***A*** визначають такі обмеження:

$$\begin{cases} 3p_1 + 2p_2 \geq g, \\ 2p_1 + 4p_2 \geq g, \\ 7p_1 + 3p_2 \geq g, \\ 4p_1 + 3/2_2 \geq g. \end{cases} \qquad (*)$$

Відповідно, гравець У так само застосовує свої змішані стратегії $S_B(q_1,q_2, q_3,q_4)$, але прагнути, щоб величина програшу була якнайменше ціни гри, тобто

$$\begin{cases} 3q_1 + 2q_2 + 7q_3 + 4q_3 \leq g, \\ 2q_1 + 4q_2 + 3q_3 + 3/2q_4 \leq g \end{cases}. \qquad (**)$$

Побудуємо графіки прямих (*), заміняючи відповідні обмеження нерівності рівностями.

I $3p_1+2(1-p_1)=g$

$3p_1+2-2p_1=g$

$p_1+2=g$

p_1	0	1
g	2	3

II $2p_1+4(1-p_1)=g$

$-2p_1+4=g$

p_1	0	1
g	4	2

III $7p_1+3(1-p_1)=g$

$4p_1+3=g$

p_1	0	1
g	3	7

IV $4p_1+3/2(1-p_1)=g$

$5/2p_1+3/2=g$

p_1	0	1
g	3/2	4

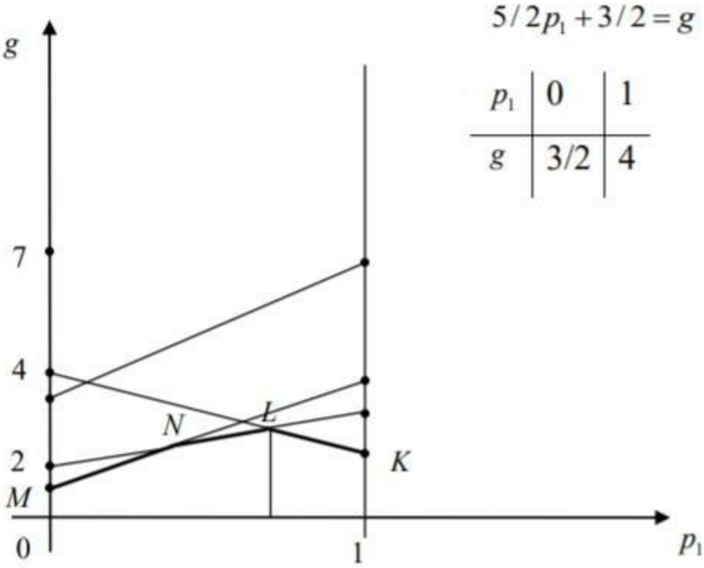


Рисунок 2.17 Графічний метод знаходження оптимальної змішаної стратегії

Нижня границя виграшу задається ламаної *MNLK*. Оптимальне рішення гри досягається в точці *L*. Знайдемо її координати. Точка *L* утворена перетинанням I й II прямих, (це означає, що оптимальна стратегія гравця ***B*** включає чисті стратегії B_1 й B_2 з імовірностями q_1 й q_2):

$$\begin{cases} p_1+2=g \\ -2p_1+4=g \end{cases}$$

$$3p_1-2=0$$

$$p_1\frac{2}{3}; \quad g=\frac{8}{3};$$

$$p_2=1-p_1=\frac{1}{3}$$

У такий спосіб оптимальна стратегія для гравця *A:* $S_A\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$, ціна гри $g=\frac{8}{3}$.

Аналогічно знаходимо оптимальну стратегію для гравця ***B*** з рівнянь (**).

Гравець ***B*** повинен ураховувати стратегії, які визначив гравець ***A*** в якості оптимальних. Це приводить до вибору гравцем ***B*** стратегій, що визначають його оптимальне рішення, тобто маємо $q_3 = 0$, $q_4 = 0$, отже

$$3q_1 + 2q_2 \le g$$

$$2q_1 + 4q_2 \le g, \text{ при цьому } q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1.$$

Будуємо графіки прямих, що відповідають нерівностям. Знаходимо координати точки перетинання:

$$3q_1 + 2(1 - q_1) = 2q_1 + 4(1 - q_1)$$

$$3q_1 + 2 - 2q_1 - 2q_1 - 4 + 4q_1 = 0$$

$$3q_1 = 2$$

$$q_1 = \frac{2}{3},\ q_2 = 1 - q_1 = \frac{1}{3}$$

Таким чином $S_B(2/3;1/3;0;0)$, $g = {}^{8}\!/_{3}$.

Завдання:

Оберіть варіант згідно списку групи. Та виконайте наступні завдання:

1. знайти і порівняти нижню і верхню ціну гри;
2. спростити дану платіжну матрицю, виключивши з неї домінуючі рядки і стовпці, що відповідають свідомо невигідним стратегіям гравців;
3. виявити активні стратегії гравців графічним методом.

Формат звіту. Оформити у текстовому редакторі. Малюнки оформити у графічному редакторі та перенести у текстовий документ. Звіт повинен мати, титульний лист (із зазначенням, навчального закладу, кафедри, номеру практичного заняття, теми, ПІБ та шифр групи).

Примітка. У завданні застосування графічного методу виявлення активних стратегій і наближення рішення можливо тільки після такого спрощення матриці, коли у одного з гравців залишається дві стратегії.

Рішення матричних ігор тим складніше, чим більше розмірність платіжної матриці. Тому для ігор з платіжними матрицями великої розмірності відшукання оптимального рішення можна спростити, якщо зменшити їх розмірність шляхом виключення дублюючих і свідомо невигідних (домінованих) стратегій.

Визначення 1. Якщо в платіжній матриці гри всі елементи рядка (стовпчика) дорівнюють відповідним елементам іншого рядка (стовпця), то відповідні цим рядкам (стовпцям) стратегії називаються дублюючими.

Визначення 2. Якщо в платіжній матриці гри всі елементи деякого рядка, що визначається стратегію A_i гравця A, не більш (менше або деякі рівні) відповідних елементів іншого рядка, то стратегія A_i називається **домінованою** (свідомо невигідною).

Визначення 3. Якщо в платіжній матриці гри всі елементи деякого стовпця, що визначає стратегію B_i гравця B не менше (більше або деякі рівні) відповідних елементів іншого стовпця, то стратегія B_i називається домінованою (свідомо невигідною).

Правило. Рішення матричної гри не зміниться, якщо з платіжної матриці виключити рядки і стовпці, що відповідають **дублюючим** і **домінованих** стратегіям.

Увага! Порівнюються між собою елементи.

Приклад

5 9 3 4 5

4 7 7 9 10

4 6 3 3 9

4 8 3 4 5

4 7 7 9 10

5 9 3 4 5

4 7 7 9 10

4 6 3 3 9

5 3

4 7

4 3

5 3

4 7

Завдання (варіанти):

1

1	3	9	4
8	9	9	3
0	5	5	1
5	8	4	2

2

4	9	9	7
1	2	7	1
2	5	4	7
5	9	2	8

3

5	3	2	7
1	7	2	6
6	8	4	9
1	5	5	8

4

6	9	4	2
5	1	0	5
7	3	1	8
4	0	0	1

5

6	1	0	4
3	6	5	8
6	5	4	6
9	8	4	7

6

5	0	7	5
0	6	1	1
0	8	4	3
5	1	7	8

7

9	9	8	6
5	8	3	6
5	7	2	8
9	7	2	9

8

1	5	0	6
7	5	6	5
5	1	5	2
5	8	4	8

9

1	2	3	2
5	0	2	2
1	4	7	7
7	3	9	7

10

8	8	4	7
4	3	4	3
2	5	0	0
4	9	5	3

11

5	6	0	7
1	1	6	5
4	8	9	8
1	4	6	8

12

7	1	7	9
9	4	2	4
5	3	0	0
6	4	1	4

13

0	1	6	5
1	8	9	5
6	9	4	6
0	4	9	0

14

4	9	9	8
2	4	7	3
7	7	3	2
2	5	4	3

17

5	4	9	9
1	1	4	4
9	6	8	1
4	0	7	1

18

1	4	5	4
5	6	8	3
3	5	5	7
6	9	8	4

19

2	7	6	2
8	5	4	8
3	4	0	1
2	4	4	2

20

6	9	2	7
0	5	0	6
2	8	0	7
4	8	9	5

21

6	5	3	2
4	6	2	3
7	1	6	0
7	6	4	5

22

1	9	7	0
0	1	0	3
8	9	8	2
0	4	1	4

23

3	5	8	1
9	3	8	7
8	0	2	5
1	3	6	0

24

7	6	2	5
3	1	2	0
4	5	3	1
2	5	1	3

25

2	6	7	9
7	3	8	5
3	1	8	5
6	9	7	9

26

9	6	4	8
5	0	4	0
4	0	8	5
7	1	3	8

27

0	1	4	4
1	0	1	0
3	8	4	8
6	2	6	7

28

2	3	9	7
2	6	0	8
5	7	2	5
7	9	3	8

Контрольні питання:

1. Що розуміють під оптимальною стратегією гравця?
2. Які умови застосування змішаних стратегій?
3. В чому сенс сідлової точки?
4. Розкрийте алгоритм графічного методу знаходження оптимальної змішаної стратегії.

Лабораторна робота № 7

Тема: *Моделювання задачі оптимального управління*

Теоретичні відомості

Для постачання населених пунктів, розташованих у важкодоступній місцевості, потрібно розмістити залізничну станцію і аеродром таким чином, щоб сумарна відстань (і, відповідно, вартість) повітряних перевезень від станції і від аеродрому до населених пунктів було оптимальним. Координати населених пунктів наведені в таблиці 2.5.

Таблиця 2.5

Координати населених пунктів

Номера населених пунктів	**Координати населених пунктів**	
	X	***Y***
1	2,0	8,0
2	10,0	9,0
3	1,0	2,0
4	4,0	9,0
5	9,0	5,0

Рішення.

З умови задачі випливає, що треба знайти оптимальне, з точки зору економії витрат на повітряні перевезення, місце розташування двох об'єктів: аеродрому і залізничної станції. Таке можливо, якщо сумарна протяжність повітряних трас між усіма об'єктами буде мінімальною. Як відомо, найкоротша відстань між двома точками визначається відрізком, що з'єднує ці точки. Для вирішення завдання введемо позначення (табл. 2.6).

Таблиця 2.6

Об'єкт	**Координата *X***	**Координата *Y***
Населений пункт №1	X_1	Y_1
Населений пункт №2	X_2	Y_2

Об'єкт	Координата *X*	Координата *Y*
Населений пункт №3	X_3	Y_3
Населений пункт №4	X_4	Y_4
Населений пункт №5	X_5	Y_5
Аеродром	X_A	Y_A
Залізнична станція	X_C	Y_C

Мінімальна відстань від залізничної станції до i-го населеного пункту ($i = 1, ..., 5$) через аеропорт можна визначити наступним чином:

$$F(X_A, Y_A, X_C, Y_C, X_i, Y_i)_i$$
$$= \sqrt{((X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2)} + \sqrt{((X_A - X_i)^2 + (Y_C - Y_i)^2)}$$

Завдання вирішуємо, використовуючи додаток Microsoft Excel і надбудову «Пошук рішення». Для моделювання необхідно підготувати таблицю в Excel:

1. За потреби введіть заголовки, вихідні значення координат населених пунктів (рис. 2.18)

A17

	A	B	C	D	E
1	Моделювання оптимального розташування аеродрому та залізничної станції				
2	Розташування населених пунктів				
3		координати			Відстань між аеродромом та населеними пунктами
4	Об'єкт, населений пункт	Х	У		
5	Населений пункт №1	2,0	8,0		
6	Населений пункт №2	10,0	9,0		
7	Населений пункт №3	1,0	2,0		
8	Населений пункт №4	4,0	9,0		
9	Населений пункт №5	9,0	5,0		
10					
11	Оптимальні координата об'єктів (аеродромам та залізничної станції)				
12	Аеродром				
13					
14	Залізнична станція				
15					
16	Оптимальна сумарна відстань від аеродрома до станції та всіх населених пунктів				

Рисунок 2.18 – Вихідні значення координат населених пунктів

2. У відповідні комірки таблиці 2.7 введіть розрахункові формули.

Таблиця 2.7

№	Адреса комірки	Зміст комірки (формула)
1	E5	=КОРЕНЬ((B12-B5)^2+(C12-C5)^2)
2	E6-E9	Скопіювати формулу з E5 в E6—E9
3	B16	=КОРЕНЬ((B14-B12)^2+(C14-C12)^2)+СУММ(E5:E9)

Комп'ютерне моделювання

1. Застосовуючи надбудову Excel «**Пошук рішення**», призначте як цільову комірку B16 і встановіть перемикач на мінімум. Вкажіть в якості змінюваних комірок осередки $ B $ 12: $ C $ 12; $ B $ 14: $ C $ 14 (координати аеродрому і станції).

2. Обмеження не вводите.

3. Натисніть кнопку Виконати.

4. Побудуйте діаграму, виберіть тип **Точкова**.

5. Проаналізуйте результат.

На основі отриманих даних моделювання можна зробити наступний висновок: моделювання, що проводиться в умовах, коли обмеження НЕ задані, призводить до збігу координат розташування залізничної станції і аеродрому. Це випливає і з простого аналізу розрахункової формули. Мінімальна відстань буде, коли координати об'єктів співпадатимуть. В реальних умовах такі об'єкти розташовуються на безпечній відстані один від одного, крім того, є і деякі технічні критерії забезпечення нормальних умов функціонування об'єктів.

Експеримент № 2.

Ускладнимо завдання. Введемо обмеження. Припустимо, що в зазначеному районі є озеро і проходить залізниця. Координати обмежують місце розташування аеродрому і станції, наведені в табл. 2.8.

Таблиця 2.8

Об'єкт	**Координата *X***	**Координата *Y***
Озеро	≥ 0 *и* ≤ 4	≥ 3 *и* ≤ 6
Залізна дорога	≥ 6	$= 1$

1. Встановіть курсор в осередок B16.

2. Введіть умови обмеження на розташування аеродрому і станції. Зокрема, візьміть до уваги, що аеродром не повинен перебувати всередині області, координат вказаних в табл. 4, а залізнична станція, навпаки, повинна знаходитися на залізниці.

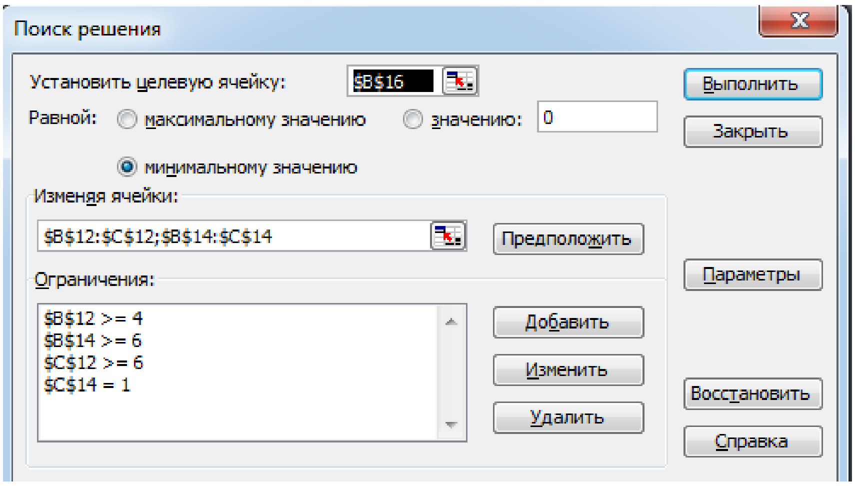
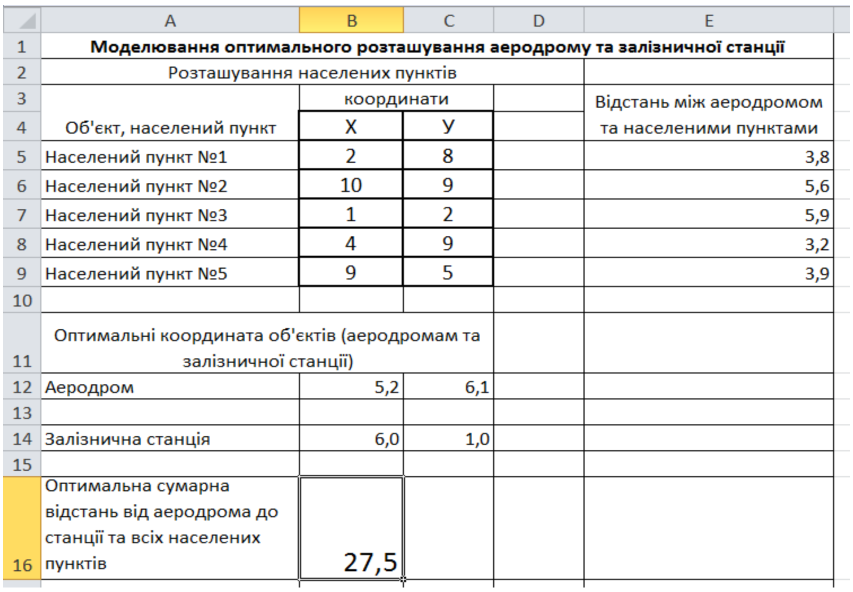


Рисунок 2.19 – Пошук рішень

3. Проведіть пошук рішення.



	A	B	C	D	E
1	Моделювання оптимального розташування аеродрому та залізничної станції				
2	Розташування населених пунктів				
3		координати			Відстань між аеродромом та населеними пунктами
4	Об'єкт, населений пункт	X	У		
5	Населений пункт №1	2	8		3,8
6	Населений пункт №2	10	9		5,6
7	Населений пункт №3	1	2		5,9
8	Населений пункт №4	4	9		3,2
9	Населений пункт №5	9	5		3,9
10					
11	Оптимальні координата об'єктів (аеродромам та залізничної станції)				
12	Аеродром	5,2	6,1		
13					
14	Залізнична станція	6,0	1,0		
15					
16	Оптимальна сумарна відстань від аеродрома до станції та всіх населених пунктів	27,5			

Рисунок 2.20 – Фрагмент робочого листа (після введення обмежень)

Завдання:

1. Обрати свій варіант згідно номера у списку.
2. За аналогією наведеного прикладу вирішити задачу моделювання задачі оптимального управління.

Варіант 1.

Для постачання населених пунктів, розташованих у важкодоступній місцевості, потрібно розмістити залізничну станцію і аеродром таким чином, щоб сумарна відстань (і, відповідно, вартість) повітряних перевезень від станції і від аеродрому до населених пунктів було оптимальним. Координати населених пунктів наведені в таблиці.

Номера населених пунктів	**Координати населених пунктів**	
	X	***Y***
1	3,0	8,0
2	13,0	7,0
3	1,0	2,0
4	4,0	9,3
5	9,0	7,0

Обмеження. Припустимо, що в зазначеному районі є озеро і проходить залізниця. Координати обмежують місце розташування аеродрому і станції, наведені в таблиці нижче.

Об’єкт	**Координата *X***	**Координата *Y***
Озеро	≥0 *и* ≤6	≥3 *и* ≤6
Залізна дорога	≥7	=1

Варіант 2.

Для постачання населених пунктів, розташованих у важкодоступній місцевості, потрібно розмістити залізничну станцію і аеродром таким чином, щоб сумарна відстань (і, відповідно, вартість) повітряних перевезень від станції і від аеродрому до населених пунктів було оптимальним. Координати населених пунктів наведені в таблиці.

Номера населених пунктів	**Координати населених пунктів**	
	X	***Y***
1	2,0	8,0
2	9,0	9,0
3	1,0	2,0
4	4,0	9,0
5	9,0	7,0

Обмеження. Припустимо, що в зазначеному районі є озеро і проходить залізниця. Координати обмежують місце розташування аеродрому і станції, наведені в таблиці нижче.

Об'єкт	**Координата *X***	**Координата *Y***
Озеро	≥ 0 *и* ≤ 5	≥ 3 *и* ≤ 6
Залізна дорога	≥ 6	$= 2$

Варіант 3.

Для постачання населених пунктів, розташованих у важкодоступній місцевості, потрібно розмістити залізничну станцію і аеродром таким чином, щоб сумарна відстань (і, відповідно, вартість) повітряних перевезень від станції і від аеродрому до населених пунктів було оптимальним. Координати населених пунктів наведені в таблиці.

Номера населених пунктів	**Координати населених пунктів**	
	X	***Y***
1	2,0	10,0
2	8,0	9,0
3	1,0	2,0
4	4,0	8,0
5	9,0	7,0

Обмеження! Припустимо, що в зазначеному районі є озеро і проходить залізниця. Координати обмежують місце розташування аеродрому і станції, наведені в таблиці нижче.

Об'єкт	**Координата *X***	**Координата *Y***
Озеро	≥0 *и* ≤7	≥3 *и* ≤8
Залізна дорога	≥6	=2

Варіант 4.

Для постачання населених пунктів, розташованих у важкодоступній місцевості, потрібно розмістити залізничну станцію і аеродром таким чином, щоб сумарна відстань (і, відповідно, вартість) повітряних перевезень від станції і від аеродрому до населених пунктів було оптимальним. Координати населених пунктів наведені в таблиці.

Номера населених пунктів	**Координати населених пунктів**	
	X	***Y***
1	2,0	10,0
2	8,0	9,0
3	2,0	4,0
4	4,0	8,0
5	11,0	9,0

Обмеження. Припустимо, що в зазначеному районі є озеро і проходить залізниця. Координати обмежують місце розташування аеродрому і станції, наведені в таблиці нижче.

Об'єкт	**Координата *X***	**Координата *Y***
Озеро	≥0 *и* ≤5	≥3 *и* ≤8
Залізна дорога	≥ 6	= 1

Варіант 5.

Для постачання населених пунктів, розташованих у важкодоступній місцевості, потрібно розмістити залізничну станцію і аеродром таким чином, щоб сумарна відстань (і, відповідно, вартість) повітряних перевезень від станції і від аеродрому до населених пунктів було оптимальним. Координати населених пунктів наведені в таблиці.

Номера населених пунктів	**Координати населених пунктів**	
	X	***Y***
1	3,0	12,0
2	8,0	9,0
3	2,0	4,0
4	5,0	9,0
5	11,0	9,0

Обмеження. Припустимо, що в зазначеному районі є озеро і проходить залізниця. Координати обмежують місце розташування аеродрому і станції, наведені в таблиці нижче.

Об’єкт	**Координата *X***	**Координата *Y***
Озеро	≥0 *и* ≤5	≥3 *и* ≤8
Залізна дорога	≥ 6	= 3

Варіант 6.

Для постачання населених пунктів, розташованих у важкодоступній місцевості, потрібно розмістити залізничну станцію і аеродром таким чином, щоб сумарна відстань (і, відповідно, вартість) повітряних перевезень від станції і від аеродрому до населених пунктів було оптимальним. Координати населених пунктів наведені в таблиці.

Номера населених пунктів	**Координати населених пунктів**	
	X	***Y***
1	1,0	9,0
2	8,0	9,0
3	3,0	5,0
4	5,0	9,0
5	10,0	8,0

Обмеження. Припустимо, що в зазначеному районі є озеро і проходить залізниця. Координати обмежують місце розташування аеродрому і станції, наведені в таблиці нижче.

Об'єкт	**Координата *X***	**Координата *Y***
Озеро	≥0 *и* ≤4	≥3 *и* ≤8
Залізна дорога	≥ 6	= 1

Варіант 7.

Для постачання населених пунктів, розташованих у важкодоступній місцевості, потрібно розмістити залізничну станцію і аеродром таким чином, щоб сумарна відстань (і, відповідно, вартість) повітряних перевезень від станції і від аеродрому до населених пунктів було оптимальним. Координати населених пунктів наведені в таблиці.

Номера населених пунктів	**Координати населених пунктів**	
	X	***Y***
1	2,0	9,0
2	9,0	9,0
3	4,0	5,0
4	5,0	9,0
5	10,0	8,0

Обмеження. Припустимо, що в зазначеному районі є озеро і проходить залізниця. Координати обмежують місце розташування аеродрому і станції, наведені в таблиці нижче.

Об'єкт	**Координата *X***	**Координата *Y***
Озеро	≥1 *и* ≤4	≥3 *и* ≤8
Залізна дорога	≥6	=1

Варіант 8.

Для постачання населених пунктів, розташованих у важкодоступній місцевості, потрібно розмістити залізничну станцію і аеродром таким чином, щоб сумарна відстань (і, відповідно, вартість) повітряних перевезень від станції і від аеродрому до населених пунктів було оптимальним. Координати населених пунктів наведені в таблиці.

Номера населених пунктів	**Координати населених пунктів**	
	X	***Y***
1	2,0	9,0
2	10,0	9,0
3	4,0	6,0
4	5,0	9,0
5	10,0	9,0

Обмеження. Припустимо, що в зазначеному районі є озеро і проходить залізниця. Координати обмежують місце розташування аеродрому і станції, наведені в таблиці нижче.

Об’єкт	**Координата *X***	**Координата *Y***
Озеро	≥0 *и* ≤4	≥3 *и* ≤8
Залізна дорога	≥5	=1

Варіант 9.

Для постачання населених пунктів, розташованих у важкодоступній місцевості, потрібно розмістити залізничну станцію і аеродром таким чином, щоб сумарна відстань (і, відповідно, вартість) повітряних перевезень від станції і від аеродрому до населених пунктів було оптимальним. Координати населених пунктів наведені в таблиці.

Номера населених пунктів	**Координати населених пунктів**	
	X	***Y***
1	3,0	9,0
2	12,0	9,0
3	4,0	6,0
4	5,0	9,0
5	11,0	9,0

Обмеження. Припустимо, що в зазначеному районі є озеро і проходить залізниця. Координати обмежують місце розташування аеродрому і станції, наведені в таблиці нижче.

Об'єкт	**Координата *X***	**Координата *Y***
Озеро	≥0 *и* ≤4	≥3 *и* ≤7
Залізна дорога	≥5	=1

Варіант 10.

Для постачання населених пунктів, розташованих у важкодоступній місцевості, потрібно розмістити залізничну станцію і аеродром таким чином, щоб сумарна відстань (і, відповідно, вартість) повітряних перевезень від станції і від аеродрому до населених пунктів було оптимальним. Координати населених пунктів наведені в таблиці.

Номера населених пунктів	**Координати населених пунктів**	
	X	***Y***
1	2,0	7,0
2	13,0	9,0
3	4,0	6,0
4	5,0	8,0
5	11,0	9,0

Обмеження. Припустимо, що в зазначеному районі є озеро і проходить залізниця. Координати обмежують місце розташування аеродрому і станції, наведені в таблиці нижче.

Об'єкт	**Координата *X***	**Координата *Y***
Озеро	≥0 *и* ≤4	≥3 *и* ≤5
Залізна дорога	≥7	=1

Лабораторна робота № 8

Тема: ***Засоби побудови трендів за допомогою електронних таблиць***

Теоретичні відомості

На основі попередньої практичної з прогнозування, необхідно розробити тренд.

Зауваження!!! Всі дані беремо з попередньої лабораторної роботи.

3. Побудувати часовий тренд і на основі нього розрахувати прогноз обсягів продажу препарату до кінця року.

3.1 Відкрити новий робочий аркуш і присвоїти йому ім'я „**Тренд**".

3.2 Скопіювати на робочий аркуш „Тренд" стовпчики A-D робочого аркуша „Прогноз продажу" з минулого практичного заняття. Поміняти місцями вміст стовпчиків C і D, щоб у стовпчику C знаходились номери періодів, а у стовпчику D – значення обсягів продажу.

3.3 За допомогою програми майстра діаграм побудувати графік зміни об'єму продаж у часі. Для цього:

- викликати програму-майстра діаграм;
- у першому вікні майстра обрати тип діаграми точкова і вид графіка – **Проста точкова діаграма**;
- перейти до другого кроку майстра (ЛК на кнопці далі);
- у вікні другого кроку задати у полі **Діапазон** C2:D19, який містить номери періодів і відповідні значення показника за попередні місяці (ввести діапазон з клавіатури або виділити його протягуванням на робочому аркуші), і перейти до третього кроку майстра;
- у вікні третього кроку майстра задати назву діаграми та її осей, а також встановити інші параметри діаграми (на власний розсуд), після чого перейти до четвертого кроку майстра;
- у вікні четвертого кроку майстра задати створення діаграми на тому ж робочому аркуші. В результаті на робочому аркуші буде побудовано графік залежності обсягу продаж від часу.

Зауваження. 1. Переміщення вмісту стовпчиків C і D необхідне для того, щоб надалі отримати правильне відображення часового ряду і правильний тренд. Точкова діаграма відображає пари значень як точки на площині у прямокутній системі координат, причому значення першого діапазону (першого зліва, якщо ряди даних містяться у стовпчиках, або зверху, коли ряди даних містяться у рядках) відображаються по осі абсцис, а другого – по осі ординат. Тому необхідно забезпечити саме таке розміщення даних в електронній таблиці.

4.5 Побудова лінії тренду можлива на основі і інших типів діаграм в прямокутній системі координат (**Графік**, **Гістограма**), але правильне відображення пар значень забезпечує саме точкова діаграма.

4.6 Побудувати на XY-діаграмі лінію поліноміального тренду 6-степеня, для чого:

- дати ПК на лінії діаграми, внаслідок чого з'явиться контекстне меню, або відкрити команду **Діаграма** головного меню програми;
- клацнути у меню, що з'являється (контекстному або випадаючому вертикальному), опцію **Добавити лінію тренду**, в результаті чого з'являється вікно програми-майстра трендів (рис.2.21);
- На сторінці **Тип діалогового вікна** обрати тип Лінії **Поліноміальна** та Встановити степінь полінома 6, після чого перейти до сторінки **Параметри** (дати ЛК на закладці **Параметри**) і встановити на ній прапорці **Показувати рівняння на діаграмі** і **Помістіть на діаграму величину вірогідності апроксимації**;
- На сторінці Тип діалогового вікна обрати тип Лінії Поліноміальна и Встановити степінь полінома 6, після чого перейти до сторінки Параметри (дати ЛК на закладці Параметри) і Встановити на ній прапорці Показувати рівняння на діаграмі и Помістіть на діаграму величину вірогідності апроксимації; - У вікні майстра на закладці Параметри у полі Назва апроксимуючої кривої обрати інше и задати назв апроксимуючої кривої "Поліном-6", у полі Прогноз задати побудову Лінії тренду вперед на 6 періодів (до кінця року);
- дати ЛК на командній кнопці ОК вікна **Лінія тренду**, після чого на робочому аркуші з'явиться графік тренду. А також рівняння тренду і значення коефіцієнта детермінації, який характеризує достовірність апроксимації;

- занести до протоколу графік лінії тренду, рівняння тренду і коефіцієнт детермінації R^2.

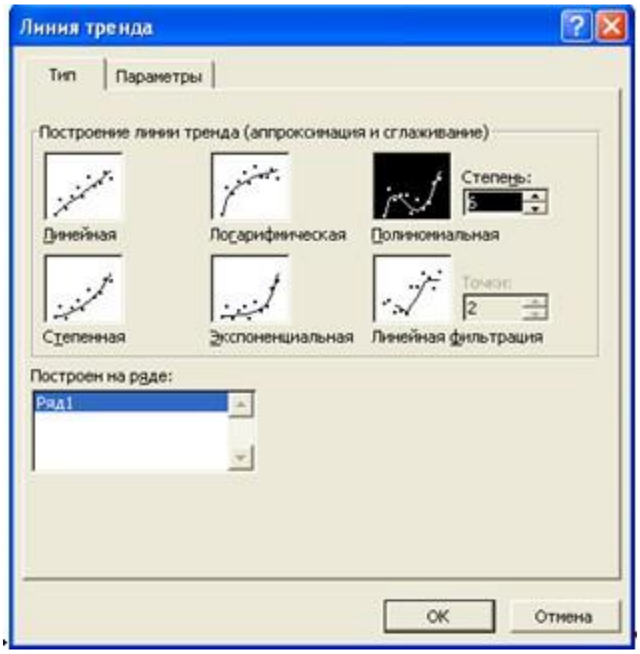


Рисунок 2.21 – Вікно майстра трендів

4.7 Аналогічно п.4.4 побудувати лінію поліноміального тренду 5-степеня та занести до протоколу його графік, рівняння і коефіцієнт детермінації R^2.

4.8 Порівняти отримані у п.4.4 і п.4.5 результати і зробити висновок.

Зауваження. Порівняння поліноміальних трендів 5-го і 6-го степенів показує, що поліном вищого степеню дає кращу апроксимацію наявних даних за попередні періоди. Але екстраполяція даних на їх основі дає протилежні результати: поліном 5-го степеню показує необмежене зростання, а поліном 6-го степеню – необмежене спадання показника.

Це показує, що поліноми добре підходять для інтерполяції даних, але мало придатні для екстраполяції, особливу на багато періодів, а також ілюструє важливість розуміння природи модельованого процесу при виборі виду тренду. Побудувати лінію експоненційного тренду і розрахувати прогноз об’ємів продажу препарату до кінця року за допомогою рівняння тренду. Для цього:

- Аналогічно побудові поліноміального тренду (п.п. 4.3-4.5) побудувати лінію експоненційного тренду и занести до протоколу його графік та рівняння;

- На робочому аркуші у комірку E19 ввести слово "**Прогноз**";
- У комірку E20 (7-й місяць) ввести Отриману формулу тренду за правилами MS Excel (формула буде такою: « = 155,46 * EXP (-0,0342 * C20)»;
- Скопіювати формулу з комірки E20 на діапазон E21: E25;
- Занести до протоколу результати та порівняти їх з попередніми зауваженнями.

1. Вибір найкращої лінії тренду зручніше виконувати шляхом їх безпосередню візуального порівняння, для чого потрібно швидко переходити від однієї лінії до іншої. Такий перехід може здійснюватись у майстрі трендів таким чином: дати ПК на лінії тренду, щоб викликати контекстне меню, або обрати лінію тренду и викликати команду **Виділена лінія тренду** з пункту **Формат** головного меню;

- У контекстного меню обрати команду **Формат лінії тренду**, яка викликає діалогове вікно **Формат лінії тренду**;
- У діалоговому вікні **Формат лінії тренду** Встановити потрібній тип тренду (закладка **Тип**) та його параметри (закладка **Параметри**). В результаті замість обраної буде побудовано нову лінію тренду.

2. Можлива побудова кількох ліній тренду на одній діаграмі. Для цього слід: на діаграмі вже побудованої **Лінії тренду** натиснути на лінії **Графіка Даних**, внаслідок чого з'являється контекстне меню, або скористатись відповіднім командами пункту **Діаграма** головного меню; у контекстному меню обрати опцію **Додати лінію тренду**, що викликає майстра трендів; виконати звичайну процедуру побудова **Лінії тренду**. В результаті на діаграмі відображається ще одна лінія тренду. Побудова на одній діаграмі кількох ліній тренду (більше 3) призводить до захаращення діаграми, тому будувати разом більше трьох ліній тренду не слід.

3. Виконати побудову ліній тренду усіх решти відвів, порівняти їх, враховуючи близькість до даних ряду и коефіцієнт детермінації. Зробити висновок. Побудувати лінію тренду за допомогою згладжування й дослідити її залежність від кількості точок даних, що враховуються при загладжувані.

3.1. За допомогою програми-майстра діаграм побудувати графік **Зміни об'єму продажів** у часі (XY-діаграму) (п.4.3).

3.2. Викликати програму-майстра трендів (п.4.4) і у його діалоговому вікні обрати тип тренду **Лінійна фільтрація**, кількість точок, що враховуються при згладжуванні, встановити рівним 4;

3.3. Змінити лінію тренду, збільшивши кількість точок до 6. Для цього натиснути на наявній **Лінії тренду** і в контекстному меню, що з'являється при цьому, обрати опцію **Формат лінії тренду**;

- У діалоговому вікні **Формат лінії тренду** збільшити кількість точок, що враховуються при згладжуванні, до 6, і клацнути кнопку ОК діалогового вікна;
- Проглянути **Отримання лінію тренду** и занести її до протоколу.

3.4. Змінити лінію тренду, збільшивши кількість точок до 10, і занести графік до протоколу.

3.5. Порівняти отримані лінії тренду й зробити висновок про вплив кількості точок, що враховуються при згладжуванні, на лінію тренду і прогноз за нею.

Контрольні питання:

1. Що таке тренд?
2. Які форми тренду підтримує MS Excel?
3. Записати рівняння лінійного тренду.
4. Записати рівняння експоненційного тренду.
5. Що таке згладжування, як і для чого воно використовується?
6. Що таке майстер трендів?
7. Які можливості надає майстер трендів MS Excel?
8. Описати процедуру побудови лінії тренду та розрахунку прогнозу?
9. Що таке коефіцієнт детермінації, що він характеризує?

Завдання:

Обрати варіант згідно номеру у списку. Побудувати часовий тренд і на основі нього розрахувати прогноз обсягів продажу препарату на наступні 5 років.

Варіант №1

	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Витрати виробництва, млн. грн. y_i	8,9	4,6	4,1	3,8	3,7	3,0	2,6	2,0

Варіант №2

	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Витрати виробництва млн. грн. y_i	9,2	6,8	5,1	4,8	4,7	4,0	2,6	1,0

Варіант №3

	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Витрати виробництва млн. грн. y_i	8,0	7,3	6,1	5,2	4,4	3,0	2,6	2,0

Варіант №4

	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Витрати виробництва млн. грн. y_i	7,8	6,6	4,5	3,8	3,7	3,0	2,6	3,0

Варіант №5

	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Витрати виробництва млн. грн. y_i	6,7	5,3	5,1	3,8	4,7	3,0	2,6	1,1

Варіант №6

	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Витрати виробництва млн. грн. y_i	8,5	7,2	6,1	3,8	3,7	3,0	2,2	2,0

Варіант №7

	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Витрати виробництва млн. грн. y_i	7,3	6,6	6,3	5,8	4,7	3,0	2,6	2,0

Варіант №8

	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Витрати виробництва млн. грн. y_i	9,0	8,8	7,1	5,8	3,7	3,9	3,6	2,0

Варіант №9

	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Витрати виробництва млн. грн. y_i	8,0	4,6	4,1	4,0	3,7	3,8	3,6	2,0

Варіант №10

	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Витрати виробництва млн. грн. y_i	8,5	7,6	6,1	4,8	3,7	3,6	2,6	2,0

Список рекомендованої літератури

Основна

1. Вовк Л. Б., Потапова К. Р. Системний аналіз: практикум. Електронне мережеве навчальне видання для здобувачів ступеня бакалавра (спец. 113 «Прикладна математика»). КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, 2025. 81 с. https://ela.kpi.ua/bitstreams/c505f846-1606-46f6-b6ea-b16328fa0fae/download
2. Угрин Д. І. Системний аналіз : навчальний посібник**.** Чернівці: Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2022. 242 с.
3. Ковбасюк С. В. Системологія. Системний аналіз та теорія прийняття рішень: навчальний посібник**.** Житомир: Житомирська політехніка, 2022.
4. Мазурок Т. Л. Системний аналіз : навчальний посібник**.** Одеса : ПНПУ ім. К. Д. Ушинського, 2022р.

Додаткова

1. Туленков М. В., Лобанова А. С., Яремчук С. С. Системний аналіз у соціології : підручник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2023. 508 с. URL: https://elibrary.kdpu.edu.ua/handle/123456789/7076
2. Романчук О. К. Системний аналіз у журналістиці: навчальний посібник. Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2023.
3. Мокін Б. І., Войцеховська О. О., Мокін О. Б. Системний аналіз процесу здобування знань в університетському середовищі : монографія. Вінниця: ВНТУ, 2024. 166 с. URL: https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/862
4. Савеленко О. К., Лисенко І. А., Іванченко О. О. CASE-технології у проектуванні інформаційних систем: навчальний посібник / Мін-во освіти і науки України, Центральноукраїн. нац. техн. ун-т. - Кропивницький: Видавець Лисенко В.Ф., 2018.- 240 с. https://dspace.kntu.kr.ua/handle/123456789/10278

Інформаційні ресурси

1. Теорія систем і системний аналіз https://er.chdtu.edu.ua/bitstream/ChSTU/986/1/%D0%A2%D0%A1%D0%86%D0%A1%D0%90_%D0%9D%D0%9F_%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%BA%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE.pdf

Методичне видання

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ
З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
“СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ”
для студентів денної та заочної форми навчання
за спеціальністю 122 “Комп’ютерні науки”

Укладач:

Лисенко Ірина Анатоліївна