УДК 62-755:62-752

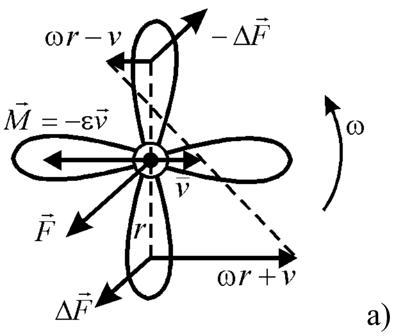
Г.Б. Філімоніхін, проф., д-р. техн. наук, В.І. Гуцул, доц., канд. техн. наук
Кіровоградський національний технічний університет

Вплив аеродинамічної сили на умови статичного зрівноваження автобалансирами крильчатки осьового вентилятора

Досліджується вплив аеродинамічної сили на умови статичного зрівноваження автобалансирами крильчатки осьового вентилятора. Досліджується просторовий рух ротора. Отримані диференціальні рівняння просторового руху ротора, на якому закріплені лопасті. Із застосуванням інженерного (емпіричного) критерію настання автобалансування визначаються діапазони швидкостей, на яких можливе автобалансування ротора.
ротор, дисбаланс, критична швидкість, зрівноваження

Вступ

Пасивні автобалансири (АБ) застосовуються у техніці для зрівноваження на ходу швидкообертових роторів [1-3]. Коригувальні вантажі АБ, за певних умов, з часом самі приходять у ті положення, у яких зрівноважують ротор. В роботах [2,3] було встановлено, що на умови настання автобалансування істотно впливають масо-інерційні характеристики ротора, спосіб його закріплення тощо. У техніці часто використовується ротор, на якому закріплені лопасті (вентилятор, пропелер вертоліта тощо). При русі такої системи в просторі швидкість набігання повітря на лопасті буде різною (рис.1, а), що призводить до виникнення моменту $\vec{M}$. Напрям вказаного моменту протилежний до напряму швидкості $\vec{v}$ руху ротора, а величина пропорційна цій швидкості, тобто $\vec{M} = -\varepsilon\vec{v}$, де ε – деяка константа.



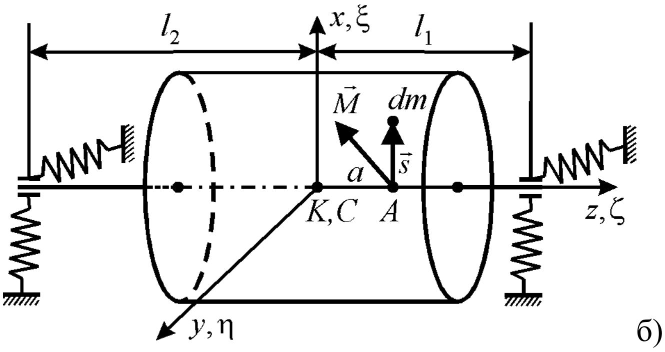


Рисунок 1 – Модель ротора на жорсткому валі і пружних осесиметричних опорах та схема дії основних сил

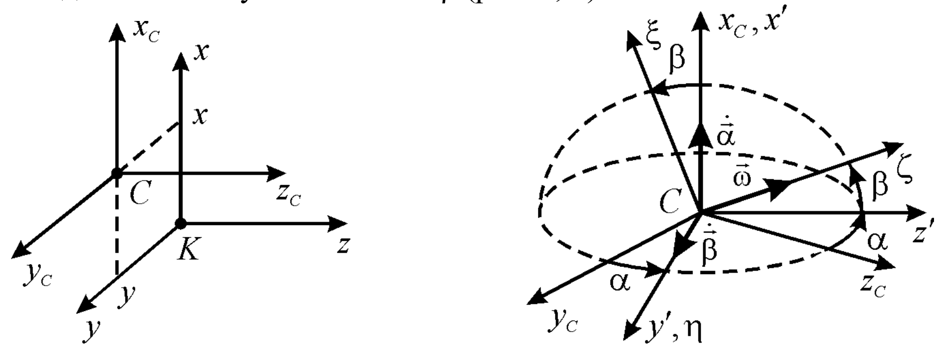
Метою даної роботи є визначення умов настання автобалансування з урахуванням дії моменту $\vec{M}$. Для цього застосовується інженерний (емпіричний) критерій настання автобалансування, розроблений для роторних систем з АБ в роботі [3]. Подібна задача, але без урахування моменту $\vec{M}$ була детально досліджена в [3].

1. Модель системи, диференціальні рівняння руху

Розглянемо далі осесиметричний ротор на жорсткому невагомому валі й пружних ізотропних опорах. Уважаємо, що ротор обертається навколо вала зі сталою кутовою швидкістю ω. Крім того, припускаємо, що дисбаланс ротору, кутові й лінійні відхилення вала ротора від осі обертання є малими величинами.

На рис.1, б наведена схема роторної установки (у початковий момент часу) та основних сил і моментів, що діють під час її роботи. На цьому рисунку $\vec{s}$ – вектор дисбалансу, який утворюється елементарною масою dm; $\vec{M}$ – момент, величина якого пропорційна швидкості $\vec{v}$. Нерухома прямокутна система координат $Kxyz$ розташована наступним чином: вісь z спрямована по осі обертання, вісь x спрямована у бік центра мас ротора, а вісь y спрямована так, що система координат – права. Рухома система координат $C\xi\eta\zeta$ жорстко прив'язана до ротора і у початковий момент часу співпадає з нерухомою системою $Kxyz$.

Модель руху ротора наведена на рис. 2. На першому етапі здійснюється поступальний рух, після якого система координат $C\xi\eta\zeta$ займає проміжне положення $Cx_Cy_Cz_C$ (рис. 2, а). На другому етапі відбувається поворот навколо точки С, який описується за допомогою кутів Резаля α і β (рис. 2, б).



а) б)

Рисунок 2 – Модель руху ротора

На основі теореми про рух центра мас отримуємо перші два диференціальні рівняння руху ротора

$$M\ddot{x} = R_x^{(s)} + R_x^{(c)}, \quad M\ddot{y} = R_y^{(s)} + R_y^{(c)}, \tag{1}$$

де M – маса ротора;

$R_x^{(s)}, R_y^{(s)}$ – проекції вектора дисбаланса на осі x, y;

$R_x^{(c)}, R_y^{(c)}$ – проекції вектора пружних сил на осі x, y.

Другі два диференціальні рівняння дає теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної системи відносно її центра мас:

$$A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} = M_{x_c}^{(s)} + M_{x_c}^{(c)} + M_{x_c}^{(v)}, \quad A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} = M_{y_c}^{(s)} + M_{y_c}^{(c)} + M_{y_c}^{(v)}, \tag{2}$$

де $M_{x_c}^{(c)}, M_{y_c}^{(c)}$ – моменти вектора дисбалансу відносно центральних осей x_C, y_C;

$M_{x_c}^{(s)}, M_{y_c}^{(s)}$ – моменти пружних сил відносно x_C, y_C;

$M_{x_c}^{(v)}, M_{y_c}^{(v)}$ – відповідні складові момента $\vec{M}$;

A, C – моменти інерції ротора відносно осей x_C, z_C (так як ротор осесиметричний, то моменти інерції відносно x_C і y_C рівні між собою).

Компоненти правих частин формул (1) і (2) визначаються наступним чином:

$$R_x^{(s)} = s\omega^2 \cos\omega t, \quad R_y^{(s)} = s\omega^2 \sin\omega t, \quad R_x^{(c)} = -c_{11}x - c_{14}\beta, \quad R_y^{(c)} = -c_{11}y + c_{14}\alpha,$$

$$M_{x_c}^{(s)} = -sa\omega^2 \sin\omega t, \quad M_{y_c}^{(s)} = sa\omega^2 \cos\omega t, \quad M_{x_c}^{(c)} = c_{14}y - c_{33}\alpha,$$

$$M_{y_c}^{(c)} = -c_{14}x - c_{33}\beta, \quad M_{x_c}^{(v)} = -\varepsilon(\dot{x} + a\dot{\beta}), \quad M_{y_c}^{(v)} = -\varepsilon(\dot{y} - a\dot{\alpha}),$$
$$c_{11} = 2c, \quad c_{14} = c(l_1 - l_2), \quad c_{33} = c(l_1^2 + l_2^2), \qquad (3)$$

де c – коефіцієнт жорсткості пружин;

l_1, l_2, a – геометричні параметри (рис. 1).

Підставивши (3) в (1) і (2), отримуємо

$$M\ddot{x} + c_{11}x + c_{14}\beta = s\omega^2 \cos\omega t, \quad M\ddot{y} + c_{11}y - c_{14}\alpha = s\omega^2 \sin\omega t,$$
$$A\ddot{\alpha} + (C\omega + \varepsilon a)\dot{\beta} + \varepsilon\dot{x} + c_{33}\alpha - c_{14}y = -sa\omega^2 \sin\omega t, \qquad (4)$$
$$A\ddot{\beta} - (C\omega + \varepsilon a)\dot{\alpha} + \varepsilon\dot{y} + c_{33}\beta + c_{14}x = sa\omega^2 \cos\omega t.$$

Рівняння (4) є диференціальними рівняннями руху ротора відносно узагальнених координат x, y, α, β.

Уведемо комплексні змінні $z = x + iy, \vartheta = \alpha + i\beta$. Система (4) представиться у вигляді

$$M\ddot{z} + c_{11}z - ic_{14}\vartheta = s\omega^2 e^{i\omega t},$$
$$A\ddot{\vartheta} - i(\omega C + \varepsilon a)\dot{\vartheta} + \varepsilon\dot{z} + c_{33}\vartheta + ic_{14} = isa\omega^2 e^{i\omega t}. \qquad (5)$$

2. Застосування інженерного (емпіричного) критерію настання автобалансування.

Частинний розв'язок системи (5) шукаємо у формі

$$z = D_z e^{i\omega t}, \quad \vartheta = D_\vartheta e^{i\omega t}. \qquad (6)$$

Підставивши (6) в (5), одержуємо наступну систему для визначення числових коефіцієнтів D_z і D_ϑ:

$$(c_{11} - M\omega^2)D_z - ic_{14}D_\vartheta = s\omega^2,$$
$$i(c_{14} + \varepsilon\omega)D_z + (c_{33} - (A - C)\omega^2 + \varepsilon a\omega)D_\vartheta = isa\omega^2. \qquad (7)$$

Розв'язавши систему (7), отримуємо

$$D_z = \frac{s\omega^2((C - A)\omega^2 + \varepsilon a\omega + c_{33} - c_{14}a)}{\Delta(\omega)}, D_\vartheta = \frac{is\omega^2(-Ma\omega^2 - \varepsilon\omega - c_{14} + c_{11}a)}{\Delta(\omega)}, \qquad (8)$$
$$\Delta(\omega) = (A - C)M\omega^4 - M\varepsilon a\omega^3 + ((C - A)c_{11} - Mc_{33})\omega^2 - (c_{14} - c_{11}a)\varepsilon\omega + c_{11}c_{33} - c_{14}^2.$$

Таким чином, частинний розв'язок системи (5) має вигляд

$$z = \frac{s\omega^2((C - A)\omega^2 + \varepsilon a\omega + c_{33} - c_{14}a)}{\Delta(\omega)} e^{i\omega t}, \vartheta = \frac{is\omega^2(-Ma\omega^2 - \varepsilon\omega - c_{14} + c_{11}a)}{\Delta(\omega)} e^{i\omega t}. \qquad (9)$$

На основі (9) маємо

$$x = \frac{s\omega^2((C - A)\omega^2 + \varepsilon a\omega + c_{33} - c_{14}a)}{\Delta(\omega)} \cos\omega t, \; y = \frac{s\omega^2((C - A)\omega^2 + \varepsilon a\omega + c_{33} - c_{14}a)}{\Delta(\omega)} \sin\omega t,$$
$$\alpha = \frac{s\omega^2(Ma\omega^2 + \varepsilon\omega + c_{14} - c_{11}a)}{\Delta(\omega)} \sin\omega t, \; \beta = -\frac{s\omega^2(Ma\omega^2 + \varepsilon\omega + c_{14} - c_{11}a)}{\Delta(\omega)} \cos\omega t. \qquad (10)$$

Знайдемо переміщення точки A осі вала, яка знаходиться на відстані a від центра мас (рис.1). Для вказаної точки

$$x_A = x + a\beta, \quad y_A = y - a\alpha, \quad z_A = z - ia\vartheta. \qquad (11)$$

Підставивши (10) в (11), отримуємо

$$x_A = \frac{s\omega^2((C-A-a^2M)\omega^2 + c_{33} - 2c_{14}a + c_{11}a^2)}{\Delta(\omega)}\cos\omega t,$$
$$y_B = \frac{s\omega^2((C-A-a^2M)\omega^2 + c_{33} - 2c_{14}a + c_{11}a^2)}{\Delta(\omega)}\sin\omega t. \qquad (12)$$

З метою визначення діапазону швидкостей ω, при яких відбувається зрівноваження ротора пасивними автобалансирами, застосовуємо інженерний критерій настання автобалансування [3]:

$$r_{Ac} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \vec{\epsilon}(t)\cdot\vec{r}_A(t)dt < 0\,, \qquad (13)$$

де $\vec{\epsilon}$ – одиничний вектор, спрямований по вектору дисбалансу;
$\overline{r}_A$ – вектор відхилення точки A вала від осі обертання.

Координати вектора $\overline{r}_A$ задаються формулами (12), а вектор $\vec{\epsilon}$ визначається наступним чином

$$\epsilon_x = \cos\omega t, \quad \epsilon_y = \sin\omega t, \quad \vec{\epsilon} = e^{i\omega t}. \qquad (14)$$

У нашому випадку скалярний добуток $\vec{\epsilon}\cdot\vec{r}_A$ від часу не залежить, а тому величина r_{Ac} у формулі (13) дорівнює підінтегральній функції тобто $r_{Ac} = \vec{\epsilon}\cdot\vec{r}_A$. Ураховуючи сказане, на основі (12-14) отримуємо наступну умову автобалансування

$$r_{Ac} = \frac{s\omega^2((C-A-a^2M)\omega^2 + c_{33} - 2c_{14}a + c_{11}a^2)}{\Delta(\omega)} < 0. \qquad (15)$$

Відмітимо, що якщо $\varepsilon = 0,$ то умова (15) співпадає з відповідною умовою у випадку відсутності момента $\vec{M}$ [3].

3. Аналіз умов настання автобалансування

Прирівнявши до нуля чисельник і знаменник останнього дробу можна визначити критичні швидкості $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k$, тобто швидкості, при переході через які величина r_{Ac} міняє свій знак на протилежний.

Так як у загальному випадку на основі умови (15) усі критичні швидкості аналітично визначити не можливо, то розглянемо, спочатку, ротор симетрично встановлений на ізотропні опори. У цьому випадку $l_1 = l_2$ (рис.1) і $c_{14} = 0.$ Умова (15) приймає вигляд

$$r_{Ac} = \frac{s\omega^2[(C-A-a^2M)\omega^2 + c_{33} + c_{11}a^2]}{(A-C)M\omega^4 - M\varepsilon a\omega^3 + [(C-A)c_{11} - Mc_{33}]\omega^2 + c_{11}\varepsilon a\omega + c_{11}c_{33}} < 0. \qquad (16)$$

Після перетворень можемо записати

$$r_{Ac} = \frac{s\omega^2[(C-A-a^2M)\omega^2 + c_{33} + c_{11}a^2]}{(M\omega^2 - c_{11})[(A-C)\omega^2 - \varepsilon a\omega - c_{33}]} < 0. \qquad (17)$$

Як бачимо, для симетрично встановленого ротора всі критичні швидкості визначаються аналітично. Проведемо тепер більш детальний аналіз для різних типів ротора.

У випадку довгого ротора $(A > C)$ існують три критичні швидкості:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c_{33} + c_{11}a^2}{A - C + Ma^2}}, \quad \omega_3 = \frac{\varepsilon a + \sqrt{\varepsilon^2 a^2 + 4c_{33}(A-C)}}{2(A-C)}. \qquad (18)$$

Якщо $\varepsilon = 0$, то $\omega_3 = \omega_3^{(0)} = \sqrt{\dfrac{c_{33}}{A-C}}$. В роботі [3] показано, що $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3^{(0)}$. Так як $\omega_3 > \omega_3^{(0)}$, то при відмінному від нуля ε виконуються нерівності $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. Автобалансування відбувається при $\omega \in (\omega_1, \omega_2) \cup (\omega_3, \infty)$. Отже для довгого ротора дія моменту $\vec{M}$ призводить до зменшення інтервалу автобалансування (якщо моменту $\vec{M}$ немає, то $\omega \in (\omega_1, \omega_2) \cup (\omega_3^{(0)}, \infty)$).

Для сферичного ротора $(A = C)$ умова (16) приймає вигляд

$$r_{Ac} = \frac{s\omega^2(-a^2 M\omega^2 + c_{33} + c_{11}a^2)}{-M\varepsilon a\omega^3 - Mc_{33}\omega^2 + c_{11}\varepsilon a\omega + c_{11}c_{33}} < 0. \tag{19}$$

Після перетворень отримаємо

$$r_{Ac} = -\frac{s\omega^2(-a^2 M\omega^2 + c_{33} + c_{11}a^2)}{(M\omega^2 - c_{11})(\varepsilon a\omega + c_{33})} < 0. \tag{20}$$

Тут існують дві критичні швидкості:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c_{33} + c_{11}a^2}{Ma^2}}; \quad \omega_1 < \omega_2 . \tag{21}$$

Автобалансування відбуватиметься при $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$.

У випадку короткого ротора $(A < C)$ рівняння $(A-C)\omega^2 - \varepsilon a\omega - c_{33} = 0$ має тільки від’ємні корені. У випадку, коли $A + Ma^2 > C$ існують дві критичні швидкості

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c_{33} + c_{11}a^2}{A - C + Ma^2}}; \quad \omega_1 < \omega_2 . \tag{22}$$

Автобалансування відбувається при $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$. Якщо $A + Ma^2 < C$, то отримуємо тільки одну критичну швидкість

$$\omega_1 = \sqrt{c_{11}/M} . \tag{23}$$

Автобалансування відбуватиметься при $\omega \in (\omega_1, \infty)$.

Результати, отримані для сферичного і короткого роторів повністю співпадають із результатами одержаними для подібної задачі, у якій відсутня дія моменту $\vec{M}$ [3]. Іншими словами, у випадку сферичного і короткого ротора, симетрично встановленого на ізотропні опори, дія моменту $\vec{M}$ не впливає на розподіл інтервалів автобалансування.

Розглянемо випадок несиметрично встановленого ротора. У цьому випадку не можливо точно визначити критичні швидкості, що знаходяться з рівняння

$$(A-C)M\omega^4 - M\varepsilon a\omega^3 + ((C-A)c_{11} - Mc_{33})\omega^2 - (c_{14} - c_{11}a)\varepsilon\omega + c_{11}c_{33} - c_{14}^2 = 0 . \tag{24}$$

Знайдемо наближено корені вказаного рівняння за допомогою метода розкладання коренів за степенями малого параметру ε [5]. Шукаємо розв'язки рівняння у вигляді

$$\omega = \omega_0 + \omega_1\varepsilon + \omega_2\varepsilon^2 + \dots . \tag{25}$$

Розглянемо, наприклад, довгий ротор $(A > C)$. Нульовому та першому наближенням розв’язків (25) відповідають наступні критичні швидкості ($\tilde{\omega}$ визначається аналітично)

$$\omega_{1,2}^{(0)} = \sqrt{\frac{c_{11}}{2M} + \frac{c_{33}}{2(A-C)} \mp \sqrt{\left(\frac{c_{11}}{2M} - \frac{c_{33}}{2(A-C)}\right)^2 + \frac{c_{14}^2}{M(A-C)}}}, \ \tilde{\omega} = \sqrt{\frac{c_{33} - 2c_{14}a + c_{11}a^2}{A - C + a^2 M}}, \tag{26}$$

$$\omega_{1,2}^{(1)}=\omega_{1,2}^{(0)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{Ma\left(\omega_{1,2}^{(0)}\right)^2+c_{14}-c_{11}a}{2M(A-C)\left(\omega_{1,2}^{(0)}\right)^2-Mc_{33}-(A-C)c_{11}}\cdot\varepsilon,\ \tilde{\omega}=\sqrt{\frac{c_{33}-2c_{14}a+c_{11}a^2}{A-C+a^2M}}. \quad (27)$$

Формули (26) співпадають з результатами, отриманими в роботі [3]. Співвідношення (27) показують, що наявність моменту $\vec{M}$ призводить до зміни двох із трьох критичних швидкостей. В залежності від значень геометричних та фізичних параметрів ротора вказані швидкості можуть як зменшуватися так і збільшуватися.

На основі зроблених досліджень для ротора з закріпленими на ньому лопастями можна зробити наступні висновки:

1. Момент, який виникає внаслідок того, що швидкість набігання повітря на лопасті під час руху ротора різна, може впливати на значення критичних швидкостей, але не змінює їхньої кількості.

2. Для симетрично встановленого ротора критичні швидкості вдається визначити в аналітичній формі. У випадку довгого ротора внаслідок дії згаданого вище моменту збільшується одна з трьох критичних швидкостей і інтервал автобалансування зменшується. У випадку сферичного та короткого роторів дія моменту $\vec{M}$ не впливає на розподіл інтервалів автобалансування.

3. Для несиметрично встановленого ротора діапазон швидкості автобалансування можна оцінити за допомогою метода розкладання по малому параметру ε. У цьому випадку дія моменту $\vec{M}$ призводить до зміни двох із трьох критичних швидкостей.

Список літератури

1. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. -М.: Наука, 2002. -119 с.
2. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. -Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. – 84 с.
3. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами: Монографія. – Кіровоград, 2004. – 354 с.
4. Горошко О.О. Гіроскопічні системи: Навчальний посібник. – К.: ВПЦ «Київський університет», 1994. – 116 с.
5. Найфэ А. Введение в методы возмущений: Пер. с англ. -М.: Мир, 1984. - 535 с.

Исследуется влияние аэродинамической силы на условия статического уравновешивания автобалансирами крыльчатки осевого вентилятора. Исследуется пространственное движение ротора. Получены дифференциальные уравнения пространственного движения ротора, на котором закреплены лопасти. На основе инженерного (эмпирического) критерия наступления автобалансирования определяется диапазон скоростей, на которых возможно автобалансирование.

Autobalancer influence of aerodynamic force on the statistic counterbalancing wings of the axle fan is researched. There researched a special motion of the rotor. Differential equations of the special motion of the rotor wings are obtained. By means of engineering (empirical) criterion of autobalancing at which autobalansing begins you can determine the speed ranges which make rotary autobalansing possible.