

Філімоніхіна І.І.  
Кіровоградський  
національний технічний  
університет

## УМОВИ ЗМЕНШЕННЯ АВТОБАЛАНСИРАМИ КУТА НУТАЦІЇ ОБЕРТОВОГО СУПУТНИКА ЗЕМЛІ

*Установлена возможность устранения одним автобалансиrom угла нутации статически неуравновешенного сплюснутого вращающегося спутника. Установлено, что в случае вытянутого динамически неуравновешенного спутника возможно начальное уменьшение угла нутации двумя автобалансирами за счет уравновешивания спутника, но в дальнейшем угол нутации будет возрастать.*

*Is established the capability of reduction by autobalancer of a corner of nutation of the statically unbalanced rotating satellite. Is established that in the case of the prolate rotating satellite is probably an initial reduction by two autobalancers of a corner of nutation due to a balancing of a satellite, but in the further the corner of nutation will increase.*

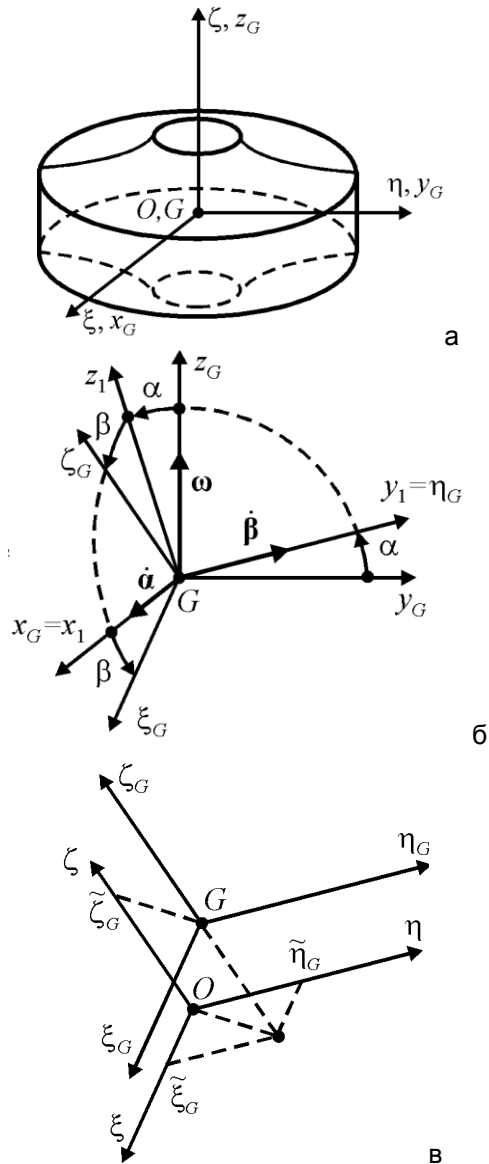
**Вступ.** Положення у просторі переважної більшості супутників зв'язку стабілізується обертанням. Через неточне надання початкового обертання супутнику і через його незрівноваженість виникають нутаційні коливання супутника. Це призводить до пульсації сигналу зв'язку, чим значно погіршується його якість. Для зменшення кута нутації використовуються демпфери. В роботах [1,2], з використанням енергетичного підходу було встановлено, що у разі сплюснутого обертального супутника демпфери зменшують кут нутації, а у разі витягнутого – збільшують. Іншим недоліком демпферів є те, що вони не усувають кут нутації від незрівноваженості супутника. В роботі [3], із використанням енергетичного підходу, досліджувалася можливість зменшення кута нутації незрівноваженого обертального супутника Землі за рахунок його динамічного зрівноваження двома двохм'ятниковими автобалансирами (АБ). При цьому виділялися основні і побічні рухи системи, і оцінювалася їх стійкість. В результаті було встановлено, що сплюснуті супутники зрівноважити динамічно неможливо, а випадок витягнутого супутника вимагає додаткових досліджень. У цій роботі встановлюються узагальнені умови зрівноваження АБ обертальних супутників, придатні для АБ будь-якого типу. Розглядаються випадки статичного зрівноваження супутника одним АБ, і динамічного зрівноваження – двома АБ. Для визначення цих умов використовується емпіричний метод. Він був розроблений для роторних систем для випадку зрівноваження

ротора одним АБ в одній площині корекції [4], а в роботі [5] цей метод був розповсюджений на випадок зрівноваження обертального тіла декількома АБ у декількох площинах корекції.

### §1. Опис системи, основні допущення.

Ізольована матеріальна система складається з обертального супутника (рис. 1, а) і приєднаних тіл, що утворюють АБ (на рис. не показані). У ідеальному випадку супутник повинен обертатися навколо деякої осі  $\zeta$ , жорстко з ним зв'язаної. Цьому заважає незрівноваженість супутника щодо осі  $\zeta$  – статична або динамічна. Тіла АБ можуть рухатися щодо супутника і в певному положенні можуть повністю його зрівноважити. Для подальших досліджень тип АБ не має принципового значення і тому не обумовлюється.

Оскільки система ізольована, то її центр мас – точка  $G$  рухається рівномірно і прямолінійно. Не обмежуючи загальності вважаємо, що він нерухомий. Також має місце закон збереження моменту кількості руху системи  $K_G = \text{const}$ . Відповідно до загальної теорії пасивних АБ, у системи існує, принаймні, один основний усталений рух, в якому супутник зрівноважений тілами АБ і обертається навколо осі  $\zeta$  [4]. Нехай система здійснює основний рух. Тоді в ньому вісь  $\zeta$  направлена по вектору  $K_G$ . Проведемо для цього руху головні центральні осі інерції системи, які жорстко зв'яжемо з супутником (на основному русі  $O = G$ ). Нехай відносно них система має головні осьові моменти інерції  $A, B, C$ .



**Рисунок 1 – Кінематика руху супутника**

Введемо в розглядання осі  $Gx_Gy_Gz_G$ , в яких вісь  $z_G$  направлена уздовж вектора  $\mathbf{K}_G$ . Нехай вони обертаються навколо осі  $z_G$  з кутовою швидкістю  $\omega$ , яка відповідає першому повороту супутника в просторі. Тоді цей кут є циклічною координатою, і в рівняння руху входить не буде. В процесі подальшого руху осі  $Gx_Gy_Gz_G$  переходять в осі, що визначають кінцеве положення супутника, таким чином. Спочатку осі  $Gx_Gy_Gz_G$  повертаються на кути Ейлера - Кривога  $\alpha, \beta$ , як це показано на рис. 1, б, внаслідок чого переходять в осі  $G\xi_G\eta_G\zeta_G$ . Потім осі  $G\xi_G\eta_G\zeta_G$  переміщуються поступально на  $-\xi_G, -\eta_G, -\zeta_G$ , внаслідок чого переходять в осі  $O\xi\eta\zeta$ , як це показано на рис. 1, в. Очевидно, що  $\tilde{\xi}_G, \tilde{\eta}_G, \tilde{\zeta}_G$  – координати центра мас системи щодо осей

$O\xi\eta\zeta$ . Відмітимо, що для невеликих кутів  $\alpha, \beta$  кут нутації визначається за такою наближеною формулою  $\theta \approx \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ .

Нехай тіла АБ дещо відхилилися від положення, в якому зрівноважують супутник. Тоді тензор інерції системи щодо осей  $O\xi\eta\zeta$  можна представити у вигляді

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} A + \varepsilon J_\xi & -\varepsilon J_{\xi\eta} & -\varepsilon J_{\xi\zeta} \\ -\varepsilon J_{\xi\eta} & B + \varepsilon J_\eta & -\varepsilon J_{\eta\zeta} \\ -\varepsilon J_{\xi\zeta} & -\varepsilon J_{\eta\zeta} & C \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де  $|\varepsilon| \ll 1$ , і відцентрові моменти інерції системи

$$\tilde{J}_{\xi\zeta} = \varepsilon J_{\xi\zeta}, \quad \tilde{J}_{\eta\zeta} = \varepsilon J_{\eta\zeta} \quad (2)$$

характеризують моментну незрівноваженість системи щодо осі  $\zeta$ . У (1) врахована властивість АБ не змінювати осьовий момент інерції системи щодо осі  $\zeta$  [4]. Аналогічно координати центра мас системи щодо осей  $O\xi\eta\zeta$  можна подати у вигляді

$$\tilde{\xi}_G = \varepsilon \xi_G, \quad \tilde{\eta}_G = \varepsilon \eta_G, \quad \tilde{\zeta}_G = \varepsilon \zeta_G. \quad (3)$$

Тензор інерції системи щодо центральних осей системи  $G\xi_G\eta_G\zeta_G$ :

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_O - M_\Sigma \varepsilon^2 \begin{pmatrix} (\eta_G^2 + \zeta_G^2) & -\xi_G\eta_G & -\xi_G\zeta_G \\ -\xi_G\eta_G & (\xi_G^2 + \zeta_G^2) & -\eta_G\zeta_G \\ -\xi_G\zeta_G & -\eta_G\zeta_G & (\xi_G^2 + \eta_G^2) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

де  $M_\Sigma$  – маса всієї системи.

## §2. Застосування емпіричного методу.

Використовуватимемо емпіричний (інженерний) критерій стійкості основного руху [5].

При зрівноваженні обертового тіла  $n$  пасивними АБ з твердими тілами в  $n$  різних площинах зрівноваження для стійкості основного руху необхідно і достатньо, щоб при фіксованому положенні тіл АБ в положенні, в якому вони зрівноважують обертове тіло, і при будь-яких елементарних дисбалансах  $s_i$ , що лежать в  $i$ -ій площині зрівноваження і прикладені в точках  $i$  на необхідній осі обертання несучого тіла (осі  $\zeta$ ), виконувалася умова

$$f(s_1, \dots, s_n) = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \sum_{i=1}^n s_i(t) \cdot \mathbf{r}_i(t) \right) dt < 0. \quad (5)$$

де:  $t$  – час;  $\mathbf{r}_i$  – вектор відхилення точки  $i$  від її положення в основному русі, викликаний елементарними дисбалансами;  $T$  – період у випадку, якщо рух періодичний або інший характерний проміжок часу. Якщо обертове тіло тверде, то його можуть динамічно зрівноважити два АБ ( $n=2$ ), або статично – один АБ ( $n=1$ ).

У критерії (5) використана властивість тіл АБ, які зрівноважують обертове тіло в  $i$ -й площині, відхилятися у бік вектора  $\mathbf{r}_i$  [4]. Наприклад, якщо елементарний дисбаланс не рівний нулю тільки в площині  $i$  і в середньому вектор відхилення  $\mathbf{r}_i$  буде протилежний вектору елементарного дисбалансу  $\mathbf{s}_i$ , що його викликав, то тіла АБ матимуть тенденцію рухатися протилежно вектору  $\mathbf{s}_i$ , чим прагнутимуть зменшити цю незрівноваженість.

#### Динамічне зрівноваження супутника.

Нехай супутник зрівноважується двома АБ в площинах, паралельних площині  $O\xi\eta$  і зміщених на  $b_1, b_2$  по осі  $\zeta$  (рис. 2). Нехай в цих площинах виникли елементарні дисбаланси з наступними характеристиками (рис. 2)

$$\xi_i, \eta_i, b_i, \quad m_i = \varepsilon m, \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad i=1,2, \quad (6)$$

де  $\xi_i, \eta_i, b_i$  – координати елементарної маси, що створює елементарну незрівноваженість  $\mathbf{s}_i$  в площині зрівноваження  $i$ .

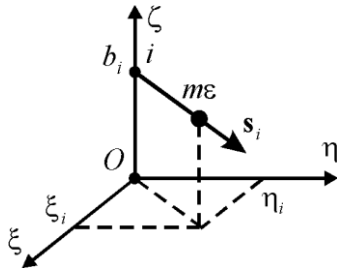


Рисунок 2 – Елементарна незрівноваженість

Тоді відносно осей  $O\xi\eta\zeta$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\xi\zeta} &= m\varepsilon(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2), \quad \tilde{J}_{\eta\zeta} = m\varepsilon(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2), \\ J_{\xi\zeta} &= m(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2), \quad J_{\eta\zeta} = m(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2), \\ \tilde{\xi}_G &= m\varepsilon(\xi_1 + \xi_2) / M_\Sigma, \\ \tilde{\eta}_G &= m\varepsilon(\eta_1 + \eta_2) / M_\Sigma, \quad \tilde{\zeta}_G = \varepsilon \zeta_G, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $M_\Sigma$  – маса всієї системи. З точністю до величин першого порядку малості включно

$$\mathbf{J}_G \approx \mathbf{J}_O =$$

$$= \begin{pmatrix} A + \varepsilon J_\xi & -\varepsilon J_{\xi\eta} & -m\varepsilon \sum_{i=1}^2 \xi_i b_i \\ -\varepsilon J_{\xi\eta} & B + \varepsilon J_\eta & -m\varepsilon \sum_{i=1}^2 \eta_i b_i \\ -m\varepsilon \sum_{i=1}^2 \xi_i b_i & -m\varepsilon \sum_{i=1}^2 \eta_i b_i & C \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Складемо диференціальні рівняння руху системи при нерухомих тілах АБ. Під час руху системи маємо наступні проекції кутової швидкості обертання системи і її головного моменту кількості руху на осі супутника

$$\omega_\xi = \dot{\alpha} \cos \beta - \omega \cos \alpha \sin \beta, \quad \omega_\eta = \dot{\beta} + \omega \sin \alpha,$$

$$\omega_\zeta = \dot{\alpha} \sin \beta + \omega \cos \alpha \cos \beta,$$

$$K_\xi = -K \cos \alpha \sin \beta, \quad K_\eta = K \sin \alpha,$$

$$K_\zeta = K \cos \alpha \cos \beta. \quad (9)$$

Шукаємо  $\omega, \alpha, \beta$  з точністю до величин першого порядку малості відносно  $\varepsilon$  включно у вигляді

$$\omega \approx \omega_0 + \omega_1 \varepsilon, \quad \alpha \approx \alpha_1 \varepsilon, \quad \beta \approx \beta_1 \varepsilon. \quad (10)$$

Тоді з цією ж точністю

$$\omega_\xi \approx \dot{\alpha}_1 \varepsilon - \omega_0 \beta_1 \varepsilon, \quad \omega_\eta \approx \dot{\beta}_1 \varepsilon + \omega_0 \alpha_1 \varepsilon, \quad \omega_\zeta \approx \omega_0 + \omega_1 \varepsilon,$$

$$K_\xi \approx -K \beta_1 \varepsilon, \quad K_\eta \approx K \alpha_1 \varepsilon, \quad K_\zeta \approx K. \quad (11)$$

З іншого боку, з точністю до величин першого порядку малості включно

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{J}_G \boldsymbol{\omega} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} A \dot{\alpha}_1 \varepsilon - \omega_0 \varepsilon [\beta_1 A + m(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2)] \\ B \dot{\beta}_1 \varepsilon + \omega_0 \varepsilon [\alpha_1 B - m(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2)] \\ C \omega_0 + C \omega_1 \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Прирівнюючи в (11) і (12) коефіцієнти при однакових степенях  $\varepsilon$ , отримаємо наступну систему рівнянь для визначення  $\omega_0, \omega_1, \alpha_1, \beta_1$ :

$$K = C \omega_0, \quad C \omega_1 = 0,$$

$$-K \beta_1 = A \dot{\alpha}_1 - \omega_0 [\beta_1 A + m(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2)],$$

$$K \alpha_1 = B \dot{\beta}_1 + \omega_0 [\alpha_1 B - m(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2)]. \quad (13)$$

Надалі розглядатимемо тільки сплюснуті ( $C > A, B$ ) або витягнуті ( $C < A, B$ ) складені тіла. Тоді розв'язком системи (13) буде

$$\omega_0 = K / C, \quad \omega_1 = 0,$$

$$\alpha_1 = m(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2) / (B - C) + C_1 \sin pt + C_2 \cos pt,$$

$$\beta_1 = -m(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2) / (A - C) +$$

$$+ C_3 \sin pt + C_4 \cos pt \quad (14)$$

де

$$p = \omega_0 \sqrt{(A - C)(B - C) / (AB)},$$

$$C_3 = \frac{A p C_2}{(A - C) \omega_0}, \quad C_4 = -\frac{A p C_1}{(A - C) \omega_0} \quad (15)$$

і  $C_1, C_2$  – деякі сталі інтегрування, які залежать від початкових умов. Для вказаних тіл  $p$  приймає дійсне значення і рух системи – періодичний з періодом

$$T = 2\pi / p. \quad (16)$$

Відмітимо, що у випадках  $A < C < B$  або  $B < C < A$  розв'язок системи (13) – аперіодичний і залежно від початкових умов може швидко і необмежено зростати. З теорії демпферів кута нутації супутників [1,2] відомо, що в цьому випадку супутник має тенденцію рухатися „перекидом” і тому навіть невелике приєднане до супутника тіло може принципово змінити його рух. Тому такі супутники обертанням не стабілізують.

З точністю до величин першого порядку малості включно в проекціях на осі  $O\xi\eta\zeta$ :

$$\mathbf{r}_i \approx \varepsilon(\beta_1 b_i - \xi_G, -\alpha_1 b_i - \eta_G, -\zeta_G)^T, \\ \mathbf{s}_i \approx m\varepsilon(\xi_i, \eta_i, 0)^T, \quad /i=1,2/. \quad (17)$$

Критерій настання самозрівноваження приймає вигляд

$$f(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \sum_{i=1}^2 \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{s}_i \right) dt \approx \\ \approx \frac{m\varepsilon^2}{T} \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^2 [\xi_i(\beta_1 b_i - \xi_G) - \eta_i(\alpha_1 b_i + \eta_G)] \right\} dt < 0. \quad (18)$$

З точністю до величин другого порядку малості включно

$$f(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \approx -p(x_1, x_2, x_3, x_4) / M_\Sigma < 0, \quad (19)$$

де

$$x_1 = m\varepsilon\xi_1, \quad x_2 = m\varepsilon\xi_2, \quad x_3 = m\varepsilon\eta_1, \quad x_4 = m\varepsilon\eta_2, \\ p(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \\ + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 \quad (20)$$

і в рівності (20)

$$a_{11} = \frac{A + b_1^2 M_\Sigma - C}{A - C}, \quad a_{22} = \frac{A + b_2^2 M_\Sigma - C}{A - C}, \\ a_{12} = \frac{A + b_1 b_2 M_\Sigma - C}{A - C}, \quad a_{33} = \frac{B + b_1^2 M_\Sigma - C}{B - C}, \\ a_{44} = \frac{B + b_2^2 M_\Sigma - C}{B - C}, \quad a_{34} = \frac{B + b_1 b_2 M_\Sigma - C}{B - C}. \quad (21)$$

Для настання самозрівноваження необхідно, щоб квадратична форма (20) була позитивно визначена. Застосовуючи критерій Сильвестра, знаходимо наступні умови

$$a_{jj} > 0, \quad /j=1,4/,$$

$$\Delta_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad \Delta_{34} = a_{33}a_{44} - a_{34}^2 > 0. \quad (22)$$

Враховуючи, що

$$\Delta_{12} = M_\Sigma(b_1 - b_2)^2 / (B - C), \\ \Delta_{34} = M_\Sigma(b_1 - b_2)^2 / (A - C), \quad (23)$$

з (22) знаходимо умову настання самозрівноваження

$$A, B > C \quad (24)$$

відповідно до якого супутник повинен бути витягнутим.

**Статичне зрівноваження супутника.**

Покладемо в (20)  $\xi_2, \eta_2 = 0$ . Тоді  $x_2 = x_4 = 0$  і квадратична форма (20) прийме вигляд

$$p(x_1, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{33}x_3^2. \quad (25)$$

Умова (19) виконуватиметься при виконанні умов  $a_{11} > 0$ ,  $a_{33} > 0$ , або

$$\frac{A + b_1^2 M_\Sigma - C}{A - C} > 0, \quad \frac{B + b_1^2 M_\Sigma - C}{B - C} > 0. \quad (26)$$

З них знаходимо такі два випадки, при яких теоретично можливе статичне зрівноваження супутника

$$1) A, B > C, \quad 2) C > A + b^2 M_\Sigma, \quad C > B + b^2 M_\Sigma. \quad (27)$$

У першому випадку складене тіло – витягнуте, а в другому – сплюснуте, і площа зрівноваження знаходиться на незначній відстані від центра мас системи.

Таким чином емпіричний метод виявив тенденцію до приходу за певних умов тіл АБ до положення, в якому вони зрівноважують супутник.

## Висновки.

Проведені дослідження дозволяють зробити такі висновки, що ґрунтуються на двох тенденціях, встановлених енергетичним і емпіричним методами.

1. У разі сплюснутого незрівноваженого обертового супутника АБ завжди працюватимуть демпферами кута нутації, але тільки у випадку статичної незрівноваженості, коли площа зрівноваження АБ знаходиться поблизу центра мас супутника, один АБ працюватиме і як автобалансир, і як демпфер, чим буде повністю усувати кут нутації.

2. У разі витягнутого незрівноваженого (статично або динамічно) супутника АБ не будуть працювати демпферами, але можуть зменшувати кут нутації від незрівноваженості супутника за рахунок приходу тіл АБ в окіл положення, в якому вони зрівноважують (статично або динамічно) супутник.

## Список літератури

1. *Пожарицкий Г.К., Румянцев В.В.* Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью // ПММ, т. XXVII, вып. 1, 1963. - С. 16-26.
2. *Likins P.W.* Effects of energy dissipation on the free body motions of spacecraft // Technical Report No. 32.860, NASA, California Institute of Technology Pasadena, California, 1966, p. 70.
3. *Филимоных Г.Б., Пирогов В.В., Филимоных И.И.* Пространственная стабилизация положения оси вращения несущего тела маятниковыми демпферами // Збірник наукових праць КНТУ, 2006. Вип. №17, С. 234-240.
4. *Філімоніхін Г.Б.* Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. - Кіровоград: КНТУ, 2004. - 352 с.
5. *Філімоніхін І.І., Філімоніхін Г.Б.* Узагальнений емпіричний критерій стійкості основного руху і його застосування до ротора на двох осесиметричних пружних опорах // Машинознавство. –2007. №3, С. 22-27.