

Моделирование пускового процесса агрегата

Получены точные аналитические решения дифференциальных уравнений движения машинных агрегатов переменной структуры с одной фрикционной связью для построения диаграммы изменения угловых скоростей и моментов двигателя и рабочей машины в функции времени в период пускового процесса.

динамическая модель, переменная структура, фрикционная связь, агрегат, дифференциальное уравнение, уравнение Риккати, частота вращения, угловая скорость

Основной задачей исследования пускового процесса агрегата с фрикционной связью является получение закона изменения угловой скорости динамической модели в целях изучения возможностей осуществления пуска без заглохания двигателя внутреннего сгорания вследствие перегрузки.

Цель исследования – получение точных решений дифференциальных уравнений движения машинного агрегата с фрикционной связью. Для получения функциональных зависимостей изменения угловой скорости двигателя в определенные моменты времени была составлена двухмассовая расчетная динамическая модель агрегата «двигатель-машина» переменной структуры с одной фрикционной связью.

Момент двигателя M_D согласно характеристике дизеля сначала изменяется линейно от 0 до номинала M_H , затем – по квадратичной зависимости (перегрузочная ветвь кривой)

Характеристика фрикциона может быть описана такими зависимостями:

$$M_\phi = \beta M_H \frac{t}{t_1}, \quad \text{при } t < t_1 \quad (1)$$

$$M_\phi = \beta M_H, \quad \text{при } t \geq t_1 \quad (2)$$

где β - коэффициент запаса фрикциона;

t_1 – момент времени полного включения фрикциона.

В начальный момент времени ведущая и ведомая системы кинематически независимы. Система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$I_D \dot{\omega}_D = M_D - M_\phi, \quad (3)$$

$$I_K \dot{\omega}_K = M_\phi - M_K, \quad (4)$$

где I_D, I_K – приведенные моменты инерции ведущей и ведомой частей;

ω_D, ω_K – угловые скорости ведущей и ведомой частей;

M_D, M_K – приведенные крутящие моменты ведущей и ведомой частей.

Ход решения уравнения (3) зависит от соотношения моментов времени t_1 и t_n (момент времени снижения угловой частоты двигателя от частоты холостого хода до номинальной). Если $t_1 \leq t_n$, то можно выделить три интервала: 1) при $t < t_1$ момент фрикциона M_ϕ линеен по времени, а момент двигателя линеен по угловой скорости ω_D ; 2) при $t_1 < t < t_n$ момент фрикциона выходит на постоянное значение $M_\phi = \text{const}$, а

$M_D(\omega_D)$ линеен по угловой скорости; 3) при $t_1 > t_n$ момент фрикциона $M_\phi = \text{const}$, а момент двигателя $M_D(\omega_D)$ описывается квадратичной зависимостью.

Нами получены точные решения дифференциальных уравнений (3) и (4) с учетом реальной зависимости момента двигателя от угловой скорости, что достоверно отражает протекающий процесс пуска агрегата.

Найдем решение (3) при $t < t_1$, когда

$$M_D = M_H \frac{\omega_0 - \omega_D}{\omega_0 - \omega_n}.$$

Представим в безразмерном виде значение момента двигателя:

$$M_D = M_H v,$$

$$\text{где } v = \frac{\omega_0 - \omega_D}{\Delta\omega_0}; \quad \Delta\omega_0 = \omega_0 - \omega_n.$$

Учитывая, что $\frac{d\omega_D}{dt} = -\frac{dv}{dt} \Delta\omega_0$, уравнение (3) запишется в таком виде:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{M_H}{I_D \Delta\omega_0} v = \beta \frac{M_H}{I_D \Delta\omega_0} \cdot \frac{t}{t_1}.$$

Обозначая $\frac{M_H}{I_D \Delta\omega_0} = \alpha$, получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{v} + \alpha_0 v = \beta \alpha_0 \frac{t}{t_1}. \quad (5)$$

Общее решение уравнения (5) состоит из общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений.

Для однородного уравнения решение ищем в таком виде:

$$v_0 = ce^{\lambda t}.$$

После подстановки получаем $\lambda = -\alpha_0$.

Тогда общее решение имеет вид

$$v_0 = ce^{-\alpha_0 t}. \quad (6)$$

Частное решение (5) ищем методом Лагранжа вариаций произвольных постоянных:

$$v_1(t) = c_1(t)v_0(t). \quad (7)$$

Подставляя в (5) решение (7), получаем

$$c_1 = \frac{\beta \alpha_0}{t_1} \int_0^t e^{\alpha_0 t} t dt = \beta \frac{1}{\alpha_0 t_1} [(\alpha_0 t - 1)e^{\alpha_0 t} + 1] \quad (8)$$

При $t=0$ $\omega_D \rightarrow \omega_0$ и $v \rightarrow 0$. Таким образом, произвольная постоянная “с” в решении (6) при $t=0$ тоже равна 0. Тогда общим решением уравнения (3) является частное решение (8).

При $t = t_1$ имеем :

$$v(t_1) = \beta \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha_0 t_1}}{\alpha_0 t_1}\right). \quad (9)$$

Продолжим решение уравнения (3) для интервала $t_1 < t < t_n$, когда $M_\phi = \beta M_H = \text{const}$.

$$\dot{v} + \alpha_0 v = \beta \alpha_0. \quad (10)$$

Решаем дифференциальное уравнение (10) введением новой переменной $v - \beta = x$, тогда:

$$\dot{x} + \alpha_0 x = 0.$$

Получаем $x = ce^{-\alpha_0 t}$; отсюда

$$v = ce^{-\alpha_0 t} + \beta = \beta(1 + c_0 e^{-\alpha_0 t}). \quad (11)$$

Состыкуем уравнение (11) с уравнением (9) при $t = t_1$, откуда

$$c_0 = -\frac{1 - e^{-\alpha_0 t_1}}{\alpha_0 t_1} e^{\alpha_0 t_1}.$$

Окончательно для интервала $t_1 < t < t_n$ имеем решение:

$$v = \beta \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha_0 t_1}}{\alpha_0 t_1} e^{-\alpha_0 (t-t_1)} \right). \quad (12)$$

Переходим далее к получению точного решения для нелинейного интервала $t_n < t < t_2$. Здесь момент двигателя представляется параболою в функции угловой скорости двигателя ω :

$$M_\partial = K_m M_H - (K_m - 1) M_H \left(\frac{\omega_D - \omega_m}{\omega_n - \omega_m} \right)^2, \quad (13)$$

где $K_m = \frac{M_m}{M_n}$; - коэффициент перегрузки двигателя,

ω_m, M_m - максимальная угловая скорость и крутящий момент двигателя,

t_2 - момент времени выравнивания угловых скоростей валов ведущей и ведомой частей.

Тогда уравнение (3) будет иметь такой вид:

$$I_D \dot{\omega} + (K_m - 1) M_H \left(\frac{\omega_D - \omega_m}{\omega_n - \omega_m} \right)^2 = K_m M_H - \beta M_H.$$

Приведем угловую скорость к безразмерному виду: $\frac{\omega_D - \omega_m}{\omega_n - \omega_m} = \Omega_\partial$, тогда

$\frac{d\omega_\partial}{dt} = \frac{d\Omega_\partial}{dt} \Delta\omega_n$ и, обозначая $\alpha_n = \frac{M_H}{I_D \Delta\omega_n}$, получаем:

$$\dot{\Omega}_\partial + (K_m - 1) \alpha_n \Omega_\partial^2 = -\alpha_n (\beta - K_m). \quad (14)$$

Дифференциальное уравнение (14) является частным случаем специального уравнения Риккати $y + ay^2 = bx^p$, которое решается подстановкой $t = \frac{x}{a}$ и введением новой переменной $u = yu$, что приводит его к линейному уравнению первого порядка.

В нашем примере при $ab < 0$, то есть из (14) видно, что $(K_m - 1)\alpha_n [-\alpha_n(\beta - K_m)] < 0$, так как $K_m < 1$ и $\beta > K_m$, то для уравнения (14) существует известное решение [1]. Состыкованное с предыдущим решением (12) на границе интервала $t = t_n$, где $\omega_D = \omega_n$, решение дифференциального уравнения (14) имеет вид:

$$\Omega_{\phi}(t) = \frac{1 - \sqrt{\frac{\beta - K_m}{K_m - 1}} \operatorname{tg}(\sqrt{(K_m - 1)(\beta - K_m)} \alpha_n)(t - t_n)}{1 + \sqrt{\frac{K_m - 1}{\beta - K_m}} \operatorname{tg}(\sqrt{(K_m - 1)(\beta - K_m)} \alpha_n)(t - t_n)}. \quad (15)$$

Таким образом, для уравнения (3) получены решения (8), (12), (15) на существующих интервалах с указанным протеканием кривых моментов.

Приступим к решению уравнения (4) для ведомой части агрегата. Введем безразмерную угловую частоту $\Omega_{\kappa} = \frac{\omega_{\kappa}}{\omega_m}$, откуда $\dot{\omega}_{\kappa} = \omega_m \dot{\Omega}_{\kappa}$.

На интервале $t_0 < t < t_1$ момент фрикциона имеет вид $M_{\phi} = \beta M_H \frac{t}{t_1}$.

Введем обозначения: $M_{\kappa} = K_3 M_H$,

где K_3 – коэффициент загрузки двигателя, $\alpha_{\kappa} = \frac{M_H}{I_{\kappa} \omega_m}$.

Тогда получаем дифференциальное уравнение относительно безразмерной угловой скорости:

$$\dot{\Omega}_{\kappa}(t) = \alpha_{\kappa} \left(\beta \frac{t}{t_1} - K_3 \right). \quad (16)$$

Момент времени t_0 – начало разгона ведомой части агрегата, определяется из условия равенства моментов $M_{\phi} = M_{\kappa}$, то есть $\beta M_H \frac{t}{t_1} = K_3 M_H$, откуда $t_0 = \frac{K_3 t_1}{\beta}$.

Решение уравнения (16) для первого интервала имеет вид:

$$\Omega_{\kappa}(t) = \alpha_{\kappa} \left(\frac{\beta}{2t_1} t^2 - K_3 t + \frac{K_3^2 t_1}{2\beta} \right). \quad (17)$$

Для момента времени $t = t_1$ границы интервала имеем:

$$\Omega_{\kappa}(t_1) = \alpha_{\kappa} \frac{(\beta - K_3)^2}{2\beta} t_1. \quad (18)$$

Для интервала $t_1 < t \leq t_2$, где $M_{\phi} = \beta M_H$, решение уравнения (4) имеет вид:

$$\Omega_{\kappa}(t) = (\beta - K_3) \alpha_{\kappa} t + c. \quad (19)$$

Приравняв уравнения (18) и (19) при $t = t_1$, находим постоянную интегрирования “с” и окончательно на интервале $t_1 \leq t \leq t_2$ имеем:

$$\Omega_{\kappa}(t) = \alpha_{\kappa} \left((\beta - K_3) t - \frac{\beta^2 - K_3^2}{2\beta} t_1 \right). \quad (20)$$

Изменение реальной величины $\omega_{\kappa}(t)$ всегда можно проследить, учитывая что $\omega_{\kappa} = \omega_m \Omega_{\kappa}(t)$.

Итак, получены точные решения, описывающие ход изменений кривых угловых скоростей двигателя и рабочей машины $\omega_D(t)$ и $\omega_{\kappa}(t)$ в произвольный момент времени. Первое решение – убывающее от значения ω_0 , а второе – нарастающее от нуля.

Минимальное значение угловой скорости двигателя ω_D , равное ω_2 , достигается в тот момент t_2 , при котором интегральные кривые пересекаются. Далее происходит

совместный разгон системы, угловые скорости выравниваются $\omega_D = \omega_K$, момент трения фрикциона убывает до необходимой величины.

При совместном разгоне системы уравнения (3) и (4) объединяются:

$$(I_D + I_K) \dot{\omega} = M_D - M_K. \quad (21)$$

Подставим в уравнение (21) выражения для моментов M_D и M_K . Поскольку двигатель работает на перегрузочной ветви характеристики, то зависимость момента от угловой частоты – параболическая (13), а момент сопротивления на ведомом валу равен $M_K = K_3 M_H$.

Вводя безразмерную частоту

$$\frac{\omega_D - \omega_m}{\omega_H - \omega_m} = \Omega_D, \quad \frac{d\omega_D}{dt} = \frac{d\Omega_D}{dt} \Delta\omega_D,$$

и обозначая $\frac{M_H}{(I_D + I_K) \Delta\omega_H} = \alpha$, получаем:

$$\dot{\Omega} + \alpha(K_m - 1)\Omega^2 = \alpha(K_m - K_3). \quad (22)$$

Уравнение (22) - это то же самое специальное уравнение Риккати, что и (14), но со значением $ab > 0$, так как $K_m > 1$; $K_m > K_3$, $K_3 < 1$.

Согласно [1] оно имеет решение в гиперболических функциях. Интегральная кривая, проходящая через точку $t_{н1}$, ω_H , когда $\Omega_D = 1$, будет иметь вид (здесь $\tau = t - t_{н1}$):

$$\Omega_D(t) = \frac{1 + \sqrt{\frac{K_m - K_3}{K_m - 1}} \operatorname{th}(\sqrt{(K_m - 1)(K_m - K_3)} \alpha \tau)}{1 + \sqrt{\frac{K_m - 1}{K_m - K_3}} \operatorname{th}(\sqrt{(K_m - 1)(K_m - K_3)} \alpha \tau)}. \quad (23)$$

Построенная по результатам решений дифференциальных уравнений диаграмма изменения угловых скоростей и моментов показана на рис.1.

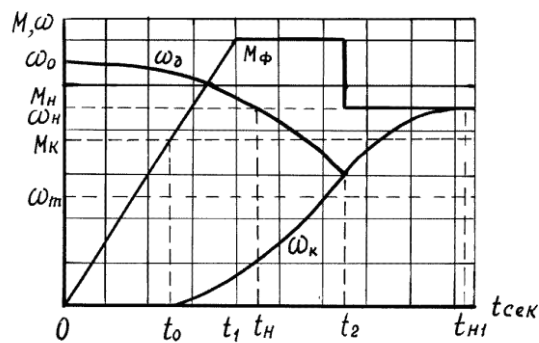


Рисунок 1 – Диаграмма изменения угловых скоростей и моментов

Список литературы

1. 1.Бронштейн И., Семендяев К. Справочник по математике. – М.: Наука, - 1986.- 544 с.

Отримані точні аналітичні розв'язки диференціальних рівнянь руху машинних агрегатів змінної структури з однією фрикційною в'яззю для побудови діаграм зміни кутових швидкостей і моментів двигуна і робочої машини в функції часу протягом пускового процесу.

Exact analytical decisions of the differential equations of movement of machine units of variable structure with one frictional communication for construction of the diagram of change of angular speeds and the moments of the engine and the working machine in function of time are received during starting process.

Получено 5.08.05