

Міністерство освіти і науки України
Центральноукраїнський національний технічний університет

**МЕТОДИ СКЛАДАННЯ ТА СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗАННЯ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РУХУ ВАНТАЖНОГО ВІЗКА КРАНУ
(Частина I)**

Рекомендовано Вченою радою Центральноукраїнського національного технічного університету (протокол №9 від 29 травня 2023 року) як навчальний посібник для здобувачів спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» та спеціальності 192 «Промислове і цивільне будівництво»

Кропивницький
ЦНТУ
2023

Щербак О.В., Хачатурян С.Л., Єфименко О.В.

Методи складання та способи розв'язання диференціальних рівнянь руху вантажного візка крану (Частина I). – Кропивницький: ЦНТУ, 2023. – 99 с.

Розглянуто чотири методи (теорема про рух центру мас у поєднанні з динамікою відносного руху точки; метод кінетостатики; загальне рівняння динаміки; рівняння Лагранжа другого роду) складання диференціальних рівнянь руху вантажного візка крану на прикладі розрахункової моделі математичного маятника, точка підвісу котрого переміщується горизонтально. Наведені приклади їх розв'язання в різних програмних пакетах (Math LAB; Simulink; Mathcad).

ВСТУП

Даний методичний посібник багатоплановий, переслідує декілька цілей, які, доповнюючи одна одну, утворюють основу так званої методики «наскрізного» чи «спірального» навчання, «накручуючи» матеріал дисциплін професійної підготовки на стрижень спеціальності.

До компонентів професійної підготовки належить, зокрема, теоретична механіка, котра вивчається на другому курсі технічних університетів.

Ця навчальна дисципліна викликає у студентів певні труднощі, зумовлені, не в останню чергу, високим рівнем абстракцій, характерних для рівнянь, теорем, методів і принципів теоретичної механіки. Як результат – негативне ставлення до теоретичної механіки, що поглиблюється наразі до того ж недостатнім рівнем знань із шкільної програми математики. При вивченні на старших курсах спеціальних дисциплін, таких як «Підйомно-транспортні та транспортуючі машини», «Машини для земляних робіт», «Дорожні машини», студенти стикаються з іншою проблемою, викликаною як раз низьким рівнем знання основ теоретичної механіки, що призводить не тільки до великих часових витрат, але й є причиною багато чисельних помилок при виконанні ними курсових і кваліфікаційних робіт різного рівня.

Сучасні підйомно-транспортні машини (ПТМ) являють собою широку групу пристроїв, призначених для піднімання та переміщення різноманітних вантажів. Значна частина ПТМ (монорельсові візки, пересувні тельфери, мостові крани, козлові, порталні та напівпорталні крани та т. п.) мають візок з вантажем, який переміщується по стрілі крану (рис. 1, 2) або по несучій конструкції мосту (рис. 3).

У визначальних працях з динаміки ПТМ, таких як «Динамика грузоподъемных машин» Комарова М.С. (1962р.), «Динамика мостовых кранов» Казака С.А. (1968р.), «Динамика грузоподъемных кранов» Лобова Н.А. (1987р.) системі «візок-канат-вантаж» ставиться у відповідність двох масна система «візок-візок» (рис. 4). При цьому криволінійна траєкторія вантажу у відносному русі замінюється на прямолінійну траєкторію (інакше кажучи, дуга замінюється її хордою).

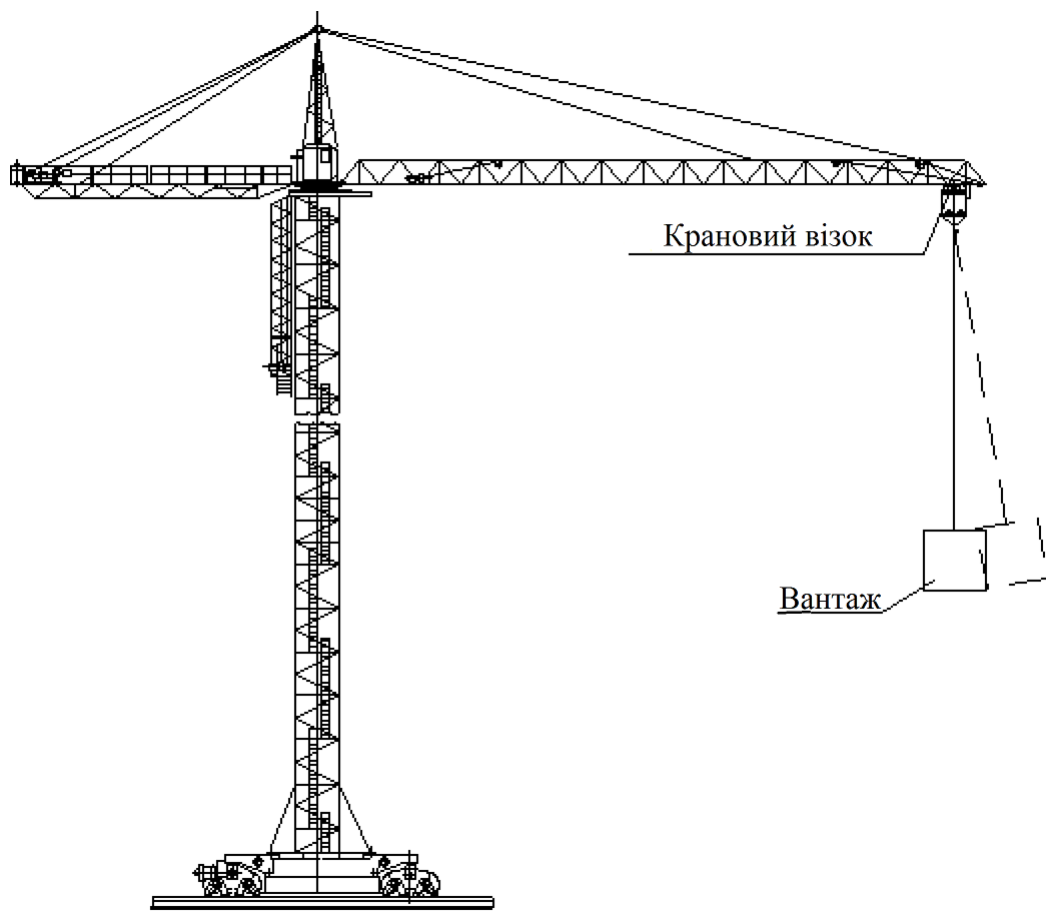


Рисунок 1 – Пересувний рельсовий кран

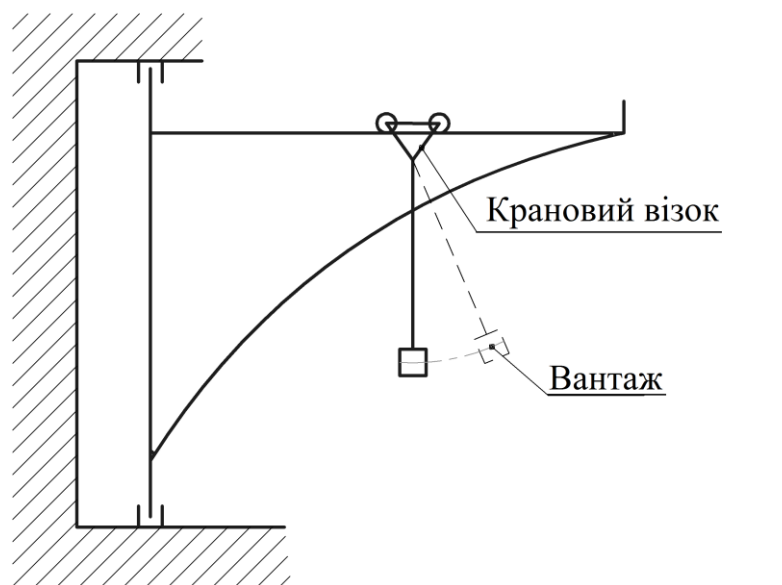


Рисунок 2 – Поворотний кран

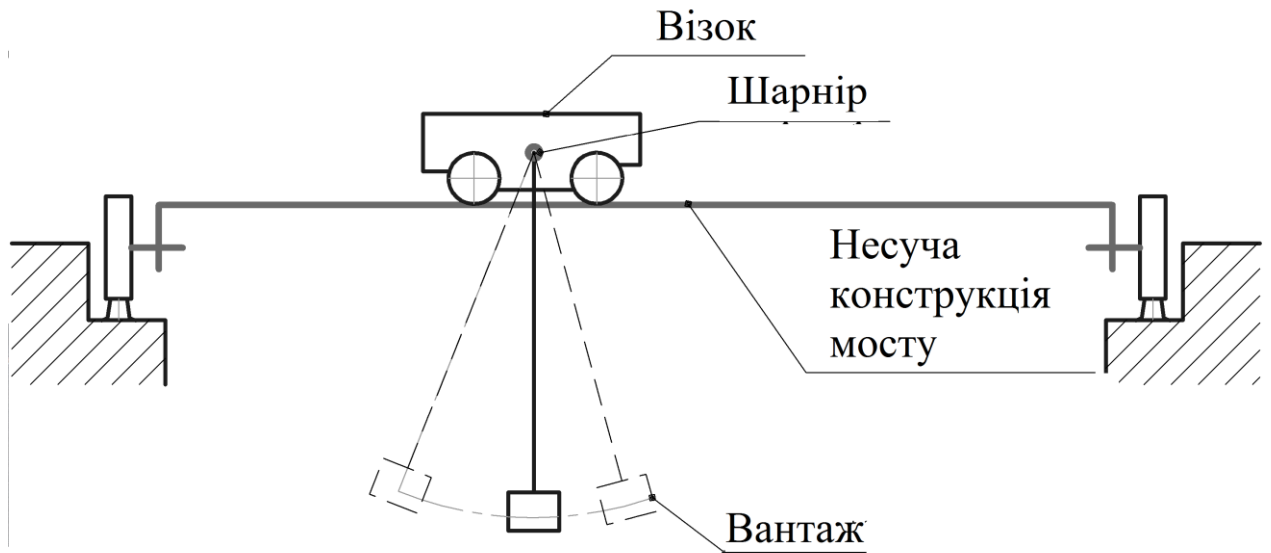


Рисунок 3 – Мостовий кран

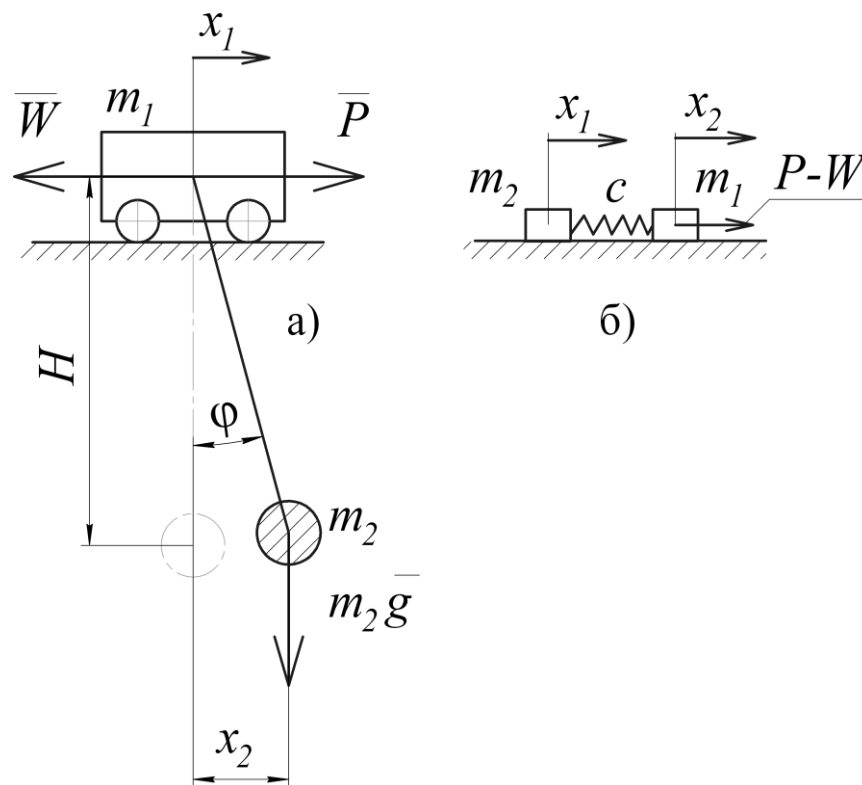


Рисунок 4 – Схеми маятникових коливань вантажу: а) – розрахункова; б) – аналогова

Розглядаючи фундаментальні дослідження, виконані на схемах двохмасних систем, відмітимо, що ці роботи відносяться до 1962, 1968, 1987 рокам, коли за відсутності персональних комп'ютерів дослідники були вимушені гранично спрощувати розрахункові схеми, розуміючи, що тим самим вносять «певну неточність», «втрачаючи» високочастотні коливання.

Наразі завдяки доступній обчислювальній техніці та програмним продуктам немає необхідності дугу розгойдування вантажу замінювати хордою, тим більше,

що довжина канату H в сучасних ПТМ на порядок, а то й два вище довжини канату, що використовувалась раніше (Н.А. Лобов приймав $H \leq 3m$).

Принципова відмінність схем *а)* і *б)* за рис. 4 полягає в тому, що двохмасна система за схемою 4, *б* дозволяє використати нескладний математичний апарат (другий закон Ньютона) й скласти *лінійні* диференціальні рівняння руху системи.

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c(x_1 - x_2) &= P - W \\ m_2 \ddot{x}_2 + c(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

де $\tilde{n} = m_{2g} / H$.

Схема за рис. 4, *а* приводить до *нелінійних* диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = F \\ l \ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi = g \sin \varphi \end{cases},$$

складання котрих різними методами є однією з цілей даного навчального посібника. Безумовно, математичний апарат при цьому значно ускладнюється, але уточнюється динамічна навантаженість елементів металоконструкцій і механізмів у періоди їх нестационарних рухів, динамічне діяння вантажу, що коливається, на кран або візок і т. д.

Розрахункова схема за рис. 4, *а* являє собою, як бачимо, схему математичного маятника, точка підвісу котрого переміщується.

Ця схема в абстрактному вигляді, тобто без конкретизації образу, який вона відображує, доволі часто використовується в теоретичній механіці, наприклад, для ілюстрації кінематики складного руху точки; розрахунку кінетичної енергії механічної системи з двома ступенями свободи; для демонстрації розрахунку узагальнених сил і т. д. Складний математичний апарат, слабка асоціація (точніше її повна відсутність) з майбутньою спеціальністю не створюють підґрунтя мотивації пізнання. Відмітимо ще й наступний факт, який також спонукав авторів даного навчального посібника до його розробки й створення. Викладені в даному посібнику методи складання диференціальних рівнянь для схеми рис. 4, *а* розглянуті в багатьох підручниках теоретичної механіки [1, 3, 5, 7÷11], але, по-перше, не в кожному підручнику всі чотири методи наводяться, а, по-друге, якщо й наводяться [5], то, як правило, метод викладається не повністю, а робиться

посилання на приклади, в яких розглядалися окремі етапи.

Таким чином, даний навчальний посібник має на меті досягнення таких цілей:

- розкрити особливості різних методів складання диференціальних рівнянь руху механічної системи з двома й більше ступенями свободи;
- обґрунтувати припущення, за яких математичний маятник з рухомою точкою підвісу може слугувати розрахунковою схемою системи «кран-візок-канат-вантаж»;
- як демонстраційну модель для кожного методу використовувати один і той же приклад – крановий візок з вантажем, який розгойдується;
- продемонструвати розв'язання отриманих диференціальних рівнянь за допомогою різних сучасних програмних продуктів.

У відповідності до поставлених цілей структура даного навчального посібника складається з двох частин.

У першій частині викладено чотири методи складання диференціальних рівнянь руху механічної системи з двома й більше ступенями свободи, що є найбільш універсальними:

- теорема про рух центру мас системи разом з динамікою відносного руху точки;
- принцип Д'Аламбера (метод кінетостатики);
- загальне рівняння динаміки;
- рівняння Лагранжа другого роду.

Викладення кожного методу містить:

- фрагменти теорії;
- методичу складання диференціальних рівнянь руху системи;
- приклад – «крановий візок, який переміщується з підвішеним вантажем» з обґрунтуванням розрахункової схеми, що приводиться до математичного маятника, точка підвісу котрого переміщується.

У навчальному посібнику наведено тест, складений у відповідності до рекомендацій МОН України, котрий сприяє перевірці знань від рівня «вірно»- «невірно» до рівня здібностей студента до аналізу і синтезу знань. Тест

складається з 80 тестових завдань по чотирьох розглянутих методах. До тесту наведені відповіді, що дозволить студенту здійснити самоконтроль рівня своїх знань:

0÷47 вірних відповідей – «незадовільно»;

48÷59 вірних відповідей – «задовільно»;

60÷71 вірних відповідей – «добре»;

72÷80 вірних відповідей – «відмінно».

Другу частину навчального посібника складають способи розв'язання отриманих диференціальних рівнянь з використанням програмних продуктів Simulink; MathLAB; Mathcad [12-15], які наразі мають найбільше розповсюдження та легко доступні.

Навчальний посібник розрахований на студентів других курсів технічних спеціальностей, а також здобувачів при вивченні динамічних процесів ПТМ і виконанні ними кваліфікаційних робіт освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр» і «Магістр». Воно може бути корисним і науковим співробітникам.

Навчальний посібник може бути рекомендований для використання при розробці методичних рекомендацій до курсових і лабораторних робіт з теоретичної механіки та ПТМ.

Навчальний посібник відповідає робочим програмам з теоретичної механіки, будівельної техніки та виробничої бази будівництва, ПТМ для студентів спеціальностей 133 «Галузеве машинобудування» і 192 «Будівництво та цивільна інженерія».

1. ТЕОРЕМА ПРО РУХ ЦЕНТРУ МАС. ДИНАМІКА ВІДНОСНОГО РУХУ ТОЧКИ

1.1. Фрагменти теорії

Теорема про рух центру мас

У механіці під матеріальною системою [3,5] (надалі, просто система) розуміють множину матеріальних точок, рухи яких взаємопов'язані.

Тверде тіло являє собою матеріальну систему, що складається з частинок, які утворюють тіло.

Масою m матеріальної системи називається сума всіх точок системи:

$$m = \sum m_k, \quad (1.1)$$

де m_k – маса матеріальної точки з номером k (кажуть: «маса k -ої матеріальної точки»);

n – число всіх точок системи.

Центром мас або центром інерції механічної системи називається геометрична точка C , радіус-вектор якої визначається рівністю (рис. 1. 1):

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_k \cdot \bar{r}_k}{\sum m_k}, \quad (1.2)$$

тобто точка C з Декартовими координатами

$$x_C = \frac{\sum m_k \cdot x_k}{m}, \quad y_C = \frac{\sum m_k \cdot y_k}{m}, \quad z_C = \frac{\sum m_k \cdot z_k}{m}. \quad (1.3)$$

Поняття «центр мас системи» може бути застосовано для будь-якої системи матеріальних точок, незалежно від того, чи знаходиться вона під дією будь-яких сил чи ні. Поняття «центр ваги» застосовується лише для твердого тіла чи системи твердих тіл, які знаходяться в однорідному полі сил ваги. Відмітимо, що положення центру ваги твердого тіла не змінюється відносно точок тіла. Якщо ж система складається з матеріальних точок, які переміщуються одна відносно іншої, то положення центру мас системи відносно точок може змінюватися.

Теорема про рух центру мас: центр мас матеріальної системи рухається як матеріальна точка, маса котрої дорівнює масі матеріальної системи й до котрої прикладено всі зовнішні сили, що діють на точки системи:

$$m \cdot \bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e. \quad (1.4)$$

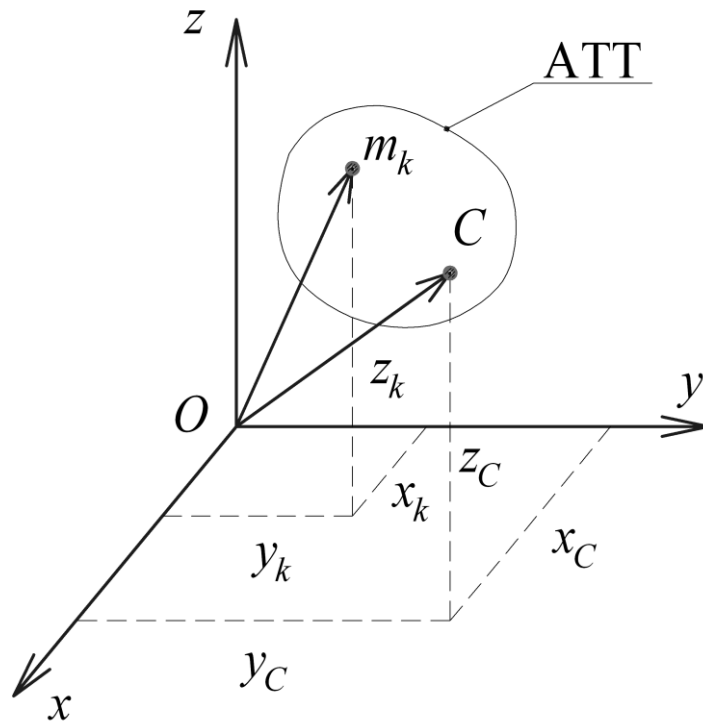


Рис.1.1

У проекціях на Декартові координатні осі теорема руху центру мас має вигляд:

$$m \cdot \ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \quad m \cdot \ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e, \quad m \cdot \ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e. \quad (1.5)$$

Відмітимо, що рух центру мас матеріальної системи залежить від зовнішніх сил, прикладених до даної системи. У формулюванні теореми внутрішні сили відсутні. Вони лише опосередковано впливають на рух центру мас. А оскільки внутрішні сили системи, як правило, невідомі, то їх відсутність лише сприяє розв'язанню задачі.

Сфера використання теореми про рух центру мас системи охоплює розв'язання як прямої, так і оберненої задач динаміки.

Динаміка відносного руху точки

У динаміці розрізняють інерційні та неінерційні системи відліку [3]. Інерційна система відліку – це деяка умовно нерухома система координат. До інерційної системи координат відноситься й система координат, яка переміщується прямолінійно та рівномірно. У подальшому обидва випадки будемо називати як «нерухома» система координат.

В інерційній (нерухомій) системі координат виконується другий закон Ньютона:

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F}, \quad (1.6)$$

де $\bar{F}$ – активні сили та реакції зв'язків, які діють на точку.

Доволі часто розв'язання технічних задач вимагає дослідження руху матеріальних об'єктів відносно до рухомої системи координат, яка, в свою чергу, може бути чи інерційною, чи неінерційною. Як відомо з кінематики, рух об'єкту відносно до рухомої системи координат називається відносним рухом. Під «об'єктом» будемо розуміти матеріальну точку, зводячи, таким чином задачу до динаміки відносного руху точки.

Для того, щоб скласти диференціальне рівняння відносного руху матеріальної точки в формі другого закону Ньютона, необхідно до діючих на точку активних сил і реакціям зв'язків умовно приєднати переносну $\tilde{O}_a$ і Коріолісову $\tilde{O}_{e\dot{a}}$ сили інерції. Рівняння динаміки відносного руху точки має вигляд:

$$m\bar{a}_r = \Sigma \bar{F}_k + \tilde{O}_a + \tilde{O}_{e\dot{a}}, \quad (1.7)$$

де $\bar{a}_r$ – відносне прискорення (прискорення точки відносно рухомих осей).

Вектори переносної $\tilde{O}_a$ та Коріолісової $\tilde{O}_{e\dot{a}}$ сил інерції являють собою поправки на неінерційність рухомої системи координат.

Вектор переносної сили інерції дорівнює:

$$\tilde{O}_e = -m\bar{a}_e; \quad (1.8)$$

вектор Коріолісової сили інерції:

$$\tilde{O}_{e\dot{a}} = -m\bar{a}_{e\dot{a}}. \quad (1.9)$$

Сила інерції завжди спрямована в бік, протилежний відповідному прискоренню.

Для розрахунку переносної та Коріолісової сил інерції необхідно спочатку розрахувати переносне прискорення та прискорення Коріоліса. Нагадаємо, що прискорення Коріоліса дорівнює:

$$\bar{a}_{e\dot{a}} = 2[\bar{\omega}_e \cdot \bar{V}_r],$$

де $\bar{\omega}_a$ – кутова швидкість рухомої системи відрахунку відносно нерухомої системи відрахунку;

$\bar{V}_r$ – відносна швидкість точки.

1.2. Методика та приклад складання диференціальних рівнянь руху з використанням теореми про рух центру мас у поєднанні з динамікою відносного руху точки

Метод складання диференціальних рівнянь руху механічної системи [5], що розглядається, ґрунтується на використанні теореми про рух центру мас механічної системи та динаміки відносного руху. Вони незалежні одна від одної, тому не має значення послідовність їх використання.

Метод доцільно використовувати до механічної системи, що має один або два ступеня свободи. Якщо механічна система має більше число ступенів свободи, то раціонально використовувати рівняння Лагранжа другого роду (див. параграф 1. 4 даного посібника).

Методика використання теореми про рух центру мас механічної системи полягає в такому:

- 1) провести осі нерухомої (інерційної) системи координат;
- 2) за формулами (1. 3) скласти вирази для координат центру мас системи. Отримані вирази двічі продиференціювати;

3) зобразити на рисунку всі зовнішні сили $\bar{F}_k^e$ (активні та реакції зв'язків), які діють на точки механічної системи. Спроектувати сили на осі проведеної системи координат;

4) вирази, отримані за пунктами 2 і 3, підставити відповідно в ліві та праві частини рівнянь (1. 5), сформувавши тим самим теорему про рух центру мас механічної системи.

Так як до зовнішніх сил відносять і реакції зв'язків, то вони ввійдуть у складені диференціальні рівняння. Величини реакцій зв'язків невідомі, тому необхідно скласти ще диференціальні рівняння (за числом невідомих реакцій зв'язків), щоб виключити з диференціальних рівнянь руху реакції зв'язків. Цього можна досягти, використовуючи динаміку відносного руху.

Методика використання динаміки відносного руху точки полягає в такому:

- 1) зобразити нерухому (інерційну) систему координат, відносно котрої рухається тверде тіло;

2) зобразити рухому систему координат, зв'язавши її жорстко з твердим тілом. Рух цього твердого тіла буде для матеріальної точки переносним рухом, а рух матеріальної точки відносно до цього твердого тіла – відносним;

3) розглянути відносний рух точки: зобразити на рисунку сили $\bar{F}_k^e$ – активні сили, що діють на точку, та реакцію зв'язку (чи її складові) з боку твердого тіла;

4) додати до цих сил переносну силу інерції $\bar{O}_a$ чи її складові $\bar{O}_a^n$ і $\bar{O}_a^\tau$, а також Коріолісову силу інерції $\bar{O}_{\text{êîð}}$. Нагадаємо, що направляти сили інерції потрібно протилежно відповідним прискоренням. Записати вирази для сил інерції;

5) використовуючи 1. 7, скласти диференціальне рівняння (одне чи декілька) відносного руху та приєднати його (їх) до диференціальних рівнянь, отриманих за теоремою про рух центру мас. Для механічної системи з двома ступенями свободи число диференціальних рівнянь руху повинно дорівнювати двом, і вони не повинні містити реакції зв'язків.

Загальне правило при складанні диференціальних рівнянь руху механічної системи: всі точки механічної системи потрібно зображувати в проміжних положеннях, які відповідають позитивним координатам.

З метою інтегрування отриманих диференціальних рівнянь руху задаються початкові умови руху механічної системи.

Задача.

Скласти диференціальні рівняння руху кранового візка з вантажем при нерухомій стрілі (рис. 1. 2) або по нерухомому мосту (рис. 1. 3).

Розв'язання.

Створимо розрахункову схему кранового візка, що переміщує вантаж на канаті:

- канат (не важливо одна гілка чи дві) приймаємо за абсолютно нерозтяжний (кажуть «абсолютно жорсткий») невагомий стержень довжиною l , до якого прикріплено вантаж;

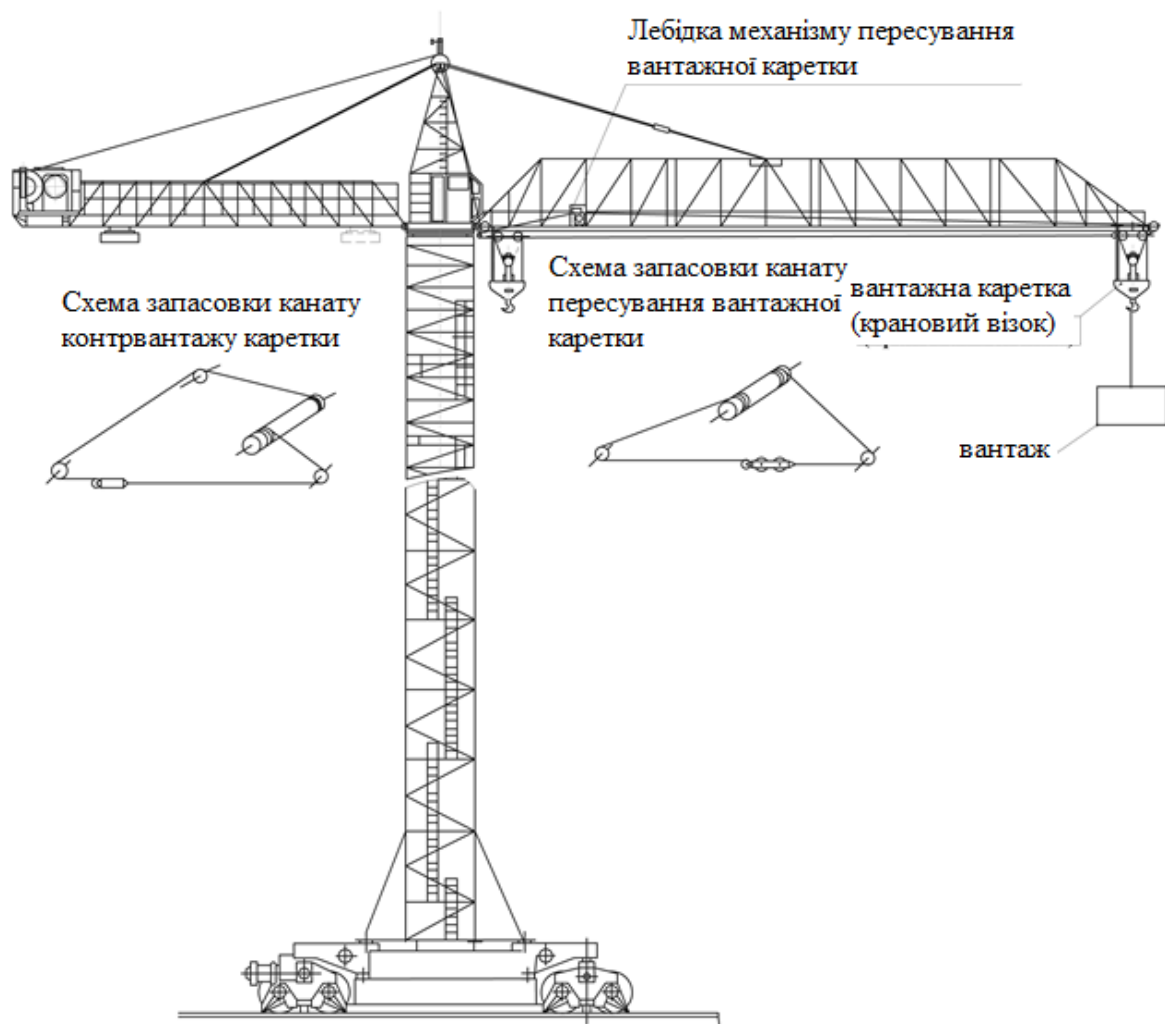


Рис.1.2

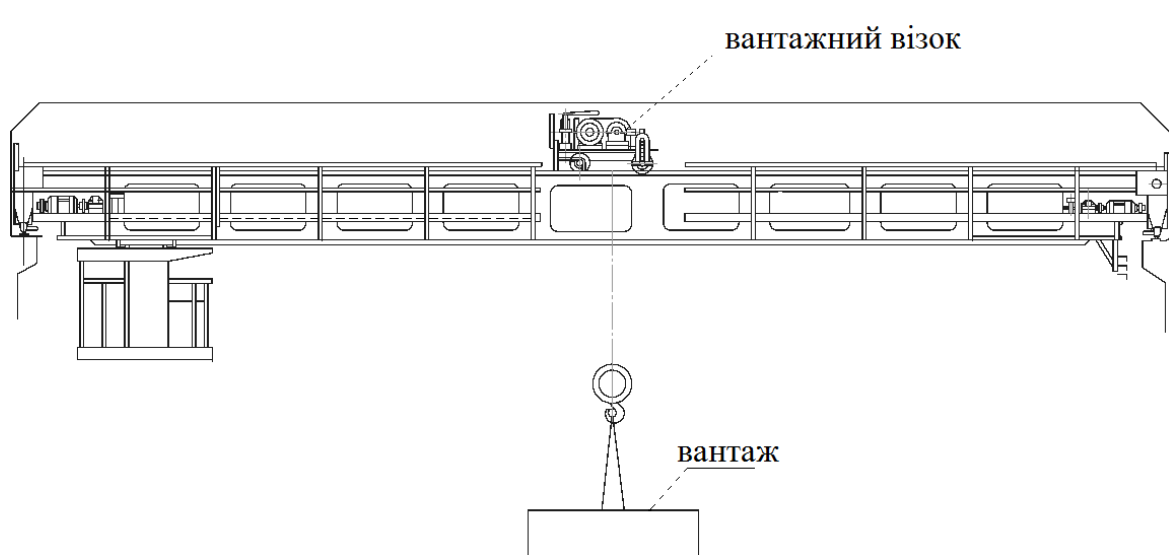


Рис.1.3

- розміри вантажу не враховуємо й розглядаємо його як матеріальну точку з масою m_2 , яка дорівнює масі вантажу;

- візок приймаємо за повзун масою m_1 , який рухається по горизонтальній нерухомій площині (стріла крану чи міст).

Таким чином, отримана така розрахункова схема: математичний маятник B масою m_2 коливається навколо горизонтальної осі, що проходить перпендикулярно до площини рисунку через центр ваги повзуна A масою m_1 (рис. 1. 4).

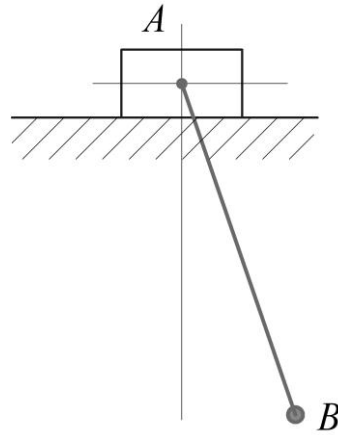


Рис.1.4

Використовуємо теорему про рух центру мас механічної системи.

1. Проведемо осі Ox і Oy нерухомої (інерційної) системи координат, зв'язавши їх жорстко з стрілою крану (рис. 1. 5, а).

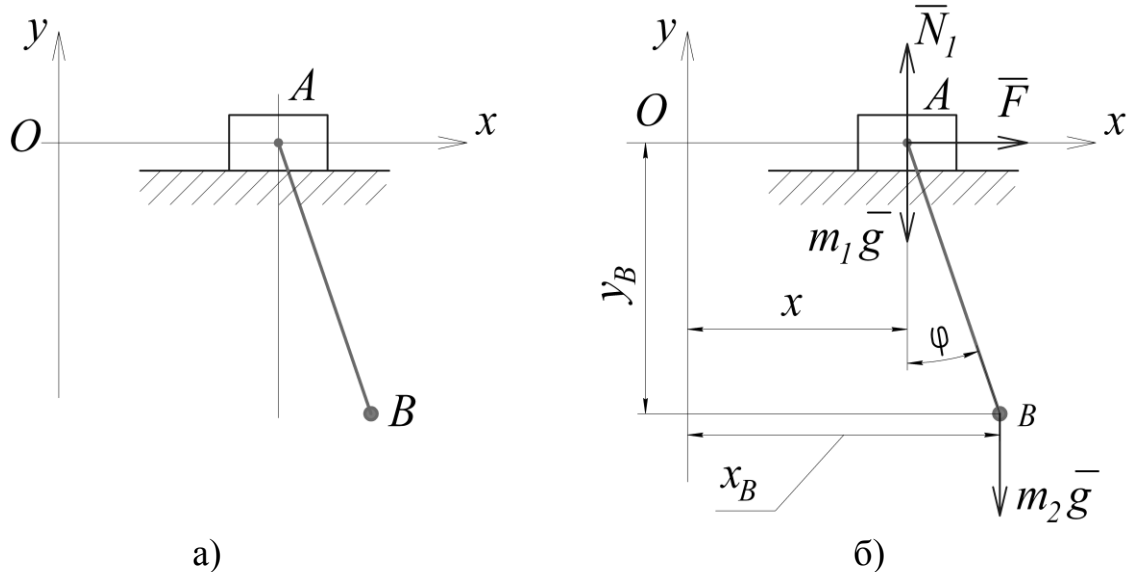


Рис.1.5

2. Складемо за (1. 3) вираз для координат центру мас цієї системи.

Для цього запишемо спочатку координати повзуна A та вантажу B , тобто координати точок A і B :

$$x_1 = x_A = x; \quad x_2 = x_B = x + l \cdot \sin \varphi \quad (1.10)$$

$$y_1 = y_A = 0; \quad y_2 = y_B = x + l \cdot \cos \varphi, \quad (1.11)$$

де x – координата, що визначає положення повзуна A ;

φ – кут, який визначає відхилення маятника (канату) від вертикалі.

Після цього за формулами (1. 3) записуємо координати центру мас даної системи:

$$x_C = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^2 m_k x_k = \frac{1}{m} (x_1 m_1 + x_2 m_2)$$

і підставляємо в даний вираз (1. 10), при цьому отримуємо

$$x_C = \frac{1}{m} (x \cdot m_1 + (x + l \sin \varphi) \cdot m_2).$$

Аналогічно знаходимо координату y_C , використовуючи (1. 11):

$$y_C = \frac{1}{m} (y_1 m_1 + y_2 m_2) = \frac{1}{m} (0 \cdot m_1 + y_2 \cdot m_2),$$

тобто

$$y_C = \frac{m_2}{m} (-l \cos \varphi).$$

Таким чином, координати центру мас даної системи записуються у вигляді:

$$\begin{cases} x_C = \frac{1}{m} (x \cdot m_1 + (x + l \cdot \sin \varphi) \cdot m_2) \\ y_C = -\frac{m_2}{m} \cdot l \cdot \cos \varphi \end{cases}, \quad (1.12)$$

де $m = m_A + m_B = m_1 + m_2$ – маса всієї системи.

Для виконання подальших дій перепишемо (1. 12) у вигляді:

$$\begin{cases} m x_C = (m_1 + m_2) \cdot x + m_2 \cdot l \cdot \sin \varphi \\ m y_C = -m_2 \cdot l \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad (1.13)$$

Виконаємо диференціювання за часом лівої та правої частин кожного рівняння (1. 13):

$$m \dot{x}_C = (m_1 + m_2) \cdot \dot{x} + m_2 \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi; \quad m \dot{y}_C = m_2 \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi.$$

Отримані вирази диференціюємо за часом ще один раз і отримуємо:

$$\begin{cases} m \ddot{x}_C = (m_1 + m_2) \cdot \ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ m \ddot{y}_C = m_2 l \ddot{\varphi} \sin \varphi + m_2 l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \end{cases}. \quad (1.14)$$

3. Зображуємо на рисунку всі зовнішні сили (рис. 1. 5, б): $m_1 \bar{g}$ – вага повзуна A ; $\bar{F}$ – сила, що діє на повзун (фізичний зміст її поки що не уточнюємо);

$m_2 \bar{g}$ – вага маятника (вантажу); $\bar{N}_1$ – реакція горизонтальної площини (тобто реакція стріли).

Запишемо суми проекцій зовнішніх сил на осі x і y :

$$\sum F_{kx}^e = F; \quad \sum F_{ky}^e = N_1 - m_1 g - m_2 g. \quad (1.15)$$

4. Скористаємося теоремою про рух центру мас системи. Для цього в лівій частині рівнянь (1. 5) підставимо вирази (1. 14), а в правій частині – вирази (1. 15). отримаємо систему диференціальних рівнянь:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = F \quad (1.16)$$

$$m_2 l \ddot{\varphi} \sin \varphi + m_2 l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi = N_1 - m_1 g - m_2 g. \quad (1.17)$$

Аналізуючи отриману систему диференціальних рівнянь, відмічаємо, що рівняння (1. 17) містить реакцію N_1 , величина котрої невідома. Реакцію N_1 можемо знайти, за необхідності, з виразу (1. 17), але лише після того, як буде складена система диференціальних рівнянь відносно перемінних x і φ , яка не містить реакції зв'язку N_1 .

З метою виключення реакції N_1 , скористаємося динамікою відносного руху: представимо рух точки B як складний, вважаючи її рух навколо осі A відносним, а поступальний рух повзуна A – переносним рухом.

1. Проведемо нерухому (інерційну) систему координат $Ox_0y_0z_0$, зв'язавши її, як і раніше, з горизонтальною прямою, по якій рухається повзун A , рис. 1. 6, а.

2. Рухому (неінерційну) систему координат $Ax_1y_1z_1$ жорстко зв'яжемо з повзуном A (рис. 1. 6, а).

Бачимо, що переносний рух, тобто рух рухомої системи координат, є поступальним і прямолінійним рухом.

3. Розглянемо відносний рух.

Кут φ визначає положення маятника AB відносно повзуна A (рис. 1. 6).

До маятника прикладені зовнішні сили $m_2 \bar{g}$ – вага точки B ; $\bar{x}_A$ і $\bar{y}_A$ – складові реакції осі A (нагадаємо, що стержень AB – невагомий).

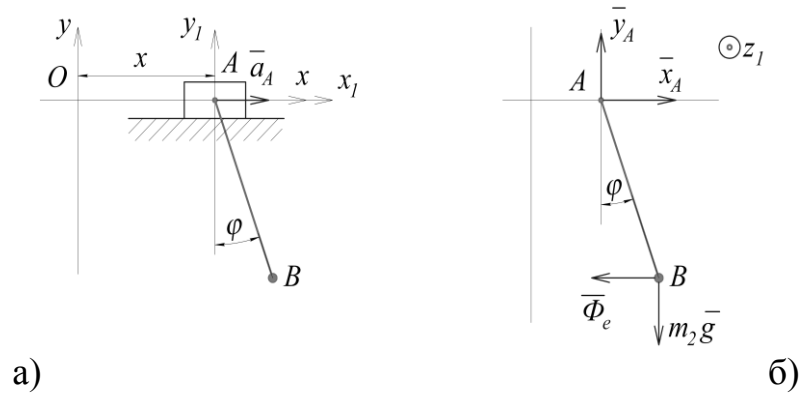


Рис.1.6

4. Додамо до цих сил сили інерції, приклавши їх у точці B . Переносний рух, як уже відмічалось, є поступальним, тому кутова швидкість повзуна $\omega_e = 0$. Це означає, що й прискорення Коріоліса $\bar{a}_{\text{еі}\delta}$ також дорівнює нулю. Отже, і Кориолісова сила інерції дорівнює нулю, тобто $\bar{O}_{\text{еі}\delta} = -m_2 \bar{a}_{\text{еі}\delta} = 0$. У подальшому покладемо, що прискорення повзуна A спрямоване в позитивний бік осі Ox (рис. 1. 6, а). Сила інерції в переносному поступальному прямолінійному русі буде спрямована в протилежний бік $\bar{O}_e = -m_2 \bar{a}_A$ і прикладена в точці B , рис. 1. 6, б. Величина її дорівнює

$$\hat{O}_e = m_2 a_A = m_2 \ddot{x} \quad (1.18)$$

5. Складаємо диференціальне рівняння відносного руху маятника.

Відносний рух маятника – це його зворотно-коливальний рух у площині рисунку навколо точки A . Тому диференціальне рівняння складаємо в формі моментів відносно осі A :

$$J_A \ddot{\varphi} = \sum M_{z1}(\bar{F}_k^e) + \sum M_{z1}(\bar{\Phi}_k)$$

або

$$J_A \ddot{\varphi} = -m_2 g l \sin \varphi - \Phi_e l \cos \varphi, \quad (1.19)$$

де J_A – момент інерції точки B відносно точки A , він дорівнює $J_A = m_2 l^2$

(нагадаємо, що стержень AB – невагомий).

Потім, у рівняння (1. 19) підставимо момент інерції J_A і силу інерції $\hat{O}_e$ за (1. 18) і запишемо рівняння:

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} = -m_2 g l \sin \varphi - m_2 \ddot{x} l \cos \varphi,$$

котре перетворимо (скоротимо на m_2 і l) і остаточно отримаємо:

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi = -g \sin \varphi. \quad (1.20)$$

Це рівняння вже не містить реакцію зв'язку N_1 .

Рівняння (1. 16) і (1. 20) утворюють систему диференціальних рівнянь, які перепишемо разом:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = F \\ l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi = -g \sin \varphi \end{cases} \quad (1.21)$$

Система диференціальних рівнянь (1. 21) описує рух кранового візка, котрий несе на нерозтяжному канаті вантаж, розрахунковою схемою якого є математичний маятник з рухомою точкою підвісу.

У залежності від конкретної постановки задачі сила F може бути або силою опору руху візка, або рушійною силою, чи пружною силою пружини при наїзді кранового візка на пружний упор, або сумою цих сил.

2. ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА (МЕТОД КІНЕТОСТАТИКИ)

2.1. Фрагменти теорії

У динаміці існує такий метод розв'язання задач, при котрому поряд з силами, прикладеними до даного об'єкту та які надають цьому об'єкту прискорення, враховуються також і *сили*, з якими даний матеріальний об'єкт протидіє тілам, які надають йому прискорення [3,5,9]. Ці *сили* називаються *силами інерції*.

Вектор $\bar{\Phi}_k$ сили інерції точки дорівнює за модулем *добутку* маси точки та її прискорення:

$$|\bar{\Phi}| = m \cdot |\bar{a}| \quad (2.1)$$

і направлений *протилежно* вектору прискорення цієї точки:

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}. \quad (2.2)$$

Якщо до кожної точки матеріальної системи прикласти її силу інерції, то систему можна вважати на дану мить такою, що знаходиться в рівновазі.

Рівняння

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0, \quad (2.3)$$

$$\bar{M}_o^e + \bar{M}_o^R + \bar{M}_o^{\Phi} = 0 \quad (2.4)$$

представляють принцип Д'Аламбера для системи: у кожний момент часу векторна сума головних векторів активних або тих, які задані, сил, реакцій зв'язків і сил інерції системи матеріальних точок, яка рухається, дорівнює нулю; векторна сума матеріальних точок дорівнює нулю; векторна сума головних моментів активних сил, реакцій зв'язків і сил інерції системи, що рухається, розрахованих відносно одного й того ж центру, дорівнює нулю.

Двом рівнянням (2. 3) і (2. 4) у векторній формі відповідають шість рівнянь у скалярній, координатній формі. Причому, ці рівняння можна проєціювати як на нерухомі, так і на рухомі осі координат.

Рівняння (2. 3) і (2. 4) являють собою рівняння *руху* механічної системи, записані в формі умов *рівноваги* сил. При цьому слід мати на увазі, що на матеріальні точки механічної діють тільки активні сили $\bar{F}_k$ і сили реакції зв'язків

$\bar{R}_k$. Сили інерції $\bar{\Phi}_k$ до точок системи не прикладені. Додавання до активних сил реакціям зв'язків сил інерції, не прикладених до даної точки, веде до того, що *рівняння руху* приймають вигляд *рівнянь рівноваги*. Підкреслимо ще раз, що введення сил інерції – це лише прийом, який дозволяє складати рівняння *динаміки* за допомогою більш простих методів *статики*.

Методом кінетостатики чи принципом Д'Аламбера можна користуватися для розв'язання як прямої, так і зворотної задач динаміки.

Для того, щоб скористатися методом кінетостатики, тобто рівняннями (2. 3) і (2. 4), потрібно вміти розраховувати сили інерції матеріальної системи і, зокрема, твердого тіла.

Приведення сил інерції до найпростішого вигляду

Головний вектор і головний момент сил інерції механічної системи

Основна теорема «Статики» [1,3,9]. говорить про те, що *будь-яка* система сил, які діють на абсолютно тверде тіло, при приведенні до довільно взятого центру O , замінюється однією силою $\bar{R}$, яка дорівнює головному вектору системи сил і прикладеній в центрі приведення O , і одною парою з моментом $\bar{M}_O$, рівним головному моменту вихідної системи сил відносно центру O .

Хоча теорема називається теоремою *статики*, вона використовується і в динаміці, зокрема, при знаходженні головного вектору та головного моменту сил інерції.

Головний вектор сил інерції всіх точок механічної системи дорівнює зі знаком мінус вихідної за часом від кількості руху $\bar{Q}$ матеріальної системи:

$$\bar{\Phi} = -\frac{d\bar{Q}}{dt} = -m \cdot \bar{a}_c, \quad (2.5)$$

де m – маса всієї механічної системи;

$\bar{a}_c$ – прискорення її центру мас.

Головний момент сил інерції всіх точок матеріальної системи дорівнює зі знаком мінус похідній за часом від моменту кількості руху:

$$\bar{M}_0^{\Phi} = -\frac{d\bar{K}_0}{dt}. \quad (2.6)$$

Підкреслимо, що головний вектор сил інерції $\bar{\Phi}$ є інваріантом, тобто *не залежить* від вибору центру приведення.

Головний вектор і головний момент сил інерції твердого тіла в різних випадках його руху

$\Rightarrow$ *Поступальний рух твердого тіла*

Прийmemo за центр приведення сил інерції точку C – центр мас твердого тіла (рис. 2. 1).

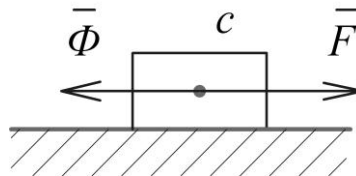


Рис.2.1

При поступальному русі тіло не має ніякого обертання і момент кількості руху дорівнює нулю, тобто $\bar{K}_0 = 0$. Тому за (2. 6) головний момент сил інерції дорівнює нулю, тобто $\bar{M}_0^{\Phi} = 0$. Відомо, що якщо при приведенні системи сил її головний момент виявляється рівним нулю, то система сил приводиться до рівнодіючої, прикладеної в точці приведення сил, яка дорівнює за величиною та напрямом головному вектору.

Таким чином, *при поступальному русі твердого тіла сили інерції приводяться до рівнодіючої:*

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}. \quad (2.7)$$

Рівнодіючу сил інерції – вектор $\bar{\Phi}$ – потрібно направити протилежно прискоренню $\bar{a}_c$ (рис. 2. 1). Індекс «с» можна не писати, так як $\bar{a} = \bar{a}_c$.

Примітка. До цього ж результату ми прийдемо з таких міркувань: при поступальному русі твердого тіла всі його точки мають однакові за величиною та напрямком прискорення. Отже, сили інерції утворюють систему паралельних сил, яка приводиться до рівнодіючої, прикладеної в центрі мас тіла.

$\Rightarrow$ *Обертання твердого тіла, що має площину матеріальної симетрії, навколо нерухомої осі, перпендикулярної до цієї площини.*

Розглянемо декілька можливих випадків:

а) *центр мас (точка C) знаходиться на осі обертання (рис. 2. 2, а).*

Вісь обертання в цьому випадку є головною центральною віссю інерції тіла.

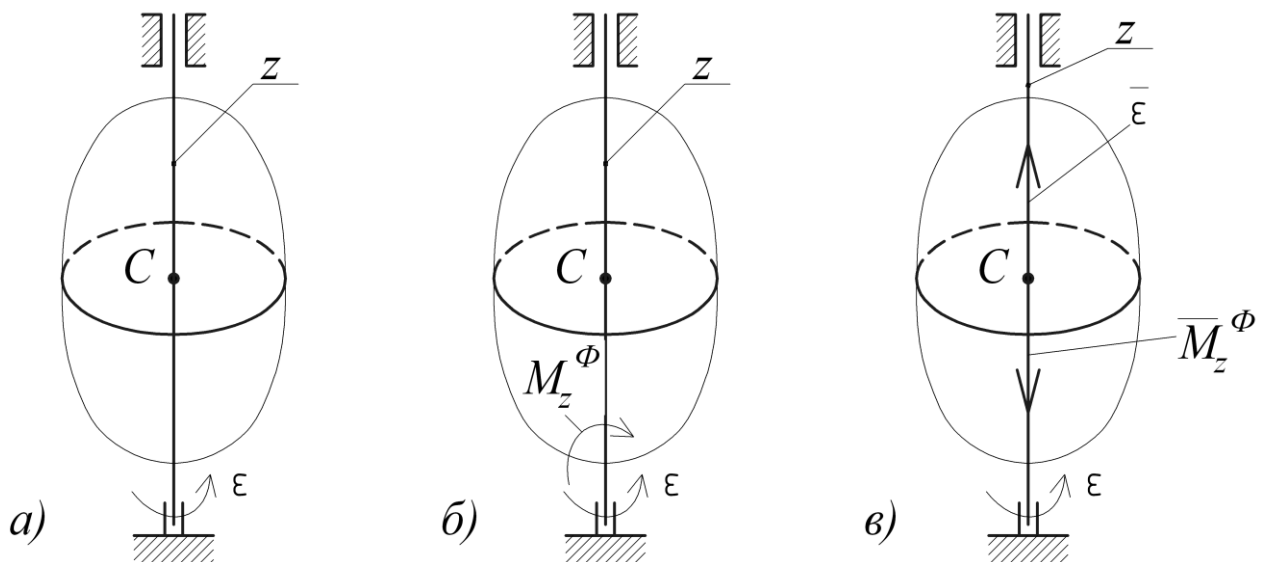


Рис. 2.2

Точка C , знаходячись на нерухомій осі, не має прискорення: $a_c = 0$. Тоді головний вектор сил інерції за (2. 5) також дорівнює нулю, тобто $\bar{\Phi} = -m\bar{a}_c = 0$. Значить, сили інерції приводяться тільки до головного моменту сил інерції.

Головний момент сил інерції відносно осі обертання z визначаємо за формулою (2. 6). Кінетичний момент K_z твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює $K_z = I_z \cdot \omega$ (де I_z – момент інерції тіла відносно осі z , ω – його кутова швидкість). Тоді величина моменту сил інерції дорівнює:

$$M_0^\phi = \frac{dK_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \cdot \varepsilon.$$

Таким чином, головний момент сил інерції твердого тіла дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання та кутового прискорення:

$$M_z^\phi = I_z \cdot \varepsilon, \quad (2.8)$$

причому, незалежно від того, головний вектор сил інерції дорівнює нулю чи ні.

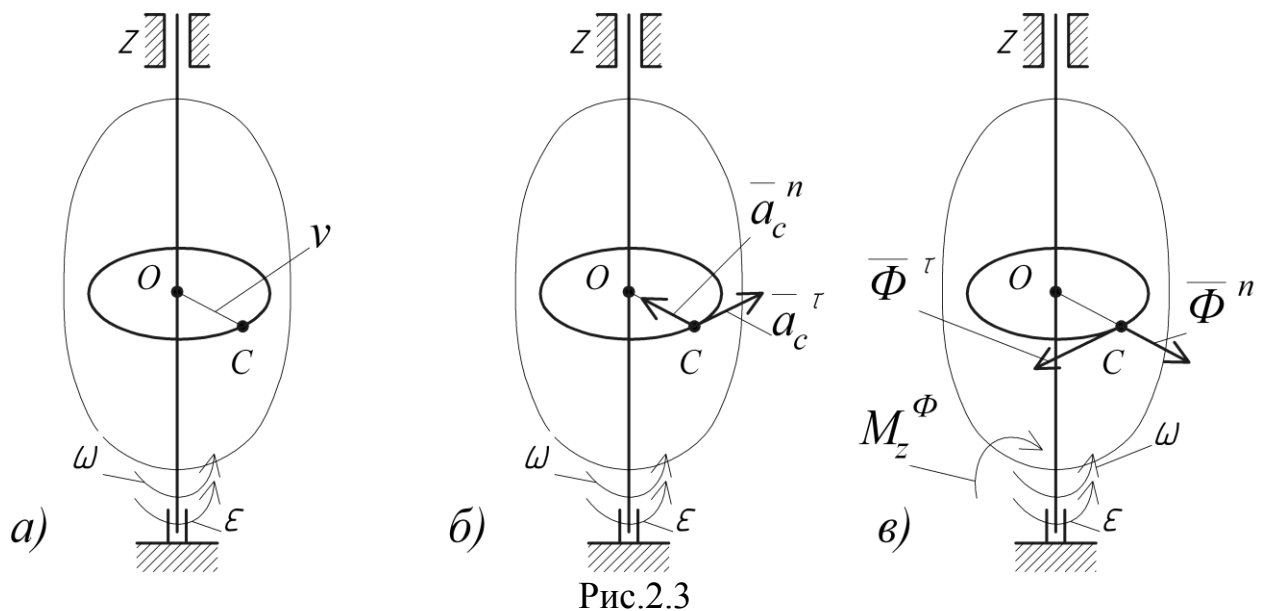
Головний момент M_z^ϕ на рисунку зображується поворотною стрілкою, направленою протилежно до кутового прискорення (рис. 2. 2, б) ε , у той час як *вектор* головного моменту сил інерції направлений по осі обертання протилежно вектору кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ (рис. 2. 2, в).

Таким чином, якщо центр мас (точка C) знаходиться на осі обертання, то сили інерції приводяться до пари сил, момент якої дорівнює головному моменту системи інерційних сил $M_z^\phi = I_z \cdot \varepsilon$.

Примітка 1: при розв'язанні задач розрахунковою схемою є рис. 2. 2, б). Вектори $\bar{\varepsilon}$ і $\bar{M}_O^\phi$, як правило, не зображують (рис. 2. 2, в).

Примітка 2: нехай тіло обертається рівномірно, $\omega = \text{const}$. Значить, кутове прискорення тіла дорівнює нулю, $\varepsilon = 0$. Тоді не тільки головний вектор сил інерції дорівнює нулю, але й головний момент сил інерції також буде дорівнювати нулю і на рисунку M_z^ϕ не зображується.

б) Центр мас твердого тіла зміщений від осі обертання на відстань $OC=r$ (рис. 2. 3, а).



У цьому випадку головний вектор сил інерції вже не буде дорівнювати нулю й розраховується за формулою (2. 5). Доцільно прискорення точки C представити його складовими. У загальному випадку прискорення точки C складається з нормального прискорення $\bar{a}_C^n$ і дотичного прискорення $\bar{a}_C^\tau$ (рис. 2. 3, б). Нормальне прискорення за величиною дорівнює: $a_C^n = \omega^2 \cdot OC = \omega^2 \cdot r$; дотичне прискорення за величиною дорівнює $a_C^\tau = \varepsilon \cdot r$. Тоді головний вектор сил інерції також буде мати дві складові: нормальну силу інерції $\bar{\Phi}^n$ і дотичну силу інерції $\bar{\Phi}^\tau$.

Нормальна складова сил інерції за напрямком і величиною визначається формулами:

$$\overline{\Phi}^n = -m\overline{a}_c^n \quad \text{і} \quad \Phi^n = m\overline{a}_c^n = m\omega^2 \cdot r \quad (2.9)$$

(нормальну складову сил інерції часто називають *відцентровою силою*; нагадаємо: прискорення – *відцентрове*, а сила – *відцентрова*).

Аналогічно, дотична складова сил інерції визначається за напрямком і величиною формулами:

$$\Phi^\tau = -m\overline{a}_c^\tau \quad \text{і} \quad \Phi^\tau = m\overline{a}_c^\tau = m\epsilon r \quad (2.10)$$

Сили інерції $\overline{\Phi}^n$ і $\overline{\Phi}^\tau$ прикладаються в точці C протилежно прискоренням (рис. 2. 2, в).

Головний момент сил інерції розраховується за формулою (2. 8): $M_z^\phi = I_z \cdot \epsilon$. На рисунку головний момент сил інерції зображується поворотною стрілкою протилежно кутовому прискоренню ϵ (рис. 2. 3, в).

Примітка: теоретично у випадку б) головний вектор сил інерції $\overline{\Phi}$ і головний момент сил інерції $\overline{M}_z^\phi = -I_z \cdot \overline{\epsilon}$ еквівалентні рівнодіючій, тобто одному вектору, з тієї причини, що $\overline{\Phi} \perp \overline{M}_z^\phi$.

Рівнодіюча сил інерції за модулем буде дорівнювати модулю головного вектора інерційних сил; лінія дії цієї рівнодіючої відстоїть від лінії дії головного вектора на величину $h = M_z^\phi / \Phi$. Однак, при розв'язанні задач не доцільно виконання цих перетворень, які вимагають додаткових дій. Рекомендується робити так, як викладено вище.

в) *Центр мас твердого тіла зміщений від осі обертання на відстань $OC=r$, (рис. 2. 4, а) і, при цьому, тіло обертається рівномірно.*

При рівномірному обертанні кутова швидкість $\omega = const$, тому кутове прискорення $\epsilon = 0$. Значить, точка C має тільки нормальне прискорення $\overline{a}_c^n$ (рис. 2. 4, б). Дотична складова головного вектора сил інерції за (2. 10) дорівнює нулю $\Phi^\tau = m\epsilon r = 0$. Отже, головний вектор сил інерції визначається формулою (2. 9)

$\Phi = \Phi^n = m\omega^2 r$ і направлений протилежно вектору $\bar{a}_c^n$ (рис. 2. 4, в). За формулою (2. 8) головний момент сил інерції $M_z^\Phi = I_z \varepsilon = 0$. Якщо головний момент дорівнює нулю, то система сил приводиться до рівнодіючої. Значить, сили інерції приводяться до рівнодіючої.

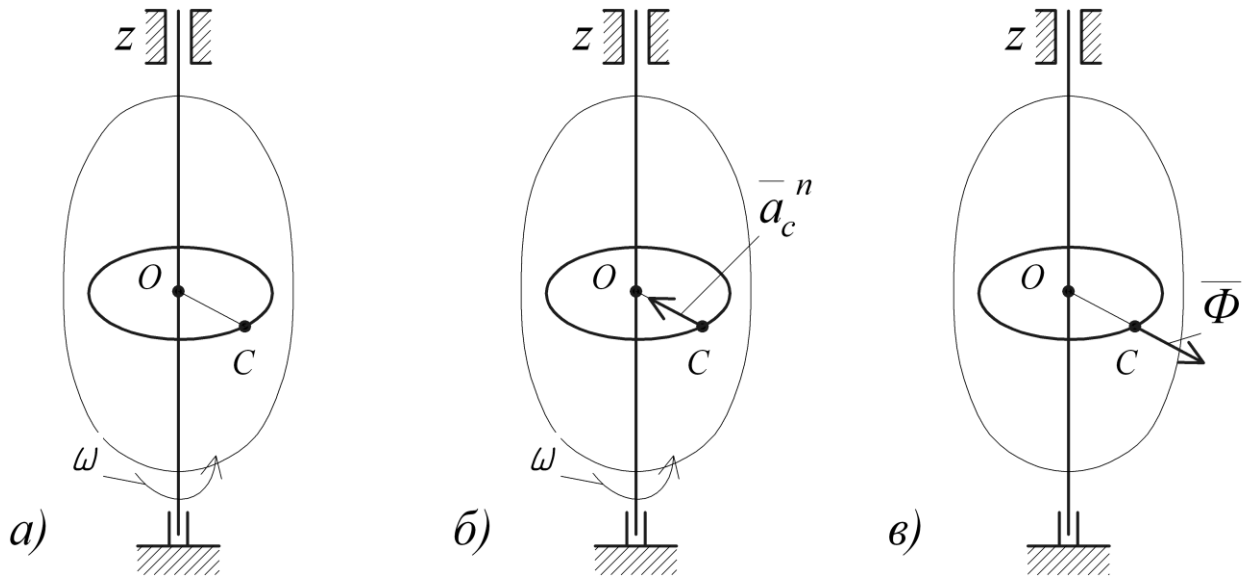


Рис. 2.4

Таким чином, якщо центр мас твердого тіла зміщений від осі обертання на відстань $OC=r$ і, при цьому, тіло обертається рівномірно, то сили інерції приводяться до рівнодіючої.

Рівнодіюча сил інерції співпадає з вектором $\bar{\Phi}^n = -m \cdot \bar{a}_C$, прикладена в точці C і направлена від осі обертання (рис. 2. 4, в).

⇒ Обертання плоскої фігури навколо осі, перпендикулярної до її площини (рис. 2. 5, а).

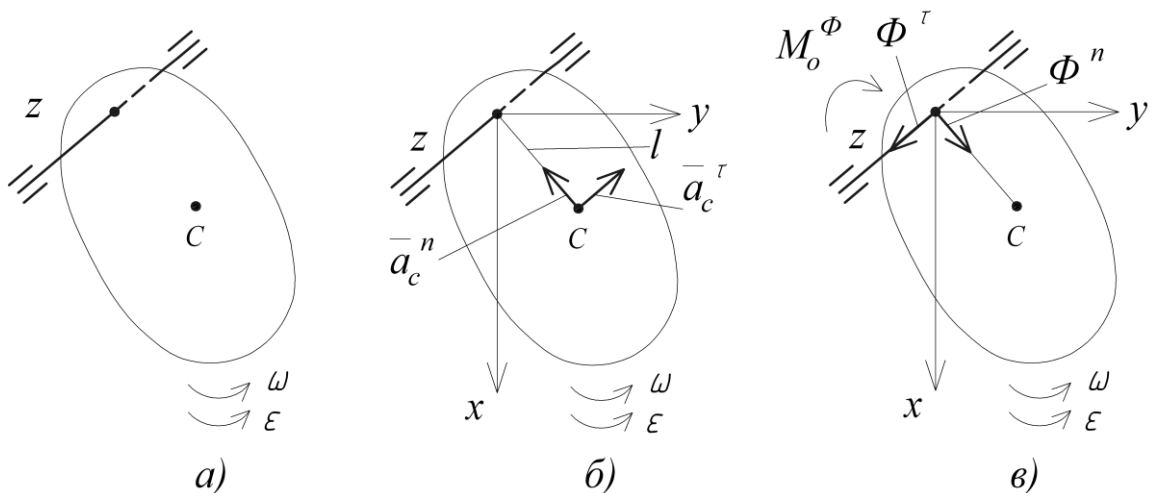


Рис. 2.5

Розглянемо для цього випадку декілька способів приведення сил інерції.

Проведемо площину xOy , яка співпадає з площиною фігури. Вісь z – вісь обертання. Позначимо відстань від центру ваги точки C до осі обертання через l : $OC=l$ (рис. 2. 5, б).

За центр приведення приймається точка O – точка перетину плоскої фігури з віссю z (точка O називається точкою підвісу).

Головний вектор сил інерції, підкреслимо ще раз, є інваріантом, тобто не залежить від вибору центру приведення. Рівнодіюча сил інерції співпадає з вектором $\bar{\Phi}^n = -m \cdot \bar{a}_C$. Прискорення точки C розкладемо на нормальне $\bar{a}_C^n$ і дотичне $\bar{a}_C^\tau$ прискорення (рис. 2. 5, б). тоді і головний вектор сил інерції буде представлений двома складовими:

$$\bar{\Phi} = -m(\bar{a}_C^n + \bar{a}_C^\tau) = (-m\bar{a}_C^n) + (-m\bar{a}_C^\tau) = \bar{\Phi}^n + \bar{\Phi}^\tau.$$

Доцільно мати справу з складовими $\bar{\Phi}^n$ і $\bar{\Phi}^\tau$ головного вектора сил інерції (не складати їх). Прикладати їх потрібно в центрі приведення – в точці O (рис. 2. 5, в). величини їх дорівнюють: $\Phi^n = ma_C^n = m\omega^2 l$ і $\Phi^\tau = ma_C^\tau = m\epsilon l$.

Момент сил інерції за величиною дорівнює: $M_0^\phi = I_0 \cdot \epsilon$, де I_0 – момент інерції тіла відносно осі Oz , він розраховується за формулою про моменти інерції відносно паралельних осей: $I_0 = I_C + ml^2$, де I_C – момент інерції відносно осі, паралельній осі z і яка проходить через центр ваги C . Зображується M_0^ϕ протилежно ϵ (рис. 2. 5, в).

За центр приведення сил інерції приймається центр ваги C твердого тіла (рис. 2. 6, а).

У цьому випадку складові головного вектора сил інерції $\bar{\Phi}^n$ і $\bar{\Phi}^\tau$ прикладаються в точці C , центрі приведення (рис. 2. 6, б). величини їх дорівнюють, $\Phi^n = ma_C^n = m\omega^2 l$ і $\Phi^\tau = ma_C^\tau = m\epsilon l$.

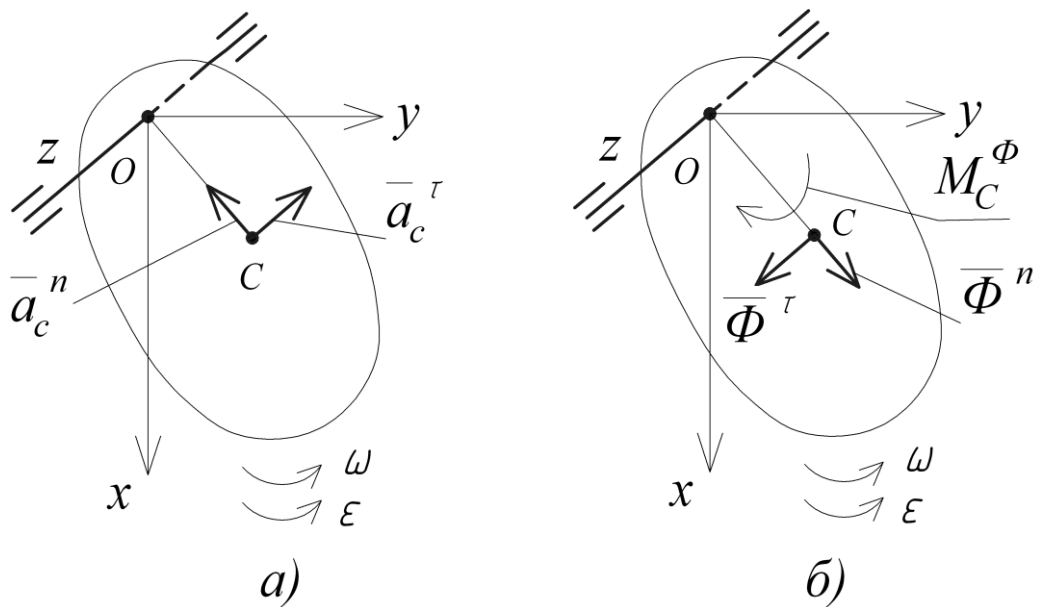


Рис. 2.6

Головний момент сил інерції розраховується в цьому випадку відносно осі, що проходить через центр ваги C паралельно осі обертання Oz (рис. 2. 6, а): $M_C^\phi = I_{Cz} \cdot \varepsilon$. Зображується момент M_C^ϕ поворотною стрілкою навколо точки C , звичайно ж протилежно напрямку ε .

За центр приведення сил інерції приймемо центр гойдання фізичного маятника – точку K (рис. 2. 7, а).

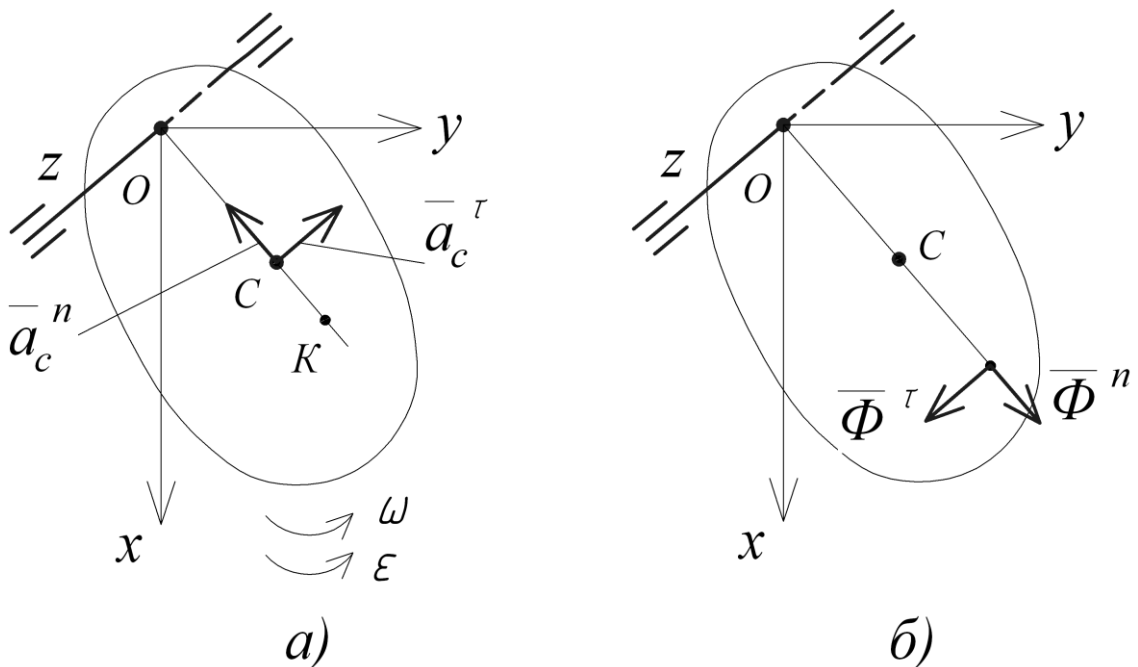


Рис. 2.7

Враховуючи, що головний вектор і головний момент сил інерції перпендикулярні: $\bar{\Phi} \perp \bar{M}_0^\phi$, то сили інерції приводяться до рівнодіючої, котра прикладена в точці K . Відстань OK визначається формулою

$$OK = \frac{J_0}{ml} = \frac{J_c}{m \cdot CK}.$$

Точка K називається центром гойдань відповідного фізичного маятника.

Рівнодіючу доцільно представляти складовими $\bar{\Phi}^n$ і $\bar{\Phi}^\tau$ (прикладеними, не забуваємо, в центрі гойдання K (рис. 2. 7, б)), величини котрих $\Phi^n = ma_C^n = m\omega^2 l$ і $\Phi^\tau = ma_C^\tau = m\epsilon l$.

$\Rightarrow$ Плоскопаралельний рух твердого тіла.

Для наочності розглянемо випадки приведення сил інерції на прикладі колеса, що ні в якому разі не знижує спільності міркувань стосовно до твердого тіла будь-якої конфігурації, котре здійснює плоский рух.

За центр приведення сил інерції приймемо точку C – центр ваги колеса (рис. 2. 8, а).

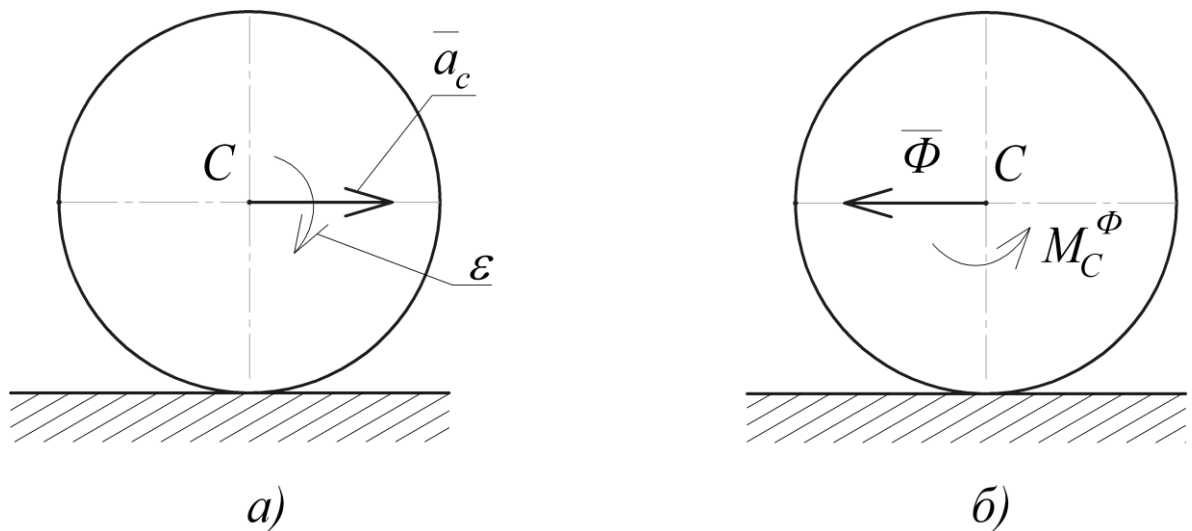


Рис. 2.8

Головний вектор сил інерції прикладаємо в точці C , протилежно прискоренню $\bar{a}_c$ (рис. 2. 8, б), величина його $\Phi = ma_c$. Головний момент сил інерції розраховується відносно осі, що проходить через точку C перпендикулярно площині фігури (колеса): $M_c^\Phi = I_c \cdot \epsilon = I_c \frac{a_c}{r}$ (для спрощення приймаємо, що колесо котиться без проковзування, тоді $\epsilon = \frac{a_c}{r}$). Головний момент сил інерції зображуємо поворотною стрілочкою навколо точки C протилежно кутовому прискоренню ϵ (рис. 2. 8).

За центр приведення сил інерції приймається точка P – миттєвий центр швидкостей колеса (рис. 2. 9, а).

У цьому випадку головний вектор сил інерції потрібно прикласти в миттєвому центрі швидкостей – точці P (рис. 2. 9, б), величина його дорівнює $\Phi = ma_c$. Головний момент сил інерції розраховується за формулою $M_p^\Phi = I_p \cdot \varepsilon$. Тут момент інерції I_p визначається відносно осі, що проходить через миттєвий центр швидкостей – точку P – перпендикулярно площині фігури (колеса): $I_p = I_c + m(cr)^2 = I_c + mr^2$, кутове прискорення $\varepsilon = \frac{a_c}{cr} = \frac{a_c}{r}$.

Зображується головний момент сил інерції M_p^Φ поворотною стрілочкою навколо точки P , звичайно, протилежно кутовому прискоренню ε (рис. 2. 9, б).

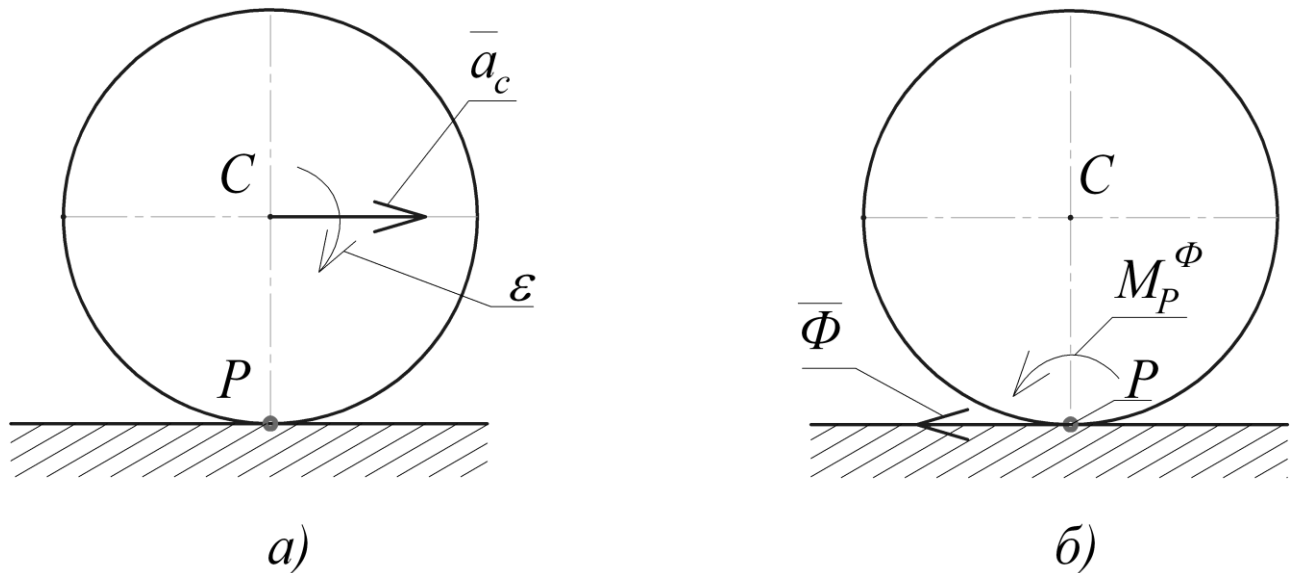


Рис. 2.9

За центр приведення сил інерції приймемо центр гойдань (рис. 2. 10).

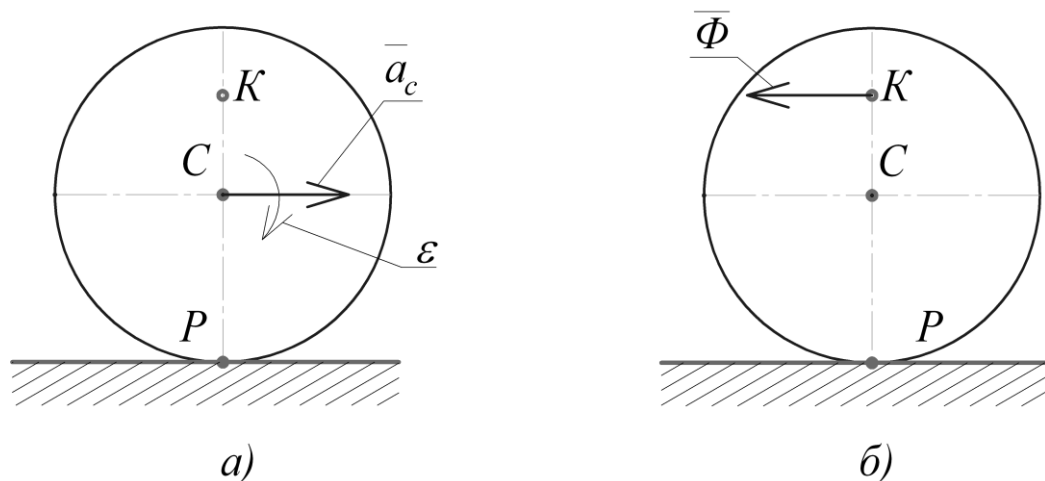


Рис. 2.10

Колесо можна розглядати в даний момент часу як фізичний маятник, у якого миттєвий центр швидкостей – точка P є точкою підвісу.

Так як головний вектор сил інерції $\bar{\Phi}$ перпендикулярний головному моменту сил інерції, тобто $\bar{\Phi} \perp \bar{M}_c^\phi$, то сили інерції приводяться до рівнодіючої, прикладеної в центрі гойдань K .

Припустимо, що колесо – суцільне однорідної маси m і радіусу r . Розрахуємо відстань від точки P до точки K за приведеною довжиною фізичного маятника:

$$PK = \frac{I_P}{m(CP)} = \frac{I_c + m(CP^2)}{m(CP)} = \frac{I_c + mr^2}{mr} = \frac{\frac{1}{2}mr^2 + mr^2}{mr} = \frac{3}{2}r.$$

Таким чином, $PK = \frac{3r}{2}$, тобто точка K відстоїть від миттєвого центру швидкостей точки P на відстані $1,5r$ або на $0,5r$ від точки C .

У цьому випадку на рисунку зображується тільки рівнодіюча $\bar{\Phi}$, прикладена в точці K і направлена протилежно вектору прискорення $\bar{a}_c$ (рис. 2. 10, б). Величина рівнодіючої дорівнює $\Phi = ma_c$. (У цьому випадку головний момент на рисунку не зображується!).

Отже, головний вектор і головний момент сил інерції, котрі умовно прикладені до твердого тіла, рух якого розглядається, потрібно визначати за наведеними вище формулами у відповідності до виду руху твердого тіла (поступальний рух, обертання навколо нерухомої осі, плоскопаралельний рух).

⇒ Визначення сил інерції у випадку безперервного розподілення мас

Якщо за допомогою готових формул неможливо визначити головний вектор і головний момент інерції, то у випадку безперервного розподілення мас потрібно знайти сили інерції для виділеного елементу і потім розповсюдити підсумовування по всьому твердому тілу та розрахувати визначений інтеграл у відповідних межах.

2.2. Методика і приклад складання диференціальних рівнянь за принципом Д'Аламбера (метод кінетостатики)

Розв'язання задач за допомогою принципу Д'Аламбера [3,5,9].
рекомендується виконувати в такій послідовності:

- 1) зобразити на рисунку активні сили, прикладені до кожної з матеріальних точок;
- 2) використавши аксіому вивільнення від зв'язків, зобразити реакції зв'язків, які діють на кожну точку системи;
- 3) додати до активних сил і реакціям зв'язків сили інерції матеріальних точок системи. Додавання сил інерції приводить кожну точку системи в стан «спокою»;
- 4) вбрати систему координат;
- 5) скласти рівняння «рівноваги» для кожної з матеріальних точок системи в формі рівнянь статки, використовуючи рівняння (2. 3) і (2. 4);
- 6) з рівнянь «рівноваги» отримати систему диференціальних рівнянь руху даної механічної системи.

Задача

Скласти, використовуючи принцип Д'Аламбера (метод кінетостатики) диференціальні рівняння руху кранового візка з вантажем по нерухомій стрілі (рис. 2. 11) або нерухомому мосту (рис. 2. 12), відповідно.

Розв'язання.

Складемо розрахункову схему кранового візка, що переміщує вантаж на канаті:

- канат (не важливо одна гілка чи дві) приймаємо за абсолютно нерозтяжний (називають «абсолютно жорсткий») невагомий стержень довжиною l , до якого прикріплено вантаж;
- розміри вантажу не враховуємо і розглядаємо його як матеріальну точку з масою m_2 , що дорівнює масі вантажу (фактично – це модель математичного маятника);
- візок приймаємо за повзун з масою m_1 , який рухається по горизонтальній нерухомій площині (стріла крану чи міст).

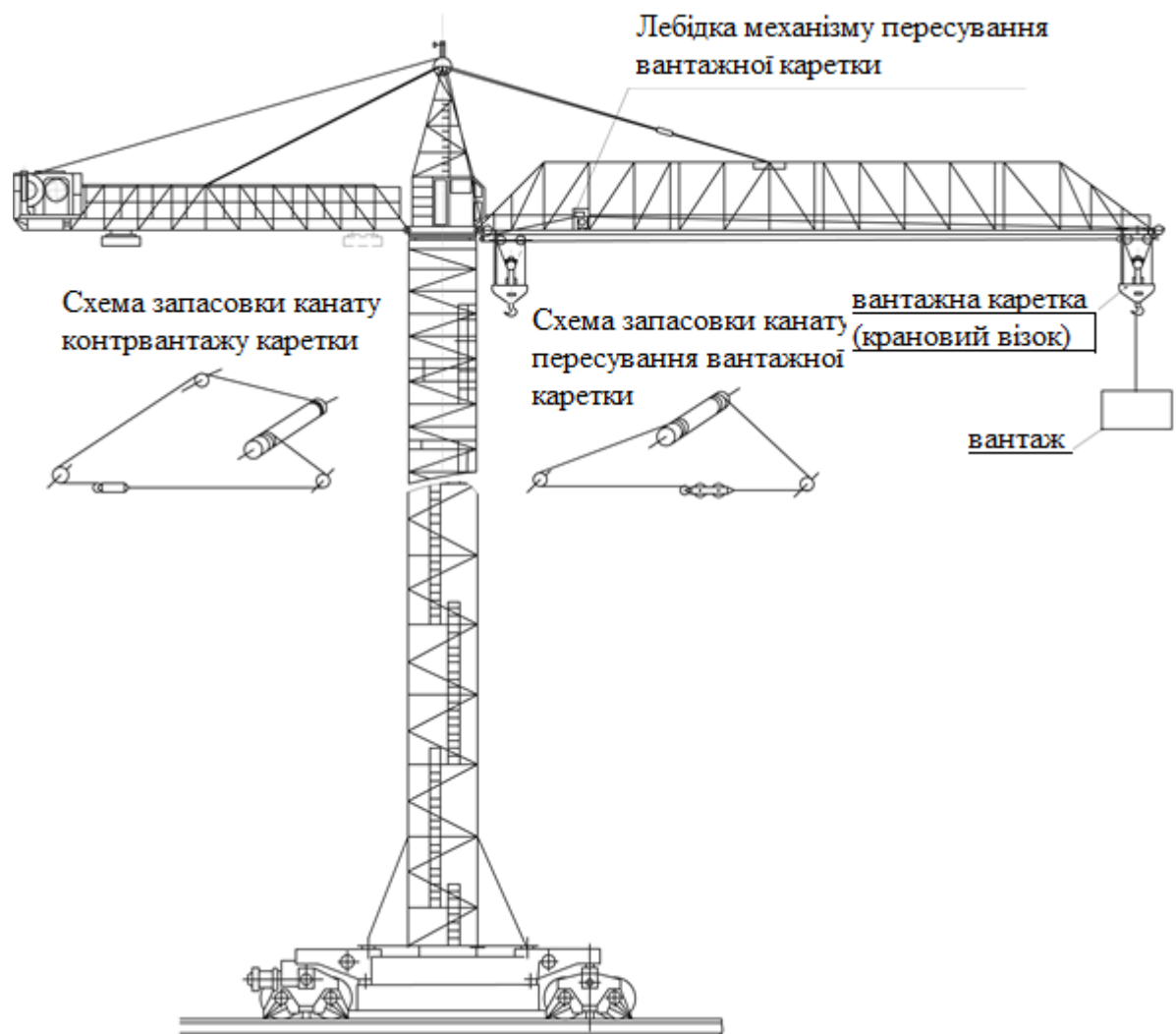


Рис. 2.11

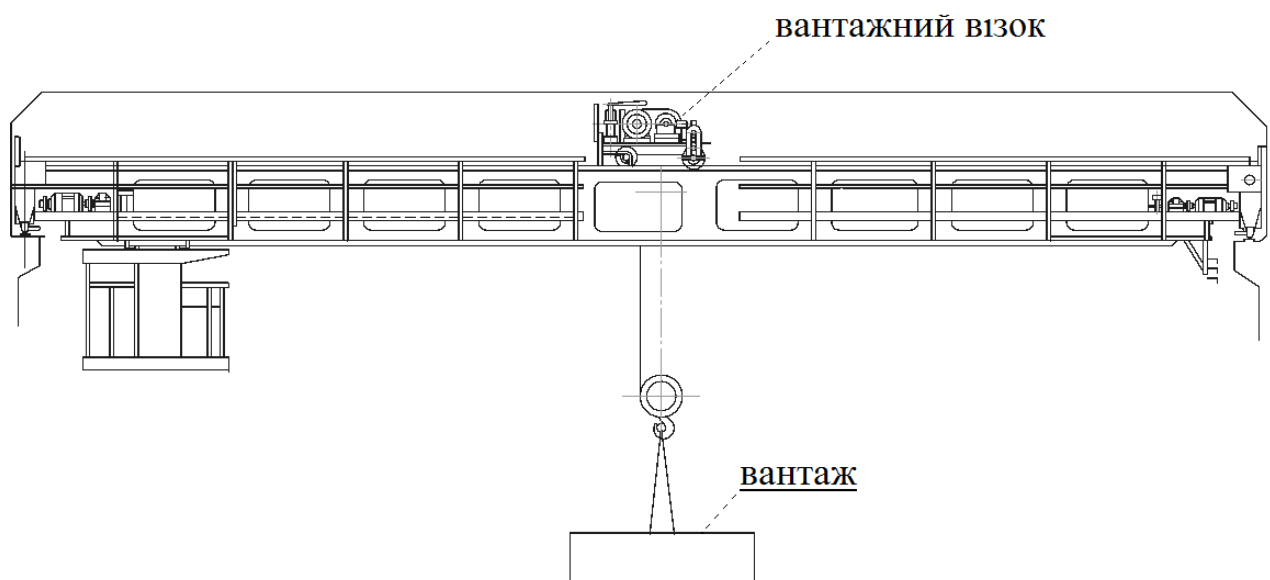


Рис. 2.12

Таким чином, отримана така розрахункова схема: математичний маятник B масою m_2 коливається навколо горизонтальної осі, котра проходить перпендикулярно до площини рисунку через центр ваги повзуна A масою m_1 (рис.

2. 13).

Зображуємо на рисунку активні сили. На рис. 2. 14, а зображені активні сили $\bar{F}$, $m_1\bar{g}$, $m_2\bar{g}$, прикладені до повзуна та вантажу.

Застосовуємо аксіому вивільнення від зв'язків, тобто роз'єднаємо систему на повзун A (рис. 2. 14, б) і маятник AB (рис. 2. 14, в). Розглянемо рівновагу кожного елементу окремо.

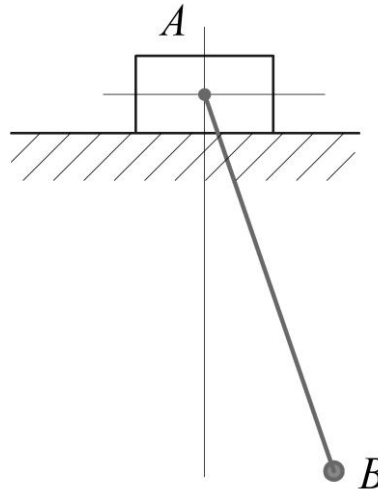


Рис. 2.13

На повзун (рис. 2. 14, б) діють активні сили $m_1\bar{g}$ і $\bar{F}$ (фізичний зміст сили $\bar{F}$ поки не з'ясуємо). Дію маятника на повзун зобразимо двома взаємно перпендикулярними реакціями $\bar{X}_A$ і $\bar{Y}_A$. Реакція $\bar{N}_1$ горизонтальної площини без урахування тертя перпендикулярна до опорної поверхні.

Вводимо сили інерції. Так як повзун рухається поступально, то сили інерції приводяться до рівнодіючої:

$$\bar{\Phi}_1 = -m_1\bar{a}_A, \quad (2.11)$$

яку прикладаємо в точці A . За модулем сила інерції дорівнює

$$\Phi_1 = m_1 a_A = m_1 \ddot{x}. \quad (2.12)$$

Тепер розглянемо рівновагу маятника AB , рис. 2. 14, в і рис. 2. 14, г.

У точці A (рис. 2. 14, в) зображуємо реакції $\bar{X}_A$ і $\bar{Y}_A$, які компенсують дію відкинутого повзуна. Вони дорівнюють і протилежно направлені реакціям $\bar{X}_A$ і $\bar{Y}_A$, прикладеним до повзуна. Точка B має складний рух: рух повзуна A є для неї

переносним рухом, а рух (поворот) навколо осі z , яка проходить через точку A перпендикулярно до площини рисунку, відносним. Абсолютне прискорення точки B дорівнює:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_e + \bar{a}_r = \bar{a}_e + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau. \quad (2.13)$$

На рис. 2. 14, в зображені прискорення $\bar{a}_e$, $\bar{a}_r^n$ і $\bar{a}_r^\tau$, прикладені в точці B . прискорення Коріоліса дорівнює нулю, так як переносний рух є поступальним, значить $\omega_e = 0$.

Величини векторів правої частини рівняння (2. 13):

$$a_e = a_A = \ddot{x}; \quad a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB = \dot{\varphi}^2 \cdot l; \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot AB = \ddot{\varphi} \cdot l. \quad (2.14)$$

Кожному прискоренню відповідає сила інерції: $\bar{\Phi}_1^e = -m\bar{a}_e$, $\bar{\Phi}_r^n = -m\bar{a}_r^n$, $\bar{\Phi}_r^\tau = -m\bar{a}_r^\tau$. Кожну силу інерції направляємо протилежно «своєму» прискоренню (рис. 2. 14, г).

Запишемо величини сил інерції, враховуючи (2. 14):

$$\Phi_e = m_2 a_e = m_2 \ddot{x}; \quad \Phi_r^n = m_2 a_r^n = m_2 l \dot{\varphi}^2; \quad \Phi_r^\tau = m_2 a_r^\tau = m_2 l \ddot{\varphi}. \quad (2.15)$$

Проводимо систему координат: рис. 2. 14, б і рис. 2. 14, г.

Складаємо рівняння «рівноваги» для повзуна та маятника відповідно.

Сили $m_1 \bar{g}$, $\bar{N}_1$, $\bar{x}_A$, $\bar{y}_A$, $\bar{\Phi}_1$, які діють на повзун A (рис. 2. 14, б), утворюють *плоску* систему сил, які *сходяться*, тому складають тільки два рівняння: проєкції сил на координатні осі $\sum F_{kx} = 0$ і $\sum F_{ky} = 0$:

$$x_A + F - \Phi_1 = 0,$$

Або з урахуванням (2. 12)

$$x_A + F - m_1 \ddot{x} = 0 \quad (2.16)$$

і

$$N_1 + y_A - m_1 g = 0. \quad (2.17)$$

Маятник AB знаходиться в «рівновазі» під дією *довільної плоскої* системи сил, тому складаємо *три* рівняння рівноваги в формі двох проєкцій сил і одного моменту сил відносно точки A :

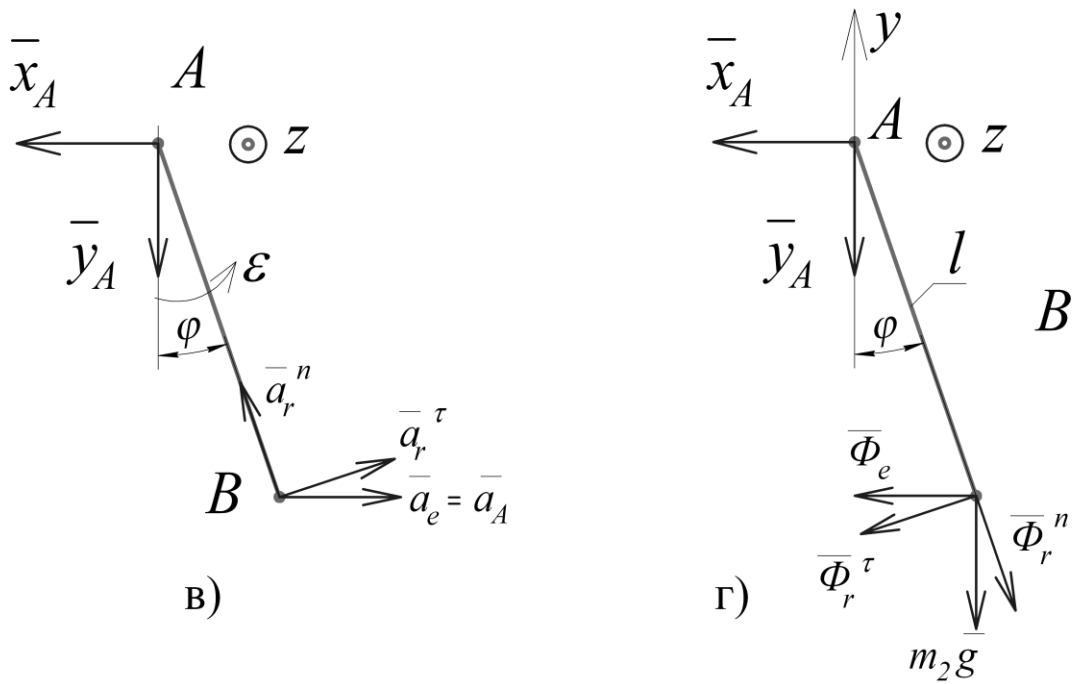
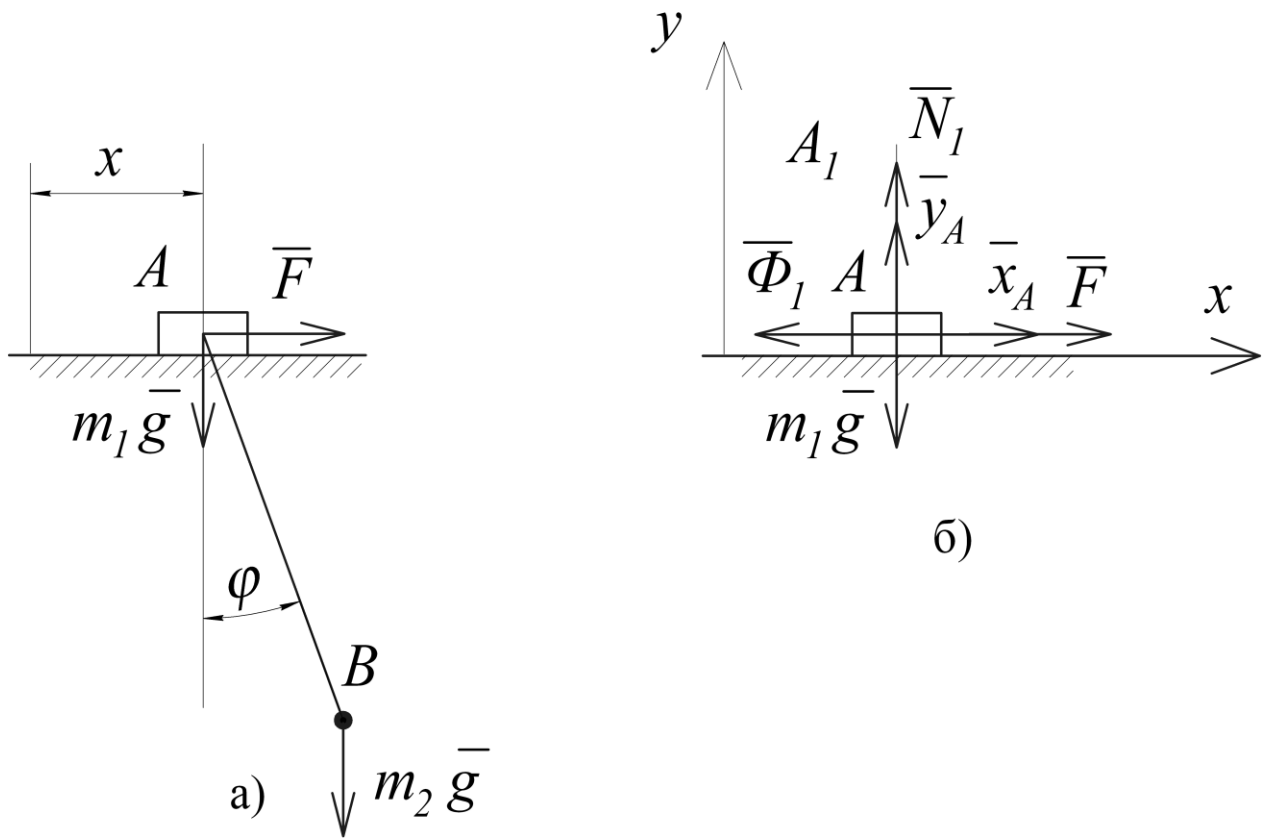


Рис. 2.14

$$\begin{aligned}
 -x_A - \Phi_e - \Phi_r^\tau \cos \varphi + \Phi_r^n \sin \varphi &= 0 \\
 -y_A - \Phi_r^\tau \sin \varphi - \Phi_r^n \cos \varphi - m_2 g &= 0. \\
 -\Phi_r^\tau \cdot l - m_2 g l \sin \varphi - \Phi_e l \cos \varphi &= 0
 \end{aligned}$$

Підставимо в одержані рівняння вирази сил інерції за (2. 15), отримаємо таку систему рівнянь:

$$-x_A - m_2 \ddot{x} - m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi + m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0 \quad (2.18)$$

$$-y_{A_2} - m_2 l \ddot{\varphi} \sin \varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - m_2 g = 0 \quad (2.19)$$

$$-m_2 l \ddot{\varphi} \cdot l - m_2 g l \sin \varphi - m_2 \ddot{x} l \cos \varphi = 0. \quad (2.20)$$

Отже, використовуючи принцип Д'Аламбера (метод кінетостатики) ми склали п'ять рівнянь (2. 16)÷(2. 20).

Нагадаємо, що ми маємо систему з двома ступенями вільності, тому в результаті повинно бути два диференціальних рівняння, котрі описують рух даної механічної системи.

У рівняння (2. 16)÷(2. 20) входять три невідомі реакції зв'язків $\bar{x}_A$, $\bar{y}_A$ і $\bar{N}_1$, які потрібно виключити з цих рівнянь. Для цього складемо рівняння (2. 16) і (2. 18), отримаємо:

$$F - m_1 \ddot{x} - m_2 \ddot{x} - m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi + m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0,$$

або

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = F. \quad (2.21)$$

Складемо (2. 17) і (2. 19), отримаємо:

$$N_1 - m_1 g - m_2 l \ddot{\varphi} \sin \varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - m_2 g = 0.$$

З цього рівняння можна знайти реакцію N_1

$$N_1 = (m_1 + m_2) g + m_2 l \ddot{\varphi} \sin \varphi + m_2 l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi, \quad (2.22)$$

котра, як бачимо, є перемінною величиною.

Із рівнянь (2. 18) і (2. 19) за необхідності можна знайти реакції $\bar{x}_A$ і $\bar{y}_A$.

Перепишемо (2. 20), виконавши скорочення на m_2 і l :

$$l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi + \ddot{x} \cos \varphi = 0 \quad (2.23)$$

Рівняння (2. 21) і (2. 23) не містять реакції зв'язків. Перепишемо їх разом і отримаємо систему (2. 24):

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi &= F \\ l \ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi &= -g \sin \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (2.24)$$

Система рівнянь (2. 24) описує рух кранового візка, котрий несе на нерозтяжному канаті вантаж, розрахунковою схемою котрого є математичний маятник з рухомою точкою підвісу.

У залежності від конкретної постановки задачі сила F може бути чи силою опору руху візка, чи рушійною силою, чи пружною силою пружини при наїзді кранового візка на пружний упор, чи сумою цих сил.

Система диференціальних рівнянь (2. 24), складених за методом кінетостатики, співпадає з системою диференціальних рівнянь (1. 21), складених шляхом використання теореми про рух центру мас в поєднанні з динамікою відносного руху точки.

Порівнюючи метод кінетостатики з теоремою про рух центру мас, відмічаємо громіздкість методу кінетостатики.

3. ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ

3.1. Фрагменти теорії

Загальне рівняння динаміки [1,3,5,7,9]. як інструмент дослідження руху механічної системи відноситься до *аналітичної механіки*.

В аналітичній механіці розроблені загальні методи, за допомогою котрих можна скласти диференціальні рівняння руху, не вводячи реакції ідеальних зв'язків. Ці методи ґрунтуються на використанні математичного аналізу для дослідження всіх *можливих* переміщень системи.

Можливими чи віртуальними називаються такі елементарні уявні переміщення точок системи, котрі не суперечать зв'язкам і відбуваються у фіксований момент часу.

Позначають можливі переміщення символом " δ ": $\delta\varphi$, δs , $\delta\vec{r}$, δx , δy і т.п.

Можливі переміщення точок механічної системи розглядають як величини першого порядку малості, нехтуючи при цьому величинами вищих порядків малості. Це дозволяє криволінійні переміщення точок замінювати прямолінійними відрізками. Заміна криволінійних переміщень на прямолінійні дозволяє оперативно виконати рішення, оскільки можна розглядати подобу трикутників, в яких сторони розраховуються як дуги.

Для наочності на рис. 3. 1 показаний поворот стержня OA в площині рисунка на нескінченно малий кут $\delta\varphi$ навколо осі O , перпендикулярній до площини рисунка.

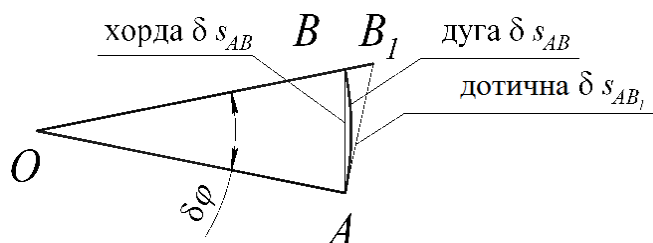


Рис. 3.1

При повороті на кут $\delta\varphi$ точка A переміщується по дузі $\delta\tilde{s}_{AB}$ окружності радіусу OA . Хордою цієї дуги є відрізок δs_{AB} , а дотичною до траєкторії в точці A

є відрізок δs_{AB_1} . З точністю до величини першого порядку малості ці переміщення рівні між собою: $\delta \tilde{s}_{AB} = \delta s_{AB} = \delta s_{AB_1}$.

Це легко показати. На рис. 3. 2 представлені дуга $\delta \tilde{s}_{AB}$ і відповідна їй хорда δs_{AB} . Дуга, як відомо, дорівнює добутку радіуса та центрального кута

$$\delta \tilde{s}_{AB} = OA \cdot \delta \varphi \quad (3.1)$$

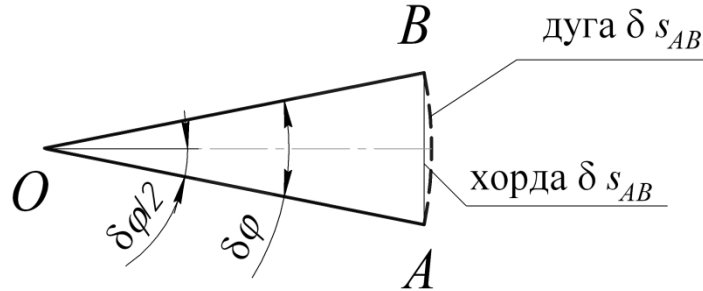


Рис. 3.2

Довжину хорди δs_{AB} можна знайти з трикутника OAB , вона дорівнює

$$\delta s_{AB} = 2 \cdot OA \cdot \sin \frac{\delta \varphi}{2}$$

Враховуючи, що синус малих кутів дорівнює своєму аргументу, тобто $\sin \frac{\delta \varphi}{2} = \frac{\delta \varphi}{2}$, отримуємо, що довжина хорди дорівнює

$$\delta s_{AB} = 2 \cdot OA \cdot \frac{\delta \varphi}{2} = OA \cdot \delta \varphi \text{ або}$$

$$\delta s_{AB} = OA \cdot \delta \varphi. \quad (3.2)$$

З порівняння виразів (3.1) і (3.2) отримуємо, що довжина дуги дорівнює довжині хорди:

$$\delta \tilde{s}_{AB} = \delta s_{AB}$$

На рис. 3. 3 проведена дотична AB_1 , яка відповідає дузі AB . В точці A – прямий кут, значить, дотична δs_{AB_1} дорівнює $\delta s_{AB_1} = OA \cdot \tan \delta \varphi$. При малих кутах синуси й тангенси кутів однакові, тому $\delta s_{AB_1} = OA \cdot \sin \delta \varphi = OA \cdot \delta \varphi$. Або

$$\delta s_{AB_1} = OA \cdot \delta \varphi \quad (3.3)$$

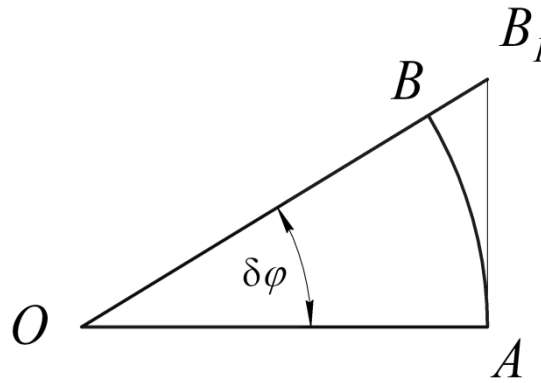


Рис. 3.3

Порівнюючи вирази (3. 1) і (3. 3), бачимо, що довжина дуги дорівнює довжині дотичної

$$\delta \tilde{s}_{AB} = \delta s_{AB_1}.$$

Мінімальне число можливих переміщень не може бути менше двох, максимальне – дорівнює нескінченності. На рис. 3. 4 наведена схема, коли точка M може переміщуватись вздовж діаметру AB нерухомого диску. Точка M має два можливих переміщення: чи в бік точки A , чи в бік точки B .

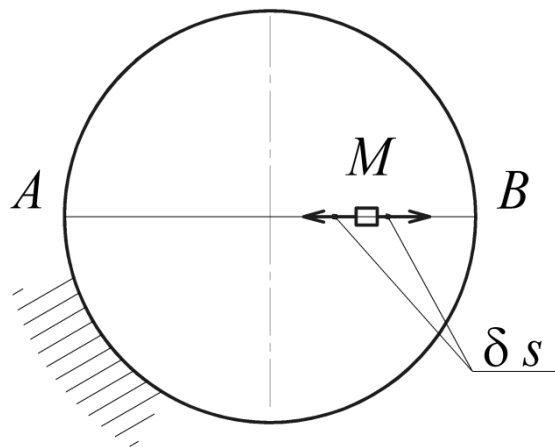


Рис. 3.4

Дійсне нескінченно мале переміщення позначається символом « d »: $d\varphi$, ds , $d\bar{r}$, dx і т. д.

Для стаціонарних зв'язків дійсне переміщення точки співпадає з одним з її можливих переміщень. Дійсно, якщо диск нерухомий, то зв'язок є стаціонарним, і дійсне переміщення точки M співпадає з одним з двох можливих переміщень.

Дійсне переміщення визначається силами, що задаються, та початковими умовами.

Для нестаціонарних зв'язків (тобто тих, рівняння зв'язків яких явно

залежать від часу) можливе переміщення точки розглядається при миттєво зупинених зв'язках, інакше кажучи, при фіксованому часі. У цьому випадку дійсне переміщення вже не буде співпадати з жодним з її можливих переміщень. Щоб у цьому переконатися, представимо, що в прикладі, наведеному на рис. 3. 4, диск обертається навколо осі O з кутовою швидкістю ω , значить зв'язок є вже нестационарним. Абсолютний рух точки M буде складним рухом, який складається з відносного $d\bar{s}_r$ вздовж діаметра AB , наприклад, в бік точки B , і переносного $d\bar{s}_e$ разом з диском (рис. 3. 5). Абсолютне дійсне переміщення точки M визначається формулою $d\bar{s} = d\bar{s}_e + d\bar{s}_r$. Щоб знайти можливе переміщення у випадку нестационарного зв'язку, його потрібно перетворити в стаціонарний, «зупинивши» час t . У нашому прикладі потрібно «зупинити» диск. При нерухомому диску одержимо випадок, зображений на рис. 3. 4, де можливі переміщення співпадають з діаметром AB .

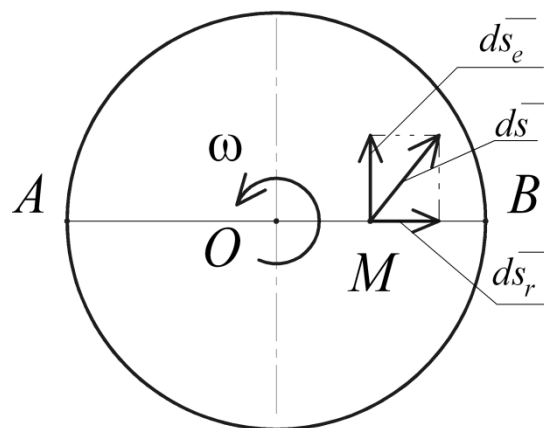


Рис. 3.5

Із співставлення рис. 3. 4 і рис. 3. 5 видно, що дійсне переміщення $d\bar{s}$ не входить у число можливих переміщень $\delta\bar{s}$.

Можливі переміщення дозволяють дати аналітичне визначення ідеальних зв'язків. Нагадаємо, що в розділі «Статика» оперують із зв'язками, котрі називають «ідеальними», але визначення ідеальних зв'язків не дають. Це зв'язки у вигляді абсолютно гладкої поверхні, абсолютно твердого невагомого стержня, це зв'язки у вигляді нерозтяжної, невагомої та абсолютно гнучкої нитки (мотузка, трос, канат) і т. д. Такі зв'язки, внаслідок своїх фізичних властивостей, визначають напрямки реакцій. Саме ця їх властивість разом з поняттям про

можливі переміщення дозволило дати таке аналітичне визначення ідеальних зв'язків.

Ідеальними називаються зв'язки, якщо сума елементарних робіт реакцій на будь-яких можливих переміщеннях точок системи дорівнює нулю:

$$\sum \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0 \quad (3.4)$$

Відмітимо, що зв'язок з тертям не є ідеальним, так як не виконується умова (3. 4), тим не менше такий зв'язок умовно розглядають як ідеальний, відносячи сили тертя до сил, які задаються.

Примітка: не потрібно вважати, що зв'язок з тертям завжди є неідеальним зв'язком. На рис. 3. 6 абсолютно тверде колесо знаходиться на негладкій поверхні абсолютно твердої площини.

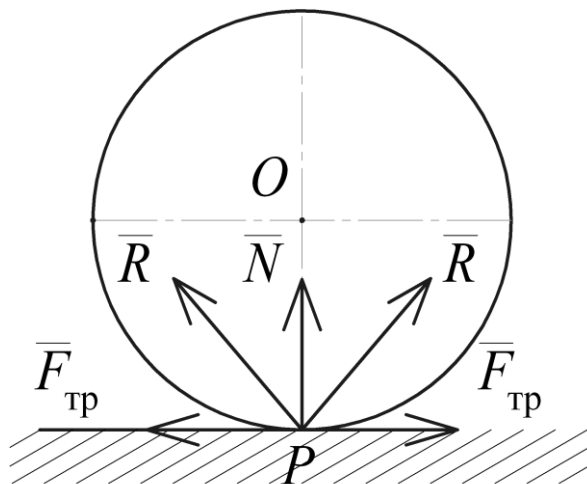


Рис. 3. 6

Так як обидва тіла (колесо та площина) абсолютно тверді, то тертя кочення відсутнє. Реакція $\bar{R}$ шорсткої поверхні прикладена в точці P дотику колеса з площиною. Точка P є миттєвим центром швидкостей, тому за визначенням її миттєва швидкість дорівнює нулю, значить $d\bar{r}_P = \bar{v}_P dt = 0$. Звідси витікає, що можлива робота $\delta A(\bar{R}) = \bar{R} \cdot \delta \bar{r}_P = 0$. Умова (3. 4) виконується, тому шорстка абсолютно тверда поверхня при коченні по ній абсолютно твердого колеса являє ідеальний зв'язок.

Використання поняття можливого переміщення матеріальних точок і ідеальних зв'язків приводить до принципу можливих переміщень, який являє собою загальний принцип аналітичної статyki.

Принцип можливих переміщень полягає в наступному: для рівноваги системи матеріальних точок, підпорядкованих ідеальним, стаціонарним і голономним зв'язкам, необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт активних сил на будь-яких можливих переміщеннях точок системи з положення рівноваги дорівнювала нулю

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k. \quad (3.5)$$

Перевагою принципу можливих переміщень є відсутність в його формулюванні реакцій ідеальних зв'язків.

Загальне рівняння динаміки є аналогом принципу можливих переміщень для випадку руху системи матеріальних точок. Формулювання загального рівняння динаміки:

$$\sum (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (3.6)$$

Кількість складених рівнянь (3. 6) дорівнює кількості ступенів вільності, котрі має механічна система, підпорядкована голономним ідеальним зв'язкам.

Відмітимо, що в формулюванні загального рівняння динаміки відсутні реакції ідеальних зв'язків.

3.2. Методика та приклад складання диференціальних рівнянь руху з використанням загального рівняння динаміки

Розв'язання задач за допомогою диференціальних рівнянь руху з використанням загального рівняння динаміки [3,5,9]. рекомендується виконувати в такій послідовності:

- 1) зобразити на рисунку активні сили;
- 2) зобразити прискорення точок (щоб уникнути помилок направляти прискорення слід у позитивний бік координат);
- 3) протилежно прискоренням побудувати відповідні сили інерції;
- 4) записати величини сил інерції;
- 5) вибрати незалежні можливі переміщення точок системи. Їх число повинно дорівнювати числу ступенів вільності цієї системи;

6) надати системі можливе переміщення, що відповідає будь-якій одній із ступенів вільності. При цьому можливі переміщення, що відповідають іншим ступеням вільності, вважати рівними нулю;

7) записати суму робіт усіх сил (активних і сил інерції) на відповідних можливих переміщеннях їх точок прикладання та прирівняти цю суму до нуля;

8) виразити можливі переміщення точок прикладання сил через можливе переміщення, що відповідає вибраному ступеню вільності та підставити у складене рівняння робіт;

9) після скорочення в рівнянні робіт на надане можливе переміщення, записати отримане диференціальне рівняння, що відповідає даному можливому переміщенню;

10) останні чотири операції повторити для кожного з незалежних переміщень. Число отриманих диференціальних рівнянь буде дорівнювати числу незалежних можливих переміщень.

Задача

Скласти диференціальні рівняння руху кранового візка з вантажем при нерухомій стрілі (рис. 3. 7) чи нерухомому мосту (рис. 3. 8).

Розв'язання

Складемо розрахункову схему кранового візка, котрий переміщує вантаж на канаті:

- канат (не важливо одна гілка чи дві) приймаємо за абсолютно нерозтяжний (говорять «абсолютно жорсткий») невагомий стержень довжиною l , до якого прикріплений вантаж;

- розміри вантажу не враховуємо й розглядаємо його як матеріальну точку з масою m_2 , яка дорівнює масі вантажу;

- візок приймаємо за повзун з масою m_1 , який рухається по горизонтальній нерухомій площині (стрілі крану чи мосту).

- розміри вантажу не враховуємо й розглядаємо його як матеріальну точку з масою m_2 , яка дорівнює масі вантажу;

- візок приймаємо за повзун з масою m_1 , який рухається по горизонтальній нерухомій площині (стрілі крану чи мосту).

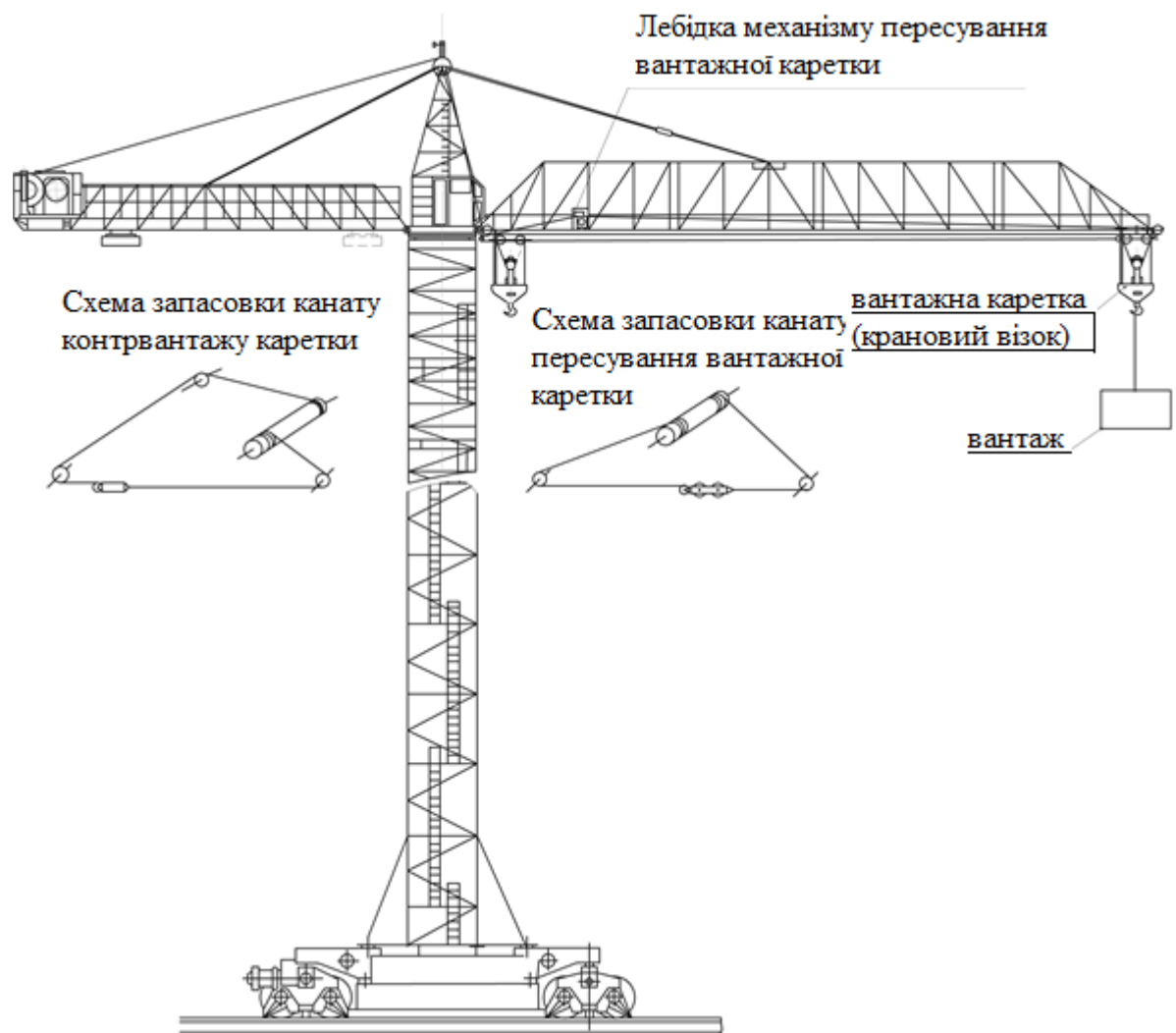


Рис. 3.7

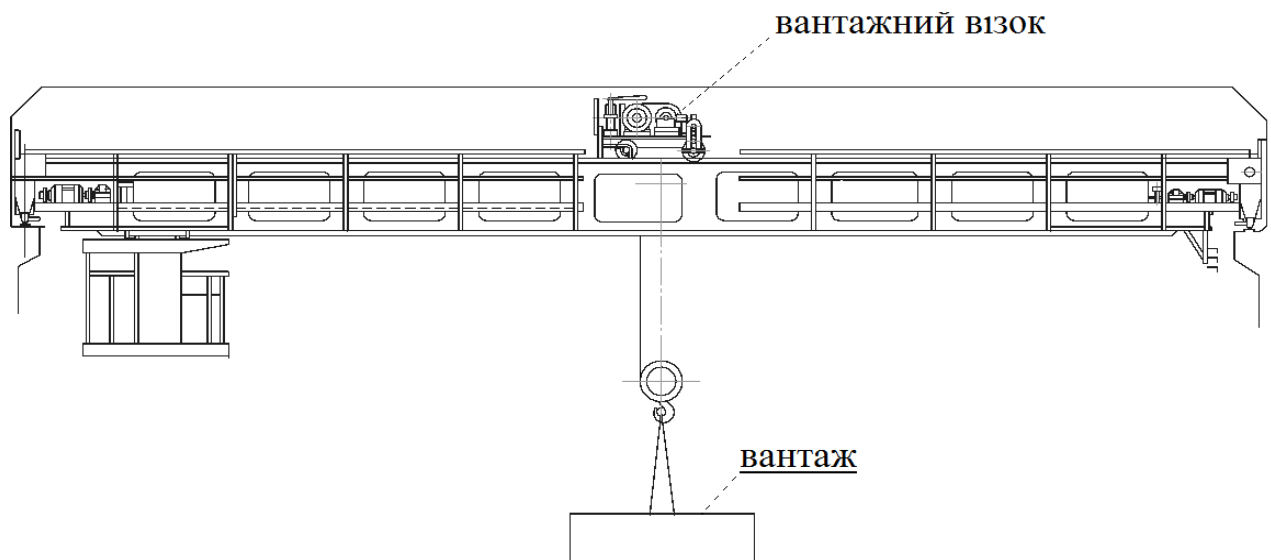


Рис. 3.8

Таким чином, отримана наступна розрахункова схема: математичний маятник B масою m_2 коливається навколо горизонтальної осі, що проходить перпендикулярно до площини рисунку через центр ваги повзуна A масою m_1 (рис. 3. 9).

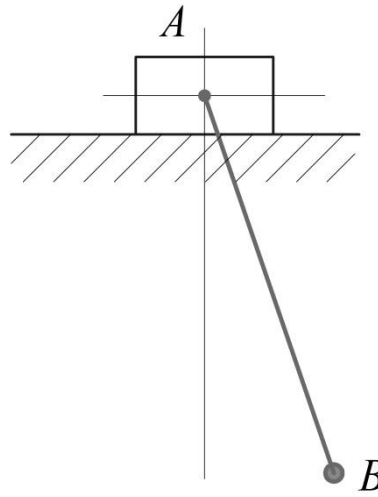


Рис. 3.9

Складемо диференціальне рівняння руху даної механічної системи, використовуючи загальне рівняння динаміки.

1. Зобразимо на рис. 3. 10, а активні сили: $\bar{F}$, $m_1\bar{g}$, $m_2\bar{g}$.

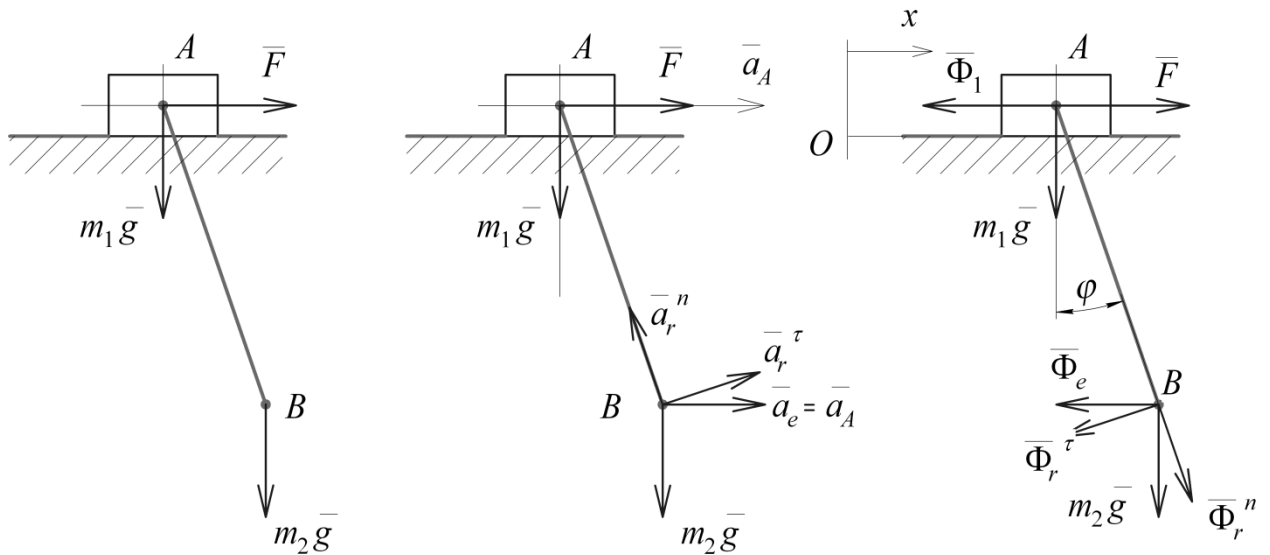


Рис. 3.10

2. Розставимо прискорення точок системи: $\bar{a}_A$ – прискорення повзуна A . Для точки B , яка має складний рух, зображуємо переносне прискорення $\bar{a}_e$, воно дорівнює $\bar{a}_A$, і прискорення $\bar{a}_r^n$ і $\bar{a}_r^\tau$ у відносному русі навколо точки A (рис. 3. 10, б).

3. Протилежно прискоренням зображуємо сили інерції $\bar{\Phi}_1 = -m_1\bar{a}_A$, $\bar{\Phi}_e = -m_2\bar{a}_A$, $\bar{\Phi}_r^n = -m_2\bar{a}_r^n$, $\bar{\Phi}_r^\tau = -m_2\bar{a}_r^\tau$ (рис. 3. 10, в).

4. Запишемо величини зображених сил інерції:

$$\Phi_1 = m_1 a_A = m_1 \ddot{x}, \quad \Phi_e = m_2 a_A = m_2 \ddot{x},$$

$$\Phi_r^n = m_2 l \omega^2 = m_2 l \dot{\varphi}^2, \quad \Phi_r^\tau = m_2 l \varepsilon = m_2 l \ddot{\varphi}, \quad (3.7)$$

де $\omega = \dot{\varphi}$ і $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ – відповідно, кутова швидкість і кутове прискорення маятника навколо точки A .

Примітка: При розв'язанні задач рисунки 3. 10, а, 3. 10, б і 3. 10, в – суміщаються й отримується один рисунок, аналогічний рисунку 3. 10, в.

5. Вибираємо незалежні можливі переміщення точок системи.

Дана система має дві ступені вільності x і φ – переміщення повзуна та відхилення маятника (рис. 3. 10, в). Їм відповідають два незалежних можливих переміщення: δx – переміщення повзуна A та $\delta \varphi$ – кутове переміщення маятника AB . Ще раз відмітимо, що кожному можливому переміщенню буде відповідати «своє» загальне рівняння динаміки.

6. Приймаємо, що можливе переміщення $\delta x \neq 0$, а $\delta \varphi = 0$. Це значить, що кут φ зафіксований (не змінюється). Вся система переміститься поступально на δx (рис. 3. 11).

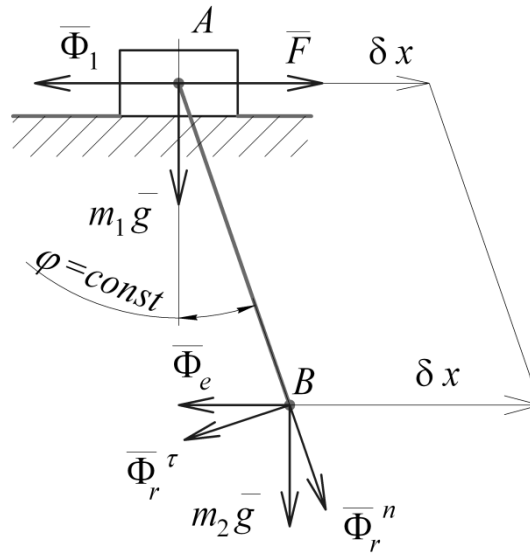


Рис. 3.11

7. Складемо суму робіт всіх сил (активних і сил інерції) на можливому переміщенні δx

$$(F - \Phi_1) \delta x - \Phi_e \delta x + \Phi_r^n \sin \varphi \delta x - \Phi_r^\tau \cos \varphi \delta x = 0. \quad (3.8)$$

8. Видно, що в рівняння (3. 8) входить тільки δx , тому цей пункт не вимагає коригування.

9. Після скорочення в рівнянні (3. 8) на δx , отримаємо диференціальне рівняння, що відповідає можливому переміщенню δx

$$\Phi_1 + \Phi_e - \Phi_r^n \sin \varphi + \Phi_r^\tau \cos \varphi = F,$$

або з урахуванням виразів (3. 7) для запису сил інерції, отримаємо

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi = F. \quad (3.9)$$

10. Для складання загального рівняння динаміки, що відповідає можливому переміщенню $\delta \varphi$ потрібно прийняти, що $\delta \varphi \neq 0$, $\delta x = 0$. Це означає, що ми надамо системі можливе переміщення $\delta \varphi$ (рис. 3. 12).

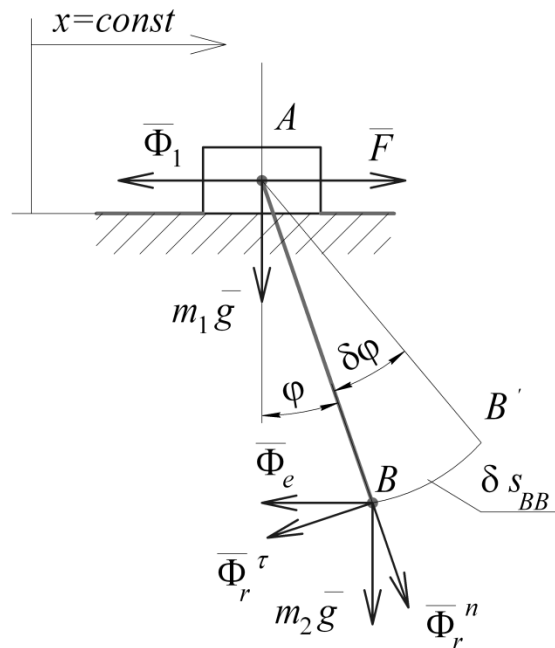


Рис. 3.12

Повзун A буде нерухомим; маятник повертається навколо точки A на $\delta \varphi$. Тоді сили $\bar{F}$, $\bar{\Phi}_1$ і $m_1 \bar{g}$ будуть прикладені до нерухомої точки і їх робота буде дорівнювати нулю. Можливе переміщення $\delta s_{BB'}$ точки B можна прийняти і за дугу, і за хорду, і за дотичну, вони всі будуть рівні між собою, так як можливі переміщення, за визначенням, є нескінченно малими. У будь-якому випадку нормальна складова сили інерції у відносному русі $\bar{\Phi}_r^n \perp BB'$, тому робота цієї сили також дорівнює нулю. Сили $\bar{\Phi}_e$ і $m_2 \bar{g}$ доцільно розкласти на дві складові: по AB і BB' . Тоді складові сил по AB будуть перпендикулярні до $\delta s_{BB'}$, і їх робота

також дорівнює нулю. Переміщення $\delta s_{BB'}$, яке приймається за дугу, дорівнює $\delta s_{BB'} = l\delta\varphi$.

Запишемо суму робіт всіх сил (активних і сил інерції) на можливому переміщенні $\delta\varphi$

$$-\Phi_r^r l\delta\varphi - \Phi_e l \cos\varphi \delta\varphi - m_2 g l \sin\varphi \delta\varphi = 0.$$

Після скорочення на $\delta\varphi$ і l , отримаємо

$$-\Phi_r^r - \Phi_e \cos\varphi - m_2 g \sin\varphi = 0,$$

або з урахуванням виразів (3. 7) для запису сил інерцій, знаходимо диференціальне рівняння, що відповідає можливому переміщенню $\delta\varphi$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos\varphi = -g \sin\varphi. \quad (3.10)$$

Перепишемо разом рівняння (3. 9) і (3. 10), отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m)\ddot{x} - ml\dot{\varphi}^2 \sin\varphi + ml\ddot{\varphi} \cos\varphi &= F \\ l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos\varphi &= -g \sin\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

які є шуканими диференціальними рівняннями руху математичного маятника, точка підвісу котрого переміщується горизонтально, що, в свою чергу, нагадуємо, є розрахунковою схемою руху кранового візка, що несе вантаж на нерозтяжному, невагомому канаті.

Примітка.

Загальне рівняння динаміки доволі громіздке, так як вимагає введення сил інерції, але порівняно з методом кінетостатики не вимагає роз'єднання механічної системи. Але за методом кінетостатики можна визначити реакцію зв'язку N_1 .

Взагалі, загальне рівняння динаміки доцільно використовувати для механічної системи з одним ступенем вільності.

4. РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ

4.1. Фрагменти теорії

Рівняння Лагранжа другого роду [5,9], як і загальне рівняння динаміки, відноситься до аналітичної механіки.

У рівняннях Лагранжа другого роду оперують поняттями «узагальнені координати», «узагальнені сили».

Узагальненими координатами називають незалежні параметри, котрі однозначно визначають положення всіх точок механічної системи.

Число незалежних узагальнених координат механічної системи, підпорядкованої ідеальним і голономним зв'язкам, дорівнює числу ступенів вільності (зв'язки, що не накладають обмежень на швидкість точки, називаються голономними). Узагальнені координати позначаються символом « q ».

Приклади узагальнених координат

Приклад 1. Математичний маятник (рис. 4. 1) має одну ступінь вільності. Його положення однозначно визначає кут φ . Узагальнена координата записується: $q = \varphi$.

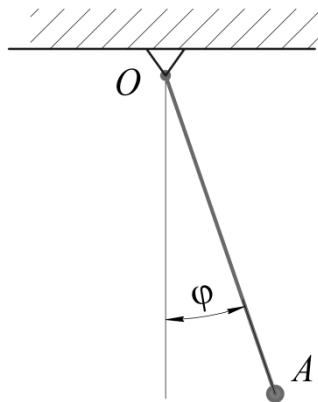


Рис. 4.1

Приклад 2. Математичний маятник, точка підвісу котрого переміщується, має два ступені вільності (рис. 4. 2). Зміщення x точки підвісу маятника та кут φ відхилення від вертикалі однозначно визначають його положення. Узагальнені координати записують: $q_1 = x$ і $q_2 = \varphi$ (можна навпаки: $q_1 = \varphi$, $q_2 = x$).

Приклад 3. Поворотний кран (рис. 4. 3), по стрілі котрого переміщується візок, який несе вантаж A (OA приймається за математичний маятник), має три ступеня вільності; узагальнені координати: $q_1 = \beta$; $q_2 = x$; $q_3 = \varphi$.

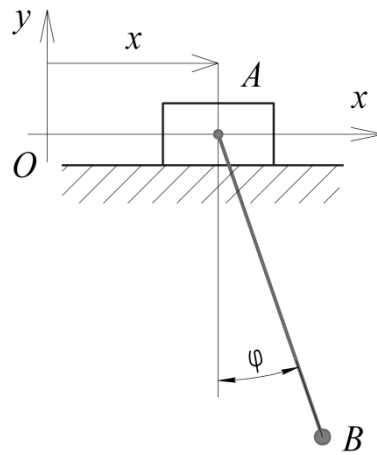


Рис. 4.2

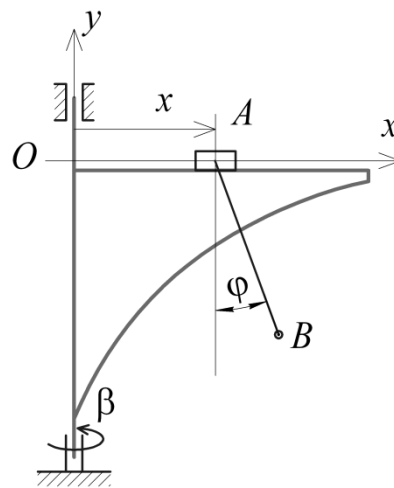


Рис. 4.3

Приклад 4. Кривошипно-повзунний механізм (рис. 4. 4). Механізм має один ступінь вільності. Здавалося б, що є вибір: за узагальнену координату можна прийняти y_A , або φ , або x_B , – всі вони незалежні. Але координаті y_A відповідають два положення механізму: OAB і OA_1B_1 ; координаті x_B також відповідають два положення механізму OAB і OA_2B . Значить, для координат « y_A » і « x_B » не виконується вимога однозначного положення всіх точок системи і вони не можуть бути прийняті за узагальнені координати. І тільки кут φ однозначно визначає положення сіх точок системи, і тільки він може бути прийнятим за узагальнену координату: $q = \varphi$.

У загальному випадку узагальнені координати можуть мати різний геометричний і механічний зміст, або можуть бути лінійними чи кутовими величинами, а також параметри, що мають розмірність площі, об'єму; узагальнені координати іноді містять елементи силових і інших фізичних характеристик

системи.

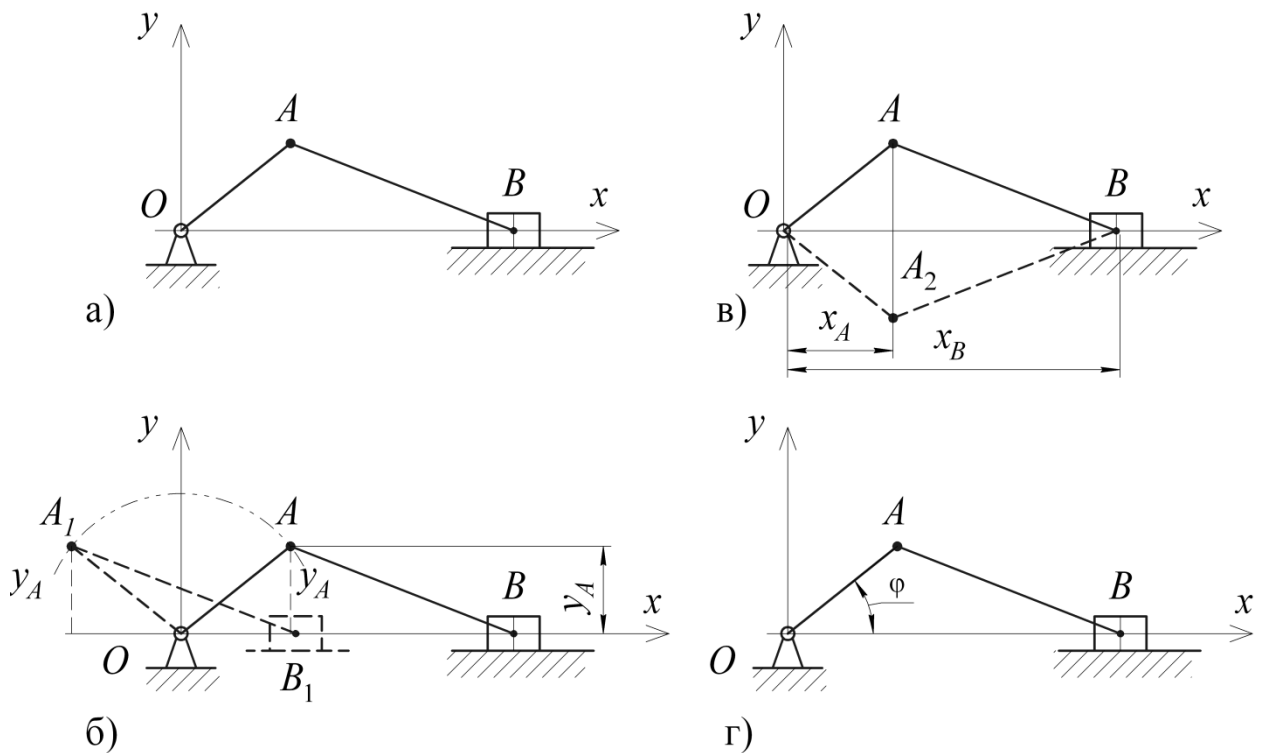


Рис. 4.4

Узагальнені координати зручні тим, що вони, по-перше, є незалежними, по-друге, їх введення звільняє від необхідності задовольняти рівнянням зв'язків, оскільки вони задовольняються автоматично з самого змісту вибору узагальнених координат.

Нехай на механічну систему з ідеальними голономними зв'язками діють активні сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Система має $q_1, q_2, \dots, q_s$ узагальнених координат.

Нехай δA – можлива робота сіх активних сил на всіх можливих переміщеннях системи (якщо є сили тертя, то вони умовно приєднуються до активних сил).

Узагальненими силами $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ називаються коефіцієнти, що стоять у виразі δA можливої роботи активних сил при відповідних варіаціях $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ узагальнених координат:

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_j \delta q_j + \dots + Q_s \delta q_s \quad (4.1)$$

Число узагальнених сил дорівнює числу узагальнених координат, тобто числу ступенів вільності системи (зв'язки, накладені на систему, вважаються, як ми вже розрізняємо, ідеальними та голономними).

Узагальнена сила Q_j в загальному випадку не є силою в звичайному розумінні цього слова. Її розмірність залежить від розмірності відповідній їй узагальненої координати q_j .

Розмірність роботи Q_j визначається з рівності

$$[Q_j] = \frac{[A]}{[q]} = \frac{Hm}{[q]} \quad (4.2)$$

Якщо узагальнена координата q_j вимірюється в $[m]$, то розмірність узагальненої сили вимірюється в ньютонах: $[Q_j] = Hm/m = H$. Якщо узагальнена координата q_j представляє кут, тобто вимірюється в $[rad]$, то розмірність узагальненої сили $[Q_j] = Hm/rad = Hm$ – співпадає з розмірністю моменту; якщо узагальнена координата q_j представляє об'єм, тобто вимірюється в $[m^3]$, то розмірність узагальненої сили $[Q_j] = Hm/m^3 = H/m^2$ співпадає з розмірністю тиску і т. п.

Узагальнена сила є алгебраїчною величиною.

Розглянемо способи розрахунку узагальнених сил

Перший спосіб – почергове варіювання узагальнених координат [3,5,9]. .
Механічній системі надається таке можливе переміщення, при котрому змінюється тільки одна координата q_j , а всі інші узагальнені координати залишаються незмінними. Тоді тільки одна варіація $\delta q_1 \neq 0$, а варіації всіх інших узагальнених координат дорівнюють нулю: $\delta q_1 = \delta q_2 = \delta q_{j-1} = \delta q_{j+1} = \dots = \delta q_s = 0$. Потім складають суму елементарних робіт всіх заданих сил на цьому переміщенні. Тоді на основі (4. 1):

$$\delta A_1 = Q_1 \delta q_1, \quad (4.3)$$

Множник при варіації δq_1 дорівнює узагальненій силі Q_1 .

Аналогічним чином розраховуються інші узагальнені сили.

Приклад. Розглянемо поворотний кран (приклад 3), для котрого узагальненими координатами є $q_1 = \beta$; $q_2 = x$; $q_3 = \varphi$.

Припустимо, що на поворотний кран діють сили: $M_{\delta\beta}$ – рушійний момент, який здійснює поворот крану; M_c – момент опорів повороту; $m_1\bar{g}$, $m_2\bar{g}$, $m_3\bar{g}$ – вага, відповідно крану, візка та вантажу. На візок діє рушійна сила $\bar{F}_{\delta\beta}$ і сила опору $\bar{F}_c$ (рис. 4. 4).

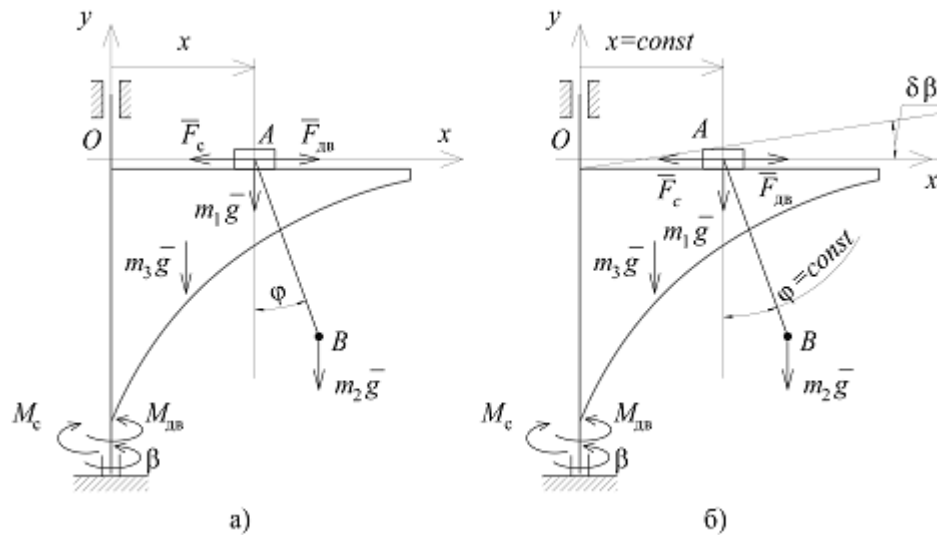


Рис. 4.4

Потрібно розрахувати узагальнені сили.

Розрахунок узагальненої сили Q_β , що відповідає узагальненій координаті $q_1 = \beta$.

Приймаємо, що дві інші узагальнені координати постійні $q_2 = x = const$ і $q_3 = \varphi = const$. Тоді $\delta\beta \neq 0$, а $\delta x = \delta\varphi = 0$. Можлива робота всіх сил, які діють на кран (рис. 4. 4) на можливому переміщенні $\delta\beta$ дорівнює: $\delta A_\beta = M_{\delta\beta} \cdot \delta\beta - M_c \cdot \delta\beta = (M_{\delta\beta} - M_c) \delta\beta$, робота інших сил дорівнює нулю, тому що сили перпендикулярні до можливих переміщень точок прикладання відповідно кожної із сил. Узагальнена сила Q_β , що відповідає узагальненій координаті $q_1 = \beta$, дорівнює коефіцієнту, що стоїть перед варіацією $\delta\beta$:

$$Q_\beta = M_{\delta\beta} - M_c. \quad (4.3)$$

Розрахунок узагальненої сили Q_x , що відповідає узагальненій координаті

$$q_2 = x.$$

Надамо системі можливе переміщення, при котрому $q_1 = \beta = \text{const}$ і $q_3 = \varphi = \text{const}$ залишаються незмінними, а координата $q_2 = x$ отримує приріст δx . При такому переміщенні (рис. 4. 5) роботу виконувати будуть тільки сили $\bar{F}_{\text{дв}}$ і $\bar{F}_c$.

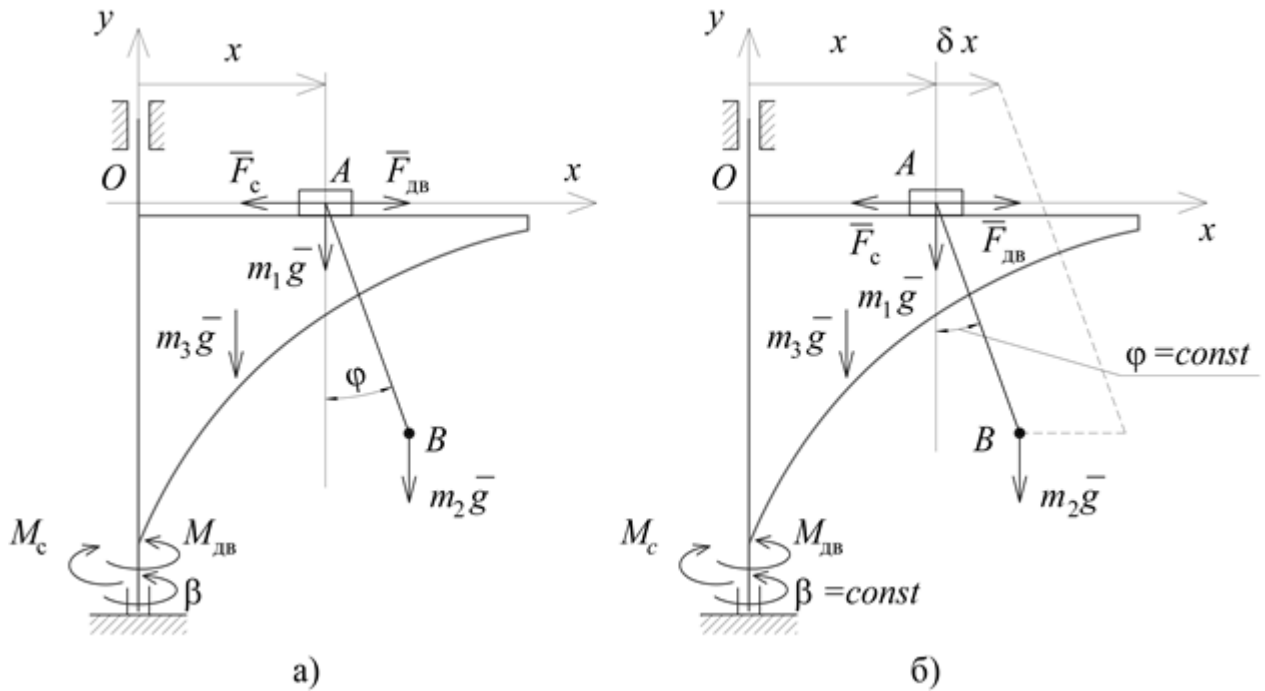


Рис. 4.5

Можлива робота δA_x дорівнює $\delta A_x = (F_{\text{дв}} - F_c) \delta x$.

Отже, узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті $q_2 = x$ дорівнює, за визначенням, коефіцієнту, що стоїть у виразі можливої роботи перед варіацією δx

$$Q_x = F_{\text{дв}} - F_c \quad (4.4)$$

Розрахунок узагальненої сили Q_φ , яка відповідає узагальненій координаті

$$q_3 = \varphi.$$

Надамо системі можливе переміщення, при котрому $q_1 = \beta = \text{const}$ і $q_2 = x = \text{const}$ залишаються незмінними, а координата $q_3 = \varphi$ отримує приріст $\delta \varphi$ (рис. 4. 6).

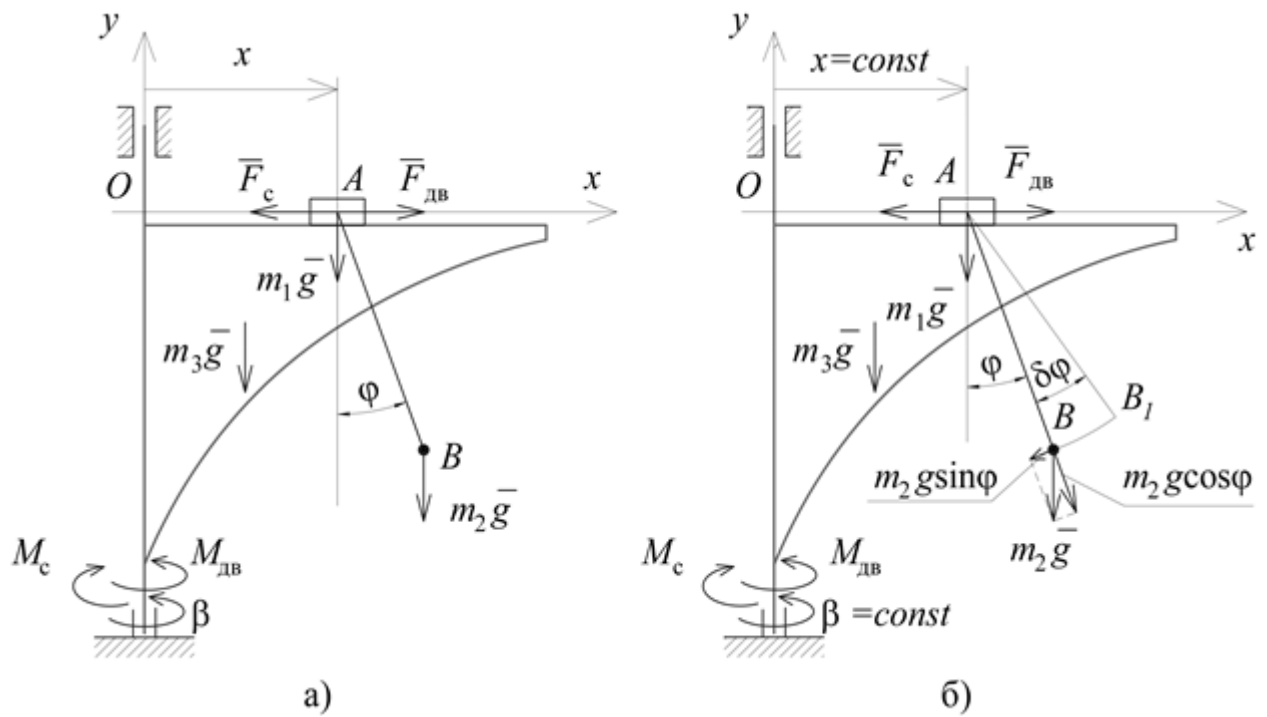


Рис. 4.6

При такому переміщенні, як видно з рисунку 4. 6, точка B переміщується по елементарній дузі $\delta\vec{s}_{BB_1}$, роботу буде здійснювати тільки сила $m_3\vec{g}$. Доцільно дугу $\delta\vec{s}_{BB_1}$ прийняти за дотичну, а силу $m_3\vec{g}$ розкласти на дві складові, направлені по дотичній τ і по нормалі n . Тоді робота складової сили $m_3g \cos \varphi$, направленої по нормалі n дорівнює нулю (вона перпендикулярна до переміщення $\delta\vec{s}_{BB_1}$). Переміщення $\delta\vec{s}_{BB_1}$, яке приймається за дугу, дорівнює $\delta s_{BB_1} = OA \cdot \delta\varphi$ (ми вже відмічали, що можливі переміщення є нескінченно малими, тому довжини дуги, хорди та дотичної приймаються однаковими). Можлива робота $\delta A_\varphi = -m_3g \sin \varphi \cdot \delta s_{BB_1} = -m_3g \sin \varphi \cdot OA \cdot \delta\varphi$. Узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті $q_3 = \varphi$ дорівнює

$$Q_\varphi = -m_3gOA \cdot \sin \varphi. \quad (4.5)$$

Примітка. Можливу роботу δA_φ сили $m_3\vec{g}$ можна розрахувати як роботу сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Момент сили $m_3\vec{g}$ відносно осі A дорівнює $-m_3\vec{g} \cdot OA \cdot \sin \varphi$, тому $\delta A_\varphi = M_0 \cdot \delta\varphi = -m_3g \cdot OA \cdot \sin \varphi \cdot \delta\varphi$. Узагальнена сила $Q_\varphi = -m_3g \cdot OA \cdot \sin \varphi$, що співпадає з результатом, отриманим іншим способом.

Другий спосіб розрахунку узагальнених сил – розрахунок елементарної роботи у вигляді скалярного добутку $\delta A = \sum \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_n$.

У цьому випадку узагальнена сила Q_j розраховується за формулою:

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right), \quad j = 1, 2, \dots, S, \quad (4.6)$$

де F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проєкції сили $\bar{F}_k$ на осі Декартової системи координат;

x_k, y_k, z_k – координати точки прикладання сили $\bar{F}_k$;

$\frac{\partial x_k}{\partial q_j}, \frac{\partial y_k}{\partial q_j}, \frac{\partial z_k}{\partial q_j}$ – часткові похідні від координат точки по узагальненій

координаті q_j .

Приклад. Математичний маятник, точка підвісу котрого переміщується по осі Ox під дією сили $\bar{F}$. Дана розрахункова схема є математичною моделлю руху по стрілі крану візка (точки A), який несе вантаж B . Прийнемо, що стріла крану нерухома. Система має дві ступені вільності: $q_1 = x$ і $q_2 = \varphi$ (див. рис. 4. 7). Знайти узагальнені сили Q_x і Q_φ , які відповідають узагальненим координатам x і φ .

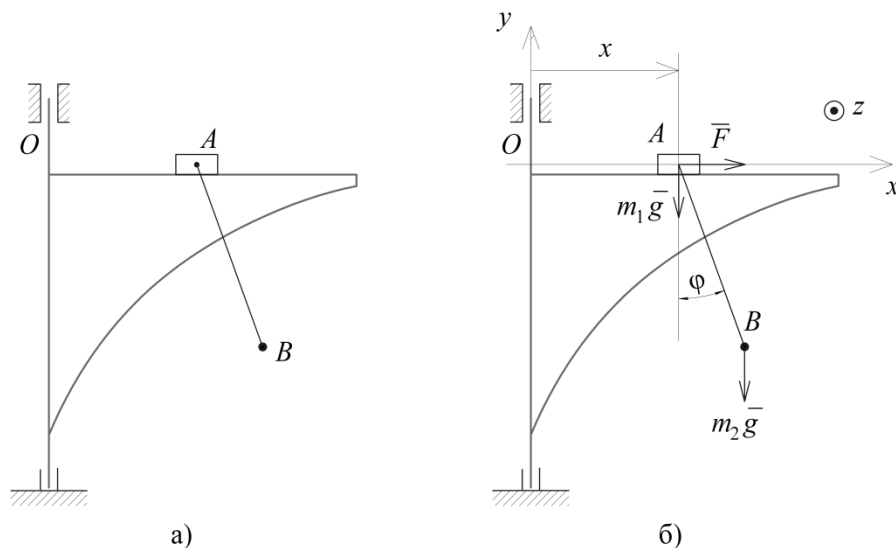


Рис. 4.7

На систему діють активні сили $\bar{F}$, $\bar{P}_1 = m_1 \bar{g}$ і $\bar{P}_2 = m_2 \bar{g}$. Сили $\bar{F}$ і $\bar{P}_1$

прикладені в точці A , сила $\bar{P}_2$ прикладена в точці B .

Приведемо систему координат Oxy , сумістивши її з площиною рисунка (вісь Oz направлена перпендикулярно площині рисунка). У вибраних осях сили мають компоненти: $\bar{F}(F; 0; 0)$; $\bar{P}_1(0; -m_1g; 0)$, $\bar{P}_2(0; -m_2g; 0)$.

Координати точок прикладання сил: $\bar{O}(x; 0; 0)$;
 $A(x + OA \cdot \sin \varphi; -OA \cos \varphi; 0)$.

Узагальнені сили Q_x і Q_φ знайдемо за формулою (4), записавши її в розгорнутому вигляді для кожної з величин Q_x і Q_φ :

$$Q_x = \left(F_x \frac{\partial x_1}{\partial x} + F_y \frac{\partial y_1}{\partial x} + F_z \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) + \left(P_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial x} + P_{1y} \frac{\partial y_1}{\partial x} + P_{1z} \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) + \\ + \left(P_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial x} + P_{2y} \frac{\partial y_2}{\partial x} + P_{2z} \frac{\partial z_2}{\partial x} \right), \quad (4.7)$$

$$Q_\varphi = \left(F_x \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + F_y \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} + F_z \frac{\partial z_1}{\partial \varphi} \right) + \left(P_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + P_{1y} \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} + P_{1z} \frac{\partial z_1}{\partial \varphi} \right) + \\ + \left(P_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} + P_{2y} \frac{\partial y_2}{\partial \varphi} + P_{2z} \frac{\partial z_2}{\partial \varphi} \right), \quad (4.8)$$

Щоб уникнути помилок за відсутності досвіду розв'язання подібних задач рекомендується записати проєкції сил і координати точок їх прикладання в розгорнутому вигляді:

$$F_x = F, F_y = 0, F_z = 0; P_{1x} = 0, P_{1y} = 0, P_{1z} = 0.$$

Обидві сили прикладені, як ми вже відмічали, в точці A : позначимо її координати $x_1 = x$; $y_1 = 0$; $z_1 = 0$. Запишемо часткові похідні:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1; \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0; \frac{\partial z_1}{\partial x} = 0; \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} = 0; \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} = 0; \frac{\partial z_1}{\partial \varphi} = 0.$$

Проєкції сили $\bar{P}_2$: $P_{2x} = 0$; $P_{2y} = -m_2g$; $P_{2z} = 0$. Сила $\bar{P}_2$ прикладена в точці B .

Позначимо її координати: $x_2 = x + OA \cdot \sin \varphi$; $y_2 = -OA \cdot \cos \varphi$; $z_2 = 0$.

Запишемо часткові похідні: $\frac{\partial x_2}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial y_2}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial z_2}{\partial x} = 0$;

$$\frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = OA \cos \varphi; \frac{\partial y_2}{\partial \varphi} = -OA \sin \varphi; \frac{\partial z_2}{\partial \varphi} = 0.$$

Виконавши підготовчу роботу, складаємо за (4. 7) і (4. 8) узагальнені сили:

$$Q_x = (F \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) + (0 \cdot 1 + (-m_1 g) \cdot 0 + 0 \cdot 0) + (0 \cdot 1 + (-m_2 g) \cdot 0 + 0 \cdot 0)$$

або

$Q_x = F$ – узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті $q = x$.

Далі,

$$Q_\varphi = (F \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) + (0 \cdot 0 + (-m_1 g) \cdot 0 + 0 \cdot 0) + (0 \cdot OA \cos \varphi + (-m_2 g) \cdot OA \sin \varphi + 0 \cdot 0)$$

або

$Q_\varphi = -m_2 g \cdot OA \cdot \sin \varphi$ – узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті φ .

Третій спосіб розрахунку узагальнених сил використаємо тільки для консервативних сил.

Для консервативних сил справедливі рівності:

$$F_{K_x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, F_{K_y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, F_{K_z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}, \quad (4.9)$$

де Π – потенційна енергія системи.

Вирази (4. 9) підставимо в формулу (4. 4), отримаємо:

$$Q_j = -\sum \left(\frac{\partial \Pi_k}{\partial x_k} + \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right), \quad (4.10)$$

або, враховуючи, що потенційна енергія Π залежить від узагальнених координат складним чином через Декартові координати x_k, y_k, z_k , можемо записати:

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.11)$$

Таким чином, узагальнена сила консервативної системи дорівнює частковій похідній від потенційної енергії за відповідною узагальненою координатою, взятою з оберненим знаком.

Приклад. У попередньому прикладі (рис. 4. 7) приймемо, що сила $F = 0$. Активні сили – сили ваги $\bar{P}_1$ і $\bar{P}_2$ консервативні. Знайдемо потенційну енергію Π , розрахувавши її як роботу сил $\bar{P}_1$ і $\bar{P}_2$ при переміщенні системи з даного положення в горизонтальне:

$$\Pi = -m_2 g \cdot OA \cdot \cos \varphi$$

Узагальнені сили Q_x і Q_φ знайдемо за формулою (4. 10):

$$Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -(-mgOA \cos \varphi)'_x = 0;$$

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -(-mgOA \cos \varphi)'_\varphi = -m_2 g OA \sin \varphi.$$

Примітка: якщо на систему діють і консервативні сили і неконсервативні, то узагальнені сили консервативних сил можна визначити за формулою (4. 10), а неконсервативних сил за першим або другим способом; але іноді консервативні сили не виділяють окремо, і для всіх сил застосовують перший або другий спосіб.

За наявності голономних зв'язків, накладених на систему, число рівнянь Лагранжа другого роду дорівнює числу незалежних узагальнених координат, тобто числу ступенів вільності.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} &= Q_s \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.2. Методика та приклад складання диференціальних рівнянь руху з використанням рівнянь Лагранжа другого роду

Рекомендується дотримуватися такої послідовності розв'язання задачі за

допомогою рівняння Лагранжа другого роду [1,3,5,9]. :

- 1) накреслити систему координат;
- 2) визначити числу ступенів вільності матеріальної системи. Вибрати узагальнені координати $q_1, q_2, \dots, q_s$;
- 3) розрахувати кінетичну енергію механічної системи, виразивши її залежно від вибраних узагальнених координат і узагальнених швидкостей;
- 4) знайти частинні похідні кінетичної енергії за узагальненими швидкостями $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$, тобто

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s},$$

а потім розрахувати їх похідні за часом

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right), \dots, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right);$$

- 5) розрахувати частинні похідні кінетичної енергії T за узагальненими координатами $q_1, q_2, \dots, q_s$, тобто

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}, \frac{\partial T}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial q_s};$$

- 6) зобразити на рисунку сили, прикладені до точок механічної системи;
- 7) якщо не всі зв'язки, накладені на матеріальну систему, є ідеальними, то додати до активних сил відповідні реакції зв'язків (наприклад, сили тертя);
- 8) визначити узагальнені сили, що відповідають вибраним узагальненим координатам за одним з трьох вище викладених способів;
- 9) отримані за пунктами 4, 5 і 8 результати підставити в рівняння Лагранжа другого роду (4.12).

Примітка: пункти 6 і 7 можуть бути виконані до пунктів 4, 4 і 5.

Задача

Скласти, використовуючи рівняння Лагранжа другого роду, диференціальні рівняння руху кранового візка з вантажем по нерухомій стрілі (чи нерухомому мосту), рис. 4. 8 і 4. 9, відповідно.

Складемо розрахункову схему кранового візка, що переміщує вантаж на

канаті:

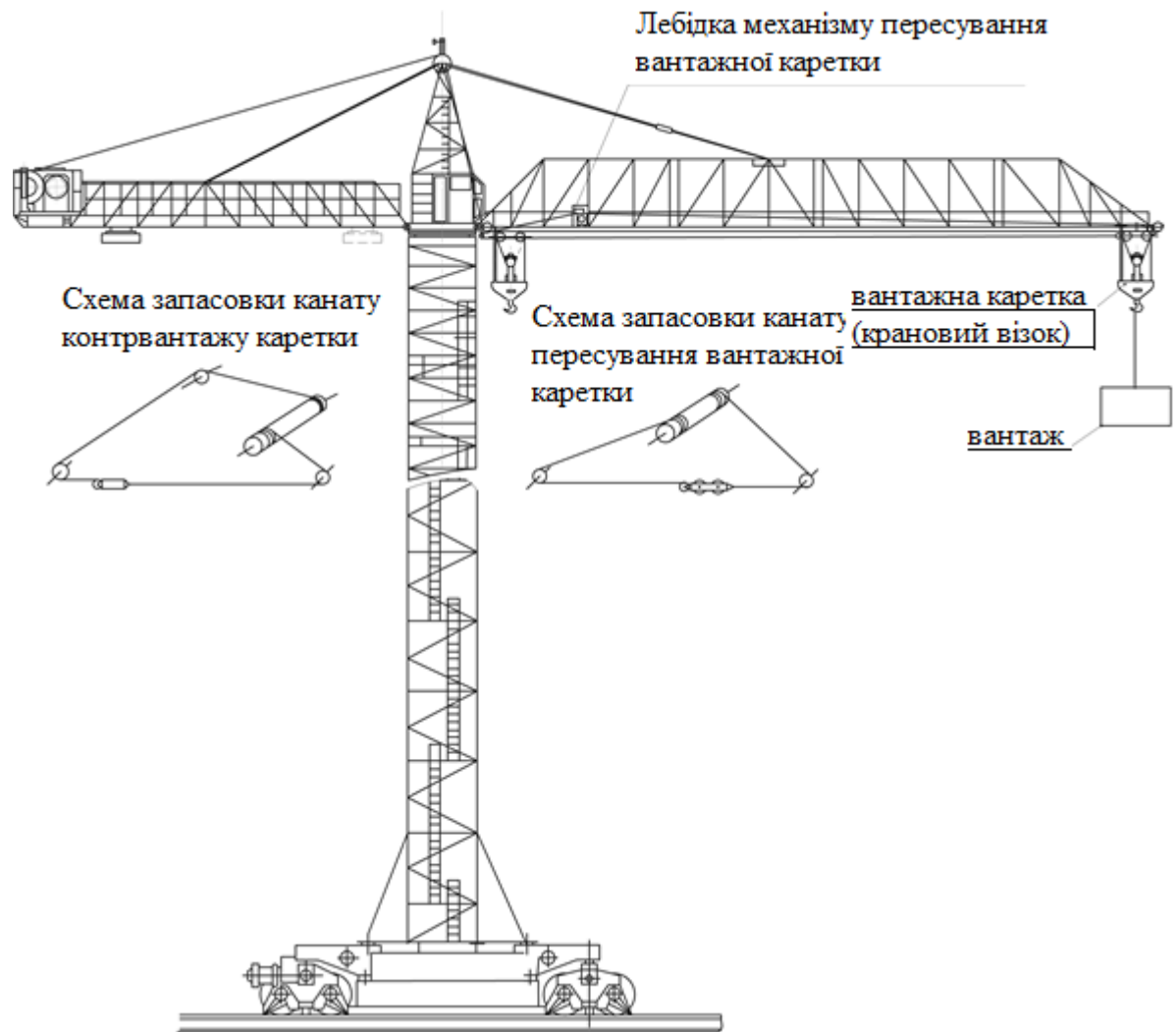


Рис. 4.8

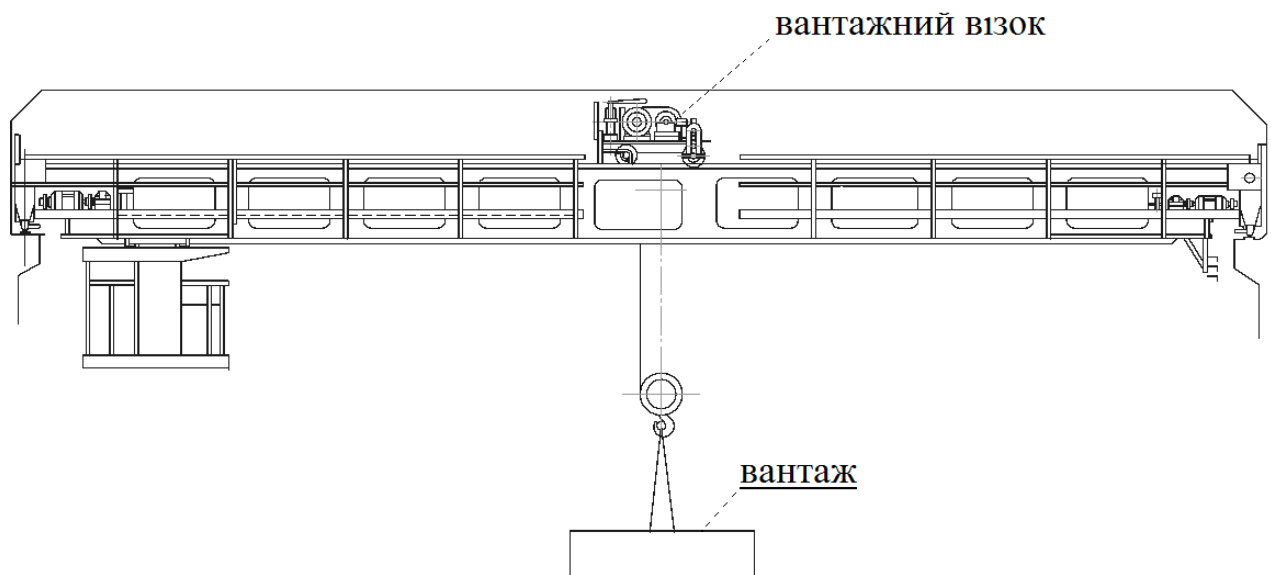


Рис. 4.9

- канат (не важливо одна гілка чи дві) приймаємо за абсолютно нерозтяжний (говорять «абсолютно жорсткий») невагомий стержень довжиною l , до котрого

прикріплений вантаж;

- розміри вантажу не враховуємо і розглядаємо його як матеріальну точку з масою m_2 , рівною масі вантажу (фактично – це модель математичного маятника);

- візок приймаємо за повзун з масою m_1 , який рухається по горизонтальній нерухомій площині (стріла крану чи міст).

Таким чином, отримана наступна розрахункова схема: математичний маятник B масою m_2 коливається навколо горизонтальної осі, що проходить перпендикулярно до площини рисунку через центр ваги повзуна A масою m_1 (рис. 4. 10).

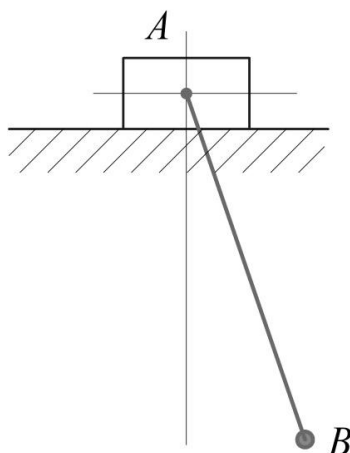


Рис. 4.10

Розв'язання.

1. Проведемо систему координат (рис. 4. 11).

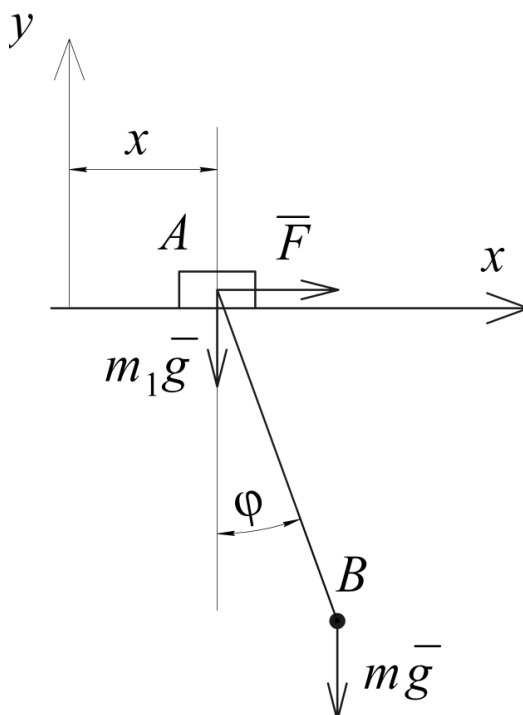


Рис. 4.11

2. Механічна система, що розглядається, підпорядкована голономним ідеальним зв'язкам і має дві ступені вільності, значить, кількість узагальнених координат повинна дорівнювати двом. За узагальнені координати приймаємо: горизонтальне переміщення візка $q_1 = x$ і кутове відхилення маятника (вантажного канату) $q_2 = \varphi$. Ці узагальнені координати однозначно визначають положення механічної системи, що розглядається. Узагальнені швидкості дорівнюють: $q_1 = \dot{x} = v_1$, $q_2 = \dot{\varphi} = \omega$.

Відповідні рівняння Лагранжа мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} &= Q_x \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi \end{aligned} \quad (4.13)$$

3. Розрахуємо кінетичну енергію даної системи. Вона складається з кінетичної енергії повзуна A і кінетичної енергії точки B

$$T = T_1 + T_2, \quad (4.14)$$

Повзун A рухається поступально, тому його кінетична енергія дорівнює

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2. \quad (4.15)$$

Вантаж має складний рух, тому його кінетична енергія розраховується за формулою

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 (v_{abc})^2. \quad (4.16)$$

Абсолютна швидкість точки при її складному русі дорівнює (рис. 4. 12)

$$\bar{V}_{abc} = \bar{V}_{nep} + \bar{V}_{отн}. \quad (4.17)$$

Переносна швидкість $\bar{V}_{nep}$ співпадає з швидкістю повзуна $\bar{V}_1$, а відносна швидкість $\bar{V}_{отн} \perp OM$. На рис. 4. 12 зображений відповідно до (4. 17) паралелограм швидкостей, кут між векторами швидкостей $\bar{V}_{nep}$ і $\bar{V}_{отн}$ дорівнює φ ,

тому $(V_{абс})^2 = V_{пер}^2 + V_{отн}^2 + 2V_{пер}V_{отн} \cos \varphi$. Враховуючи, що

$V_{пер} = V_1 = \dot{x}$; $V_{отн} = AB \cdot \dot{\varphi} = l\dot{\varphi}$, запишемо $(V_{абс})^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi$ і

підставимо в (4. 16), тоді

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2 + m_2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (4.18)$$

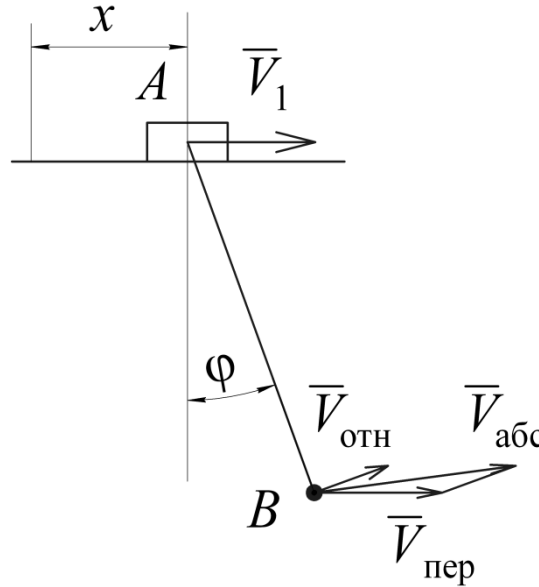


Рис. 4.12

Далі (4. 15) і (4. 18) підставимо в (4. 14):

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2 + m_2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (4.19)$$

4. Знайдемо частинні похідні кінетичної енергії за узагальненими швидкостями.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2l\dot{\varphi} \cos \varphi; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2l^2\dot{\varphi} + m_2l\dot{x} \cos \varphi.$$

Від отриманих виразів розраховуємо похідні за часом

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l\ddot{\varphi} \cos \varphi - m_2l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \quad (4.20)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m_2l^2\ddot{\varphi} + m_2l\ddot{x} \cos \varphi - m_2l\dot{x}\dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (4.21)$$

5. Розрахуємо частинні похідні кінетичної енергії T за узагальненими координатами

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -ml\dot{x}\dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (4.23)$$

6. Зображуємо на рисунку 4. 13 сили, прикладені до точок даної механічної системи.

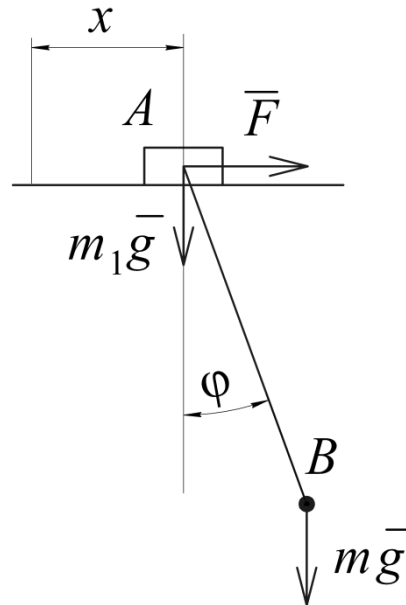


Рис. 4.13

На рисунку зображуються тільки активні сили $\bar{F}$, $m_1\bar{g}$ і $m_2\bar{g}$ (рис. 4. 13), реакції зв'язків зображувати не потрібно, так як на систему накладено ідеальні зв'язки.

7. Силу F (природу котрої поки що не уточнюємо) відносимо до активних сил.

8. Визначаємо узагальнені сили.

Для визначення узагальної сили Q_x потрібно дати можливе переміщення δx , а узагальнену координату $q_2 = \varphi$ вважаємо постійною. Тоді $\delta x \neq 0$, $\delta \varphi = 0$, це означає, що вся система поступально переміщується на δx (рис. 4. 14).

Сили $m_1\bar{g}$ і $m_2\bar{g}$ перпендикулярні до переміщення δx , тому робота цих сил на переміщенні δx дорівнює нулю, сила $\bar{F}$ здійснює роботу. Тоді $\delta A_x = F \cdot \delta x$.

За визначенням, узагальнена сила – це коефіцієнт у виразі узагальної

роботи, що стоїть перед варіацією відповідної узагальненої координати, тому

$$Q_x = F. \quad (4.24)$$

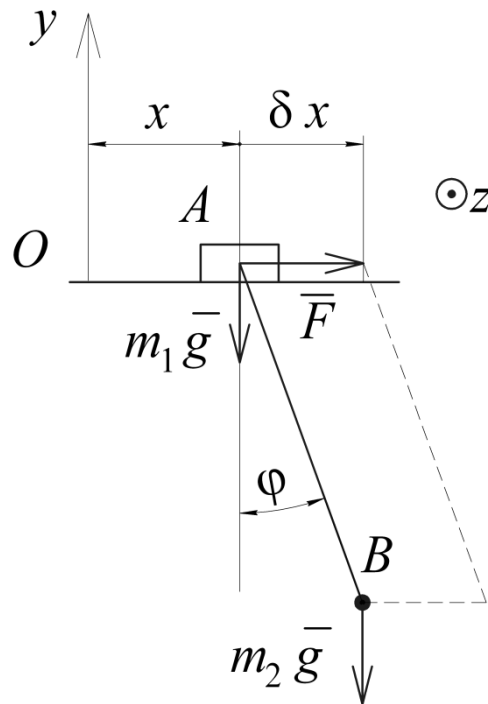


Рис. 4.14

Для визначення узагальненої сили Q_φ дамо системі можливе переміщення $\delta\varphi$, а δx будемо вважати рівним нулю, тобто $\delta\varphi \neq 0$, $\delta x = 0$. Це означає, що при нерухомому повзуні A маятник повертається навколо осі z (вісь z перпендикулярна до площини рисунка) на $\delta\varphi$ (рис. 4. 15).

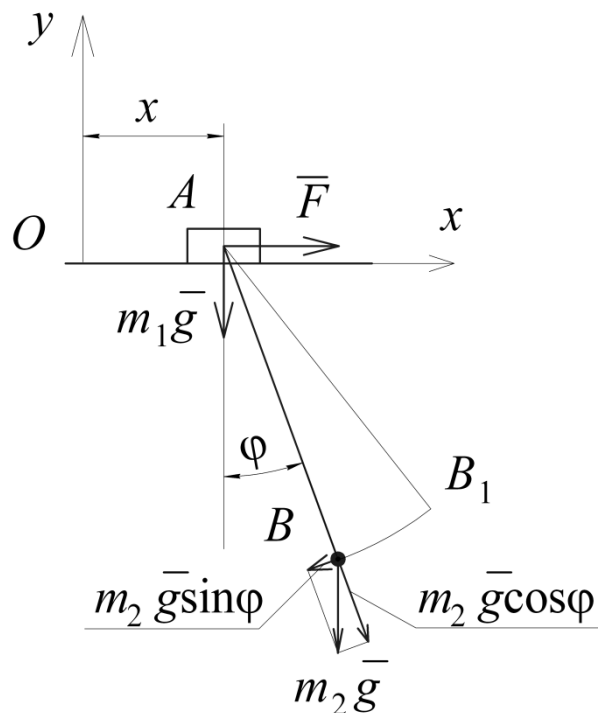


Рис. 4.15

Точка A , точка прикладання сил $\bar{F}$ і $m_1\bar{g}$, залишається нерухомою, отже, робота цих сил на переміщенні $\delta\varphi$ дорівнює нулю.

При розрахунку роботи сили $m_2\bar{g}$ розкладемо її на дві складові (рис. 4. 15). Складова $m_2g \cos \varphi \perp AB$, тому її робота дорівнює нулю; складова $m_2g \sin \varphi$ здійснює роботу, що дорівнює $\delta A_\varphi = -m_2gl \sin \varphi \delta\varphi$.

Узагальнена сила Q_φ – це коефіцієнт, який стоїть у виразі можливої роботи δA_φ перед варіацією $\delta\varphi$:

$$Q_\varphi = -m_2g \sin \varphi . \quad (4.25)$$

Тепер вносимо результати (4. 20), (4. 22) і (4. 24) в перше рівняння системи (4. 13), а (4. 21), (4. 23) і (4. 25) – у друге рівняння системи (4. 13):

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + ml\ddot{\varphi} \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - 0 = F \quad (4.26)$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi = -g \sin \varphi . \quad (4.27)$$

Система рівнянь (4. 26) і (4. 27) описує рух кранового візка, що несе на нерозтяжному канаті вантаж, розрахунковою схемою котрого є математичний маятник з рухомою точкою підвісу.

У залежності від конкретної постановки задачі сила F може бути чи силою опору руху візка, чи рушійною силою, чи пружною силою пружини при наїзді кранового візка на пружний упор, чи сумою цих сил.

5. КОРОТКИЙ ОГЛЯД МЕТОДІВ СКЛАДАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РУХУ, НАВЕДЕНИХ У ДАНОМУ ПОСІБНИКУ

У даному методичному посібнику розглянуті методи складання диференціальних рівнянь руху механічної системи з двома ступенями вільності на прикладі руху математичного маятника, точка підвісу котрого переміщується горизонтально, що в першому наближенні є математичною моделлю кранового візка з вантажем.

Кожний метод має свої особливості. Студентам, які не мають великого досвіду в розв'язанні задач динаміки, важко серед множини теорем, рівнянь, принципів зупинити свій вибір на певному методі і, зробивши вибір, уникнути помилок. Уміння досягається тільки практикою, шляхом проб і помилок. Виконаємо короткий огляд наведених у посібнику методів з метою виділення в них головного й відмінного від інших методів.

Теорема про рух центру мас у поєднанні з динамікою відносного руху точки.

При використанні теореми про рух центру мас механічної системи потрібно зображати на рисунку зовнішні сили, до яких відносяться активні (задані) сили та реакції зв'язків.

Так як реакція зв'язку N_1 невідома (реакція стріли, по якій переміщується візок), то вона повинна бути виключена з диференціальних рівнянь, складених за допомогою цієї теореми. Тому необхідно скласти ще одне диференціальне рівняння, в яке ввійшла б реакція зв'язку N_1 . Це досягається за допомогою динаміки відносного руху точки. Для цього систему «візок (повзун)-маятник» слід роз'єднати і розглянути відносний рух маятника (тобто рух маятника відносно візка). Ось тут-то й необхідно вводити сили інерції, а також активні сили та реакції зв'язків.

Теорему про рух центру мас в поєднанні з динамікою відносного руху точки доцільно застосовувати для механічних систем з однією чи двома ступенями вільності, але не більше. Метод вимагає вміння диференціювати функції.

Як позитивний бік методу – можливість визначити реакцію зв'язку N_1 і з її допомогою дослідити зміну завантаженості металоконструкції стріли (моста) в динаміці, тобто в процесі переміщення візка.

Принцип Д'Аламбера (метод кінестатики)

При використанні принципу Д'Аламбера механічну систему слід роз'єднати на складові частини (у прикладі, що розглядається, – на повзун і маятник). Зобразити активні сили та реакції зв'язків (як у статиці) і додати відповідні сили інерції. Додавання сил інерції «приводить» складові частини механічної системи в стан «спокою».

Складаються рівняння «рівноваги»: два рівняння для повзуна, так як він «знаходиться в рівновазі» під дією плоскої системи сил, які сходяться, і – три рівняння для маятника, котрий «знаходиться в рівновазі» під дією довільної плоскої системи сил.

З отриманих п'яти рівнянь «рівноваги» виключають три реакції зв'язків x_a , y_a і N_1 і отримують шукану систему двох диференціальних рівнянь руху кранового візка з вантажем.

До недоліків методу відноситься його громіздкість – необхідно було скласти п'ять рівнянь. У цьому «недоліку» криється його «перевага» – можливість визначити реакції x_a , y_a і N_1 .

Метод доцільно використовувати до механічної системи з однією чи двома ступенями вільності, але не більше.

Загальне рівняння динаміки

При використанні загального рівняння динаміки сили потрібно ділити на активні та сили інерції. Зв'язки, що діють на точки механічної системи, передбачаються ідеальними чи умовно ідеальними, тобто реакції зв'язків не зображуються і не враховуються в рівняннях!

Сили інерції «врівноважують» механічну систему, що дає можливість застосувати принцип можливих переміщень: системі надається одне з можливих переміщень і записується рівняння роботи активних сил і сил інерції. Потім системі надається інше можливе переміщення і знову записується рівняння робіт.

В отриманих рівняннях робіт «позбавляються» від можливих переміщень і виходять на шукані диференціальні рівняння руху системи.

Явна перевага методу перед принципом Д'Аламбера – не потрібно роз'єднувати систему, але метод все-таки громіздкий з-за необхідності введення

сил інерції. Доцільно використовувати для систем з одним ступенем вільності.

Рівняння Лагранжа другого роду

При використанні рівнянь Лагранжа другого роду враховуються тільки активні сили. Зв'язки розглядаються ідеальними, як і в загальному рівнянні динаміки. Якщо зв'язок не є ідеальним, то його відносять, якщо це можливо, до ідеального зв'язку, і тоді реакцію зв'язку (чи його складові) зараховують до числа активних сил.

Визначають число узагальнених координат. Для механічної системи з голономними зв'язками число узагальнених координат дорівнює числу її ступенів вільності.

При використанні рівнянь Лагранжа другого роду оперують з кінетичною енергією системи, котру виражають через узагальнені швидкості та узагальнені координати. Підкреслимо ще раз, що загальне рівняння динаміки, принцип Д'Аламбера, динаміка відносного руху зв'язані з прискореннями (а через них – з силами інерції). Рівняння Лагранжа другого роду вимагає вміння знаходити частинні та поні похідні складних функцій, а також узагальнені сили, що відповідають узагальненим координатам.

Рівняння Лагранжа другого роду доцільно використовувати, коли механічна система має два ступеня вільності і більше.

За явної переваги рівнянь Лагранжа другого роду перед іншими методами, до недоліків відноситься те, що неможна визначити реакції X_A , Y_A і N_1 . Для їх визначення слід додатково звертатися до принципу Д'Аламбера (метод кінетостатики).

Насамкінець відмітимо таке: методи складання диференціальних рівнянь руху не вичерпуються наведеними чотирма методами. Нами висвітлено наведені методи, виходячи з доцільності їх використання для складання диференціальних рівнянь руху механічної системи з двома ступенями вільності. Тому ми не розглядали інші методи, наприклад, особливості використання загальних теорем динаміки (теорема про зміну кількості руху, теорема про зміну кінетичного моменту, теорема про зміну кінетичної енергії), котрі використовуються, головним чином, при дослідженні механічних систем з одним ступенем вільності.

Для механічної систем з двома ступенями вільності як, наприклад, наведеної в даному посібнику, розглянуті методи не мають явної переваги один перед іншим. Але для механічних систем більш складних, які мають три й більше ступенів вільності, перевага віддається рівнянням Лагранжа другого роду.

ТЕСТ

Доповніть твердження одним словом у відповідному відміннику:

1. В механіці під механічною системою розуміють множину матеріальних точок, рух яких _____.

Виберіть літеру вашої відповіді:

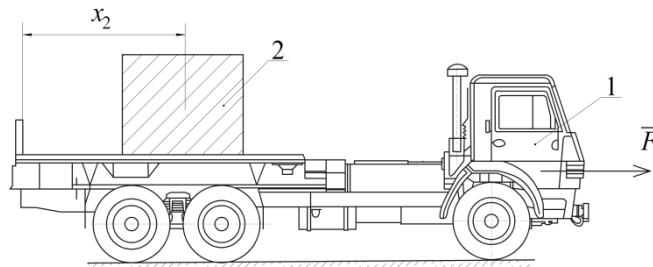
2. Центр мас механічної системи є точкою:

A. геометричною

B. матеріальною

Виберіть літеру вашої відповіді:

3. Результируюча сила $\overline{F}$, що діє на вантажівку, постійна і дорівнює $F = 12$ кН. Маса вантажівки $m_1 = 10000$ кг, маса вантажу $m_2 = 5000$ кг.



Відносно вантажівки рухається вантаж 2 відповідно до рівняння $x_2 = \cos \pi t$.

Прискорення a_1 вантажівки при $t_1 = 1,5$ с дорівнює:

A. $a_1 = 0,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$;

B. $a_1 = 1,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$;

C. $a_1 = 2,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

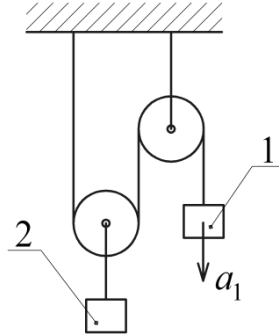
Виберіть літеру вашої відповіді:

4. На рисунку представлений поліспаст. Прискорення вантажу 1 дорівнює $a_1 = 0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Маса вантажу 2 дорівнює $m_2 = 1000$ кг.

Модуль головного вектора $\overline{R}^e$ зовнішніх сил, які діють на вантаж 2, дорівнює:

A. $R^e = 100$ Н,

В. $R^e = 200 \text{ Н}$,
 С. $R^e = 400 \text{ Н}$.



Виберіть літеру вашої відповіді:

5. У формулювання теорема про рух центру мас механічної системи входять сили:

А. внутрішні;

В. зовнішні;

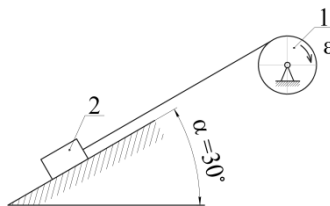
С. внутрішні та зовнішні.

Доповніть твердження одним словом у відповідному відміннику:

6. Центр мас механічної системи переміщується як _____ точка, на котру діють зовнішні сили, прикладені до точок даної механічної системи.

Виберіть літеру вашої відповіді:

7. Вантаж 2 масою $m_2 = 100 \text{ кг}$ піднімається по нахиленій площині за допомогою тросу, що намотується на барабан 1 радіусом $r = 0,5 \text{ м}$. Кутове прискорення барабану $\varepsilon = 2 \text{ с}^{-2}$.



Модуль головного вектора зовнішніх сил $\overline{R}^e$, які діють на вантаж 2, дорівнює:

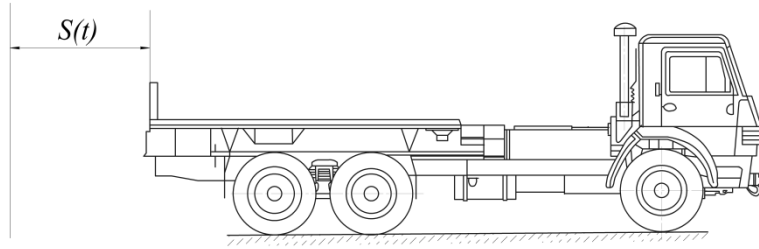
А. $R^e = 50 \text{ Н}$;

В. $R^e = 100 \text{ Н}$;

С. $R^e = 200 \text{ Н}$.

Виберіть літеру вашої відповіді:

8. Вантажівка масою $m_1 = 10000$ кг рухається в горизонтальному напрямку відповідно до закону $s(t) = 2t^2 + 0,5t + 1$, м.



Модуль головного вектора зовнішніх сил $\overline{R}^e$, які діють на вантажівку, дорівнює:

- A. $R^e = 10$ кН;
- B. $R^e = 20$ кН;
- C. $R^e = 40$ кН;
- D. $R^e = 45$ кН.

Виберіть літеру вашої відповіді:

9. У формулювання теорема про рух центру мас механічної системи входять:

- A. активні сили та реакції зв'язків;
- B. реакції зв'язків і внутрішні сили;
- C. внутрішні сили та активні сили.

Виберіть вашу відповідь у відповідності до приведеної нижче схеми:

відповідь	твердження 1	твердження 2	зв'язок
A	вірно	вірно	вірно
B	вірно	вірно	невірно
B	невірно	вірно	невірно
Г	невірно	невірно	вірно
Д	вірно	невірно	вірно

10. Центр мас механічної системи переміщується як матеріальна точка тому, що центр мас механічної системи є геометричною точкою.

A; B; B; Г; Д

Виберіть вашу відповідь у відповідності до приведеної нижче схеми:

відповідь	твердження 1	твердження 2	зв'язок
A	вірно	Вірно	вірно
B	вірно	Вірно	невірно
B	невірно	Вірно	невірно
Г	невірно	Невірно	вірно
Д	вірно	Невірно	вірно

11. Реакції зв'язків входять у формулювання теореми про рух центру мас тому, що реакції зв'язків відносяться до зовнішніх сил.

A; B; B; Г; Д

Доповніть твердження одним словом у відповідному відміннику:

12. Для того, щоб скласти рівняння динаміки відносного руху точки в рухомій (інерційній) системі координат, потрібно до активних сил і реакціям зв'язків додати переносну та Коріолісову сили _____.

Виберіть літеру вашої відповіді:

13. У загальному вигляді рівняння відносного руху точки має вигляд:

A. $m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{R}$

B. $m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_{\text{кор}}$

Виберіть літеру вашої відповіді:

14. В інерційній системі відрахунку виконуються закони Ньютона:

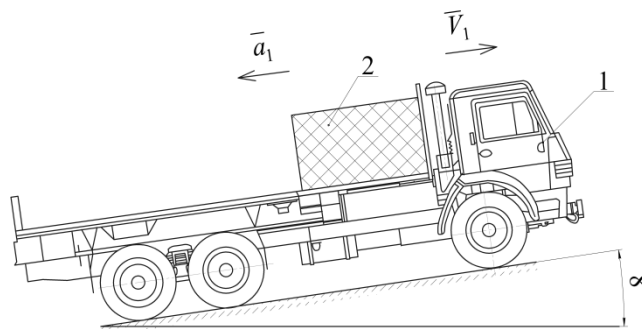
A. перший і другий;

B. другий і третій;

C. третій і перший.

Виберіть літеру вашої відповіді:

15. Вантажний автомобіль рухається на підйомі з постійним уповільненням $a_1 = 1,5 \text{ м/с}^2$. Сила тиску N вантажу 2 масою $m_2 = 500 \text{ кг}$ на передню стінку кузова дорівнює:



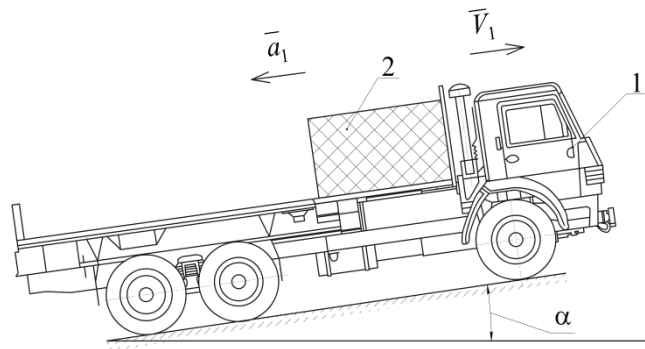
A. $N = 67,36 \text{ Н};$

B. $N = 490,5 \text{ Н};$

C. $N = 750 \text{ Н}.$

Виберіть літеру вашої відповіді:

16. Вантажний автомобіль рухається на підйомі з постійним уповільненням a_1 . Вантаж 2 не здійснює тиску на передню стінку кузова при прискоренні автомобіля a_1 , що дорівнює:



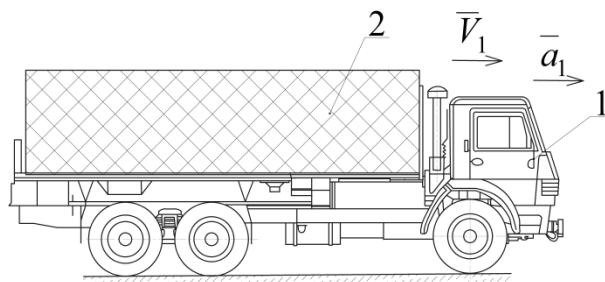
A. $a_1 = 0$;

B. $a_1 = g \cdot \cos \alpha$;

C. $a_1 = g \cdot \sin \alpha$.

Виберіть літеру вашої відповіді:

17. Вантажний автомобіль рухається по горизонтальній дорозі з прискоренням. Вантаж 2 буде здійснювати тиск на:



A. передню стінку кузова;

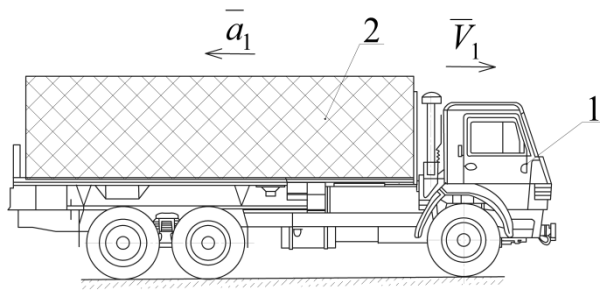
B. задню стінку кузова.

Виберіть літеру вашої відповіді:

18. Вантажний автомобіль рухається по горизонтальній дорозі з уповільненням. Вантаж 2 буде здійснювати тиск на:

A. передню стінку кузова;

B. задню стінку кузова.



Виберіть літеру вашої відповіді:

19. На рисунку 1 вантажний автомобіль рухається на підйом з постійним уповільненням a_1 . На рисунку 2 той же автомобіль з'їжджає з уповільненням під уклін.

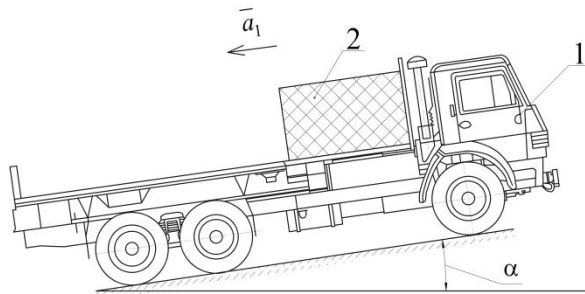


Рис. 1

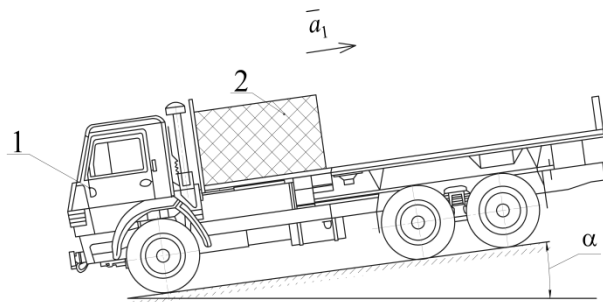


Рис. 2

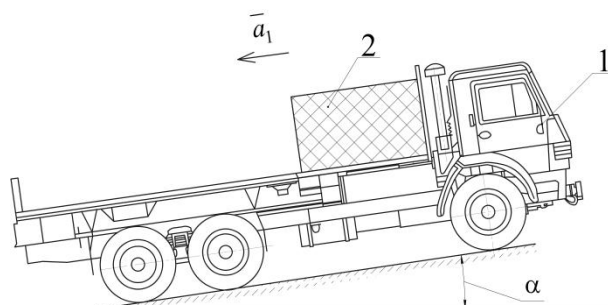
Тиск на передню стінку кузова більше.

А. на рис. 1;

В. на рис. 2.

Виберіть літеру вашої відповіді:

20. Вантажний автомобіль їде на підйом з постійним уповільненням a_1 .



Вантаж 2 не здійснює тиск на передню стінку кузова при прискоренні автомобіля a_1 , який дорівнює:

A. $a_1 = 0$;

B. $a_1 = g \cdot \cos \alpha$;

C. $a_1 = g \cdot \sin \alpha$.

Виберіть літеру вашої відповіді:

21. Рівняння динаміки відносного руху точки співпадає з рівнянням абсолютного руху точки, тобто $m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{R}$, якщо рухома система координат рухається:

A. поступально;

B. поступально й прямолінійно;

C. поступально, прямолінійно й рівномірно.

Виберіть літеру вашої відповіді:

22. Рівняння динаміки відносного руху точки має вигляд $m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e$ у випадку, коли рухома система координат рухається:

A. рівномірно;

B. поступально.

Виберіть літеру вашої відповіді:

23. Рівняння $m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{R}$ має місце в системі координат:

A. інерційній;

B. неінерційній.

Виберіть літеру вашої відповіді:

24. Інерційна система координат рухається:

A. прямолінійно;

B. рівномірно;

C. прямолінійно і рівномірно.

Виберіть літеру вашої відповіді:

25. При поєднанні теореми про рух центру мас з динамікою відносного руху точки механічна система:

А. роз'єднується на окремі елементи;

В. не роз'єднується на окремі елементи.

Виберіть літеру вашої відповіді:

26. По відношенню до даної точки сила інерції є:

А. фіктивною силою;

В. реальною силою.

Доповніть твердження одним словом у відповідному відміннику:

27. Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки: при русі матеріальної точки активні сили, сили реакцій зв'язків і сили інерції утворюють систему сил, еквівалентну _____ .

Виберіть літеру вашої відповіді:

28. Рівновага матеріальної точки в принципі Д'Аламбера є:

А. фіктивною;

В. дійсною.

Доповніть твердження одним словом у відповідному відміннику:

29. Задача про рух матеріальної точки під дією активних сил і реакції зв'язків замінюється еквівалентною їй задачею про _____ цієї точки за умови дії на неї вказаних сил і сил інерції.

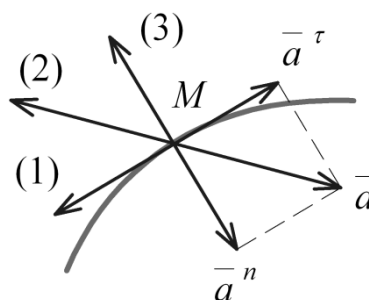
Доповніть твердження одним словом у відповідному відміннику:

30. Методом кінетостатики (принцип Д'Аламбера) називається фіктивний прийом, який дає можливість до задачі динаміки застосувати рівняння _____ .

Виберіть літеру вашої відповіді:

31. На рисунку представлений загальний випадок нерівномірного криволінійного руху точки.

Дотична сила інерції $\overline{\Phi}^{\tau}$ направлена:



А. по (1)

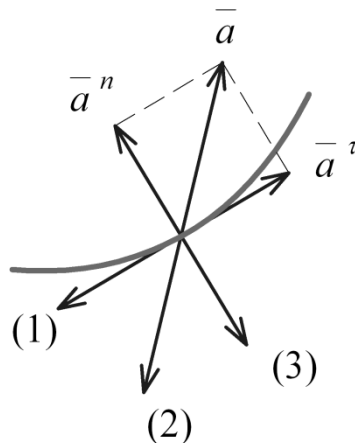
В. по (2)

С. по (3)

Виберіть літеру вашої відповіді:

32. Центр мас механічної системи переміщується як точка, на котру діють зовнішні сили, прикладені до точок даної механічної системи.

Нормальна сила інерції $\overline{\Phi}^n$ направлена:



А. по (1)

В. по (2)

С. по (3)

Доповніть твердження одним словом у відповідному відміннику:

33. Головний вектор сил інерції твердого тіла дорівнює за модулем добутку маси твердого тіла та прискорення його центру мас і направлений в бік, _____ цьому прискоренню.

Доповніть твердження одним словом у відповідному відміннику:

34. Головний момент сил інерції твердого тіла $\overline{M}_O^\Phi$ відносно деякого центру O дорівнює першій похідній за часом, взятої зі знаком мінус, від _____ моменту системи, розрахованої відносно того ж центру.

Виберіть вашу відповідь відповідно до наведеної схеми:

відповідь	твердження 1	твердження 2	зв'язок
А	верно	верно	неверно
Б	верно	верно	верно
В	неверно	верно	неверно
Г	верно	неверно	неверно
Д	неверно	неверно	не верно

Виберіть літеру вашої відповіді:

35. Головний вектор сил інерції твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, на котрій знаходиться центр мас тіла, дорівнює нулю тому, що головний вектор сил інерції є інваріантом.

А; Б; В; Г; Д.

Виберіть:

A – якщо фраза зв'язана тільки з *A*

B – якщо фраза зв'язана тільки з *B*

C – якщо фраза зв'язана тільки з *A*, і з *B*

D – якщо фраза не зв'язана ні з *A*, ні з *B*

36. Визначте наявність сил інерції матеріальної точки

(ТЗ – транспортний засіб)

Відмінні ознаки руху точки	Сили інерції
1. ТЗ, який приймається за матеріальну точку, рухається з постійною швидкістю	А. Дотична сили інерції $\Phi^r = 0$
2. ТЗ, який приймається за матеріальну точку, рухається прискорено по криволінійній ділянці	В. Нормальна сила інерції $\Phi^n = 0$
3. ТЗ, який приймається за матеріальну точку, рухається по прямолінійній ділянці дороги	С. Обидві сили інерції: дотична та нормальна дорівнюють нулю $\Phi^r = 0$, $\Phi^n = 0$
4. ТЗ, який приймається за матеріальну точку, рухається рівномірно по заокругленій ділянці дороги	Д. Обидві сили інерції: дотична та нормальна не дорівнюють нулю $\Phi^r \neq 0$, $\Phi^n \neq 0$
5. ТЗ, який приймається за матеріальну точку, рухається рівномірно по прямолінійній ділянці дороги	

1 А; 2 Д; 3 В; 4 А; 5 С.

Виберіть літеру вашої відповіді:

37. Головний вектор сил інерції твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, на котрій знаходиться центр мас тіла тому, що головний вектор сил інерції дорівнює нулю, коли прискорення центру мас дорівнює нулю.

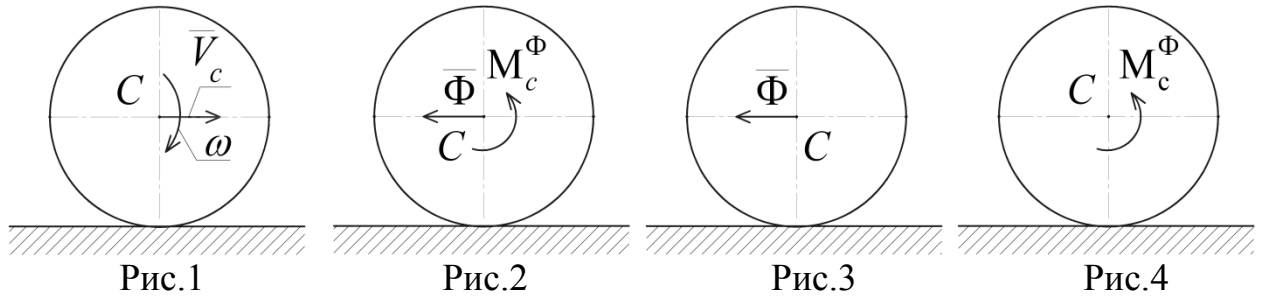
А; Б; В; Г; Д.

Доповніть твердження одним словом у відповідному відміннику:

38. При поступальному русі твердого тіла сили інерції точок тіла приводяться до _____.

Виберіть вашу відповідь:

39. Колесо котиться рівномірно без проковзування (рис. 1).



Сили інерції приводяться за схемою:

A. на рис. 2

B. на рис. 3

C. на рис. 4

D. немає схеми, так як $\Phi = 0$ і $M_c^\Phi = 0$.

Виберіть вашу відповідь:

40. При складанні диференціальних рівнянь руху кранового візка, що несе вантаж, методом кінетостатики:

A. потрібно роз'єднувати систему

B. не потрібно роз'єднувати систему

Виберіть вашу відповідь відповідно до приведеної нижче схеми:

А	Б	В	Г	Д
якщо вірно, тільки 1, 2, 3	якщо вірно, тільки 2, 3, 4	якщо вірно, тільки 1, 3, 4	якщо вірно, тільки 1, 2, 4	якщо все вірно

41. При розв'язанні задач методом кінетостатики слід вводити сили:

1. зовнішні

2. внутрішні

3. реакції зв'язків

4. сили інерції.

Виберіть літеру вашої відповіді:

42. У загальне рівняння динаміки входять сили:

A. активні та реакції зв'язків

B. реакції зв'язків і сили інерції

C. сили інерції та активні сили

Виберіть літеру вашої відповіді:

43. Робот сил інерції точок механічної системи на можливому переміщенні в бік шуканого прискорення може бути:

A. менше нуля

B. менше нуля і дорівнює нулю

C. менше нуля, дорівнює нулю і більше нуля

Виберіть літеру вашої відповіді:

44. Сила інерції завжди направлена:

A. у бік відповідного прискорення

B. у протилежний бік відповідного прискорення

Виберіть:

A. – якщо фраза зв'язана тільки з *A*

B – якщо фраза зв'язана тільки з *B*

C – якщо фраза зв'язана тільки з *A*, і з *B*

D – якщо фраза не зв'язана ні з *A*, ні з *B*.

45. Визначення головного вектора та головного моменту сил інерції твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

Відмінні ознаки обертання твердого тіла навколо нерухомої осі	Головний вектор і головний момент сил інерції
1. Центр мас знаходиться на осі обертання	<i>A.</i> Головний вектор сил інерції дорівнює нулю $\Phi = 0$
2. Тверде тіло обертається рівномірно і центр мас знаходиться на осі обертання	<i>B.</i> Головний момент сил інерції дорівнює нулю $M_z^\Phi = 0$
3. Тверде тіло обертається рівномірно	<i>C.</i> Головний вектор і головний момент сил інерції дорівнюють нулю $\Phi = 0$ $M_z^\Phi = 0$
4. Тверде тіло обертається нерівномірно і центр мас зміщений від осі обертання	<i>D.</i> Головний вектор і головний момент не дорівнюють нулю $\Phi \neq 0$ $M_z^\Phi \neq 0$
5. Тверде тіло обертається рівномірно і центр мас зміщений від осі обертання	

1 *A*; 2 *C*; 3 *B*; 4 *D*; 5 *B*.

Виберіть літеру вашої відповіді:

46. Загальне рівняння динаміки, записане для системи з ідеальними зв'язками:

A. містить реакції зв'язків

B. не містить реакції зв'язків

Виберіть літеру вашої відповіді:

47. При використанні загального рівняння динаміки враховують:

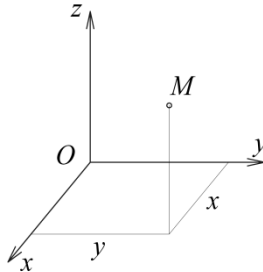
A. активні сили

B. активні сили та сили інерції

C. активні сили, сили інерції та реакції зв'язків.

Виберіть літеру вашої відповіді:

48. Матеріальна точка M вільно рухається в просторі.



Число ступенів вільності n матеріальної точки дорівнює:

A. $n = 1$

B. $n = 2$

C. $n = 3$

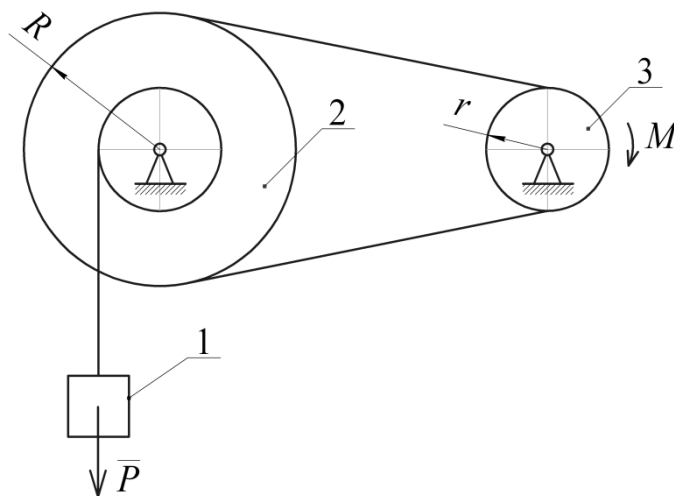
D. $n = 6$.

Доповніть твердження одним словом у відповідному відміннику:

49. Число ступенів вільності твердого тіла, що має одну закріплену точку, дорівнює _____.

Виберіть літеру вашої відповіді:

50. Радіуси шківів: $R = 2r = 60$ см. Вантаж 1 вагою $P = 1000$ Н піднімається рівномірно. Модуль моменту M пари сил, який необхідно прикласти до шківу 3, дорівнює



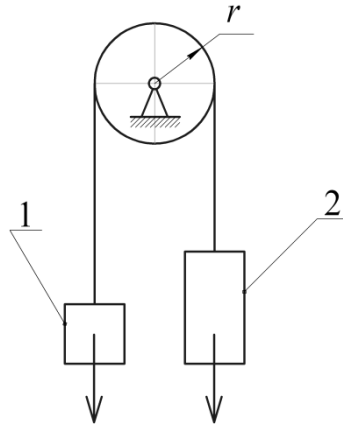
A. $M = 150$ Нм

B. $M = 300 \text{ Нм}$

C. $M = 600 \text{ Нм}$.

Виберіть літеру вашої відповіді:

51. Маса вантажу $m_2 = 2m_1$. Масу блоку не враховувати. Прискорення вантажів a дорівнює:



A. $a = 0,5 \frac{M}{c^2}$

B. $a = 1 \frac{M}{c^2}$

C. $a = 3,27 \frac{M}{c^2}$

D. $a = 9,81 \frac{M}{c^2}$.

Виберіть літеру вашої відповіді:

52. Елементарні роботи сил інерції в загальному рівнянні динаміки, складеному для механічної системи на можливому переміщенні, що відповідає будь-якій одній з ступенів вільності:

A. можуть мати різні знаки

B. повинні мати однакові знаки.

Виберіть вашу відповідь відповідно до приведеної нижче схеми:

А	Б	В	Г	Д
якщо вірно тільки 1, 2, 5	якщо вірно тільки 1, 3, 5	якщо вірно тільки 2, 4, 5	якщо вірно тільки 3, 4, 5	якщо все вірно

53. При складанні загального рівняння динаміки для механічної системи, що розглядається, слід:

1. враховувати число ступенів вільності цієї механічної системи

2. вводити реакції зв'язків

3. вводити сили інерції

4. враховувати внутрішні сили системи

5. враховувати активні сили

Виберіть літеру вашої відповіді:

54. Принцип можливих переміщень застосуємо для механічної системи:

A. у випадку її рівноваги

B. при її русі.

Виберіть літеру вашої відповіді:

55. Загальне рівняння динаміки застосуємо для механічної системи:

A. у випадку її рівноваги

B. при її русі

Виберіть вашу відповідь відповідно до приведеної нижче схеми:

А	Б	В	Г	Д
якщо вірно тільки 2, 3, 5	якщо вірно тільки 1, 4, 5	якщо вірно тільки 1, 2, 3, 5	якщо вірно тільки 1, 2, 4, 5	якщо все вірно

56. Переміщення називаються можливими чи віртуальними, якщо вони:

1. елементарні

2. уявні

3. руйнують зв'язки

4. не суперечать зв'язкам

5. відбуваються в фіксований момент часу.

Виберіть літеру вашої відповіді:

57. Роз'єднання механічної системи з двома ступенями вільності на окремі елементи потрібно при використанні:

A. загального рівняння динаміки

B. динаміки відносного руху

Виберіть літеру вашої відповіді:

58. Введення сил інерції потрібно при використанні:

A. загального рівняння динаміки та теореми про рух центру мас системи

B. теореми про рух центру мас системи та динаміки відносного руху

Виберіть літеру вашої відповіді:

59. У принцип можливих переміщень входять:

А. активні сили

В. активні сили та сили інерції

С. Активні сили, сили інерції та реакції зв'язків

Доповніть твердження одним словом у відповідному відміннику:

60. Можливі переміщення механічної системи розглядають як нескінченно _____ переміщення.

Виберіть літеру вашої відповіді:

61. Дійсне переміщення співпадає з одним з можливих переміщень, коли зв'язки:

А. стаціонарні

В. нестаціонарні

Виберіть вашу відповідь відповідно до приведеної нижче схеми:

відповідь	твердження 1	твердження 2	зв'язок
А	вірно	вірно	невірно
Б	невірно	вірно	вірно
В	невірно	невірно	невірно
Г	вірно	невірно	вірно
Д	вірно	вірно	невірно

62. Принцип можливих переміщень застосовується для механічних систем з ідеальними зв'язками, тому що принцип можливих частковим випадком загального рівняння динаміки.

Відновити відповідність у вигляді комбінації цифр і літер:

63. Розмірності узагальненої сили Q . Залежність від розмірності узагальненої координати q :

Найменування узагальненої координати	Розмірність узагальненої координати	Розмірність узагальненої координати
1. Узагальнена координата представлена лінійною величиною	А. $[q] \cdot \text{м}^2$	I. $[Q] \frac{\text{Н}}{\text{м}}$
2. Узагальнена координата представлена кутовою величиною	В. $[q] \text{рад}$ С. $[q] \text{м}$	II. $[Q] \text{Нм}$ III. $[Q] \text{Н}$ IV. $[Q] \text{Нм}^2 \text{II}$

1. *C* ____; 2. *B* ____.

Виберіть вашу відповідь відповідно до приведеної нижче схеми:

А	Б	В	Г	Д
якщо вірно тільки 1 і 3	якщо вірно тільки 2 і 3	якщо вірно тільки 1 і 4	якщо вірно тільки 2 і 4	якщо все вірно

64. Узагальнені координати – це:

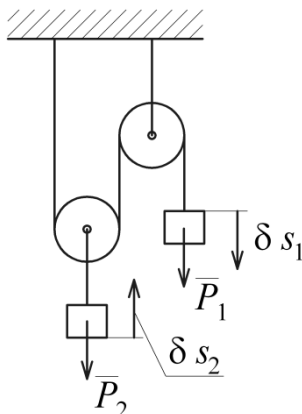
1. незалежні параметри
2. залежні параметри
3. параметри, що однозначно визначають положення всіх точок
4. тільки Декартові координати

Доповніть твердження одним словом у відповідному відміннику:

65. Зв'язок називається ідеальним, якщо можлива робота реакції зв'язку на будь-якому _____ переміщенні системи дорівнює нулю.

Виберіть вашу відповідь відповідно до приведеної нижче схеми:

66. Можливі переміщення δs_2 і δs_1 зв'язані залежністю:



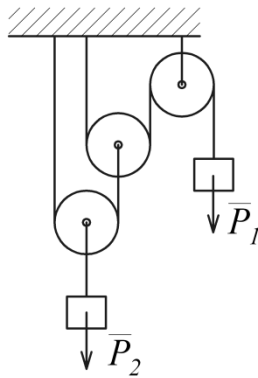
- A. $\delta s_2 = \delta s_1$
- B. $\delta s_2 = 2\delta s_1$
- C. $\delta s_2 = 0.5\delta s_1$.

Виберіть літеру вашої відповіді:

67. Поліспаст знаходиться в рівновазі

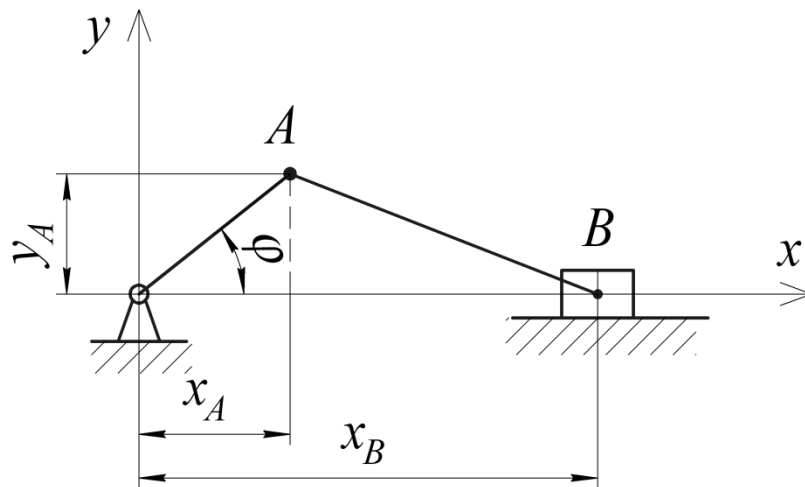
При цьому

- A. $P_2 = P_1$
- B. $P_2 = 2P_1$
- C. $P_2 = 4P_1$.



Виберіть літеру вашої відповіді:

68. Представлений кривошипно-шатунний механізм, який має одну ступінь вільності. Узагальненою координатою q може бути:



A. $q = X_A$

B. $q = Y_A$

C. $q = X_B$

D. $q = \varphi$.

Виберіть вашу відповідь відповідно до приведеної нижче схеми:

А	Б	В	Г	Д
якщо вірно тільки 1	якщо вірно тільки 2	якщо вірно тільки 3	якщо вірно тільки 4	якщо все вірно

69. Розмірність узагальненої сили – це:

1. розмірність сили
2. розмірність моменту
3. розмірність, яка відповідає розмірності узагальненої координати
4. розмірність тиску

Виберіть вашу відповідь відповідно до приведеної нижче схеми:

відповідь	твердження 1	твердження 2	зв'язок
А	вірно	Вірно	вірно
Б	вірно	Вірно	невірно
В	невірно	Вірно	невірно
Г	вірно	Невірно	невірно
Д	невірно	Невірно	невірно

70. Узагальнені координати однозначно визначають положення сіх точок механічної системи тому, що узагальнені координати сумісні зі зв'язками.

Виберіть літеру вашої відповіді:

71. Сума елементарних робіт всіх сил, діючих на деяку механічну систему, записана у вигляді:

$$\delta A = 20 \cdot \delta q_1 + 10 \cdot \delta q_2 + 50 \cdot \delta q_3$$

Узагальнена сила Q_3 , яка відповідає узагальненій координаті q_3 , дорівнює:

A. $Q_3 = 10$

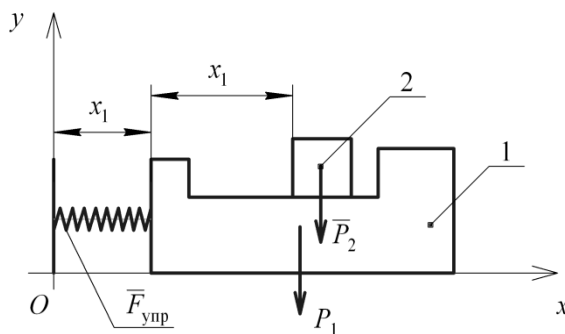
B. $Q_3 = 20$

C. $Q_3 = 50$

D. $Q_3 = 80$.

Виберіть літеру вашої відповіді:

72. Маса твердих тіл $m_1 = 20$ кг, $m_2 = 10$ кг. Узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті x_2 , дорівнює:



A. $Q_{x_2} = 0$

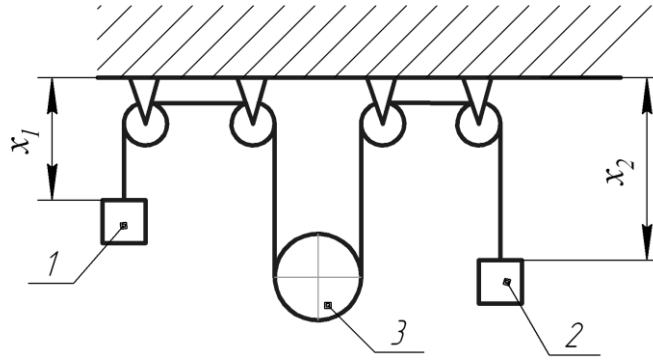
B. $Q_{x_2} = 100H$

C. $Q_{x_2} = 200H$

D. $Q_{x_2} = 300H$.

Виберіть літеру вашої відповіді:

73. Вантажі 1 і 2 і циліндр 3, маси котрих дорівнюють $m_1 = 200$ кг, $m_2 = 400$ кг, $m_3 = 300$ кг рухаються у вертикальній площині. Узагальнені координати $q_1 = x_1$ і $q_2 = x_2$. Узагальнена сила Q_{x_1} , яка відповідає узагальненій координаті $q_1 = x_1$, дорівнює (прийняти, що $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$):



- A. $Q_{x_1} = 500$ Н
- B. $Q_{x_1} = 2000$ Н
- C. $Q_{x_1} = 3000$ Н
- D. $Q_{x_1} = 4000$ Н.

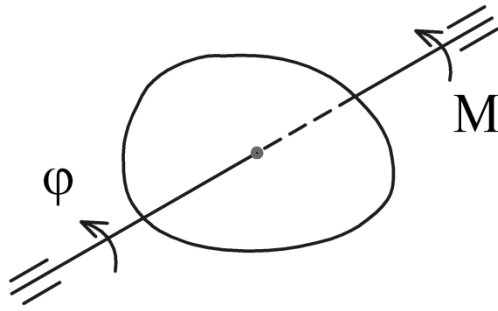
Виберіть літеру вашої відповіді:

74. Кінетична енергія деякої механічної системи $T = 3 \cdot \dot{S}^2$, потенціальна енергія $\Pi = 300 \cdot \dot{S}^2$. У момент часу, коли координата $S = 0,01$ м, прискорення $\ddot{S}$ дорівнює:

- A. $\ddot{S} = 0$
- B. $\ddot{S} = -1$
- C. $\ddot{S} = 1$.

Виберіть літеру вашої відповіді:

75. Кінетична енергія диску, виражена через узагальнену швидкість $\dot{\phi}$, дорівнює: $T = 6 \cdot \dot{\phi}^2$. На диск діє пара сил з моментом $M = 6$ Нм. Кутове прискорення ϵ диску дорівнює:



A. $\varepsilon = 0,5 \text{ c}^{-2}$

B. $\varepsilon = 1 \text{ c}^{-2}$

C. $\varepsilon = 2 \text{ c}^{-2}$.

Виберіть літеру вашої відповіді:

76. Узагальнені координати деякої механічної системи $q_1 = x_1$, $q_2 = y$, $q_3 = z$. Кінетична енергія дорівнює $T = 1,5\dot{x}^2 + 2,1\dot{y}^2 + 10\dot{z}^2$, потенціальна енергія $\Pi = -5x + 7y$.

Прискорення $\ddot{z}$ дорівнює:

A. $\ddot{z} = -10$

B. $\ddot{z} = 0$

C. $\ddot{z} = 10$

D. $\ddot{z} = 20$.

Виберіть літеру вашої відповіді:

77. При складанні диференціальних рівнянь руху механічної системи з використанням рівнянь Лагранжа другого роду механічну систему:

A. слід роз'єднувати

B. не слід роз'єднувати

Виберіть літеру вашої відповіді:

78. При складанні диференціальних рівнянь руху механічної системи з використанням рівнянь Лагранжа другого роду, де сили інерції:

A. слід вводити

B. не слід вводити

Виберіть літеру вашої відповіді:

79. Сили інерції слід вводити, коли звертаються:

A. до загального рівняння динаміки

В. до рівнянь Лагранжа другого роду

Виберіть літеру вашої відповіді:

80. До можливих переміщень звертаються при складанні диференціальних рівнянь руху з використанням:

А. загального рівняння динаміки та теореми про рух центру мас

В. теореми про рух центру мас і рівнянь Лагранжа другого роду

С. Рівнянь Лагранжа другого роду та загального рівняння динаміки.

ВІДПОВІДІ ДО ТЕСТУ

1. взаємозв'язані	Метод кінетостатики	53. 1
2. геометричною	26. А	54. А
3. А	27. нулю	55. В
4. А	28. А	56. Г
5. В	29. рівновагу	57. В
6. матеріальна	30. рівноваги (статики)	58. С
7. В	31. А	59. А
8. С	32. С	60. першого
9. А	33. 1А; 2D; 3В; 4А; 5С	61. А
10. Б	34. протилежну	62. Д
11. А	35. кінетичну	63. $\underline{1} \underline{C} \underline{///} ; \underline{2} \underline{B} \underline{//}$
Динаміка відносного руху точки	36. А	64. А
12. інерції	37. Б	65. можливому
13. В	38. рівнодіючої	66. С
14. А	39. D	67. С
15. А	40. 1А; 2В; 3В; 4D; 5В	68. D
16. В	41. А	69. В
17. В	42. В	70. А
18. А	Загальне рівняння динаміки	71. С
19. В	43. С	72. А
20. В	44. В	73. А
21. С	45. В	74. В
22. В	46. В	75. А
23. А	47. В	76. В
24. С	48. С	77. В
25. А	49. трьом	78. В
	50. А	79. А
	51. С	80. С
	52. В	

ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Основи інженерної механіки : навчальний посібник / В.І. Зінченко, Л.М. Мамаєв, Ю.С. Постольник – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2004. – 444 с.
2. Яскілко М.Б. Збірник задач для розрахунково–графічних робіт з теоретичної механіки / М.Б. Яскілко – К.: Вища школа, 1999. – 362 с.
3. Павловський М.А. Теоретична механіка: підручник / М.А. Павловський – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
4. Теоретична механіка: підручник; Ч1: Кінематика. / А.А. Бондаренко, О.О. Дубінін, О.М. Переславцев – К.: Знання, 2004. – 599 с.
5. Теоретична механіка: підручник; Ч2 : Динаміка / А.А. Бондаренко, О.О. Дубінін, О.М. Переславцев – К.: Знання, 2004. – 590 с.
6. Моделювання систем у середовищі MATLAB-SIMULINK: комп'ютерний практикум / М.Д. Гераїмчук, Ю.Ф. Лазарєв, Т.О. Толочко – К.:, 2006. – 175 с.

Додаткова

7. Омаров М.А. Основи теоретичної механіки. Ч. 1: навчальний посібник / М.А. Омаров – Харків: ХНУРЕ, 2017. – 184 с.
8. Потєхін, А.Ф. Короткий курс теоретичної механіки в запитаннях та відповідях з аналізом базових понять : навчальний посібник / А.Ф. Потєхін. – 2-е вид., випр. – Львів : Новий Світ-2000, 2011. – 200 с.
9. Теоретична механіка : навчальний посібник / [П.К. Штанько та ін. ; за заг. ред. Штанька]; – Запоріжжя: ЗНТУ, 2013. – 376 с.
10. Романюк О.Д., Теліпко Л.П., Ракша С.В. Теоретична та прикладна механіка. Короткий курс / О.Д. Романюк, Л.П. Теліпко, С.В. Ракша. Кам'янське: ДДТУ, 2021. – 282 с.
11. Федуліна А.І. Теоретична механіка: навчальний посібник / А.І. Федуліна. К. : Вища шк., 2005. – 319 с.
12. Шанайда В.В. Пакет MathCAD в інженерних розрахунках / В.В. Шанайда.

Тернопіль : Видавництво ТДТУ, 2001. – 163 с.

13. Петрик М. MathCAD-технології в інженерних задачах теорії розрахунку і конструювання / М. Петрик. Тернопіль: ТДТУ ім. І. Пулюя, 2000. – 154 с.
14. Лазарєв Ю.Ф. Довідник з MATLAB: електронний навчальний посібник з курсового і дипломного проектування / Ю.Ф. Лазарєв. – К.: НТУУ «КПІ», 2013. – 132 с.
15. Suspension: System Modeling: Control Tutorials for MATLAB&Simulink. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://ctms.engin.umich.edu/>

ЗМІСТ

Вступ.....	3
1. Теорема про рух центру мас. Динаміка відносного руху точки.....	9
1.1. Фрагменти теорії.....	9
1.2. Методика та приклад складання диференціальних рівнянь руху з використанням теореми про рух центру мас у поєднанні з динамікою відносного руху точки.....	12
2. Принцип Д'Аламбера (метод кінетостатики).....	20
2.1. Фрагменти теорії.....	20
2.2. Методика і приклад складання диференціальних рівнянь за принципом Д'Аламбера (метод кінетостатики).....	32
3. Загальне рівняння динаміки.....	39
3.1. Фрагменти теорії.....	39
3.2. Методика та приклад складання диференціальних рівнянь руху з використанням загального рівняння динаміки.....	44
4. Рівняння Лагранжа другого роду.....	51
4.1. Фрагменти теорії.....	51
4.2. Методика та приклад складання диференціальних рівнянь руху з використанням рівнянь Лагранжа другого роду.....	61
5. Короткий огляд методів складання диференціальних рівнянь руху, наведених у даному посібнику.....	70
Тест.....	74
Відповіді до тесту.....	96
Література.....	97