

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

методичні вказівки і контрольні завдання
для студентів заочної форми навчання
механічних, машинобудівних та електротехнічних спеціальностей

Кропивницький – 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра деталей машин та прикладної механіки

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

методичні вказівки і контрольні завдання
для студентів заочної форми навчання
механічних, машинобудівних та електротехнічних спеціальностей

Рекомендовано засіданням кафедри деталей
машин та прикладної механіки для студентів
заочної форми навчання механічних,
машинобудівних та електротехнічних
спеціальностей

Протокол № 10 від 11.05.2021 р.

Технічна механіка: методичні вказівки і контрольні завдання для студентів заочної форми навчання механічних, машинобудівних та електротехнічних спеціальностей / Укл. Пирогов В.В., Філімоніхін Г.Б., Олійніченко Л.С. – Кропивницький: ЦНТУ, 2021. – 52 с.

Табл. 6. Іл. 62. Бібліогр.: 6 назв.

Укладачі к.ф.-м.н., доц. Пирогов В.В.,
 д.т.н., проф. Філімоніхін Г.Б.,
 к.т.н., ст. викл. Олійніченко Л.С.,

Рецензент к.т.н., доц. Плешков П.Г.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
ЗАДАЧА С1 – РІВНОВАГА ДОВІЛЬНОЇ ПЛОСКОЇ СИСТЕМИ СИЛ ПРИКЛАДЕНИХ ДО ОДНОГО ТІЛА	5
ЗАДАЧА С2 – РІВНОВАГА ДОВІЛЬНОЇ ПРОСТОРОВОЇ СИСТЕМИ СИЛ.....	10
ЗАДАЧА К1 – КІНЕМАТИКА ТОЧКИ.....	17
ЗАДАЧА К2 – ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА.....	23
ЗАДАЧА К3 – СКЛАДНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ	29
ЗАДАЧА Д1 – ДИНАМІКИ ТОЧКИ (ДРУГА ЗАДАЧА ДИНАМІКИ)	40
ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ З РОЗДІЛУ "СТАТИКА. КІНЕМАТИКА. ДИНАМІКА"	49
ЛІТЕРАТУРА	52

Передмова

Технічна механіка – загальнонаукова дисципліна, яка займає важливе місце в вузівській програмі фундаментальної підготовки спеціалістів.

Необхідною умовою успішного оволодіння курсом є виконання індивідуальних домашніх завдань. До кожної задачі додається 10 рисунків і таблиця, в якій містяться додаткові до тексту задачі умови. Нумерація рисунків подвійна, при цьому номером рисунку є цифра, яка стоїть після крапки. Наприклад, рис. С1.4 – це рис. 4 до задачі С1. Варіант до кожної задачі студент обирає згідно номеру залікової книжки. Наприклад:

номер залікової книжки – 8.092304150;

Останній цифрі залікової книжки 0 відповідає рисунок, а передостанній – 5, відповідає рядок вихідних розрахункових даних з таблиці.

Індивідуальні домашні завдання виконують в окремому зошиті або на аркушах формату А4. На титульному аркуші вказується: факультет, спеціальність, назва дисципліни, номер варіанту, фамілія та ініціали студента. Слід зауважити, що при виконанні креслення розрахункової схеми її необхідно виконувати із врахуванням умов розв’язуваного варіанту задачі. Креслення необхідно зображати так, щоб на ньому все було добре видно. Розв’язок задач необхідно супроводжувати короткими поясненнями (які формули або теореми застосовуються, звідки отримуються ті чи інші результати та ін.) і детальними розрахунками. **Роботи, виконані не за варіантом, або не самостійно не зараховуються.**

Методичні вказівки для розв’язку приведені до кожної задачі після викладення її тексту; після цього розглядається розв’язок аналогічної задачі. Мета прикладу – пояснити хід розв’язку.

В основу цих методичних вказівок покладені методичні вказівки Тарга С.М. [1], що перекладені українською мовою і доповненні типовою методикою розв’язання задач.

Задача С1 – рівновага довільної плоскої системи сил прикладених до одного тіла

Умова задачі. Жорстка рама розташована в вертикальній площині (рис. С1.0 – С1.9, табл. С1), шарнірно закріплена в точці A , а в точці B прикріплена або до невагомому стрижня з шарнірами на кінцях, або до шарнірної опори на катках.

На раму діє пара сил з моментом $M = 100 \text{ кН}\cdot\text{м}$ і дві сили, величина, напрямок і точка прикладання яких вказані в таблиці С1.

Знайти: реакції в'язей в точках A , B , викликані діючими навантаженнями. При розрахунках прийняти, що $a = 0,5 \text{ м}$.

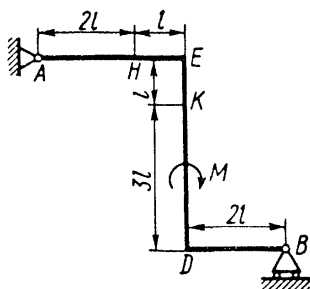


Рис. С1.0

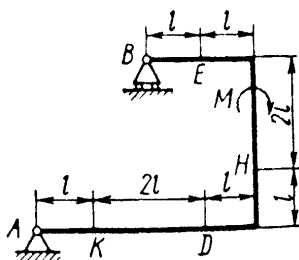


Рис. С1.1

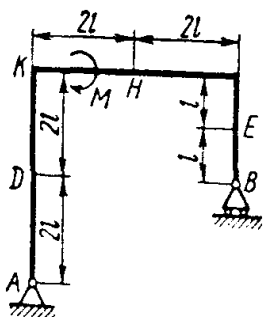


Рис. С1.2

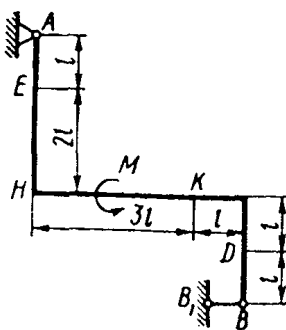
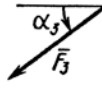
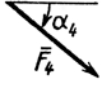


Рис. С1.3

Таблиця С1

Сили								
	$F_1 = 10 \text{ кН}$		$F_2 = 20 \text{ кН}$		$F_3 = 30 \text{ кН}$		$F_4 = 40 \text{ кН}$	
Номер умови	Точка прикладання	α_1 , град	Точка прикладання	α_2 , град	Точка прикладання	α_3 , град	Точка прикладання	α_4 , град
0	H	30	--	--	--	--	K	60
1	--	--	D	15	E	60	--	--
2	K	75	--	--	--	--	E	30
3	--	--	K	60	H	30	--	--
4	D	30	--	--	--	--	E	60
5	--	--	H	30	--	--	D	75
6	E	60	--	--	K	15	--	--
7	--	--	D	60	--	--	H	15
8	H	60	--	--	D	30	--	--
9	--	--	E	75	K	30	--	--

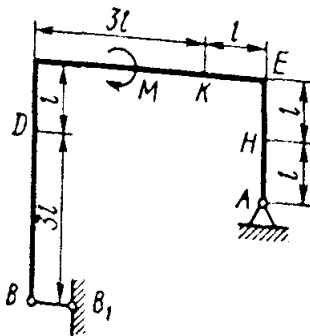


Рис. С1.4

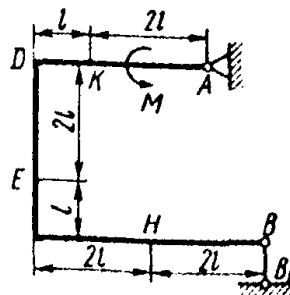


Рис. С1.5

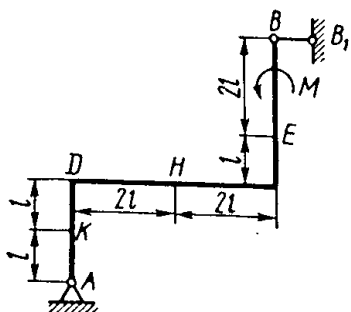


Рис. C1.6

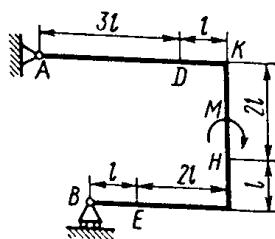


Рис. C1.7

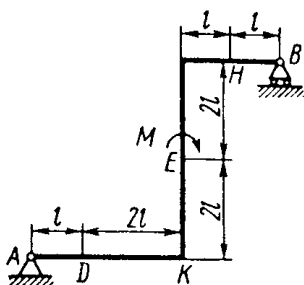


Рис. C1.8

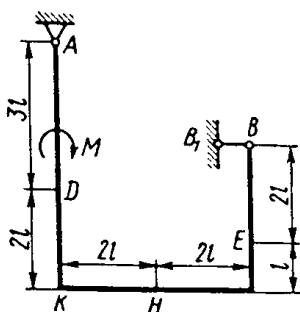


Рис. C1.9

Методичні рекомендації до розв'язання задачі

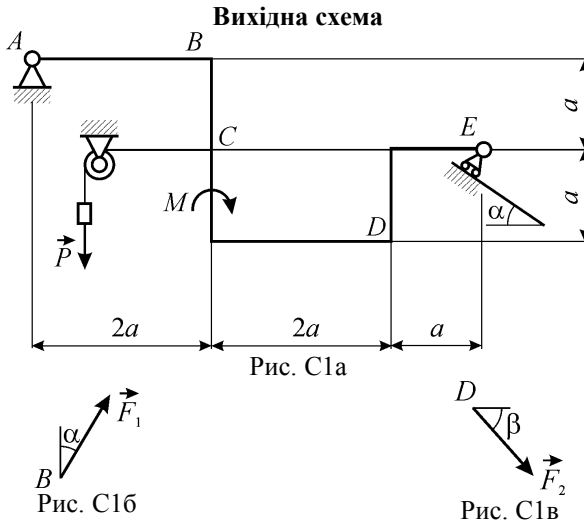
При розв'язанні задачі врахувати, що натяг обох віток троса, перекинутого через блок, коли тертям нехтують, буде однаковий. Рівняння моментів бажано складати відносно точок, в яких перетинаються лінії дії реакцій в'язей. Силу $\vec{F}_i$ необхідно розкласти на складові $\vec{F}_{ix}$ та $\vec{F}_{iy}$ (проекції сили) спрямовані вздовж відповідних координатних осей і моменти визначати для знайдених складових, тоді за теоремою Варіньона:

$$M_O(\vec{F}_i) = M_O(\vec{F}_{ix}) + M_O(\vec{F}_{iy}).$$

При проведенні розрахунків усі значення округлювати до п'ятої або шостої значущої цифри.

Приклад розв'язку задачі C1

Умова задачі. Жорстка рама розташована в вертикальній площині і шарнірно закріплена в точці A , а в точці E прикріплена до шарнірної опори на катках. В точці C до рами прив'язаний трос, перекинутий через блок і до якого підвішений вантаж вагою P . Допоміжні схеми прикладання сил до рами та її розміри приведені на рис. C1а, б, в.



Дано: $F_1 = 50 \text{ кН}$, $F_2 = 35 \text{ кН}$, $P = 25 \text{ кН}$, $M = 100 \text{ кН}\cdot\text{м}$,
 $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $a = 0,5 \text{ м}$.

Знайти: реакції в'язей в точках A , E , викликані діючими навантаженнями.

Розв'язок

1. Будуємо розрахункову схему (рис. C1г). Зображаємо координатні осі x , y . Показуємо діючі на раму сили: сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, момент M , натяг нитки $\vec{T}$ (по модулю $P = T$), прикладаємо опорні реакції $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_E$ (реакцію нерухомої шарнірної опори A зображаємо двома її складовими $\vec{X}_A$ та $\vec{Y}_A$; реакцію шарнірної опори на катках $\vec{R}_E$ направляємо перпендикулярно до опорної площини). Зауважимо, що так як ми не знаємо наперед, як будуть направлені реакції $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, то

їх можна направляти в будь-яку сторону, але вздовж відповідних координатних осей.

Знаходимо проекції сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ та $\vec{R}_E$ на координатні осі:

$$F_{1x} = F_1 \sin \alpha = 50 \cdot 0,5 = 25 \text{ кН}, F_{1y} = F_1 \cos \alpha = 50 \cdot 0,866 = 43,3 \text{ кН},$$

$$F_{2x} = F_2 \cos \beta = 35 \cdot 0,707 = 24,745 \text{ кН}, F_{2y} = F_2 \sin \beta = 35 \cdot 0,707 = 24,745 \text{ кН},$$

$$R_{Ex} = R_E \sin \alpha, R_{Ey} = R_E \cos \alpha.$$

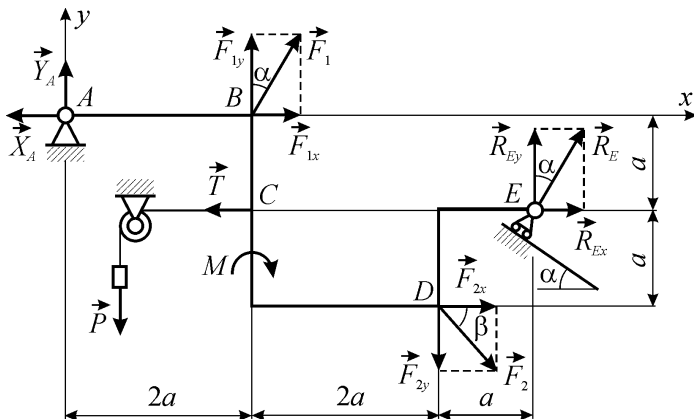


Рис. С1Г

2. Складаємо рівняння рівноваги. Для розглядуваної довільної плоскої системи сил складаємо три рівняння рівноваги. При обчисленні моментів сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ та $\vec{R}_E$ відносно точки A використовуватимемо теорему Варіньона. Одержимо:

$$\sum F_{ix} = 0: -X_A - T + F_{1x} + F_{2x} + R_{Ex} = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0: Y_A + F_{1y} - F_{2y} + R_{Ey} = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0: -M - Ta + F_{1y} 2a + F_{2x} 2a - F_{2y} 4a + R_{Ey} 5a + R_{Ex} a = 0.$$

3. Розв'язуємо отриману систему рівнянь в загальному вигляді:

$$R_E = \frac{M + Ta - F_{1y} 2a - F_{2x} 2a + F_{2y} 4a}{a(5 \cos \alpha + \sin \alpha)},$$

$$X_A = F_{1x} + F_{2x} + R_{Ex} - T, Y_A = F_{2y} - F_{1y} - R_{Ey}.$$

4. Виконуємо розрахунки:

$$R_E = \frac{100 + 25 \cdot 0,5 - 43,3 \cdot 2 \cdot 0,5 - 24,745 \cdot 2 \cdot 0,5 + 24,745 \cdot 4 \cdot 0,5}{0,5(5 \cdot 0,866 + 0,5)} = 38,9 \text{ кН},$$

$$R_{Ex} = 38,9 \cdot 0,5 = 19,45 \text{ кН}, \quad R_{Ey} = 38,9 \cdot 0,866 \approx 33,687 \text{ кН},$$

$$X_A = 25 + 24,745 + 19,45 - 25 = 44,195 \text{ кН},$$

$$Y_A = 24,745 - 43,3 - 33,687 = -52,242 \text{ кН}.$$

5. Перевірка. Складемо рівняння моментів (проекцій сил) так, щоб до нього входили всі невідомі. Для цього оберемо за центр моментів, наприклад, точку D (рис. С1г). Зазначимо, що при складанні рівняння проекцій сил в якості рівняння для перевірки, необхідно обрати вісь так, щоб вона була під певним кутом до осі x або y :

$$\sum M_D(\vec{F}_k) = 0: Ta - M + R_{Ey}a - R_{Ex}a - F_{1y}2a - F_{1x}2a + X_A2a - Y_A4a = 0.$$

При обчисленні групуємо окремо всі складові, що із знаком "+" та "-".

$$\begin{aligned} & 25 \cdot 0,5 - 100 + 33,687 \cdot 0,5 - 19,45 \cdot 0,5 - \\ & - 43,3 \cdot 2 \cdot 0,5 - 25 \cdot 2 \cdot 0,5 + 44,195 \cdot 2 \cdot 0,5 - (-52,242) \cdot 4 \cdot 0,5 = 0; \\ & 178,023 - 178,025 \approx 0. \end{aligned}$$

Перевірка виконується, тому реакції опор знайдені вірно. Відносна похибка становить:

$$\eta = \frac{178,023 - 178,025}{178,025} \cdot 100\% \approx -0,001\%.$$

Відповідь: $X_A = 44,195 \text{ кН}$; $Y_A = -52,242 \text{ кН}$; $R_E = 38,9 \text{ кН}$.

Знак “-” вказує на те, що сила Y_A в дійсності спрямована у протилежну сторону на відміну від напрямку показаного на рис С1г.

Задача С2 – рівновага довільної просторової системи сил

Умова задачі. Однорідна прямокутна плита вагою P із сторонами $AB = 3l$, $BC = 2l$ закріплена в точці A сферичним шарніром, циліндричним шарніром (підшипником) в точці B і утримується в рівновазі невагомим стрижнем CC' (рис. С2.0 – С2.9). Всі стрижні прикріплені до плит і до нерухомих опор шарнірами.

На плиту діє пара сил з моментом $M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, що лежить в площині плити, та дві сили. Значення цих сил, їх напрямки і точки прикладання вказані в табл. С2; при цьому сили F_1 і F_4 лежать в площинах, паралельних площині xy , сила F_2 – в площині, паралельній площині xz , а сила F_3 – в площині, паралельній площині yz . Точки прикладання сил (D , E , H) знаходяться посередині сторін плити. При розрахунках прийняти $l = 0,8 \text{ м}$.

Знайти: реакції в'язей в точках A , B та C .

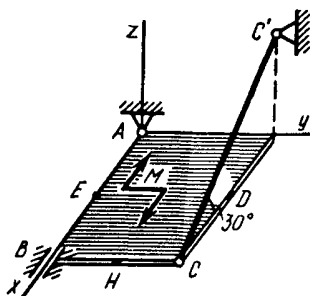


Рис. С2.0

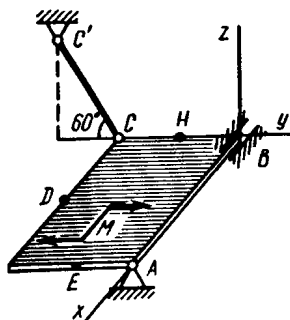


Рис. С2.1

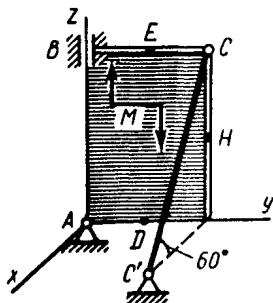


Рис. С2.2

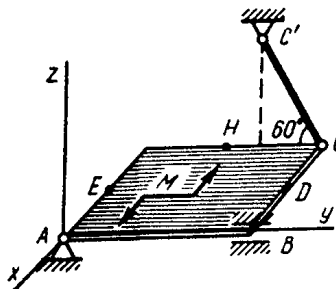


Рис. С2.3

Таблица С2

Сили								
Номер умови	$F_1 = 6 \text{ кН}$		$F_2 = 8 \text{ кН}$		$F_3 = 10 \text{ кН}$		$F_4 = 12 \text{ кН}$	
	Точка прикладання	α_1 , град	Точка прикладання	α_2 , град	Точка прикладання	α_3 , град	Точка прикладання	α_4 , град
0	E	60	H	30	--	--	--	--
1	--	--	D	60	E	30	--	--
2	--	--	--	--	H	60	E	30
3	D	30	--	--	E	0	--	--
4	--	--	E	30	--	--	D	60
5	H	0	D	60	--	--	--	--
6	--	--	H	90	D	30	--	--
7	--	--	--	--	H	60	E	90
8	D	30	--	--	H	0	--	--
9	--	--	E	90	--	--	H	30

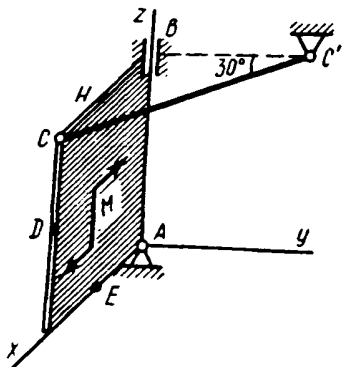


Рис. С2.6

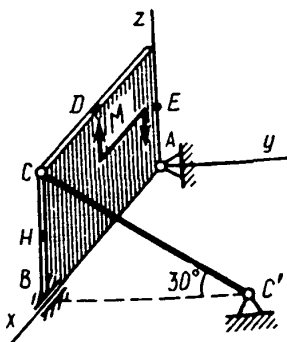


Рис. С2.7

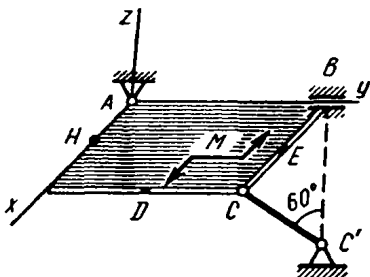


Рис. С2.4

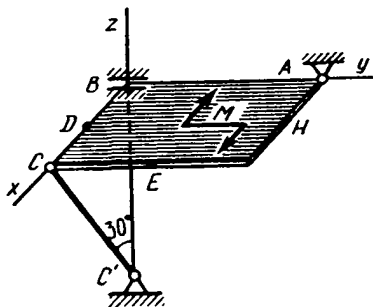


Рис. С2.5

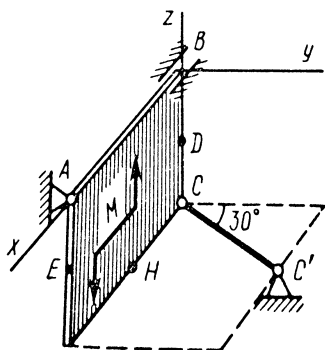


Рис. С2.8

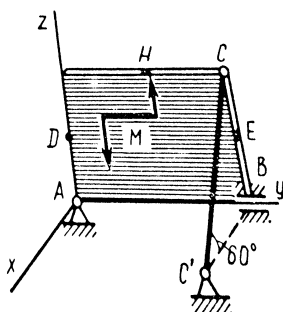


Рис. С2.9

Методичні рекомендації до розв'язання задачі

При розв'язанні задачі врахувати, що реакція сферичного шарніра (підп'ятника) має три складові (спрямовані вздовж відповідних координатних осей), а реакція циліндричного шарніра (підшипника) –

дві складові, що лежать у площині, перпендикулярній осі шарніра (підшипника). При обчисленні моментів сил необхідно їх розкласти на складові спрямовані вздовж відповідних координатних осей. Силу $\vec{F}_i$ необхідно розкласти на складові $\vec{F}_{ix}$, $\vec{F}_{iy}$ та $\vec{F}_{iz}$ (проекції сили) спрямовані вздовж відповідних координатних осей і моменти визначити для знайдених складових, тоді за теоремою Варіньона:

$$M_x(\vec{F}_i) = M_x(\vec{F}_{iy}) + M_x(\vec{F}_{iz}),$$

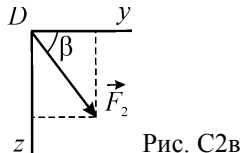
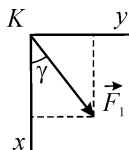
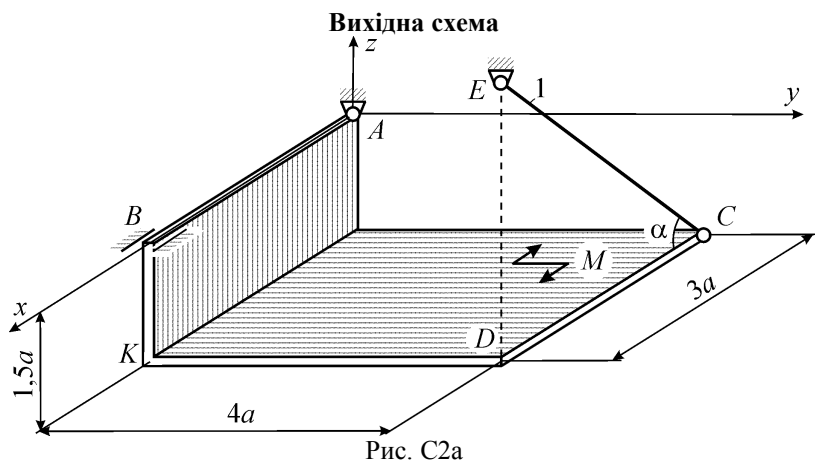
$$M_y(\vec{F}_i) = M_y(\vec{F}_{ix}) + M_y(\vec{F}_{iz}),$$

$$M_z(\vec{F}_i) = M_z(\vec{F}_{ix}) + M_z(\vec{F}_{iy}).$$

При проведенні розрахунків усі значення округлювати до п'ятої або шостої значущої цифри.

Приклад розв'язку задачі C2

Умова задачі. Дві однорідні прямокутні тонкі плити жорстко з'єднані під прямим кутом одна до одної і закріплені сферичним шарніром в точці A , циліндричним шарніром в точці B і невагомим стрижнем 1 (рис. C2a). Розміри плит та допоміжні схеми прикладання сил до плит та їх розміри приведені на рис. C2a, б, в.



Дано: $F_1 = 15 \text{ кН}$, $F_2 = 50 \text{ кН}$, $P_1 = 25 \text{ кН}$, $P_2 = 35 \text{ кН}$,
 $M = 100 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 35^\circ$, $a = 0,5 \text{ м}$.

Знайти: реакції в'язей в точках A та B і реакцію стрижня.

Розв'язок

1. Будуємо розрахункову схему (рис. С2г). На плити діють зада-
 на сила $\vec{F}$, сили ваги плит $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$, пара сил з моментом M , а також
 реакції в'язей. Реакцію сферичного шарніра A розкладаємо на три
 складові $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$; циліндричного шарніра B – на дві складові $\vec{Y}_B$,
 $\vec{Z}_B$; реакцію стрижня $\vec{R}_C$ направляємо вздовж стрижня від точки C до
 точки E вважаючи, що він розтягнутий. Зауважимо, що так як ми не
 знаємо наперед, як будуть направлені реакції $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, $\vec{Y}_B$, $\vec{Z}_B$ то
 їх можна направляти в будь-яку сторону, але вздовж відповідних
 координатних осей.

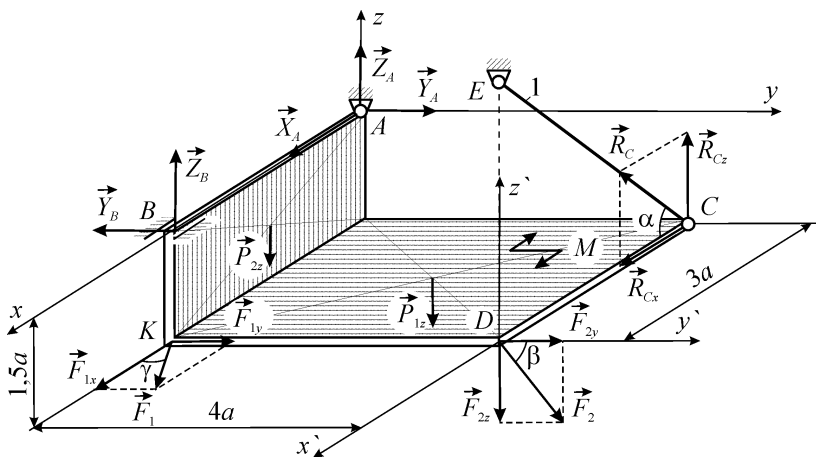


Рис. С2г

Знайдемо проекції сил $\vec{F}$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ та $\vec{R}_C$ на координатні осі:

$$P_{1x} = 0, \quad P_{1y} = 0, \quad P_{1z} = P_1 = 25 \text{ кН};$$

$$P_{2x} = 0, \quad P_{2y} = 0, \quad P_{2z} = P_2 = 35 \text{ кН};$$

$$F_{1x} = F_1 \cos \gamma = 15 \cdot 0,82 \approx 12,287 \text{ кН},$$

$$F_{1y} = F_1 \sin \gamma = 15 \cdot 0,573 \approx 8,6 \text{ кН}, \quad F_{1z} = 0 \text{ кН};$$

$$F_{2x} = 0 \text{ кН}, \quad F_{2y} = F_2 \cos \beta = 50 \cdot 0,5 = 25 \text{ кН},$$

$$F_{2z} = F_2 \sin \beta = 50 \cdot 0,866 \approx 43,3 \text{ кН};$$

$$R_{Cx} = R_C \cos \alpha, \quad R_{Cy} = 0, \quad R_{Cz} = R_C \sin \alpha.$$

2. Складаємо рівняння рівноваги. Для визначення шести невідомих складаємо шість рівнянь рівноваги. Отримуємо:

а) рівняння проекцій сил:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad X_A + R_{Cx} + F_{1x} = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad Y_A - Y_B + F_{1y} + F_{2y} = 0,$$

$$\sum F_{iz} = 0: \quad Z_A + Z_B + R_{Cz} - F_{2z} - P_{1z} - P_{2z} = 0;$$

б) рівняння моментів:

$$\sum M_{x_A}(\vec{F}_i) = 0: \quad -P_{1z}2a + (F_{1y} + F_{2y})1,5a + (R_{Cz} - F_{2z})4a = 0;$$

$$\sum M_{y_A}(\vec{F}) = 0: \quad (F_{2z} - Z_B)3a + (P_{1z} + P_{2z})1,5a - (F_{1x} + R_{Cx})1,5a = 0;$$

$$\sum M_{z_A}(\vec{F}) = 0: \quad (F_{1y} + F_{2y} - Y_B)3a - M - R_{Cx}4a = 0.$$

3. Розв'язуємо отриману систему рівнянь в загальному вигляді:

$$R_{Cz} = \frac{F_{2z}4a + P_{1z}2a - (F_{1y} + F_{2y})1,5a}{4a}; \quad R_C = \frac{R_{Cz}}{\sin \alpha}; \quad R_{Cx} = R_C \cos \alpha;$$

$$Z_B = \frac{F_{2z}3a + (P_{1z} + P_{2z})1,5a - (F_{1x} + R_{Cx})1,5a}{3a}; \quad Y_B = \frac{(F_{1y} + F_{2y})3a - M - R_{Cx}4a}{3a};$$

$$X_A = -R_{Cx} - F_{1x}; \quad Y_A = Y_B - F_{1y} - F_{2y}; \quad Z_A = F_{2z} + P_{1z} + P_{2z} - Z_B - R_{Cz}.$$

4. Виконуємо розрахунки:

$$R_{Cz} = \frac{43,3 \cdot 4 \cdot 0,5 + 25 \cdot 2 \cdot 0,5 - (8,6 + 25) \cdot 1,5 \cdot 0,5}{4 \cdot 0,5} = 43,2 \text{ кН};$$

$$R_C = \frac{43,2}{0,5} = 86,4 \text{ кН}; \quad R_{Cx} = 86,4 \cdot 0,866 \approx 74,82 \text{ кН};$$

$$Z_B = \frac{43,3 \cdot 3 \cdot 0,5 + (25 + 35)1,5 \cdot 0,5 - (12,287 + 74,82) \cdot 1,5 \cdot 0,5}{3 \cdot 0,5} \approx 29,746 \text{ кН};$$

$$Y_B = \frac{(8,6 + 25) \cdot 3 \cdot 0,5 - 100 - 74,82 \cdot 4 \cdot 0,5}{3 \cdot 0,5} \approx -132,83 \text{ кН};$$

$$X_A = -74,82 - 12,287 \approx -87,11 \text{ кН}; \quad Y_A = -132,83 - 8,6 - 25 = -166,43 \text{ кН};$$

$$Z_A = 43,3 + 25 + 35 - 29,746 - 43,2 = 30,354 \text{ кН}.$$

5. Перевірка. Складемо рівняння моментів так, щоб до них входила найбільша кількість невідомих. Для цього оберемо за центр момен-

тів, наприклад, точку D (рис. С26) і складемо рівняння моментів відносно осей x' , y' , z' , що виходять з точки D .

1-ше рівняння моментів для перевірки:

$$\sum M_{x'_D}(\vec{F}_i) = 0: P_{1z} 2a + (P_{2z} - Z_A - Z_B) 4a + (Y_B - Y_A) 1,5a = 0;$$

$$25 \cdot 2 \cdot 0,5 + (35 - 30,354 - 29,746) 4 \cdot 0,5 + (-132,83 + 166,43) 1,5 \cdot 0,5 = 0;$$

$$219,823 - 219,823 = 0.$$

2-ге рівняння моментів для перевірки:

$$\sum M_{y'_D}(\vec{F}_i) = 0: -(P_{1z} + P_{2z}) 1,5a + X_A 1,5a + (Z_A + R_{Cz}) 3a = 0;$$

$$-(25 + 35) 1,5 \cdot 0,5 - 87,11 \cdot 1,5 \cdot 0,5 + (30,354 + 43,2) 3 \cdot 0,5 = 0;$$

$$110,331 - 110,333 = 0,002 \approx 0.$$

Відносна похибка становить:

$$\eta = \frac{110,331 - 110,333}{110,333} \cdot 100\% = -0,002\%.$$

3-тє рівняння моментів для перевірки:

$$\sum M_{z'_D}(\vec{F}_i) = 0: -M + (X_A + F_{1x}) 4a - Y_A 3a = 0;$$

$$-100 - (87,11 - 12,287) 4 \cdot 0,5 + 166,43 \cdot 3 \cdot 0,5 = 0;$$

$$274,219 - 274,22 = 0,001 \approx 0.$$

Відносна похибка становить:

$$\eta = \frac{274,219 - 274,22}{274,22} \cdot 100\% = -0,0004\%.$$

Перевірка виконується, тому реакції опор знайдені вірно.

Відповідь: $R_C = 92,8 \text{ кН}$; $X_A = -80,36 \text{ кН}$; $Y_B = -148,8 \text{ кН}$; $Z_B = 33,12 \text{ кН}$; $Y_A = -173,8 \text{ кН}$; $Z_A = 23,78 \text{ кН}$. Знаки вказують на те, що сили X_A , Y_B та Y_A в дійсності спрямовані у протилежну сторону на відміну від напрямків показаних на рис С2г.

Задача К1 – кінематика точки

Умова задачі. Точка M рухається у площині Oxy (рис. К1.0 – К1.9, табл. К1; траєкторія точки на рисунках показана умовно). Закон руху точки заданий рівняннями $x = f_1(t)$ та $y = f_2(t)$, де x та y виражені в сантиметрах, t - в секундах. Залежність $x = f_1(t)$ визначається з рис. К1.0 – К1.9, а залежність $y = f_2(t)$ - з табл. К1.

Знайти рівняння траєкторії руху точки. Для моменту часу $t_1 = 1$ с визначити:

1. положення точки на траєкторії;
2. швидкість точки та зобразити її графічно;
3. прискорення точки координатним способом та зобразити його графічно;
4. прискорення точки натуральним способом та зобразити його графічно;
5. радіус кривини траєкторії та зобразити його графічно.

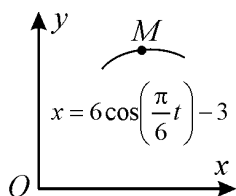


Рис. К1.0

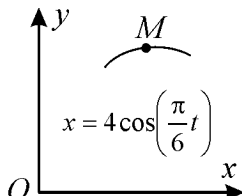


Рис. К1.1

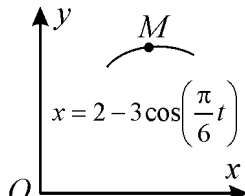


Рис. К1.2

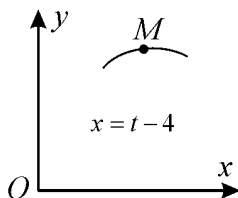


Рис. К1.3

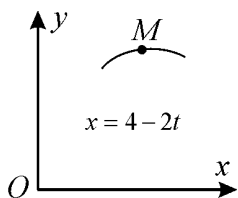


Рис. К1.4

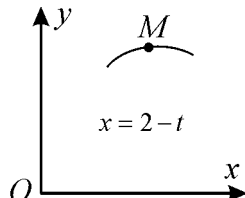


Рис. К1.5

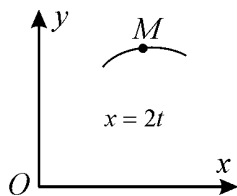


Рис. К1.6

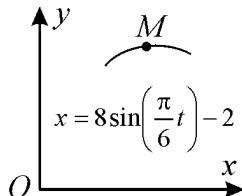


Рис. К1.7

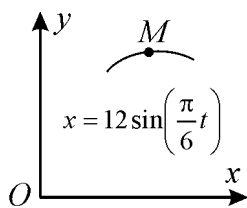


Рис. K1.8

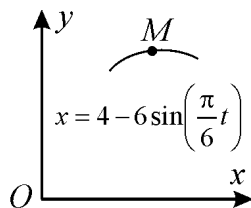


Рис. K1.9

Таблиця К1

Номер умови	$y = f_2(t)$		
	Рис. 0-2	Рис. 3-6	Рис. 7-9
0	$12 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$2t^2 + 2$	$4 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
1	$-6 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$8 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$6 \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
2	$-3 \sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$(2+t)^2$	$4 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
3	$9 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$2t^3$	$10 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
4	$3 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$2 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$-4 \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
5	$10 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$2 - 3t^2$	$12 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
6	$6 \sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$2 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$-3 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
7	$-2 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$(t+1)^3$	$-8 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
8	$9 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$2 - t^3$	$9 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
9	$-8 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$4 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$-6 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$

Методичні рекомендації до розв'язання задачі

При розв'язанні задачі скористатися координатним та натуральним способом визначення швидкості та прискорення точки. В задачі всі шукані величини потрібно визначати тільки для моменту часу $t_1 = 1$ с. В деяких варіантах задачі К1 при визначенні рівняння траєкторії руху точки або при подальших розрахунках (для їх спрощення) слід врахувати відомі із тригонометрії формули:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Приклад розв'язку задачі К1

Умова задачі. Рівняння руху точки M мають вигляд:

$$x = 10 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 5, \quad y = 20 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 10,$$

де x, y - в сантиметрах, t - в секундах.

Знайти рівняння траєкторії руху точки. Для моменту часу $t_1 = 1$ с визначити:

1. положення точки на траєкторії;
2. швидкість точки та зобразити її графічно;
3. прискорення точки координатним способом та зобразити його графічно;
4. прискорення точки натуральним способом та зобразити його графічно;
5. радіус кривини траєкторії та зобразити його графічно.

Розв'язок

1. Знайдемо рівняння траєкторії руху точки та побудуємо графік траєкторії її руху. Визначаємо та показуємо положення точки на траєкторії в момент часу $t_1 = 1$ с.

Для визначення рівняння траєкторії руху точки, виключимо з рівнянь руху час t . Оскільки час t входить в аргументи тригонометричних функцій, то скористаємося формулою

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \quad \text{де } \alpha = \frac{\pi}{6}t. \quad (1)$$

З рівнянь руху знаходимо вирази відповідних функцій:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \sin \alpha = \frac{x-5}{10}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \cos \alpha = \frac{y+10}{20}. \quad (2)$$

Підставляючи (2) в (1), отримаємо рівняння траєкторії руху точки:

$$\left(\frac{x-5}{10}\right)^2 + \left(\frac{y+10}{20}\right)^2 = 1. \quad (3)$$

Рівняння (3) – це рівняння еліпса з півосями вздовж осі x – 10 см, вздовж осі y – 20 см. Центр еліпса має координати $C(5; -10)$. Використовуючи рівняння траєкторії (3) виконуємо її побудову (рис. К1а). При побудові обираємо такий масштаб відстаней, щоб на схемі було все добре видно.

Знайдемо координати точки на траєкторії. Для цього, підставимо в рівняння руху час $t_1 = 1$ с, матимемо:

$$x = 10 \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) + 5 = 10 \cdot 0,5 + 5 = 10 \text{ см};$$

$$y = 20 \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) - 10 = 20 \cdot 0,866 - 10 = 7,32 \text{ см}.$$

Отже, маємо точку M з координатами $M(10; 7,32)$.

Перевірка 1: підставимо в рівняння (3) координату точки $x = 10$ см та визначимо з нього координату y :

$$\left(\frac{10-5}{10}\right)^2 + \left(\frac{y+10}{20}\right)^2 = 1,$$

звідки отримуємо, що $y = 7,32$ см.

2. Визначаємо швидкість точки та зображаємо її графічно.

Швидкість точки знайдемо по її проєкціям на координатні осі. Проєкції швидкості мають вигляд:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[10 \sin\left(\frac{\pi}{6} t\right) + 5 \right] = \frac{5\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right);$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left[20 \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right) - 10 \right] = -\frac{10\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} t\right). \quad (4)$$

Підставляючи час $t_1 = 1$ с у вирази (4), матимемо

$$v_{1x} = \frac{5 \cdot 3,14}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) = 5,236 \cdot 0,866 = 4,53 \text{ см/с};$$

$$v_{1y} = -\frac{10 \cdot 3,14}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) = (-10,47) \cdot 0,5 = -5,236 \text{ см/с}.$$

Модуль швидкості

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{(4,53)^2 + (5,236)^2} = 6,92 \text{ см/с}. \quad (5)$$

Обираємо масштаб для швидкостей $\mu_v = 2:1$, і зображаємо їх графічно (рис. К1а), причому так, щоб на схемі було все добре видно. Проекції швидкості v_{1x} та v_{1y} відкладаємо у обраному масштабі відповідно вздовж осі x та y , враховуючи при цьому їх напрямок з вказаними осями. Якщо проекції швидкості v_{1x} та v_{1y} мають знак „+”, то їх направляємо в додатній бік осей, якщо знак „-” – в протилежний бік.

Перевірка 2: вектор швидкості $\vec{v}$ спрямований по дотичній τ до траєкторії точки.

3. Визначаємо прискорення точки (координатний спосіб) та зображаємо його графічно.

Прискорення точки знайдемо по його проекціям на координатні осі. Проекції прискорення мають вигляд:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{5\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \right] = -\frac{5\pi^2}{18} \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right); \\ a_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left[-\frac{10\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \right] = -\frac{5\pi^2}{9} \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Підставляючи час $t_1 = 1$ с у вирази (6), матимемо:

$$\begin{aligned} a_{1x} &= -\frac{5 \cdot (3,14)^2}{18} \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) = (-2,74) \cdot 0,5 = -1,37 \text{ см/с}^2; \\ a_{1y} &= -\frac{5 \cdot (3,14)^2}{9} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) = (-5,48) \cdot 0,866 = -4,75 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Модуль прискорення

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \sqrt{(-1,37)^2 + (-4,75)^2} = 4,94 \text{ см/с}^2. \quad (7)$$

Обираємо масштаб для прискорень $\mu_a = 4:1$, і зображаємо їх графічно (рис. К1а), причому так, щоб на схемі було все добре видно. Проекції прискорень a_{1x} та a_{1y} відкладаємо у обраному масштабі відповідно вздовж осі x та y , враховуючи при цьому їх напрямок з вказаними осями. Якщо проекції прискорень a_{1x} та a_{1y} мають знак „+”, то їх направляємо в додатній бік осей, якщо знак „-” – в протилежний бік.

Перевірка 3: вектор прискорення $\vec{a}_1$ знаходиться з того ж боку, що і крива відносно дотичної τ .

4. Визначаємо прискорення точки (натуральний спосіб) та зображаємо їх графічно.

Дотичне прискорення знайдемо використовуючи наступну формулу

$$a_\tau = \vec{\tau} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{v}}{v_\tau} \cdot \vec{a} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v_\tau}. \quad (8)$$

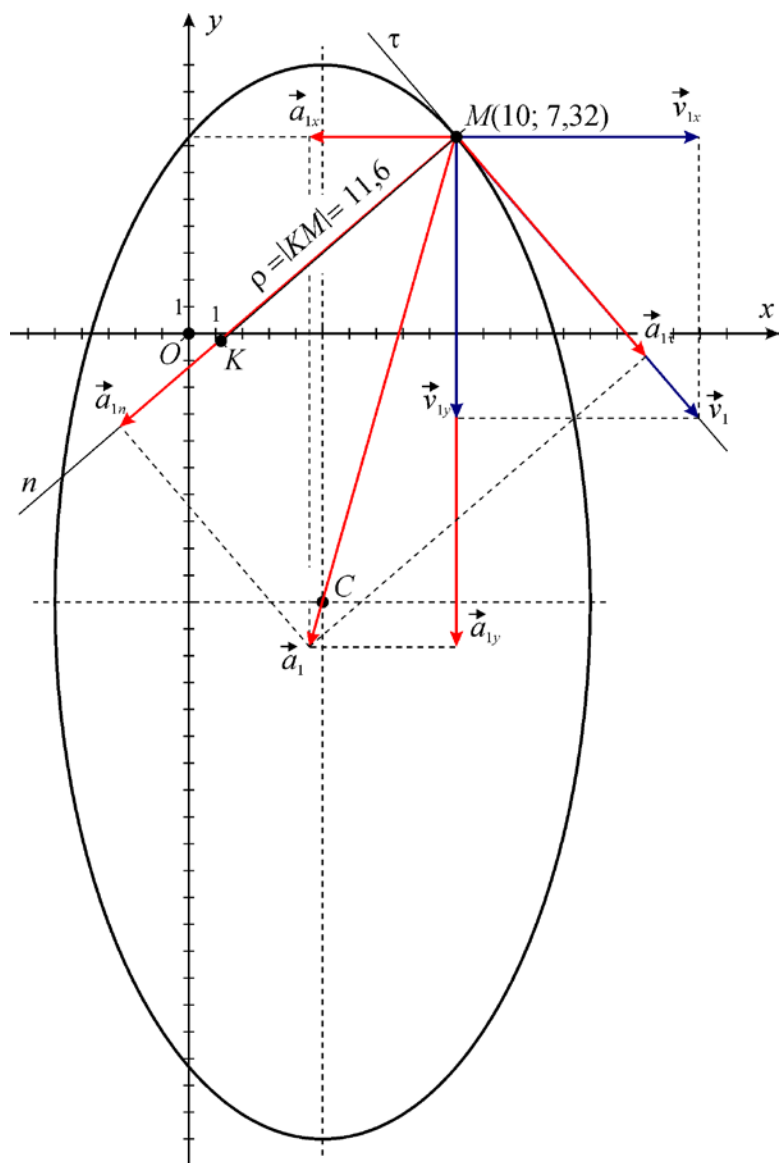


Рис. К1а

Враховуючи, що $v = v_\tau$, матимемо при $t_1 = 1$ с:

$$a_{1\tau} = \frac{4,53 \cdot (-1,37) + (-5,236) \cdot (-4,75)}{6,92} = 2,7 \text{ см/с}^2.$$

Так як дотичне прискорення додатне, то його спрямовуємо в той же бік, що і вектор швидкості (якщо $a_{1\tau} < 0$, то в протилежний бік).

Нормальне прискорення знайдемо з формули

$$a_{1n} = \sqrt{a_1^2 - a_{1\tau}^2} = \sqrt{(4,94)^2 - (2,7)^2} = 4,13 \text{ см/с}^2.$$

Нормальне прискорення розташовується з того ж боку, що і крива відносно дотичної τ , на перпендикулярі (нормалі n) опущеному на дотичну в точці M . Обираємо масштаб для прискорень $\mu_a = 4:1$, і зображаємо їх графічно (рис. К1а), причому так, щоб на схемі було все добре видно.

Перевірка 4: прискорення точки M , яке є діагоналлю прямокутника побудованого на сторонах a_{1x} та a_{1y} , співпадає з діагоналлю прямокутника побудованого на сторонах $a_{1\tau}$ та a_{1n} .

5. Визначаємо радіус кривини траєкторії та зображаємо його графічно. При $t_1 = 1$ с:

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{a_{1n}} = \frac{(6,92)^2}{4,13} = 11,6 \text{ см.}$$

У масштабі відстаней, у напрямку нормального прискорення, вздовж нормалі n , відкладаємо радіус кривини.

Відповідь: $v_1 = 6,92 \text{ см/с}$, $a_1 = 4,94 \text{ см/с}^2$, $a_{1\tau} = 2,7 \text{ см/с}^2$, $a_{1n} = 4,13 \text{ см/с}^2$, $\rho_1 = 11,6 \text{ см}$.

Задача К2 – плоскопаралельний рух абсолютно твердого тіла

Умова задачі. Плоский механізм складається із ланок 1, 2, 3, 4 і повзуна B , з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами O_1 , O_2 шарнірами; точки D і K знаходяться посередині відповідних ланок. Довжини ланок рівні відповідно $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 1,4$ м, $l_4 = 0,6$ м. Положення механізму визначається кутами α , β , γ , φ , θ . Значення цих кутів та інших величин вказані в табл. К2. Дугові стрілки на рисунках показують, як при побудові креслення механізму повинні відкладатися відповідні кути. Побудову креслення слід розпочинати із

ланки, напрямок якої визначається кутом α ; повзун з направляючими для наочності показати так, як в прикладі K2 (рис. K2б). Задані кутову швидкість і кутове прискорення вважати направленими проти годинникової стрілки, а задані швидкість v_B і прискорення a_B – від точки B до b .

Знайти: величини вказані в табл. K2, а також прискорення точки A ланки 1, якщо ланка 1 має в даний момент часу кутове прискорення ε_1 .

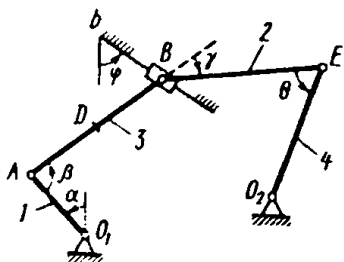


Рис. K2.0

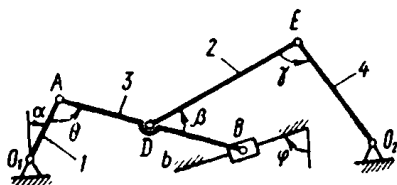


Рис. K2.1

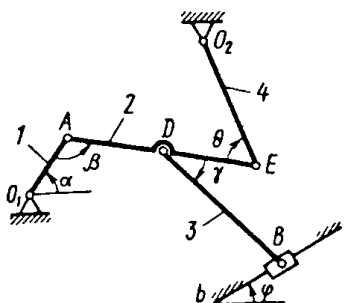


Рис. K2.2

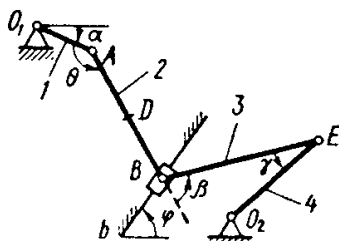


Рис. K2.3

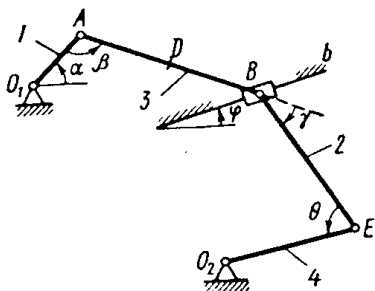


Рис. K2.4

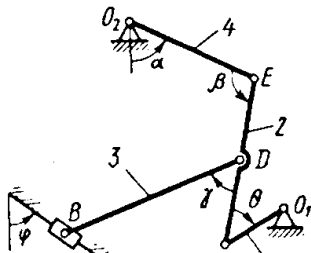


Рис. K2.5

Таблица К2

Номер умови	Кути, град					Дано			Знайти
	α	β	γ	φ	θ	ω_1 , 1/с	ω_4 , 1/с	v_B , м/с	
0	30	150	120	0	60	2	--	--	v_B, v_E, ω_2
1	60	60	60	90	120	--	3	--	v_A, v_D, ω_3
2	0	120	120	0	60	--	--	10	v_A, v_E, ω_2
3	90	120	90	90	60	3	--	--	v_B, v_E, ω_2
4	0	150	30	0	60	--	4	--	v_B, v_A, ω_2
5	60	150	120	90	30	--	--	8	v_A, v_E, ω_3
6	30	120	30	0	60	5	--	--	v_B, v_E, ω_3
7	90	150	120	90	30	--	5	--	v_A, v_D, ω_3
8	0	60	30	0	120	--	--	6	v_A, v_E, ω_2
9	30	120	120	0	60	4	--	--	v_B, v_E, ω_3

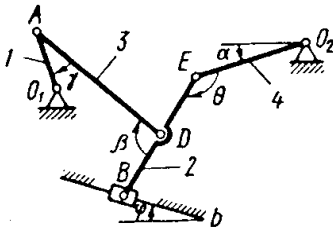


Рис. К2.6

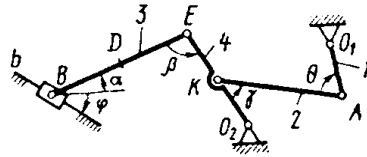


Рис. К2.7

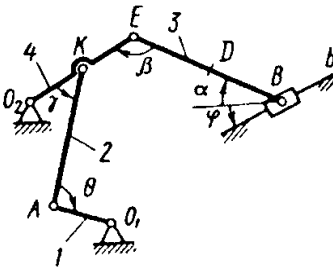


Рис. К2.8

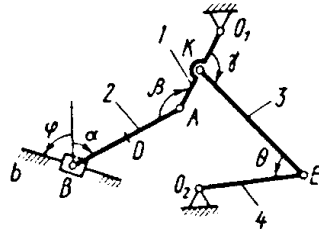


Рис. К2.9

Методичні рекомендації до розв'язання задачі

При розв'язанні задачі для визначення швидкостей точок механізму і кутових швидкостей його ланок необхідно скористатися теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла і поняттям про миттєвий центр швидкостей, застосовуючи дану теорему **до кожної ланки механізму окремо**. Побудову схеми швидкостей розпочинаємо з тої ланки механізму для якої задана швидкість (наприклад, або кутова швидкість одного з кривошипів, або лінійна швидкість повзуна).

Приклад розв'язку задачі K2

Умова задачі. Плоский механізм складається із ланок 1, 2, 3, 4 і повзуна B , з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами O_1 і O_2 шарнірами (рис. K2a).

Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\varphi = 30^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $AD = DB$, $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 1,4$ м, $\omega_1 = 2$ рад/с, $\varepsilon_1 = 7$ рад/с².

Знайти: швидкості v_B , v_E і ω_2 ; прискорення ε_3 і a_B .

Розв'язок

1. Будуємо схему для швидкостей (рис. K2б). Будуємо положення механізму у відповідності із заданими кутами розпочинаючи із ланки, напрямком якої визначається кутом α .

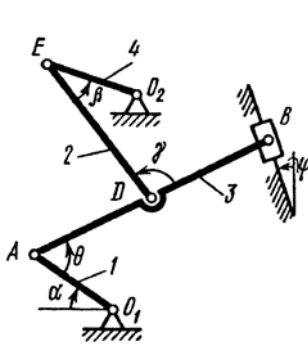


Рис. K2a

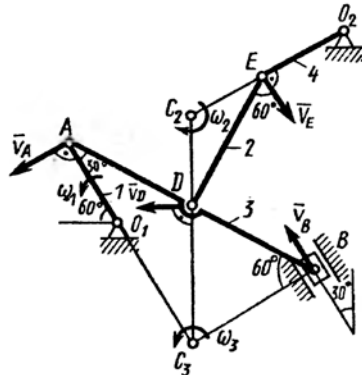


Рис. K2б

Побудову схеми швидкостей розпочнемо з першої ланки механізму (для якої задана кутова швидкість ω_1). Вектор швидкості точки A

буде направлений в сторону повороту і так, що $\vec{v}_A \perp O_1A$. Розглядаючи сусідню ланку 3, знайдемо спочатку напрямок швидкості точки B , так як вектор $\vec{v}_B$ паралельний напрямляючим по яким рухається повзун. Для цього будемо миттєвий центр швидкостей (МЦШ) ланки AB ; це точка C_3 , що лежить на перетині перпендикулярів до швидкості $\vec{v}_A$ і напрямній вздовж якої рухається повзун, проведених із точок A і B . Враховуючи напрямок швидкості $\vec{v}_A$, кутова швидкість обертання ланки 3 ω_3 , буде направлена проти ходу стрілки годинника. Вектори $\vec{v}_B$ і $\vec{v}_D$ направлені в сторону повороту ланки AB , причому $\vec{v}_D \perp C_3D$.

Розглянемо ланку 2. Так як точка E належить одночасно ланці 4, що обертається навколо O_2 , то $\vec{v}_E \perp O_2E$. Тоді, провівши перпендикуляри з точок E і D до швидкостей $\vec{v}_E$ і $\vec{v}_D$, побудуємо МЦШ C_2 ланки 2. По напрямку вектора $\vec{v}_D$ визначимо напрямок повороту ланки 2 навколо центра C_2 . Вектор $\vec{v}_E$ направлений в сторону поворота цієї ланки.

2. Знаходимо швидкості. З рис. К2б отримуємо, що:

$$v_A = \omega_1 l_1 = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ м/с.}$$

Для знаходження швидкості точки B використаємо теорему про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що з'єднує ці точки (пряма AB), тоді

$$v_A \cos 60^\circ = v_B \cos 30^\circ, \text{ звідки}$$

$$v_B = \frac{v_A \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,866} = 0,462 \text{ м/с.}$$

Величину v_D знайдемо з пропорції:

$$\frac{v_D}{C_3D} = \frac{v_B}{C_3B}. \quad (1)$$

Знайдемо C_3D і C_3B . Розглядаючи $\triangle AC_3B$ знайдемо, що

$$C_3B = AB \sin 30^\circ = 0,5AB = BD = 0,7 \text{ м,}$$

$$C_3A = AB \cos 30^\circ = 1,4 \cdot 0,866 \approx 1,21 \text{ м.}$$

Тоді $\triangle BC_3D$ є рівностороннім трикутником і $C_3B = C_3D$. З рівності (1) отримуємо, що

$$v_D = v_B = 0,462 \text{ м/с.}$$

Знайдемо кутову швидкість ω_3 :

$$\omega_3 = \frac{v_A}{C_3A} = \frac{0,8}{1,21} \approx 0,66 \text{ рад/с.}$$

Величину v_E знайдемо з пропорції:

$$\frac{v_E}{C_2E} = \frac{v_D}{C_2D}. \quad (2)$$

Знайдемо C_2D і C_2E . З рис. К2б видно, що $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30^\circ$ і

$$C_2E = C_2D = \frac{l_2}{2 \cos 30^\circ} \approx 0,693 \text{ м.}$$

З рівності (2) отримуємо, що

$$v_E = v_D = 0,462 \text{ м/с.}$$

З рис. К2б знайдемо, що

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2D} = \frac{0,462}{0,693} \approx 0,667 \text{ рад/с.}$$

3. Будуємо схему для прискорень (рис. К2в). Прискорення точки B ланки 3, яка здійснює плоскопаралельний рух, має наступний вигляд:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}. \quad (3)$$

Враховуючи, що точка B одночасно належить повзуну, який рухається поступально, вектор $\vec{a}_B$ паралельний направляючим повзуна. Тоді рівність (3) можна подати так:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n. \quad (4)$$

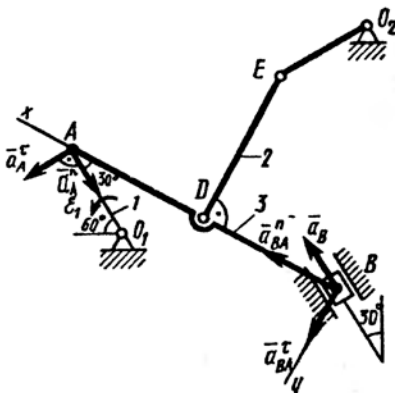


Рис. К2в

Вектор $\vec{a}_A^n$ направлений вздовж AO_1 , $\vec{a}_A^\tau$ - перпендикулярно AO_1 . Зображаємо на кресленні вектори $\vec{a}_{BA}^n$ (вздовж BA від B до A) і $\vec{a}_{BA}^\tau$ (в будь-яку сторону перпендикулярно BA).

4. Визначаємо прискорення точки B . Знайдемо прискорення $\vec{a}_A^\tau$, $\vec{a}_A^n$, $\vec{a}_{BA}^n$:

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 7 \cdot 0,4 = 2,8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 2^2 \cdot 0,4 = 1,6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_3^2 l_3 = 0,66^2 \cdot 1,4 \approx 0,61 \text{ м/с}^2.$$

Для знаходження невідомих присорень $\vec{a}_B$, $\vec{a}_{BA}^\tau$ скористаємося методом проекцій. Для цього введемо координатні осі x та y і спроектуємо на них векторне рівняння (4) (рис. К2в), матимемо:

$$\begin{aligned} x: a_B \cos 30^0 &= a_A^\tau \cos 60^0 - a_A^n \cos 30^0 + a_{BA}^n; \\ y: -a_B \sin 30^0 &= a_A^\tau \sin 60^0 + a_A^n \sin 30^0 + a_{BA}^\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Розв'язуємо отриману систему рівнянь (5) відносно невідомих $\vec{a}_B$, $\vec{a}_{BA}^\tau$. З першого рівняння системи (5), знайдемо:

$$a_B = \frac{a_A^\tau \cos 60^0 - a_A^n \cos 30^0 + a_{BA}^n}{\cos 30^0} = \frac{2,8 \cdot 0,5 - 1,6 \cdot 0,866 + 0,61}{0,866} \approx 0,72 \text{ м/с}^2.$$

Так як $a_B > 0$, то вектор $\vec{a}_B$ направлений так як показано на рис. К3в. Розв'яжемо друге рівняння системи (5), отримаємо:

$$\begin{aligned} a_{BA}^\tau &= -a_B \sin 30^0 - a_A^\tau \sin 60^0 - a_A^n \sin 30^0 = \\ &= -0,72 \cdot 0,5 - 2,8 \cdot 0,866 - 1,6 \cdot 0,5 \approx -3,585 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Знак “-” вказує, що напрямок $\vec{a}_{BA}^\tau$ протилежний показаному на рис.

К2в. З рівності $a_{BA}^\tau = \varepsilon_3 l_3$ отримаємо:

$$\varepsilon_3 = \frac{|\vec{a}_{BA}^\tau|}{l_3} = \frac{3,585}{1,4} \approx 2,56 \text{ рад/с}^2.$$

Відповідь: $v_B = 0,462 \text{ м/с}$; $v_E = 0,462 \text{ м/с}$; $\omega_2 = 0,667 \text{ рад/с}$;
 $a_B = 0,72 \text{ м/с}^2$; $\varepsilon_3 = 2,56 \text{ рад/с}^2$.

Задача К3 – складний рух матеріальної точки

Умова задачі. Прямокутна пластина (рис. К3.0 – К3.5) або кругла пластина радіусом $R = 60 \text{ см}$ (рис. К3.6 – К3.9) обертається навколо нерухомої осі із постійною кутовою швидкістю ω , заданої в табл. К3 (у випадку коли кутова швидкість від'ємна її напрямок буде протилежний показаному на рисунку). На рис. К3.0 – К3.3, К3.8, К3.9 вісь обертання перпендикулярна площині пластини і проходить через точку O (пластинка обертається в своїй площині); на рис. К3.4 – К3.7 вісь обертання OO_1 лежить в площині пластини (пластина обертається у просторі).

По пластині вздовж прямої BD (рис. К3.0 – К3.5) або по колу радіуса R (рис. К3.6 – К3.9) рухається точка M ; закон її відносного руху, тобто залежність $s = AM = f_2(t)$ (s виражено в сантиметрах, t -

в секундах), заданий в таблиці КЗ окремо для рис. КЗ.0 – КЗ.5 і для рис. КЗ.6 – КЗ.9. На рисунках точка M показана в положенні, при якому $s = AM > 0$ (при $s < 0$ точка M знаходиться по іншу сторону від точки A).

Знайти: абсолютну швидкість v_a та абсолютне прискорення a_a точки M в момент часу $t_1 = 1$ с.

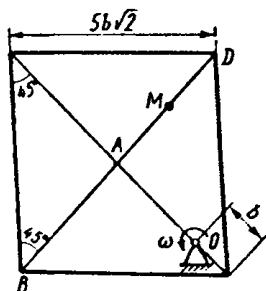


Рис. К2.0

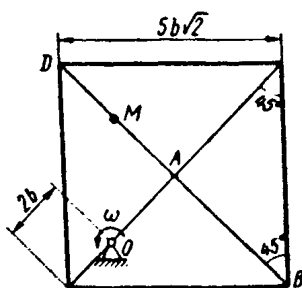


Рис. К2.1

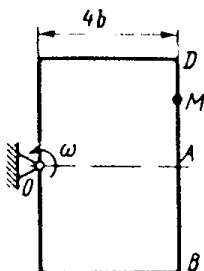


Рис. К2.2

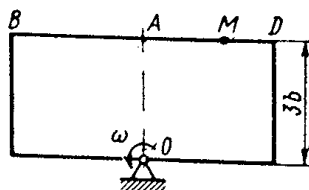


Рис. К2.3

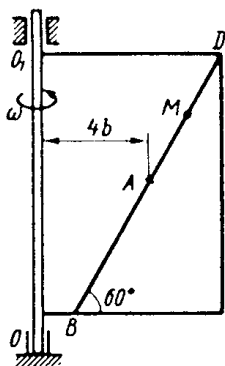


Рис. К2.4

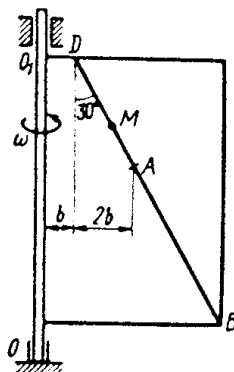


Рис. К2.5

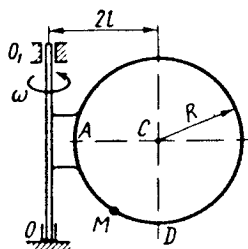


Рис. К3.6

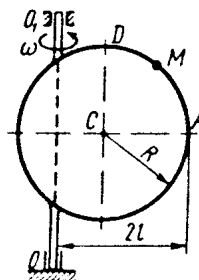


Рис. К3.7

Таблица К3

Номер умови	$\varphi = f_1(t)$, рад	Рис. К3.0 – К3.4		Рис. К3.5 – К3.9	
		b , см	$s = AM =$ $= f_2(t)$, см	l , см	$s = \overset{\smile}{AM} =$ $= f_2(t)$, см
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3} R(4t^2 - 2t^3)$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$\frac{4}{3} R$	$\frac{\pi}{2} R(2t^2 - t^3)$
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3} R(2t^2 - 1)$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{6} R(3t - t^2)$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{3} R(t^3 - 2t)$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{6} R(t^3 - 2t)$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{3}{4} R$	$\frac{\pi}{2} R(t^3 - 2t^2)$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6} R(t - 5t^2)$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3} R(3t^2 - t)$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$\frac{4}{3} R$	$\frac{\pi}{2} R(t - 2t^2)$

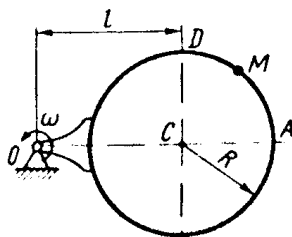


Рис. К3.8

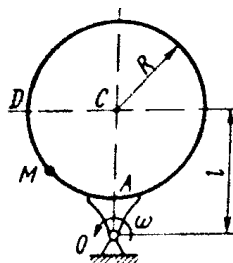


Рис. К3.9

Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Для розв'язання задачі скористаємося теоремами про складання швидкостей і про складання прискорень. Перед тим, як виконувати всі розрахунки, слід по умові задачі визначити, де знаходиться точка M на пластині в момент часу $t_1 = 1$ с, і показати точку саме в цьому положенні (а не в довільному, яке показано на рисунках до задачі).

У випадках, що відносяться до рис. К3.5 – К3.9, при розв'язку задачі не підставляти числового значення R , поки не буде визначено положення точки M в момент часу $t_1 = 1$ с і кут між радіусами CM і CA в цей момент.

Приклад розв'язку задачі К3а (складний рух точки у просторі)

Умова задачі. Пластинка $KDABE$ обертається у просторі навколо нерухомої осі OO_1 , яка лежить у площині пластинки, за законом $\varphi = f_1(t)$ (додатній напрямок відліку кута φ показано на рис. К3а дуговою стрілкою). Відносно пластинки по колу радіуса R рухається точка M за законом $s = \overset{\curvearrowright}{AM} = f_2(t)$ (додатній напрямок відліку s - від A до M).

Дано: $R = 0,7$ м; $\varphi = 2t^2 - 5t$; $s = \overset{\curvearrowright}{AM} = \frac{\pi R}{3} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ (φ - в радіанах, s - в метрах, t - в секундах).

Знайти: абсолютну швидкість v_a та абсолютне прискорення a_a точки M в момент часу $t_1 = 1$ с.

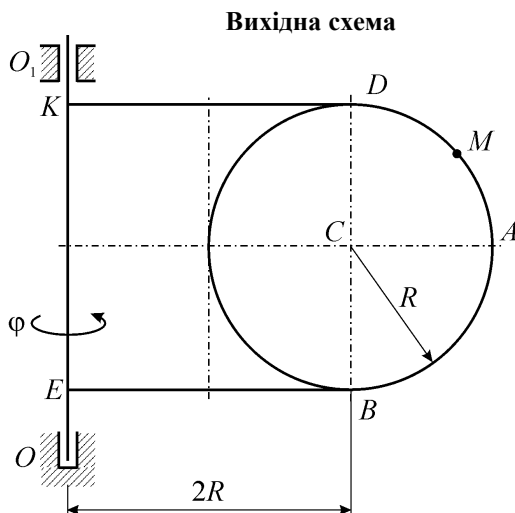


Рис. К3а

Розв'язок

1. Визначимо швидкості при відносному і переносному русі точки M (рис. К3б).

Будемо розглядати рух точки M , як складний. Тоді рух точки по колу будемо називати відносним рухом (пластинка при цьому умовно нерухома), а рух точки разом з пластинкою – переносним рухом (при цьому точка і пластинка обертаються, як одне жорстке ціле).

Спочатку визначаємо положення точки M на траєкторії. При $t_1 = 1$ с матимемо:

$$s = \frac{\pi R}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi R}{6} > 0 \text{ м.}$$

Кут $\alpha = \angle ACM = s/R = \pi/6$ (рис. К3б). Так як $s > 0$, то відлік AM співпадає із вказаним на рисунку. Покажемо положення точки M на траєкторії при $\alpha = \pi/6$ (рис. К3б).

Швидкість точки M при її відносному русі має вигляд:

$$v_r = \dot{s} = \left[\frac{\pi R}{3} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \right]' = -\frac{\pi^2 R}{9} \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При $t_1 = 1$ с, матимемо

$$v_r = -\frac{(3,14)^2 \cdot 0,7}{9} \cdot 0,866 = -0,664 \text{ м/с.}$$

Знак “-” вказує на те, що вектор $\vec{v}_r$ направлений в протилежну сторону зміни дугової координати s по дотичній до траєкторії точки при її відносному русі.

Швидкість точки M при її переносному русі має вигляд:

$$v_e = \omega r,$$

де

$$\omega = \dot{\varphi} = (2t^2 - 5t)' = 4t - 5; \quad r = NM = 2R + R \cos \alpha.$$

При $t_1 = 1$ с

$$\omega = 4 \cdot 1 - 5 = -1 \text{ рад/с}; \quad r = 2 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,866 = 2 \text{ м};$$

$$v_e = |\omega| \cdot r = |-1| \cdot 2 = 2 \text{ м/с}.$$

Знак “-” вказує на те, що напрямок кутової швидкості ω буде протилежний напрямку додатнього відліку кута повороту пластинки φ . Вектор $\vec{v}_e$ перпендикулярний площині пластинки і направлений в сторону кутової швидкості.

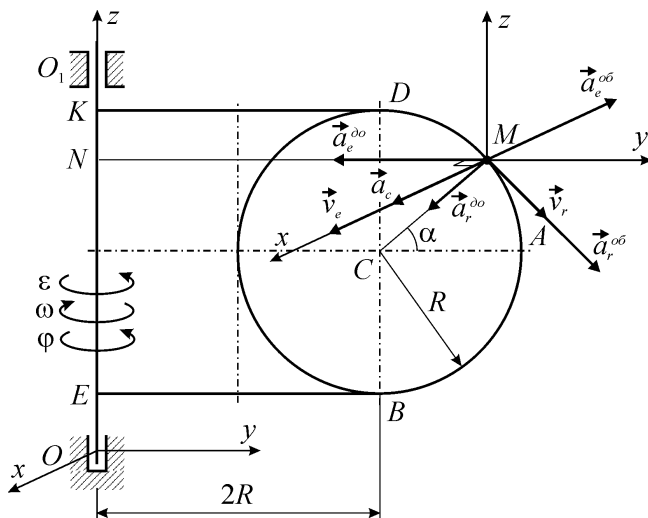


Рис. К36

2. Знайдемо абсолютну швидкість точки M . Абсолютна швидкість точки M має вигляд:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

Так як вектори $\vec{v}_e$ і $\vec{v}_r$ взаємно перпендикулярні, то тоді

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{2^2 + (-0,664)^2} = 2,1 \text{ м/с}.$$

3. Визначимо прискорення переносного і відносного руху точки M та прискорення Кориоліса. Так як у відносному русі точка M здійснює рух по колу (рис. К3б), то її прискорення у відносному русі має вигляд:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{ob} + \vec{a}_r^{\partial o},$$

де

$$a_r^{ob} = \dot{v}_r = \left[-\frac{\pi^2 R}{9} \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \right]' = -\frac{\pi^3 R}{27} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right), \quad a_r^{\partial o} = \frac{v_r^2}{R} = \frac{\pi^4 R}{81} \sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При $t_1 = 1$ с, матимемо

$$a_r^{ob} = -\frac{(3,14)^3 \cdot 0,7}{27} \cdot 0,5 = -0,4 \text{ м/с}^2; \quad a_r^{\partial o} = \frac{(3,14)^4 \cdot 0,7}{81} \cdot 0,866^2 = 0,63 \text{ м/с}^2.$$

Знак “-” вказує на те, що вектор $\vec{a}_r^{ob}$ направлений в протилежну сторону зміни дугової координати s по дотичній до траєкторії точки при її відносному русі; вектор $\vec{a}_r^{\partial o}$ направлений до центра C кола.

Прискорення точки M при її переносному русі має вигляд:

$$\vec{a}_e = a_e^{\partial o} + a_e^{ob},$$

де

$$a_e^{\partial o} = \omega^2 r; \quad a_e^{ob} = \varepsilon r; \quad \varepsilon = \dot{\omega} = (4t - 5)' = 4 \text{ рад/с}.$$

Напрямок кутового прискорення ε співпадає з напрямком додатнього відліку кута φ . При $t_1 = 1$ с

$$a_e^{\partial o} = (-1)^2 \cdot 2 = 2 \text{ м/с}^2; \quad a_e^{ob} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ м/с}^2.$$

Вектор прискорення $\vec{a}_e^{\partial o}$ направлений по прямій MN до осі обертання, а вектор $\vec{a}_e^{ob}$ - перпендикулярно площині пластинки і в сторону кутового прискорення.

Знайдемо прискорення Кориоліса. Так як кут між вектором $\vec{v}_r$ і віссю обертання (вектором $\vec{\omega}$) рівний 30° , то прискорення Кориоліса в момент часу $t_1 = 1$ с дорівнюватиме:

$$a_c = 2 \cdot |\vec{v}_r| \cdot |\vec{\omega}| \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot |-0,664| \cdot |-1| \cdot 0,5 = 0,664 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок вектора $\vec{a}_c$ знайдемо використовуючи правило Жуковського. Для цього вектор $\vec{v}_r$ спроектуюмо на площину перпендикулярну осі обертання (проекція буде направлена протилежно вектору $\vec{a}_e^{\partial o}$) і потім цю проекцію повертаємо на кут 90° в сторону $\vec{\omega}$, тобто за ходом стрілки годинника; в результаті отримаємо напрямок вектора

прискорення Кориоліса. Вектор $\vec{a}_c$ направлений так само, як і вектор $\vec{v}_e$.

4. Знайдемо абсолютне прискорення точки M при її складному русі. За теоремою Кориоліса абсолютне прискорення точки M має вигляд:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^{\partial\partial} + \vec{a}_e^{\partial\omega} + \vec{a}_r^{\partial\partial} + \vec{a}_r^{\partial\omega} + \vec{a}_c.$$

Для визначення абсолютного прискорення $\vec{a}_a$ проведемо координатні осі $Mxyz$ і обчислимо його проекції на ці осі:

$$a_{ax} = a_c - a_e^{\partial\partial} = 0,664 - 8 = -7,336 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{ay} = |a_r^{\partial\partial} \sin 30^\circ - a_r^{\partial\omega} \cos 30^\circ - a_e^{\partial\omega}| = |-0,4| \cdot 0,5 - 0,63 \cdot 0,866 - 2 = -2,34 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{az} = -|a_r^{\partial\partial}| \cdot \cos 30^\circ - a_r^{\partial\omega} = -|-0,4| \cdot 0,866 - 0,63 = -0,976 \text{ м/с}^2.$$

Остаточно

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{(-7,336)^2 + (-2,34)^2 + (-0,976)^2} = 7,76 \text{ м/с}^2.$$

$$\text{Відповідь: } v_a = 2,1 \text{ м/с, } a_a = 7,76 \text{ м/с}^2.$$

Приклад розв'язку задачі КЗб (складний рух точки у площині)

Умова задачі. Пластинка $ODAB$ обертається навколо осі, що проходить через точку O перпендикулярно площині пластинки, за законом $\varphi = f_1(t)$ (додатній напрямок відліку кута φ показано на рис. КЗв дуговою стрілкою). Відносно пластинки по колу радіуса R рухається точка M за законом $s = \overset{\cup}{AM} = f_2(t)$ (додатній напрямок відліку s - від A до M).

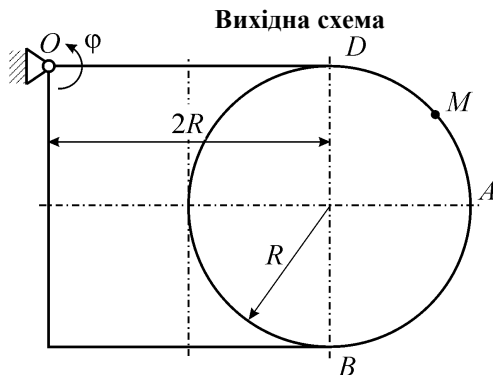


Рис. КЗв

Дано: $R = 0,5 \text{ м}$; $\varphi = t^2 - 0,5t^3$; $s = \overset{\circ}{AM} = \pi R \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ (φ – в радіанах, s – в метрах, t – в секундах).

Знайти: абсолютну швидкість v_a та абсолютне прискорення a_a точки M в момент часу $t_1 = 2 \text{ с}$.

Розв'язок

1. Визначимо швидкості при відносному і переносному русі точки M (рис. К3г).

Будемо розглядати рух точки M , як складний. Тоді рух точки по колу будемо називати відносним рухом (пластинка при цьому умовно нерухома), а рух точки разом з пластинкою – переносним рухом (при цьому точка і пластинка обертаються, як одне жорстке ціле).

Спочатку визначаємо положення точки M на траєкторії. При $t_1 = 2 \text{ с}$ матимемо:

$$s = \pi R \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\pi R}{2} < 0 \text{ м.}$$

Кут $\alpha = \angle ACM = s/R = -\pi/2$ (рис. К3г). Так як $s < 0$, то точка M буде розташована по інший бік від точки A (рис. К3г). Покажемо положення точки M на траєкторії при $\alpha = -\pi/2$ (рис. К3г).

Швидкість точки M при її відносному русі має вигляд:

$$v_r = \dot{s} = \left[\pi R \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \right]' = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При $t_1 = 2 \text{ с}$, матимемо

$$v_r = -\frac{(3,14)^2 \cdot 0,5}{3} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx -1,42 \text{ м/с.}$$

Знак “–” вказує на те, що вектор $\vec{v}_r$ направлений в протилежну сторону зміни дугової координати s по дотичній до траєкторії точки при її відносному русі.

Швидкість точки M при її переносному русі має вигляд:

$$v_e = \omega r,$$

де

$$\omega = \dot{\varphi} = (t^2 - 0,5t^3)' = 2t - 1,5t^2; \quad r = OM = 2R\sqrt{2}.$$

При $t_1 = 2 \text{ с}$

$$\omega = 2 \cdot 2 - 1,5 \cdot 2^2 = -2 \text{ рад/с}; \quad r = 2 \cdot 0,5\sqrt{2} \approx 1,414 \text{ м};$$

$$v_e = |\omega| \cdot r = |-2| \cdot 1,414 \approx 2,83 \text{ м/с}.$$

Знак “–” вказує на те, що напрямок кутової швидкості ω буде протилежний напрямку додатного відліку кута повороту пластинки φ . Вектор $\vec{v}_e$ направлений в сторону кутової швидкості і так, що $\vec{v}_e \perp OM_1$.

2. Знайдемо абсолютну швидкість точки M . Абсолютна швидкість точки M має вигляд:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

Для визначення абсолютної швидкості $\vec{v}_a$ проведемо координатні осі Mx і обчислимо його проєкції на ці осі:

$$v_{ax} = -|v_e| \cos 45^\circ = -2,83 \cdot 0,707 = -2 \text{ м/с};$$

$$v_{ay} = |v_r| + |v_e| \cos 45^\circ = 1,42 + 2,83 \cdot 0,707 = 3,42 \text{ м/с}^2.$$

Остаточно

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3,42^2} = 3,96 \text{ м/с}^2.$$

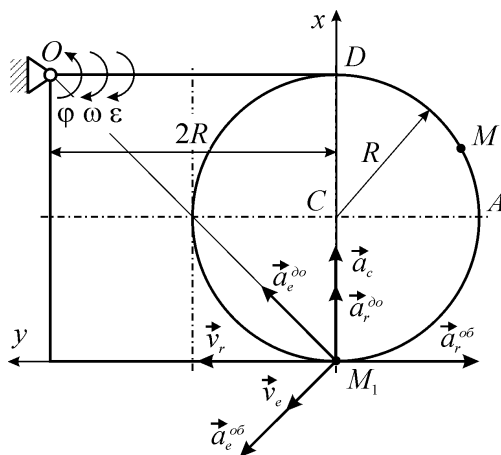


Рис. КЗг

3. Визначимо прискорення переносного і відносного руху точки M та прискорення Коріоліса.

Так як у відносному русі точка M здійснює рух по колу (рис. КЗг), то її прискорення у відносному русі має вигляд:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{ob} + \vec{a}_r^{do},$$

де

$$a_r^{o\delta} = \dot{v}_r = \left[-\frac{\pi^2 R}{3} \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \right]' = -\frac{\pi^3 R}{9} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right),$$

$$a_r^{\partial o} = \frac{v_r^2}{R} = \frac{\pi^4 R}{9} \sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При $t_1 = 2$ с, матимемо

$$a_r^{o\delta} = -\frac{(3,14)^3 \cdot 0,5}{9} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx 0,86 \text{ м/с}^2;$$

$$a_r^{\partial o} = \frac{(3,14)^4 \cdot 0,5}{9} \cdot 0,866^2 \approx 4,06 \text{ м/с}^2.$$

Знак “+” вказує на те, що вектор $\vec{a}_r^{o\delta}$ направлений в сторону зміни дугової координати s по дотичній до траєкторії точки при її відносному русі; вектор $\vec{a}_r^{\partial o}$ направлений до центра C кола.

Прискорення точки M при її переносному русі має вигляд:

$$\vec{a}_e = a_e^{\partial o} + a_e^{o\delta},$$

де

$$a_e^{\partial o} = \omega^2 r; \quad a_e^{o\delta} = |\varepsilon| r; \quad \varepsilon = \dot{\omega} = (2t - 1,5t^2)' = 2 - 3t.$$

При $t_1 = 2$ с

$$\varepsilon = 2 - 3 \cdot 2 = -4 \text{ рад/с}^2; \quad a_e^{\partial o} = (-2)^2 \cdot 1,414 = 5,656 \text{ м/с}^2;$$

$$a_e^{o\delta} = 4 \cdot 1,414 = 5,656 \text{ м/с}^2.$$

Знак “-” вказує на те, що напрямку кутового прискорення ε буде протилежний напрямку додатнього відліку кута повороту пластинки φ . Вектор прискорення $\vec{a}_e^{\partial o}$ направлений по прямій OM_1 до центра обертання – точки O , а вектор $\vec{a}_e^{o\delta}$ направлений в сторону кутового прискорення і так, що $\vec{a}_e^{o\delta} \perp OM_1$.

Знайдемо прискорення Коріоліса. Так як кут між вектором $\vec{v}_r$ і віссю обертання (вектором $\vec{\omega}$) рівний 90° , то прискорення Коріоліса в момент часу $t_1 = 2$ с дорівнюватиме:

$$a_c = 2 \cdot |v_r| \cdot |\omega| \cdot \sin 90^\circ = 2 \cdot |-1,42| \cdot |-2| = 5,68 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок вектора $\vec{a}_c$ знайдемо використовуючи правило Жуковського. Так як вектор $\vec{v}_r$ знаходиться в площині перпендикулярній осі обертання, то повернемо його на кут 90° в сторону ω , тобто за ходом

стрілки годинника; в результаті отримаємо напрямок вектора прискорення Коріоліса. Вектор $\vec{a}_c$ направлений так само, як і вектор $\vec{a}_r^{\partial o}$.

4. Знайдемо абсолютне прискорення точки M при її складному русі. За теоремою Коріоліса абсолютне прискорення точки M має вигляд:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^{\partial \bar{o}} + \vec{a}_e^{\partial o} + \vec{a}_r^{\partial \bar{o}} + \vec{a}_r^{\partial o} + \vec{a}_c.$$

Для визначення абсолютного прискорення $\vec{a}_a$ проведемо координатні осі Mx_{uz} і визначимо його проекції на ці осі:

$$\begin{aligned} a_{ax} &= a_r^{\partial o} + a_c + a_e^{\partial o} \cos 45^0 - a_e^{\partial \bar{o}} \cos 45^0 = \\ &= 4,06 + 5,68 + 5,656 \cdot 0,707 - 5,656 \cdot 0,707 = 9,74 \text{ м/с}^2; \\ a_{ay} &= a_e^{\partial o} \cos 45^0 + a_e^{\partial \bar{o}} \cos 45^0 - a_r^{\partial \bar{o}} = \\ &= 5,656 \cdot 0,707 + 5,656 \cdot 0,707 - 0,86 \approx 7,14 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Остаточно

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{9,74^2 + 7,14^2} \approx 12,08 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $v_a = 3,96 \text{ м/с}$, $a_a = 12,08 \text{ м/с}^2$.

Задача Д1 – динаміки точки (друга задача динаміки)

Умова задачі. Вантаж (тіло) D масою m , отримавши в точці A початкову швидкість $\vec{v}_0$, рухається по вигнутій трубці ABC (рис. Д1.0 – Д1.9, табл. Д1). На ділянці AB на тіло, крім сили ваги, діє постійна сила $\vec{Q}$ та сила опору середовища $\vec{R}_{on}$, що залежить від швидкості вантажу v (направлена в протилежну сторону руху). Тертям тіла об трубку на ділянці AB знехтувати. В точці B тіло, не змінюючи своєї швидкості, переходить на ділянку BC трубки, де на нього крім сили ваги діють сила тертя (коефіцієнт тертя $f_{mp} = 0,2$) і змінна сила $\vec{F} = \vec{F}(t)$, проекція якої F_x на вісь x задана в табл. Д1.

Вважаючи тіло матеріальною точкою і знаючи відстань $AB = l$ або час t_1 руху вантажу від точки A до точки B , знайти швидкість тіла в точці B (v_B) і закон руху тіла на ділянці BC ($x = f(t)$, де $x = BD$).

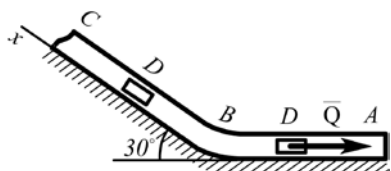


Рис. Д1.0

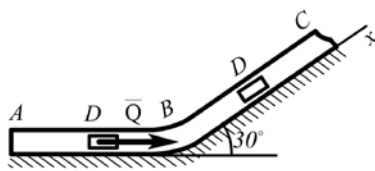


Рис. Д1.1

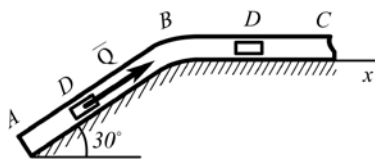


Рис. Д1.2

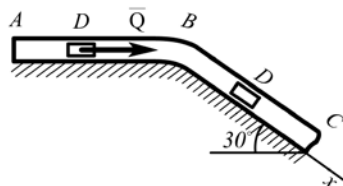


Рис. Д1.3

Таблица Д1

Номер умови	m , кг	v_0 , м/с	Q , Н	R , Н	l , м	t_1 , с	F_x , Н
0	2	20	6	$0,4v$	-	2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	$0,8v^2$	1,5	-	$6t$
2	4,5	24	9	$0,5v$	-	3	$3\sin(2t)$
3	6	14	22	$0,6v^2$	5	-	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4	$0,4v$	-	2	$4\cos(4t)$
5	8	10	16	$0,5v^2$	4	-	$-6\sin(2t)$
6	1,8	24	5	$0,3v$	-	2	$9t^2$
7	4	12	12	$0,8v^2$	2,5	-	$-8\cos(4t)$
8	3	22	9	$0,5v$	-	3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	$0,2v^2$	4	-	$-6\cos(4t)$

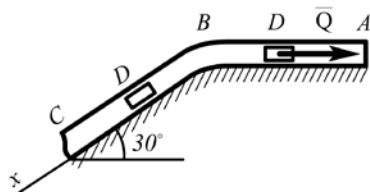


Рис. Д1.4

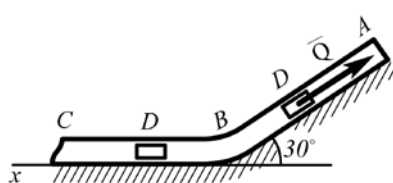


Рис. Д1.5

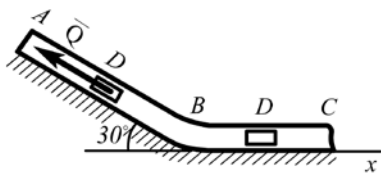


Рис. Д1.6

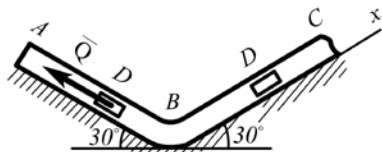


Рис. Д1.7

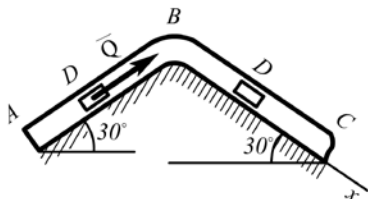


Рис. Д1.8

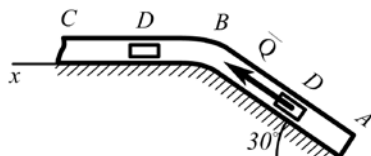


Рис. Д1.9

Методичні рекомендації до розв'язання задачі.

Задача Д1 – на інтегрування диференціальних рівнянь руху точки. Досліджуючи рух тіла (в подальшому матеріальної точки (МТ)) доцільно розбити вирішення задачі на дві частини. Спочатку необхідно скласти та проінтегрувати методом розділення змінних диференціальне рівняння руху МТ, враховуючи початкові умови. Потім, знаючи час руху МТ на ділянці AB або її довжину, визначаємо швидкість МТ в точці B . Ця швидкість буде початковою для руху МТ на ділянці BC . Після цього складаємо та інтегруємо диференціальне рівняння руху МТ на ділянці BC , ведучи відлік часу, коли МТ знаходилась в точці B . При інтегруванні рівняння руху на ділянці AB у випадку, коли відома довжина l ділянки, доцільно перейти до змінної y , враховуючи, що

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dy}.$$

Приклад розв'язку задачі Д1 (випадок, коли $R_{on} = \mu v$)

Умова задачі. На вертикальній ділянці AB трубки (рис. Д1а) на вантаж D масою m , крім сили ваги, діє постійна сила $\bar{Q}$ та сила опору середовища $\bar{R}_{on}$. Тертям тіла об трубку на ділянці AB знехтувати. В точці B тіло, не змінюючи своєї швидкості, переходить на ділянку BC трубки, де на нього крім сили ваги діють сила тертя і змінна сила $\bar{F} = \bar{F}(t)$, задана в ньютонках.

Дано: $m = 1,5 \text{ кг}$; $Q = 20 \text{ Н}$; $\alpha = 60^\circ$; $f_{mp} = 0,2$; $F_x = 5 \sin(3t) \text{ Н}$;
 $v_0 = 15 \text{ м/с}$; $R_{on} = \mu v$, де $\mu = 0,35 \text{ кг/с}$; $t_1 = 2 \text{ с}$.

Знайти: вважаючи тіло матеріальною точкою (МТ) і знаючи час t_1 руху вантажа від точки A до точки B , знайти швидкість тіла в точці B (v_B) і закон руху тіла на ділянці BC ($x = f(t)$, де $x = BD$).

Розв'язок

1. Розглянемо рух МТ на ділянці AB .

1. Будуємо розрахункову схему (рис. Д16). Вводимо осі y та z , відносно яких будемо вивчати рух тіла (МТ). Прикладаємо сили, що діють на МТ.

2. Складаємо диференціальне рівняння руху МТ:

а) у векторній формі

$$m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{P} + \vec{R}_{on}; \quad (1a)$$

б) у координатній формі (для цього спроекуємо рівняння (1a) на осі y та z)

$$\begin{aligned} y: m\ddot{y} &= Q - P - R_{on}, \text{ тут } P = mg; \\ z: 0 &= 0. \end{aligned} \quad (2a)$$

Зауважимо, що в рівнянні всі змінні сили необхідно обов'язково виражати через величини від яких вони залежать.

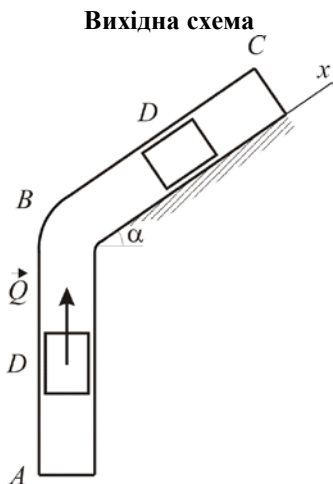


Рис. Д1а

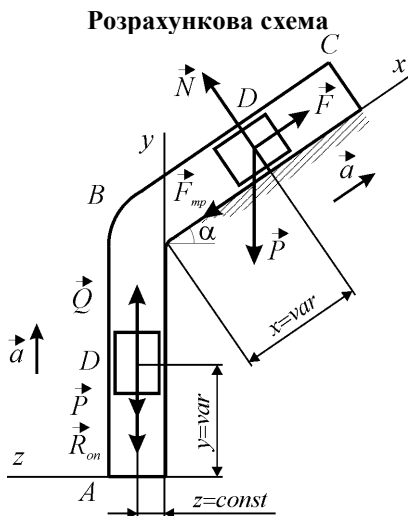


Рис. Д1б

Перетворимо перше диференціальне рівняння системи (2a). Враховуючи, що $\ddot{y} = dv_y/dt$, матимемо:

$$m \frac{dv_y}{dt} = Q - mg - \mu v \quad \text{або} \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{Q}{m} - g - \frac{\mu}{m} v. \quad (3a)$$

Введемо нові позначення:

$$k = \frac{\mu}{m} = \frac{0,35}{1,5} = 0,23 \text{ с}^{-1}; \quad b = \frac{Q - mg}{\mu} = \frac{20 - 1,5 \cdot 9,8}{0,35} = 15,14 \text{ м/с}.$$

Після перетворення рівняння (3a) матиме вигляд:

$$\frac{dv}{dt} = -k(v - b), \text{ де } v_y = v. \quad (4a)$$

3. Проінтегруємо диференціальне рівняння руху МТ. Для цього спочатку розділимо змінні у рівнянні (4a), матимемо:

$$\frac{dv}{(v - b)} = -k dt; \quad \int \frac{dv}{(v - b)} = -k \int dt; \\ \ln(v - b) = -kt + C_1. \quad (5a)$$

Отримане рівняння (5a) є першим інтегралом.

4. Знайдемо швидкість МТ в точці В. Знайдемо сталу інтегрування C_1 . Враховуючи початкові умови руху МТ, при $t_0 = 0$, $y_0 = 0$ м; $v_0 = 15$ м/с, з першого інтегралу (5a) отримаємо:

$$C_1 = \ln(v_0 - b).$$

Остаточно рівняння (5a) матиме вигляд:

$$\ln(v - b) = -kt + \ln(v_0 - b)$$

або після перетворень отримаємо

$$\ln \frac{(v - b)}{(v_0 - b)} = -kt \Rightarrow \frac{(v - b)}{(v_0 - b)} = e^{-kt}, \text{ приймаємо, що } v = v_B.$$

Остаточно:

$$v_B = e^{-kt}(v_0 - b) + b = 2,71^{-0,23 \cdot 2}(15 - 15,14) + 15,14 = 15,05 \text{ м/с}.$$

II. Розглянемо рух МТ на ділянці ВС. (Порядок розв'язання на ділянці ВС аналогічний порядку розв'язання ділянки АВ).

1.

$$2. \text{ а) } m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{mp} + \vec{N} + \vec{P};$$

$$\text{б) } x: m\ddot{x} = m \frac{dv_x}{dt} = F_x - F_{mp} - P \sin \alpha; \quad (6a)$$

тут $F_{mp} = f_{mp}N = f_{mp}mg \cos \alpha$; $P = mg$. Поділивши праву і ліву частину рівняння (6a) на m та перетворюючи, отримаємо:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{5}{m} \sin(3t) - g(f_{mp} \cos \alpha + \sin \alpha), \quad (7a)$$

Розділимо змінні у рівнянні (7a) та перетворимо його шляхом підстановки відомих величин, отримаємо:

$$dv_x = [3,33 \sin(3t) - 9,66] dt. \quad (8a)$$

3. Знайдемо перший інтеграл використовуючи вираз (8a):

$$\int dv_x = \int [3,33 \sin(3t) - 9,66] dt,$$

звідки

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -1,11 \cos(3t) - 9,66t + C_2, \quad (9a)$$

Знайдемо другий інтеграл:

$$\int dx = \int [-1,11 \cos(3t) - 9,66t + C_2] dt,$$

звідки

$$x = -0,37 \sin(3t) - 4,83t^2 + C_2t + C_3. \quad (10a)$$

4. Враховуючи початкові умови руху МТ, при $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $v(0) = v_B = 15,05$ м/с, з першого (9a) та другого (10a) інтегралу, отримаємо: $C_2 = 16,16$, $C_3 = 0$. Остаточний закон руху тіла на ділянці BC має вигляд:

$$x = -0,37 \sin(3t) - 4,83t^2 + 16,16t, \text{ де } x - \text{в метрах, } t - \text{в секундах.}$$

Приклад розв'язку задачі Д1 (випадок, коли $R_{on} = \mu v^2$)

Умова задачі. На вертикальній ділянці AB трубки (рис. Д1в) на вантаж D масою m , крім сили ваги, діє постійна сила $\vec{Q}$ та сила опору середовища $\vec{R}_{on}$. Тертям тіла об трубку на ділянці AB знехтувати. В точці B тіло, не змінюючи своєї швидкості, переходить на ділянку BC трубки, де на нього крім сили ваги діють сила тертя і змінна сила $\vec{F} = \vec{F}(t)$, задана в ньютонках.

Дано: $m = 2$ кг; $Q = 5$ Н; $\alpha = 30^\circ$; $f_{mp} = 0,2$; $F_x = 16 \sin(4t)$ Н; $v_0 = 5$ м/с; $R_{on} = \mu v^2$, де $\mu = 0,4$ кг/м; $l = 2,5$ м.

Знайти: вважаючи тіло матеріальною точкою (МТ) і знаючи відстань $AB = l$ руху вантажа від точки A до точки B , знайти швидкість тіла в точці B (v_B) і закон руху тіла на ділянці BC ($x = f(t)$, де $x = BD$).

Розв'язок

1. Розглянемо рух МТ на ділянці АВ.

1. Будуємо розрахункову схему (рис. Д1г). Вводимо осі y та z , відносно яких будемо вивчати рух тіла (МТ). Прикладаємо сили, що діють на МТ.

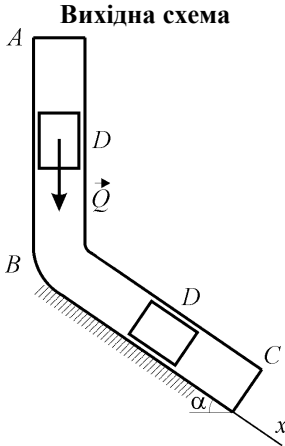


Рис. Д1в

Розрахункова схема

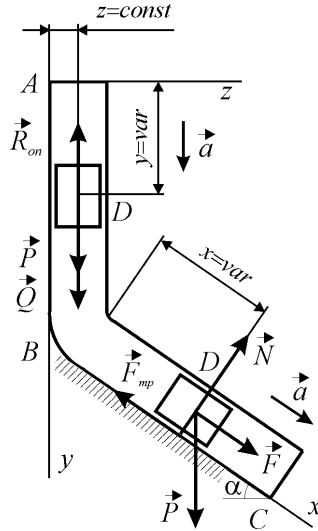


Рис. Д1г

2. Складаємо диференціальне рівняння руху МТ:

а) у векторній формі

$$m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{P} + \vec{R}_{on}; \quad (16)$$

б) у координатній формі (для цього спроекуємо рівняння (16) на осі y та z)

$$y: m\ddot{y} = Q + P - R_{on}, \text{ тут } P = mg; \quad z: 0 = 0. \quad (26)$$

Перетворимо перше диференціальне рівняння системи (26). Враховуючи, що $\ddot{y} = dv_y/dt$, матимемо:

$$m \frac{dv_y}{dt} = Q + mg - \mu v^2 \quad \text{або} \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{Q}{m} + g - \frac{\mu}{m} v^2. \quad (36)$$

Введемо нові позначення:

$$k = \frac{\mu}{m} = \frac{0,4}{2} = 0,2 \text{ м}^{-1}; \quad b = \frac{Q + mg}{\mu} = \frac{5 + 2 \cdot 9,8}{0,4} = 61,5 \text{ м}^2/\text{с}^2.$$

Після перетворення рівняння (3б) матиме вигляд:

$$\frac{dv}{dt} = -k(v^2 - b). \quad (4б)$$

3. Проінтегруємо диференціальне рівняння руху МТ. Перейдемо в рівнянні (4б) від змінних t, v до змінних y, v (так як в умові задачі задано не час, а довжина ділянки AB), для цього скористаємося співвідношенням

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}.$$

Після перетворення рівняння (4б) матиме вигляд:

$$\frac{2v dv}{(v^2 - b)} = -2k dy; \quad 2 \int \frac{v dv}{(v^2 - b)} = -2k \int dy;$$

$$\ln(v^2 - b) = -2ky + C_1. \quad (5б)$$

Отримане рівняння (5б) є першим інтегралом.

4. Знайдемо швидкість МТ в точці В. Знайдемо сталу інтегрування C_1 . Враховуючи початкові умови руху МТ, при $t_0 = 0$, $y_0 = 0$ м; $v_0 = 5$ м/с, з першого інтегралу (5б) отримаємо:

$$C_1 = \ln(v_0^2 - b).$$

Остаточне рівняння (5б) матиме вигляд:

$$\ln(v^2 - b) = -2ky + \ln(v_0^2 - b)$$

або після перетворень отримаємо

$$\ln \frac{(v^2 - b)}{(v_0^2 - b)} = -2ky \Rightarrow \frac{(v^2 - b)}{(v_0^2 - b)} = e^{-2ky}, \text{ приймаємо, що } v = v_B, y = l.$$

Остаточне:

$$v_B = \sqrt{e^{-2ky} (v_0^2 - b) + b} = \sqrt{e^{-2 \cdot 0,2 \cdot 2,5} (5^2 - 61,5) + 61,5} \approx 6,93 \text{ м/с}.$$

II. Розглянемо рух МТ на ділянці ВС. (Порядок розв'язання на ділянці BC аналогічний порядку розв'язання ділянки AB).

1.

$$2. \text{ а) } m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{mp} + \vec{N} + \vec{P};$$

$$\text{б) } x: m\ddot{x} = m \frac{dv_x}{dt} = F_x - F_{mp} + P \sin \alpha; \quad (6б)$$

тут $F_{mp} = f_{mp} N = f_{mp} mg \cos \alpha$; $P = mg$. Поділивши праву і ліву частину рівняння (6б) на m та перетворюючи, отримаємо:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{5}{m} \sin(3t) - g(f_{mp} \cos \alpha - \sin \alpha), \quad (76)$$

Розділимо змінні у рівнянні (76) та перетворимо його шляхом підстановки відомих величин, отримаємо:

$$dv_x = [2,5 \sin(3t) - 3,2] dt. \quad (86)$$

3. Знайдемо перший інтеграл використовуючи вираз (86):

$$\int dv_x = \int [2,5 \sin(3t) - 3,2] dt,$$

звідки

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -0,83 \cos(3t) - 3,2t + C_2. \quad (96)$$

Знайдемо другий інтеграл:

$$\int dx = \int [-0,83 \cos(3t) - 3,2t + C_2] dt,$$

звідки

$$x = -0,278 \sin(3t) - 1,6t^2 + C_2 t + C_3. \quad (106)$$

4. Враховуючи початкові умови руху МТ, при $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $v(0) = v_B = 6,93$ м/с, з першого (96) та другого (106) інтегралу, отримаємо: $C_2 = 7,76$, $C_3 = 0$.

Остаточний закон руху тіла на ділянці BC має вид:

$x = -0,278 \sin(3t) - 1,6t^2 + 7,76t$, де x - в метрах, t - в секундах.

Теоретичні питання

Для розв'язання задач із статички і кінематики необхідно засвоїти такі теми курсу.

Статика

1. Основні поняття і означення статички. Основні аксіоми статички. Предмет статички.
2. Теорема про перенесення сили вздовж її лінії дії. Теорема про рівнодійну системи сил, прикладених в одній точці.
3. Механічні в'язі і їх реакції. Аксіоми про в'язі.
4. Приклади ідеальних механічних в'язей (ідеально гладенька поверхня, рухомі і нерухомі опори, шарніри, ідеальний стержень та інші).
5. Опора з тертям. Закон сухого тертя Кулона.
6. Рівновага збіжної системи сил у просторі і на площині.
7. Момент сили відносно точки на площині і у просторі. Момент сили відносно осі. Робоче правило обчислення моменту сили відносно осі.
8. Пара сил. Момент пари сил відносно точки. Властивості пар сил.
9. Теорема про статичну еквівалентність двох пар сил. Теорема про додавання двох пар сил.
10. Головний вектор і головний момент системи сил.
11. Лема про паралельне перенесення сили. Основна теорема статички.
12. Рівновага довільної просторової системи сил.
13. Рівновага системи сил, довільно розміщених у площині. Три форми рівнянь (умов) рівноваги.
14. Рівновага паралельних сил у просторі.
15. Центр паралельних сил. Центр ваги матеріальної системи.

Кінематика

1. Векторний спосіб завдання закону руху матеріальної точки. Швидкість і прискорення при векторному способі.
2. Координатний спосіб завдання закону руху матеріальної точки. Швидкість і прискорення при координатному способі.
3. Натуральний спосіб завдання закону руху матеріальної точки. Швидкість і прискорення при натуральному способі.
4. Поступальний рух абсолютно твердого тіла. Теорема про траєкторії руху, швидкості і прискорення точок тіла при поступальному русі.

5. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Рівняння руху, кутова швидкість і кутове прискорення.
6. Розподіл швидкостей у тілі, що обертається навколо нерухомої осі.
7. Розподіл прискорень у тілі, що обертається навколо нерухомої осі.
8. Кутова швидкість і кутове прискорення як векторні величини. Векторні формули для визначення швидкостей і прискорень у тілі з нерухомою віссю.
9. Плоско-паралельний рух абсолютно твердого тіла. Плоска фігура. Основна площина. Дві теореми про переміщення плоскої фігури у основній площині.
10. Визначення швидкостей точок плоскої фігури при плоскопаралельному русі, який розглядається як поступальний рух разом з полюсом і обертальний рух навколо полюсу.
11. Визначення прискорень точок плоскої фігури при плоскопаралельному русі, який розглядається як поступальний рух разом з полюсом і обертальний рух навколо полюсу.
12. Миттєвий центр швидкостей. Способи визначення положення.
13. Визначення швидкостей точок плоскої фігури з допомогою миттєвого центра швидкостей.
14. Миттєвий центр прискорень. Визначення прискорень точок плоскої фігури при плоскопаралельному русі з допомогою миттєвого центру прискорень.
15. Сферичний рух (рух тіла навколо нерухомої точки). Кути Ейлера. Теорема Ейлера. Рівняння руху тіла навколо нерухомої точки.
16. Швидкості точок тіла при русі навколо нерухомої точки.
17. Прискорення точок тіла при русі навколо нерухомої точки.
18. Складний рух матеріальної точки. Основні поняття та означення.
19. Теорема про додавання швидкостей при складному русі.
20. Теорема Коріоліса.
21. Визначення величини і напрямку прискорення Коріоліса. Фізичний зміст прискорення Коріоліса.
22. Складний рух абсолютно твердого тіла. Основні поняття та означення.
23. Додавання поступальних рухів абсолютно твердого тіла.
24. Додавання миттєвих обертальних рухів абсолютно твердого тіла, які відбуваються навколо осей, що перетинаються.
25. Додавання рухів абсолютно твердого тіла - поступальних і обертальних, які відбуваються навколо осей, що перетинаються.
26. Вільний рух абсолютно твердого тіла. Теорема про переміщення. Рівняння руху.
27. Розподіл швидкостей і прискорень у вільному абсолютно твердому тілі.

Динаміка точки

1. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки у векторній, координатній і натуральній формах.
2. Дві основні задачі динаміки точки (пряма, обернена). Послідовність їх розв'язання.
3. Сила інерції матеріальної точки. Принцип Даламбера для вільної і невільної матеріальної точки. Принцип Даламбера при відносному русі матеріальної точки. Стан відносного спокою.
4. Теорія прямолінійних коливань матеріальної точки. Пружна сила, сила в'язкого опору середовища, збурна сила. Положення статичної рівноваги. Коливальний рух.
5. Вільні коливання матеріальної точки при відсутності сил опору. Амплітуда, частота, фаза, період вільних коливань.
6. Затухаючі коливання матеріальної точки. Декремент затухаючих коливань.
7. Вимушені коливання матеріальної точки. Явище резонансу.

Література

1. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных специальностей высших учебных заведений / Под ред. С.М.Тарга – 4-е изд. – М.: Высш. шк., 1989. 111 с.
2. *Тарг С.М.* **Краткий курс теоретической механики.** – М.: “Высшая школа”, 1986. - 416 с.
3. *Яблонский А.А., Никифорова В.М.* **Курс теоретической механики.** – СПб.: Издательство “Лань”, 2001. 768 с.
4. *Павловський М.А.* **Теоретична механіка.** – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
5. *Кільчевський М. О.* **Курс теоретичної механіки.** – Т. 1–2. – К., 1955–1957.
6. *Путята Т.В., Фрадлін Б.Н.* **Методика розв’язування задач з теоретичної механіки.** –К.: “Радянська школа”, - 1955. 391 с.

Технічна механіка
методичні вказівки і контрольні завдання
для студентів заочної форми навчання
механічних, машинобудівних та електротехнічних спеціальностей

к.ф.-м.н., доц. Володимир Васильович Пирогов,
д.т.н., проф. Філімоніхін Геннадій Борисович,
к.т.н., ст. викл. Олійніченко Любов Сергіївна

Комп'ютерний набір
кафедра ДМ та ПМ
т. (0522) 597-547

Підп. до друку . Формат 60x84 1/16 (A5). Папір друк №3. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. . Ум.фарбо-відб. . Облік.-вид.арк. . Тираж 100 прим.
Зам.№

Центральноукраїнський національний технічний університет
25006, м. Кіровоград. пр. Університетський, 8

