

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

Механіко-технологічний факультет
Кафедра кібербезпеки та програмного забезпечення

СТРУКТУРА ГРАФІВ НА ПОВЕРХНЯХ

монографія

КРОПИВНИЦЬКИЙ
2019

СТРУКТУРА ГРАФІВ НА ПОВЕРХНЯХ. Петренюк В.І. монографія —
Кропивницький: ЦНТУ, 2019. — 184 с.:

Автор: Петренюк В.І., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент: Волков Ю. І., д-р фіз.-мат. наук, професор;

Схвалено на засіданні методичного семінару
кафедри кібербезпеки та програмного забезпечення
(протокол від 05 03 2019 року № 3)

Рекомендовано на засіданні Вченої ради Центральноукраїнського
національного технічного університету (протокол від 2019 року №3)

© Петренюк В.І., 2017

© Центральноукраїнський національний
технічний університет, 2017

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

РОЗДІЛ 1. СТРУКТУРА ГРАФІВ НА ПЛОЩИНІ.

1.1. СТРУКТУРА ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ ІЗ ЗАДАНИМ ЧИСЛОМ ДОСЯЖНОСТІ ДЕЯКОЇ ПІДМНОЖИНИ МНОЖИНИ ЇХ ТОЧОК.	4
1.2. АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ ЧИСЛА ДОСЯЖНОСТІ СПЕЦІАЛЬНОЇ МНОЖИНИ ТОЧОК 2-ЗВ'ЯЗНОГО ГРАФА	19
1.3. АЛГОРИТМ ВСТАНОВЛЕННЯ 3-ВЛАСТИВОСТІ ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ	21
1.4. АЛГОРИТМИ ДО ₂₃ , ДО ₄	22
1.5. ІДЕНТИЧНІСТЬ НЕЦИЛІНДРИЧНИХ ГРАФІВ 3-МІНІМАЛЬНИМ ПЛОЩИННИМ ГРАФАМ	25

РОЗДІЛ 2. СТРУКТУРА ГРАФІВ НА ТОРІ

2.1. НОВА ВЕРХНЯ МЕЖА ОРІЄНТОВАНОГО РОДУ ПРОСТОГО ГРАФА.	37
2.2. СТРУКТУРА 8-МИ ТА 9-ТИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ТОРА	48
2.2.1. ПОБУДОВА 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРУ	68
2.2.2. АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЇ ТОРУ	69
2.2.3 9-ТИ ВЕРШИННІ ГРАФИ D_5, \dots, D_{19} ГРАФ-ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРУ	60
2.2.4. 9-ТИ ВЕРШИННІ $N_2, N_3, D_{20}, \dots, D_{47}$ ГРАФИ-ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРУ	80
2.3. СТРУКТУРА 7-МИ ВЕРШИННИХ ПІДГРАФІВ 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ТОРА	106

РОЗДІЛ 3. СТРУКТУРА ГРАФІВ НА ПРОЕКТИВНІЙ ПЛОЩИНІ ТА ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА

3.1. НОВА ВЕРХНЯ МЕЖА НЕОРІЄНТОВАНОГО РОДУ ПРОСТОГО ГРАФА.	125
3.2. ПРО СТРУКТУРУ 7-МИ ТА 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ПОВЕРХНІ НЕОРІЄНТОВАНОГО РОДУ	134
3.3. СТРУКТУРА НЕПРОЕКТИВНИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ	140
3.4. ВЛАСТИВОСТІ МІНІМАЛЬНИХ ГРАФІВ ПРОЕКТИВНОЇ ПЛОЩИНИ	166
3.5. ПРО ГРАФ-МОДЕЛІ НЕОРІЄНТОВАНОГО РОДУ.	172

ДОДАТКИ

1. СПИСОК 3-МІНІМАЛЬНИХ ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ.	178
2. СПИСОК 4-МІНІМАЛЬНИХ ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ.	180

Вступ. За два минулих десятиріччя стався бурхливий розвиток теорії графів зокрема її найважчої та найзмістовнішої топологічної частини: теорії укладань графів на 2-многовиди, вивчення структури графів заданого роду, оцінка роду композиції графів виражена через роди їхніх частин, декомпозиція графів відносно інших топологічних інваріантів. Зокрема було отримано один з найглибших результатів-теорему Робертсона-Сеймура згідно якої в нескінченній множині графів існують два таких, що один є мінором іншого, тобто шляхом зтягування та видалення ребер одного графа можливо отримати інший граф. Якщо раніше перспективних методів в топологічній теорії графів було два : метод обертань та метод φ -перетворень, то зараз таким є метод мінорів. Зауважимо, що автором методу φ -перетворень графів Хоменком М.П. було отримано результат аналогічний вищезгаданому ще у 1973р. Робочим методом автора є метод φ -перетворень графів як топологічних просторів. Основна задача полягала у оцінці роду графа як φ -образа наступних φ -перетворень:-деякого площинного графа та зірки заданого на множині точок із числом досяжності більше 1;- деякого площинного графа та графа K_4 , чи $K_{2,3}$ на множині точок із числом досяжності більше 1; -графів $K_{3,3}$ чи K_5 та графів K_4 чи $K_{2,3}$ на множині точок із числом досяжності 1. Отримані результати роздруковувалися здебільшого як препринти чи депонувалися в ДНТБ (УкрНІНТІ), тому є маловідомими широкому загалу. Структурно монографія складається з 3-х розділів та 2-х додатків.

В розділі 1 розглянуто наступні питання: структура площинних графів із заданим числом досяжності деякої підмножини множини їх точок, спеціальний клас площинних графів, оцінка роду спеціальних графів, список 3-мінімальних площинних графів площинних графів, про алгоритм встановлення 3-властивості графів, характеристика спеціальних площинних графів. структурні властивості площинних графів із заданою множиною точок досяжністю більше 1 для ототождження із усіма множинами вершин графа $K_{2,3}$, структурні властивості площинних графів із заданою множиною точок досяжністю більше 1 ототождження із множинами вершин графа K_4 , оцінка роду φ -образа t -мінімального площинного графа та графа $K_{2,3}$, заданого на множинах точок досяжності більше 1, оцінка роду φ -образа t -мінімального площинного графа та графа K_4 , заданого на множинах точок досяжності більше 1.

В розділі 2 розглянуто подання графів-обструкцій орієнтованого роду 2 на 8-ми та 9-ти вершинах, у яких кожне ребро є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, як результату φ -перетворення по підмножинам множин точок (точок приєднання із заданими характеристиками – числом досяжності та двостороннім доступом) одного із графів K_5 , $K_{3,3}$ (можливо без ребра чи із кількома додатковими ребрами) та квазізірки K із центральним графом M з щонайбільше чотирма вершинами. Основні результати: а)

теорема 1 для 8-вершинних графів-обструкцій роду 2, т.то матимемо $M \in \{K_3, \overline{K_3}\}$; б) теорема 2 про подання графів-обструкцій роду 2 на 9-ти вершинах, як результату φ -перетворення не більше ніж трьох зв'язних графів X, Y, Z одного з наступних випадків:

1) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ (можливо із кількома додатковими ребрами) вкладений в тор σ , а інший граф X - є або площинним 2-мінімальним відносно множини точок приєднання до графа Y на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із нульовими характеристиками θ та $\partial\theta$ для множини точок приєднання до графа Y , або є 3-мінімальним на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із характеристиками $\theta, \partial\theta$, де $\theta=1$ чи $\partial\theta=1$ для множини точок приєднання графа X до графа Y , граф Z відсутній; 2) граф Y один з графів K_5 чи $K_{3,3}$, можливо без ребра, вкладений в тор σ , а інший граф X роду 1 є 2-мінімальним відносно множини точок приєднання на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із нульовими характеристиками $\theta, \partial\theta$ множини точок приєднання графа X до графа Y , граф Z відсутній; 3) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ (можливо із кількома додатковими ребрами) вкладений в тор σ , граф Z - проста зірка, граф X є площинною квазізіркою із центральним графом M на двох вершинах, яка не є 2-мінімальним графом на недвоклітці $s, s \in \sigma \setminus Y$, причому існує, принаймні одна пара вершин простої зірки Z , сформована із елементів множини приєднання графа X до графа Y , що розділяє на ∂s пару кінцевих вершин з множини приєднання графа X до графа Y .

В розділі 3 розглянуто ту ж задачу для неорієнтованих поверхонь роду 1 чи 2, а саме полягатиме в уточненні верхньої межі неорієнтованого роду простого графа G неорієнтованого роду $\gamma(G)$ як φ -образу двох не вироджених графів G_i неорієнтованого роду $\gamma(G_i)$ при ототождженні пар точок (x_{1j}, x_{2j}) із множин точок приєднання $X_i, j=1,2,\dots,|X_i|$, де під точкою розумітимемо, або вершину, або довільну точку ребра графа G .

Для множин точок приєднання X_i із заданим числом досяжності $t_i, t_i \geq 1$, яке дорівнює найменшій кількості кліток-граней на границях яких розміщуються всі точки множини X_i , та використовуються як відомі характеристики $\theta(X_i), \partial\theta(X_i)$, так і визначаються дві нові: 1) багатосторонність чи $st(X_{ij}, G_i)$ - доступ до точок з X_{ij} розташованих на границях кліток-граней неорієнтованої поверхні роду $\gamma(G_i)$; 2) $k4(X_{1j}, X_{2j})$ -кількість всіх різних частинних графів гомеоморфних K_4 чи $K_{2,3}$ породжених ототождженням пар точок (x_{1j}, x_{2j}) з множин точок $X_{ij}, j=1,2,\dots,|X_{ij}|$, $m = \sum_{j=1}^{t_i} |X_{ij}|, i=1,2$. Основний результат - теорема 1: Якщо задано φ -перетворення зв'язних графів G_1 та $St_m(G_2)$ неорієнтованого роду $\gamma(G_i)$ наступним чином:

$\varphi : (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ - квазізірка з центром G_2 та кількома ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини X_2, X_1 підмножина множини точок графа $G_i, X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, матиме число досяжності t_i та характеристики,

$\theta_i, \partial\theta_i, i=1,2$, то $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i) + k_4 - st$, де $k_4 \geq st \geq 0$, $st = \sum_{j=1}^{t_1} st(X_{1j}, G_1)$,

$k_4 = \sum_{j=1}^{t_1} k_4(X_{1j}, X_{2j})$, $k_4 - st$ - число додаткових 2-ручок приклеєних до клітки s з множини

$\sigma_{r_1} \setminus f(G_1)$ при мінімальному вкладенні $f: G_1 \rightarrow S_{r_1}$, $r_i = \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i)$, із st - стороннім доступом до тих точок приєднання на границі ∂s клітки s (до якої приклеєно r_2 штук 2-ручок і вкладено граф G_2), що при ототоженні пар точок приєднання (x_{1j}, x_{2j}) породжують k_4 різних підграфів гомеоморфних K_4 , чи $K_{2,3}$.

наступні питання:

В додатках 1,2 наведені списки 3- та 4-мінімальних площинних графів.

РОЗДІЛ 1. СТРУКТУРА ГРАФІВ НА ПЛОЩИНІ.

1.1. СТРУКТУРА ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ ІЗ ЗАДАНИМ ЧИСЛОМ ДОСЯЖНОСТІ ДЕЯКОЇ ПІДМНОЖИНИ МНОЖИНИ ЇХ ТОЧОК.

Вивчимо структурні властивості площинних графів, кожне ребро яких істотне щодо заданого числа досяжності при операціях видалення або стискання ребра.

Позначення 1.1. Надалі через G будемо позначати плоский граф, через δ площину.

Через $G_0(X)$ або через $(G)_0(X)$ будемо позначати граф, отриманий із графа G шляхом I-підрозділу ребер крапками графа G , що належать цим ребрам і множини X .

Пропозиція 1.0.0. Нехай G - не зовнішньопланарний граф, X - множина точок графа G . Мають місце наступні твердження :

(1) а) Граф G не зовнішньопланарний тоді тільки тоді, коли існує підграф H графа G гомеоморфний або K_4 , або $K_{2,3}$.

б) Існує таке вкладення $f, f : G \rightarrow \sigma$ реалізуюче t , де $t = t_G(X)$, $S_G(X) = \{s_i\}_{i=1}^t$, що $s \notin S_G(X)$, де s - зовнішня грань графа $f(G)$;

(2) Якщо G - блок, $t_G(G^0) = t$, $S_G(G^0) = \{s_i\}_{i=1}^t$, те для кожної пари (s_i, s_j) , де $i \neq j$, існує найменша по включенню частина H_{ij} графа, що G задовольняє співвідношенню:

$$\begin{aligned} & [((G^0 \cap ds_i \subset H_{ij}^0) \wedge (H_{ij}^0 \cap (ds_j - ds_i) \neq 0)) \vee \quad (*) \\ & [((G^0 \cap ds_j \subset H_{ij}^0) \wedge (H_{ij}^0 \cap (ds_i - ds_j) \neq 0)) \wedge \\ & (H_{ij} \cong K_4) \vee (H_{ij} \cong K_{2,3})] \end{aligned}$$

Доведення. Нехай G - не зовнішньопланарний граф, X - множина крапок графа G .

Доведемо твердження (1). Частина а) твердження 1 випливає з теореми 11.10 [4].

Доведемо частину б). Нехай задане вкладення $f, f : G \rightarrow \sigma$, що реалізує t , де $t = t_G(X)$. Безпосередньо з визначення 1.1 випливає співвідношення:

$(\exists s)(s \notin \sigma(G, f))(s \notin S_G(X))$. Припустимо, що α - операція стереографічного

проектування з центром у клітці s . Побудуємо вкладення $f_1 : G \rightarrow \sigma$, де $f_1 = \alpha f$.

Очевидно, що вкладення f_1 реалізує t , причому клітка s є зовнішньою гранню графа

$f_1(G)$, де $\alpha(s_i) = s_i, i = 1(1)t$. Отже, вкладення f_1 задовольняє частини б) твердження(1).

Твердження (1) доведено.

Доведемо твердження(2) методом індукції по t . База індукції: $t=2$.

Якщо $t=2$, то в силу теореми 11.10 [4] існує частина H графа, що G задовольняє співвідношенню (*). База доведена. Покладемо, що для $t = n$ твердження (2) доведено. Обґрунтуємо індукційний крок: $n = n + 1$. Припустимо що в блоці G , де $t_G(G^0) = n + 1$ при кожнім $S_G(G^0)$ мається така пари $(s_i, s_j), i \neq j$, для якої не існує частина H графа G задовольняючому співвідношенню (*). Покладемо, що $i = n + 1, j = n$. Оскільки G - блок, то існує найменша по включенню 2-зв'язна частина H графа G , що задовольняє співвідношенню:

$$[((ds_n \subset H^0) \wedge (ds_{n+1} \setminus ds_n) \cap H^0 \neq 0)) \vee ((ds_{n+1} \subset H^0) \wedge (ds_n \setminus ds_{n+1}) \cap H^0 \neq 0)].$$

Розглянемо вкладення $f|_H, f|_H: H \rightarrow \sigma$. Нехай s'' - зовнішня грань графа $f|_H(H)$, а через H' - позначимо ту частину підграфа H графа G , що не містить ребер з множини $G^1 \cap (ds'' \cap \bigcup_{k=n}^{n+1} ds_k)$. У силу зробленого вище пропозиції маємо $(H')^0 \subset ds''$.

Тому можливо побудувати вкладення $f', f': G \rightarrow \sigma$, у такий спосіб:

$$а) f'|_{G^1 \setminus (H')^1} = f|_{G^1 \setminus (H')^1};$$

$$б) f'(H' \setminus ((H')^1 \cap ds'')) \subset s_0;$$

де s_0 - зовнішня грань графа $f(G)$.

В результаті одержимо наступне співвідношення:

$$f'(G^0) \subset ds'' \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} ds_k \right), \text{ де}$$

$$ds'' = \bigcup_{k=n}^{n+1} ds_k \setminus \bigcup_{k=n}^{n+1} ((H')^1 \cap ds_k),$$

$$S_G(G^0) = \{s_k\}_{k=1}^{n-1} \cup \{s''\},$$

з якого випливає, що $t_G(G^0) \leq n$. Одержимо протиріччя умові, що $t = n + 1$. Отже, для будь-якої пари $(s_i, s_j), i \neq j$, мається найменша по включенню частина H_{ij} графа, що G задовольняє співвідношенню (*). Доведення пропозиції 1.0.0. закінчено.

Наслідок 1.0.0. Мають місце наступні твердження:

1. Якщо G - 1-зв'язний граф, то для кожного 2-компонента G_i графа G , $G_i \subset \varphi^{-1}(G)$, має місце твердження (2) пропозиції 1.0.0.
2. Якщо G - незв'язний граф, то для кожного його 1-компонента виконується твердження 1) дійсного наслідку.

Доведення цих тверджень очевидно.

Позначення 1.3. Будемо позначати через $M(G)$ множина усіх різних підграфів H графа G , описаних у твердженні (2) пропозиції 1.0.0., а через $M'(G)$ - найменше по включенню підмножина множини $M(G)$, що складає з найменших по включенню підграфів H_{ij} графа G , або частин цих підграфів, що задовольняють наступним умовам:

$$а) G^0 \subseteq \bigcup_{\forall H' \in M'(G)} (H')^0 ;$$

б) Якщо підграф H_{ij} або його частина гомеоморфні графові K_4 , то, або усі ребра графа K_4 1-підрозділені, або жодне ребро графа K_4 не 1-підрозділено.

Зауваження. Надалі якщо не зроблені застереження, будемо вважати що, у відношенні елементів множини M' термін «підграф» графа G , не виключає того, що цей елемент може бути частиною графа G .

Приклад. Розглянемо наступне вкладення графа G в площину:

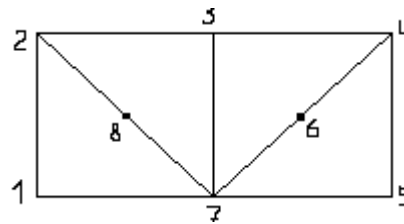


Рис 1.

Виділимо множини $S_i = \{s_{ij}\}_{j=1}^3, i = 1, 2,$

де а) $ds_{11} = \{1, 2, 7, 8\}, ds_{12} = \{2, 3, 7, 8\}, ds_{13} = \{4, 5, 6, 7\};$

б) $ds_{21} = \{1, 2, 7, 8\}, ds_{22} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, ds_{23} = ds_{13}.$

Для кожного з них побудуємо множина $M_i, M_i = M(G):$

$$\begin{aligned} H_{12}^0 &= \{1, 2, 3, 7, 8\}, H_{21} = \{1, 2, 7, 8\}, H_{23}^0 = H_{32}^0; \\ (H_{13}^0)' &= \{1, 2, 6, 7, 8\}, (H_{13}^0)'' = \{1, 2, 4, 7, 8\}, (H_{13}^0)''' = \{1, 2, 5, 7, 8\}, \\ H_{13}^0 &\in \{(H_{13}^0)', (H_{13}^0)'', (H_{13}^0)'''\}, \\ H_{32}^0 &= \{3, 4, 5, 6, 7\}, H_{31}^0 = \{1, 4, 5, 6, 7\}, \\ M(G) &= \{H_{12}, H_{13}', H_{13}'', H_{13}''', H_{21}, H_{31}, H_{32}\}; \\ H_{12}^0 &= \{1, 2, 7, 8, 3\}, H_{13}^0 = \{1, 2, 8, 7, 6, 4, 3\}, H_{21}^0 = H_{12}^0, \\ H_{23}^0 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 6\}, H_{32}^0 = \{4, 5, 6, 7, 3\}, \\ M(G) &= \{H_{12}, H_{13}, H_{23}, H_{32}\}. \end{aligned}$$

Не важко переконатися в тім, що приведені вище множини а) і б) вичерпують усі неізоморфні множини $S_G(G^0)$. У результаті $M'(G) = \{H_{12}, H_{32}\}$.

Наслідок 1.0.1. Нехай G - блок, $G = (G^0, G^1)$, $t = t_G(G^0)$, кожне ребро якого істотно відносно t при операції видалення, $|M'(G)| = m$. Тоді мають місце співвідношення:

$$\text{а) } (\forall u)(\exists H)(u \in G^1)(H \in M'(G))[u \in H^1];$$

$$\text{б) } (\forall ij)(i \neq j, i, j = 1(1)m)[H_i \cap H_j \neq \emptyset \Rightarrow p_1(H_i \cap H_j) \leq 1].$$

Доведення. Нехай виконана умова наслідка 1.0.1. Доведемо співвідношення 1). Розглянемо вкладення $f' f' : G \rightarrow \sigma$, що реалізує t , $t = t_G(G^0)$. Нехай u - довільне ребро графа G . Будь-яка множина $S_G(G^0)$, $S_G(G^0) = \{s_i\}_{i=1}^t$, що задовольняє одному з наступних співвідношень :

$$\text{а) } f(u) \subset ds_1,$$

$$\text{б) } f(u) \subseteq \bigcap_{i=1}^2 ds_i.$$

Згідно твердження(2) пропозиції 1.0.0. для будь-якої пари (s_i, s_j) , $j = 2(1)t$, існує підграф H_{ij} гомеоморфний або K_4 , або K_{23} і задовольняючому співвідношенню:

$$(G^0 \cap ds_1 \subset H_{ij}) \wedge (H_{ij} \cap (ds_j \setminus \bigcup_{\substack{k=0 \\ k=1}}^t ds_k))$$

Таким чином, для кожного u , $u \in G^1$, мається такий підграф H_{ij} , $H_{ij} \in M(G)$, що $u \in H_{ij}'$. Тоді існує підмножина $M'(G)$ множини $M(G)$, що містить найменше число таких підграфів H_{ij} . Доведення твердження а) закінчено.

Доведемо твердження б). З визначення множини $M'(G)$ випливає, що будь-які його два різних елементи $H_i, H_j, i \neq j$, що має не порожнє перетинання, можуть мати не більш одного загального циклу. Дійсно, якщо запропонувати, що елементи H_i, H_j множини $M'(G)$ мають два загальних цикли, то в силу умов а), б) приведених у позначенні 1.3, те ці елементи гомеоморфні графові K_4 , у якого жодне ребро не 1-підрозділене. Тоді можливо побудувати множина M , де $M = M'(G) \setminus \{H_i\}$, що задовольняє умовам а), б) позначення 1.3., т.е одержимо протиріччя умові для множини $M'(G)$. Припущення не вірне. Твердження б) доведено. Доведення наслідка закінчений.

Наслідок 1.0.2. Нехай G - блок, $M'(G) = \{H_i\}_{i=1}^m$. Мають місце наступні твердження:

а) Елементи множини $M'(G)$ можуть мати не більш одного простого циклу у своєму перетинанні;

б) Якщо $t_G(G^0) = 3, m = 2$, те виконується одне з наступних співвідношень:

$$\text{б1) } \bigcap_{i=1}^2 H_i = \sum_{j=1}^n C_G^{nj}(a_j, b_j), \text{ де } n \geq 0;$$

б1) існує частина графа G гомеоморфна графові K_4 .

Доведення. Нехай G - блок, $M'(G) = \{H_i\}_{i=1}^m, m > 1$. Неважко побачити незалежність співвідношення 2) наслідка 1.0.1. від умови істотності кожного ребра графа щодо числа при операції видалення ребра. Твердження а) доведено.

Доведемо співвідношення б). Покладемо, що $m > 2, t_G(G^0) = 3$. В силу твердження а) можливі тільки наступні випадки:

$$\text{а) } p_1\left(\bigcap_{i=1}^2 H_i\right) = 0,$$

$$\text{б) } p_1\left(\bigcap_{i=1}^2 H_i\right) \neq 0.$$

Розглянемо випадок а). Якщо графи $H_i, i = 1, 2$ не мають спільних простих циклів, то виконується співвідношення б1), де $C_G^{nj}(a_j, b_j)$ - простий ланцюг графа G довжини $n_j, n_j \geq 0$. Що було потрібно довести. Розглянемо випадок б). Відповідно до визначення множини $M'(G)$ можливі тільки 3 різні пари, що складають частини H_i графа G - гомеоморфні графу $K_{2,3}$ або ізоморфні графу K_4 . Неважко переконається в тім, що наявність пари (K_4, K_4) суперечить умові, т. то об'єднання двох графів K_4 із загальним простим циклом містить частина гомеоморфну графові $K_{2,3}$, тобто одержимо включення

$\bigcup_{i=1}^2 H_i^0 \subset H^0$, що суперечить умові. Інші пари $(H, H), (K_4, H)$ можуть мати місце

тільки тоді, коли $\bigcup_{i=1}^2 H_i$, містить частина гомеоморфну графу K_4 . Дійсно, якщо простий цикл $Z, Z \in \bigcap_{i=1}^2 H_i$ має довжину $n, n \geq 8$, те ля пари (H, H) , одержимо що граф $\bigcup_{i=1}^2 H_i$, де

$H_i \cong H$, гомеоморфний графу K_4 , а для іншої пари (K_4, H) , одержимо що граф $\bigcup_{i=1}^2 H_i$

має частина гомеоморфні графу K_4 . Тим самим доведене співвідношення б2).

Твердження б) доведено. Доказ наслідку 1.0.2 закінчено.

Наслідок 1.0.3. Нехай G - блок, $M'(G) = \{H_i\}_{i=1}^3$. Якщо елементи множини $M'(G)$ мають загальний простий цикл Z , то мають місце наступні співвідношення: а) $p_1(\bigcap_{i=1}^2 H_i) = 0$; б) якщо $Z \subset H_i \cap H_j$, то графи $H_k \cap H_j, H_k \cap H_i$ не містять простих циклів і $H_i \cong H_j \cong K_{2,3}$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$; в) якщо $H \cong K_{2,3}$, то $Z \subset H_i \cap (H_j \cup H_k)$, де Z цикл графа G , що є границею зовнішньої грані для графа $f|_{H_j \cup H_k}(H_j \cup H_k)$, де вкладення $f, f: G \rightarrow \sigma$, реалізує $t_G(G^0)$.

Доведення. Нехай G -блок, $t_G(G^0) = 3$, $M' = \{H_i\}_{i=1}^3$. Це означає, що граф G не містить частини гомеоморфної графу K_4 . Покладемо, що для деякого графа G при кожнім $M'(G)$ маються елементи, наприклад $H_i, i = 1, 2$, що володіють загальним простим циклом Z . Відповідно до визначення множини $M'(G)$, елементи якого або гомеоморфні графові $K_{2,3}$, (у цьому випадку будемо позначати них через H), або ізоморфні графові K_4 . Можливими є тільки наступні випадки: 1) Існує $Z, Z \subset \bigcap_{i=1}^3 H_i$; 2) тільки одна пара елементів множини $M'(G)$ має загальний простий цикл; 3) у точності дві пари елементів мають загальні цикли приналежні: 3а) одному елементові; 3б) різним елементам; 4) три пари мають різні загальні цикли.

Розглянемо випадок 1). Маємо наступні 4 різних варіанти для трійок елементів множини $M'(G)$, що вичерпують усі можливості:

- 10) (H, H, H) 12) (H, K_4, K_4)
- 11) (H, H, K_4) 13) (K_4, K_4, K_4) .

Неважко переконатися в тім, що в кожнім з цих варіантів можна знайти такі 2 частини $H_i, i = 1, 2$ графа G , що гомеоморфні або $K_{2,3}$, або ізоморфні графу K_4 і мають властивість: $G^0 \subseteq \bigcup_{i=1}^2 H_i$. Тим самим одержимо протиріччя умові, що $|M'(G)| = 3$

Випадок 1) неможливий.

Розглянемо три різні пари елементів множини $M'(G)$. Нехай має місце випадок 2). Для пари, наприклад (H_1, H_2) , що має загальної простий цикл можливі тільки наступні варіанти:

$$20) (H, H); \quad 21) (H, K_4); \quad 22) (K_4, K_4).$$

Відповідно до визначення множини $M'(G)$ варіанти 21) і 22) є неможливими, т. то у кожному випадку є частина (H') графа G з властивістю: $(H' \cong K_{2,3}) \wedge (\bigcup_{i=1}^2 H_i \subseteq H')$, що суперечить умові: $|M'(G)| = 3$. Можливий варіант 20), що дає співвідношення б) дійсний.

Випадок 2) розглянутий. Нехай має місце випадок 3а). Покладемо, що дві різні пари елементів $H_i, H_i \in M'(G)$, мають спільні складові, що належать одному елементові.

Дійсно, якщо припустити, що існують дві пари, наприклад: $(H_1, H_2), (H_1, H_3)$, що володіють наступною властивістю: $(\forall_i)(i=1,2)(z_i \subset H_1 \cap H_i)$ z_i - простий цикл елемента H_1 те неважко переконати, що це неможливе припущення.

Розглянемо наступні можливі під випадки для випадку 3а) :3а1) $H_1 \cong K_{2,3}$; 3а2) $H_1 \approx K_4$

.У кожному підвипадку має місце співвідношення $G^0 \subseteq \bigcup_{i=1}^2 H_i^0$, що суперечить умові. Обое підвипадки неможливі. Такому образом випадок 3а) неможливий. Нехай має місце

випадок 3б). Покладемо, що дві різні пари елементів $H_i, H_i \in M'(G)$, мають загальні цикли для своїх складових, приналежним різним елементам множини $M'(G)$.

Припустимо, що дві пари, наприклад: $(H_1, H_2), (H_2, H_3)$, мають властивість:

$$(\forall_i)(i=1,2)[(z_1 \subset \bigcap_{i=1}^2 H_i) \wedge (z_2 \subset \bigcap_{j=2}^3 H_j)], \text{ де } z_1 \subset H_3, z_2 \not\subset H_1.$$

Використовуючи ті ж твердження, що і для випадку 3а) ми одержимо, що випадок 3б) неможливий. Нехай має місце випадок 4). Оскільки серед трьох пар, що володіють попарно загальними циклами, маються 2 пари, що володіють загальними циклами, що належать або одному елементові, або різним елементам, те випадок 4) зводиться до випадку 3). Випадок 4) неможливий.

З приведених вище міркувань випливає наступне: якщо $H_i \cong K_{2,3}$, то

$z \subset H_i \cap (H_j \cup H_k)$, де z - цикл графа G , що є границею зовнішньої грані для графа

$f | H_j \cup H_k (H_j \cup H_k)$, де вкладення f , $f: G \rightarrow \sigma$, реалізує $t_G(G^0)$,

$\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Доведення наслідка закінчено.

Наслідок 1.0.4. Нехай $K'_4 = (K_4)_0(K_4^0)$. Мають місце твердження:

1) Граф G - задовольняє співвідношенню:

$$(\forall u)(u \in G^1)[t_{G \setminus u}(G^0) = t_G(G^0) - 1 = 1]$$

тоді і тільки тоді, коли граф G гомеоморфний або $K_{2,3}$, або K_4 , причому $G \neq K'_4$.

2) Якщо граф G гомеоморфний K'_4 , то має місце співвідношення:

$$(\forall u)(u \in G^1)[t_{G \setminus u}(G^0) = t_G(G^0) - 1 = 2].$$

Доведення. Доведемо 1). Нехай граф G задовольняє зазначеному співвідношенню, тобто кожне ребро графа G істотно відносно $t_G(G^0)$ при операції видалення. У силу пропозиції 1.0.0. існує частина H графа G , гомеоморфні, або K_4 , або $K_{2,3}$. Припустимо, що має місце співвідношення: $G^1 \setminus H^1 \neq \emptyset$. Розглянемо ребро u , $u \in G^1 \setminus H^1$ і граф G^1 , $G_1 = G \setminus u$. Тому що $H \subset G_1$, $t_G(G^0) = 2$, те в силу твердження 2 пропозиції 1.0.0. маємо рівність: $t_{G_1}(G_1^0) = 2$, що суперечить приведеному співвідношенню. Припущення невірне. Отже, граф G гомеоморфний або $K_{2,3}$, або K_4 . Нехай граф G гомеоморфний K_4 або $K_{2,3}$, причому граф $G \neq K'_4$. Очевидно, що $t_G(G^0) = 2$. Твердження 1) доведено. Доведемо 2). Нехай $G \cong K'_4$, тобто граф G може бути отриманий із графа K_4 , шляхом 1-підрозділу всіх його ребер. Тому що існує єдине неізоморфне мінімальне вкладення графа G в σ , те має місце: $t_G(G^0) = 3$. Неважко переконається в тім, що виконується співвідношення: $(\forall u)(u \in G^1)(t_{G \setminus u}(G^0) = 2)$. Доведення наслідка закінчене.

Пропозиція 1.0.1. Нехай G - плоский граф, $t_G(G^0) = t$, $t > 1$. Для будь-якого ребра u , $u \in G^1$, виконується нерівність: $t - 1 \leq t_{G \setminus u}(G^0) \leq t$.

Доведення. Нехай G - площинний граф, $t_G(G^0) = t$, $t > 1$, $u \in G^1$, $H = G \setminus u$.

Оскільки $H^0 \subseteq G^0$, та нерівність $t_H(H^0) \geq t - 1$ справедлива для кожного ребра u графа G . Використовуємо метод доведення від протилежного. Припущення 0. Нехай для деякого u , $u = (a_1 a_2)$, виконується нерівність: $t_H(H^0) < t - 1$, де $t_H(H^0) = t'$

Доведемо лему 01: Кожне вкладення f' , $f' : H \rightarrow \sigma$, що реалізує t' задовольняє співвідношенню:

$$(\forall i, s)(s_i \in S_h(H^0))(s \in \sigma(H, f')(i=1,2)[(f'(a_i) \in ds_i) \wedge (f'(du) \notin ds)].$$

Припустимо, що мається таке вкладення f , $f : H \rightarrow \sigma$, що реалізує t' , що задовольняє

співвідношенню: $f(du) \subset ds$, де $s \in \sigma(H, f)$. Побудуємо вкладення $f_1, f_1: G \rightarrow \sigma$, так, щоб виконувалися наступні умови: 1) $f_1|_H = f|_H$, 2) $f_1(u) \subset s$. Одержимо наступне співвідношення $f_1(G^0) \subset \bigcup_{i=1}^t ds_i$, що суперечить умові нашої пропозиції.

Припущення невірне. Отже при будь-якому вкладенні $f', f': H \rightarrow \sigma$, що реалізує t' , має місце співвідношення: $f'(a_i) \in ds_i$, де $s_i \in S_H(H^0)$, $i=1,2$. Лема доведена.

Відповідно до припущення можливі тільки наступні випадки:

А) $p_G(a_1) \geq p_G(a_2) > 2$; Б) $(p_G(a_1) \geq p_G(a_2)) \wedge (p_G(a_2) = 2)$.

Розглянемо випадок А). Покладемо, що вкладення $f': H \rightarrow \sigma$, реалізує $t' S_H(H^0) = \{s_i\}_{i=1}^t$.

Згідно леми 01 маємо, що $f'(a_i) \in ds_i$, $i=1,2$. Нехай M - найменший по включенню

блок графа H , що містить $\bigcup_{i=1}^2 ds_i$. Підграф M графа H містить простий ланцюг C_2 ,

$C_2 = C_G(b_1, b_2)$, таку, що пари вершин $(b_1, b_2), (a_1, a_2)$ розділяють один одного на

площині і належать простому циклові Z підграфа M . Доведемо лему 02: Не існує

простого ланцюга C_3 , $C_3 = C_G(C_1, C_2)$, такої, що пари вершин $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$

належать циклові Z і розділяють один одного на площині. Припустимо, що є простий

ланцюг C_3 , описана в умові. Розглянемо підграф N , $N = Z \cup C_2 \cup C_3$ графа H .

Оскільки $N \cong K_4$ і вершини a_1, a_2 є крапками несуміжних ребер графа N , те маємо

рівність: $t_H(\{a_i\}_{i=1}^2) = 2$. Розглянемо наступне φ - перетворення

$\varphi(H + St_2(y_0), \sum_{i=1}^2 (a_i + y_i)) = (Y, \{a_i^*\}_{i=1}^2)$, де $St_2^0(y_0) = \{y_i\}_{i=0}^2$. Доведемо, що \hat{N} - блок.

Отже, якщо \hat{N} - однозв'язний, те випадок 4 неможливий. Таким чином, якщо зроблено

припущення (*), те неможливі всі підвипадки для \hat{N} - блоку або для \hat{N} - однозв'язного

графа. Отже, випадок 4) неможливий. Доведення пропозиції 4 закінчено.

Пропозиція 3. 1) Випадок 3) еквівалентний випадкові 2); 2) Випадок 3) неможливий.

В еквівалентності випадків 2) і 3) неважко переконатися, якщо поміняти ролями X_1 і X_2 ,

тобто покласти, що X_1 позначає X_2 , а X_2 позначає множина X_1 . Тим самим виконаємо

перепозначення, несуттєве для умови теореми I. Отже випадок 3) неможливий. У такий

спосіб доведено, що з припущення (*) випливає, що неможливим є кожний з можливих

випадків, що описують взаємозв'язок множини $\bigcup_{i=1}^2 X_i$ і підграфа \hat{N} графа H . Це означає,

що або $\bigcup_{i=1}^2 X_i = \emptyset$, або \hat{N} - порожній підграф графа H ; що неможливо. Отже невірним є наше припущення (*). Отже, якщо має місце рівність: $t_G(X_i \cup X_j) = 2$, то існує підграф H_{ij} графа G , де $i < j, i, j = 1(1)t$. Доведення теореми 2.1 закінчено.

Теорема 2.2. Нехай X - кінцева множина крапок 2-зв'язного графа G ,

$$t_G(X) = t, \{s_i\}_{i=1}^t \subseteq \sigma(G, f), \quad X_i = X \cap \partial s_i, i = 1(1)t, t > 1$$

Для кожної пари підмножин X_i, X_j множини X , де $i < j, i, j = 1(1)t$, виконується рівність $t_G(X_i \cup X_j) = 2$, тоді і тільки тоді, коли існує частковий підграф H_{ij} графа G , описаний у визначенні 2.3. Доведення цієї теореми випливає з лем 2.0, 2.1, 2.2, а також теореми 2.1.

Наслідок 2.0. Нехай X - скінчена множина крапок 2-зв'язного графа G , задане

вкладення $f, f: G \rightarrow \sigma, X_i = \{x_i\}, X_i = X \cap \partial s_i, \{s_i\}_{i=1}^t \subseteq \sigma(G, f)$ має місце співвідношення:

$$(\exists f)(\forall s)(\forall i, j, i \neq j, i, j = 1(1)t)(s \in \sigma(G, f)) \left[f(\{x_i, x_j\}) \not\subset \partial s \right], H_{ij} \text{ — підграф графа } G,$$

описаний у визначенні 2.3, де $i < j, i, j = 1(1)t, t > 1$. Якщо існує найменше по включенню

множина M , $m = \left\{ H_{k(k+1)} \right\}_{k=1}^{t-1} + \{H_{1t}\}$, з властивостями:

$$1) (\forall i, j)(\exists H_{ij})(i < j, i+1 \neq j, i, j = 1(1)t) \left[H_{ij} \subset \left(\bigcup_{k=1}^{t-1} H_{k(k+1)} \right) \cup H_{1t} \right]:$$

$$2) (\forall k')(k' = 1(1)t) \left[\left(H_{k'(k'+1)} \not\subset \bigcup_{k=1}^{t-1} H_{k(k+1)} \cup H_{1t} \right) \wedge \left(H_{1t} \not\subset \bigcup_{k=1}^{t-1} H_{k(k+1)} \right) \right] \text{ то } t_G(X) = t..$$

Доведення. Нехай X - скінчена множина точок 2-зв'язного плоского графа G , задане

вкладення $f, f: G \rightarrow \sigma, X_i = X \cap \partial s_i, X_i = \{x_i\}, \{s_i\}_{i=1}^t \subseteq \sigma(G, f), i = 1(1)t$; має місце

співвідношення: $(\exists f)(\forall s)(\forall i, j = 1(1)t)(s \in \sigma(G, f)) \left[f(\{x_i, x_j\}) \subset \partial s \right]$, де H_{ij} - підграф

графа G , описаний у визначенні 2.3, $i < j, i, j = 1(1)t$. Покладемо, що існує найменша по

включенню множина M елементами якої є підграфи H_{ij} , що володіють властивостями I),

2). Приведені в умові співвідношення для множини X означають, що при будь-якому

вкладенні $f, f: G \rightarrow \sigma$, ніякі дві різні крапки x_i, x_j не лежать на границі однієї і тієї ж

клітки $s, s \in \sigma(G, f)$. Тоді з теореми 2.2 випливає співвідношення:

$$(\forall i, j)(i < j, i, j = 1(1)t) \left[t_G(X_i \cup X_j) = 2 \right]. \text{ Отже має місце включення: } f(X) \subset \bigcup_{i=1}^t \partial s_i, \text{ де}$$

$t = t_G(G^0)$. Що і було потрібно довести. Для доведення наслідків 2.1 і 2.2 необхідні наступні леми.

Лема 2.3. Нехай X - скінчена множина точок плоского графа G , $G = \sum_{i=1}^n G_i$,

$$\rho_0(G_i) = 1, t_G(X) = t, t > 1, i = 1(1)n. \text{ Має місце рівність: } t_G(X) = \sum_{i=1}^n t_{G_i}(X \cap G_i) - n + 1$$

Доведення: Нехай X - скінчена множина точок площинного графа G , $G = \sum_{i=1}^n G_i$,

$\rho_0(G_i) = 1, i = 1(1)n$, і задане вкладення $f, f: G \rightarrow \delta$, що реалізує $t_G(X)$, де $t_G(X) = t, t > 1$. Розглянемо вкладення $f_i, f_i = f|_{G_i}, f_i: G_i \rightarrow \delta, i = 1(1)n$. Тоді маємо співвідношення: а)

вкладення f_i реалізує $t_i, t_i = t_{G_i}(G_i \cap X), i = 1(1)n$; б) $f = \sum_{i=1}^n f_i$. Дійсно, якщо для деякого i

вкладення f_i не реалізує $t_{G_i}(X \cap G_i)$, то тоді є вкладення $f'_i: G_i \rightarrow \delta$, що реалізує $t_{G_i}(X \cap G_i)$. Це означає, що вкладення f не реалізує $t_G(X)$. Одержимо протиріччя умові.

Співвідношення а) вірне. Розглянемо множину $S_i, S_i = S_G(G_i \cap X)$ де $S_i = \{s_{ij}\}_{j=1}^{t_i}$, а також вкладення $f'_i, f'_i: G_i \rightarrow \delta$, що задовольняє умові:

1) $f'_i = \alpha_i f_i$, де α_i - операція стереографічного проектування з центром у клітці $s_{i1}, i = 1(1)n$.

2) $f'(s_{ij})$ - зовнішня грань графа $f'_i(G_i), i = 1(1)n$. Незавжно бачити, що вкладення f'_i реалізує t_i .

Одержимо вкладення $f', f' = \sum_{i=1}^n f'_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$, що реалізує t і таке, що $S_G(X) = \bigcup_{i=1}^n (S_i - \{s_{ij}\}) \cup \{s_0\}$,

де s_0 - зовнішня грань графа $f'(G)$, причому $\rho_0(\partial s_0) = n - 1$. Звідси випливає рівність:

$$t_G(X) = \sum_{i=1}^n t_{G_i}(X \cap G_i) - n + 1, \text{ що було потрібно довести.}$$

Лема 2.4. Нехай X - скінчена множина точок однозв'язного плоского графа G , $t_G(X) = t, t > 1, P = \{a_i\}_{i=1}^m$ - множина усіх точок зчленування графа G . Мають місце

твердження: 1). Існує φ -перетворення графа $\sum_{k=1}^n G_k$ в граф G що має наступний вид:

$$\gamma \left(\sum_{k=1}^n G_k, \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_j} a_{ij} \right) = \left(G, \sum_{i=1}^m a_i \right), \text{ де } \sum_{j=1}^{k_j} a_{ij} = \gamma^{-1}(a_i), \text{ причому } i = 1(1)m, G_k \text{ - 2-зв'язний}$$

площинний граф, $k = 1(1)n$; 2) $\sum_{i=1}^n t_{G_i}(X \cap G_i) - n + 1 \leq t_G(X) \leq \sum_{i=1}^n t_{G_i}(G_i \cap X)$

Доведення. Нехай X - скінчена множина точок однозв'язного плоского графа $G, t_G(X) = t,$

$t > 1, P = \{a_i\}_{i=1}^m$ - множина усіх точок зчленування графа G . Доведемо твердження 1).

Виконаємо операцію ϕ , тобто операцію розщеплення всіх точок зчленування графа G і виділимо підграфи G_k графа $\varphi(G)$ так, щоб виконувалися умови:

$$a) \phi(a_i) = \sum_{k=1}^{k_i} a_{ik}, \text{ де } i=1(1)n, \text{ б) } \rho_G(a_i) = \sum_{k=1}^{k_i} \rho_{G_k}(a_{ik}), G_k = \varphi^{-1}(G_k), k=1(1)n.$$

Позначимо через M множину $\varphi(G_k) \cap P, k=1(1)n$. Неважко бачити, що операція φ є зворотною стосовно φ - перетворення з умови твердження 1). Твердження 1) доведено. Доведемо твердження 2). Нехай вкладення $f, f: G \rightarrow \sigma$, реалізує $t_G(X)$. За допомогою операції φ^{-1} виконаємо розщеплення всіх точок зчленування графа G й одержимо графа $\varphi^{-1}(G)$, де $\varphi^{-1}(G) = \sum_{k=1}^n G_k, p_o(G_k) = 1, k=1(1)n, n \geq 2$. Розглянемо вкладення

$$f^*, f^* := G \rightarrow \sigma, f^* = \sum_{k=1}^n (f|G_k) \varphi^{-1}, n \geq 2 \text{ і позначимо через } s \text{ зовнішню грань графа } f^*(G),$$

де $p_1(\partial s) \geq n-1, s \in \sigma(\varphi^{-1}(G), f^*)$. Позначимо через X_k підмножину $G_k \cap X$ множина

$$X \text{ і покладемо, що } X_k = \sum_{j=1}^{n_k} X_{kj} \text{ причому } (f|G_k(X_{kj}) \subset \partial s_{kj}) \wedge (f|G_k(X_k) = \bigcup_{j=1}^{n_k} \partial s_{kj}), \text{ де}$$

$$s_{kj} \in \sigma(G, f), j=1(1)n_k, k=1(1)n. \text{ Маємо наступне включення: } f(X) \subset \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{j=1}^{n_k} \partial s_{kj}. \text{ Звідси}$$

$$\text{випливає, що } t_G(X) = \sum_{k=1}^n n_k. \text{ Оскільки має місце співвідношення: } P \cap X \neq \emptyset, \text{ те}$$

$$\text{виконується наступне: } f'(X) \subset \left(\bigcup_{k=1}^n \bigcup_{j=1}^{n_k} \partial s_{kj} \right) \cup \partial s. \text{ Далі, у силу визначення числа}$$

$$t_{G_k}(X_k), k=1(1)n, \text{ виконується наступне: } t_{G_k}(X_k) \leq n_k, \text{ де } k=1(1)n. \text{ Тоді виконується:}$$

$$t_G(X) \geq \sum_{k=1}^n n_k - n + 1 \geq \sum_{k=1}^n t_{G_k}(X_k) - n + 1. \text{ Відзначимо, що отримана нижня оцінка числа}$$

$t_G(X)$ є точною. Для того, щоб переконатися в тім, що це так, досить припустити

наступне: для кожного графа G_k існує вкладення $f_k, f_k: G_k \rightarrow \sigma, k=1(1)n$, реалізує

$$t_k, t_k = t_G(X \cap G_k), f_k(X_k) \subset \bigcup_{j=1}^{t_k} \partial s_{kj} \text{ й має властивість: } f_k(\varphi^{-1}(P) \cap G_k) \subset \partial s_{k1}, \text{ де}$$

$s_{kj} \in \sigma(G_k, f_k), j=1(1)n_k, k=1(1)n$. Отже, отримана нижня точна оцінка $t_G(X)$. Очевидним

$$\text{є наступна нерівність: } t_G(X) \leq \sum_{k=1}^n t_{G_k}(X_k). \text{ У точності верхньої оцінки числа } t_G(X)$$

можна переконатися, якщо вважати, що виконується співвідношення (а): для кожного G_k

не існує вкладення $f_k, f_k: G_k \rightarrow \sigma$, що реалізує $t_k, t_k = t_{G_k}(G_k \cap X)$, де

$$f_k(X_k) \subset j=1 \bigcup_{j=1}^{t_k} \partial s_{kj}, \text{ і має властивість: } f_k(\varphi^{-1}(P) \cap G_k) \supset \partial s_{k1}, \text{ де}$$

$$f'', f'' = \varphi \left(\sum_{k=1}^n f_k \right),$$

$s_{kj} \in \sigma(G_k, f_k), j=1(1)n_k, k=1(1)n$. Тоді маємо вкладення -

$$f'' : \sum_{k=1}^n G_k \rightarrow \sigma,$$

таке, що реалізує $t_G(X), t_G(X) = t'', t'' = \sum_{k=1}^n t_k$. Доведемо, що f'' - реалізує

$t_G(X), t_G(X) = t'', t'' = \sum_{k=1}^n t_k$. Для цього припустимо зворотнє, що при деякому іншому

вкладенні $f''', f''': G \rightarrow \sigma$, що реалізує t''' має місце: $t''' < t''$. Нехай $f'''(X) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n'} \bigcup_{j=1}^{n'_k} \partial s'_{kj}$, де

$s'_{kj} \in \sigma(G, f''')$. Розглянемо тепер граф $\varphi^{-1}(f'''(G))$. В силу зробленого припущення і співвідношення (а) має місце одне з наступних співвідношень: а) або існує таке $k, k = k'$,

що $\varphi^{-1}(f'''|_{G_{k'}})(X_k) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n'_k} \partial s'''_{kj}$, причому $n'_k < n_k, s'''_{kj} \in \sigma(G_k, \varphi^{-1}(f'''|_{G_k}))$; б) або для

якогось $P', P \subseteq P$, найдуться, щонайменше, дві графи $G_{k_1}, G_{k_2}, k_1 \neq k_2$, задовольняють

співвідношенню $(\forall k)(k = k_1, k_2) [\varphi^{-1}(f'''|_{G_k})(\varphi^{-1}(P') \cap G_k^o) \subset \partial s'''_{k1}]$; в) або обоє

співвідношення а), б) разом узяті.

Одержимо протиріччя співвідношенню (а), наше припущення невірне. Отже вкладення

f''' реалізує $t_G(X), t_G(X) = \sum_{k=1}^n t_{G_k}(X \cap G_k)$.

Твердження 2) доведено. Доведення закінчено.

Для ілюстрації твердження 2) приведемо приклади 2.1 і 2.2. Без доведення приведемо

наступне: у прикладі 2.1 граф G_i , має властивість: $(\forall i)(i = 1(1)4)(t_{G_i}(X \cap G_i) = 4)$,

а в прикладі 2.2 кожен граф G_i задовольняє рівності: $t_{G_i}(X \cap G_i) = 3$, де $i = 1(1)3$.

Доведення цих фактів приведемо нижче.

Приклад 2.1. Нехай: $\varphi\left(\sum_{i=1}^4 G_i, \{a_1 + a_2, b_{21} + b_{31}, c_3 + c_4\}\right) = (G, \{a, b, c\})$,

$$P = \{a, b, c\}, X = \{i\}_1^{16}.$$

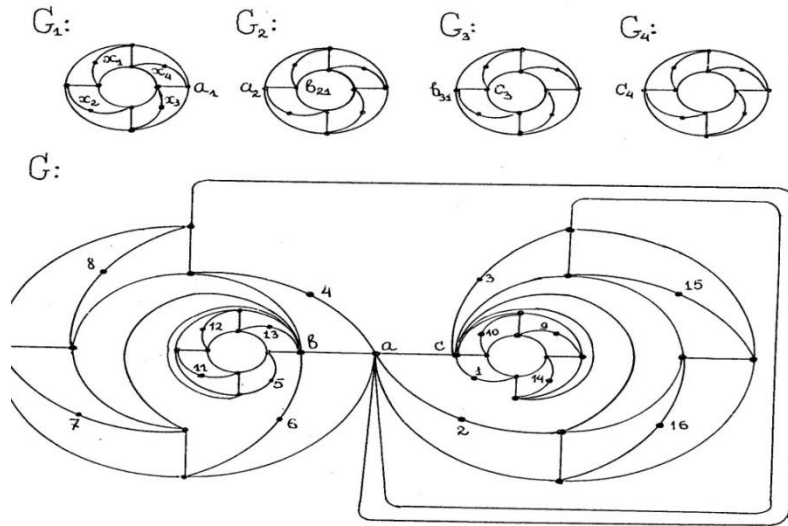
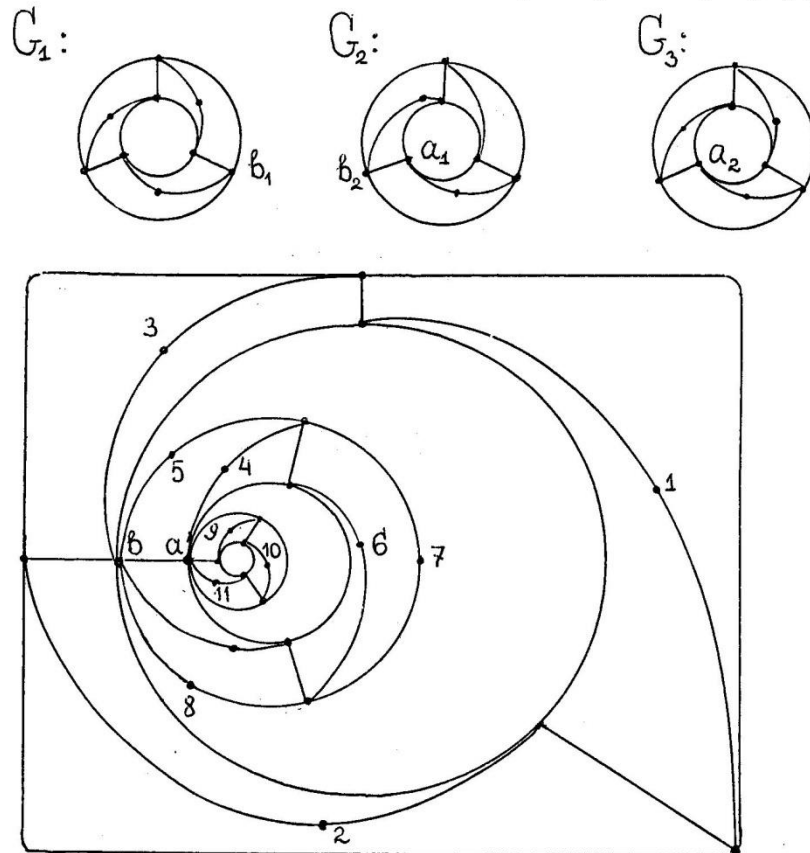


Рис. 7.

Виконується рівність: $t_G(X) = \sum_{i=1}^4 (X \cap G_i^o) - 4 + 1 = 13$.

Приклад 2.2. $\varphi\left(\sum_{i=1}^3 G_i, \{b_1 + b_2, a_1 + a_2\}\right) = (G, (b, a))$;

$$P = \{a, b\}, X = \{i\}_{i=1}^{11}$$



Виконується рівність: $t_G(G^o) = \sum_{i=1}^3 t_G(X \cap G_i) = 9$.

Приведемо деякі наслідки з теореми 2.2.

Наслідок 2.1. Нехай X - скінчена множина точок плоского однозв'язного графа G , $t_G(X) = t, t > 1, P = \{a_i\}_{i=1}^m$ - множина усіх точок зчленування графа G - і задане φ -

перетворення графа $\sum_{k=1}^n G_k$ в графа G , описане у твердженні I) леми 2.4, причому

$$S_{G_k}(X_k) = \{s_{kj}\}_{j=1}^{n_k},$$

$$X = \sum_{k=1}^n X_k, X_k = G_k \cap X, X_k = \sum_{j=1}^{n_k} X_{kj},$$

де $n_k = t_{G_k}(X_k), k = 1(1)n$.

Для кожної пари $(X_{kj}, X_{k'j'})$, складеної з підмножин множини X , де

$k' \neq k, j \neq j', j' = 1(1)n_k, j = 1(1)n_{k'}, k', k = 1(1)n$, має місце рівність, тоді і тільки тоді, коли $k' = k$ й існує частковий підграф H_{ij} графа G , описаний у визначенні 2.3.

Доведення цього наслідку випливає з леми 2.4 і теореми 2.2, яку можна застосувати для кожного графа G_k , оскільки G_k - двозв'язний граф. Підграф $H_{kj'j'}$ графа G це той же H_{ij} , тільки індекси $ki, k'j'$ відіграють роль i, j .

Наслідок 2.2. Нехай X - скінчена множина точок площинного незв'язного графа G ,

$$G = \sum_{i=1}^n G_i, \rho_o(G_i) = 1, i = 1(1)n, X_i = G_i \cap X, X_i = \sum_{j=1}^{t_i} X_{ij}, t_i = t_{G_i}(X_i), S_{G_i}(X_i) = \{s_{ij}\}_{j=1}^{t_i}.$$

Для кожної пари $(X_{i'j'}, X_{i''j''})$, складеної з різних підмножин X , виконується умова:

$$t_G(X_{i'j'} \cup X_{i''j''}) = 2 \text{ тоді і тільки тоді, коли існує частковий підграф } H_{kj'j''} \text{ графа } G$$

(описаний у визначенні 2.3), причому $i = i'', j' \neq j'', j', j'' = 1(1)t_i, i = 1(1)n$.

Доведення наслідка 2.2 випливає з леми 2.3 і наслідка 2.1, що можливо застосувати до кожного графа G_k оскільки G_k - зв'язний граф. Відзначимо, що підграф $H_{i'j'i''j''}$ графа

G суть H_{ij} , тут індекси $i'j', i''j''$ заміняють індекси i, j , відповідно, тобто замість X_i, X_j ,

виступають, відповідно $X_{i'j'}, X_{i''j''}$. У зв'язку з теоремою 2.2 виникає припущення: Нехай

виділене X - скінчена довільна множина точок плоского 2-зв'язного графа G і задане

$$\text{розбиття множини } X_i \text{ на } t \text{ окремих непорожніх підмножин } X_i, \text{ тобто } X = \sum_{i=1}^t X_i,$$

причому Для кожної пари цих підмножин існує підграф H_{ij} , графа G , описаний у

визначенні 2.3. Тоді маємо рівність: $t_G(X) = t$. Однак це не так. Побудуємо

контрприклад. Нехай $X_1 = \{x_{1i}\}_{i=1}^2$, $X_2 = \{x_{21}\}$, $X_3 = \{x_{3i}\}_{i=1}^2$, $X = \sum_{i=1}^3 X_i$,

де $x_{11} \in (12)$, $x_{21} \in (14)$, $\{x_{32}, x_{12}\} \subset (23)$, $x_{31} \in (34)$. Незавжно бачити, що підграфи

H_{12}, H_{13}, H_{23} графа G стягаються відносно $X_{H_{ij}}$ до графа $K_4^{(1)}$, де $i < j, i = 1, 2, j = 2, 3$. У

силу нашого припущення одержимо, що $t = 3$. З іншої сторони маємо рівність: $t_G(X) = 2$,

тому що виконується співвідношенням $X \cap \{(13)\} = \emptyset$. Припущення невірне.

1.2. АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ ЧИСЛА ДОСЯЖНОСТІ СПЕЦІАЛЬНОЇ МНОЖИНИ ТОЧОК 2-ЗВ'ЯЗНОГО ГРАФА

Розглянемо задачу перебування числа досяжності $t_G(X)$ деякої спеціальної множини X -

точок плоского 2-зв'язного графа G такого, що при будь-якому вкладенні $f: G \rightarrow \sigma$ ніякі

два елементи множини X не належать границі якої-небудь 2-клітки. Згідно визначення

цього числа один зі шляхів рішення цієї задачі зводиться до побудови множини всіх

неізоморфних вкладень графа G в σ . На підставі наслідку 2.0 теореми 2.2 можна

побудувати наступний алгоритм обчислення числа $t_G(X)$:

Крок 0. У графі G виділимо множина \mathfrak{M} , що складається з усіх його різних підграфів H , що відносно X_H стягаються до одному з графів, описаних у визначенні 2.3.

Крок 1. Вибираємо підмножини \mathfrak{M}_i множини \mathfrak{M} , $|\mathfrak{M}_i| = m_i$, $\mathfrak{M}_i = \left\{ H_k^{(i)} \right\}_{k=1}^{m_i-1} \cup \left\{ H_{1m_i}^{(i)} \right\}$,

елементи яких мають ту властивість, що для кожної з інших пар $(i', j'), i' < j'$ існує

підграф $H_{i'j'}$ графа G , де $H_{i'j'} \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_i$, такий, що $H_{i'j'} \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{m_i-1} H_k^{(i)} \right) \cup H_{1m_i}^{(i)}$, причому $H_{i'j'}$

задовольняє визначенню 2.3.

Будемо називати підмножину \mathfrak{M}_i покриттям довжини m_i , множини X , причому назвемо

покриття $\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_j$ різними, якщо $|\mathfrak{M}_i| \neq |\mathfrak{M}_j|$.

Крок 2. Побудуємо послідовність M , що складається з усіх різних покриттів множини.

Оскільки G скінчений граф і розглядаються різні підграф H , то M скінчена послідовність.

Тому можливо упорядкувати елементи послідовності M по убутанню їхньої довжини, а

також перенумерувати їх.

Крок 3. Якщо отримана послідовність M має довжину P , то \mathfrak{M}_p - покриття мінімальної довжини. Тоді виконується рівність: $t_G(X) = |\mathfrak{M}_p|$.

Опис алгоритму закінчений.

На підставі наслідків 2.1 і 2.2 можливо побудувати аналогічні алгоритми рішення задачі обчислення числа досяжності деякої множини X , що складає з точок однозв'язного графа або незв'язного графа.

Для ілюстрації нашого алгоритму звернемося до прикладів 2.1, 2.2 і знайдемо числа

$t_{G_i}(G_i \cap X), i = 1(1)4$, для кожного приклада. Розглянемо граф G_1 із приклада 2.1. Нехай

$X = \{x_i\}_{i=1}^4$. і задана множина S , $S = \{s_i\}_{i=1}^4$, $X_i = X \cap \partial s_i, i = 1(1)4$. Для кожної пари (s_i, s_j)

, де $i < j, i, j = 1(1)4$ побудуємо H_{ij} - частковий підграф графа G_1 , описаний у визначенні

2.3, що стягається відносно $X_{H_{ij}}$ до графа $K_4^{(1)}$. Неважко переконатися в тім, що при будь-

якому вкладенні $f: G_1 \rightarrow \sigma$ для будь-яких x_i, x_j , де $x_i \neq x_j, f(\{x_i, x_j\}) \not\subset \partial s, s \in \sigma(G_1, f)$.

Дійсно, для будь-якої пари $(x_i, x_j), i \neq j$, існує підграф H_{ij} , такий, що $H_{ij} \cong K_4^{(1)}$. Маємо

\mathfrak{M}_1 покриття множини X , де $\mathfrak{M}_1 = \{H_{12}^{(1)}, H_{14}^{(1)}, H_{23}^{(1)}, H_{34}^{(1)}\}$, причому для всіх інших пар

$(i, j), i < j, i, j = 1(1)4$, існує такий підграф H_{ij} графа G_1 що $H_{ij} = \bigcup_{H \in \mathfrak{M}_1} H$, де H_{ij}

описаний у визначенні 2.3. Очевидно, що \mathfrak{M}_1 містить найменше число елементів.

Згідно наслідку 2.0 маємо рівність: $t_{G_1}(X \cap G_1) = |\mathfrak{M}_1| = 4$. Аналогічним образом можна

довести, що $t_{G_1}(X \cap G_1) = 3$, де G - граф із приклада 2.2, ілюстрація алгоритму закінчена.

1.3. АЛГОРИТМ ВСТАНОВЛЕННЯ 3-ВЛАСТИВОСТІ ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ

Визначення 3.1. Будемо говорити, що граф G має 3-властивість, якщо має місце нерівність: $t(G^0) \geq 3$. Використовуючи визначення 3-мінімального плоского графа G , а також список таких неізоморфних графів, приведений у додатку 1, одержимо наступну лему 3.1:

Якщо граф G має 3-властивість, то існує частина H графа G гомеоморфна деякому 3-мінімальному графові.

Доведення. Нехай граф G задовольняє нерівності: $t(G^0) \geq 3$. Перетворимо граф G у граф G_1 шляхом видалення всіх його ребер несуттєвих відносно $t(G^0) \geq 3$ т.е. таких ребер $u, u \in G^1$, що задовольняють рівності: $t_{G \setminus u}(G^0) = t(G^0)$.

Можливо, що граф G_1 буде мати ізольовані вершини, що є несуттєвими при визначенні числа $t(G_1^0)$. Очевидно, що граф G_1 задовольняє наступному співвідношенню:

$$(\forall u \in U(G_1^1))(t_{G_1^u}(G_1^0) = 2)$$

З визначення 1.3 випливає, що граф G_1 гомеоморфний 3-мінімальному графові. Для того, щоб одержати з графа G_1 3- мінімальний граф варто виконати операцію

ототожнення кожної вершини a , де $a \in \mathfrak{M}$, де $\mathfrak{M} = \{\forall a / t_{G_1}(G_1 \setminus \{a\}) = 3\}$, або з однієї із

суміжних вершин множини \mathfrak{M} , або з множини $G_1 \setminus \mathfrak{M}$. Що було потрібно довести.

Доведення леми закінчено.

Має місце наступна *теорема 3.0.I*:

Граф G має 3-властивість тоді і тільки тоді, коли існує частина графа G гомеоморфна 3-мінімальному графу.

Доведення. Якщо граф G має 3-властивість, то в силу леми 3.1 мається частина графа G гомеоморфна деякому 3-мінімальному графові, з числа приведених у додатку 2.

Якщо граф G містить частина H гомеоморфну 3-мінімальному графові, то в силу

нерівності: $t_G(G^0) \geq t_H(H^0)$ одержимо, що граф G має 3-властивість. Що було потрібно довести. Доведення теореми закінчено.

У зв'язку з цим виникає задача побудови алгоритму для встановлення 3-властивості вхідного графа G за поліноміальний час. Мають місце наступні леми.

Лема 3.2. Якщо існує простий ланцюг C , $C = C_G^m(a, b)$, $m \geq 2$, $(a, b) \notin G^1$, такий, що

$$(\forall v)(v \in C^0 \setminus \{a, b\})[(\rho_G(v) = 2) \wedge (\rho_G(a) \geq \rho_G(b) > 2) \wedge (\omega(G) > 1)]$$

те є простий цикл Z , $\{a, b\} \subset Z^0$, де $Z^0 = \{z_i\}_{i=1}^n$, $G_1 = (G^0, G^1 \setminus C^1)$, $n > 3$ такий, що підграф $G[ZUC]$ містить частину гомеоморфну графові $K_{2,3}$.

Лема 3.3. Нехай $a_0 \in G^0$, $\rho_G(a_0) = n$, $St_G(a_0)$ - зірка графа G з центром у вершині a_0 , де $St_G^0(a_0) = \{a_i\}_{i=0}^n$, а ребра-промені можуть бути 1-підрозділені вершинами ступеня 2, $S_1 = \{a_i\}_{i=1}^n$, $\rho_G(a_i) > 2, i = 1(1)n$

Якщо має місце співвідношення: $(\rho_G(a_0) = n) \wedge (\omega(G \setminus St_G^1(a_0)) > 1)$, то існує такий простий цикл Z графа G , де $|Z^0| = m$, $S_1 \supset Z^0$ що підграф $G[z^0 U St_G^0(a_0)]$, або гомеоморфний графу K_4 , або містить частина гомеоморфну графові K_4 . Доведення цих лем 3.2, 3.3 очевидно. Відмітимо, що описаний у їхніх умовах підграф $G[z^0]$ - простий цикл довжини $|z^0|$ з можливими діагоналями.

Позначення 3.2. Через M_i позначимо найбільше по включенню множина $\{z_{ij}\}_{j=1}^{|M_i|}$ усіх різних простих циклів Z_{ij} графа G , описаних у лемі 3. $i+1$, де $i=1,2$, і задовольняючим умовам:

$$1). (\forall j)(j) = 1(1|M_i|) \left(z_{ij} \not\subset \bigcup_{\substack{j \neq j' \\ j'=1}}^{|M_i|} \right);$$

$$2). \left(\bigcup_{j=1}^{|M_i|} z_{ij}^1 \cap \bigcup_{j=1}^{|M_2|} St_G^1(v_j) \right) = \emptyset,$$

де $St_G(v_j)$ - зірка графа G з центром у крапці v_j , зв'язана з z_{2j} і описана в лемі 3.3.

Позначимо через O_n φ - образ графа $St(v) + z$, де $z^0 = \{z_i\}_{i=1}^n$, z - простий цикл довжини n , $St_G(v) = \{v\} \cup \{v_i\}_{i=1}^n$, якщо φ - перетворення задане в такий спосіб:

$$\varphi \left(z + St(v), \sum_{i=1}^n (z_i + v_i) \right) = \left(O_n, \{z_i\}_{i=1}^n \right),$$

і назвемо граф O_n - колесом з n -спицями.

Лема 3.4. Якщо M_i - множина, описана в позначенні 3.2, таке, що $\sum_{i=1}^2 |M_i| = k$, то має місце нерівність: $t_G(G^0) \geq k$.

Доведення. В силу прийнятого вище позначення 3.2 маємо, що з кожним елементом множини, M_i описаного в позначенні 3.2, зв'язана однозначним образом деяка частина графа G або його підграф гомеоморфний графові K_4 або графові $K_{2,3}$. Якщо $\sum_{i=1}^2 |M_i| = k$, то в G існуватиме k - штук таких частин графа G , які не мають один з одним спільних простих циклів гомеоморфних, або графу K_4 , або графу $K_{2,3}$. Кожний із графів K_4 , $K_{2,3}$ має число досяжності множини вершин більше k , тому $t_G(G^0)$ - число досяжності графа G задовольняє нерівності: $t_G(G^0) \geq k$..Доведення леми 3.4 закінчено.

Лема 3.5. . Нехай $H_i \subset G, H_i \cong O$ або $H_i \cong K_{2,3}$, де $i = 1,2, \dots, n > 2$. Якщо має місце співвідношення: $\left(\sum_{i=1}^2 |M_i| = 2 \right) \wedge \left(w \left(\bigcup_{i=1}^2 H_i \right) > 0 \right)$, то існує не більш одного простого ланцюга C , $C = C_G^k(a, b)$, довжини до , до ≥ 2 , де $(a, b) \notin G^1$, $\{a, b\} \subset \bigcup_{i=1}^2 H_i$, такий, що задовольняє умові: $C^1 \cap \left(\bigcup_{i=1}^2 H_i^1 \right) = \emptyset$.

Доведення. Нехай $\sum_{i=1}^2 |M_i| = 2, \{H_i\}_{i=1}^2$ множина підграфів графа G або його частин гомеоморфних або $K_{2,3}$ або K_4 , кожний з H_i містить точно один простий цикл, що є елементом одного з множин $M_i, i=1,2$. . Покладемо, що $\bigcup_{i=1}^2 H_i$ - зв'язний граф. Для

Доведення використовуємо метод від противного. Припустимо, що існує множина $\{C_j\}_{j=1}^m$, де $m > 1$, що складається з простих ланцюгів C_j , $C_j = C_G^{mj}(a_j, b_j)$ де $m_j \geq 2$ для

всіх $j, j=1(1)m$, $\{a_j, b_j\}_{j=1}^m \subset \bigcup_{i=1}^2 H_i^0$, таких, що задовольняють співвідношенню:

$$\left(G^1 \cap \{(a_j, b_j)\}_{j=1}^m = \emptyset \right) \wedge \left(\bigcup_{j=1}^m C_j^1 \cap \bigcup_{i=2}^2 H_i^1 = \emptyset \right)$$

Тоді існує простий цикл Z графа G , що містить одну з простих ланцюгів C_j , нехай $j=1$, а також простий ланцюг Z , $C = C_G(a_1, b_1)$, таку, що

$$\{(a_2, b_2)\} \subset C^0 \wedge \left(C \subset \bigcup_{i=1}^2 z_i \right)$$

Неважно бачити, що $G[z^0] \cup C_2$ - підграф графа G - або його частина гомеоморфна $DO_{2,3}$.

Це означає, що $z \in M_1$. Тим самим одержимо протиріччя умові, що $\sum_{i=1}^2 |M_i| = 2$

Припущення невірне. Отже існує не більш одного простого ланцюга C , описаної в умові леми. Доведення закінчений.

Алгоритм Д04 матиме наступний вигляд:

0) $H_2 := \emptyset, Z := \emptyset, F := \emptyset$;

1) Вибираємо вершину v , так, щоб існувала зірка $St_G^n(v)$ графа G з центром в v і n ребрами, $n > 2$, (можливо, що деякі з них виявляться 1-підрозділеними), така, що $w(G \setminus (St_G^n(v))^1 \setminus \{v\}) > 1$. Якщо такої вершини немає, то переходимо до мітки 4).

2) Знайдемо вершини простого циклу $z, z = z^n$, у такий спосіб:

а) вибираємо $c, c \in M$, де $M = G^0 \setminus (St_G(v) \cup Z)$;

в) $F := F + (cv)$

Якщо $\gamma(F) = 0$, то: заносимо вершину C в список Z ,

$M := M \setminus Z$ переходимо до мітки а);

Якщо $\gamma(F) > 0$, то: $M := M \setminus \{c\}$

Інакше, якщо $M = \emptyset$, то переходимо до мітки 3)

інакше переходимо до мітки а).

3) $z^0 = Z \cup S_1$

де S - множина кінцевих вершин зірки $St_G(v)$, відмінних від v і ступені, що має, більше

2. Тут $G[z^0]$ - простий цикл довжини $m, m = |Z| + n$, (можливі діагоналі циклу не розглядаємо).

$$H_2 := G[z^0] \cup St_G^n(v)$$

4) Якщо $H_2 := \emptyset$ то видаємо "НІ", інакше $H_2 = G[z^0] \cup St_G^{n(v)}$

Кінець роботи.

Алгоритм ДО23

0) $H_2 := \emptyset, Z := \emptyset, F := \emptyset;$

1) Вибираємо ланцюг C , що задовольняє умові леми 3.2, де $C = C_G(a, b)$, $(ab) \notin G^1$. Якщо такий ні, то переходимо до мітки 4).

2) Знайдемо вершини простого циклу $z, z = z^n$, у такий спосіб:

а) вибираємо вершину $g, g \in C^0 \setminus \{a, b\};$

б) вибираємо вершину $c, c \in G^0 \setminus (C^0 \cup Z);$

в) $F := F + (gc)$

якщо $\gamma(F) = 0$, те $c \rightarrow Z$ тобто заносимо c в список Z , переходимо до мітки б);

якщо $\gamma(F) > 0$, то $G^0 := G^0(\{c\} \cup C^0 \cup Z)$,

якщо $|G^0| = 0$, те переходимо до мітки 3);

інакше: переходимо до мітки б).

3) $z^0 = Z \cup \{a, b\}$,

де a, b - кінцеві вершини ланцюга $C, G[z^0]$ простий цикл довжини n , без діагоналей $n = |Z| + 2$, (можливі діагоналі цього циклу відкинемо). Якщо $n > 3$, то

$H_1 := G[z^0] \cup C$, видаємо відповідь: " $H_1 = H_1$ "; переходимо до мітки кінець. Інакше:

4) Видаємо відповідь "НІ". Кінець роботи.

Теорема 3.1. Алгоритми ДО4, ДО23 є коректними і мають поліноміальну складність.

Доведення. Незавжди бачити, що в основі алгоритмів ДО4, ДО23 лежить перевірка наявності властивостей 2-связности або площинності вхідного графа F . Властивість 2-связности вхідного графа F можна знайти за $O(|F^0|)$ операцій за допомогою алгоритму, описаного в роботі [27], а властивість планарності можна знайти за $O(|F^0|)$ операцій за допомогою алгоритму, описаного в роботі [28], де $|F^0| = |G^0|$. Доведення теореми

закінчене. Обчислимо $K, K = \sum_{i=1}^2 |M_i|$

Алгоритм А. //

о) $M_i := \emptyset, F := G,$

$Z := \emptyset, K := 0$ / для результату /

$i := 0;$

Д) $i := i + 1, v := v_i,$ де $\{v_i\}_{i=1}^{|F|} = F^0 \setminus Z;$

Якщо $|F \setminus Z| = 0,$ то переходимо до мітки 4).

І.а) чи є зірка $St_F(v)$ графа F з центром в v і n -ребрами, де $n = \rho_1(v),$ що можливо і-підрозділені, така, що $H_2,$ де $H_2 = St_F(v) \cup z,$ містить частина графа G гомеоморфну графові O_n (використовуємо алгоритм ДО4).

Якщо "є", то: $v \rightarrow Z,$

$z \rightarrow M_2$

$F := G \setminus (St^0(v) \setminus S)$

перехід до мітки 2); де S_1 - множина усіх кінцевих вершин зірки $St_F(v);$

Інакше:

1.б) за допомогою алгоритму ДО23 перевіримо існування простого ланцюга

$C, C = C_G(a, b),$ де $(a, b) \notin G^1,$ такий, що $v \in C^0 \setminus \{a, b\},$ де підграф $H, H = C \cup z$ -містить частина гомеоморфную ДО_{2,3}.

Якщо "є" то: $v \rightarrow Z,$

$F := G \setminus (C \setminus \{a, b\}),$

$z \rightarrow M_1;$

переходимо до мітки 2). Інакше переходимо до мітки кінець).

2) $j := j + 1;$

$uj \in F^0 \setminus Z;$ Якщо $|F^0 \setminus Z| = 0,$ то переходимо до мітки 4).

2.а) За допомогою алгоритму ДО4 визначимо чи немає підграфа $H_2,$ графа F або його частини $H_2,$ де $H_2 = St_F(u_j) \cup z$ гомеоморфної $O_n, n = \rho_F(u_j), n > 2.$

Якщо "є", то:

$u_j \in Z; F := F \setminus (St_F(u_j) \setminus S_1); z \rightarrow M;$ перехід до мітки 2);

Інакше

крок 2.б): Перевіримо за допомогою алгоритму ДО23 наявність підграфа H_1 графа F гомеоморфного графові $K_{2,3}$ де $H_1 = z \cup C, C = C_F(a, b), u_j \in C^0 \setminus \{a, b\}.$

Якщо ϵ , то переходимо до мітки 2).

Інакше: $i = 1, K := 0$, перехід до мітки 3).

3) $K := K + 1$;

Якщо $K > |M_i|$, те переходимо до 4).

Інакше перевіримо чи є такі $z_k, z_{k'} \in M_i$ що $z_k \subset \bigcup_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^{m'} Z_j, m' = |M_i|$.

Якщо "є", то $M_i := M_i \setminus \{z_k\}$, переходимо до мітки 3).

Інакше переходимо до мітки 4).

4) Якщо $i = 1$, то $K = \sum_{i=1}^2 |M_i|$; переходимо до мітки 1).

Якщо $(1 < i < |G^0|) \wedge \left(\sum_{i=1}^2 |M_i| > K \right)$, то $K := \sum_{i=1}^2 |M_i|$; переходимо до мітки 1). Кінець.

Видаємо K . Кінець роботи.

Теорема А. Алгоритм А коректний і має поліноміальну складність для До задовольняючої нерівності: $0 \leq K \leq 3$.

1.4. ІДЕНТИЧНІСТЬ НЕЦИЛІНДРИЧНИХ ГРАФІВ 3-МІНІМАЛЬНИМ ПЛОЩИННИМ ГРАФАМ

Розглянемо скінчений простий граф $G, G=(G^0, G^1)$, де G^0 - множина вершин, а G^1 - множина ребер, без кратних ребер та без петель та його 2-кліткове мінімальне вкладення у орієнтовний замкнутий 2-многовид Ω із ейлеровою характеристикою $\chi(\Omega)$, $\chi(\Omega) = 2 - 2\gamma$, де γ - рід графа G . Позначення та визначення ϕ -перетворення графів узяті із [1].

Основний результат по 3-мінімальним графам, а саме їх характеристика методом ϕ -перетворення графів, наведено в [3], список із 34-х 3-мінімальних графів приведено в [4]. В [2] досліджувалися циліндричні графи з точки зору їхньої зовнішньопланарності та було отримано повний список із 38-ми графів якими, як мінорами, охарактеризовані нециліндричні графи.

Позначення 1. Згідно [3] будемо розуміти під 3-мінімальним графом G такий площинний, що матиме наступні властивості: 1) щонайменше три 2-клітини на границях яких розташовані всі вершини графа G , 2) видалення довільного ребра чи стискання в точку цього ребра призводить до порушення властивості 1).

Позначення 2. Згідно [2] будемо розуміти під нециліндричним графом такий площинний граф НСГ, що матиме більше двох 2-клітин на границях яких розташовані всі вершини графа НСГ, причому видалення довільного ребра графа НСГ чи стискання в точку цього ребра призводить до розміщення всіх вершини графа на границях двох 2-клітин.

Розглянемо питання ідентичності нециліндричних та 3-мінімальних площинних графів та порівняємо графи із наведених списків на рис. 1 та рис. 2 із списком [2] та модифікований алгоритм побудови всіх 3-мінімальних площинних графів. Історія проблеми. В [5] присутній короткий огляд робіт по цій задачі та подібним задачам відшукування списків графів котрі б відігравали роль заборонених (із точністю до гомеоморфізму) підграфів для вхідних графів, яких перевіряють на наявність властивості аналогічної “зовнішньої площинності” для деяких поверхонь.

Результат щодо еквівалентності нециліндричних та 3-мінімальних площинних графів, теорема 1 про характеристику 3-мінімальних площинних графів та модифікований алгоритм побудови всіх 3-мінімальних площинних графів наведено в твердженні 1.

Твердження 1. Будемо використовувати порядкову нумерацію числами 1,2,3,...,34 графів на рис. 1 і рис. 2, а для графів із списку [2] збережемо нумерацію. Маємо наступні співвідношення для площинних графів:

- 0) Графи нециліндричні та 3-мінімальних еквівалентні між собою;
- 1) Всі графи із списку [4] є в списку [2];
- 2) Відсутніми в списку [4] є графи $\theta_6, \theta_7, K_5, K_{3,3}$.

Доведення. Доведення 0) співвідношення випливає із позначень 1 та 2.

Розглянемо питання модифікації алгоритма [1] побудови 3-мінімальних площинних графів в основі якого лежав неточний результат по характеристиці площинних графів із усіма суттєвими ребрами відносно числа досяжності множини вершин, що дорівнює 3, при операції видалення довільного ребра. Основна ідея полягатиме в тому, що такі графи матимуть не менше одного підграфа гомеоморфного графам $K_{2,3}, K_4$ та не більше трьох таких підграфів; потрібно визначити характер та можливі варіанти з'єднання їх між собою.

Теорема 1. Нехай G зв'язний площинний граф із наступною властивістю:

$(\forall u)(u \in G^1)(t_{G \setminus u}(G^0) = t_G(G^0) - 1 = 2)$. Тоді виконується одне із наступних тверджень:

1) $G = K_4'$, де K_4' - граф K_4 , у якого кожне ребро 1- підрозділене;

2) Існує φ -перетворення графа $\sum_{i=1}^2 G_i$ в граф G визначене наступним чином:

$\varphi(\sum_{i=1}^2 G_i, \sum_{j=1}^n (y_{1j} + y_{2j})) \rightarrow (G, \{y_j\}_{j=1}^n)$, та яке задовольняє наступним умовам:

а) $(\forall i, i=1,2)[(G_i \neq K_4') \wedge ((G_i \cong K_{2,3}) \vee (G_i \approx K_4))];$

б) $G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n) = C_{G_i}^{n-1}(y_{i1}, y_{in})$ - простий ланцюг довжини $n - 1$, графа G_i , де $y_{i1} \neq y_{in}$, $\{y_{ij}\}_{j=1}^n \subset G_i^0 \cup G_i^1$, $i=1,2$ (при $n=0$ простий ланцюг вироджується в точку y_{i1});

в) $G(\{y_i\}_{j=1}^n)$ - простий ланцюг графа G довжини $n-1$ (при $n=0$ простий ланцюг вироджується в точку y_1);

3) Існує φ -перетворення графа $G_0 + G_3$ в G задане наступним чином:

$$\varphi(G_0 + G_3, \sum_{j=1}^n (Z_{0j} + Z_{3j})) \rightarrow (G, \{Z_j\}_{j=1}^n) \text{ та яке задовольняє наступним умовам:}$$

а) G_0 – φ -образ графа $\sum_{i=1}^2 G_i$, вписаний як у твердженні 2) цієї теореми;

б) $G_3 \approx K_{2,3}$; $G_0(\{Z_{0j}\}_{j=1}^n)$ - цикл довжини n (можливо із діагоналями), графа G_0 (можливо, це границя зовнішньої грані графа) $f(G_0)$, де $f|G_0: G_0 \rightarrow \sigma \in$ вкладенням, що реалізує $t_{G_0}(G_0^0)$, $\{Z_j\}_{j=1}^n \subset G_0^0 \cup G_0^1$;

в) $G_3(\{Z_{3j}\}_{j=1}^n)$ - простий цикл графа G_3 , можливо із діагоналями.

4) Існує φ -перетворення графа $\sum_{i=1}^2 G_i$ в граф G визначене наступним чином:

$$\varphi(\sum_{i=1}^2 G_i, \sum_{j=1}^n (y_{1j} + y_{2j}) + (y_{\bullet 1j} + y_{\bullet 2j})) \rightarrow (G, \{y_j\}_{j=1}^n \cup \{y_{\bullet}\}), \text{ та яке задовольняє}$$

наступним умовам: а) $(\forall i, i=1,2)[(G_i \neq K_4^1) \wedge ((G_i \cong K_{2,3}) \vee (G_i \approx K_4))]$;

б) $G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n) = C_{G_i}^{n-1}(y_{i1}, y_{in}) + y_{\bullet i1}$ - простий ланцюг довжини $n-1$ графа G_i

об'єднаний із ізольованою точкою $y_{\bullet i1}$ графа G_i , яка не належить до підграфа

$G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n) = C_{G_i}^{n-1}(y_{i1}, y_{in})$, де $y_{i1} \neq y_{in}$, $\{y_{ij}\}_{j=1}^n \subset G_i^0 \cup G_i^1$, $i=1,2$ (при $n=0$ простий

ланцюг вироджується в точку y_{i1} , причому $y_{\bullet i1} = y_{i1}$);

в) $G(\{y_j\}_{j=1}^n)$ - простий ланцюг графа G довжини $n-1$ об'єднаний із ізольованою

точкою y_{\bullet} , що не належить до підграфа $\varphi(G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n))$ (при $n=0$ простий ланцюг вироджується в точку y_1);

Доведення. Нехай G -зв'язний площинний граф із з усіма суттєвими ребрами відносно числа досяжності множини вершин, що дорівнює 3, при операції видалення довільного

ребра і задано вкладення $f, f: G \rightarrow \sigma$, яке реалізує $t_G(G^0), t_G(G^0) = t = 3$,

$S_G(G^0) = \{s_i\}_{i=1}^3$ -множина 2-клітин на границі яких виходять всі вершини графа G .

Будемо позначати через $M(G)$ множину усіх різних підграфів H графа G , побудованих для кожної пари (s_i, s_j) , де $i \neq j$, 2-клітин з множини $S_G(G^0)$ як найменша по включенню частина H_{ij} графа G , яка задовольняє співвідношенню(*):

$$\left[(G^0 \cap ds_i \subset H_{ij}^0) \wedge (H_{ij}^0 \cap (ds_j - ds_i) \neq \emptyset) \right] \vee \left[(G^0 \cap ds_j \subset H_{ij}^0) \wedge (H_{ij}^0 \cap (ds_i - ds_j) \neq \emptyset) \right] \wedge (H_{ij} \cong K_4) \vee (H_{ij} \cong K_{2,3}).$$

Через $M'(G)$ - найменше по включенню підмножина множини $M(G)$, що складається із найменших по включенню підграфів H_{ij} графа G , або частин цих підграфів, що задовольняють наступним умовам: а) $G^0 \subseteq \bigcup_{\forall H' \in M(G)} (H')^0$; б) Якщо підграф H_{ij} (або його частина) гомеоморфні графові K_4 у якого, або усі ребра графа 1-підрозділені, або жодне ребро графа K_4 не 1-підрозділено. Надалі, якщо не зроблені застереження, будемо вважати що, відносно елементів множини M' термін «підграф» графа G , не виключає того, що цей елемент може бути частиною графа G . Наприклад, розглянемо наступне вкладення графа G в площину σ : (рис. 1)

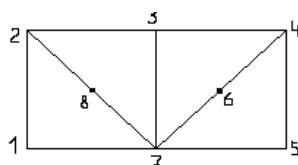


Рис 3. Приклад графа для побудови множини M .

та виділимо дві множини $S_i = \{s_{ij}\}_{j=1}^3, i=1,2$, а саме

а) $ds_{11} = \{1,2,7,8\}, ds_{12} = \{2,3,7,8\}, ds_{13} = \{4,5,6,7\};$

б) $ds_{21} = \{1,2,7,8\}, ds_{22} = \{1,2,3,4,5,6,7\}, ds_{23} = ds_{13}.$

Для кожного з них побудуємо множину $M_i, M_i = M(G)$:

$H_{12}^0 = \{1,2,3,7,8\}, H_{21} = \{1,2,7,8\}, H_{23}^0 = H_{32}^0; (H_{13}^0)' = \{1,2,6,7,8\}, (H_{13}^0)'' = \{1,2,4,7,8\},$

$(H_{13}^0)''' = \{1,2,5,7,8\}, H_{13}^0 \in \{(H_{13}^0)', (H_{13}^0)'', (H_{13}^0)'''\}, H_{32}^0 = \{3,4,5,6,7\}, H_{31}^0 = \{1,4,5,6,7\},$

$M(G) = \{H_{12}, H_{13}', H_{13}'', H_{13}''', H_{21}, H_{31}, H_{32}\}; H_{12}^0 = \{1,2,7,8,3\}, H_{13}^0 = \{1,2,8,7,6,4,3\}, H_{21}^0 = H_{12}^0,$

$H_{23}^0 = \{1,2,3,4,5,7,6\}, H_{32}^0 = \{4,5,6,7,3\}, M(G) = \{H_{12}, H_{13}, H_{23}, H_{32}\}.$

Неважко переконатися в тім, що приведені вище множини а) і б) вичерпують усі неізоморфні множини $S_G(G^0)$, тобто в результаті $M'(G) = \{H_{12}, H_{32}\}.$

Доведемо твердження 1). Так як граф K_4' є графом K_4 із всіма 1-підрозділеними ребрами та матиме властивість: $(\forall u)(u \in (K_4')^1)[(t_{K_4' \setminus u}((K_4')^0) = 2) \wedge (t_{K_4'}((K_4')^0) = 3)],$

то матимемо включення: $K_4' \subset G$. З іншого боку, якщо $K_4' \subset G$, то знайдеться ребро u , $u \in G \setminus K_4'$. Твердження 1 доведено.

Нехай граф G неізоморфний графу K_4' . Наступні два випадки є можливими: м) $|M| = m$, де $m = 2,3$. Нехай має місце випадок 2). Припустимо, що має місце рівність

$M = \{H_i\}_{i=1}^2$. В силу площинності графа G маємо три варіанти φ -перетворення (склеювання) двох графів з множини M визначених одним із трьох варіантів: 1) по двом простим ланцюгам, 2) по двом різним парам простих ланцюгів, 3) по двом простим циклам.

Перший варіант назвемо лінійним по простому ланцюгові, другий нелінійним- по двом простим ланцюгам, третій по-простому циклу.

Доведемо твердження 2). Маємо наступні два варіанти φ -перетворення (склеювання) двох підграфів з множини M :

1) по двом простим ланцюгам, 2) по двом різним парам простих ланцюгів.

Тобто матимемо наступне співвідношення: $G[\bigcap_{i=1}^2 H_i] = \sum_{j=1}^n C_G^{n_j}(a_j, b_j)$ (б1),

де $n \geq 0$, $n_j \geq 0$ (можливо, що $n_j = 0$, тоді простий ланцюг вироджується в точку a_j).

Оскільки $G \neq K_4$, то із співвідношення б1) слідує існування φ -перетворення графа $\sum_{i=1}^2 H_i$

в граф G , заданого наступним чином:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^2 H_i, \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n_i+1} C_{1ij} + C_{2ij}\right)\right) \rightarrow (G, \{\{a_{ij}^*\}_{j=1}^{n_i}\}_{i=1}^n), \quad (A)$$

де $C_{H_k}^{n_i}(a_{k1}, a_{k(n_i+1)})$ - простий ланцюг підграфа H_k довжини n_i з кінцевими

вершинами $a_{ki1}, a_{ki(n_i+1)}$, де $i = 1(1)n$, $k = 1, 2$. Відзначимо, що множина $\{a_{kij}\}_{j=1}^{n_i+1}$

складається із вершин графа H_k та із внутрішніх точок его ребер, $\{a_{ij}^*\}_{j=1}^{n_i+1}$ - множина

вершин простого ланцюга $C_G^{n_i}(a_{i1}^*, a_{i(n_i+1)}^*)$ графа G із кінцевими вершинами a_{i1}^* ,

$a_{i(n_i+1)}^*$, такими що $\varphi(a_{1ij} + a_{2ij}) = a_{ij}^*$, $j = 1(1)n_i$, $i = 1(1)n$.

Для $n = 1$ має місце варіант 1) і твердження 2) в цьому випадку доведене.

Для $n = 2$ маємо варіант 2). Доведемо, праву частину наступною подвійної нерівності

$$0 \leq p_1(L(\sum_{i=1}^2 H_i, G)) \leq 1, \text{ бо ліва частина є тривіальною. Для цього використаємо метод}$$

доведення від зворотнього. Припустимо, що для графа L φ -перетворення графа $\sum_{i=1}^2 H_i$ в

граф G , заданого в (A), де $L = L(\sum_{i=1}^2 H_i, G)$, виконується нерівність: $p_1(L) > 1$. Тоді

граф L матиме, принаймні, два простих цикли, кожен з яких означатиме виконання

заданих в твердженні 2) φ -перетворень на точках щонайменше трьох різних пар простих ланцюгів без спільних точок, перші елементи кожної пари належатимуть простому циклу z графа H_1 , а другі елементи кожної пари належатимуть простому циклу z' графа H_2 .

В результаті в 2-клітці s , де $s \in (\sigma \setminus f|_G(H_1)) \setminus \{s_1\}$, з границею z буде вкладено граф $f|_G(H_2)$ де вкладення $f, f: G \rightarrow \sigma$, реалізує $t_G(G^0)$, та утворено, принаймні, три нових 2-клітки з границями- простими циклами $z_i, i = 1(1)3$, які не можуть всі разом бути границями двох 2-кліток s_j , де $S_G(G^0) = \{s_j\}_{j=1}^3, j = 2,3$.

Це означатиме що, принаймні одне ребро графа G , яке належить одному з циклів z_i не належатиме перетину двох 2-кліток s_j, s_i , які належать до множини $S_G(G^0)$, тобто будуть несуттевими відносно $t_G(G^0)$ при операції його видалення. Тим самим матимемо суперечність умові 3-мінімальності графа G . Оскільки наше припущення є невірним, то маємо нерівність $p_1(L) \leq 1$, що й доводить подвійну нерівність. Оскільки в твердженні 2) маємо перетворення на одній парі простих ланцюгів, то доведення закінчено.

Доведемо твердження 3). Покладемо, що $M = \{H_i\}_{i=1}^3$. Для φ -перетворення графа $\sum_{i=1}^3 H_i$ в граф G можливі тільки наступні два типи:

а) φ -перетворення типу (А), задане так само, як і φ -перетворення графа $\sum_{i=1}^3 H_i$ в граф G , тобто на ребрах (або частинах ребер) графів $H_i, i = 1(1)3$, має ту властивість, що φ -образ графа $\sum_{i=1}^2 H_i$ має принаймні одне ребро несуттевим відносно $t_G(G^0)$. Причому

ця властивість буде незалежно від того, має чи ні граф $L(\sum_{i=1}^3 H_i, G)$ цикли;

б). φ -перетворення не типу (А) графа $\sum_{i=1}^3 H_i$ в граф G , т.т.о задане так, що деякі φ -образи графів H_i мають спільні прості цикли. Кожна пара φ -образів цих графів H_i, H_j множини $M'(G)$ може мати не більше одного спільного простого цикла. Тоді мають місце наступні твердження, зформульовані з точністю до перенумерації елементів множини $M'(G)$:

1) Існують елементи $\varphi(H_i), i = 1,2$ множини $M'(G)$ із спільним циклом та гомеоморфні графу $K_{2,3}$, які не мають спільних простих циклів з елементом $\varphi(H_3)$;

2) Елементи $\varphi(H_i), i = 1, 2$, не мають спільних простих циклов, а елемент $\varphi(H_3)$, гомеоморфний $K_{2,3}$ має спільний простий цикл з елементом $\varphi(\bigcup_{i=1}^2 H_i)$. Твердження 3) доведено.

Доведемо твердження 4). Доведення впливатиме як частинний випадок із наведеного вище доведення твердження 2) та відрізнятиметься в тій частині, що стосується необхідної умови виродженості в точку простих ланцюгів другої пари. Доведення теореми закінчено.

Алгоритм для побудови всіх 3-мінмальних площинних графів спирається на теорему 1 та матиме наступний вигляд:

Вхідні дані: Множина L_1 усіх неізоморфних ланцюгів графів для кожного з графів $K_4, K_{2,3}$, впорядкована за їхньою довжиною та із позначкою для якої саме пари графів узятий ланцюг;

Вихідні дані: множина всіх 3-мінімальних графів G ;

1. Будуємо множину L_2 із всіх різних пар ланцюгів множини L_1 та множину L_3 з усіх різних двох пар ланцюгів із L_1 , а також множину L_4 складену із різних пар тих елементів множини L_1 , які породжують в графах K_4 чи $K_{2,3}$ прості цикли без діагоналей ;

2. Доки множина L_1 не пуста виконувати наступні дії:

2.0. Беремо елемент x із L_1 , заносимо елемент x до списку V_1 ;

2.1. $L_1 := L_1 \setminus x$; 2.2. Доки множина $L_1 \setminus V_1$ не пуста виконувати наступні дії:

2.2.1. Беремо елемент u із $L_1 \setminus (V_1 + V_2)$, заносимо елемент u до списку V_2 ;

2.2.2. Виконуємо ототожнення пар вершин чи точок пар графів (K_4, K_4) , чи $(K_4, K_{2,3})$, чи $(K_{2,3}, K_4)$, чи $(K_{2,3}, K_{2,3})$, зазначених як вершини чи точки ланцюгів пари (x, u) , по всім типам можливих перетворень вибраної пари графів та отримаємо граф G ;

2.2.3. Визначимо число досяжності t множини всіх вершин графа G як мінімальне число простих циклів що покривають множину всіх вершин графа G .

2.2.4 Якщо $t=3$, то виконати: для кожного ребра e графа G виконаємо в циклі операцію стягування в точку та для отриманого графа G_e , де $G := G_e$, виконуємо процедуру 2.2.3; Якщо $t=3$ то виконати кінець цикла по ребрам графа G , інакше виводимо граф G ; інакше кінець цикла по ребрам; інакше кінець внутрішнього циклу;

2.3. Кінець внутрішнього циклу; 3. Кінець зовнішнього циклу;

4. Доки множина L_2 не пуста виконувати наступні дії:

4.0. Беремо елемент x із L_2 , заносимо елемент x до списку V_3 ;

4.1. $L_2 := L_2 \setminus x$; 4.2. Доки множина $L_2 \setminus V_2$ не пуста виконувати наступні дії:

4.2.1. Беремо елемент u із $L_2 \setminus (V_3 + V_4)$, заносимо елемент u до списку V_4 ;

4.2.2. Виконуємо ототожнення пар вершин чи точок пар графів (K_4, K_4) , чи $(K_4, K_{2,3})$, чи $(K_{2,3}, K_4)$, чи $(K_{2,3}, K_{2,3})$, зазначених як вершини чи точки двох різних пар

ланцюгів x та u , здійснені по всім типам можливих ϕ -перетворень для обраної пари графів та отримаємо граф G ;

4.2.3. Визначимо число досяжності t множини всіх вершин графа G як мінімальне число простих циклів які покривають множину всіх вершин графа G ;

4.2.4. Якщо $t=3$, то виконати: для кожного ребра e графа G виконаємо операцію стягування в точку a та для отриманого графа G_e , де $G:=G_e$, виконуємо процедуру 4.2.3
Якщо $t=3$, то виконати кінець циклу по ребрам графа G , інакше виводимо граф G ;
інакше кінець циклу по ребрам;

4.3. Кінець внутрішнього циклу; 5. Кінець зовнішнього циклу;

6. Доки множина L_4 не пуста виконувати наступні дії:

6.0. Беремо елемент z із L_4 , заносимо елемент x до списку V_4 ;

6.1. $L_4:=L_4 \setminus z$; 6.2. Доки множина $L_4 \setminus V_4$ не пуста виконувати наступні дії:

6.2.1. Беремо елемент u із $L_2 \setminus (V_5 + V_4)$, заносимо елемент u до списку V_5 ;

6.2.2. Виконуємо ототожнення пар вершин чи точок пар графів (K_4, K_4) , чи $(K_4, K_{2,3})$, чи $(K_{2,3}, K_4)$, чи $(K_{2,3}, K_{2,3})$, зазначених як вершини різних пар циклів, здійснені по всім можливим ϕ -перетворень для обраної пари графів та отримаємо граф G ;

6.2.3. Визначимо мінімальне число t простих циклів які покривають множину всіх вершин графа G ; 6.2.4. Якщо $t=3$, то виконати: Для кожного ребра e графа G виконаємо операцію стягування в точку a та для отриманого графа G_e , де $G:=G_e$, виконуємо процедуру 6.2.3; Якщо $t=3$, то виконати кінець циклу по ребрам графа G , інакше виводимо граф G ; інакше кінець циклу по ребрам;

6.3. Кінець внутрішнього циклу; 7. Кінець зовнішнього циклу;

8. Кінець роботи алгоритму.

Твердження 2. Алгоритм побудови всіх 3-мінмальних площинних графів є коректними та має поліноміальну складність.

Література

1. Хоменко М.П. ϕ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ 1971, 384 с., Е-ресурс <http://www.kntu.kr.ua/mnsp/books>.
2. D. Archdeacon, C.P. Bonnington, N. Dean, N.Hartsfield. Obstructions Sets for Outer-Cylindrical Graphs. Е-ресурс 2000, 29pp.
3. Petrenjuk V. Characterization of the 3-minimal Planar Graph. Collection of the proceedings of a seminar of discrete mathematics\ and applications. Moscow, MGU 1993 p.217
4. Petrenjuk V. List of 3-minimal Planar Graphs. preprint DNTB 31.10.86 #2450-86. 7p.
5. Dan Archdeacon. Topological graph theory: A survey. Congressus Numerantium. A Conference Journal on Numerical Themes, 115:5–54, 1996. Surveys in graph theory (San Francisco, CA, 1995), Е-ресурс.

РОЗДІЛ 2. ГРАФИ ОРІЄНТОВАНОГО РОДУ

2.1. НОВА ВЕРХНЯ МЕЖА ОРІЄНТОВАНОГО РОДУ ПРОСТОГО ГРАФА.

Задача полягатиме в уточненні верхньої межі орієнтованого роду простого графа G орієнтованого роду $\gamma(G)$ як φ -образу двох не вироджених графів G_i орієнтованого роду $\gamma(G_i)$ при ототоженні пар точок (x_{1j}, x_{2j}) із множин точок приєднання $X_i, j=1,2,\dots, |X_i|$, де під точкою розумітимемо, або вершину, або довільну точку ребра графа G .

Для множин точок приєднання X_i із заданим числом досяжності $t_i, t_i \geq 1$, яке дорівнює найменшій кількості кліток-граней на границях яких розміщуються всі точки множини X_i , та використовуються як відомі характеристики $\theta(X_i), \partial\theta(X_i)$, так і визначаються дві нові: 1) багатосторонність чи $st(X_{ij}, G_i)$ - доступ до точок з X_{ij} розташованих на границях кліток-граней поверхні орієнтовної роду $\gamma(G_i)$; 2) $k4(X_{1j}, X_{2j})$ - кількість всіх різних частинних графів гомеоморфних K_4 чи $K_{2,3}$ породжених ототоженням пар точок (x_{1j}, x_{2j}) з множин точок

$X_{ij}, j=1,2,\dots, |X_{ij}|, m = \sum_{j=1}^{t_i} |X_{ij}|, i=1,2$. **Основний результат** - теорема 1: Якщо задано φ -перетворення зв'язних графів G_1 та $St_m(G_2)$ орієнтованого роду $\gamma(G_i)$ наступним чином:

$\varphi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ - квазізірка з центром G_2 та

кількома ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини X_2, X_1 множина точок графа $G_i, X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, матиме число досяжності та характеристики $t_i, \theta_i, \partial\theta_i, to$

$$\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i) + k4 - st, \text{ де } k4 \geq st \geq 0, st = \sum_{j=1}^{t_1} st(X_{1j}, G_1),$$

$$k4 = \sum_{j=1}^{t_1} k4(X_{1j}, X_{2j}), k4 - st - \text{число додаткових 2-ручок приклеєних до клітки } s \text{ з множини}$$

$\sigma_{r_1} \setminus f(G_1)$ при мінімальному вкладенні $f: G_1 \rightarrow \sigma_{r_1}, r_1 = \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i)$, із st - стороннім доступом до тих точок приєднання на границі ∂s клітки s (до якої приклеєно r_2 штук 2-ручок і вкладено граф G_2), що при ототоженні пар точок приєднання (x_{1j}, x_{2j}) породжують $k4$ різних підграфів гомеоморфних графу K_4 , чи графу $K_{2,3}$.

Основні поняття та позначення узяті із [1],[2]. В роботі [4] отримано наступний результат для площинних графів G : якщо граф \mathfrak{Z} - φ -образ графа G та простої зірки $St_m(a_0)$ з центром a_0 та m висячими ребрами з кінцевими вершинами a_i , що попарно ототожнюються з точками множини X з числом досяжності $t, t = 3$, то $\gamma(\mathfrak{Z}) \leq \gamma(G) + t - \theta - 1$, де $\gamma(G) = 0, \theta = \theta_G(X), \theta \in \{0,1\}$, θ - описує деякі структурні властивості множини точок X , що розташована на границях кліток граней графа G .
Задача: 1) узагальнення цього результату [4] для не площинних неорієнтованих графів G та квазізірки з центром-графом без кратних ребер та дуг, що містять множину точок X із числом досяжності $t, t > 0$; 2) узагальнення θ і $\partial\theta$ - характеристик множини X наведених нижче та проілюстрованих на рис. 1 для орієнтованого роду та на рис.2 для неорієнтованого роду. Нехай S - 2-многовид без країв.

Визначення 1. Нехай задане вкладення $f, f: G \rightarrow S$, графа G в S , яке реалізує t , $t_G(X)=t$, де $S_G(X)=S \setminus f(G)$, $S_G(X)=\{s_i\}_1^t$. Будемо говорити, що множина X матиме характеристику $\theta_G(X, f)$, $\theta_G(X, f) = \theta$, $\theta \geq 1$, якщо існує θ трійок кліток $\{s_i\}_1^3$ з множини $S_G(X)$, на границях яких множина X розміщується довільним чином, та кожна з яких задовольняє співвідношенню $G^0 \cap \partial s_i \cap \partial s_j \neq \emptyset$ для всіх $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$, причому $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\}$ і $G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\}$, $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$, та породжує найменший по включенню підграф G' графа G , можливо вироджений в точку, який містить точки $\{a_i\}_1^3$ попарного перетину границь кліток $\{s_i\}_1^3$. Множина X матиме характеристику $\theta_G(X)$, якщо $\theta_G(X) = \max \theta_G(X, f)$, де максимум береться по всім вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X)=t$.

Визначення 2. Нехай задане вкладення $f, f: G \rightarrow S$, графа G в S , яке реалізує t , $t_G(X)=t$, де $S_G(X)=\{s_i\}_1^t$, $S_G(X)=S \setminus f(G)$, та виконується рівність $\theta_G(X) = 0$. Будемо говорити, що множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta = \partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta \geq 1$, якщо існує підмножина $\{s_i, s_j, s_k\}$, множини $S_G(X)$, яка задовольняє співвідношенням $G^1 \cap \partial s_i \cap \partial s_j \supset \{(a_1, b_1)\}$ і $G^1 \cap \partial s_k \cap \partial s_j \supset \{(a_2, b_2)\}$, для всіх $i \neq j \neq k$, $i, j, k = 1, 2, 3$. На границях $\{\partial s_i, \partial s_j, \partial s_k\}$ множина X розміщується довільним чином, якщо не містить точок ребер (a_1, b_1) , (a_2, b_2) та особливим чином (без точок множини X на $\partial s_j \setminus L(a_1, a_2) \cup \{(a_2, a_{20}), (a_1, a_{10})\}$), якщо містить принаймні точку цих ребер. Також існуватимуть клітка s_0 та, можливо, клітка s_{00} . Клітка s_0 , $s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$, границя якої містить простий ланцюг $L(a_1, a_2)$ ненульової довжини із кінцевими вершинами a_1, a_2 спільно із ∂s_j і два простих ланцюги, можливо вироджених в точку, $L_1(a_1, a_{12})$, $L_1(a_2, a_{22})$ спільними з ∂s_i та ∂s_k , відповідно, та ребро (a_{12}, a_{22}) . Клітка s_{00} , $s_{00} \in (S \setminus f(G)) \setminus (S_G(X) \cup \{s_0\})$, має границю яка містить простий ланцюг $L(a_{10}, a_{20})$ ненульової довжини із кінцевими вершинами a_{10}, a_{20} спільно із ∂s_j . Множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X)$, якщо $\partial\theta_G(X) = \max \partial\theta_G(X, f)$, де максимум береться по всім вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X)=t$ та $\theta_G(X) = 0$.

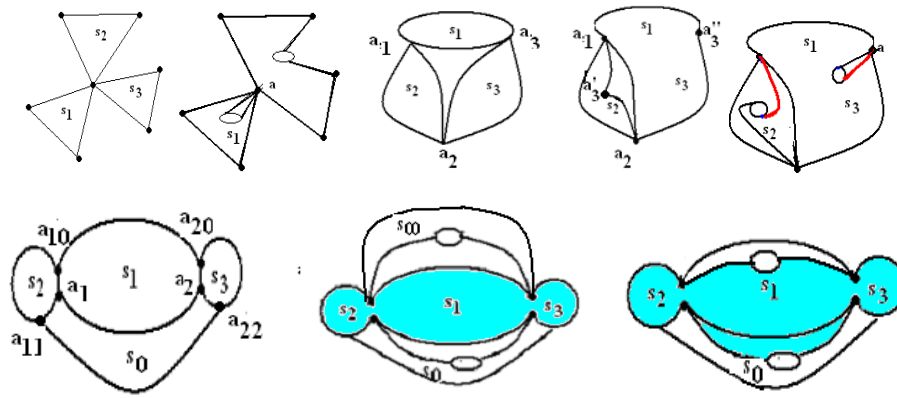


Рис. 1. На торі зіркову та трикутну кліткову структуру, що задовольняє визначенню 1, описуватиме $\theta = 1$ (перший ряд), другий ряд для ланцюжкової структури із $\partial\theta = 1$.

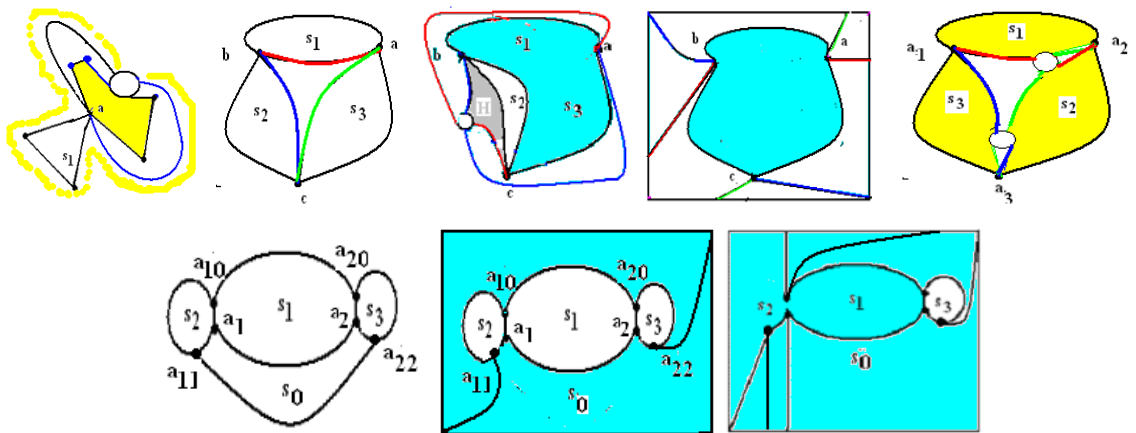


Рис. 2. На проєктивній площині зіркову структуру описуватиме $\theta = 1$ (перша карта верхнього ряду), на інших парах карт цього ряду показано, що трикутна кліткова структура, як узагальнена не зіркова структура, не задовольняє визначенню 1 навіть у випадку, коли три ребра (a_i, a_j) трикутника G' не входять до $L = \bigcup_{i=1}^3 \partial s_i$, а ланцюжкова кліткова структура задовольняє визначенню 2 тільки тоді, коли внутрішніми гранями будуть тільки клітки з $\{\partial s_i\}_{i=0}^3$, а на $\partial s_0 \in$ ребро, можливо 1-підрозділене, графа G , що не належить до L .

Твердження 1. Нехай на множині $S_G(X)$ задано відношення інцидентності наявності, принаймні однієї спільної точки на границях двох кліток. Мають місце наступні співвідношення:

1. Для S -орієнтованого роду визначення 1 виконуються в загальному випадку, а для визначення 2 є два варіанти: а) множина X не має точок на жодному із ребер, які є спільними для двох різних пар кліток включають другу клітку, б) множина X не має точок на тій частині границі другої клітки, що має спільні ребра з двома іншими, та не належить до кожної з них та до $\partial s_0 \cup \partial s_{00}$.

2. Для S -неорієнтованого роду визначення 1 не виконуються в загальному випадку, а саме виконуються тільки тоді, коли точки множини X відсутні на трьох ребрах

(a_i, a_j) трикутника G' , а ланцюжкова кліткова структура не задовольняє визначенню 2 в загальному випадку, але задовольняє тоді, коли клітка s_0 має на ∂s_0 тільки одне ребро графа G , що не належить до $\partial s_i \cap G^1$, $i = 1, 2, 3$.

$$3. \theta_G(X) + \partial\theta_G(X) \leq \left\lceil \frac{t_G(X) - 2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{t_G(X) - 2}{2} \right\rceil < t_G(X) - 2.$$

Доведення. Оскільки 2-многовид S - орієнтованого роду $\gamma(S)$, то являтиме собою тор із приклеєною $\gamma(S) - 1$ 2-ручкою. Твердження 1 впливає з того, що на торі перетворення зіркової та циклічної кліткових структуру описуватиме перший ряд рис. 1 (для $\theta = 1$), а другий ряд рис. 1 для перетворення на торі ланцюжкової структури із $\partial\theta = 1$. 2-многовид S - неорієнтованого роду $\gamma(S)$ являтиме собою проєктивну площину із приклеєними лентами Мебіуса у кількості $\gamma(S) - 1$. Твердження 2 впливає з того, що на проєктивній площині зіркову структуру $\theta = 1$ описуватимуть перші дві карти верхнього ряду рис.2, а на двох інших парах карт цього ряду показано, що циклічна кліткова структура задовольняє визначенню 1 тільки тоді, коли три ребра (a_i, a_j) трикутника G' не

входять до $\bigcup_{i=1}^3 \partial s_i$, т.то $\bigcup_{\forall i \neq j, i, j=1}^3 f(a_i, a_j) \cap (\bigcup_{i=1}^3 \partial s_i \cap X)$, а ланцюжкова кліткова структура

задовольняє визначенню 2 тільки тоді, коли внутрішніх граней графа G окрім кліток з множини $\{\partial s_i\}_{i=0}^3$ не буде, а на ∂s_0 є ребро графа, можливо 1-підрозділене, графа G , що

не належить до $\bigcup_{i=1}^3 \partial s_i$, коли клітка s має на ∂s тільки одне ребро графа G , яке не

належить до $\bigcup_{i=1}^3 \partial s_i$, та на спільних ребрах немає точок множини X . Доведення

співвідношень 1) та 2) закінчене. Доведення співвідношення 3), т. то обчислення формальної суми впливає із їхніх визначень.

Наслідок 1. Перетворення множини кліток-граней графа G , вкладеного до 2-многовида S , виконані за визначеннями 1 та 2, трансформують елементи з $S_G(X)$ не змінюючи сусідні з ними клітки; клітки оточення задіяні в деяких випадках.

Алгоритм_О.

Вхід. До 2-многовида S орієнтованого роду вкладено граф G мінімальним вкладенням f , $f : G \rightarrow S$, що реалізує $t_G(X) = t$ та $\theta_G(X) = \theta$. Занумеруємо перші три клітки з $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 1, як підмножину $\{s_i\}_1^3$, Вважатимемо заданими функції функція $\theta(M)$ та функція $\partial\theta(M)$, які визначають характеристики $\theta, \partial\theta$, відповідно, для

M - множини кліток, впорядкованої відношенням суміжності на множині границь кліток з M .

Крок 0. Якщо $\theta = 0$, то переходимо до кроку 3,

інакше, доки $\theta > 0$ виконувати циклічно наступні дії:

початок циклу 1;

Крок 1. Для $S_G(X)$ використання характеристики θ для орієнтованого роду означає

приклеювання нової 2-ручки h на заміну трьох клітин-граней $\{s_i\}_1^3$ із границями, що мають, принаймні, одну спільну вершину чи вони попарно мають спільні вершини, на нову

клітку-грань s поверхні на 1 більшого роду, що має границею $\partial s = \bigcup_1^3 \partial s_i$, $S := S + h$;

Крок 2. $S_G(X) := (S_G(X) \setminus \{s_i\}_1^3) \cup \{s\}$; $\theta =$ функція $_{-\theta}(S_G(X))$, $\theta := \theta - 1$;

перенумеруємо всі елементи нової множини $S_G(X)$ так, щоб перші три клітки з $S_G(X)$, для яких має місце визначення 1, мали номери 1,2,3;

кінець циклу 1;

Крок 3. $\partial\theta :=$ функція $_{-\partial\theta}(S_G(X))$, де $S_G(X)$ побудована циклом 1 множини кліток. Якщо

$\partial\theta > 0$, то перенумеруємо клітки з побудованої вищенаведеним циклом множини кліток

$S_G(X)$, що задовольняють визначенню 2, як $\{s_i\}_1^3$ та s_0 ;

Якщо $\partial\theta = 0$, то переходимо до кроку б,

інакше, доки $\partial\theta > 0$ виконувати наступні дії:

початок циклу 2;

Крок 4. Для $S_G(X)$ використання характеристики $\partial\theta$ для орієнтованого роду означає

приклеювання нової 2-ручки h на заміну трьох клітин-граней $\{s_i\}_1^3$ із границями, де s_2 одна з трьох має два спільні ребра з двома іншими, та четвертої клітки s_0 ,

$s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$ на нову клітку-грань s поверхні на 1 більшого роду, що має

границею $\partial s = \bigcup_1^3 \partial s_i \setminus R$, де множина R складена, або з двох попарно спільних ребер без

точок з множини X , або з тієї частини границі ∂s_2 , що не належить до границь

$\partial s_1 \cup \partial s_2 \cup \partial s_0$ та без точок з множини X ; $\gamma(S) := \gamma(S) + 1$.

Крок 5. $S_G(X) := (S_G(X) \setminus \{s_i\}_1^3) \cup \{s\}$; $\partial\theta =$ функція $_{-\partial\theta}(S_G(X))$ $\partial\theta := \partial\theta - 1$; Якщо $\partial\theta > 0$,

то перенумеруємо всі елементи нової множини $S_G(X)$ так, щоб три клітки $\{s_i\}_1^3$ та четверта s_0 , для яких має місце визначення 2, мали номери 1,2,3.

кінець циклу 2;

Крок 6. Виводимо $S_G(X)$ та "Множина X розташована на границях кліток-граней з множини $S_G(X)$, перетвореної до нульових характеристик $\theta, \partial\theta$, 2-многовида орієнтованого роду $\gamma(S)$ ", кінець алгоритму

Твердження 2. Алгоритм_О коректно перетворює 2-многовид S та вкладення $f: G \rightarrow S$ графа G в S , де $\gamma(G) = \gamma(S)$, в 2-многовид S' та вкладення $f': G \rightarrow S'$ графа G в S' , де $\gamma(S') > \gamma(S)$, шляхом використання характеристик $\theta, \partial\theta$, одна з яких має бути нульовою, множини точок X графа G та має поліноміальну часову складність.

Доведення. Алгоритм перетворення орієнтованого 2-многовида S із вкладеним графом G в орієнтований 2-многовид S' , де $\gamma(S') > \gamma(S)$, шляхом приклеювання нових 2-ручок до S спирається на використання характеристики θ множини точок X графа G . Вважатимемо, що ручка h приклеєна до кліток $s', s'' \in S(G, f)$ і позначати її через $h(s', s'')$, якщо задано φ -перетворення φ' в такий спосіб: $\varphi'((s' \cup s'') \setminus (\tau' + \tau''), \partial\tau' + \partial\tau'') = (h, \tau^*)$, де τ', τ'' - такі регулярні двоклітки, що задовольняють $\tau' \subset s', \tau'' \subset s'', \partial\tau' \cap \partial\Delta s' = \partial\tau'' \cap \Delta s'' = \emptyset$.

Вважатимемо заданими функцію $\theta(M)$ та функцію $\partial\theta(M)$, які визначають характеристики $\theta, \partial\theta$, відповідно, на множини кліток M , що впорядкована відношенням суміжності заданим на множині границь кліток з M , т. то якщо границі двох кліток мають принаймні спільну точку, то ці клітки суміжні.

Нехай до 2-многовиду S орієнтованого роду $\gamma(G)$ вкладено граф G вкладенням f , $f: G \rightarrow S$, що реалізує $t_G(X) = t$ та $\theta_G(X) = \theta$. Занумеруємо перші три клітки з $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 1, як підмножину $\{s_i\}_1^3$ та позначимо через G' найменший по включенню підграф графа G , можливо вироджений в точку, який містить точки $\{a_i\}_1^3$ попарного перетину границь кліток $\{s_i\}_1^3$, причому $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\}$, і $G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\}$, $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$. Розглянемо плаский диск d з центром в a_1 та нескінченно малим радіусом ε , який своєю границею перетинатиме ребра підграфа G' , що інцидентні вершині a_1 , у внутрішніх точках a_{1j} , де $j = 1, 2, \dots, k$. Розщепимо кожну вершину a_{1j} на a'_{1j}, a''_{1j} , де $j = 1, 2, \dots, k$ степеня 2. Цим розіб'ємо підграф G' на частинні - підграфи G'_i , $i = 1, 2$, де G'_1 містить a'_{1j} та всі ребра (a_1, a'_{1j}) , G'_2 містить a''_{1j} .

Відображенням ϕ перевернемо на 180^0 підграф $f(G_1')$ як множину образів ребер на поверхні, симетрично навколо вісі симетрії, яка є простим ланцюгом $L(a_2, a_3)$, що проходить через точки a_2, a_3 та задовольняє умові: $f(G_2') \cap \partial s_3 = f(G') \cap \partial s_3 = L(a_2, a_3)$. В результаті отримаємо підграф $\phi f(G_2')$ вкладений до $\overline{s_3}$, де $\overline{s_3} = s_3 \cup \partial s_3$. Відображенням ϕ' вигнемо за часовою стрілкою на 180 всі висячі ребра інцидентні a_{2j}' , де $j = 1, 2, \dots, k$, не змінюючи порядок слідування, і розмістимо їхні висячі вершини на лівій частині границі регулярної підклітки τ' , де $\tau' \subset \overline{s_3} \setminus \phi f(G_2')$. В підграфі $f(G_2')$ вкладеному до $\overline{s_1} \cup \overline{s_2}$, де $\overline{s_3} = s_3 \cup \partial s_3$, відображенням ϕ'' поміняємо місцями ребра в парах виду (a_{1j}', a_1) , $(a_{1(k-j+1)}', a_1)$ для всіх $j, j = 1, 2, \dots, k$, та за часовою стрілкою розмістимо на правій частині границі регулярної підклітки τ' , де $\tau'' \subset (\overline{s_1} \cup \overline{s_2}) \setminus f(G_1')$. Ототожнимо, за часовою стрілкою, пари вершин (a_{1j}', a_{2j}') у внутрішню точку a_j' деякого j -го ребра (a_{1j}', a_j', a_{2j}') , для всіх $j, j = 1, 2, \dots, k$. Приклеєна ручка h до кліток $s' = \overline{s_3}, s'' = \overline{s_1} \cup \overline{s_2}, s', s'' \in S(G, f')$, позначена через $h(s', s'')$, матиме вкладені відображенням ϕ''' зклеєні половинки ребра $\phi'' \phi' \phi f((a_{1j}', a_j', a_{2j}'))$, які розрізають її на клітки, де $j = 1, 2, \dots, k$. В результаті суперпозиції $\phi''' \phi'' \phi' \phi f$ наведених вище відображень отримаємо вкладення $f', f': G \rightarrow S'$, $f' = \phi''' \phi'' \phi' \phi f$, графа G до 2-многовиду S' орієнтованого роду $\gamma(G) + 1$, причому $S'(G, f') = (S(G, f) \setminus \{s_1, s_2, s_3\}) \cup h(s', s'') \setminus \sum_{j=1}^k f'(a_{1j}', a_j', a_{2j}')$, т.то тіж самі клітки, тільки замість s_1, s_2, s_3 буде клітка $s, s \in h(s', s'') \setminus \sum_{j=1}^k f'(a_{1j}', a_j', a_{2j}')$, така, що $\partial s = \bigcup_{i=1}^3 \partial s_i$. Крім цього множина $f'(X)$ на S' буде розміщуватися на границях $t_G(X) - 2$ та матиме характеристику $\theta_G(X) - 1$. Тим самим виконані всі дії однієї ітерації циклу 1 алгоритма О.

Нехай до 2-многовиду S орієнтованого роду $\gamma(G)$ вкладено граф G вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, що реалізує $t_G(X) = t, \theta_G(X) = 0$ та $\partial \theta_G(X) = \partial \theta, \partial \theta > 0$. Перші три з чотирьох кліток з множини $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 2, утворюють підмножину $\{s_i\}_1^3$, а четверта s_0 . Для $S_G(X)$ використання характеристики $\partial \theta$ для орієнтованого роду означає приклеювання нової 2-ручки $h, h = h(s_1, s_0)$ чи $h = h(s_1, s_{00})$, на заміну чотирьох

кліток-граней $\{s_i\}_1^3$, s_0 , де s_1 одна з трьох має два спільні ребра e_i з s_3, s_2 та клітки s_0 , $s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$, на нову клітку-грань s з границею $\partial s = \bigcup_1^3 \partial s_i \setminus R$, де множина R матиме два наступні варіанти складання: 1) якщо $h = h(s_1, s_0)$, то R є тією частиною границі ∂s_1 , що не належить до границь ∂s_0 та без точок з множини $X \setminus \{\partial e_1 \cup \partial e_2\}$; 2) якщо $h = h(s_{00}, s_0)$ (за умови існування такої клітки s_{00} , що множина точок $(\partial s_{00} \cap \partial s_1) \cup (\partial s_0 \cap \partial s_1)$ містить кінцеві вершини обох ребер e_i), то $R = e_1 \cup e_2$ і ребра e_i не містять точок з множини $X \setminus \{\partial e_1 \cup \partial e_2\}$, де $e_1 \in \partial s_2 \cap \partial s_1$, $e_2 \in \partial s_1 \cap \partial s_3$. В кожному з цих випадків на приклеєній 2-ручці розміщуються ребра e_i за допомогою вкладення f' , $f': G \rightarrow S'$, $f'|G \setminus \{e_2, e_2\} = f|G \setminus \{e_2, e_2\}$, графа G до 2-многовиду S' орієнтованого роду $\gamma(G) + 1$, причому множина $S'(G, f')$ для варіанту 2) матиме вид

$$(S(G, f) \setminus \{\bigcup_{i=0}^3 s_i \cup s_{00}\}) \cup (h(s_{00}, s_0) \setminus \sum_{j=1}^k f'(e_1, e_2)), \text{ для варіанту 1) } \in (S(G, f) \setminus \{\bigcup_{i=0}^3 s_i\}) \cup (h(s_1, s_0) \setminus \sum_{j=1}^k f'(e_1, e_2)).$$

Тим самим всі дії однієї ітерації циклу 2 алгоритму_0 виконані. Кількість ітерацій в обох циклах дорівнюватиме $\theta_G(X) + \partial\theta_G(X)$. Оскільки $\theta_G(X) + \partial\theta_G(X) < t_G(X) - 2$ і $t_G(X)$ не перевищує числа кліток – граней графа G орієнтованого роду, вкладеного до 2-многовиду S роду $\gamma(G)$, то алгоритм рекурсивно перетворюватиме множину кліток до поки не отримаємо перетворену множину кліток-граней із нульовими характеристиками $\theta, \partial\theta$.

Число ітерацій обох циклів не перевищуватиме $2(2 - 2\gamma(G) - |G^0| + |G^1|)$, тобто матиме поліноміальну часову складність. Твердження 2 доведено.

Зауважимо, що використання $\partial\theta$ можливе тільки після використання характеристики θ для орієнтованого роду і є перетворенням трьох клітин-граней, дві пари з яких мають два спільні ребра, шляхом приклеювання до них нової 2-ручки, на нову клітку-грань поверхні більшого роду, що має границею об'єднання границь цих трьох кліток без двох спільних ребер (чи додаткових лент Мебіуса до неорієнтованої S).

Визначення 3. Позначимо через $krt_G(M)$, $kr = krt_G(M)$, kr - кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G , як найбільшу кількість варіантів вибору різних підмножини $S_G(M, S_\gamma)$ множини клітин $S_\gamma \setminus f(G)$ на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M , узята по всіх мінімальних вкладеннях f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ . Іншими словами, це найбільша кількість зірок які

приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr 2-кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Визначення 4. Позначимо через $ms_G(M, s, f)$, $k = ms_G(M, s, f)$, k - сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітки s , $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f - задане мінімальне вкладення $f: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M . Найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх клітин s заданого мінімального вкладення f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $ms_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G які приєднані кінцевими вершинами до кожного із принаймні трьох елементів множини M та вкладені до однієї клітки із множини $S_\gamma \setminus f(G)$ заданого мінімального вкладення f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ .

Визначення 5. Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), \dots, ms_G(M, f_N))$ вектором l -стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, $l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0$, $|M| > 2$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ -множина всіх неізоморфних мінімальних вкладень f_k , $f_k: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел $ms_G(M, f_k)$ узяті по всім s та всім f_k , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, називатимемо характеристикою l -стороннього доступу до множини M точок графа G .

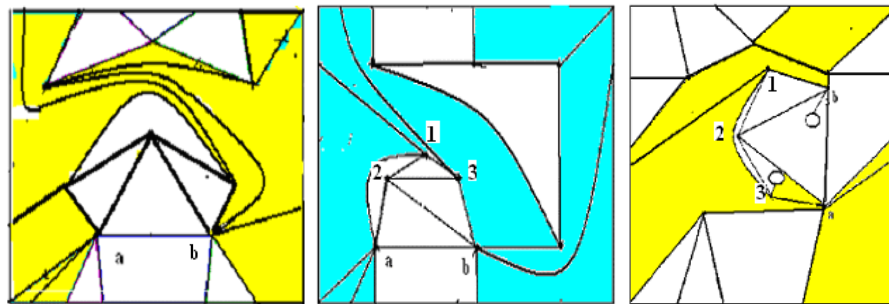


Рис. 3. Роль st , $st = st(\{a, b\}) = 1$, як параметра двостороннього доступу видно на перших двох картах, де пару ребер із двох графів K_5 склеєно по вершинам в ребро e , $e = (a, b)$, та наведено вкладення склеєного графа в тор, теж саме для пари ребер із графів $K_5, K_{3,3}$; на третій карті два графи K_5 склеєні по ребру $e = (a, b)$ та частині ребра u , відповідно, де кольоровою є клітка утворена вкладенням в тор графа K_5 , до якої вкладено інший K_5 та виконано склейку.

Теорема 1. Якщо задано наступне ϕ -перетворення зв'язних графів G_i та

$St_m(G_2)$ орієнтованого роду $\gamma(G_i): \phi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де

$St_m(G_2)$ -квазізірка з центром G_2 та кількома ребрами-променями, що суміжні вершинам

з множини X_2 , X_i множина точок графа G_i , $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, матиме число досяжності та

характеристики $t_i, \theta_i, \partial\theta_i$, то $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i) + k4 - st$, де $st = \sum_{j=1}^{t_1} st(X_{1j}, G_1)$,

$k4 = \sum_{j=1}^{t_1} k4(X_{1j}, X_{2j})$, $k4 - st$ - число 2-ручок приклеєних до клітки s з множини $\sigma_{r_1} \setminus f(G_1)$,

$k4 - st \geq 0$, f - мінімальне вкладення $f: G_1 \rightarrow \sigma_{r_1}$, $r_i = \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i)$, із st - стороннім

доступом до тих точок приєднання на границі ∂s клітці s (до якої приклеєно r_2 2-ручки і

вкладено граф G_2), що при ототоженні пар точок приєднання (x_{1j}, x_{2j}) породжують $k4$

різних підграфів гомеоморфних K_4 , чи $K_{2,3}$.

Доведення. Нехай граф G розбито на дві зв'язні частини G_1 та $St_m(G_2)$ із m

спільними вершинами x_j , кожна з яких розщеплюється на вершини x_{1j}, x_{2j} , де

$j = 1, 2, \dots, m$. Ототоження цих пар задаватиме наступне ϕ -перетворення зв'язних графів

G_1 та $St_m(G_2)$ роду $\gamma(G_i): \phi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ -

квазізірка з центром G_2 та кількома ребрами-променями із кінцевими вершинами з

множини X_2 , де X_i множина точок графа G_i , $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, має число досяжності t_i та

характеристики. $\theta_i, \partial\theta_i$, $i = 1, 2$. Нехай до 2-многовиду S_i орієнтованого роду $\gamma(G_i)$

вкладено граф G_i мінімальним вкладенням f_i , $f_i: G_i \rightarrow S_i$, що реалізує $t_{G_i}(X_i) = t_i$ та

$\theta_{G_i}(X_i) = \theta_i$, де $i = 1, 2$. Для графа G_i виконаємо перетворення за алгоритмом_О та

отримаємо перетворену множину кліток-граней із нульовими характеристиками $\theta_i, \partial\theta_i$, із

точною кількістю, не більше ніж $t_i - (\theta_i + \partial\theta_i)$, кліток s_{ij} на границях яких розміщуються

точки приєднання із множини $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, де $i = 1, 2$.

Стандартним способом приклеїмо до 2-многовиду S_i p 2-ручок $h_{ij} = h(s_{i1}, s_{ij})$, де

$p = t_i - (\theta_i + \partial\theta_i) - 1$, одним кінцем до клітки s_{i1} , а іншим до кожної клітки s_{ij} , $j = 2, \dots, m$, тим

самим отримаємо клітку s_i^* на границі якої знаходяться всі точки з X_i , де $i = 1, 2$.

Відмітимо, що клітка s_i^* матиме st_i - багатосторонній доступ до вершин приєднання із множини X_i , де $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, як суму багатостороннього доступу $st_i = \sum_{j=1}^{t_i} st(X_{ij}, G_1)$ по всіх тих кліток з яких утворилася клітка s_i^* , де $i = 1, 2$. Приклеїмо стандартним способом циліндр C до кліток s_1^*, s_2^* та отримаємо вкладення $f, f = f_1 + f_2$, графа $G_1 + G_2$ до 2-многовиду S^* орієнтованого роду $\gamma(G_i) + \gamma(G_i) + p$. Продовження f_2^* вкладення f_2 на множини всіх висячих ребер квазіірки $St_m(G_2)$ із кінцевими вершинами x_{2j} які ототожнюються з x_{1j} , $j = 1, 2, \dots, m$ можливо побудувати за умови розміщення на додаткових $k_4 - st_1$ 2-ручках приклеєних до циліндру C по одному із зхрещених на C ребер підграфів K_4 чи $K_{2,3}$, що породжені висячими ребрами квазіірки, т.то розведення $k_4 - st_1$, де st_1 - багатосторонній доступ матиме клітка s_1^* до точок із X_1 , $X_1 = \{x_{1j}\}_1^m$. В результаті отримаємо вкладення $f', f' = f_1 + f_2^*$ графа G в 2-многовид S^{**} орієнтованого роду $\gamma(G_i) + \gamma(G_i) + p + k_4 - st_1$, т.то $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i) + k_4 - st$.

Доведення теореми 1 закінчено.

Наслідок 1. Нехай $\varphi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j\}_1^m)$ та виконується умова

теореми 1 і рівності: $\theta_i = 0, \partial\theta_i = 0, s = 0, t_1 = t_2 = m$. Тоді $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + m^2 + m - 2$.

Доведення впливатиме із наведеної в теоремі 1 нерівності та умови $t_i = m$ за якою всі $\theta_i = 0, \partial\theta_i = 0, s = 0$, а число k_4 є числом всіх різних пар перехрещених ребер на множині всіх висячих ребер квазіірки $St_m(G_2)$, т.то $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + 2k - 2 + k(k - 1)$.

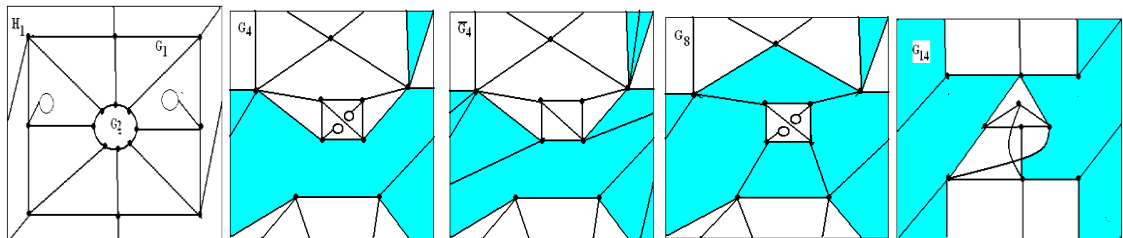


Рис.4. На першій карті вкладення в 2-тор графа H_1 із $k_4 = st = 0$, на другій вкладення графа G_4 із $k_4 = 0, st = 1$ в 2-тор, відповідно, на третій карті вкладення в тор графа $\overline{G_4} = G_4 \setminus e$ із $k_4 = st = 2$, четверта та п`ята карти - вкладення в 2-тор графів G_8 із $k_4 = 0, st = 2, G_{14}$ із $k_4 = 0, st = 2$, відповідно,.

Приклад. Точна верхня оцінка роду та роль двостороннього доступу видні на графі G з другої карти рис.3, де $G_1 = K_{3,3}$, $G_2 = K_3$, $m = 2$, $t_1 = t_2 = 1$, $\theta_i = \partial\theta_i = 0$,

$St_2^1(G_2) = K_3^1 \cup \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$, $st_1(\{a,b\}) = 2$, $st_2 = 0$, $k_4 = 2$, тоді

$\gamma(G) \leq 1 + 0 + (1-1) + (1-1) - 0 + 2 - 2 = 1$, та на третій карті рис.3, де $G_1 = K_5$, $G_2 = K_3$, $m = 2$,

$St_2^1(G_2) = K_3^1 \cup \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$, $t_1 = t_2 = 1$, $\theta_i = \partial\theta_i = 0$, $st_1(\{a,b\}) = 1$,

$st_2(\{a,b\}) = 0$, $k_4 = 2$, тоді $\gamma(G) \leq 1 + 0 + (1-1) + (1-1) - 0 + 2 - 1 = 2$. На рис. 4 наведено

залежність між характеристиками k_4 та st графів H_1 , G_4 , $\overline{G_4}$, G_8 , G_{14} .

Література

1. Хоменко М. П. φ -перетворення графів. препринт ИМ АНУ, Киев, 1973, 383 с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. препринт ИМ АНУ, Киев, 1970.
3. Хоменко Н. П. Островерхий Е. Б. Существенные элементы и род графа. препринт "Минимальные вложения графов" ИМ АНУ Киев 1972.
4. Петренюк В. І. Об оценке рода специальных графов. деп. в УкрНИИТИ №2259-Ук86 22.09. 1986.
5. Петренюк В. І. О структуре плоских графов с заданным числом достижимости некоторого множества точек. деп. рукопис в УкрНИИТИ N 2245-Ук86 22.09.1986.
6. R. Bodendiek, K. Wagner. A characterization of the minimal basis of the torus. *Combinatorica* 6,3,1986:245-260

2.2. СТРУКТУРА 8-МИ ТА 9-ТИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ТОРА

Задача полягатиме у поданні графів-обструкцій роду 2 на 8-ми та 9-ти вершинах, у яких кожне ребро є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, як результату φ -перетворення по підмножинам множин точок (точок приєднання із заданими характеристиками – числом досяжності та двостороннім доступом) одного із графів K_5 , $K_{3,3}$ (можливо без ребра чи із кількома додатковими ребрами) та квазізірки K із центральним графом M з щонайбільше чотирма вершинами. **Основні результати:** а) теорема 1 для 8-вершинних графів-обструкцій роду 2, т.то матимемо $M \in \{K_3, \overline{K_3}\}$; б) теорема 2 про подання графів-обструкцій роду 2 на 9-ти вершинах, як результату φ -перетворення не більше ніж трьох зв'язних графів X, Y, Z одного з наступних випадків:

- 1) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ (можливо із кількома додатковими ребрами) вкладений в тор σ , а інший граф X - є або площинним 2-мінімальним відносно множини

точок приєднання до графа Y на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із нульовими характеристиками θ та $\partial\theta$ для множини точок приєднання до графа Y , або є 3-мінімальним на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із характеристиками θ , $\partial\theta$, де $\theta=1$ чи $\partial\theta=1$ для множини точок приєднання графа X до графа Y , граф Z відсутній; 2) граф Y один з графів K_5 чи $K_{3,3}$, можливо без ребра, вкладений в тор σ , а інший граф X роду 1 є 2-мінімальним відносно множини точок приєднання на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із нульовими характеристиками θ , $\partial\theta$ множини точок приєднання графа X до графа Y , граф Z відсутній; 3) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ (можливо із кількома додатковими ребрами) вкладений в тор σ , граф Z - проста зірка, граф X є площинною квазізіркою із центральним графом M на двох вершинах, яка не є 2-мінімальним графом на недвоклітці s , $s \in \sigma \setminus Y$, причому існує, принаймні одна пара вершин простої зірки Z , сформована із елементів множини приєднання графа X до графа Y , що розділяє на ∂s пару кінцевих вершин з множини приєднання графа X до графа Y .

Вступ. Основні позначення взяті із [1], [2]. Нехай G неорієнтований скінчений граф без петель і кратних ребер ейлерового роду $\gamma(G)$, а S - замкнутий 2-многовид роду $\gamma(S)$, де $\gamma(G) = \gamma(S) + 1$. Якщо поверхня орієнтована, то позначатимемо її через σ , а якщо це неорієнтована поверхня, то позначатимемо її Σ .

Визначення 1. Граф G називається таким, що неприводиться над S , або $\gamma(G)$ -неприведеним (irreducible) для S , якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх $\gamma(G)$ -неприведених над S графів позначимо через $\zeta(S)$.

Визначення 2. Граф G мінімальний (мінор) над S , якщо для будь-якого графа G' , отриманого з графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G') \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх графів мінімальних над S позначимо через Γ_S .

Множина всіх графів, що неприводяться над S містить Γ_S характеризує множину всіх графів рід яких не менше $\gamma(S) + 1$. Якщо $S = \sigma_0$ евклідова площина, то $\Gamma_S = \{K_5, K_{3,3}\}$.

Визначення 1,2 узяті з [3], [4], відповідно. Нехай $S = \sigma$ - орієнтована замкнута поверхня роду $\gamma(\sigma)$, $\gamma(\sigma) > 0$, $\gamma(\sigma) = n - 1$. Задача побудови всіх графів, що неприводяться над σ зводиться, як показано в [5] до задачі переліку всіх блоків, тобто графів без точок з'єднання, що неприводяться над σ . Доведено в [9], що графи $B_1, B_2, B_3, K_{3,7}$ неприводяться для тору σ_1 , а G_n n -мінімальний блок, що неприводиться при $n > 1$. Граф G_n був побудований в [6], а в [7], [8] було доведено, що є три 2-неприведених підграфи

графу K_8 , а саме: $B_1 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_3^1)$, $B_2 = (K_8^0, K_8^1 \setminus (K_{1,2}^1 \cup 2K_2^1))$, $B_3 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1)$. В [18] розв'язувалася ця ж задача, доведено, що один граф містить підграф ізоморфний B_3 , тобто має зайве ребро. В [9] наведено два графи G_1, G_2 неприведені для тору, а в [14] знайдені в обох зайві ребра. В [10] доведено, що граф $K_{3,7}$ мінімальний над тором. Граф $K_{3,7}$ наведено в [11], де було доведено, що $K_{3,11}$ мінімальний для подвійного тору σ_2 . В [10], [13] зроблено припущення, що граф $K_{3,4p+3} \in (p+1)$ -мінімальний блоком, $p > 0$, та доведено, що граф $K_{3,7}$ мінімальний для пляшки Клейна, а $K_{3,9}$ мінімальний для поверхні ейлерової характеристики -1 . Наведений в [15] повний список 63-х 2-неприведених графів із 9-ма вершинами; 51 із них (48 мінорів) можливо побачити в он лайн PHD-дисертації Hur Suhjin «The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10» на відміну від [16], [17]. Спочатку в [27], а потім в [19], [20] виписані 2-неприведені для тору графи без підграфів гомеоморфних $K_{3,3}$. Більше наведено в [21] та інших статтях де розбудовують та використовують ідею К-мостів заданого графа.

Число досяжності підмножини M множини точок графа G роду γ , $\gamma = \gamma(G)$, що є найменшою кількістю клітин з підмножини Δ множини $S \setminus f(G)$, де S поверхня роду γ , а f , $f : G \rightarrow S$, довільне мінімальне вкладення при якому елементи $f(M)$ розташовуються на границях клітин із підмножини Δ , потрібне для оцінки роду ϕ -образу деякого графа та простої зірки; у випадку заміни зірки на квазізірку доповнимо наступними визначеннями, які враховують наявність на границі недвоклітки кількох копій вершин графа.

Визначення 3. Позначимо через $krt_G(M)$, $kr = krt_G(M)$, kr -кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G , як найбільшу кількість варіантів вибору різних підмножини $S_G(M, S_\gamma)$ множини клітин $S_\gamma \setminus f(G)$ на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M , узята по всіх мінімальних вкладеннях f , $f : G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ . Іншими словами, це найбільша кількість зірок які приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr 2-кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Визначення 4. Позначимо через $ms_G(M, s, f)$, $k = ms_G(M, s, f)$, k - сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої клітини \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітини s , $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f - задане мінімальне вкладення $f : G \rightarrow S_\gamma$ графа G в

поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M , а найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх клітин s заданого мінімального вкладення $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $ms_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G приєднаних кінцевими вершинами до кожного з, принаймні трьох, елементів множини M та вкладені без перетину ребер у внутрішніх точках до однієї клітини $s, s \in S_\gamma \setminus f(G)$, із цикломатичним числом $p_1(\partial s)$, де $p_1(\partial s) \geq k$, та заданим мінімальним вкладенням $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ .

Визначення 5. Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), \dots, ms_G(M, f_N))$ вектором l -стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої клітини $\bar{s}, s \in S_\gamma \setminus f_k(G), l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0, |M| > 2, \{f_k\}_{k=1}^N$ -множина всіх неізоморфних мінімальних вкладень $f_k, f_k: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел $ms_G(M, f_k)$ узяті по всім s та всім f_k , називатимемо характеристикою l -стороннього доступу до множини M точок графа G . В подальшому тексті вважатимемо, що $S_\gamma = \sigma_2$, тобто є 2-тором.

2.2.1. ПОБУДОВА 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРУ

Задача. Вивчити структуру 8-ми вершинних графів-обструкцій для тору з метою використання при побудові 9-ти вершинних графів-обструкцій для тору. Для цього із кількох скінчених простих графів-обструкцій обмеженого ейлерового роду G_i роду $\gamma(G_i)$, де $i = 1, 2, \dots, k$, побудуємо новий граф $G, G = (G^0, G^1)$, без вершин степеня 2 та із обмеженням роду $\gamma(G)$ певною верхньою величиною, кожне ребро якого є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, тобто для довільного ребра $u \in G^1$ виконується рівність $\gamma(G \setminus u) = \gamma(G) - 1$. Для орієнтованого роду графа ця задача буде задачею 1, а для неорієнтованого роду графа задачею 2.

Позначення 1. Під квазізіркою $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ з центром графом G_1 будемо розуміти об'єднання графа $G_1, G_1 = (\{v_i\}_{i=1}^3)$, та трьох зірок $St_{ni}(v_i)$ із висячими вершинами $\{g_{ij}\}_{j=1}^{ni}$ і ребрами в кількості ni , які можуть мати спільні кінцеві вершини, та із центральними вершинами v_i , що породжують підграф G_1 графа G . В подальшому вважатимемо, що $G \setminus \bigcup_{i=1}^3 (St_{ni}^1(G_1) \setminus G_1^1) \setminus G_1^1$ - 2-зв'язний підграф графа G .

Позначення 2. Будемо називати трикутним променем квазізірки $St_n(G_1)$ з центром-графом G_1 її підграф K_3 утворений з одного ребра графа G_1 та двох суміжних йому ребер із множини $St_n^1(G_1) \setminus G_1^1$ зі спільною вершиною степеня 2. Відмітимо, що такий трикутний промінь символізує приєднання довільної точки ребра до вершини.

Твердження 1.1. Два трикутні промені квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ 2-зв'язного графа G утворені з одного ребра e та двох пар (e_i, e_j) суміжних йому ребер з множини $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1) \setminus G_1^1$ з двома спільними вершинами степені 2, що належать зв'язному підграфу $G \setminus St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$, породжують підграф гомеоморфний K_4 .

Відмітимо, що два трикутні промені символізують приєднання довільної точки грані, на границі якої лежать два суміжні ребра, до вершини.

Твердження 1.2. Три трикутні промені квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ 2-зв'язного графа G утворені з пари вершин u, v та трьох пар ребер (e_{i1}, e_{i2}) , $\{e_{i1}, e_{i2}\} \subset St_{n_1, n_2, n_3}(G_1) \setminus G_1$, $i = 1, 2, 3$, інцидентних вершинам u, v та із попарно спільними вершинами v_i , що належать підграфу $G \setminus St_n^1(G_1)$, породжують на множині вершин $\{u, v\} \cup \{v_i\}_{i=1}^3$ підграф: гомеоморфний: або $K_{2,3}$, якщо u, v несуміжні, або K_4 , якщо u, v суміжні вершини графа G та якась пара з $\{v_i\}_{i=1}^3$ вершини графа G , або K_5 , чи $K_5 \setminus e$, якщо u, v та дві чи всі пари з множини $\{v_i\}_{i=1}^3$ є суміжними вершинами графа G .

Доведення тверджень 1.1 та 1.2 впливатиме із умови наведеної в позначенні 1.

Лема 1.1. Для графа K_5 мають місце наступні твердження:

- а) Існує 2-кліткове вкладення в тор при якому множина вершин розміщується на простому циклі довжини 5, спільному для трьох 2-кліток;
- б) Існує не 2-кліткове вкладення в тор при якому множина вершин розміщується на циклі довжини 8 та частково на циклі довжини 4;
- в) Множина M , складена з усіх точок графа K_5 , а саме всіх вершин та по одній внутрішній точці кожного ребра, розміщується, або на двох 2-клітках-п'ятикутниках та одній 2-клітці чотирикутнику, або на двох трикутниках та восьмикутнику, причому підмножина точок, які не лежать на границі деякої клітки, що містить найбільшу кількість вершин та внутрішніх точок ребер, породжує, або підграф K_3 , або $K_{1,2}$;
- г) Число досяжності $t_{K_5}(M, \sigma_1) = 3$ та характеристики $\theta_{K_5}(M, \sigma_1) = 1$, $\partial\theta_{K_5}(M, \sigma_1) = 0$.

д) Множина вершин K^0 графа K . $K_5 \setminus u = K$, $K^0 = \{1,2,a,b,c\}$, із ребром $u = (1,2)$ має дві підмножини $\{a,b,c\}$, $\{1,2\}$ з числами досяжності 2 та мінімальні відносно видалення з них довільного елемента;

е) $K_5 \setminus u \in \varphi$ -образом колеса W_4 з центром в вершині b та зірки $St_3(d) \setminus (d,b)$, а $K_{3,3}$ є підграфом φ -образом колеса W_4 з центром в вершині b та зірки $St_3(d)$, причому одна з двох трійок належить $K_3 \setminus e$, а інша $\overline{K_3}$;

ж) Для п`яти вершин графа K_5 маємо: $ms_{K_5}(K_5^0) = 1$, $krt_{K_5}(K_5^0) = 2$;

з) Для чотирьох довільних вершин графа K_5 маємо: $ms_{K_5}(K_5^0 \setminus v) = 2$, $krt_{K_5}(K_5^0 \setminus v) = 3$;

і) Для трьох довільних вершин графа K_5 маємо: $ms_{K_5}(K_5^0 \setminus \{u,v,w\}) = 2$, $krt_{K_5}(K_5^0 \setminus \{u,v,w\}) = 2$.

Доведення тверджень леми 1.1 полягає в побудові всіх неізоморфних вкладень графа K_5 в тор та перевірі вказаних властивостей як показано на рис.1.1.

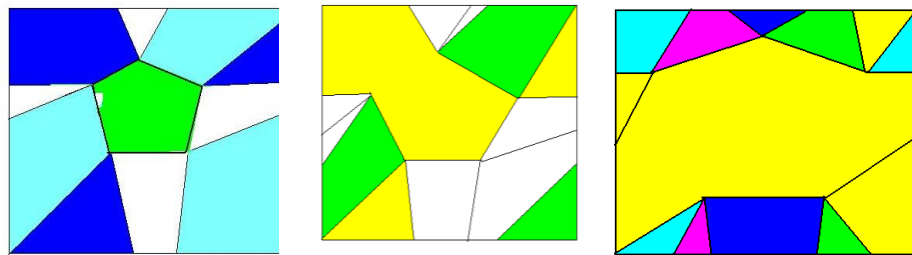


Рис.1.1 Вкладення 2-кліткове та два неізоморфних не 2-кліткових графа K_5 в тор.

Лема 1.2. Для графа $K_{3,3}$ мають місце наступні твердження:

а) Існує 2-кліткове вкладення в тор при якому множина вершин розміщується на простому циклі довжини шість, спільному для трьох 3-кліток;

б) Існує не 2-кліткове вкладення в тор при якому множина вершин розміщується на циклі довжини 10 та по чотири вершини на двох простих циклах довжини 4;

в) Множина M складена з усіх точок графа $K_{3,3}$, а саме всіх вершин та по одній внутрішній точці кожного ребра, розміщується, або на двох 2-клітинах-шестикутниках, або на одній 2-клітці-чотирикутнику та одній 2-клітці-десятикутнику, причому підмножина точок, які не лежать на границі деякої клітки, що містить найбільшу кількість вершин та внутрішніх точок ребер, породжує підграф K_2 ;

г) Число досяжності $t_{K_5}(M, \sigma_1) = 2$ та характеристики $\theta_{K_5}(M, \sigma_1) = 0$, $\partial\theta_{K_5}(M, \sigma_1) = 0$.

д) Множина вершин K^0 графа K . $K_{3,3} \setminus u = K$, $K^0 = \{1,2,a,b,c,d\}$, із ребром $u = (1,2)$ має дві підмножини $\{a,b,c,d\}$, $\{1,2\}$ з числами досяжності 2 та мінімальні відносно числами досяжності при операції видалення із них довільного елемента;

е) $ms_{K_{3,3}}(K_{3,3}^0) = 2$, $krt_{K_{3,3}}(K_{3,3}^0) = 3$;

ж) $ms_{K_{3,3}}(K_{3,3}^0 \setminus \{u, v\}) = 2$ для деякої пари суміжних вершин u, v ;

з) $ms_{K_{3,3}}(K_{3,3}^0 \setminus \{u, v, w\}) = 3$ для довільної трійки попарно несуміжних вершин.

Доведення леми 1.2 полягає в побудові всіх неізоморфних вкладень графа $K_{3,3}$ до тору та перевірці вказаних властивостей, які видно з рис.1.2.

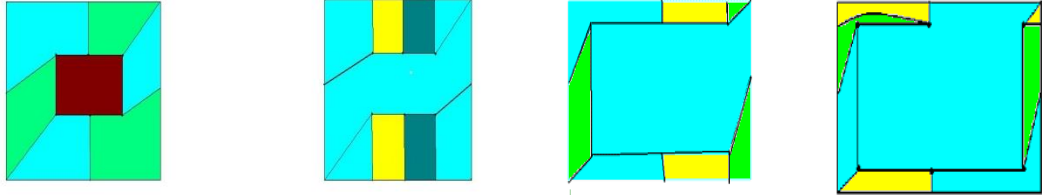


Рис.1.2. 2-кліткове вкладення графа $K_{3,3}$ в тор та не 2-кліткові, відповідно.

Лема 1.3. Нехай граф G є ϕ -образом графів-обструкцій G_1 та G_2 при ϕ -перетворенні визначеному наступним чином: $\phi(G_1 + G_2, \sum_{i=1}^2 (e_1 + e_2)) \rightarrow (G, e)$, де $e = (a, b)$, $e \in G^1$. $e_i = (a_i, b_i) \in$ ребром, або частиною ребра графа G_i , $i = 1, 2$. Для орієнтованого роду $\gamma(G)$ мають місце наступні твердження:

- 1). Якщо принаймні одна кінцева вершина кожного з ребер e_i не матиме двостороннього доступу, то маємо рівність $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$;
- 2). Якщо кожна кінцева вершина одного з ребер e_i має двосторонній доступ, то матимемо рівність $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1$;

Доведення. Доведення леми 1.3 для довільних графів-обструкцій G_1 та G_2 аналогічне доведенню для двох графів K_5 , виконаному на рис. 1.2.1. Наведемо на рис. 1.2.2 доведення тверджень леми 1.3. для двох вкладених (ребра K_4 сині) в тор графів, зліва–направо, отриманих з двох пар графів $(K_4, K_{3,3})$, (K_4, K_5) шляхом ϕ -перетвореннями заданим на парі ребер цих пар. Відмітимо, що наявність двостороннього доступу до ототожнених кінцевих вершин ребра означатиме відсутність додаткової 2-ручки. Так для графа K_5 вкладеного до Σ_2 - пляшки Клейна із двостороннім доступом до двох вершин (завдяки наявності кольорової клітини в яку можливо вкласти дві зірки із суміжними центрами на 5-ти та 6-ти ребрах-променях) та отримати мінімальне вкладення графа $K_7 \setminus e$ до Σ_2 .

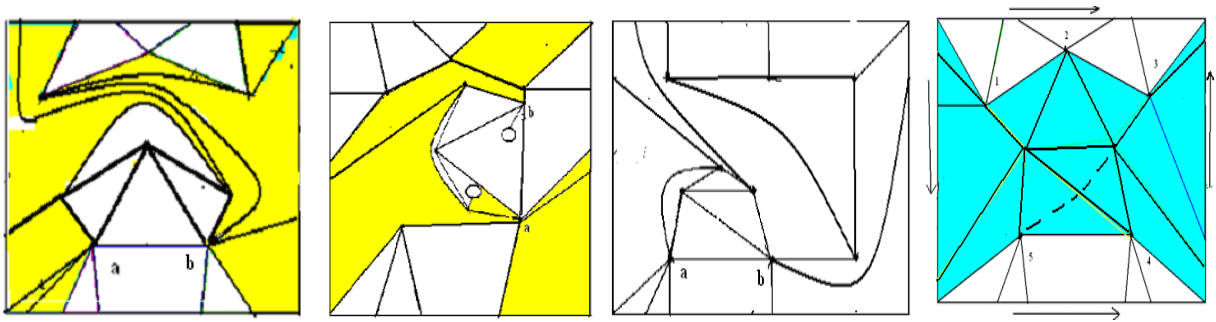


Рис. 1.2.1 До тверджень лема 1.3. наведено два перші графи (зліва-направо), що отримані з двох графів K_5 двома наступними ϕ -перетвореннями: 1) по парі ребер, 2) по ребру $e=(a,b)$ та частині ребра u , відповідно, де кольоровою є клітка вкладення в тор графа K_5 , до якої вкрито інший K_5 та виконано склейку; 3) Наведено склейку по ребру e , $e=(a,b)$, графів $K_5, K_{3,3}$; 4) Наведено мінімальне вкладення графа $K_7 \setminus e$ до Σ_2 -пляшки Клейна.

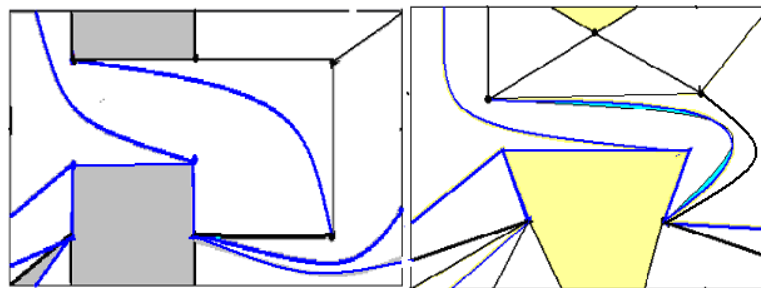
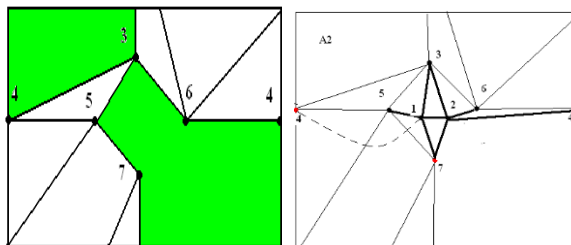


Рис. 1.2.2 Наведемо до тверджень лема 1.3. два вкладені в тор графи (зліва-направо) отримані з двох пар графів $(K_4, K_{3,3}), (K_4, K_5)$ ϕ -перетвореннями на парах ребер.

Лема 1.4. Нехай граф G є ϕ -образом графів G_1 та G_2 -обструкцій для проективної площини при ϕ -перетворенні визначеному наступним чином: $\phi(G_1 + G_2, \sum_{i=1}^2 (e_i + e_2)) \rightarrow (G, e)$, де $e=(a,b)$, $e \in G^1$, $e_i=(a_i, b_i)$ є ребром, або частиною ребра графа G_i , $i=1,2$. Тоді для неорієнтованого роду $\gamma(G)$ не виконуються твердження лема 1.3.

Доведення. Дійсно із наведених на рис. 1.2.3 вкладень до проективної площини графів K_5 та $K_{3,3}$ видно відсутність двостороннього доступу до довільної підмножини їхніх вершин. Але для $K_5/(4,7)$ є двосторонній доступ до пари суміжних вершин 3, 4, 7, який не впливає на рід графа A_2 зі списку графів-обструкцій для проективної площини.



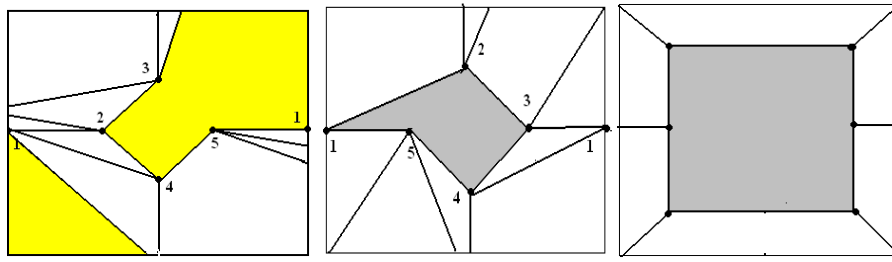


Рис.1.2.3. Мінімальні вкладення графів $K_5/(4,7)$, $A_2/(1,4)$, K_5 , $K_{3,3}$ до проєктивної площини.

Лема 1.5. Нехай граф G є ϕ -образом графів G_1 та G_2 -обструкцій для поверхні орієнтовного роду $\gamma(G)$ при ϕ -перетворенні визначеному наступним чином:

$$\phi(G_1 + G_2, \sum_{i=1}^3 (a_{1i} + a_{2i})) \rightarrow (G, \{a_i\}_{i=1}^3), \text{ на множині точок } \{a_{ji}\}_{i=1}^3 \text{ графа } G_j, \text{ де } j=1,2.$$

Для орієнтовного роду $\gamma(G)$ мають місце наступні твердження:

- 1). Якщо принаймні одна вершина a_{ji} не матиме двостороннього доступу, то маємо рівність $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + 1$;
- 2). Якщо кожна кінцева вершина a_{ji} із множини приєднання одного з графів до іншого має двосторонній доступ, то матимемо рівність $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$;

Доведення цієї леми проілюстроване на рис 1.2.4.

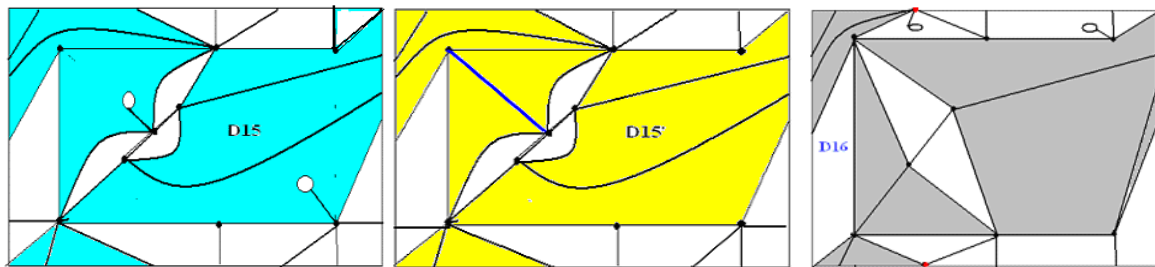


Рис.1.2.4. Мінімальні вкладення до 2-тору та тору графів $D15$ і $D15'$, (зліва направо) та вкладення в 2-тор графа $D16$, який містить підграф $K_5 \setminus e$, приєднаний до $K_{3,3}$ по двом суміжним ребрам, у яких спільна вершина з $K_{3,3}$ має двосторонній доступ на торі.

Лема 1.6. Графи K_6 , K_7 задовольняють наступним твердженням:

- а) Для графа K_6 на торі маємо два неізоморфних 2-кліткових вкладення;
- в) Для множини вершин графа K_6 маємо $t_{K_6}(K_6^0) = 1$, а для довільного ребра e існує така вершина v , що має місце рівність $ms_{K_6 \setminus e}\{v\} = 2$.

Доведення тверджень леми 1.6 полягає в побудові всіх неізоморфних вкладень графа K_6 в тор та перевірці вказаних властивостей як показано на рис.1.2.5.

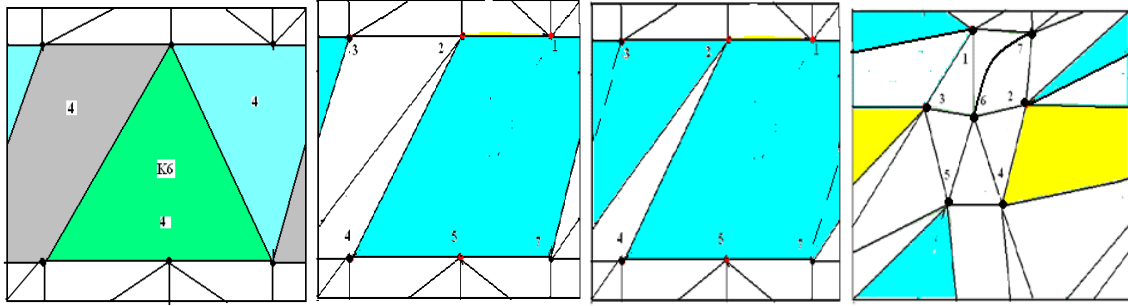


Рис.1.2.5. Два 2-кліткових неізоморфних вкладення графа K_6 , та по одному вкладенню $K_6 \setminus e$, K_7 в тор.

Твердження 1.4. Нехай задане вкладення f графа G - обструкції тора в 2-тор і ребро $u, u = (c, d)$, яке розміщується на 2-ручці $h(s_1, s_2)$, приєднаній до $s_1, s_2, \{s_1, s_2\} \subset \sigma_1 \setminus f(G)$, т.то $f(u) \subset h(s_1, s_2)$. Тоді видалення деякого ребра $e, e = (a, b)$, графа G призводить до зменшення принаймні на 1 числа підграфів графа G гомеоморфних K_4 та таких, що містять ребро $u, u = (c, d)$, де $f|_G(e)$ розташоване вкладенням f на 2-ручці приєднаній до тору, а в графі $f|_{G \setminus e}$ ребро u розміщуватиметься в середині клітки s з границею $\partial s, \partial s = \partial s_1 \cup \partial s_2 \setminus f(e)$.

Із наведених вище лем та тверджень випливають твердження наступної теореми.

Теорема 1.0. Для G -граф-обструкції тора мають місце наступні твердження:

0). Кожне ребро 2-зв'язного графа-обструкції для тора належить підграфу гомеоморфно му, або K_4 , якщо підграф $G \setminus e$ 2-зв'язний, або $K_{2,3}$, якщо підграф $G \setminus e$ 1-зв'язний.

1) Існує φ -перетворення графів H та $St_r(M)$, визначене наступною формулою:

$$\varphi(H + St_m(M), \sum_{i=1}^h (h_{i1} + h_{i2})) \rightarrow (G, \{h_i\}_{i=1}^h),$$

•

задовольняє рівності $\gamma(G) = \gamma(H) + 1$, де підграф H має найменше число $\Phi_G(H, M)$ серед всіх підграфів графа G , що містить частину гомеоморфну K_4 , чи $K_{2,3}$, із підмножиною

вершин $\{h_{i1}\}, 0 < i \leq h$, а квазізірка $St_r(M)$ із центром-графом $M, m_j \in M^0, 0 < j \leq m$,

містить підмножину потужності r складену з ребер (h_{i2}, m_j) , як всіх висячих з

підмножини M_1 , де $M_1 = \{h_{i1}\}_{i=1}^h$, так і трикутних променів з підмножини $M_2, M_2 = \{h_{i2}\}_{i=1}^h$, множини $(G^1 \setminus H^1) \setminus M^1, m_j \in M^0, 0 < j \leq m, \deg_{St_r(M)}(h_{i2}) = 2$;

2). $\gamma(G) \leq \gamma(H) + \gamma(M) - ms'_H(M_1, f|_H) + x(H, M)$, де $(\gamma(H), \gamma(M)) \in \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$,

$0 \leq x_G(H, M) \leq 4, |0 \leq ms'_H(M_1, f|_H) \leq 3$, де $ms'_H(M_1, f|_H)$ - кількість точок двостороннього доступу задіяних при вкладенні f графа G в поверхню орієнтованого роду $\gamma(G)$,

$x_G(H, M)$ - найменша кількість мінімальних по включенню підграфів чи частин графа G гомеоморфних K_4 чи $K_{2,3}$, які покривають всі ребра e_{ij} , де $e_{ij} = (h_i, m_j)$, $h_i \in H$, $m_j \in M$, та, можливо, найкоротшими простими ланцюгами графів H, M , що починаються та закінчуються кінцевими вершинами ребер e_{ij} тільки одного з цих графів H, M ;

3). Орієнтований рід $\gamma(G)$ граф-обструкції G задовольняє нерівності

$$\gamma(G) \leq \gamma(H) + \gamma(M) + t_H(M_1, \sigma_1) + t_M(M_1, s) - \theta_H(M_1, \sigma_1) - \theta_M(M_1, s) - \partial\theta_H(M_1, \sigma_1) - \partial\theta_M(M_1, s) - ms'_H(M_1, f|_H) + x(H, M) - 2;$$

4). Довільна граф-обструкція G має величини $|\Phi_G(H, M)| - ms_H(M_1, f|_H)$ та

$$t_M(M_1, s) - \theta_H(M_1, \sigma_1) - \theta_M(M_1, s) - \partial\theta_H(M_1, \sigma_1) - \partial\theta_M(M_1, s) - 2 + t_H(M_1, \sigma_1)$$

різного порядку для одного й того ф-перетворення довільного графа G , заданого так як наведено в 1);

5). Множина точок приєднання може бути розбита на дві підмножини: або $M_1 = \{h_{i1}\}_{i=1}^h$, або $M_2 = \{h_{i2}\}_{i=1}^h$, та $\{m_j\}_{j=1}^n$, $\{m_j\}_{j=1}^n \subset M^0$, які мають на площині числа досяжності 2, а видалення довільного ребра приєднання призводить до зменшення числа досяжності однієї з цих множин;

6). Вкладення $St_r(M)$ до 2-клітини s з множини $\sigma_1 \setminus f|_H(H)$ визначає підмножину ребер $e \in f|_H(H^1) \cap \partial s$, видалення яких приводить до появи ненульового двостороннього доступу $ms_{H \setminus e}(M_1, f|_{H \setminus e})$;

7). Видалення довільного ребра e підграфа H збільшує $ms_{H \setminus e}(M_1, f|_{H \setminus e})$ -кратність доступу до M_1 як множини точок приєднання, або $krt_G(M_1)$ -сторонній доступу до M_1 ;

8). Якщо підграф M має дві зв'язні компоненти M_1, M_2 , яких мінімальним вкладенням $f|_M: G \rightarrow \sigma_2$ розміщено до клітини s 2-тора, то образи компонент розділять одна одну як пара зхрещених ребер на площині кола.

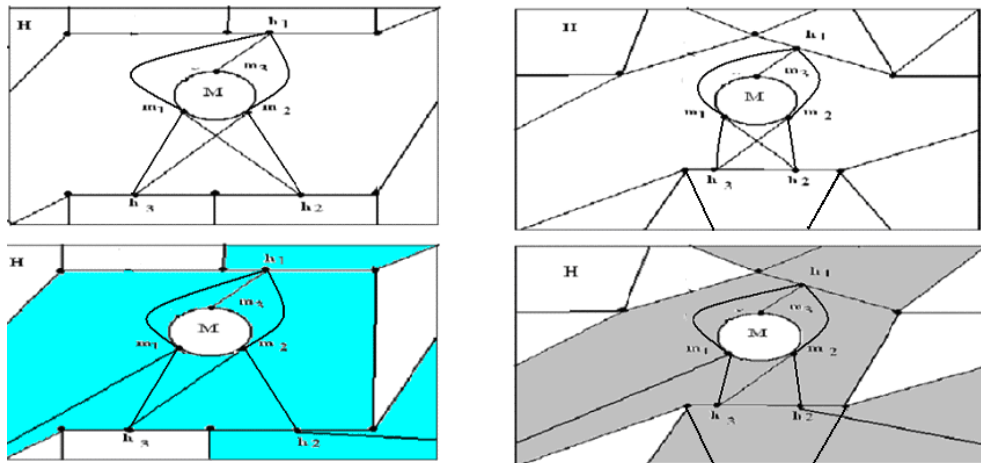
Доведення. Нехай граф G , $G = (G^0, G^1)$, є 2-неприведеним графом орієнтовного роду із n вершинами, f_i - мінімальне вкладення графа G в 2-тор яке розташовує на одній з 2-ручок 2-тора тільки одне задане ребро графа G . Доведемо твердження 0). Оскільки для кожного ребра e 2-зв'язного графа G -обструкції для тора існує таке мінімальне вкладення f графа G в 2-тор при якому тільки це ребро розрізатиме 2-ручку приклеєну до двох кліток s_1, s_2 з множини $\sigma_1 \setminus f(G \setminus e)$, то кожне ребро 2-зв'язного графа-обструкції для тора має належати підграфу гомеоморфному, або K_4 , якщо підграф $G \setminus e$ 2-зв'язний, або $K_{2,3}$, якщо підграф $G \setminus e$ 1-зв'язний.

Доведемо твердження 1). В графі G виділимо підграф H . Позначимо через $\Phi_G(H, M)$ множини всіх різних підграфів Φ_i графа G гомеоморфних K_4 чи $K_{2,3}$, та породжених принаймні однією парою ребер (e_1, e_2) , $e_i = (h_{i_2}, m_j)$, у яких кінцеві вершини h_{i_2} розділяють одна одну на ∂s клітині тора (можливо, простими ланцюгами, що належать до підграфа H). Нехай підграф H або гомеоморфний K_5 , $K_5 \setminus e$, $K_{3,3}$, чи $K_{3,3} \setminus e$, або містить, принаймні, деяку частину гомеоморфну K_5 , $K_5 \setminus e$, $K_{3,3}$, чи $K_{3,3} \setminus e$, та такий, що має найменше число $\Phi_G(H, M)$ на множині всіх таких підграфів H . Позначимо через h' кількість його вершин. На множині ребер $G^1 \setminus H^1$ визначимо квазізірку $St_r(M)$ із центром-графом M на m вершинах та підмножиною потужності r з елементами - висячими ребрами (h_{i_2}, m_j) , які належать до підмножини $(G^1 \setminus H^1) \setminus M^1$, де $h'+m = |G^0| = n$, що утворені розщепленням кожної вершини h_i на пару вершин (h_{i_1}, h_{i_2}) , де $h_{i_1} \in H^0$, $h_{i_2} \in M^0$, $M_1 = \{h_{i_1}\}_{i=1}^h$, $M_2 = \{h_{i_2}\}_{i=1}^h$, $0 < i \leq h$, $0 < j \leq m$, $2 \leq h$, $3 \leq m$. Згідно визначення 5 вектор доступу до точок з M_1 має вид $(ms_H(M_1, f_1), ms_H(M_1, f_2), \dots, ms_H(M_1, f_N))$, де N кількість неізоморфних мінімальних вкладень f_i графа G в 2-тор та їхніх звужень $f_i|_H$ на підграф H . Для кожного такого звуження $f_i|_H$ визначимо клітину s , $s \in \sigma_1 \setminus f_i|_H(H)$, на границі якої ∂s розміщуються елементи множини $M_1 = \{h_{i_1}\}_{i=1}^h$ та має місце k -сторонній доступ, $k = ms_H(M_1, f_1)$, до кожної з точок h_{i_1} із довільної внутрішньої точки клітини s . Будемо при цьому враховувати те, що однаковими є й ті підграфи, які відрізнятимуться тільки парою ребер-хорд чи парою простих ланцюгів із принаймні однією спільною кінцевою вершиною. Вважатимемо, що ці h_{i_2} розміщені у внутрішніх точках клітини \bar{s} навпроти вершини h_{i_1} розташованої на границі клітини тора ∂s та попарно ототожнюються в точку h_i , де $\bar{s} = s \cup \partial s$, $s \in \sigma_1 \setminus f(G)$, f - довільне мінімальне вкладення графа G в 2-тор, $0 < i \leq h$. Наведене розбиття графа G на підграфи H та $St_m(M)$ визначає на них ф-перетворення на множинах точок M_1 , M_2 , шляхом ототодження пар вершин (h_{1_i}, h_{2_i}) на вершину h_i , де $M_1 = \{h_{1_i}\}_{i=1}^h$, $M_2 = \{h_{2_i}\}_{i=1}^h$, з числами досяжності t_{M_1} , t_{M_2} та характеристиками θ_{M_1} , $\partial\theta_{M_1}$, θ_{M_2} , $\partial\theta_{M_2}$, відповідно. Якщо порядок ототодження пар вершин (h_{1_i}, h_{2_i}) не призводить до перетину у внутрішніх точках будь-яких пар ребер (e_1, e_2) виду $e_i = (h_i, m_j)$, то згідно [29] для орієнтовного роду графа G матимемо нерівність $\gamma(G) \leq \gamma(H) + \gamma(M) + t_H(M_1, \sigma_1) + t_M(M_1, s) - \theta_H(M_1, \sigma_1) - \theta_M(M_1, s) - \partial\theta_H(M_1, \sigma_1) - \partial\theta_M(M_1, s) - 2$.

В іншому випадку, коли є перетин ребер підграфів Φ_i гомеоморфних K_4 чи $K_{2,3}$, потрібно приєднувати стандартним перетворенням кожному з $|\Phi_G(H, M)|$ дворучок до тору на яких розміщуватиметься одне з тих ребер, що перетинаються. З урахуванням двостороннього доступу до точок з множини M_1 кількість приєднаних дворучок не перевищуватиме $|\Phi_G(H, M)| - ms'_H(M_1, f|_H)$ для заданого f - довільного мінімального вкладення графа G в 2-тор σ_2 , тобто $\gamma(G) \leq \gamma(H) + \gamma(M) + |\Phi_G(H, M)| - ms'_H(M_1, f|_H)$.

Наступні два варіанти є вичерпними: 1) $f_i|_H$ - двокліткове вкладення підграфа H в тор (s двоклітина); 2) $f_i|_H$ - недвокліткове вкладення підграфа H в тор (s недвоклітина) та вичерпні наступні підвипадки: а) M - зв'язний граф, б) M - нез'язний граф.

Розглянемо випадок 1) та підвипадок а) коли M - зв'язний граф принаймні на двох вершинах. Стверджуємо, що є принаймні чотири висячі ребра інцидентних різним вершинам графа M . Доведемо нерівність $1 \leq |\Phi_G(H, M)| \leq 3$. Очевидно, що $|\Phi_G(H, M)| \geq 1$. Оскільки рід графа G дорівнює 2, то маємо нерівність $|\Phi| > 0$. Якщо задане мінімальне недвокліткове вкладення $f|_H$ графа H в тор даватиме двосторонній доступ до принаймні однієї з вершин пари (h_1, h_2) по недвоклітці s , то згідно лем 1.1, 1.2, 1.3 можливе вкладення графа з множини Φ без перетину у внутрішніх точках ребер e_1, e_2 в s та розширення вкладення $f|_H$ до вкладення f графа G в тор. Відмітимо, що коли обидві вершини пари (h_1, h_2) є внутрішніми точками ребер графа H , то немає доступу двостороннього до цих вершин у випадку частини графа G як це показано на рис.1.2.3.



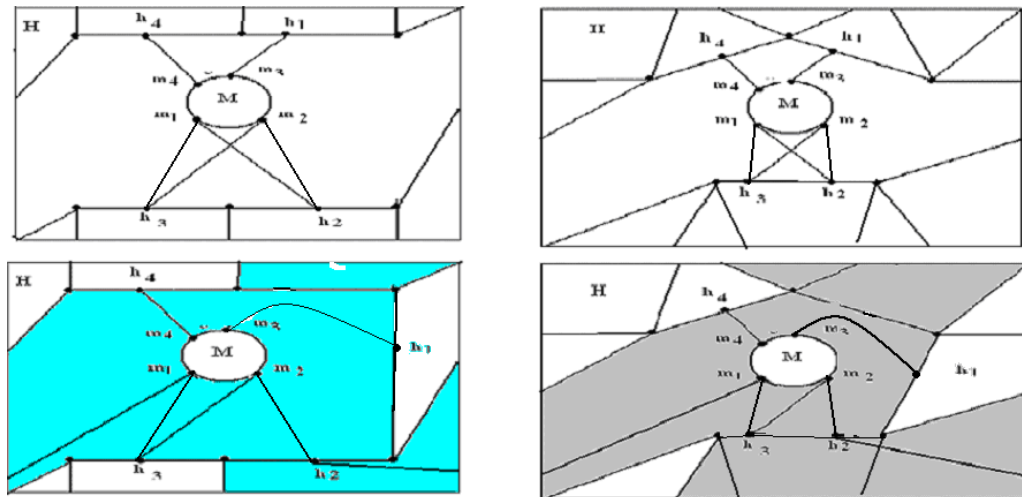


Рис 1.2.3. Схеми вкладення в тор графа G для $H = K_{3,3}$ та $H = K_5$ на яких видно роль двостороннього доступу до вершин пари несуміжних ребер графа K_4 , яка не призводить до збільшення роду $\gamma(G)$, хоча порядок отождоження точок вимагає цього.

Виконаємо скінчену кількість φ -перетворень - операцій по приєднанню до G по множині із n_1 вершин підграфа H приєднаємо до нього зірку $St_{n_1}(v_1)$ із кількістю ребер n_1 та отримуємо граф G_{01} .

З іншого боку оскільки для кожного ребра e 2-зв'язного графа G -обструкції для тора існує таке мінімальне вкладення f графа G в 2-тор при якому тільки це ребро розрізатиме 2-ручку приклеєну до двох кліток s_1, s_2 з множини $\sigma_1 \setminus f(G \setminus e)$, то кожне ребро 2-зв'язного графа-обструкції для тора має належати підграфу гомеоморфному, або K_4 , якщо підграф $G \setminus e$ 2-зв'язний, або $K_{2,3}$, якщо підграф $G \setminus e$ не 2-зв'язний.

Теорема 1.1. [8] З точністю до ізоморфізму є тільки три 2-неприведені для тору підграфи графа K_8 : $B_1 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_3)$, $B_2 = (K_8^0, K_8^1 \setminus (K_{1,2}^1 \cup 2K_2^1))$, $B_3 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1)$.

Доведення. Нехай $G \in 2$ -неприведеним графом орієнтовного роду 2. Виділимо в ньому підграф H гомеоморфний K_5 , чи $K_{3,3}$ і по досяжній множині із n_1 вершин підграфа H приєднаємо до нього зірку $St_{n_1}(v_1)$ із кількістю ребер n_1 та отримуємо граф G_{01} . Замінімо граф H на граф G_{01} та зробимо теж саме, що й для $St_{n_1}(v_1)$ тільки замість зірки $St_{n_1}(v_1)$ оберемо $St_{n_2}(v_2)$, де $n_1 \geq n_2 > 2$, та отримуємо граф G_{02} . Якщо H гомеоморфний K_5 , то повторимо цю операцію третій раз для G_{02} та зірки $St_{n_3}(v_3)$, де $n_1 \geq n_2 \geq n_3 > 2$, та отримуємо граф G_{03} . Для графа G_{03} на восьми вершинах потрібно знайти всі різні пари вершин з досяжністю 2 та з'єднати їх ребром. В результаті матимемо граф-обструкцію роду 2 на 8-ми вершинах. Зауважимо, що підграф H не гомеоморфний $K_{3,3}$. У разі, коли

підграф H гомеоморфний $K_{3,3}$ маємо до нього приєднувати по множині вершин дві різні зірки щонайбільше із 6-ма висячими вершинами, тоді згідно леми 1.2 отримаємо граф роду 1, що суперечить умові щодо 2-неприведеності графу G орієнтовного роду 2. Реалізуємо цей алгоритм на вхід якого подано граф G . Алгоритм перебирає всі різні варіанти укладання на торі графа $G \setminus e$ для довільного ребра e та визначає, чи буде досяжною на торі множина кінцевих вершин ребра e , тобто чи це ребро укладатиме ться з одним перетином у внутрішній точці із деякими ребрами квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$, яку вкладено до клітин як 2-клітин, чи не 2-клітин, що утворилися як при 2-кліткових, так і не 2-кліткових вкладеннях в тор графа K_5 , чи немає такого перетину. Перетин у внутрішній точці деяких ребер квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ обумовлений наявністю хоча б одного підграфа K , гомеоморфного графу K_5 чи графу $K_{3,3}$, і породженого на деяких ребрах квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ та графа K_5 . Вкладення графа K до клітин, породжених вкладенням в тор графа K_5 , може бути як 2-клітковим так і не 2-клітковим, і пов'язане з тим, що інша частина графа $G \setminus (K \cup K_5)$ має вкладатися до кліток породжених вкладенням в тор графа K_5 так, щоб давати при кожному укладанні на торі принаймні один перетин ребер графа G . Роботу алгоритму буде закінчено тоді коли будуть переглянуті всі варіанти вкладень в тор підграфа $G \setminus e$ для кожного ребра e графа G .

Позначимо через G 2-неприведений граф орієнтовного роду 2 та ізоморфний деякому підграфу графа K_8 . Розглянемо звуження f' довільного мінімального вкладення $f, f : G \rightarrow \sigma_2$ на підграф K_5 графа G та введемо наступні позначення.

Позначення 1. Під квазізіркою $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ з центром графом G_1 будемо розуміти об'єднання графа G_1 , $G_1 = (\{v_i\}_{i=1}^3)$, та трьох зірок $St_{n_i}(v_i)$ із висячими вершинами $\{g_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ і ребрами в кількості n_i , але без спільних ребер та із центральними вершинами v_i , що породжують підграф G_1 графа G .

Позначення 2. Будемо називати трикутним променем квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ граф K_3 утворений з одного ребра e графа G_1 та двох суміжних йому ребер e_1, e_2 із

$St_{n_1, n_2, n_3}^1(G_1) \setminus G_1^1$ зі спільною вершиною v степеня 2. Іншими словами, це символізуватиме довільне ребро типу (v_i, v) , де v_i - внутрішня точка ребра e .

Тоді матимемо φ -перетворення графа K_5 та квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ на граф G визначене наступним чином: $\varphi(K_5 + St_{n_1, n_2, n_3}(G_1), \sum_{i=1}^5 (a_i + \{g_{ij}\}_{j=1}^{n_1+n_2+n_3})) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^5)$, т. то утворюємо граф G шляхом ототожнення кожної пари $(a_i, \{g_{ij}\}_{j=1}^{k_i})$, складеної з вершини a_i графа K_5 та кожної з вершин підмножини $\{g_{ij}\}_{j=1}^{k_i}$ кінцевих точок висячих ребер квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$, в вершину a_i^* , де $\sum_{i=1}^5 k_i = n_1 + n_2 + n_3$.

Видалимо в G довільне ребро (a, b) . Для множини ребер графа $G_1 \in$ чотири наступних випадки: а) $|G_1^1| = 0$, б) $|G_1^1| = 1$, в) $|G_1^1| = 2$, г) $|G_1^1| = 3$. Відмітимо те, що у випадках в), г) граф $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$, як зв'язний граф з трьома вершинами, вкладатиметься до однієї клітки s , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$, де $p_1(\partial s) > 0$, тому число досяжності множини висячих вершин зменшиться на 1, у тому випадку коли мало ненульове значення. Наприклад, для множини з трьох пофарбованих вершин $K_5 \setminus u$ досяжної на торі, бо вкладеної до не 2-клітки тора, маємо на площині число досяжності 2, теж саме має місце для множини з двох пофарбованих червоним вершин графа $K_{3,3} \setminus u$, див. рис. 1.2а. Тоді у випадках в), г) має місце одне з двох тверджень:

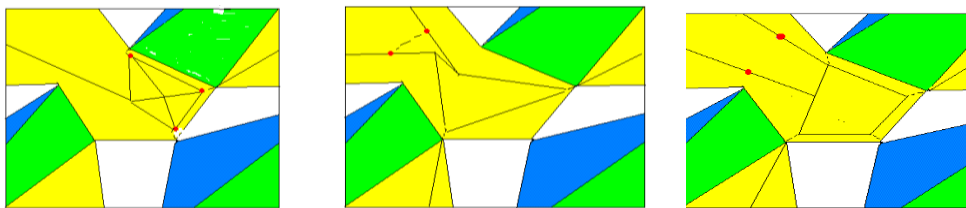


Рис. 1.2а. $K_5 \setminus u$ та $K_{3,3} \setminus u$ із множинами досяжних, пофарбованих червоним, вершин. або є двосторонній доступ до підмножини з чотирьох вершин графа $f(K_5)$ та один варіант доступу для підмножини з трьох вершин, одна з яких не входить до цієї четвірки вершин графа $f(K_5)$, або є двосторонній доступ до трьох вершин графа $f(K_5)$ та один варіант доступу для підмножини з цих же трьох вершин графа $f(K_5)$.

Розглянемо випадок в). Маємо не 2-кліткове вкладення $f, f : K_5 \rightarrow \sigma_1$ та два різних підвипадки укладання (відносно зеленого чотирикутника) графа $St_{3,4,4}(K_{1,2}) \setminus (ab)$ в середину восьмикутника, які наведені на рис. 1.3, де три вершини графа $K_{1,2}$ розфарбовані.

Підвипадок в1) – центральна вершина графа $K_{1,2}$ з'єднана ребрами з трьома із чотирьох вершин із двократним доступом, якщо з'єднати ребром дві нецентральні вершини графа, то матимемо граф B_2 , де $B_2 = (K_8^0, K_8^1 \setminus (K_{1,2}^1 \cup 2K_2^1))$.

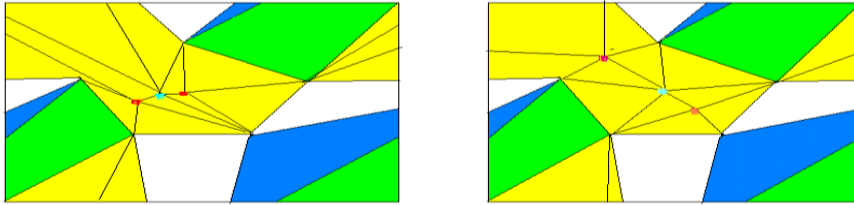


Рис. 1.3. Підвипадки в1), в2), зліва направо, та $St_{3,4,4}(K_{1,2}) \setminus (ab) \subset \bar{s}$

Підвипадок в2) –центральна вершина графа $K_{1,2}$ з'єднана ребрами із кожною з чотирьох вершин із двократним доступом. Якщо з'єднати ребром дві нецентральні вершини графа $K_{1,2}$, то матимемо граф B_2 із лишнім ребром, де $B_2 = (K_8^0, K_8^1 \setminus (K_{1,2}^1 \cup 2K_2^1))$.

Розглянемо випадок г). Маємо не 2-кліткове вкладення $f, f : K_5 \rightarrow \sigma_1$ та два різних підвипадки укладання (відносно зеленого чотирикутника) графа $St_{3,4,4}(K_3) \setminus (ab)$ в середину восьмикутника, які аналогічні наведеним на рис. 1.3, де три вершини графа K_3 розфарбовані, та три підвипадки г1), г2), г3). Підвипадок г1) –одна вершина графа K_3 з'єднана ребрами з трьома із чотирьох вершин із двократним доступом, тобто матимемо граф B_2 . Підвипадок г2) –одна з вершин графа K_3 з'єднана ребрами із кожною з чотирьох вершин із двократним доступом, то матимемо граф B_2 із лишнім ребром. Підвипадок г3) –одна вершина графа K_3 з'єднана ребрами з трьома із чотирьох вершин із двократним доступом, тобто граф $St_{3,4,4}(K_3) \setminus (ab)$ укладемо (відносно зеленого чотирикутника) граф $St_{3,3,4}(K_3) \setminus (ab)$ в середину восьмикутника, як наведено на рис. 1.4, де три ребра графа K_3 пофарбовані. Підвипадок г4)–одна вершина графа K_3 з'єднана ребрами з чотирма із чотирьох вершин із двократним доступом, тобто граф $St_{3,3,4}(K_3) \setminus (ab)$ укладемо (відносно зеленого чотирикутника sz) в середину восьмикутника, як наведено на рис. 1.4, де три ребра графа K_3 пофарбовані.

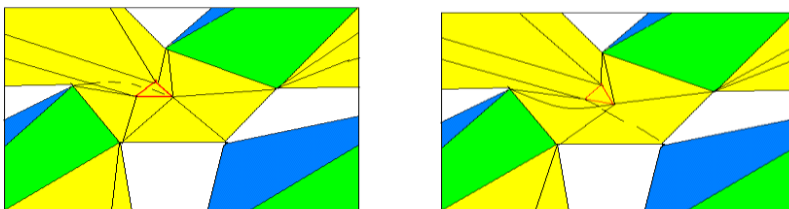


Рис. 1.4. Підвипадки г3), г4), зліва направо, та $St_{3,3,4}(K_3) \setminus (ab) \subset \bar{s}$

Розглянемо випадок б). Наявність одного ребра e графа G_1 з трьома вершинами породжує два підвипадки: б1) $f(G_1) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ для не 2-кліткового вкладення f графа K_5 в

тор σ_1 ; б2) $f(G_1) \not\subset \bar{s} \setminus \partial s$, для довільної клітини s , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ 2-кліткового вкладення f графа K_5 в тор σ_1 . У підвипадку б1), згідно леми 1.1, матимемо для не 2-кліткового вкладення f графа K_5 в тор σ_1 таку клітину s , що забезпечує двосторонній доступ до трьох вершин графа K_5 при вкладенні в неї ребра (a, b) .

У підвипадку б2), згідно леми 1.1, матимемо для 2-кліткового вкладення f графа K_5 в тор σ_1 такі дві 2-клітини s, s' в одну з яких вкладатиметься ребро (a, b) .

З іншого боку для $St_{n_1}(v_{i1})$ та $St_{n_2, n_3}(K_2)$ маємо наступні три підвипадки: підвипадак б1)- обидва графи вкладено в не 2-клітину, підвипадак б2)- один граф вкладено в не 2-клітину, а інший до 2-клітки; підвипадак б3)- обидва графи вкладено до 2-клітин. В кожному з цих підвипадків існуватиме підграф ізоморфний $B_3 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1)$.

Підвипадак б1) коли обидва графи вкладено в не 2-клітину.

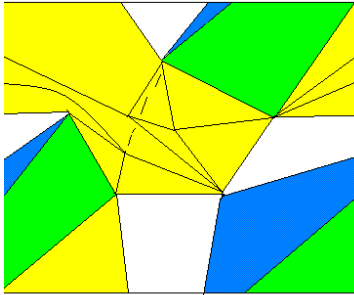


Рис. 1.5. Підвипадак б1) та $St_{3,3}(K_2) \subset \bar{s}$, $St_5(v) \subset \bar{s}$

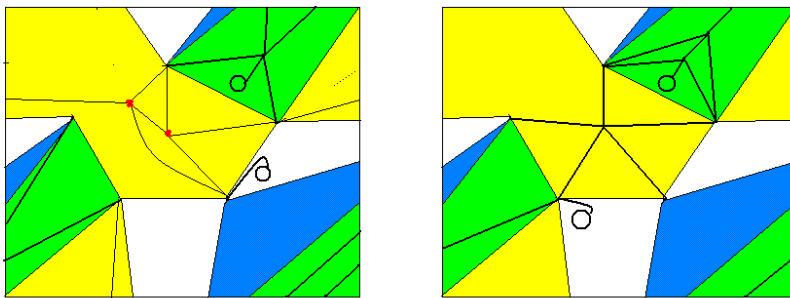


Рис. 1.6. Підвипадак б2) та $St_{3,3}(K_2) \subset \bar{s}$, $St_5(v) \subset sz$.

Підвипадак б2) коли один граф вкладено в не 2-клітину, а інший до 2-клітки.

Підвипадак б3) обидва графи вкладено до 2-клітин. Мають місце два варіанти наведені на рис.1.6а в кожному з яких маємо підграф B_3 .

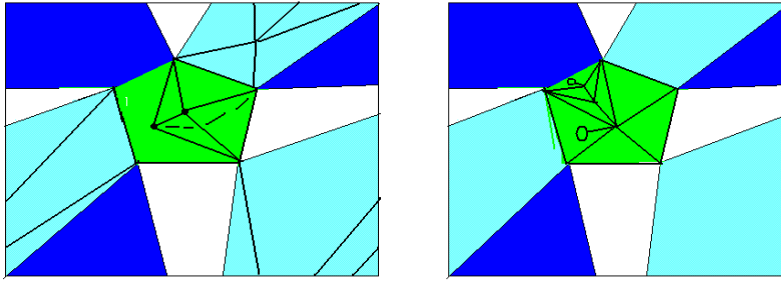
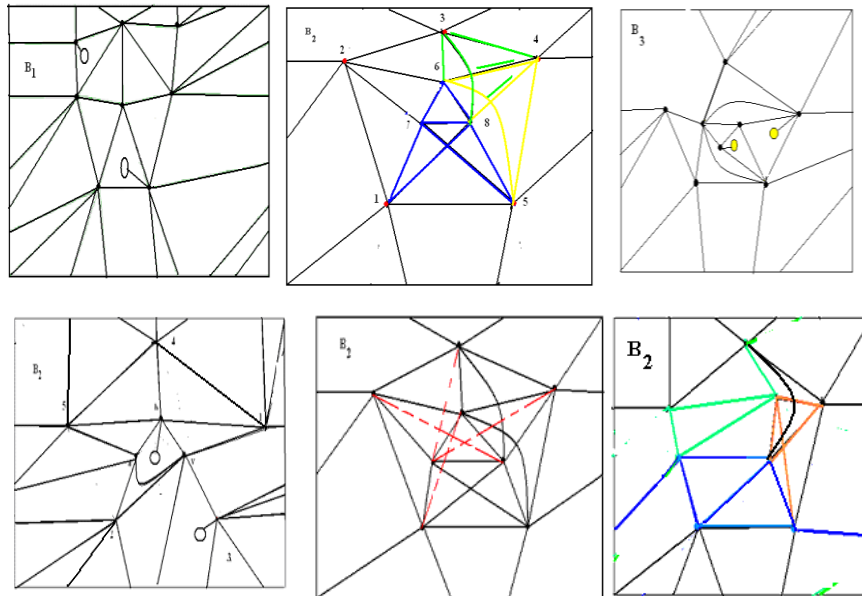


Рис. 1.6а. Два варіанти підвипадку б3).

Розглянемо випадок а). Стверджуємо, що для кожної із трьох зірок $St_{n_i}(v_i)$ із центральними вершинами v_i , які належатимуть графу G_1 , та висячими вершинами $\{g_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ і ребрами в кількості n_i , має виконуватися умова $n_i = 5$. Якщо припустити, що для якогось n_i матиме місце $n_i < 5$, нехай це ребро (v_1, g_1) , то згідно лемі 1 для не 2-кліткового f' існує клітина в середину якої вкладатимуться дві зірки з п'ятьма висячими ребрами та одна зірка з чотирма висячими ребрами. Це означатиме побудову вкладення $f'', f''': G \rightarrow \sigma_1$, що суперечить умові щодо роду графа G , тобто наше припущення невірне. Таким чином $G = B_1$. Мінімальне вкладення графа B_1 в подвійний тор, або тор з ручкою $h, h = h(s_1, s_2)$, побудуємо шляхом розширення f'' до f'''' , яке полягатиме у розміщенні ребра $f''(v_1, g_1)$ на ручці h , де $f''(v_1) \in \partial s_1, f''(g_1) \in \partial s_2$.



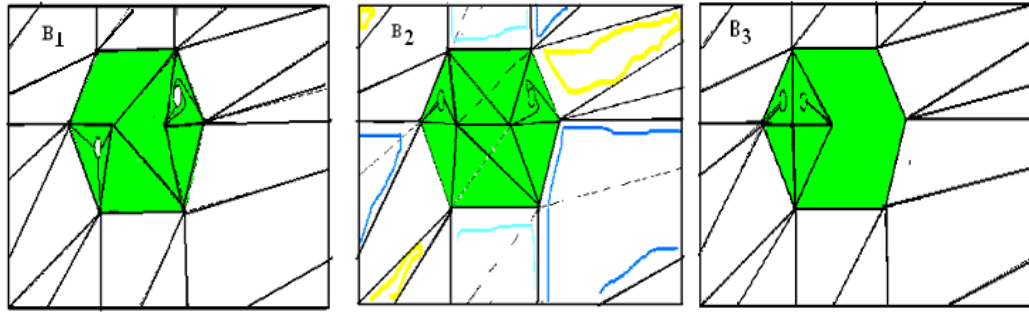


Рис.1.7. Мінімальні вкладення графів B_1, B_2, B_2, B_3 , зліва направо. Верхній ряд доводить, що $H=K_5$ мінімізує число перехрещень ребер на торі графів B_1, B_2, B_3 .

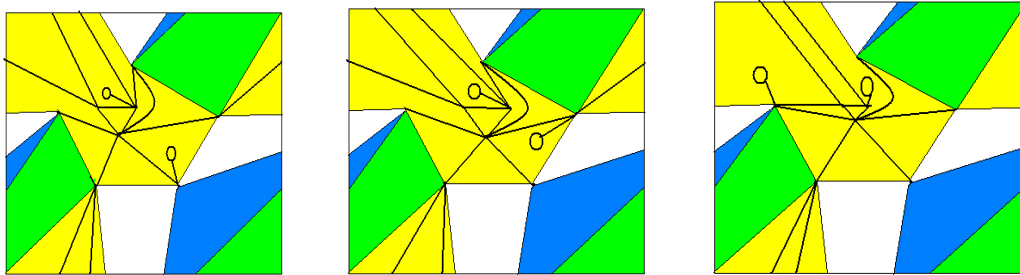


Рис.1.7а. Вкладення квазісфери з центром K_3 до не 2-клітини тору та його розширення на K_5 до вкладення в подвійний тор.

Наслідок 1.1. Для B_1, B_2, B_3 неізоморфних 8-ми вершинних графів-обструкцій для тору мають місце наступні ϕ -перетворення:

- 1) $\phi(K_5 + St_{5,5,5}(\bar{K}_3), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (B_1, \{i\}_{i=1}^5)$, де $St_{5,5,5}(\bar{K}_3)$ -квазісфера з центром з трьох несуміжних між собою вершин, які мають по п'ять висячих ребер із кінцевими вершинами, кожна з яких ототожнюється із кожною вершиною з множини $\{1'', 2'', 3'', 4'', 5''\}$, а потім з вершинами $\{1', 2', 3', 4', 5'\}$ графа K_5 , $St_{5,5,5}(\bar{K}_3) = \bigcup_{j=1}^3 St_5(j)$;
- 2) $\phi(K_5 + St_{3,4,4}(K_3), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (B_2, \{i\}_{i=1}^5)$, де $St_{3,4,4}(K_3)$ квазісфера з центром з трьох суміжних між собою вершин, одна з яких має три висячих ребра із кінцевими вершинами, кожна з яких ототожнюється із вершинами $1', 2', 3'$ графа K_5 , а дві інші вершини матимуть по чотири висячих ребра із кінцевими вершинами, кожна з яких ототожнюється із однією з вершин $1', 2'$ та трьома вершинами $3', 4', 5'$ графа K_5 , причому множина вершин $St_{3,4,4}^0(K_3)$ породжує підграф K_4 , $K_4^0 = \{1'', 2'', 3'', 5''\}$ із трикутником K_3 одне ребро якого має ще два кратних 1-підрозділених виділеними точками $3'', 4''$, а два інших ребра цього K_3 мають по одному кратному ребру 1-підрозділеному виділеними точками $1'', 2''$;

3) $\varphi(K_5 + St_{2,2,5}(K_3), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (B_3, \{i\}_{i=1}^5)$, де $St_{2,2,5}(K_3)$ квазізірка з центром з трьох суміжних між собою вершин, одна з яких має п'ять висячих ребра із кінцевими вершинами, кожна з яких ототожнюється із вершинами 1',2',3',4',5' графа K_5 , а дві інші вершини матимуть по два висячих ребра із кінцевими вершинами, кожна з яких ототожнюється із однією з вершин 1',2' графа K_5 , причому множина вершин $St_{2,2,5}(K_3)$ породжує підграф K_5 . Іншими словами B_3 є парою графів K_5 склеєною по трикутнику.

Наслідок 1.2. Для побудови графа G , $G \in \{B_1, B_2, B_3\}$, де B_i - неізоморфний 8-ми вершинна граф-обструкція для тору, поданого як φ -образ графа K_5 та квазізірки з центром H та підмножини M точок приєднання, є наступний алгоритм.

2.2.2. АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРУ

Крок 0. Нехай задані всі неізоморфні мінімальні вкладення в тор графа K_5 та задано вкладення графа H (з принаймні одним перетином ребер у внутрішніх точках) в недвоклітку на границі якої розташовані точки приєднання графа K_5 до H . Вибераємо підмножину точок приєднання M з множини варіантів вибору \mathfrak{A} для M , складеної з множини точок графа, що є спільними для H та K_5 , і розщепимо кожну вершину з M на дві, тим самим утворимо дві множини M'' , M' графів H та K_5 , відповідно. Також фіксуємо порядок слідування (за часовою стрілкою) вершин приєднання. Вважатимемо даною процедуру обчислення роду графа, вкладеного в тор без перетину ребер у внутрішніх точках ребер, за допомогою формули Ейлера.

Крок 1. Якщо граф H має ребро e , то воно задовольняє одній із наступних умов:

- Ребро e , $e = (a, b)$, разом з деякими висячими ребрами квазізірки та графа K_5 породжує, принаймні, один мінімальний за включенням підграф графа G гомеоморфний K_4 , і кількість всіх таких підграфів позначимо через $n(e)$.
- Ребро e , $e = (a, b)$, разом із деякими висячим ребрам квазізірки та графа K_5 породжує мінімальний за включенням підграф не гомеоморфний K_4 , але гомеоморфний колесу чи напівколесу з центром в a чи b , наприклад, $K_4 \setminus e$, W_3 , C_4 та іншим графам. Відмітимо, що на ребрах вказаних вище графів утворюватиметься перешкода 2-доступу до хоча б однієї з кінцевих вершин пари ребер, що перехрещуються на площині, до однієї з вершин графа K_5 приєднання висячих ребер квазізірки з центром H і кількість таких підграфів позначимо через $m(e)$.

в) Ребро e , $e = (a, b)$, не породжує з висячими ребрами квазізірки та графа K_5 ніяких інших міні мальних за включенням зв'язних підграфів графа G , окрім згаданих в умовах а) та б).

Відмітимо: 1) наявність породженого деяким ребром e графа H підграфа графа G гомеоморфного $K_4 \setminus e$, означатиме наявність породженого іншим ребром u графа H підграфа гомеоморфного K_4 , та квазізірка із центром H графа має ребро у якого одна з кінцевих вершин має 2-доступ на торі, 2) одне з двох зхрещених на площині ребер підграфа гомеоморфного K_4 матиме кінцеву вершину, що ототожнюватиметься із вершиною графа гомеоморфного K_5 із 2-доступом на торі.

Перебираємо кожне ребро графа H та накопичимо n , m , $n = \sum_{\forall e, e \in H} n(e)$, $m = \sum_{\forall e, e \in H} m(e)$.

Крок 2. Якщо кількість різних підграфів гомеоморфних K_4 на 1 більше числа вершин з M -множини приєднання із 2-доступом на торі до K_5 , до яких ототожнюють кінцеву вершину того ребра, що схрещується на площині з іншим ребром з K_4 , то граф G матиме рід не більше 2, та перевіряємо наявність іншого ребра, яке своїми кінцевими вершинами розділяє на границі клітки тора пару кінцевих вершин кожного із схрещених ребер, інакше виводимо “граф G матиме рід 1” та переходимо на крок 0.

Крок 3. Якщо ребер в H немає, то приєднуємо дві прості зірки $St_5(1)$, $St_5(2)$ до всіх вершин з K_5 із 2-кратним доступом, а $St_5(3) \setminus e$ до чотирьох вершин з K_5 , а кінцеві вершини ребра e матимуть на торі число досяжності 2.

Крок 4. Перевіряємо кожне висяче ребро u квазізірки $St_M(H, K_5)$ чи суттєве воно відносно роду 2 шляхом стягнення його в точку та визначення роду отриманого графа G_u . Якщо ребро суттєве відносно роду 2, тобто рід $\gamma(G_u)$ отриманого графа дорівнює 2, то залишаємо ребро в первісному виді, інакше $G := G_u$, т.т. залишаємо ребро u графа стягнутим в точку. Перевіривши всі ребра графа G виводимо: “граф G із стиснутими в точку несуттєвими ребрами є граф-обструкцією для тора”.

Кінець алгоритму.

Висновок. Граф-обструкція порядку 8 є φ -образом K_5 та графа H в залежності від задіяних підмножин вершин та їхніх характеристик кратності та багатосторонності доступу множини вершин графу K_5 , де граф H є одним з наступних трьох:

- 1) об'єднання трьох однакових зірок із несуміжними центрами та п'ятьма променями,
- 2) квазізіркою з центром-графом $K_5 \setminus e$ з трьома трикутними променями та двома

висячими, які підлягатимуть стисненню в точку, 3) є квазізіркою з центром-графом K_5 із n ятьма променями з яких два підлягатимуть стисненню в точку.

2.2.3 9-ТИ ВЕРШИННІ ГРАФИ D_5, \dots, D_{19} ГРАФ-ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРУ

Задача. Вивчити структуру 9-ти вершинних графів-обструкцій для тору з метою використання при побудові n -вершинних, $n > 9$, графів-обструкцій для тору.

В [29] запропоновано спосіб побудови графів-обструкцій орієнтованого роду як φ -образу двох графів, один з яких має бути квазізіркою, з'єднаних шляхом ототодження пар вершин, для випадку несуттєвості порядку ототодження зазначених пар точок; тобто один із підграфів породжених підмножинами точок допускатиме перестановку довільної пари тачок з'єднання, наприклад, є повним графом як в D_6, D_7, D_8 . Цей підхід може видавати такі графи, які набуватимуть статус обструкцій після стискання в точку деяких лишніх ребер-променів квазізірки, саме так побудовані графи $D_9, D_{11}, D_{15}, D_{16}, D_{17}, D_{19}, D_{20}$. Однак не всі графи-обструкції для тору можливо отримати цим способом, наприклад такими є графи $D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{17}, D_{18}, D_{21}, \dots, D_{27}$. Однією з причин відсутності лишніх ребер є необхідність двостороннього доступу до деяких точок із пар точок, що підлягають ототоженню.

Визначення 5. Граф K є t -мінімальним роду γ , якщо число досяжності множини вершин цього графа дорівнює t та при видаленні чи стисканні в точку довільного ребра зменшується число досяжності множини вершин нового графа чи зменшується рід нового графа утвореного з K . Наприклад, граф $K_6 \setminus K_3^1$ -2-мінімальний роду 1, тобто $K_{3,3}$ з додатковими трьома ребрами на вершинах однієї з двох долей, або це граф $K_5 \setminus e$ із додатковою вершиною степеня 3, що суміжна з трьома вершинами графа $K_5 \setminus e$ із числом досяжності 2.

Визначення 6. Граф K є t -мінімальним роду 1, $t > 0$, відносно заданої підмножини N множини точок цього графа при вкладенні до клітки s , $s \in \sigma_1 \setminus K$, границя якої може мати цикломатичне число $p_1(\partial s)$, $p_1(\partial s) \geq 0$, якщо число досяжності $t_K(N, \sigma_1)$ підмножини точок N цього графа дорівнює t та при видаленні довільного ребра e графа K матимемо або $t_K(N, \sigma_1) > t_{K \setminus e}(N, \sigma_1)$, або $\gamma(K \setminus e) = 0$.

Твердження 2.1. Мають місце наступні співвідношення:

1. Площинний граф H із виділеною підмножиною точок X , що має число досяжності $t, t \leq 2$, та принаймні одним лишнім ребром відносно властивості 2-мінімальності при вкладенні (без перетину ребер у внутрішніх точках) до тору чи його клітини, або на

проективній площині чи її частині (не двоклітці), може за певних умов набувати властивості 2-мінімальності роду 1.

2. Видалення ребра в такому площинному графі H призводить до збільшення на 1 числа двостороннього доступу до кінцевих точок видаленого ребра

Наприклад, граф K утворений із K_4 у якого один трикутник K_3 має три пари 2-кратних ребер 1-підрозділених вершинами з множини $\{v_i\}_1^3$, які разом з вершиною $v, v \in K_4 \setminus K_3$ утворюють множини з числом досяжності 2, та при не 2-клітковому вкладенні в тор граф K є 2-мінімальним. Для проективної площини таким буде граф I утворений з K_3 який має три пари 2-кратних ребер 1-підрозділених вершинами з $\{v_i\}_1^3$, що утворюють множини з числом досяжності 2 та при не 2-клітковому вкладенні в проективну площину граф I є 2-мінімальним.

Твердження 2.2. Нехай граф G є ϕ -образом графа $K_{3,3}$ та квазізірки H з множинами точок приєднання Y, X , де граф H роду 0 із виділеною підмножиною точок X , що має число досяжності $t, t \leq 2$, та є множиною приєднання до графа $K_{3,3}$, і має принаймні одне лишнє ребро відносно властивості 2-мінімальності при вкладенні (без перетину ребер у внутрішніх точках) до тору чи його клітки.

Тоді мають місце наступні співвідношення:

1. Якщо підграф H вкладений в недвоклітку графа $K_{3,3}$, яка є гранню на торі, із двостороннім доступом до принаймні однієї з точок приєднання, то $\gamma(G) = 1$.
2. Якщо підграф H вкладений в двоклітку графа $K_{3,3}$, як грань на торі, то $\gamma(G) = 2$.

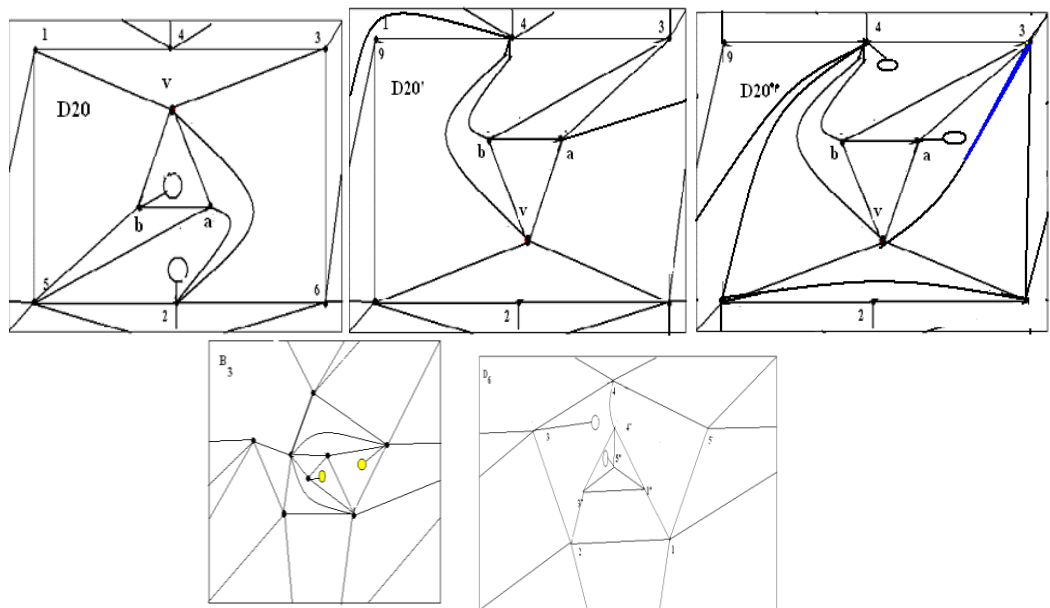


Рис.2.0. Графи $D_{20'}$ та D_{20} мінімально вкладені в тор та 2-тор є прикладами до твердження 2.2., відповідно,

Лема 2.1. Для графів D_4, D_5, D_6, D_7 як 9-вершинних графів-обструкцій для тору мають місце наступні φ -перетворення:

$$1) \varphi(K_{3,3} + K, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_4, \{i\}_1^6), K_{3,3}^0 = \{i'\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6, K = (\{i''\}_{i=1}^6 \cup \{a, b, c\}, St_4^1(c) \cup K_5^1 \setminus \{(a, b)\}),$$

$$St_4^0(c) = \{i''\}_{i=1}^3 \cup \{a\}, K_5^0 = \{i''\}_{i=4}^6 \setminus \{(a, b)\}, K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) \cup K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}, \text{ або } D_4,$$

$$D_4 = (K_{4,5}^0, K_{4,5}^1 \cup \{(a, c)\}), \text{ містить підграф ізоморфний графу } E_{18}, \text{ наведеному в [28];}$$

$$2) \varphi(K_{3,3} + K, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_5, \{i\}_{i=1}^6), \text{ де } K = (\{i''\}_{i=1}^6 \cup \{a, b, c\}, St_3^1(c) \cup K_5^1), St_3^0(c) = \{i''\}_{i=1}^3,$$

$$K_5^0 = (\{i''\}_{i=4}^6 \cup \{a, b\}, K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) \cup K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3} \text{ причому } D_5 \text{ має підграф ізоморфний}$$

E_3 , або E_{18} , наведені в [28];

$$3) \varphi(K_5 + K, \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_6, \{i\}_{i=1}^5), \text{ де } K_5^0 = (\{i'\}_{i=1}^5, K^0 = (\{i''\}_{i=1}^5 \cup \{a, b, c, v\}, K_4^0 = \{a, b, c, v\},$$

$$K^1 = K_4^1 \cup \{(a, 1''), (b, 5''), (c, 2''), (c, 3''), (v, 4''), (v, 3'')\};$$

$$4) \varphi(K_5 + K, \sum_{i=1}^3 (i' + i'')) \rightarrow (D_7, \{i\}_{i=1}^3), \text{ де } K_5^0 = \{i'\}_{i=1}^5, K^0 = \{i''\}_{i=1}^3 \cup K_4^0, K_4^0 = \{a, b, c, v\},$$

$$K^1 = K_4^1 \cup \{(b, 1''), (a, 2''), (c, 3''), (v, 2'')\}.$$

Доведення. Доведемо твердження 1. Мінімальне вкладення $f_4 : D_4 \rightarrow \sigma_2$, наведене на рис.

2.1, побудовано як продовження мінімального вкладення f графа $K_{3,3}$ в тор σ_1 наступним

чином: а) $f_4(K \setminus (c, 2'')) \subset \overline{s_1} \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=1}^3) = \overline{K_3}$,

$f_4 | K_{3,3}$ в σ_1 , s_1 -клітка із границею ∂s_1 $\partial s_1 \cap K_{3,3} = \{1', 4', 2', 5', 1'', 6', 2'', 4'', 3'', 6'', 1''\}$; б)

$f_4(c, 2'') \subset h(s_{11}, s_{12})$, $h(s_{11}, s_{12})$ -ручка приєднана до кліток s_{11}, s_{12} , $\{s_{11}, s_{12}\} \subset s_1 \setminus f_4(K \setminus (c, 2''))$,

стандартним перетворенням цих кліток. Згідно формули Ейлера матимемо рівність

$\gamma(D_4) = 2$, бо граф $f_4(D_4)$ має 8 граней, 19 ребер та 9 вершин. Оскільки на множині

вершин графа D_4 є підграф гомеоморфний $K_{3,3}$, то існує реберне покриття графа $D_4 \setminus u$

множиною із двох копій графів $K_{3,3}$. Порядок ототождження пар вершин (i', i'') є

суттєвим. Твердження 1 доведено

Доведемо твердження 2. Мінімальне вкладення $f_5 : D_5 \rightarrow \sigma_2$, наведене на рис. 2.1,

побудовано як продовження мінімального вкладення f графа $K_{3,3}$ в тор σ_1 наступним

чином: а) $f_5(K \setminus (a, b)) = f_5(St_3(a) \cup St_3(b) \cup St_3(c))$, $f_5(St_3(b)) \subset \overline{s_2} \setminus \partial s_2$, $f_5(St_3(c)) \subset \overline{s_3} \setminus \partial s_3$,

$f_5(St_3(a) \subset \bar{s}_1 \setminus \partial s_1$, де $s_i \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$, $i = 1, 2, 3$, $K_{3,3}^0 = \{i''\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = \bar{K}_3$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=1}^3) = \bar{K}_3$; б) $f_4((a,b) \subset h(s_{11}, s_{12})$, $h(s_{11}, s_{12})$ -ручка приєднана до кліток s_1, s_2 стандартним перетворенням цих кліток. Згідно формули Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_5) = 2$, бо граф $f_5(D_5)$ має 7 граней, 18 ребер та 9 вершин. Існує реберне покриття графа $D_5 \setminus u$ двома графами гомеоморфними графу $K_{3,3}$. Твердження 2 доведено.

Доведення твердження 3. Мінімальне вкладення $f_6 : D_6 \rightarrow \sigma_2$, наведене на рис. 2.1, побудовано як продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним

чином: а) $f_6(K \setminus (a, l'')) \subset \bar{s}_1 \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$, s_1 -клітка із границею ∂s_1 , $\partial s_1 \cap K_5^0 = \{i''\}_1^5$; б) $f_6((a, l'')) \subset h(s_{11}, s_{12})$, $h(s_{11}, s_{12})$ -ручка приєднана до кліток s_{11}, s_{12} , $\{s_{11}, s_{12}\} \subset s_1 \setminus f_6(K \setminus (a, l''))$ стандартним перетворенням цих кліток. Згідно формули Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_6) = 2$, бо граф $f_6(D_6)$ має 9 граней, 20 ребер та 9 вершин. Існує реберне покриття графа D_6 множиною із двох графів гомеоморфних K_5 . Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Мінімальне вкладення $f_7 : D_7 \rightarrow \sigma_2$, наведене на рис. 2.1, побудовано як продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним

чином: а) $f_7(K \setminus (a, 2'')) \subset \bar{s}_1 \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$, s_1 -клітка із границею ∂s_1 , $\partial s_1 \cap K_5^0 = \{i''\}_1^5$; б) $f_7((a, 2'')) \subset h(s_{11}, s_{12})$, $h(s_{11}, s_{12})$ -ручка приєднана до кліток s_{11}, s_{12} , $\{s_{11}, s_{12}\} \subset s_1 \setminus f_7(K \setminus (a, 2''))$ стандартним перетворенням цих кліток. Згідно формули Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_7) = 2$, бо граф $f_7(D_7)$ має 9 граней, 20 ребер та 9 вершин. Оскільки на множині вершин графа D_7 існує підграф гомеоморфний K_5 , то є реберне покриття графа D_7 множиною із двох копій графів K_5 . Твердження 4 доведено. Лемма 2.1 доведена.

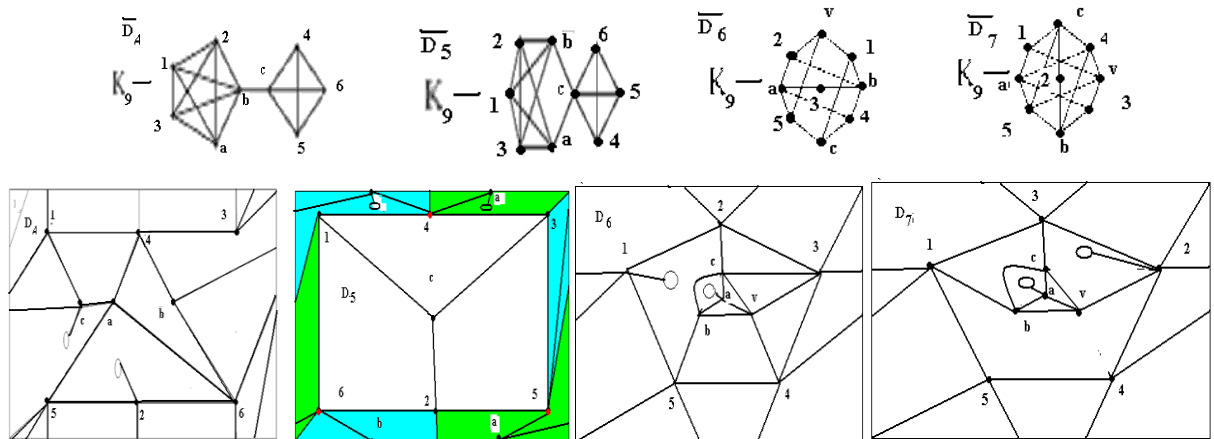


Рис.2.1. Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_4(D_4)$, $f_5(D_5)$, $f_6(D_6)$, $f_7(D_7)$ в σ_2 ; де ручку, приклеєну до тору, зображено двома еліпсами, точки яких ототожнюються із збереженням напрямку обходу точок.

Лема 2.2. Для D_8, D_9, D_{10}, D_{11} -обструкцій для тору мають місце наступні ϕ -перетворення:

$$1) \phi(K_5 + K, \sum_{i=3,5} (i' + i'')) \rightarrow (D_8, \{i\}_{i=3,5}), \text{ де } K_5^0 = \{i'\}_{i=1}^5, K_4^0 = \{a, b, v, c\},$$

$$K = (K_4^0 \cup \{3'', 5''\}, K_4^1 \cup \{(a, 3''), (v, 3''), (b, 5''), (c, 5'')\});$$

$$2) \phi(K_5 + K, \sum_{i=1,5} (i' + i'')) \rightarrow (D_9, \{i\}_{i=1,5}), \text{ де } K_5^0 = \{i'\}_{i=1}^5, K = (\{a, b, c, v, 1'', 5''\}, (K_5^1 \setminus \{1'', v\}) \cup \{3'', 2''\}),$$

$$K(\{a, b, c, v, 1'', 5''\}) = K_5 \text{ граф } D_9 \text{ наведений в [20];}$$

$$3) \phi(K_5 + K, \{1' + 1''\}) \rightarrow (D_{10}, \{1\}), K = K_5, K_5^0 = \{i'\}_{i=1}^5, K^0 = \{i''\}_{i=1}^5.$$

$$4) \phi(K_{3,3} + K, \sum_{i=1,2,5} (i' + i'')) \rightarrow (D_{11}, \{i\}_{i=1,2,5}), K = (\{1'', 2'', 5'', a, b, c\}, K_{3,3}^1 \cup K_3^1), K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = \overline{K_3},$$

$$K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}, K(\{1'', 2'', 5''\}) = K_3, K(\{a, b, c\}) = K_3.$$

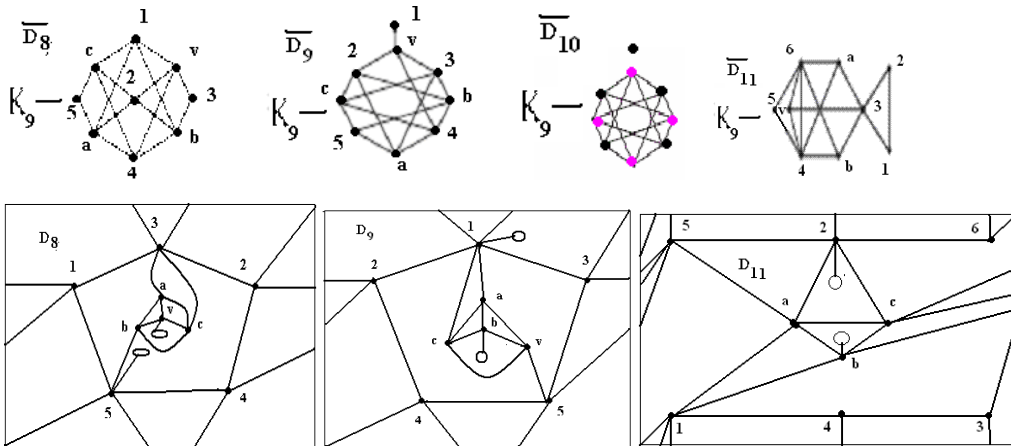


Рис.2.2. Графи $\overline{D_8}, \overline{D_9}, \overline{D_{10}}, \overline{D_{11}}$ і вкладення графів $f_8(D_8)$, $f_9(D_9)$, $f_{11}(D_{11})$ в 2-тор.

Доведення. Структура графів D_8 , D_9 , D_{10} виписана в [29], а їхній рід оцінено в [24].

Доведемо твердження 1. Граф $f_8(D_8)$ має 9 граней, 20 ребер та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_8) = 2$, а побудоване 2-кліткове вкладення f_8 графа D_8 в подвійний тор σ_2 буде мінімальним та наведене на рис. 2.2.

Доведемо твердження 2. Відмітимо той факт, що граф D_9 можливо подати як склейку двох графів K_5 ототожнених по ребру одного та частині ребра іншого графа. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_9 в подвійний тор σ_2 графа D_9 наступним чином: а)

$f_9(K \setminus (b, l'')) \subset \bar{s}_1 \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f_9(K_5)$, $f_9|_{K_5}$ 2-кліткове вкладення в тор графа K_5 , б)

$f_9(b, l'') \subset h(s_1, s_{11})$, де ручка приклеєна до s_{11} та s_1 , $s_{11} \in (\bar{s}_1 \setminus \partial s_1) \setminus f_9(K \setminus (v, l''))$, стандартним перетворенням. Звуження 2-кліткового вкладення $f_9|_K$ задовільняє лемі 1.1. Граф $f_9(D_9)$ має 9 граней, 20 ребер та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_9) = 2$, а побудоване 2-кліткове вкладення f_9 графа D_9 в подвійний тор σ_2 буде мінімальним та наведене на рис. 2.2. Відмітимо факт реберного покриття графа D_9 множиною із двох копій графів K_5 . Множина вершин $\{1'', 2''\}$ площинного графа $K \setminus (1'', 3'') + (3'', 2'')$ має число досяжності 2, а множина вершин $\{1', 2'\}$ графа K_5 є досяжною на торі, порядок ототодження пар вершин $\{(1', 1''), (2', 2'')\}$ є несуттєвим, тому згідно [29] матимемо $\gamma(D_9) \leq 2$. Твердження 2 леми 2.2 доведено. Твердження 3 не потребує доведення, бо граф D_{10} -два графа K_5 зі спільною вершиною.

Доведемо твердження 4. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{11} в подвійний тор σ_2 графа

D_{11} наступним чином: а) $f_{11}(K \setminus (b, 2'')) \subset \bar{s}_1 \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f_{11}(K_{3,3})$, $f_{11}|_{K_{3,3}}$ не 2-кліткове

вкладення в тор, б) $f_{11}((b, 2'')) \subset h(s_1, s_{11})$, де ручка приклеєна до 2-клітини s_{11} та кільця s_1 , стандартним перетворенням $s_{11} \in (\bar{s}_1 \setminus \partial s_1) \setminus f_{11}(K \setminus (b, 2''))$. Звуження 2-кліткового

вкладення $f_{11}|_K$ задовільняє лемі 1.2 причому ребра трикутника $K(\{i'\}_{i=4}) = K_3$

розташовані у 2-клітині- шестикутнику графа $K_{3,3}$, відмінному від s_1 . Граф $f_{11}(D_{11})$ має 10

граней, 21 ребро та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_{11}) = 2$, а

побудоване 2-кліткове вкладення f_{11} графа D_{11} в подвійний тор σ_2 буде мінімальним та

наведене на рис. 2.2. Відмітимо факт реберного покриття графа $D_{11} \setminus K_3^1$ множиною із

двох копій графів $K_{3,3}$. Множина вершин $\{1'', 3''\}$ графа K має на торі двосторонній

доступ, тому перехрещені на площині клітки s_1 ребра розташовуються в різних частинах

розділеної навпіл $f_{11}(K)$ клітки, порядок ототодження пар вершин $\{(1', 1''), (2', 2''), (5', 5'')\}$ є

суттєвим. Твердження 4 доведено. Лема 2.2 доведена.

Лема 2.3. Для графів $D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}$ як 9-вершинних графів-обструкцій для тору мають місце наступні ϕ -перетворення:

1) $\varphi(K_{3,3} + K, \sum_{i=1}^3 (i' + i'')) \rightarrow (D_{12}, \{i\}_1^3)$, де $K = K_6 \setminus K_3^1$, $K^0 = \{1'', 2'', 3'', a, b, v\}$, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6$,

$K^1 = (K_6^1 \setminus \{(a, b), (a, v), (b, v)\})$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$;

2) $\varphi(K_5 + K, \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{13}, \{i\}_{i=1}^5)$, де $K_5^0 = \{i'\}_{i=1}^5$, $K^0 = \{1'', 2'', 3'', a, b, c\}$, граф K є φ -образом

графів $K_4, K_5 \setminus (2'', 4'')$, виконаному шляхом ототодження по ребру (b, c) , де

$K_4^0 = \{1'', 3'', 5'', b, c\}$, $K_5^0 \setminus (2'', 4'') = \{4'', 2'', a, b, c\}$, де вершина $5''$ розділяє ребро $(1'', 3'')$;

3) $\varphi(K_{3,3} + K, \sum_{i=1, \neq 4}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{14}, \{i\}_{i=1, \neq 4}^5)$, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = \overline{K_3}$,

$K^0 = \{1'', 2'', 3'', 5'', a, b, v\}$, $K = (K_6^0 \cup \{3''\}, K_6^1 \setminus K_3^1 \cup \{(3'', v), (a, 3'')\})$, $K(2'', 3'', 6'') = \overline{K_3}$, $K(\{a, b, v, 3''\}) \cong K_3$, де вершина $3''$ розділяє ребро (a, v) ;

4) $\varphi((K_6 \setminus K_3^1) + K, \sum_{i=4}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{15}, \{i\}_{i=4}^6)$, $K = (K_5^0, K_5^1 \setminus (4'', 5'')) \cup \{(a, 6'')\}$,

$K_6 \setminus K_3^1(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $K^0 = \{4'', 5'', 6'', a, b, v\}$, $K_6^0 = \{i''\}_{i=1}^6$, $K_6 \setminus K_3^1(\{i'\}_{i=1}^3) = K_3$;

Доведення. Доведемо твердження 1. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{12} в подвійний тор

σ_2 графа D_{12} наступним чином: а) $f_{12}(K \setminus (a, b)) \subset \overline{s_1} \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f_{12}(K_{3,3})$, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6$,

$K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = \overline{K_3}$, $K^0 = \{1'', 2'', 3'', a, b, c\}$, $K_{3,3}(\{1'', 2'', 3''\}) = \overline{K_3}$,

$K = (K_{3,3}^0 \cup \{6''\}, K_{3,3}^1 \cup \{(6'', c), (a, 6''), (a, c)\})$, $K_{3,3}(\{a, b, c\}) = \overline{K_3}$, $f_{13} | K_5$ в σ_1 не 2-кліткове, s_1 -клітка

із границею ∂s_1 , $\partial s_1 \cap K_{3,3} = \{1', 4', 2', 5', 1', 6', 2', 4', 3', 6', 1'\}$; б) $f_{12}(a, b) \subset h(s_{11}, s_{12})$, де ручка

$h(s_{11}, s_{12})$ приклеєна до клітини s_{11} та s_{12} , стандартним перетворенням, $\{s_{11}, s_{12}\} \in s_1 \setminus f(K)$.

Граф $f_{12}(D_{12})$ має 11 граней, 22 ребра та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо

рівність $\gamma(D_{13}) = 2$, а побудоване 2-кліткове вкладення f_{12} графа D_{12} в подвійний тор σ_2

буде мінімальним та наведене на рис. 2.3. Порядок ототодження пар вершин з множини

$\{(1', 1''), (2', 2''), (3', 3''), (6', 6'')\}$ є несуттєвим та здійснюватимемо в порядку слідування пар, тому

матимемо $\gamma(D_{12}) = 2$. Твердження 1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{13} в подвійний тор σ_2 графа

D_{13} наступним чином: а) $f_{13}(K \setminus (b, 2'')) \subset \overline{s_1} \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$, $K_5^0 = \{i'\}_{i=1}^5$, причому

звужене вкладення $f_{13} | K_5$ в σ_1 є мінімальним, s_1 -клітка, а граф K є φ -образом графів

$K_4, K_5 / u$, виконаному шляхом ототодження по (b, c) , б) $f_{13}((b, 2'')) \subset h(s_{11}, s_{12})$, де ручка

приклеєна до клітини s_{11} та s_{12} , стандартним перетворенням, $\{s_{11}, s_{12}\} \in s_1 \setminus f(K)$. Граф $f_{13}(D_{13})$ має 11 граней, 22 ребра та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_{13}) = 2$, а побудоване 2-кліткове вкладення f_{13} графа D_{13} в подвійний тор σ_2 буде мінімальним та наведене на рис. 2.3. Порядок ототодження пар вершин з множини $\{(1',1''),(2',2''),(3',3''),(4',4''),\}$ є несуттєвим та здійснюватимемо в порядку слідування пар. Твердження 2 леми 2.3 доведено.

Доведемо твердження 3. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{14} в подвійний тор σ_2 графа

D_{14} наступним чином: а) $f_{14}(K \setminus (v,1'')) \subset \bar{s}_1 \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f_{14}(K_{3,3})$, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6$,

$K_{3,3}(\{i'\}_{i=4}^6) = \bar{K}_3$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=1}^3) = \bar{K}_3$, причому звужене вкладення $f_{14}|_{K_{3,3}}$ графа $K_{3,3}$ в σ_1 є

мінімальним, s_1 не 2-клітка; б) $f_{14}(v,1'') \subset h(s_{11}, s_{12})$, де ручка $h(s_{11}, s_{12})$ приклеєна до

клітини s_{11} та s_{12} , стандартним перетворенням, $\{s_{11}, s_{12}\} \in s_1 \setminus f(K)$, $c \in \partial s_{11} \cap f_{14}(K^0)$,

$b \in \partial s_{12} \cap f(K^0)$. Граф $f_{14}(D_{14})$ має 11 граней, 22 ребра та 9 вершин, тому за формулою

Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_{14}) = 2$, а побудоване 2-кліткове вкладення f_{14} графа D_{14} в

подвійний тор σ_2 буде мінімальним та наведене на рис. 2.3. Відмітимо реберне покриття

графу $D_{14} \setminus C_4^1$ множиною з двох графів $K_{3,3}$ та досяжність множини $\{1'', 2'', 3'', 6''\}$ графа K

вкладеного у не 2-клітину s_1 . Порядок ототодження пар вершин з множини

$\{(1',1''),(2',2''),(6',6''),(3',3'')\}$ є суттєвим, тож здійснюватимемо в порядку слідування пар.

Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{15} в подвійний тор σ_2 графа

D_{15} наступним чином: а) $f_{15}(K \setminus (a,b)) \subset \bar{s}_1 \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f_{15}(K_6 \setminus K_3^1)$, б) $f_{15}((a,b)) \subset h(s_1, s_{11})$, де

ручка $h(s_1, s_{11})$ приклеєна до клітини s_{11} , $s_{11} \in (\bar{s}_1 \setminus \partial s_1) \setminus f(K \setminus (b,a))$, та s_1 стандартним

перетворенням. Граф $f(D_{15})$ має 11 граней, 22 ребра та 9 вершин, тому за формулою

Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_{15}) = 2$, а побудоване 2-кліткове вкладення f_{15} графа D_{15} в

подвійний тор σ_2 буде мінімальним та наведене на рис. 2.3. Відмітимо факт реберного

покриття графа $D_{15} \setminus u$ множиною з двох графів $K_5 \setminus e$ та K_6 . Множина вершин графа K_6 є

досяжною на торі, а множина вершин $\{4'', 5'', 6''\}$ графа K має на площині число

досяжності 2, порядок ототодження пар вершин є несуттєвим. Твердження 4 леми 2.3

доведено.

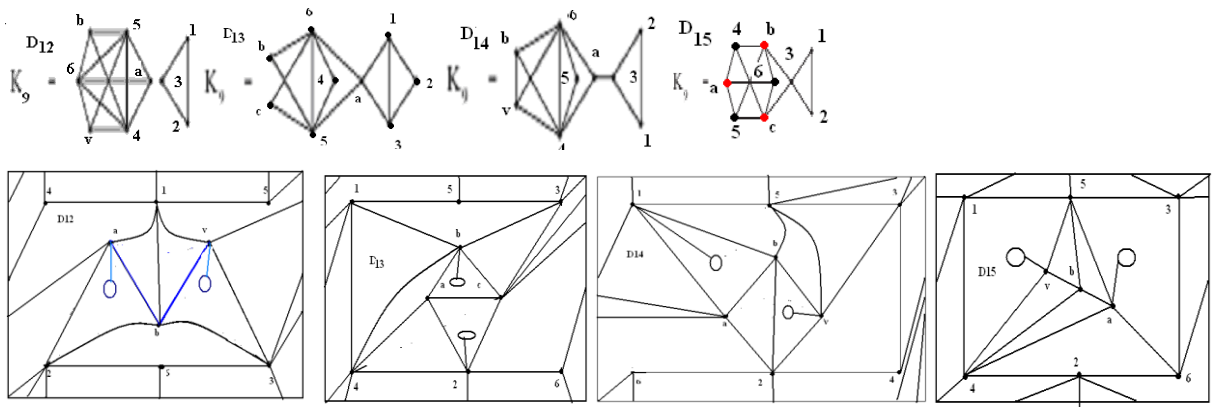


Рис.2.3. Доповнення до K_9 графів та їхні вкладення $f_{12}(D_{12}), f_{13}(D_{13}), f_{14}(D_{14}), f_{15}(D_{15})$ в 2-тор.

Лема 2.4. Для графів $D_{16}, D_{17}, D_{18}, D_{19}$ -обструкцій для тору мають місце наступні ф-перетворення:

$$1) \varphi(K_{3,3} + K, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{16}, \{i\}_{i=1}^6), \text{ де граф } K = K_5 \setminus (4'', 6'') \cup St_6(c),$$

$$K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = K_{3,3}(\{i'\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}, \quad St_6^0(c) = \{i''\}_{i=1}^6 \cup \{c\}, \quad K_5^0 \setminus (4'', 5'') = \{a, b, 4'', 5'', 2''\};$$

$$2) \varphi(K_{3,3} + (St_4(c) \cup K''), \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{17}, \{i\}_{i=1}^6), \text{ де граф } K'' \text{ утворений з двох копій}$$

графу $K_4 : K(\{a, b, 2'', 6''\})$ та $K(\{a, b, 1'', 5''\})$, що мають спільними дві вершини $\{a, b\}$,

$$K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = K_{3,3}(\{i'\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}, \quad K_{3,3}^0 = \{i''\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6, \quad St_4^0(c) = \{i''\}_{i=1}^4 \cup \{c\}, \quad K_4 = K(\{a, b, 2'', 6''\})$$

$$, \quad K_4 = K(\{a, b, 1'', 5''\});$$

$$3) \varphi(K_{3,4} \cup K_3^1 + K, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{18}, \{i\}_{i=1}^6), \text{ де граф } K \text{ визначений наступним чином: , , ,}$$

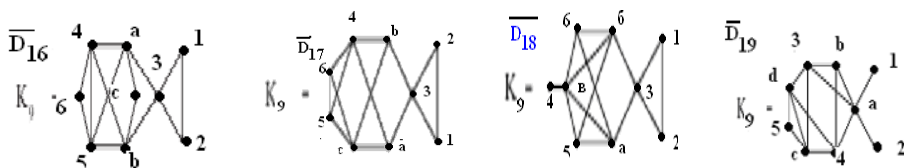
$$K = (\{1'', 2'', 4'', a, b\}, K_{5,5}^1 \setminus (1'', 4'')), \quad K_{3,4}^0 = \{i''\}_{i=1}^7, \quad K_{3,4}(\{i'\}_{i=1}^3 \cup \{7'\}) = \overline{K_4}, \quad K_{3,4}(\{i'\}_{i=4}^6) = K_3,$$

$$K_{3,4}^0 = (\{i''\}_{i=1}^3 \cup \{7''\}) \cup \{i''\}_{i=4}^6;$$

$$4) \varphi(K_5 + K, \sum_{i=1,2,5} (i' + i'')) \rightarrow (D_{19}, \{i\}_{i=1,2,5}), \text{ де } K_5^0 = \{i''\}_{i=1}^5 \text{ і граф } K \text{ визначений наступним}$$

чином: $K = K_{3,3} \setminus (a, b) \cup \{(a, 5''), (b, 5'')\}$, $K^0 = \{i''\}_{i=1,2,5} \cup \{a, b, c, d\}$, причому вершина $5''$ розділяє

ребро (a, b) , $K\{a, 1'', 2''\} = \overline{K_3}$, $K\{d, c, b\} = K_3 \setminus (d, c)$.



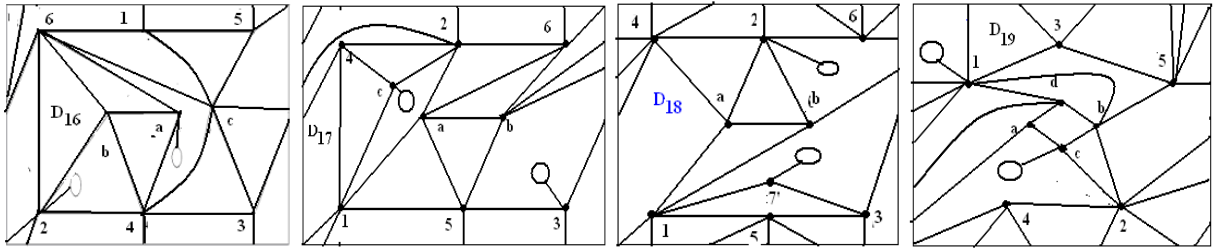


Рис.2.4. Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_{16}(D_{16})$, $f_{17}(D_{17})$, $f_{18}(D_{18})$, $f_{19}(D_{19})$ до 2-тору.

Доведення леми 2.4. Доведемо твердження 1. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{16} в

подвійний тор σ_2 графа D_{16} наступним чином: а) $f_{16}(K \setminus (a, 2'')) \subset \bar{s}_1 \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$,

де f - мінімальне вкладення графа $K_{3,3}$ в тор, б) $f((a, 2'')) \subset h_1$, де ручка $h_1 = h(s_a, s_b)$,

$\{s_i\}_{i=1}^3 = \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$, приклеєна до 2-клітин s_a, s_b стандартним перетворенням. Граф $f(D_{16})$

має 11 граней, 22 ребра та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність

$\gamma(D_{16}) = 2$, а побудоване 2-кліткове вкладення f_{16} графа D_{16} в подвійний тор σ_2 буде

мінімальним. Твердження 1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{17} в подвійний тор σ_2 графа

D_{17} наступним чином: а) $f_{17}(K'') \subset \bar{s}_1 \setminus \partial s_1$, де $s_1 \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$, f - мінімальне вкладення графа

$K_{3,3}$ в тор, $K_{3,3}^0 = \{1', 2', 3'\} \cup \{4', 5', 6'\}$, $K_{3,3}(\{1', 2', 3'\}) = K_{3,3}(\{4', 5', 6'\}) = \bar{K}_3$, б)

$f(St_4(c) \setminus (c, 3'')) \subset \bar{s}_2 \setminus \partial s_2$, де $s_2 \in (\bar{s}_1 \setminus \partial s_1) \setminus f(K'')$, в) $f((c, 3'')) \subset h_1$, де ручка $h_1 = h(s_a, s_b)$

приклеєна до 2-клітин s_a, s_b стандартним перетворенням, де $a \in \partial s_a, b \in \partial s_b$. Граф $f_{17}(D_{17})$

має 11 граней, 22 ребра та 9 вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність

$\gamma(D_{17}) = 2$, а побудоване 2-кліткове вкладення f графа D_{17} в подвійний тор σ_2 буде

мінімальним. Є реберне покриття графа $D_{17} \setminus u$ множиною з трьох копій графів $K_5, K_{3,3}$.

Твердження 2 доведено.

Доведемо твердження 3. Побудуємо мінімальне вкладення f_{18} в подвійний тор σ_2 графа

D_{18} наступним чином: а) $f_{18}(K \setminus (e, 2'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $s \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,4} \setminus (e, 2'') \cup K_3^1)$, б)

$f((e, 2'')) \subset h_1$, де ручка $h_1 = h(s_1, s_{11})$ приклеєна до 2-клітин s_{11}, s_1 стандартним

перетворенням, причому $s_1, s_{11} \in s \setminus f(K)$. Граф $f_{18}(D_{18})$ має 11 граней, 22 ребра та 9

вершин, тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_{18}) = 2$. Оскільки множини

вершин $\{i''\}_{i=1}^5$ та $\{i''\}_{i=1}^5$ мають досяжність 2 на площині, а множина висячих вершини

$\{i''\}_{i=2}^4$ графа K та множина $\{1', 5'\}$ графа $K_5 \setminus (4', 5')$ є досяжними на площині, то порядок

ототодження пар вершин є несуттєвим, тому згідно [29] матимемо нерівність $\gamma(D_{18}) \leq 2$.

Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{19} в подвійний тор σ_2 графа

D_{19} наступним чином: а) $f_{19}(K \setminus (c, l'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$, f - мінімальне

вкладення графа K_5 в тор, б) $f_{19}((c, l'')) \subset h_1$, де ручка $h_1 = h(s_1, s_{11})$ приклеєна до 2-клітин

s_{11}, s_1 , стандартним перетворенням. Граф $f(D_{19})$ має 11 граней, 22 ребра та 9 вершин,

тому за формулою Ейлера матимемо рівність $\gamma(D_{19}) = 2$. Порядок ототодження пар

вершин $\{(1', 1''), (2', 2''), (5', 5'')\}$ є суттєвим. Твердження 4 леми 2.4 доведено. Доведення леми

2.4 закінчено.

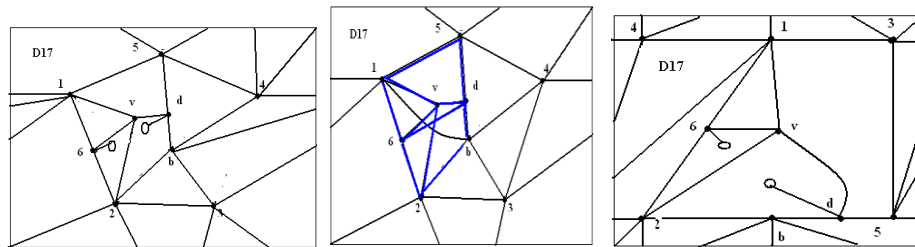


Рис.2.4.1. Вкладення графа $f_{17}(D_{17})$ до подвійного тору.

2.2.4. 9-ТИ ВЕРШИННІ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times D_{20, \dots, D_{47}}$ ГРАФИ-ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРУ.

Задача матиме дві частини: А) Встановити структуру 9-ти вершинних графів-обструкцій G для тору з метою перевірки наявності ϕ -перетворення графів G_0 та

$St_{n_1, n_2, n_3, n_4}(G_1)$, де $G_0 \in \{K_5, K_{3,3}\}$, заданого на множинах точок та кінцевих вершин, де для ненульових nk виконується подвійна нерівність $b > nk > 1$, для $k \in \{i\}_1^5$, яке можливо використати при побудові n -вершинних графів-обструкцій для тору, $n > 9$;

Б) Перевірити гіпотезу про наступне:

1) в довільному графі-обструкції роду 2 є щонайбільше три різні копії графів K_5 чи $K_{3,3}$, які попарно з'єднані щонайменше трьома різними вершинами;

2) принаймні в одній з груп автоморфізмів $Aut(G)$ чи $Aut(St_M(H))$ є повні підгрупи перестановок елементів з підмножин N чи M множин точок графа G та квазізірки $St_M(H)$, відповідно, де N -множина точок графа G до якої приєднується квазізірка $St_M(H)$ шляхом

ототождження пар точок з множин N та M , тобто підграфи $G(N)$ та $St_M(H)(M)$ графа G чи квазізірки $St_M(H)$, відповідно, є повними чи мають повне доповнення.

Лема 3.1. Виконуються наступні твердження:

1. Для графа D_{20} існує φ -перетворення визначене наступним чином:

$\varphi(K_{3,4} \cup K_3^1 + K, \sum_{i=1,2,5,7} (i'+i'')) \rightarrow ((D_{20}, \{i\}_{i=1,2,5,7}))$, граф K визначений наступним чином:

$K = (\{7'', 2'', 5'', a, b\}, K_5^1 \setminus (2'', 7''))$, де $K_{3,4}^0 = \{i'\}_{i=1}^7$, $K_{3,4}(\{i'\}_{i=1}^3 \cup \{7''\}) = \overline{K_4}$, $K_{3,4}(\{i'\}_{i=4}^6) = K_3$,

$K_{3,4}^0 = (\{i'\}_{i=1}^3 \cup \{7''\}) \cup \{i'\}_{i=4}^6$;

2. Для графа D_{21} існує φ -перетворення визначене наступним чином:

$\varphi(K_5 + K, \sum_{i=1,4,5} (i'+i'')) \rightarrow (D_{21}, \{i\}_{i=1,4,5})$, де $K^0 = \{1'', 4'', 5''\} \cup \{a, b, v, c\}$, $K(\{a, b, v, c, 4'', 5''\}) \cong K_4$,

$K(\{a, b, v, c, 1'', 4'', 5''\}) \cong K_5$, причому вершини $4'', 5''$ розділяють ребра $(a, b), (v, c)$, відповідно;

3. Для графа D_{22} існує φ -перетворення визначене наступним чином:

$\varphi(K'+H, \sum_{i=1}^6 (i'+i'')) \rightarrow (D_{22}, \{i\}_{i=1}^6)$, де $K^0 = \{i''\}_{i=1}^6$, причому вершина $6'$ розділяє ребро $(1', 2')$,

$K^1 = K_5 \setminus (1', 2') \cup \{(6', 1'), (6', 2')\}$, а граф H такий, що $H = K_{3,3} + (b, a)$, $H(\{1'', c, 2''\}) = \overline{K_3}$,

$H(\{a, b, 6''\}) = (\{a, b, 6''\}, (a, b))$;

4. Для графа D_{23} існує φ -перетворення визначене наступним чином:

$\varphi(K_{3,3} + H, \sum_{i=1}^5 (i'+i'')) \rightarrow (D_{23}, \{i\}_{i=1}^5)$, де H , $H = (\{i''\}_{i=1}^6 \cup \{a, b, c\}, K_{3,3}^1 \cup K_3^1) \in K_{3,3}$ із трикутниками на вершинах однієї долі у якого ребра $(b, a), (c, b)$ 1-підрозділені $4'', 5''$, відповідно.

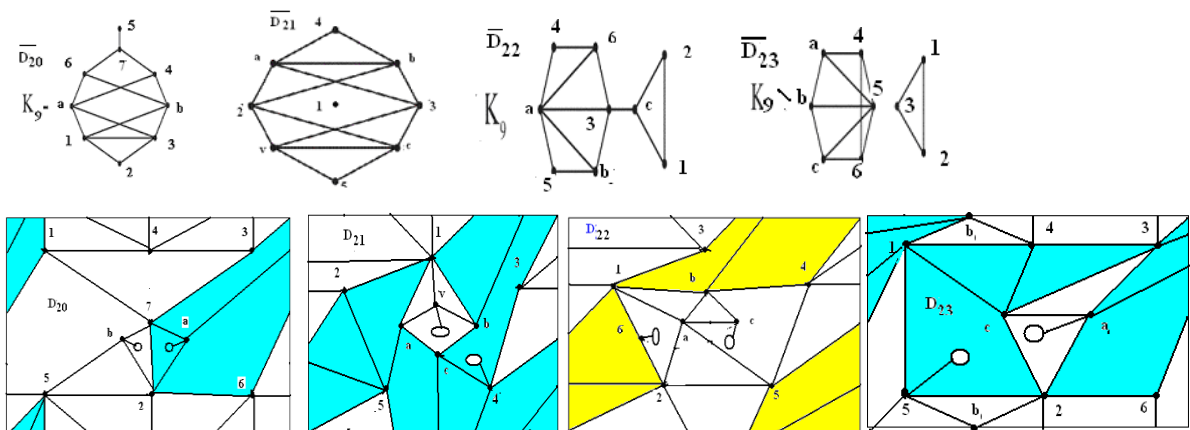


Рис.3.1. Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_{20}(D_{20}), f_{21}(D_{21}), f_{22}(D_{22}), f_{23}(D_{23})$ в 2-

тор.

Доведемо твердження 1. Побудуємо 2-кліткове вкладення f_{20} в подвійний тор σ_2 графа

D_{20} наступним чином: а) $f_{20}(K_5 \setminus (b,a)) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $s \in \sigma_1 \setminus f_{20}(K_{3,4} + K_3^1)$, $f_{20}|_{K_{3,4} + K_3^1}$ -

мінімальне вкладення графа $K_{3,4} + K_3^1$ до σ_1 , б) $f_{20}(a,b) \subset h_1$. укладатиметься до ручки

$h_1 = h(s_1, s_{11})$ приклеєної до 2-клітин s_{11} , s_1 , стандартним перетворенням, де

$\{s_1, s_{11}\} \subset s \setminus f_{20}(K \setminus (a,b))$, $\partial s_1 \cap \partial e = \{a\}$, $\partial s_{11} \supset \{a, g, v\}$.

Вкладення f_{20} графа D_{20} в подвійний тор σ_2 є 2-клітковим, бо ручка h_1 розрізана ребром

$f_{20}(a,b)$. Граф $f_{20}(D_{20})$ має 12 граней, 23 ребра та 9 вершин, тому за формулою Ейлера

матимемо рівність $\gamma(D_{20}) = 2$, порядок ототодження пар вершин

$\{(1',1''),(2',2''),(7',7''),(5',5'')\}$ є суттєвим. Твердження 1 леми 3.1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо вкладення f_{21} в подвійний тор σ_2 графа D_{21}

наступним чином: а) $f_{21}(K \setminus (v,4'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $s \in \sigma_1 \setminus f_{21}(K_5)$, s - не 2-клітка, $f_{21}|_{K_{3,3}}$

мінімальне вкладення K_5 до тору, б) ребро $(v,4'')$ вкладатиметься до 2-ручки $h_1 = h(s_1, s_{11})$,

приклеєної до 2-клітин s_{11} , s_1 , де $\{s_1, s_{11}\} \subset s \setminus f_{21}(K \setminus (v,4''))$, стандартним перетворенням.

Вкладення f_{21} графа D_{21} в подвійний тор σ_2 є 2-клітковим, бо ручка розрізана ребром

$(v,4'')$. Граф $f_{21}(D_{21})$ має 11 граней, 22 ребра та 9 вершин, тому за формулою Ейлера

матимемо рівність $\gamma(D_{21}) = 2$. Порядок ототодження пар вершин $\{(1',1''),(4'',4''),(5'',5'')\}$ є

суттєвим відносно пари вершини $(1',1'')$, пари вершин $(4'',4''),(5'',5'')$ можливо

переставляти між собою.

Доведемо твердження 3. Побудуємо вкладення f_{22} в подвійний тор σ_2 графа D_{22}

наступним чином: а) $f_{22}(H \setminus (c,6'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $s \in \sigma_1 \setminus f_{22}(K_5)$, $f_{22}|_{K_5}$ -мінімальне

вкладення K_5 до σ_1 , б) $f_{22}(c,6'') \subset h_1$, $h_1 = h(s_1, s_{11})$ -2-ручка приклеєна до 2-кліток s_{11} , s_1 ,

$\{s_1, s_{11}\} \subset s \setminus f_{22}(H \setminus (c,6''))$, стандартним перетворенням Вкладення графів $f_{22}(D_{22})$ до

подвійного тору наведене на рис.3.3, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{22}) \leq 2$. Оскільки

число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає

тотожністю $2-2*2=9-23-12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{22}) = 2$. Твердження 3 доведено.

Порядок ототодження пар вершин $\{(1',1''),(2',2''),(4'',4''),(5'',5'')\}$ є суттєвим, відносно пар

вершин $(1',1''),(2',2'')$ та $(4'',4''),(5'',5'')$, які можливо переставляти в цих парах.

Доведемо твердження 4. Побудуємо вкладення f_{23} в подвійний тор σ_2 графа D_{23}

наступним чином: а) $f_{23}(H \setminus (5'', a)) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $s \in \sigma_1 \setminus f_{23}|_{K_{3,3}}(K_{3,3})$ та s -не 2-клітка та

має границею ∂s цикл довжини 10, $K_{3,3}^0 = \{i''\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=1}^3) = \bar{K}_3 = K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6)$,

$H^0 = \{i''\}_{i=1}^5 \cup \{a, b, c\}$, $H(\{i''\}_{i=1}^3) = \bar{K}_3$, $H(\{a, b, v\}) = K_3$, де ребро (b, c) розподілене

вершиною $4''$, ребро (a, b) розподілене вершиною $5''$, причому зірка $St_5(b)$ має

вкладатися до $\bar{s} \setminus \partial s$ завдяки двосторонньому доступу до вершин з множини $\{i''\}_1^5$. б)

$f_{23}(5'', a) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна стандартною процедурою до лвох кліток з

множини $(\bar{s} \setminus \partial s) \setminus f_{23}(H \setminus (5'', a))$. Вкладення графів $f_{23}(D_{23})$ до подвійного тору наведено

на рис.3.3, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{23}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а

число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 \cdot 2 = 9 - 23 + 12$. Отже

матимемо рівність $\gamma(D_{23}) = 2$. Порядок ототожнення пар вершин $\{(1', 1''), (2', 2''), (4', 4''), (5', 5'')\}$

є суттєвим, відносно пар вершин $(1', 1''), (2', 2'')$ та $(4', 4''), (5', 5'')$, які можливо переставляти в

цих парах. Твердження 4 доведено. Лема 3.1 доведена.

Лема 3.2. Виконуються наступні твердження:

1. Граф $K_{3,7}$ -граф-обструкція для тору є φ -образом графів $K_{3,3}, K_{3,4}$ при φ -перетворенні

виду $\varphi(K_{3,3} + K_{3,4}, \sum_{i=1}^3 (i' + i'')) \rightarrow (K_{3,7}, \{i''\}_{i=1}^3)$, де $K_{3,3}\{i''\}_{i=1}^3 = K_{3,4}\{i''\}_{i=1}^3 = \bar{K}_3$.

2. Граф $K_{3,11}$ -граф-обструкція для подвійного тору є φ -образом графів $K_{3,7}, K_{3,4}$

$\varphi(K_{3,7} + K_{3,4}, \sum_{i=1}^3 (i' + i'')) \rightarrow (K_{3,11}, \{i''\}_{i=1}^3)$, де $K_{3,7}\{i''\}_{i=1}^3 = K_{3,4}\{i''\}_{i=1}^3 = \bar{K}_3$.

Доведення лема 3.2. Доведення лема спирається на розширення мінімального вкладення

f графа $K_{3,3}$ в тор із врахуванням двостороннього доступу до вершин, а саме, що згідно

твердження з) лема 1.3 маємо $ms_{K_{3,3}}(K_{3,3}^0 \setminus \{u, v, w\}) = 3$ для довільної трійки попарно

несуміжних вершин графа $K_{3,3}$. Виконаємо покрокове приклеювання простих зірок

$St_3(v_i)$ до $f(K_{3,3})$: першої зірки з вершиною v_i -центром зірки з трьома променями,

якими три висячі вершини попарно ототожнюються з трьома вершинами графа $K_{3,3}$, а

наступні прості зірки приєднують до графа, що отриманий на попередньому кроці, та

того, що $ms_{K_{3,3}}(K_{3,3}^0 \setminus \{u, v, w\}) = 3$ для довільної трійки попарно несуміжних вершин.

Мінімальні вкладення в 2-тор графа $K_{3,7}$ та в 3-тор графа $K_{3,11}$ наведені на рис 3.2.

Доведення леми 3.2 закінчене.

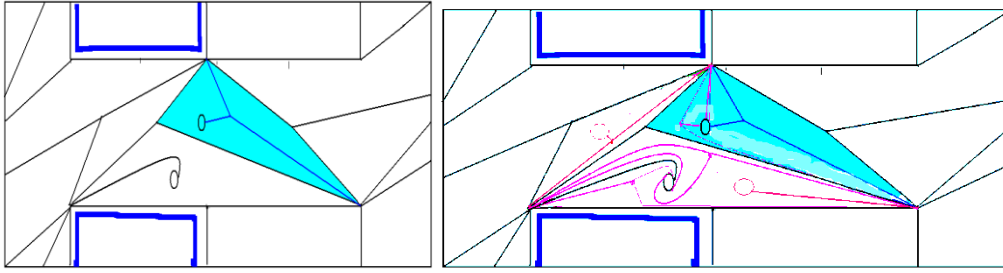


Рис. 3.2. Мінімальні вкладення в 2-тор графа $K_{3,7}$ та в 3-тор графа $K_{3,11}$, відповідно.

Лема 3.3. Виконуються наступні твердження:

1. D_{24} -граф-обструкція для тору є φ -образом графів $K_{3,3}$, де $K_{3,3}^0 = \{i'\}_1^3 + \{i''\}_4^6$,

$K_{3,3}(\{i'\}_1^3) = K_{3,3}(\{i''\}_4^6) = \overline{K_3}$ та H , $H \cong K_6 \setminus K_3^1$, при наступному перетворенні

$\varphi(K_{3,3} + H, \sum_{i=1, i \neq 3}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{24}, \{i\}_{i=1, i \neq 3}^6)$ шляхом ототождження усіх пар (i', i'') вершин, окрім

вершини 3, $M'' = \{i''\}_{1, i \neq 3}^6$, $M' = \{i'\}_{1, i \neq 3}^6$, де вершини 4'', 6'' розділяють ребра $(a, b), (b, v)$,

відповідно, а вершина 5'' розділяє ребро $(1'', b)$, $H(\{1'', 2'', 5''\}) = \overline{K_3}$, $H(\{a, b, v\}) = K_3$,

2. D_{25} -граф-обструкція для тору є φ -образом $\varphi(K_{3,3} + H, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{25}, \{i\}_{i=1}^6)$ графів $K_{3,3}$ та

H , де $K_{3,3}^0 = \{i'\}_1^3 + \{i''\}_4^6$, $K_{3,3}(\{i'\}_1^3) = K_{3,3}(\{i''\}_4^6) = \overline{K_3}$, $H \cong K_6 \setminus K_3^1$, задане шляхом

ототождження усіх пар (i', i'') вершин, окрім вершини 3, $M'' = \{i''\}_1^6$, $M' = \{i'\}_1^6$, де

вершини 2'', 3'' розділяють ребра $(a, v), (b, v)$, відповідно, а вершина 5'' розділяє ребро

$(1'', b)$, $H(\{a, b, v\}) = K_3$, $H(\{1'', 4'', 6''\}) = \overline{K_3}$.

3. Граф-обструкція для тору D_{26} є φ -образом $\varphi(K_5 \setminus (4, 5) + H, \sum_{i=1}^4 (i' + i'')) \rightarrow (D_{26}, \{i\}_{i=1}^5)$ графів

K_5 та квазізірки H з центром K_4 , $K_4^0 = \{a, 4'', c, v\}$, в якому трикутник (a, c, v) має три

кратних ребра, 1-підрозділених вершинами 1'', 2'', 3'', відповідно, а вершина 4' графа K_5

розділяє ребро $(5, 4)$, де $K_5^0 = \{1', 2', 3', 4, 5\}$;

4. D_{27} -граф-обструкція для тору є φ -образом графів $K_{3,3}$ та H при φ -перетворенні

заданому на множинах вершин формулою $\varphi(K_{3,3} + H, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{27}, \{i\}_{i=1}^6)$, де $K_{3,3}^0 = \{i'\}_1^6$,

$H = K_5 \setminus (1'', 2'') \cup \{(3'', v), (3'', v), (v, 4''), (a, 5''), (a, 6'')\}$, $K_5 \setminus (1'', 2'') = \{a, b, v, 1'', 2''\}$, $\deg 3'' = 2$.

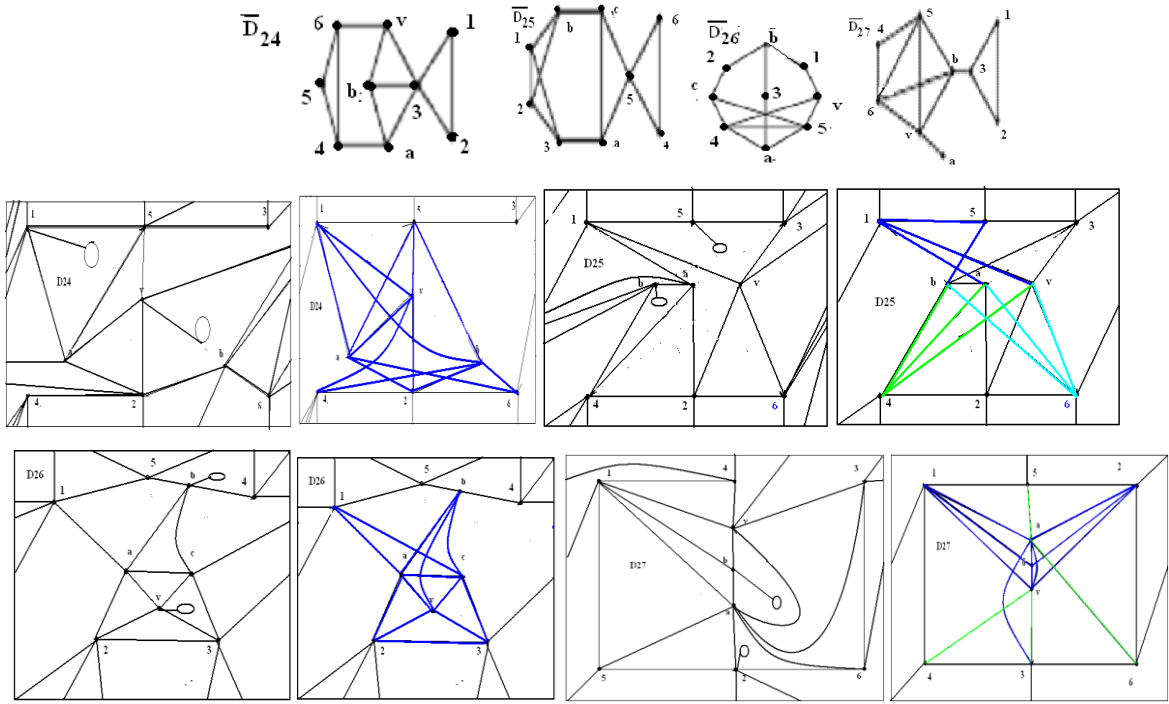


Рис.3.3. Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_{24}(D_{24}), \dots, f_{27}(D_{27})$ до 2-тору.

Доведення лема 3.3. Доведемо твердження 1. Побудуємо вкладення f_{24} в подвійний тор σ_2 графа D_{24} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_{3,3}$ в тор

наступним чином: а) $f_{24}(H \setminus (1, v)) \subset \overline{s \setminus \partial s}$, де $H \cong K_6 \setminus K_3^1$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$ та $s \in$ не 2-кліткою та має границю ∂s цикл довжини 10, $K_{3,3}^0 = \{i''\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6$,

$K_{3,3}(\{i''\}_{i=1}^3) = \overline{K_3} = K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6)$, $H^0 = \{i''\}_{i=1, \neq 3}^6 \cup \{a, b, v\}$, $H(\{i''\}_{i=1, \neq 3}^4) = \overline{K_3}$, $H(\{a, b, v\}) = K_3$, де ребро (b, v) розділене вершиною 4', ребро (a, v) розділене вершиною 6''

б) $f_{24}((1'', v)) \subset h$, де h -2-ручка до тору. Вкладення графів $f_{24}(D_{24})$ до подвійного тору наведене на рис.3.3, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{24}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{24}) = 2$. Порядок ототодження пар вершин $\{(i', i'')\}_{i=1, \neq 3}^6 \in$ суттєвим та дві пари $(4', 4''), (6', 6'')$ можливо переставляти між собою відносно інших пар вершин. Твердження 1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо вкладення f_{25} в подвійний тор σ_2 графа D_{25} шляхом подовження мінімального вкладення f графа $K_{3,3}$ в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_{25}(H \setminus (5, b)) \subset \overline{s \setminus \partial s}$, де $H \cong K_6 \setminus K_3^1$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$ та $s \in$ кліткою із границю ∂s

циклом довжини 10, $K_{3,3}^0 = \{i''\}_{i=1}^3 \cup \{i''\}_{i=4}^6$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=1}^3) = \overline{K_3} = K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6)$, $H^0 = \{i''\}_{i=1}^6 \cup \{a, b, v\}$,

$H(\{i''\}_{i=1, \neq 3}^4) = \overline{K_3}$, $H(\{a, b, v\}) = K_3$, де ребро (b, v) розділене вершиною $3'$, ребро (a, v) розділене вершиною $2''$, а вершина $5''$ розділяє ребро $(1'', b)$;

б) $f_{25}((5, b)) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до тору. Вкладення графів $f_{25}(D_{25})$ до подвійного тору наведене на рис.3.3, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{25}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{25}) = 2$. Порядок ототождження пар вершин $\{(i', i'')\}_1^6$ є суттєвим та дві пари $(4', 4''), (6', 6'')$ можливо переставляти між собою відносно відносно інших пар вершин. Твердження 2 доведено.

Доведемо твердження 3. Побудуємо вкладення f_{26} в σ_2 графа D_{26} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_{26}(H \setminus (v, 4'')) \subset \overline{s} \setminus \partial s$, де квазізірка H з центром K_4 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та s є кліткою із границею ∂s довжини 8, $K_4^0 = \{a, 4'', c, v\}$, в якому трикутник (a, c, v) має три кратних ребра, 1-підрозділених вершинами $1'', 2'', 3''$, відповідно, а вершина $4'$ графа K_5 розділяє ребро $(5, 4)$ графа K_5 , $K_5^0 = \{1', 2', 3', 4', 4, 5\}$; б) $f_{26}((v, 4'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до тору. Вкладення графу $f_{26}(D_{26})$ до подвійного тору наведене на рис.3.3, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{26}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{26}) = 2$. Порядок ототождження пар вершин $\{(i', i'')\}_1^6$ є суттєвим та три пари $(1', 1''), (2', 2''), (3', 3'')$ можливо переставляти між собою відносно відносно інших пар вершин. Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо вкладення f_{27} в подвійний тор σ_2 графа D_{25} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_{3,3}$ в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_{27}(H \setminus (3'', 2'')) \subset \overline{s} \setminus \partial s$, де $s \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$ та s має границю ∂s - цикл довжини 10, $K_{3,3}^0 = \{i'_{i=1}^3 \cup \{i''_{i=4}^6\}$, $K_{3,3}(\{i''_{i=1}^3\}) = \overline{K_3} = K_{3,3}(\{i''_{i=4}^6\})$, $K_5^0 \setminus (1'', 2'') = \{a, b, v, 1'', 2''\}$, $H = K_5 \setminus (1'', 2'') \cup \{(3'', v), (3'', v), (v, 4''), (a, 5''), (a, 6'')\}$, $\deg 3'' = 2$;

б) $f_{27}((3'', 2'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до тору. Вкладення графів $f_{27}(D_{27})$ до подвійного тору наведене на рис.3.3, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{27}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає

тотожністю $2-2*2=9-23+12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{27}) = 2$. Порядок ототодження пар вершин $\{(i', i'')\}_1^6$ є суттєвим та дві пари $(1', 1''), (3', 3'')$, $(4', 4''), (6', 6'')$, можливо переставляти в парі між собою відносно відносно інших пар вершин. Твердження 4 доведено. Доведення леми 3.3 закінчено.

Лема 3.4. Виконуються наступні твердження:

1. D_{28} -граф-обструкція для тору є ϕ -образом графів K_5 та H , де $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^0 = \{i''\}_1^4 \cup \{a, b, c, v\}$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(2'', 5''), (b, v)\} \cup St_5^1(a)$, $St_5^0(a) = \{1'', 3'', 4'', b, v, c\}$ при перетворенні заданому наступною формулою: $\phi(K_5 + H, \sum_{i=1, \bullet}^4 (i' + i'')) \rightarrow (D_{28}, \{i\}_{i=1}^4)$ шляхом

ототодження усіх пар (i', i'') вершин з $M' = \{i'\}_1^4$, $M'' = \{i''\}_1^4$;

2. Граф D_{29} -обструкція для тору є ϕ -образом графів K_5 та H , де $K_5^0 = \{i'\}_1^5$,

$H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(2'', 1''), (b, v)\} \cup \{(a, b), (a, v), (4'', v), (3'', v)\}$, при

перетворенні заданому наступною формулою: $\phi(K_5 + H, \sum_{i=1, \bullet}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{29}, \{i\}_{i=1}^5)$ шляхом

ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$;

3. Граф D_{30} -обструкція для тору є ϕ -образом графів K_5 та H , де $K_5^0 = \{i'\}_1^5$,

$H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(3'', 1''), (b, v)\} \cup \{(c, b), (c, v), (2'', c), (5'', c), (4'', b)\}$, при

перетворенні заданому наступною формулою: $\phi(K_5 + H, \sum_{i=1, \bullet}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{30}, \{i\}_{i=1}^5)$ шляхом

ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$;

4. D_{31} -обструкція для тору є ϕ -образом графів K_5 та H , де $K_5^0 = \{i'\}_1^5$,

$H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, d\}$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(5'', 1''), (b, 1'')\} \cup \{(d, b), (d, 1''), (2'', d), (3'', b), (4'', b)\}$, де

вершина d розділяє ребро $(b, 1'')$, при перетворенні заданому наступною формулою:

$\phi(K_5 + H, \sum_{i=1, \bullet}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{31}, \{i\}_{i=1}^5)$ шляхом ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин

приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$;

Доведення леми 3.4. Доведемо твердження 1. Побудуємо вкладення f_{28} в σ_2 графа D_{28} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_{28}(H \setminus (a, v)) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де $H^0 = \{i''\}_1^4 \cup \{a, b, c, v\}$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(2'', 5''), (b, v)\} \cup St_5^1(a)$,

$St_5^0(a) - \{1'', 3'', 4'', b, v, c\}$, т.то Н -квазізірка з центром C_4 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та $s \in$ кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на якій із урахуванням 2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^4$ як досяжна на площині множина; б) $f_{28}((a, v)) \subset h$, де h -2-ручка

приклеєна до кліток з множини $(\bar{s} \setminus \partial s) \setminus f_{28}(H \setminus (a, v))$. Вкладення графу $f_{28}(D_{28})$ до подвійного тору наведене на рис.3.4, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{28}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а ребер у графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 \cdot 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{28}) = 2$. Твердження 1 доведено. Доведемо твердження 2. Побудуємо вкладення f_{29} в σ_2 графа D_{29} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а)

$$f_{29}(H \setminus (a, v)) \subset \bar{s} \setminus \partial s, \text{ де } H^1 = K_5^1 \setminus \{(2'', 1''), (b, v)\} \cup \{(a, b), (a, v), (4'', v), (3'', v)\},$$

$H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$, т.то Н -квазізірка з центром C_4 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та $s \in$ кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на якій із урахуванням 2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$ як досяжна множина на площині; б) $f_{29}((a, v)) \subset h$, де h -2-ручка

приклеєна до кліток з множини $(\bar{s} \setminus \partial s) \setminus f_{29}(H \setminus (a, v))$. Вкладення графу $f_{29}(D_{29})$ до подвійного тору наведене на рис.3.4, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{29}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 \cdot 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{29}) = 2$. Твердження 2 доведено.

Доведемо твердження 3. Побудуємо вкладення f_{30} в σ_2 графа D_{30} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а)

$$f_{30}(H \setminus (a, v)) \subset \bar{s} \setminus \partial s, \text{ де } H^1 = K_5^1 \setminus \{(3'', 1''), (b, v)\} \cup \{(c, b), (c, v), (2'', c), (5'', c), (4'', b)\},$$

$H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$, т.то Н -квазізірка з центром C_4 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та $s \in$ кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на якій із урахуванням 2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$ як досяжна множина на площині; б) $f_{30}((a, v)) \subset h$, де h -2-ручка

приклеєна до кліток з множини $(\bar{s} \setminus \partial s) \setminus f_{30}(H \setminus (a, v))$. Вкладення графу $f_{30}(D_{30})$ до подвійного тору наведене на рис.3.4, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{30}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає

тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{30}) = 2$. Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо вкладення f_{31} в σ_2 графа D_{31} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а)

$$f_{31}(H \setminus (c, d)) \subset \bar{s} \setminus \partial s, \quad H^1 = K_5^1 \setminus \{(5'', 1''), (b, 1'')\} \cup \{(d, c), (d, b), (d, 1''), (2'', d), (3'', b), (4'', b)\},$$

$$H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, d\}, \quad s \in \sigma_1 \setminus f(K_5) \text{ та } s \in \text{кліткою із границею } \partial s \text{ -циклом довжини } 8,$$

на якій із урахуванням 2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$ як досяж на множина на площині; б) $f_{31}((c, d)) \subset h$, де h -ручка приклеєна до кліток з множини

$(\bar{s} \setminus \partial s) \setminus f_{31}(H \setminus (c, d))$. Вкладення графу $f_{31}(D_{31})$ до подвійного тору наведено на рис.3.4,

тому матимемо нерівність $\gamma(D_{31}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{31}) = 2$. Твердження 4 доведено. Доведення леми 3.4 закінчене.

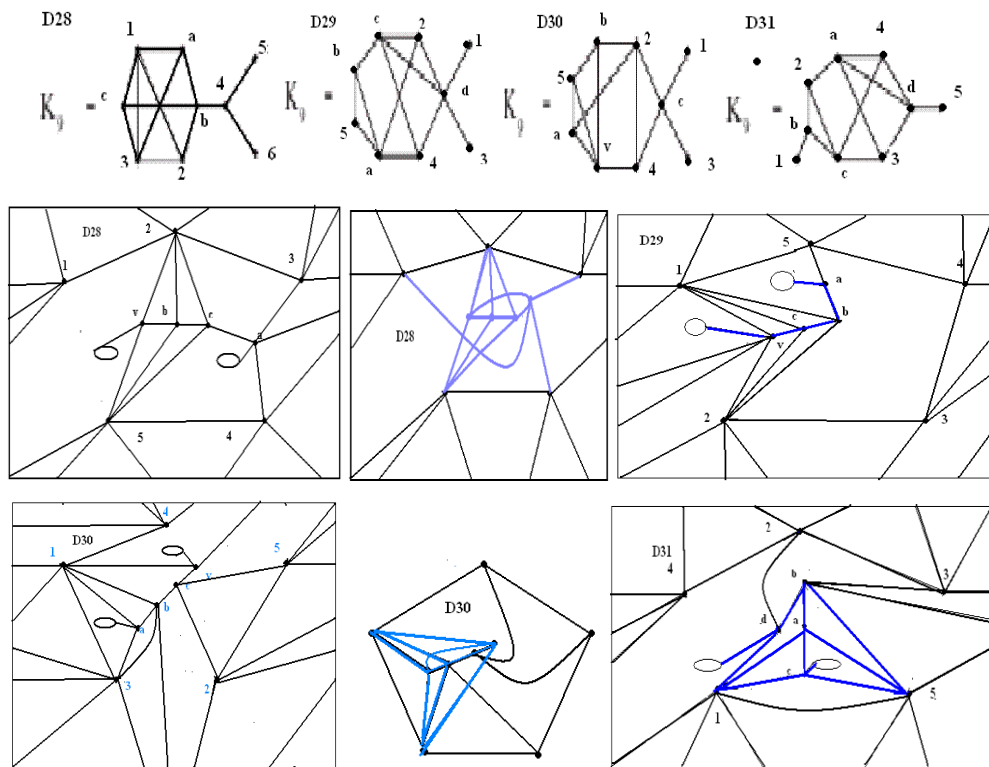


Рис.3.4. Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_8(D_{28}), \dots, f_{31}(D_{31})$ до 2-тору.

Лема 3.5. Виконуються наступні твердження:

1. D_{32} -граф-обструкція для тору є φ -образом графів $K_6 \setminus K_2^1$ та квазізірки H з центром $K_{2,3}$, де $K_6^0 \setminus K_2^1 = \{i''\}_1^6$, $K_6^1 \setminus K_2^1 = K_6^1 \setminus \{(1', 3'), (2', 5')\}$, $H^1 = K_{2,3}^1 \cup \{(2'', a), (b, 3''), (b, 1''), (b, 5'')\}$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a, b, v\}$ при перетворенні заданому наступною формулою:

$\varphi(K_6 \setminus K_2^1 + H, \sum_{i=1, \bullet}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{32}, \{i\}_{i=1}^6)$ та виконаному шляхом ототождження усіх пар (i', i'')

вершин з множин $M' = \{i'\}_1^6$ та $M'' = \{i''\}_1^6$;

2. D_{33} -граф-обструкція для тору є φ -образом графів K_5 та $H \cup St_3(b)$, де H -квазізірка з центром $K_{2,3}$, $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^1 = K_{2,3}^1 \cup \{(1'', a), (v, 3''), (c, 5'')\}$, $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, c, v\}$, $St_3(b)$ - проста зірка з центром b , $St_3^0(b) = \{i''\}_1^3$, при перетворенні заданому наступною формулою:

$\varphi(K_5 + H \cup St_3(b), \sum_{i=1, \bullet}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{33}, \{i\}_{i=1}^5)$ та виконаному шляхом ототождження усіх пар

(i', i'') вершин з множин $M' = \{i'\}_1^5$ та $M'' = \{i''\}_1^5$;

3. D_{34} - обструкція для тору є φ -образом графів $K_6 \setminus K_3^1$ та H , де $K_6^0 = \{i'\}_1^6$,

$K_6(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(c, 1''), (c, 4'')\} \cup \{(c, 6''), (1'', 6''), (d, 1''), (2'', b), (3'', a), (5'', c)\}$,

$H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a, b, c\}$, $K_6(\{i''\}_{i=1}^3) = K_3$, де вершина b'' розділяє ребро $(c, 1'')$ графа

$K_5 \setminus (c, 4'')$, при перетворенні заданому наступною формулою:

$\varphi(K_6 \setminus K_3^1 + H, \sum_{i=1, \bullet}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{34}, \{i\}_{i=1}^6)$ шляхом ототождження усіх пар (i', i'') вершин з

множин приєднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

4. D_{35} - обструкція для тору є φ -образом графів $K_6 \setminus (K_3^1 + K_2^1)$ та H , де $K_6^0 = \{i'\}_1^6$,

$K_6(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $K_6(\{i''\}_{i=1}^3) = K_3 \setminus (4', 5')$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a, b, v\}$,

$H^1 = K_{2,3}^1 \cup \{(b, 2''), (4'', v), (3'', a), (5'', v)\}$, при перетворенні заданому наступною

формулою: $\varphi(K_6 \setminus (K_3^1 + K_2^1) + H, \sum_{i=1, \bullet}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{35}, \{i\}_{i=1}^6)$ шляхом ототождження усіх пар (i', i'')

вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

Доведення леми 3.5. Доведемо твердження 1. Побудуємо вкладення f_{32} в σ_2 графа

D_{32} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_6 \setminus K_2^1$ в тор σ_1 наступним

чином: а) $f_{32}(H \setminus (a, 4'')) \subset \overline{s} \setminus \partial s$, $H^1 = K_{2,3}^1 \cup \{(2'', a), (b, 3''), (b, 1''), (b, 5'')\}$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a, b, v\}$,

$s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на якій із урахуванням

2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$ як досяжна множина на площині; б)

$f_{32}((a,4'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s) \cup f_{32}(H \setminus (a,4''))$.

Вкладення графу $f_{32}(D_{32})$ до подвійного тору наведене на рис.3.5, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{32}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{32}) = 2$. Твердження 1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо вкладення f_{33} в σ_2 графа D_{33} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_{33}(H \cup St_3(b) \setminus (a,5'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром $K_{2,3}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та s є кліткою із границею ∂s - циклом довжини 6, на якій із урахуванням 2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на площині; б) $f_{33}((a,5'')) \subset h$, де h -2-ручка стандартно

приклеєна до двох кліток із множини $(\bar{s} \setminus \partial s) \setminus f_{33}(H \cup St_3(b) \setminus (a,5''))$. Вкладення графу $f_{33}(D_{33})$ до подвійного тору наведене на рис.3.5, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{33}) \leq 2$.

Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер у графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{33}) = 2$.

Твердження 2 доведено.

Доведемо твердження 3. Побудуємо вкладення f_{34} в σ_2 графа D_{34} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_6 \setminus K_3^1$ в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_{34}(H \setminus (c,6'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром $K_5 \setminus (c,4'')$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_6 \setminus K_3^1)$ та s є кліткою із границею ∂s - циклом довжини 9, на раниці якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на s ; б) $f_{34}((c,6'')) \subset h$, де h -2-ручка

приклеєна до кліток з $(\bar{s} \setminus \partial s) \setminus f_{34}(H \setminus (c,6''))$. Вкладення графу $f_{34}(D_{34})$ до подвійного тору наведене на рис.3.5, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{34}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер у графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{34}) = 2$. Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо вкладення f_{35} в σ_2 графа D_{35} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_6 \setminus (K_3^1 + K_2^1)$ в тор σ_1 наступним чином:

а) $f_{35}(H \setminus (a,6'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром $K_{2,3}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_6 \setminus (K_3^1 + K_2^1))$ та s є

кліткою із границею ∂s - циклом довжини 9, на раниці якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6$, як досяжної на площині s ; б)

$f_{35}((a, b'')) \subset h$, де h - 2-ручка приклеєна до кліток з $(s \setminus \partial s) \setminus f_{35}(H \setminus (a, b''))$. Вкладення графа $f_{35}(D_{35})$ до подвійного тору наведено на рис.3.5, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{35}) \leq 2$.

Оскільки число граней дорівнює 12, а число ребер у графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{35}) = 2$.

Твердження 4 доведено. Доведення леми 3.5 закінчено.

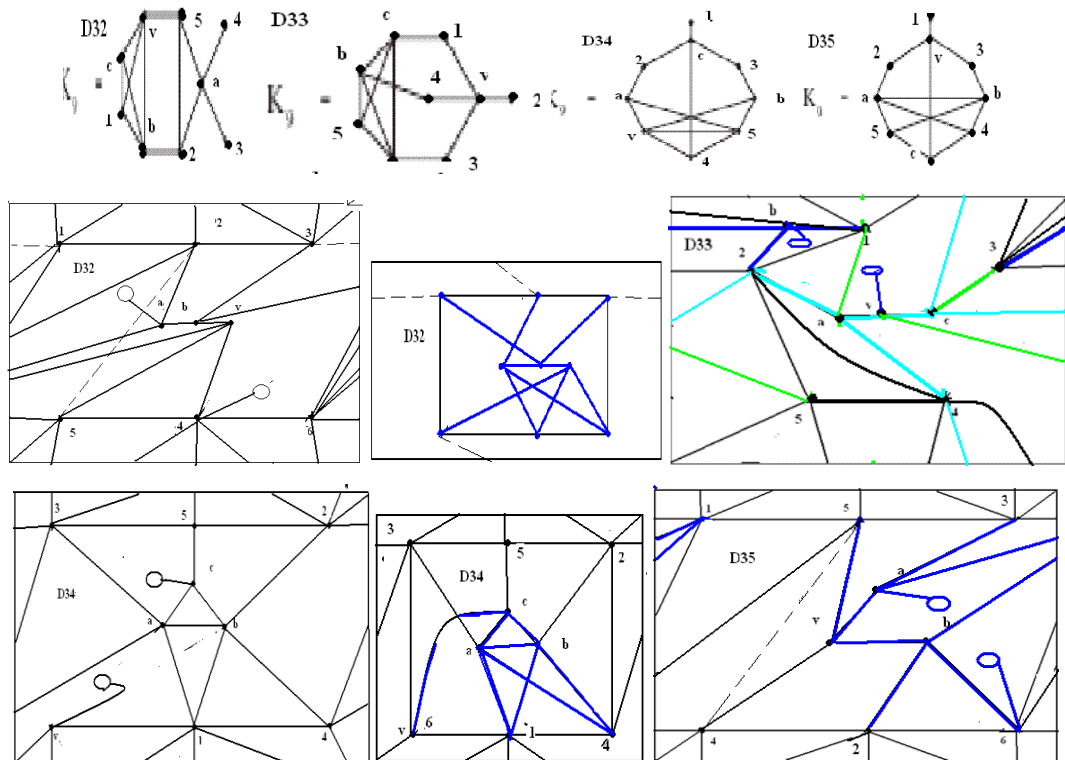


Рис.3.5. Доповнення до K_9 і вкладення графів $f_{32}(D_{32}) \dots f_{35}(D_{35})$ до 2-тору.

Лема 3.6. Виконуються наступні твердження:

1. D_{36} - обструкція для тору є ϕ -образом графів $K_6 \setminus K_3^1$ та H , де $K_6^0 = \{i''\}_1^6$,

$K_6(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $H^1 = K_4^1 \setminus \{(a, v)\} \cup \{(1'', a), (v, 1''), (4'', b), (5'', b), (2'', a), (3'', v)\}$, $K_6(\{i''\}_{i=1}^3) = \overline{K_3}$,
 $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a, b, v\}$, де вершина $1''$ розділяє ребро (a, v) графа K_4 , при перетворенні

заданому наступною формулою: $\phi(K_6 \setminus K_3^1 + H, \sum_{i=1, \bullet}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{36}, \{i''\}_{i=1}^6)$ шляхом ототожнення

усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

2. D_{37} - обструкція для тору є ϕ -образом графів $K_{3,3}$ та H , де $K_{3,3}^0 = \{i''\}_1^6$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$,

$H^1 = K_4^1 \cup \{(5'', a), (a, 4''), (2'', b), (5'', b), (2'', c), (4'', c), (a, 1''), (a, 3'')\}$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=1}^3) = \overline{K_3}$,

$H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a,b,c\}$, $H\{a,b,c,6''\} = K_4$, де вершини $5'',4'',2''$ розділяє ребра $(a,b),(c,b),(a,c)$ графа K_4 з трьома кратними ребрами, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_{3,3} + H, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{37}, \{i\}_{i=1}^6)$ шляхом ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

3. D_{38} -граф-обструкція для тору є φ -образом графів K_5 , $K_5^0 = \{i'\}_1^7$, де вершини $6',7'$ розділяють ребро $(4',5')$, та H , де H -квазізірка з центром $K_5 \setminus e$, $H^0 = \{i''\}_2^5 \cup \{a,7'',6'',v\}$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(v,6''),(a,7'')\} \cup \{(3'',a),(v,4''),(6'',4''),(a,5''),(7'',5'')\}$, підграф $H(\{a,5'',6'',7'',4'',v\})$ гомеоморфний K_4 , при перетворенні заданому наступною формулою:

$\varphi(K_5 + H, \sum_{i=2}^7 (i' + i'')) \rightarrow (D_{38}, \{i\}_{i=2}^7)$ та виконаному шляхом ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин $M' = \{i'\}_2^7$ та $M'' = \{i''\}_2^7$;

4. D_{39} -граф-обструкція для тору є φ -образом графів K_5 , $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, та H , де H - квазізірка з центром C_4 - простим циклом довжини 4, де $C_5^1 = \{(a,b),(v,b),(a,c),(c,v)\}$, $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup C_4^0$, $H^1 = C_5^1 \cup \{(5'',a),(5'',b),(4'',a),(4'',b),(v,1''),(v,3''),(c,1''),(c,3''),(v,2''),(b,2'')\}$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_5 + H, \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{39}, \{i\}_{i=1}^5)$ та виконаному шляхом ототодження усіх пар (i', i'') з множин $M' = \{i'\}_1^5$ та $M'' = \{i''\}_1^5$;

Доведення лема 3.7. Доведемо твердження 1. Побудуємо вкладення f_{36} в σ_2 графа D_{35} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_6 \setminus K_3^1$ в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{36}(H \setminus (a,2'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром K_4 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_6 \setminus K_3^1)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 9, на границі якої із урахуванням 2-дос тупу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6$, як досяжної на площині s ; б)

$f_{36}((a,2'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{36}(H \setminus (a,2'')))$.

Вкладення графу $f_{36}(D_{36})$ до подвійного тору наведено на рис.3.6, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{36}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а ребер у графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{36}) = 2$. Твердження 1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо вкладення f_{37} в σ_2 графа D_{37} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_{3,3}$ в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{37}(H \setminus (b, b'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром K_4 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_{3,3})$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 10, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6$, як досяжної на площині s ; б) $f_{37}((b, b'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{37}(H \setminus (b, b'')))$. Вкладення графу $f_{37}(D_{37})$ до подвійного тору наведене на рис.3.6, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{37}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а ребер у графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2-2*2=9-23+12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{37})=2$. Твердження 2 доведено.

Доведемо твердження 3. Побудуємо вкладення f_{38} в σ_2 графа D_{38} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{38}(H \setminus (a, c)) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром $K_5 \setminus e$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 6, на якій із урахуванням 2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на площині; б) $f_{38}((a, c)) \subset h$, де h -2-ручка стандартно приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{38}(H \setminus (a, c)))$. Вкладення графу $f_{38}(D_{38})$ до подвійного тору наведене на рис.3.6, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{38}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а ребер у графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає тотожністю $2-2*2=9-23+12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{38})=2$. Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо вкладення f_{39} в σ_2 графа D_{39} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{39}(H \setminus (l'', v)) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром $K_5 \setminus e$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 6, на якій із урахуванням 2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на площині; б) $f_{39}((l'', v)) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна стандартно до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{39}(H \setminus (l'', v)))$. Вкладення графу $f_{39}(D_{39})$ до подвійного тору наведене на рис.3.6, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{39}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 12, а ребер у графа дорівнює 23, то формула Ейлера стає

тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 23 + 12$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{39}) = 2$. Твердження 4 доведено. Доведення леми 3.6 закінчено.

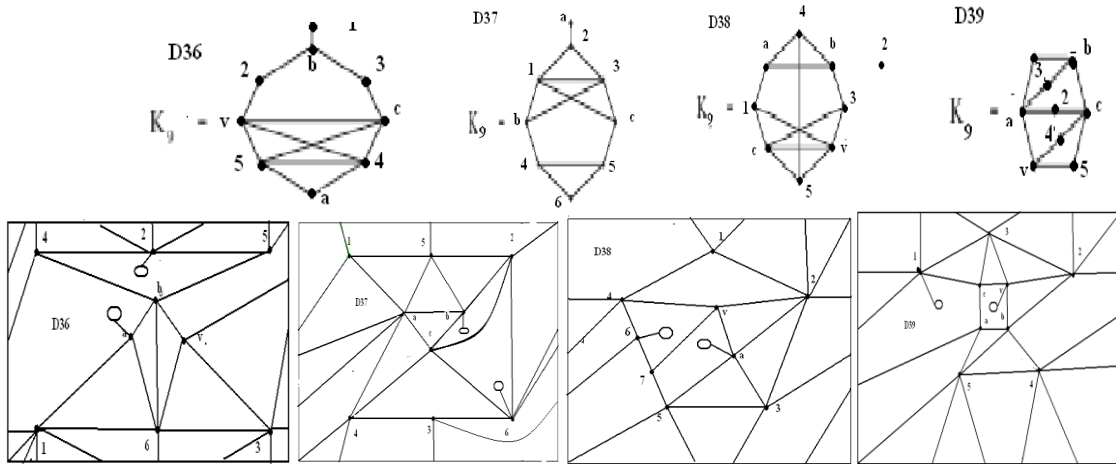


Рис.3.6. Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_{36}(D_{36}) \dots f_{39}(D_{39})$ до 2-тору.

Лема 3.7. Виконуються наступні твердження:

1. D_{40} - обструкція для тору є ϕ -образом графів $K_{3,3}$ та H , де $K_{3,3}^0 = \{i\}_1^6$, $H^1 = 3K_4^1$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a, b, c\}$, причому кожна пара графів K_4 матиме тільки одну спільну вершину з множини $\{a, b, c\}$, де $H\{a, b, c\} = K_3$, при перетворенні заданому наступною формулою:

$$\phi(K_{3,3} + H, \sum_{i=1, \bullet}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{40}, \{i\}_{i=1}^6)$$

приєднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

2. D_{41} - обструкція для тору є ϕ -образом графів K_5 та H , де $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$, $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^1 = K_5^1 \setminus (v, 2'') \cup \{(a, 5''), (c, 5''), (a, 4''), (c, 4''), (b, 3''), (c, 3''), (a, 1''), (b, 1'')\}$, H - квазізірка з центром $K_{1,3}$, який на множині вершин $\{i''\}_1^4 \cup \{a, b, c, v\}$ породжує підграф гомеоморфний $K_5 \setminus (v, 2'')$, при перетворенні заданому наступною формулою:

$$\phi(K_5 + H, \sum_{i=1, \bullet}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{41}, \{i\}_{i=1}^5)$$

приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$;

3. D_{42} -граф-обструкція для тору є ϕ -образом графів K_5 , $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, та H , де H - квазізірка з центром C_4 - простим циклом довжини 4, який на вершинах $a, b, c, v, 2''$ породжує підграф гомеоморфний K_4 , де $C_4^1 = \{(a, b), (c, b), (a, v), (c, v)\}$, $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup C_4^0$, $H^1 = K_4^1 \cup \{(1'', a), (1'', b), (3'', v), (3'', b), (v, 4''), (a, 4''), (c, 5'')\}$, при перетворенні заданому

наступною формулою: $\varphi(K_5 + H, \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{42}, \{i\}_{i=1}^5)$ та виконаному шляхом ототождження

усіх пар (i', i'') з множин $M' = \{i'\}_1^5$ та $M'' = \{i''\}_1^5$;

4. D_{43} - обструкція для тору є φ -образом графів K_5 та H , де $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$, $K_5^0 = \{i'\}_1^5$,
 $H^1 = K_5^1 \setminus (1'', 2'') \cup \{(a, 4''), (c, 4''), (b, 3''), (v, 5'')\}$, H - квазізірка з центром C_4 , який на

множині вершин $\{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$ породжує підграф гомеоморфний $K_5 \setminus (1'', 2'')$, при

перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_5 + H, \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{43}, \{i\}_{i=1}^5)$ шляхом

ототождження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$;

Доведення лема 3.7. Доведемо твердження 1. Побудуємо вкладення f_{40} в σ_2 графа D_{40} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_{3,3}$ в тор σ_1 наступним

чином: а) $f_{40}(H \setminus (a, 2'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H - квазізірка з центром-трикутником K_3 на вершинах $\{a, b, c\}$ та трьома парами трикутних променів, що породжують три графи K_4 ,

$s \in \sigma_1 \setminus f(K_6 \setminus K_3^1)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 9, на границі якої із

урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6$, як досяжної на

площині s ; б) $f_{40}((a, 2'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох кліток з множини

$\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{40}(H \setminus (a, 2'')))$. Вкладення графу $f_{40}(D_{40})$ до подвійного тору наведене на рис.3.7,

тому матимемо нерівність $\gamma(D_{40}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 13, а ребер у графа дорівнює 24, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 24 + 13$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{40}) = 2$. Твердження 1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо вкладення f_{41} в σ_2 графа D_{41} шляхом продовження

мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{41}(H \setminus (c, 4'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де

H - квазізірка з центром $K_{1,3}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини

8, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$,

як досяжної на площині s ; б) $f_{41}((c, 4'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох кліток з

множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{41}(H \setminus (c, 4'')))$. Вкладення графу $f_{41}(D_{41})$ до подвійного тору наведене на

рис.3.7, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{41}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 13, а ребер

у графа дорівнює 24, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 24 + 13$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{41}) = 2$. Твердження 2 доведено.

Доведемо твердження 3. Побудуємо вкладення f_{43} в σ_2 графа D_{43} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_{42}(H \setminus (S'', c)) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром C_4 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та $s \in$ кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на якій із урахуванням 2-доступу розміщені вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на площині ; б) $f_{42}((S'', c)) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна

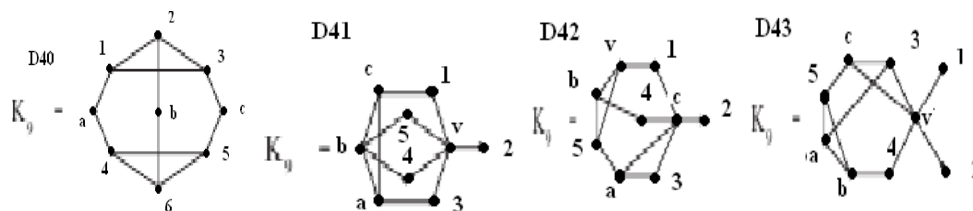
до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{42}(H \setminus (S'', c)))$. Вкладення графу $f_{42}(D_{42})$ до подвійного тору наведене на рис.3.7, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{42}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 13, а ребер у графа дорівнює 24, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 24 + 13$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{42}) = 2$. Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо вкладення f_{43} в σ_2 графа D_{43} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_{43}(H \setminus (v, S'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром C_4 , $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та $s \in$ кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на площині s ; б) $f_{43}((v, S'')) \subset h$, де h -2-ручка

приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{43}(H \setminus (v, S'')))$. Вкладення графу $f_{43}(D_{43})$ до подвійного тору наведене на рис.3.7, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{43}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 13, а ребер у графа дорівнює 24, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 24 + 13$. Матимемо рівність $\gamma(D_{43}) = 2$. Твердження 2 доведено.

Доведення леми 3.7 закінчено.



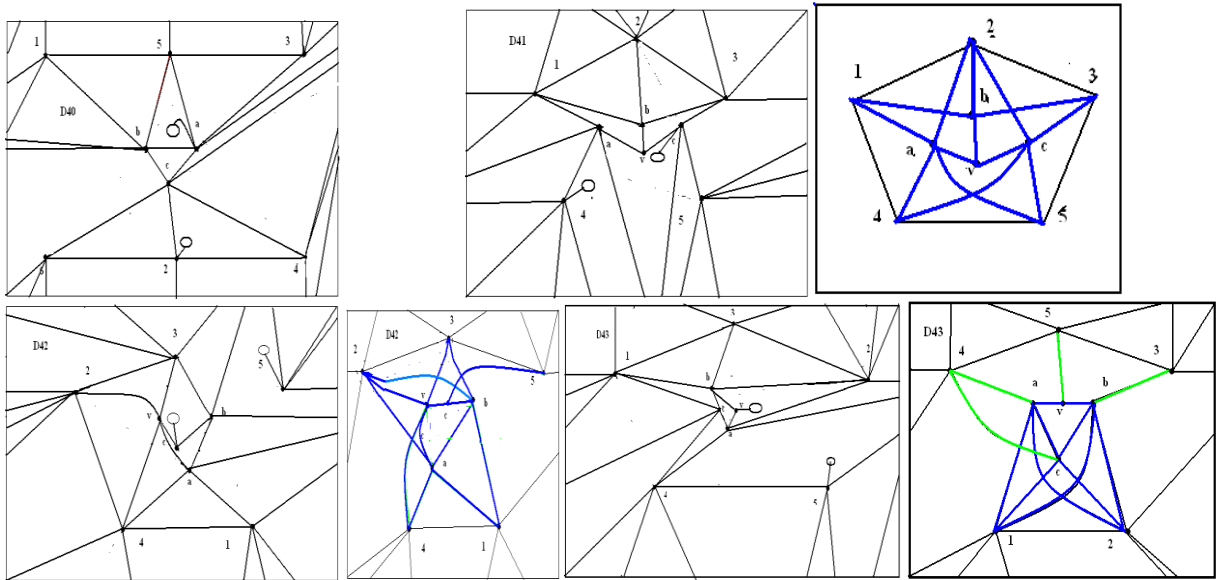


Рис.3.7.Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_{40}(D_{40}) \dots f_{43}(D_{43})$ до 2-тору.

Лемма 3.8. Виконуються наступні твердження:

- D_{44} - обструкція для тору є ϕ -образом графів $K_{3,3}$ та H , де $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a,b,c\}$,
 $H^1 = K_4^1 \setminus (a,c) \cup \{(a,1''),(c,1''),(a,5''),(b,5''),(a,3''),(b,3''),(c,2''),(b,2''),(c,4''),(b,4'')\}$, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_1^6$,
де $H\{a,b,c,6'',1''\} \cong K_4$, причому вершина $1''$ розділяє ребро (a,c) , при перетворенні
заданому наступною формулою: $\phi(K_{3,3} + H, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{44}, \{i\}_{i=1}^6)$ шляхом ототождження
усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;
- D_{45} - обструкція для тору є ϕ -образом графів $K_6 \setminus K_3^1$ та H , де $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a,v,c\}$
 $H = St_5(a) + St_5(c) + St_3(v)$, $H^1 = St_5^1(a) \cup St_5^1(c) \cup St_3^1(v)$, $K_6^0 = \{i'\}_1^6$, при перетворенні
заданому наступною формулою: $\phi(K_6 \setminus K_3^1 + H, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_{45}, \{i\}_{i=1}^6)$ шляхом ототождження
усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;
- D_{46} - обструкція для тору є ϕ -образом графів K_5 та H , де $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a,b,c'',v\}$,
 $K_5^0 = \{i'\}_1^5 \cup \{c'\}$, вершина c' розділяє ребро $(1',3')$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(1'',3'')\} \cup K_4^1 \cup \{(a,4''),(a,5'')\}$,
 $H\{1'',3'',v,a,b,c''\} = K_5 \setminus (1'',3'')$, $H\{2'',3'',c'',v\} = K_4$, $H\{4'',5'',a,b,c''\} = K_{2,3}$, H -квазізірка
з центром на множині вершин $\{a,b,v\}$ породжує підграф гомеоморфний K_3 , при
перетворенні заданому наступною формулою: $\phi(K_5 + H, \sum_{i=1}^5 (i' + i''), (c' + c'')) \rightarrow (D_{47}, \{i\}_{i=1}^5, c)$

шляхом ототождження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$, та пари $(c' c'')$;

4. D_{47} - обструкція для тору є ϕ -образом графів K_5 та H , де $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$, $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^1 = K_{3,3}^1 \cup K_{2,3}^1$, $K_{3,3}^0 = \{1'', 3'', v, \} \cup \{a, b, c\}$, $H\{1'', 3'', v, \} = H\{a, b, c\} = \overrightarrow{K_3}$,

$H(\{4'', 5'', a, b, c\}) = K_{2,3}$ -квазізірка з центром на множині вершин $\{a, b, c, v\}$ породжує підграф гомеоморфний $K_{1,3}$, при перетворенні заданому наступною формулою:

$\phi(K_5 + H, \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{47}, \{i\}_{i=1}^5)$ шляхом ототождження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$;

Доведення лема 3.8. Доведемо твердження 1. Побудуємо вкладення f_{44} в σ_2 графа D_{44} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_{3,3}$ в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{44}(H \setminus (b, 6'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром-трикутником K_3 на вершинах $\{a, b, c, 1''\}$, де вершина $1''$ розділяє ребро (a, c) , та двома парами трикутних променів, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_6 \setminus K_3^1)$ та $s \in$ кліткою із границею ∂s -циклом довжини 9, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6$, як досяжної на площині s ; б) $f_{44}((b, 6'')) \subset h$, де h -2-ручка стандартно приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{44}(H \setminus (b, 6'')))$. Вкладення графу $f_{44}(D_{44})$ до подвійного тору наведене на рис.3.8, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{44}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 13, а ребер у графа дорівнює 24, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 24 + 13$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{44}) = 2$. Твердження 1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо вкладення f_{45} в σ_2 графа D_{45} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_6 \setminus K_3^1$ в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{45}(H \setminus \{(v, 4''), (a, 3'')\}) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H - об'єднання трьох зірок з центрами на вершинах $\{a, b, v\}$, дві з яких мають однакові кінцеві вершини, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_6 \setminus K_3^1)$ де $s \in$ кліткою із границею ∂s -циклом довжини 9, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6$, як досяжної на площині s ; б) $f_{45}(\{(v, 4''), (a, 3'')\}) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{45}(H \setminus \{(v, 4''), (a, 3'')\}))$. Вкладення графу

$f_{45}(D_{45})$ до подвійного тору наведене на рис.3.8, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{45}) \leq 2$.

Оскільки число граней дорівнює 14, а ребер у графа дорівнює 25, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 25 + 14$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{45}) = 2$. Твердження 2 доведено.

Доведемо твердження 3. Побудуємо вкладення f_{46} в σ_2 графа D_{46} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_{46}(H \setminus (b, 3'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром $K_{1,3}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на площині s ; б) $f_{47}((b, 3'')) \subset h$, де h -2-ручка

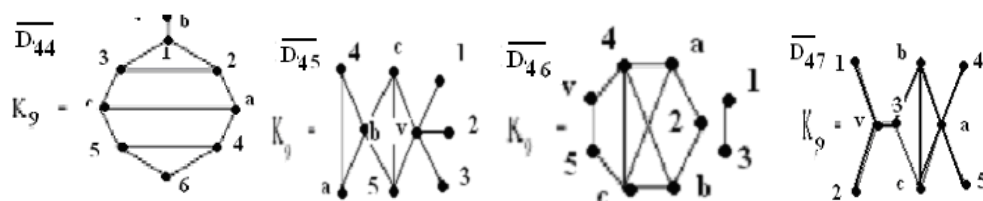
приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{46}(H \setminus (b, 3'')))$. Вкладення графу $f_{46}(D_{46})$ до подвійного тору наведене на рис.3.8, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{46}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 14, а ребер у графа дорівнює 25, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 25 + 14$. Матимемо рівність $\gamma(D_{46}) = 2$. Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо вкладення f_{47} в σ_2 графа D_{47} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_5 в тор σ_1 наступним чином: а)

$f_{43}(H \setminus (v, 5'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром $K_{1,3}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 8, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на площині s ; б) $f_{47}((v, 5'')) \subset h$, де h -2-

ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{43}(H \setminus (v, 5'')))$. Вкладення графу $f_{47}(D_{47})$ до подвійного тору наведене на рис.3.8, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{47}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 15, а ребер у графа дорівнює 26, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 26 + 15$. Матимемо рівність $\gamma(D_{47}) = 2$. Твердження 4 доведено.

Доведення леми 3.8 закінчено.



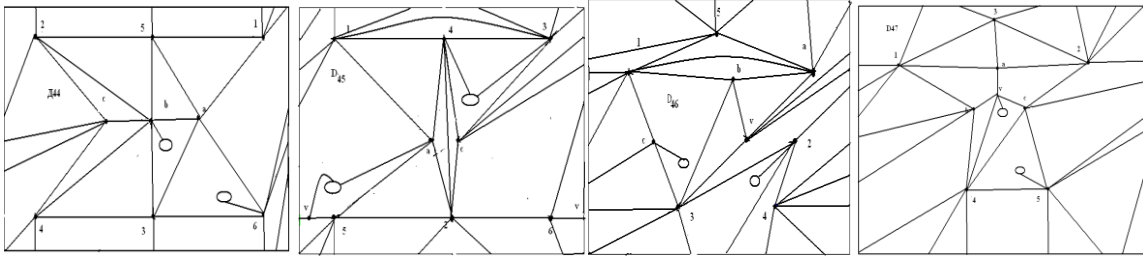


Рис.3.18. Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_{44}(D_{44}) \dots f_{47}(D_{47})$ до 2-тору.

Лемма 3.9. Виконуються наступні твердження:

1. D_{48} - обструкція для тору є φ -образом графів $K_6 \setminus K_{1,2}^1$ та H , де $K_{3,3}^0 \setminus K_{1,2}^1 = \{i''\}_1^6$,

$H^0 = \{i''\}_{1,i \neq 2}^6 \cup \{a, b, b''\}$, причому вершина b' розділяє ребро $(2', 6')$,

$H^1 = K_5^1 \setminus (5'', 6'') \cup \{(a, 1''), (b, 1''), (a, 5''), (a, 4''), (c'', 3'')\}$, де $H\{a, b, c'', 6'', 5''\} \cong K_5 \setminus (5'', 6'')$, при

перетворенні заданому формулою: $\varphi((K_6 \setminus K_{1,2}^1) + H, (\sum_{i=1, i \neq 2}^6 (i' + i''), (b' + b''))) \rightarrow (D_{48}, (\{i\}_{i=1, i \neq 2}^6, b))$

та виконаному шляхом ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$ та (b', b'') в b , причому вершина $2'$ стане вершиною 2 ;

2. D_{49} - обструкція для тору є φ -образом графів $K_6 \setminus 2K_2^1$ та H , де $K_6 \setminus 2K_2^1 = \{i''\}_1^6$,

$K_6^1 \setminus 2K_2^1 = K_6^1 \setminus \{(4', 6'), (2', 5')\}$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a, b, c\}$, $H(\{i''\}_1^2 \cup \{a, b\}) = K_4$,

$H(\{1'', 2'', 4'', 6''\} \cup \{c\}) = St_4(c)$ $H^1 = K_4^1 \cup St_4^1(c) \cup \{(a, 6''), (b, 3''), (a, 4''), (a, 5'')\}$, при перетворенні

заданому формулою: $\varphi((K_6 \setminus 2K_2^1) + H, (\sum_{i=1}^6 (i' + i''))) \rightarrow (D_{49}, \{i\}_{i=1}^6)$ та виконаному шляхом

ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

3. D_{50} - обструкція для тору є φ -образом графів K_6 та H , де $K_6^0 = \{i''\}_1^6$,

$H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a, b, c\}$, $H(\{i''\}_4^5 \cup \{c, b\}) = K_4$, $H(\{1'', 6'', 4'', 5''\} \cup \{a\}) = St_4(a)$

$H^1 = K_4^1 \cup St_4^1(a) \cup \{(c, 2''), (b, 3'')\}$, при перетворенні заданому формулою:

$\varphi(K_6 + H, (\sum_{i=1}^6 (i' + i''))) \rightarrow (D_{50}, \{i\}_{i=1}^6)$ та виконаному шляхом ототодження усіх пар (i', i'')

вершин з множин $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

4. D_{51} - обструкція для тору є φ -образом графів K_5 та H , де $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$, $K_5^0 = \{i''\}_1^5$

, $H^1 = H_1^1 \cup H_2^1 \cup \{(b, 1''), (v, 3'')\}$, $H_1^0 = \{4'', 5'', c, b, v\}$, $H_2^1 = \{2'', 4'', 5'', a, c\}$,

$H_1 = H(\{4'', 5'', c, b, v\}) = K_5 \setminus (4'', 5'')$, $H_2 = H(\{2'', 4'', 5'', a, c\}) = K_5 \setminus (4'', 5'')$, причому H_2

має з K_5 спільний ланцюг довжини 2 на вершинах $\{4'', 5'', c\}$, де H -квазізірка з центром

на множині вершин $\{a, b, c, v\}$ на якій породжує підграф $K_4 \setminus K_{1,2}$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_5 + H, \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (D_{51}, \{i\}_{i=1}^5)$ шляхом ототодження усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$;

Доведення леми 3.8. Доведемо твердження 1. Побудуємо вкладення f_{48} в σ_2 графа D_{48} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_6 \setminus K_{1,2}^1$ в тор σ_1 наступним чином: а) $f_{48}(H \setminus (c, 5'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H -квазізірка з центром-трикутником K_3 на вершинах $\{a, b, c''\}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_6 \setminus K_{1,2}^1)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 9, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6 \setminus 2''$, як досяжної на площині s ; б) $f_{48}((c, 5'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{48}(H \setminus (c, 5'')))$. Вкладення графу $f_{48}(D_{48})$ до подвійного тору наведене на рис.3.9, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{48}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 15, а ребер у графа дорівнює 26, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 26 + 15$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{48}) = 2$. Твердження 1 доведено.

Доведемо твердження 2. Побудуємо вкладення f_{49} в σ_2 графа D_{49} шляхом продовження мінімального вкладення f графа $K_6 \setminus 2K_2^1$ в σ_1 наступним чином: а) $f_{49}(H \setminus (c, 4'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H – об'єднання зірки $St_4(c)$ та квазізірка з центром K_2 на вершинах $\{a, b\}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_6 \setminus 2K_2^1)$ та s є кліткою із границею ∂s -циклом довжини 9, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6$, як досяжної на площині s ; б)

$f_{49}((c, 4'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{49}(H \setminus (c, 4'')))$.

Вкладення графу $f_{49}(D_{49})$ до подвійного тору наведене на рис.3.9, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{49}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 15, а ребер у графа дорівнює 26, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 26 + 15$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{49}) = 2$. Твердження 2 доведено.

Доведемо твердження 3. Побудуємо вкладення f_{50} в σ_2 графа D_{50} шляхом продовження мінімального вкладення f графа K_6 в σ_1 наступним чином: а) $f_{50}(H \setminus (b, 3'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H – об'єднання зірки $St_4(a)$ та квазізірка з центром K_2 на вершинах $\{c, b\}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_6)$ та s є

кліткою із границею ∂s -циклом довжини 9, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^6$, як досяжної на площині s ; б)

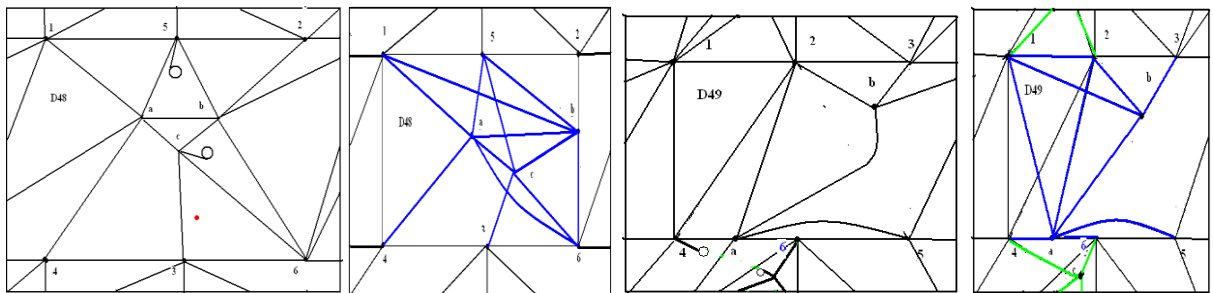
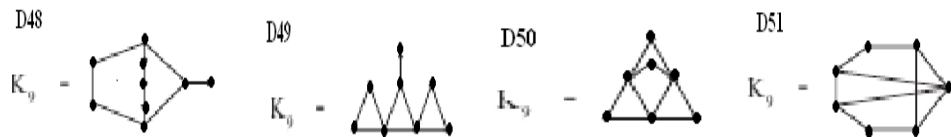
$f_{50}((b,3'')) \subset h$, де h -2-ручка приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{50}(H \setminus (b,3'')))$.

Вкладення графу $f_{50}(D_{50})$ до подвійного тору наведено на рис.3.9, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{50}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 15, а ребер у графа дорівнює 26, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 26 + 15$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{50}) = 2$. Твердження 3 доведено.

Доведемо твердження 4. Побудуємо вкладення f_{51} в σ_2 графа D_{51} шляхом продовжен ня

мінімального вкладення f графа K_5 в σ_1 наступним чином: а) $f_{51}(H \setminus (v,5'')) \subset \bar{s} \setminus \partial s$, де H - квазізірка з центром $K_{1,3}$ на вершинах $\{c,b\}$, $s \in \sigma_1 \setminus f(K_5)$, $s \in$ кліткою із границею ∂s - циклом довжини 9, на границі якої із урахуванням 2-доступу розміщено всі вершини з множини $M'' = \{i''\}_1^5$, як досяжної на площині s ; б) $f_{51}((v,5'')) \subset h$, де h -2-ручка

приклеєна до двох кліток з множини $\bar{s} \setminus (\partial s \cup f_{51}(H \setminus (v,5'')))$. Вкладення графу $f_{51}(D_{51})$ до подвійного тору наведено на рис.3.9, тому матимемо нерівність $\gamma(D_{51}) \leq 2$. Оскільки число граней дорівнює 15, а ребер у графа дорівнює 26, то формула Ейлера стає тотожністю $2 - 2 * 2 = 9 - 26 + 15$. Отже матимемо рівність $\gamma(D_{51}) = 2$. Твердження 4 доведено. Лема 3.9 доведена



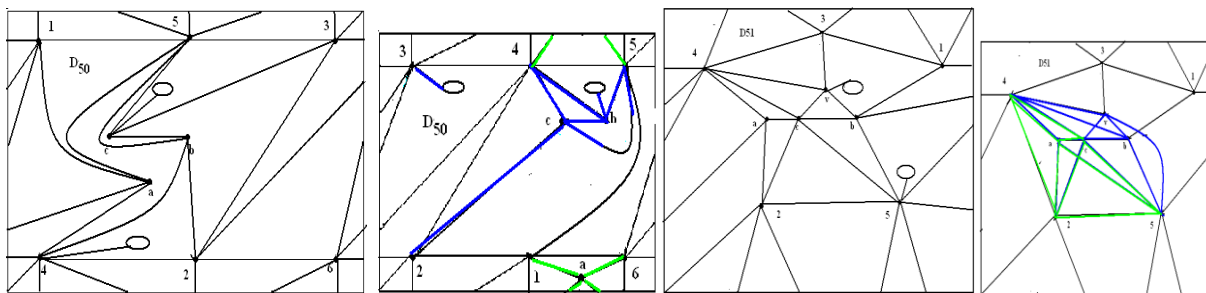


Рис.3.9. Доповнення до K_9 та вкладення графів $f_{48}(D_{48}) \dots f_{51}(D_{51})$ до 2-тору.

З наведених лемм 3.1-3.9 випливатиме **основний результат**:

Теорема 2. Кожен граф-обструкція роду 2 на 9-ти вершинах є результатом ф-перетворення трьох зв'язних графів X, Y, Z , які задовольняють одному з наступних випадків:

- 1) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ (можливо із кількома додатковими ребрами) вкладений в тор σ , граф Z відсутній, а інший граф X - є
 - або площинним 2-мінімальним відносно множини точок приєднання до графа Y на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із нульовими характеристиками θ та $\partial\theta$ для множини точок приєднання до графа Y ,
 - або площинним 3-мінімальним на s недвоклітці тора, $s \in \sigma_1 \setminus Y$, із характеристиками $\theta, \partial\theta$, де $\theta=1$ чи $\partial\theta=1$, для множини точок приєднання графа X до графа Y ;
- 2) граф Y один з графів K_5 чи $K_{3,3}$, можливо без ребра, вкладений в тор σ , а інший граф X роду 1 є 2-мінімальним відносно множини точок приєднання на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із нульовими характеристиками θ і $\partial\theta$ множини точок приєднання графа X до графа Y , граф Z відсутній;
- 3) граф Y містить частину гомеоморфну K_5 чи $K_{3,3}$ (можливо із кількома додатковими ребрами) вкладений в тор σ , граф Z - проста зірка, граф X є площинною квазізіркою із центральним графом M на двох вершинах, яка не є 2-мінімальним графом на недвоклітці s , $s \in \sigma \setminus Y$, причому існує, принаймні одна, пара вершин простої зірки Z , зформована із елементів множини приєднання графа X до графа Y , що розділяє на ∂s пару кінцевих вершин з множини приєднання графа X до графа Y .

Література

1. Хоменко М. П. ф-перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, 1971,378с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ НАНУ, Киев, 1970.
3. Brown T. Duke R. An irreducible graph consisting a single block. J.Math. and Mech.1966,15,№ 1, 129–135.
4. Joachim E. Minimale nicht in die Ringfläche einbettbare Grapghen. Elem. Math. 1978, 33, № 3,57 – 61.
5. Youngs J. W. Irreducible graphs. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 404 – 405.
6. Auslander L. Brown T. Youngs J. W. T. The embedding graphs in manifolds. J.Math.and Mech.12,1963,629–634.
7. Brown T. Duke R. An irreducible graph consisting a single block. J.Math.and Mech.1966,15,№ 1,129 – 135.

8. Duke R.A. Haggard G. The genus subgraphs K_8 . Israel J. Math. 11 (1972) 452 – 455.
9. Huneke J. P. A genus a graph. Relations between combinatorics and other parts mathematics. Amer. Math. Soc. Providence R. I v 34 1979 357 – 364.
10. Joachim E. Minimale nicht in die Ringfläche einbettbare Graphen. Elem. Math. 1978, 33 № 3 57 – 61.
11. Joachim E. Minimale Graphen auf orientierbaren geschlossenen Flächen. Math. phys. Semesterber 1979 26 № 2 205 – 216.
12. Joachim E. Zur Theorie der nicht ebenen Graphen. Praxis Math. 22 (1980) № 7 212 – 216.
13. Joachim E. Beispiele nicht ebenen Graphen. Praxis Math. 22 (1980) № 9 279 – 281.
14. Петренко В.І. Властивості 2-незведених простих графів. Штучний інтелект №2, 2008, с.34-40
15. Huneke J.P, Johns G, A.Hlavachek 9-Vertex Irreducible Graphs on the Torus. Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Boca Raton, Florida, 2006. 16.
- Milgram M. Irreducible graphs. J. Combin Theory Ser B12 (1972) 6 – 31. 17.
- Milgram M. Irreducible graphs. J. Combin Theory 14 (1973) 7- 45. 18.
- Youngs J. W. Irreducible graphs. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 404 – 405. 19.
- Gagarin A., William K. Embedding graphs containing K_5 -subdivisions. Ars Combinatoria, 64:33– 50, 2002. 20.
- Gagarin A., Myrvold W., Chambers J. The obstructions for toroidal graphs with no $K_{3,3}$'s. , 1 February 2008 21.
- Mochar B., Kawarabayashi K. Some Recent Progress and Applications in Graph Minor Theory, July 11, 2006 22.
- Петренко В.І. Об оценке рода специальных графов. деп. рукоп в УкрНИИТИ №2259-Ук86 22.09.1986 23.
- Mohar B. Face covers and the genus problem for apex graphs. J. Combin. Theory, B 2001. v. 82 p.102-117. 24.
- Петренко В.І. Узагальнена оцінка роду простого графа. Искусст. интеллект. 2004. т., 4. с. 34-45. 25.
- Петренко В. І. Две характеристики дуального графа плоского графа. Мат. между. конф. "Искусст. интеллект-2004", Кацивели, Украина: "Наука і освіта", 2004. с. 230-231. 26. Hur Suhjin.
- The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. PhD dissertation, Ohio State University, 2008.
27. R. Bodendiek, K. Wagner. A characterization of the minimal basis of the torus. Combinatorica 6, 3, 1986 245-260
28. D. Archdeacon. A Kuratowski theorem for the projective plane. Journal of Graph Theory, 5:243–246, 1981
29. Петренко В.І. Построение графов-обструкций ограниченного ориентируемого рода. Сборник трудов XVI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» г. Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г., стр. 363-368

2.3. СТРУКТУРА 7-МИ ВЕРШИННИХ ПІДГРАФІВ 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ТОРА

Метою подання графів G обструкцій для тора на 8-ми вершинах із однією видаленою довільною вершиною v та всіма інцидентними їй ребрами, як результату φ -перетворення $G \setminus v$ та $St_G(v)$ шляхом ототождження пар точок з множин приєднання із числом досяжності 2, та дослідженні структури графів $G \setminus v$ на предмет мінімальності множини ребер відносно заданих характеристик множин приєднання при видаленні довільного ребра графа $G \setminus v$. **Основні результати:**

- а). Теорема 1, 2 про мінімальність ребер 7-ми вершинних графів $G \setminus v$ роду 1, де G – 8-ми вершинний граф-обструкція B_j для тора σ_1 , v – довільна його вершина, M – множина всіх точок приєднання підграфа $G \setminus v$ до зірки $St_G(v)$, із центральною вершиною v та M' – множиною всіх висячих вершин інцидентних v , де $t_{G \setminus v}(M) = 2$, і розміщується на границях двох кліток s_1, s_2 з множини $\sigma_1 \setminus (G \setminus v)$ так, що тільки одна з вершин приєднання не належить до границі іншої клітки, причому кожне видалене ребро e , або зменшує число досяжності M , та яка має число досяжності 2, а для кожного ребра e із кінцевими вершинами, що належать до множини M графа $B_j \setminus v$ виконується або співвідношення $e \in B_j^1 \cap (\partial s_1 \cap \partial s_2)$, або зменшується на 1 рід графа $B_j \setminus v$, т.то при операції видалення довільне ребра графа $B_j, j = 1, 2, 3$ є суттєвим відносно роду чи числа досяжності заданої множини M .
- б). Наведені всі неізоморфні 7-ми вершинні тороїдальні графи мінімальні відносно заданої множини точок з числом досяжності 2 при видаленні довільного ребра.

Вступ. Основні позначення взяті із [1], [2]. Нехай G неорієнтований скінчений граф без петель і кратних ребер ейлерового роду $\gamma(G)$, а S – замкнутий 2-многовид роду

$\gamma(S)$, де $\gamma(G) = \gamma(S) + 1$. Якщо поверхня орієнтована, то позначатимемо її через σ , а якщо це неорієнтована поверхня, то позначатимемо її Σ .

Задача. Для довільної вершини v графа G , який є граф-обструкцією для тору з числом вершин менше 10, дослідити структуру графу G шляхом розкладу (розбиття множини його ребер на суму двох підмножин, що не перетинаються) на підграф H , $H = G \setminus v$, та просту зірку $St_G(v)$ графа G із спільними вершинами, що утворюватимуть підмножину M множини точок графа G , подану як результат ототодження пар точок (a_{1j}, a_{2j}) в точку a_j , де $M_i = \{a_{ij}\}_{j=1}^{|M|}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, |M|$, та яку називатимемо множиною точок приєднання підграфа H , $M_1 \subseteq H^0$, до зірки $St(v)$, $M_2 \subseteq St_G(v)^0 \setminus v$.

Визначення 1. Граф G називається таким, що неприводиться над S , або $\gamma(G)$ -неприведеним (irreducible) для S , якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх $\gamma(G)$ -неприведених над S графів позначимо через $\zeta(S)$.

Визначення 2. Граф G мінімальний (мінор) над S , якщо для будь-якого графа G' , отриманого з графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G') \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх графів мінімальних над S позначимо через Γ_S .

Множина всіх графів, що неприводяться над S містить Γ_S характеризує множину всіх графів рід яких не менше $\gamma(S) + 1$. Якщо $S = \sigma_0$ евклідова площина, то $\Gamma_S = \{K_5, K_{3,3}\}$.

Визначення 1,2 узяті з [3], [4], відповідно. Нехай $S = \sigma$ - орієнтована замкнута поверхня роду $\gamma(\sigma)$, $\gamma(\sigma) > 0$, $\gamma(\sigma) = n - 1$. Задача побудови всіх графів, що неприводяться над σ зводиться, як показано в [5] до задачі переліку всіх блоків, тобто графів без точок з'єднання, що неприводяться над σ . Доведено в [9], що графи $B_1, B_2, B_3, K_{3,7}$ неприводяться для тору σ_1 , а G_n n -мінімальний блок, що неприводиться при $n > 1$. Граф G_n був побудований в [6], а в [7], [8] було доведено, що є три 2-неприведених підграфи графа K_8 , а саме: $B_1 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_3^1)$, $B_2 = (K_8^0, K_8^1 \setminus (K_{1,2}^1 \cup 2K_2^1))$, $B_3 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1)$. В [18] розв'язувалася ця ж задача, доведено, що один граф містить підграф ізоморфний B_3 , тобто має зайве ребро. В [9] наведено два графи G_1, G_2 неприведені для тору, а в [14] знайдені в обох зайві ребра. В [10] доведено, що граф $K_{3,7}$ мінімальний над тором. Граф $K_{3,7}$ наведено в [11], де було доведено, що $K_{3,11}$ мінімальний для подвійного тору σ_2 . В [10], [13] зроблено припущення, що граф $K_{3,4p+3} \in (p+1)$ -мінімальний блоком, $p > 0$, та доведено, що граф $K_{3,7}$ мінімальний для пляшки Клейна, а $K_{3,9}$ мінімальний для поверхні

ейлерової характеристики -1 . Наведений в [15] повний список 63-х 2-неприведених графів із 9-ма вершинами; 51 із них (48 мінорів) можливо побачити в он лайн РНД-дисертації Hur Suhjin «The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10» на відміну від [16], [17]. Спочатку в [27], а потім в [19], [20] виписані 2-неприведені для тору графі без підграфів гомеоморфних $K_{3,3}$. Більше наведено в [21] та інших статтях де розбудовують та використовують ідею К-мостів заданого графа.

Число досяжності підмножини M множини точок графа G роду γ , $\gamma = \gamma(G)$, є найменшою кількістю кліток з підмножини Δ множини $S \setminus f(G)$, де S поверхня роду γ , а f , $f : G \rightarrow S$, довільне мінімальне вкладення при якому елементи $f(M)$ розташовують ся на границях кліток із підмножини Δ , потрібне для оцінки роду ϕ -образу деякого графа та простої зірки; у випадку заміни зірки на квазізірку доповнимо наступними визначеннями, які враховують наявність на границі недвоклітки кількох копій вершин графа.

Визначення 3. Позначимо через $krt_G(M)$, $kr = krt_G(M)$, kr - кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G , як найбільшу кількість варіантів вибору різних підмножини $S_G(M, S_\gamma)$ множини кліток $S_\gamma \setminus f(G)$ на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M , узята по всіх мінімальних вкладеннях f , $f : G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ . Іншими словами, це найбільша кількість зірок які приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Визначення 4. Позначимо через $ms_G(M, s, f)$, $k = ms_G(M, s, f)$, k - сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої клітки \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітки s , $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f - задане мінімальне вкладення $f : G \rightarrow S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M , а найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх кліток s заданого мінімального вкладення f , $f : G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $ms_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G приєднаних кінцевими вершинами до кожного із принаймні трьох елементів множини M та вкладених без перетину ребер у внутрішніх точках до однієї клітки s , $s \in S_\gamma \setminus f(G)$, із цикломатичним числом $p_1(\partial s)$, де $p_1(\partial s) \geq k$, та заданим мінімальним вкладенням f , $f : G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ .

Визначення 5. Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), \dots, ms_G(M, f_N))$ вектором l -стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої клітки \bar{s} , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, $l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0$, $|M| > 2$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ -множина всіх неізоморфних мінімальних вкладень $f_k, f_k: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел $ms_G(M, f_k)$ узяті по всім s та всім f_k , називатимемо характеристикою l -стороннього доступу до множини M точок графа G . В подальшому вважатимемо, що $S_\gamma = \sigma_2$, тобто є 2-тором.

Лема 1.1. Для графа K_5 мають місце наступні твердження:

- а) Існує 2-кліткове вкладення в тор при якому множина вершин розміщується на простому циклі довжини 5, спільному для трьох 2-клітин;
- б) Існує не 2-кліткове вкладення в тор при якому множина вершин розміщується на циклі довжини 8 та частково на циклі довжини 4;
- в) Множина M , складена з усіх точок графа K_5 , а саме всіх вершин та по одній внутрішній точці кожного ребра, розміщується, або на двох 2-клітинах-п'ятикутниках та одній 2-клітині чотирикутника, або на двох трикутниках та восьмикутнику;
- г) Число досяжності $t_{K_5}(M, \sigma_1) = 3$ та характеристики $\theta_{K_5}(M, \sigma_1) = 1$, $\partial\theta_{K_5}(M, \sigma_1) = 0$.
- д) Множина вершин K^0 графа K . $K_5 \setminus u = K$, $K^0 = \{1, 2, a, b, c\}$, із ребром $u = (1, 2)$ має дві підмножини $\{a, b, c\}$, $\{1, 2\}$ з числами досяжності 2 та мінімальні відносно видалення з них довільного елемента;
- е) $K_5 \setminus u \in \phi$ -образом колеса W_4 з центром в вершині b та зірки $St_3(d) \setminus (d, b)$, а $K_{3,3} \in \phi$ підграфом ϕ -образом колеса W_4 з центром в вершині b та зірки $St_3(d)$, причому одна з двох трійок належить $K_3 \setminus e$, а інша $\overline{K_3}$;
- ж) Для п'яти вершин графа K_5 маємо: $ms_{K_5}(K_5^0) = 1$, $krt_{K_5}(K_5^0) = 2$;
- з) Для чотирьох довільних вершин графа K_5 маємо: $ms_{K_5}(K_5^0 \setminus v) = 2$, $krt_{K_5}(K_5^0 \setminus v) = 3$;
- і) Для трьох довільних вершин графа K_5 маємо: $ms_{K_5}(K_5^0 \setminus \{u, v, w\}) = 2$, $krt_{K_5}(K_5^0 \setminus \{u, v, w\}) = 2$;
- ї) Для графа K_6 на торі маємо два неізоморфних 2-кліткових вкладення;
- й) Для вершин графа K_6 маємо $t_{K_6}(K_6^0) = 1$, а для довільного ребра e існує така вершина v що має $ms_{K_6 \setminus e}\{v\} = 2$;

Доведення тверджень леми 1.1 полягає в побудові всіх неізоморфних вкладень графа K_5 в тор та перевірці вказаних властивостей як показано на рис.1.0.

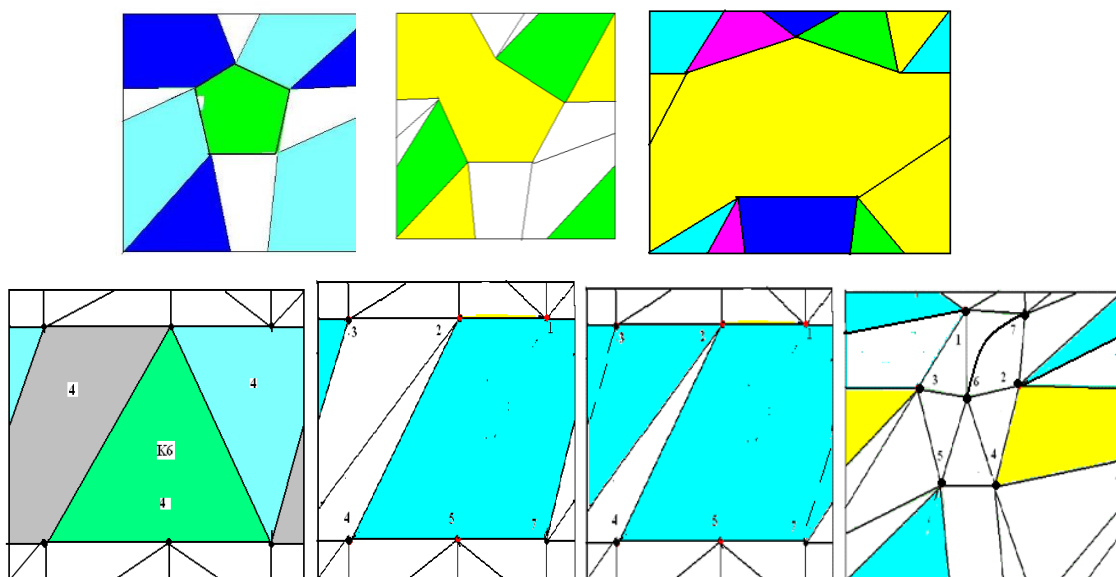


Рис.1.0. Вкладення графа K_5 в тор (2-кліткове та два неізоморфних не 2-кліткових у верхньому ряду), два 2-кліткових неізоморфних вкладення графа K_6 , та K_6/e , K_7 в тор.

Твердження 1.1. Видалення довільної вершини v графа B_j , $j = 1, 3$, $B_1 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_3^1)$, $B_3 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1)$, призводить до одного з наступних тверджень (в залежності від $\deg v$ та підмножини M , яка складена з вершин інцидентних v та має число досяжності 2):

0). Множина вершин графа B_1 розбивається на два класи еквівалентності, а множина вершин графа B_3 розбивається на три класи еквівалентності відносно перестановки вершин;

1) Для графа B_1 маємо два випадки: а) якщо $\deg v = 5$, то $B_1 \setminus v = K_7 \setminus e$ і $M = K_5^0$, б) якщо $\deg v = 7$, то $B_1 \setminus v = K_7 \setminus K_3^1$ і $M = (K_7 \setminus K_3^1)^0$; причому в обох випадках множина M вершин графа $B_1 \setminus v$ матиме число досяжності 2 та розміщується на границях двох кліток s_1, s_2 так, що тільки одна не належить до границі іншої клітки, а для кожного ребра e із кінцевими вершинами, що належать до множини M графа $B_1 \setminus v$ виконується або співвідношення $e \in B_1^1 \cap (\partial s_1 \cap \partial s_2)$, або зменшується на 1 рід графа $B_1 \setminus v$ (див. рис. 1.1.);

2) Для графа B_3 маємо три випадки, в кожному з них існуватиме таке вкладення в тор графа $B_3 \setminus v$, при якому виконується рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$ і вершини з M розміщуються на границях двох кліток так s_1, s_2 , що тільки одна не належить до границі іншої клітки, а для кожного ребра e із кінцевими вершинами, що належать до множини M графа $B_3 \setminus v$, виконується або співвідношення $e \in B_3^1 \cap (\partial s_1 \cap \partial s_2)$, або $\gamma((B_3 \setminus v) \setminus e) = 0$ (див. рис 1.2):

а) якщо $\deg v = 7$, то це склеєні по ребрам $e_i = (a_i, b_i)$ графі K_5, K_4 , відповідно, тобто задаємо $\varphi(K_5 + K_4, (a_1 + a_2, b_1 + b_2)) \rightarrow (B_3 \setminus v, (a, b))$, де $e = (a, b)$, $e \in B_3^1 \setminus St^1(v)$,

$M = B_3^0 = St^0(v) \setminus \{v\}$ причому виконується рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$;

б) якщо $\deg v = 4$, то це графі K_5, K_4 , відповідно, склеєні по ребрам $e_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, 2$, із додатковими трьома ребрами з спільною вершиною w графа K_4 , $w \in K_4^0 \setminus \{a_2, b_2\}$,

$M = K_4^0 = St^0(v) \setminus \{v\}$, причому виконується рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$;

в) якщо $\deg v = 5$, то це склеєні по ребрам $e_i = (a_i, b_i)$ графі K_5 та K_4 , відповідно, тобто $\varphi(K_5 + K_4, (a_1 + a_2, b_1 + b_2)) \rightarrow (B_3 \setminus v, (a, b))$, де $e = (a, b)$, $e \in B_3^1 \setminus St^1(v)$, із додатковими двома

ребрами $(w, w_1), (w, w_2)$ з спільною вершиною w графа K_5 , $w \in K_5^0 \setminus \{a_2, b_2\}$ та

$M = \{w\} \cup K_5^0 \setminus \{v\}$, причому виконується рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$.

Доведення твердження 1.1. Множини вершин та ребер графа $B_j \setminus v$ $B_j, j = 1, 3$,

$B_1 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_3^1)$, $B_3 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1)$, розіб'ємо на класи еквівалентності та впевнимся у

виконанні наведених тверджень згідно рис.1.1, а саме твердження 0) для множини вершин

графу B_1 та твердження 1) для множини ребер графу B_1 . Для графу $B_{2,1}$ має місце

твердження 2) згідно рис.1.2.

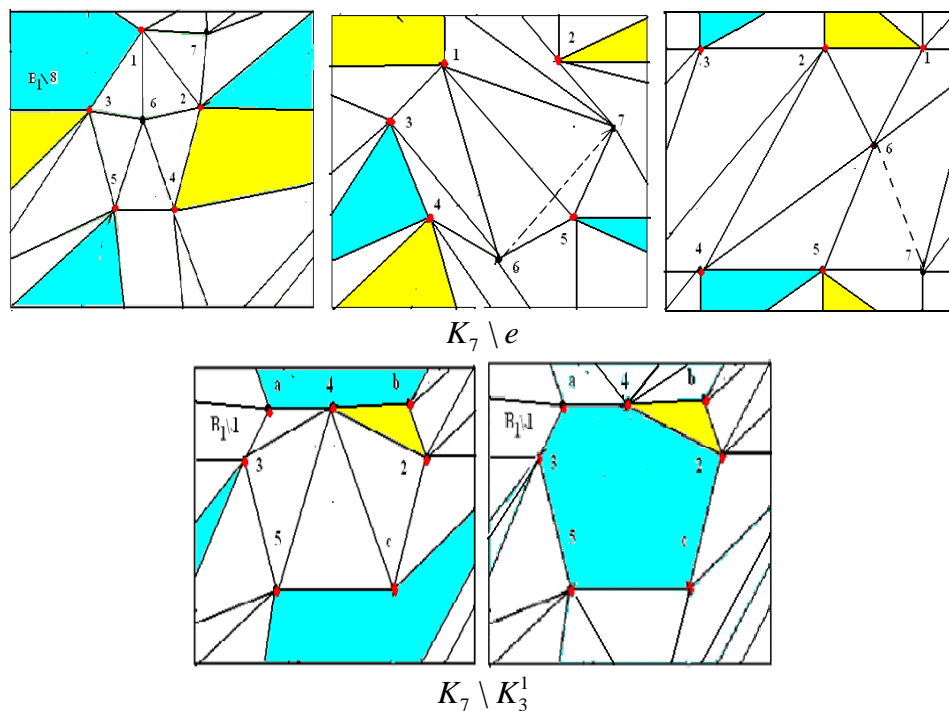


Рис. 1.1. Ілюстрації до твердження 1.1 щодо графу $B_1 \setminus v$ та його вкладень в тор, де червоні вершини належать множині M (в першому ряду три різні вкладення одного й того графу).

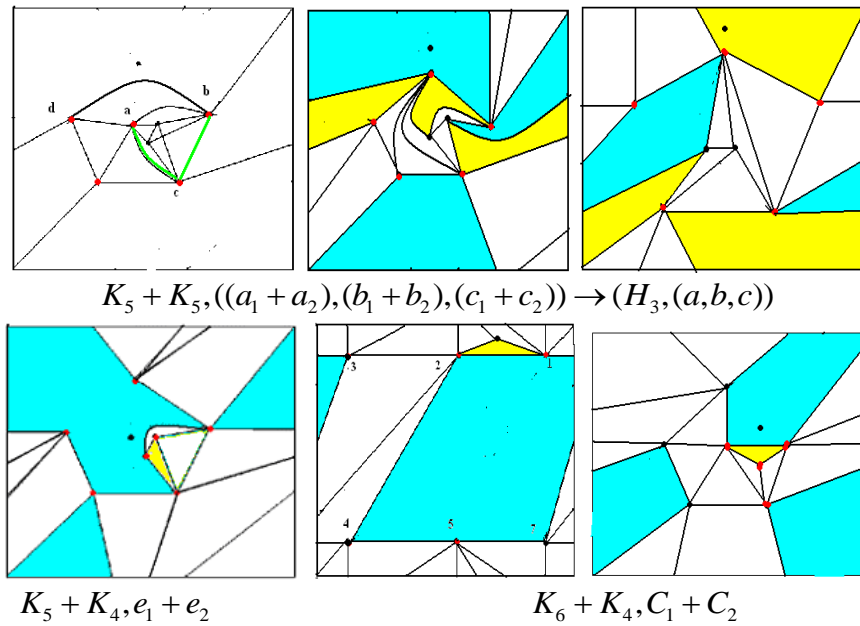


Рис. 1.2. До твердження 1.1 щодо графа $B_3 \setminus v$ та його вкладень в тор, де червоні вершини належать до множини M ; різним є вкладення одного й того графа на другій та третій тороїдальних картах нижнього ряду

Теорема 1. Видалення довільної вершини v графа $B_j, j = 1, 3, B_1 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_3^1), B_3 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1)$, призводить до одного з графів $B_j \setminus v$ у яких кожне видалене ребро, або зменшує число досяжності $t_{B_j \setminus v, M}$ підмножини M , де $t_{B_j \setminus v, M} = 2$, складеної з вершин інцидентних v , та розміщується на границях двох кліток s_1, s_2 так, що тільки одна з вершин приєднання не належить до границі іншої клітки, а для кожного ребра e із кінцевими вершинами, що належать до множини M графа $B_j \setminus v$ виконується або співвідношення $e \in B_j^1 \cap (\partial s_1 \cap \partial s_2)$, або зменшується на 1 рід графа $B_j \setminus v$, т.то кожне ребро графа $B_j, j = 1, 3$ є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра.

Доведення. Доведення теореми 1 впливатиме із твердження 1.1.

Твердження 1.2. Видалення довільної вершини v графа $B_2, B_2 = (K_8^0, K_8^1 \setminus (K_{1,2}^1 \cup 2K_2^1))$, призводить до одного з графів, вписаних в наступних співвідношеннях, (в залежності від $\deg v$ та структури на підмножині M , складеної з вершин інцидентних v , яка має число досяжності більше 1):

0). Множина вершин графа B_2 розбивається на 8-м класів еквівалентності відносно

відношення транзитивності, тобто $B_2^0 = \bigcup_{i=1}^8 A_i$, де $A_i = \{i\}, i = 1, 2, 3, \dots, 8$, рис.1.3 і);

1). Для графа $G \setminus v$, де $G, G = B_2$, маємо із точністю до перенумерації вершин наступні вісім випадків:

а) якщо $v = 8$, $\deg v = 6$, то це склеєні по парі трикутників $\Lambda_i = (a_i, b_i, c_i)$ графі K_5 , $K_5 \setminus e$, відповідно, тобто маємо ϕ -перетворення виду $\phi(K_5 + K_5 \setminus e, (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)) \rightarrow (B_3 \setminus v, (a, b, c))$, де $M = St_G^0(v) \setminus \{v\}$ на рис.1.3 а), та рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$;

б) якщо $v = 8$, $\deg v = 7$, то це склеєні по парі простих ланцюгів довжини 2 $\Lambda_i = (a_i, b_i, c_i)$ графі K_5 , $K_5 \setminus e$, відповідно $\Lambda_1 \subset K_5$, $\Lambda_2 \subset K_5 \setminus e$, та двох несуміжних додаткових ребер із кінцевими вершинами відмінними від a_i, b_i, c_i , тобто маємо ϕ -перетворення виду: $\phi(K_5 + K_5 \setminus e, (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)) \rightarrow (B_3 \setminus v, (a, b, c))$, де $e = (2, 7)$, $M = St_G^0(v) \setminus \{v\}$ на рис.1.3 б), та рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$;

в) якщо $\deg v = 6$, то це склеєні по парі простих ланцюгів L довжини 3, де $L_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$, $i = 1, 2$, графа K_5 та колеса W_5 , відповідно $L_1 \subset K_5$, $L_2 \subset W_5$, тобто маємо ϕ -перетворення виду: $\phi(K_5 + W_5, (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)) \rightarrow (B_3 \setminus v, (a, b, c, d))$, де $v = 8$ на рис.1.3 в), причому для множини M , $M = St_G^0(v) \setminus \{v\}$, має місце рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$;

г) якщо $\deg v = 6$, то графі K_5 та колесо W склеєні по парі простих циклів z_1 , z_2 довжини 5 та 6 відповідно, де $z_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1, f_1)$, $z_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2, f_2, g_2)$, $L_1 \subset K_5$, $L_2 \subset W_5$, тобто маємо ϕ -перетворення виду: $\phi(K_5 + W, (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2, f_1 + f_2, x + g_2)) \rightarrow (B_3 \setminus v, (a, b, c, d, f))$, де $v = 2$ та x -внутрішня точка ребра (a_1, f_1) на рис.1.3 г), причому граф W є склеєним по трьом вершинам, дві з яких суміжні, графів $K_5 \setminus e$ та K_4 , а для множини M , $M = St_G^0(v) \setminus \{v\}$, має місце рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$;

д) якщо $\deg v = 6, v = 3$, то маємо для графів $K_6 \setminus e$ та $St_5(g_0)$ ϕ -перетворення виду: $\phi(K_6 \setminus e + St_5(g_0), \sum_{j=1}^5 (a_{1j} + g_{2j})) \rightarrow (B_3 \setminus v, \{a_{1j}\}_{j=1}^5)$, де $e = (a_{11}, a_{13})$, множина вершин $\{a_{1j}\}_{j=1}^5$ не є досяжною на торі та вершина a_{12} має двосторонній доступ, $St_5^0(v) = \{g_{2j}\}_{j=1}^5 \cup \{g_0\}$ і для множини M , $M = St_G^0(v) \setminus \{v\}$, має місце рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$ (див. рис.1.3 д);

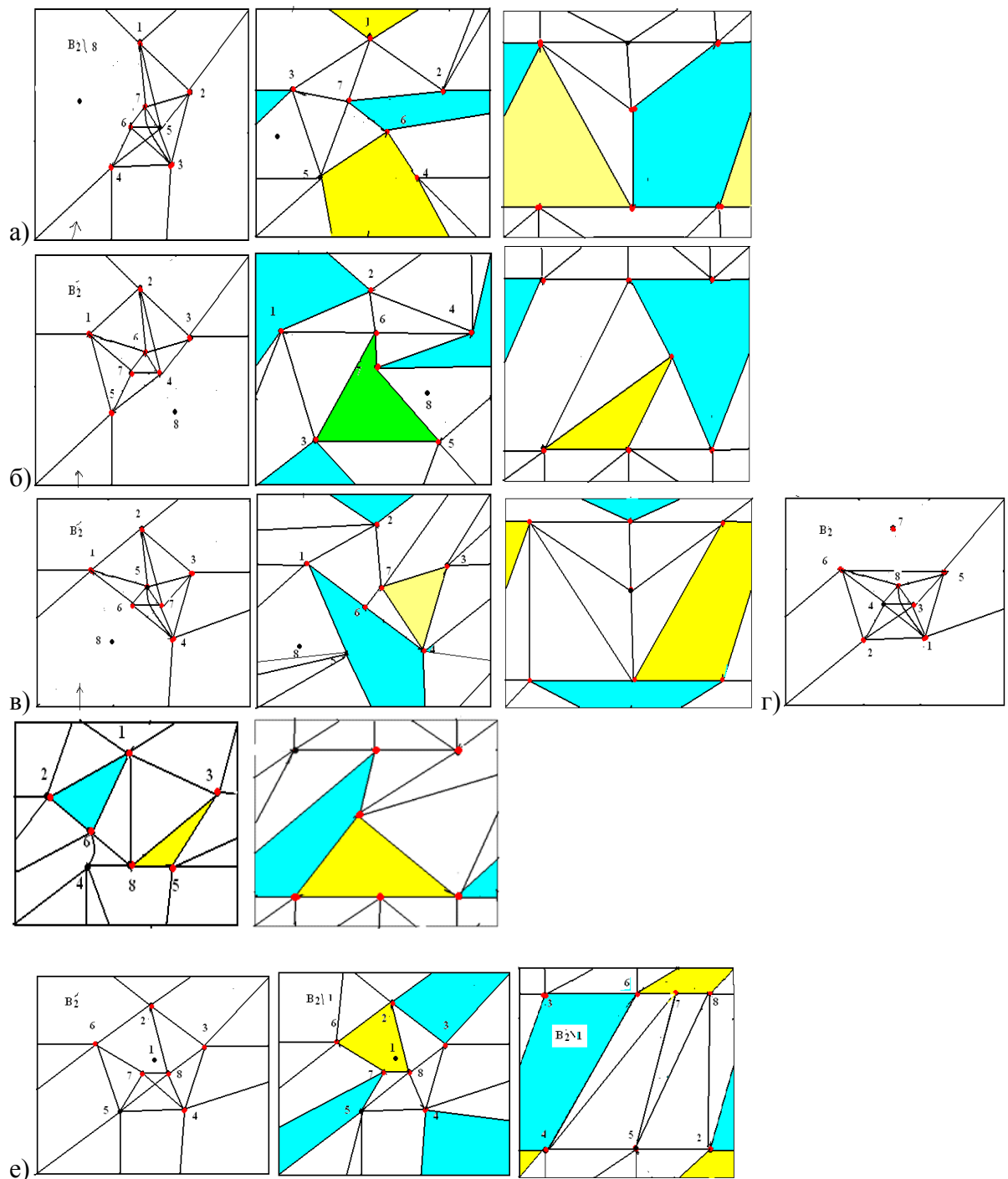
е) якщо $\deg v = 6, v = 1$, то для графів $K_6 \setminus e$ та $St_4(g_0)$ маємо ϕ -перетворення виду: $\phi(K_6 \setminus e + St_4(g_0), \sum_{j=1}^4 (a_{1j} + g_{2j})) \rightarrow (B_3 \setminus v, \{a_{1j}\}_{j=1}^4)$, де $e = (a_{11}, a_{13})$, множина вершин $\{a_{1j}\}_{j=1}^4$ є досяжною на торі, $St_4^0(v) = \{g_{2j}\}_{j=1}^4 \cup \{g_0\}$ і для множини M , $M = St_G^0(v) \setminus \{v\}$, має місце рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$ (див. рис.1.3 е);

ж) якщо $\deg v = 6, v = 8$, то для графів $K_6 \setminus e$ та $St_4(g_0)$ маємо ϕ -перетворення виду: $\phi(K_6 \setminus e + St_4(g_0), \sum_{j=1}^4 (a_{1j} + g_{2j})) \rightarrow (B_3 \setminus v, \{a_{1j}\}_{j=1}^4)$, де $e = (a_{11}, a_{13})$, множина вершин $\{a_{1j}\}_{j=1}^4$ є досяжною на торі та до цих вершин немає двостороннього доступу, $St_4^0(v) = \{g_{2j}\}_{j=1}^4 \cup \{g_0\}$ і для множини M , $M = St_G^0(v) \setminus \{v\}$, має місце рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$ (див. рис.1.3 ж);

з) якщо $\deg v = 5, v = 7$, то для графів $K_6 \setminus e$ та $St_5(g_0)$ маємо ϕ -перетворення виду: $\phi(K_6 \setminus e + St_5(g_0), \sum_{j=1}^5 (a_{1j} + g_{2j})) \rightarrow (B_3 \setminus v, \{a_{1j}^*\}_{j=1}^5)$, де $e = (a_{11}, a_{13})$, множина вершин $\{a_{1j}\}_{j=1}^5$ є

досяжною на торі та до цих вершин немає двостороннього доступу, $St_4^0(v) = \{g_{2j}\}_{j=1}^4 \cup \{g_0\}$ і для множини M , $M = St_G^0(v) \setminus \{v\}$, має місце рівність $t_{G \setminus v}(M) = 2$ (див. рис.1.3 з); Доведення твердження 1.2. Множини вершин та ребер графа $B_j \setminus v$, $j = 1, 3$,

$B_1 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_3^1)$, $B_3 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1)$, розіб'ємо на класи еквівалентності та впевнимся у виконанні наведених тверджень згідно рис.1.1 та 1.2. Перестановка пари вершин призводить до того, що граф у випадку з) є ізоморфний графу з випадку д), граф з випадку е) ізоморфний графу з випадку ж), граф у випадку а) є ізоморфним графу з випадку ж), а графи у випадках б) і в) ізоморфні графу з випадку ж).



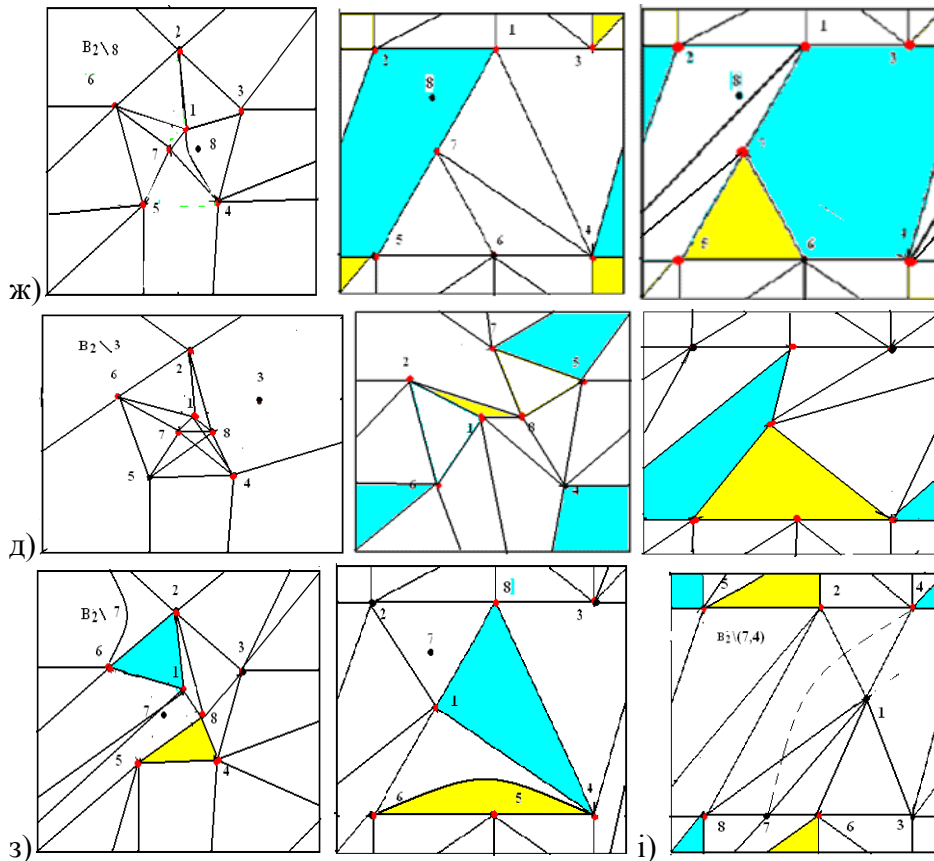


Рис. 1.3. До твердження 1.2 щодо графа $B_2 \setminus v$ та його вкладень в тор, де червоні вершини належать до множини M , наведено попарно (зліва-направо, окрім останнього ряду) граф та його вкладення в тор.

Теорема 2. Видалення довільної вершини v графа B_2 , $B_2 = (K_8^0, K_8^1 \setminus (K_{1,2}^1 \cup 2K_2^1))$, призводить до одного з графів $B_2 \setminus v$ у яких кожне видалене ребро, або зменшує число досяжності множини M , складеної з вершин інцидентних v , яка має $t_{B_2 \setminus v} M$ -число досяжності 2 та розміщується на границях двох кліток s_1, s_2 так, що тільки одна з вершин приєднання не належить до границі іншої клітки, а для кожного ребра e із кінцевими вершинами, що належать до множини M графа $B_2 \setminus v$ виконується або співвідношення $e \in B_2^1 \cap (\partial s_1 \cap \partial s_2)$, або зменшується на 1 рід графа $B_2 \setminus v$, т.то кожне ребро графа є суттєвим відносно числа досяжності множини M чи роду при операції видалення ребра.

Доведення. Доведення теореми 1 впливатиме із твердження 1.2. Перестановка пари вершин призводить до того, що граф у випадку з) є ізоморфним графу з випадку д), граф з випадку е) ізоморфний графу з випадку ж), граф у випадку а) є ізоморфним графу з випадку ж), а графи у випадках б) і в) ізоморфні графу з випадку ж). В наведених на рис. 1.3 тороїдальних картах неізоморфних графів з випадків ж), д), г) для кожного ребра простої зірки з 4-ма чи 5-ма променями, які приклеєно до вершин графа K_6 чи $K_6 \setminus e$,

можливо вибрати пару 2-кліток на границях яких лежатимуть всі вершини та їх перетин містить висяче ребро зірки.

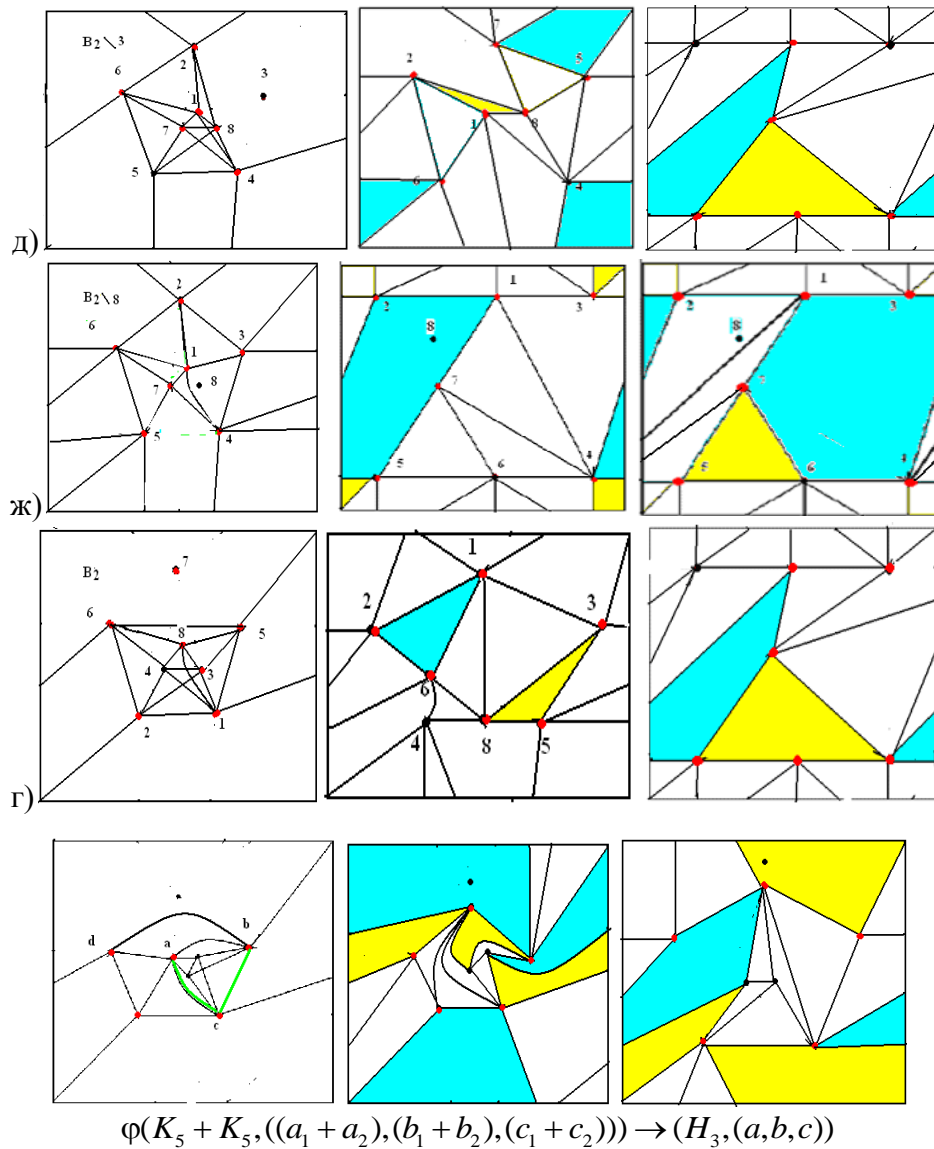


Рис. 1.4. Графи до наслідку 1.1 $K_7 \setminus 2K_2^1$, $K_7 \setminus (K_{1,2}^1 + K_2^1)$, $K_7 \setminus 3K_2^1$, H_3 (розміщені по рядкам із 3-х тороїдальних картах).

Наслідок 1.1. Мінімальні тороїдальні 7-ми вершинні графи ізоморфні наступним графам із заданими множинам точок приєднання, позначеними через M :

1. $K_7 \setminus e$, $M = K_7^0 \setminus \{a, b\}$, $e = (a, b)$;
2. $K_7 \setminus K_3^1$, $M = K_7^0$;
3. H_1 , $\varphi(K_5 + K_4, ((a_1 + a_2), (b_1 + b_2))) \rightarrow (H_1, (a, b))$, $M = H_1^0$;
4. H_2 , $H_2 = K_7 \setminus K_{1,3}^1$, $M = K_4^0$;
5. H_3 , $\varphi(K_5 + K_5, ((a_1 + a_2), (b_1 + b_2), (c_1 + c_2))) \rightarrow (H_3, (a, b, c))$, $M = K_5^0$, $\{a, b, c\} \subset M$;
6. $K_7 \setminus 2K_2^1$, $M = K_7^0 \setminus \{v, u\}$;
7. $K_7 \setminus (K_{1,2}^1 + K_2^1)$, $M = K_7^0 \setminus v$;
8. $K_7 \setminus 3K_2^1$, $M = K_7^0 \setminus v$,

де H_1 є φ -образом графів K_5, K_4 із ототоженою парою ребер $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ (склеєними по ребру), граф H_2 є φ -образом графів K_6, K_4 при ототоженні пари простих циклів довжини 3, а граф H_3 є φ -образом двох графів K_5, K_5 при ототоженні пари циклів C_1, C_2 довжини 3, (цикл C_i матиме вершини a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} , які попарно ототожнюються і утворюють цикл з вершинами a, b, c , $j = 1, 2, 3, i = 1, 2$), з іншого боку граф H_3 є $K_7 \setminus C_4^1$.

Наслідок 1.2. 8-ми вершинні графи-обструкції ізоморфні φ -образу одного з наведених у наслідку 1.1 графів та простої зірки, висячі вершини якої склеєні попарно з точками із M - заданої множини приєднання.

Література

1. Хоменко М. П. φ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, 1971, 378с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ НАНУ, Киев, 1970.
3. Brown T. Duke R. An irreducible graph consisting a single block. J. Math. and Mech. 1966, 15, № 1, 129–135.
4. Joachim E. Minimale nicht in die Ringflache einbettbare Grapghen. Elem. Math. 1978, 33, № 3, 57 – 61.
5. Youngs J. W. Irreducible graphs. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 404 – 405.
6. Auslander L. Brown T. Youngs J. W. T. The embedding graphs in manifolds. J. Math. and Mech. 12, 1963, 629–634.
7. Brown T. Duke R. An irreducible graph consisting a single block. J. Math. and Mech. 1966, 15, № 1, 129 – 135.
8. Duke R. A. Haggard G. The genus subgraphs K_8 . Israel J. Math. 11 (1972) 452 – 455.
9. Huneke J. P. A genus a graph. Relations betwen combinatorics and other parts mathematics. Amer. Math. Soc. Providence R. I v 34 1979 357 – 364.
10. Joachim E. Minimale nicht in die Ringflache einbettbare Grapghen. Elem. Math. 1978, 33 № 3 57 – 61.
11. Joachim E. Minimale Grapghen ouf orientierbaren geschlosenen Flächen. Math. phis. Semesterber 1979 26 № 2 205 – 216.
12. Joachim E. Zur Theorie der nicht ebenen Graphen. Praxis Math. 22 (1980) № 7 212 – 216.
13. Joachim E. Beispiele nicht ebenen Graphen. Praxis Math. 22 (1980) № 9 279 – 281.
14. Петренюк В.І. Властивості 2-незведених простих графів. Штучний інтелект №2, 2008, с.34-40
15. Huneke J.P, Johns G, A.Hlavachek 9-Vertex Irreducible Graphs on the Torus. Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Boca Raton, Florida, 2006.
16. Milgram M. Irreducible graphs. J. Combin Theory Ser B 12 (1972) 6 – 31.
17. Milgram M. Irreducible graphs. J. Combin Theory 14 (1973) 7- 45.
18. Youngs J. W. Irreducible graphs. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 404 – 405.
19. Gagarin A., William K. Embedding graphs containing K_5 -subdivisions. Ars Combinatoria, 64:33– 50, 2002.
20. Gagarin A., Myrvold W., Chambers J. The obstructions for toroidal graphs with no $K_{3,3}$'s. , 1 February 2008
21. Mochar B., Kawarabayashi K. Some Recent Progress and Applications in Graph Minor Theory, July 11, 2006
22. Петренюк В.І. Об оценке рода специальных графов. деп.рукоп в УкрНИИТИ №2259-Укр86 22.09.1986
23. Mohar B. Face covers and the genus problem for apex graphs. J. Combin. Theory, B 2001. v. 82 p.102-117.
24. Петренюк В.І. Узагальнена оцінка роду простого графа. Искусст. интеллект. 2004. т. 4. с. 34-45.
25. Петренюк В. І. Две характеристики дуального графа плоского графа. Мат. межд. конф. "Искусст. интеллект-2004", Казивели, Украина: "Наука і освіта", 2004. с. 230-231.
26. Hur Suhjin. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. PhD dissertation, Ohio State University, 2008.
27. R. Bodendiek, K. Wagner. A characterization of the minimal basis of the torus. Combinatorica 6, 3, 1986 245-260
28. D. Archdeacon. A Kuratowski theorem for the projective plane. Journal of Graph Theory, 5:243–246, 1981
29. Петренюк В.І. Построение графов-обструкций ограниченного ориентируемого рода. Сборник трудов XVI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» г. Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г., стр. 363-368

2.4. ПРО МЕТОД - φ -ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІВ ОРІЄНТОВАНОГО РОДУ

Розглянемо задачу моделювання складної системи в загальному виді та запропонуємо теоретико –графський підхід як спосіб мислення штучними образами-структурами. В [3] наведено задачі моделювання систем та математичні методи їхнього розв'язання в яких великі структури розглядаються як сукупність невеликих та простіших підструктур які можуть мати певні спільні частини, що підлягатимуть ототожненню при побудові оновленні цілої структур із скінченного числа підструктур. Основний метод - φ -перетворення графів (граф-моделей) отриманих як пара скінчених множин: множини об'єктів-вершин та множини об'єктів-ребер для визначення зв'язків між об'єктами структури. Основна ідея методу - φ -перетворення може інтерпретуватися як спосіб успадкування певної властивості підструктур всею структурою в залежності від властивостей з'єднання (ототожнення заданих частин підструктур). Наведені нижче результати можуть застосовуватися при системному аналізі граф-моделей. Прикладом використання є перетворення основних задач системного програмування на задачі теорії графів із готовим для використання математичним забезпеченням алгоритмів їхніх розв'язків.

Граф-модель математичної моделі складної системи подають у вигляді неорієнтовного графа G без кратних ребер і петель та вивчають її шляхом досліджень структурованих властивостей графа вкладеного в замкнуту поверхню S орієнтованого роду $\gamma(S)$; т.то розміщені на 2- ручках замкнутого 2-многовида S ребра графа не матимуть спільних точок крім вершин графа G роду $\gamma(G)$. Граф G зветься незведеним над S ($\gamma(S)$ - незведеним) якщо для кожного власного підграфа H графа G має місце нерівність $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Мінімальним графом над S називають такий граф G який зменшує $\gamma(G)$ після того як із нього видалено ребро чи стягнуто ребро в точку. Для сфери S такими є K_5 та $K_{3,3}$.

Основний результат:

0. Для графа ζ (отриманого як φ -образ $G' + St_n(g)$ при ототожненні n вершин зірки $St_n(g)$ із вершинами множини X , що має число досяжності $t_G(X)$ та характеристики $(\theta_G(X), \delta\theta_G(X))$ має місце нерівність: $\gamma(\zeta) \leq \gamma(G) - t_G(X) - \theta_G(X) - \delta\theta_G(X) + 1$

Введена характеристика $\delta\theta_G(x)$ яка є мірою циклічної зв'язності 2-клітин $S_G(X)$ на відміну від $\theta_G(X)$, що характеризує циклічність множини $S_G(X)$.

2. Описано алгоритм побудови 3-мінімальних графів.

Вони можуть застосовуватися при системному аналізі граф-моделей електричних схем чи комп'ютерних мереж розташованих на торі.

З метою дослідження поведінки математичної моделі складної системи розміщеної на орієнтовній поверхні S розглянуто її граф-модель G без кратних ребер та петель. Тоді

можливо використати метод φ -перетворень створений для графів стосовно розв'язання задач моделювання шляхом розбиття на "простіші" підмоделі із подальшим ототожненням елементів, виконаним із наперед заданими властивостями. Так розростання моделі G може визначитися наступним γ -перетворенням: φ

$(G + St_n(g), \sum g_i + a_i) = (\zeta, \{a_i^*\}_1^n)$, де $X = \{a_i^*\}_1^n$ - множина точок графа G із числом досяжності $t_G(x)$, яка є однією множиною для ототожнення, а другою є $\{g_i\}_1^n$ - множина кінцевих вершин зірки $St_n(g)$ із центром g . Основний результат:

1. Узагальнення характеристики $\theta_G(X)$, яка стосується циклічної структури множини X точок графа G вкладеного в поверхню S .
2. Введення нової характеристики $\delta\theta_G(X)$, що вимірює ланцюгову структуру множини X точок графа G на S .

Цей результат прислужиться при системному аналізі як граф-моделей, так і їхнього топологічного аспекту. який полягатиме у наявності спільної властивості у ребер та вершин графа-моделі.

Розв'язок нашої задачі побудовано на методі φ -перетворень графів[1,2], засновником якого є М.П. Хоменко, та введених ним поняттях. Для повноти викладення наведемо найсуттєвіші з них.

Визначення 1.1.

φ -перетворенням простору X на X зветься відносний гомеоморфізм

$\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$, який є сумою $\varphi_0 + \sum_{j=1}^q \varphi_j$ $q+1$ гомеоморфізмів;

1) $\varphi_0 = \varphi|_{X-A} : X \setminus A \cong X \setminus A$, φ_0 - гомеоморфізм.

2) $\varphi_j : A_j \rightarrow A_j$;

3) $\sum_{j=1}^q \varphi_j = \varphi|_A$; $\sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j + \sum_{j=k+1}^q \varphi_j \neq \varphi|_A$; $\forall k_i = 1(1)q$

4) $\varphi_j = \sum_{i=1}^{d_j} \varphi_{ji}$, $\varphi_{ji} = \varphi|_{A_{ji}} : A_{ji} \cong A_j$, $\bigcup_{i=1}^{d_j} A_{ji} = A_j$ причому $d_j \geq 2$, $j = 1(1)q$;

5) $-1 \leq \dim(A_{ji} \cap A_{j'i'}) \leq \dim A_{ji}$, $i \neq i'$; $i, i' = 1(1)d_j$, $j = 1(1)q$

6) $A_{ji} \neq A_{j'i'}$ при $j \neq j'$, $i, i' = 1(1)q$.

Важливий клас φ -перетворень складають φ -перетворення що задовольняють умові:

$A_{ji} \cap A_{j'i'} = \emptyset$ при $(i \neq i') \cup (j \neq j')$. Тоді підпростір A розкладається в суму q систем підпростору A_{ji} , гомеоморфних один одному всередині кожної системи. Тим самим на

підпросторі A задано відношення R -еквівалентності, т.т. $R = \sum_{j=1}^q R_j$ причому

$$R_j[A_{ji}] = \sum_{i=1}^{d_j} A_{ji}.$$

Графи φ -перетворення та їх властивості.

Нехай $X = \sum_{r=1}^m X_r$, $X = \sum_{l=1}^{m_0} X_l$, $p_0(X_r) = p_0(X_l) = 1$ для $l=1(1)m_0$, $r=1(1)m$.

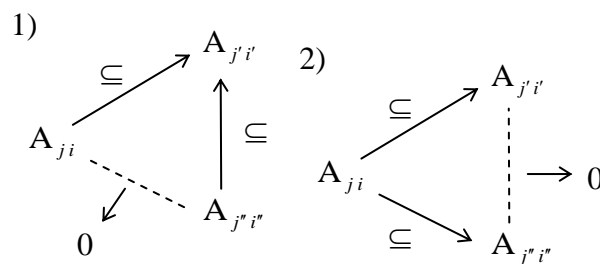
Задамо φ -перетворення $\varphi: (X, A) \rightarrow (X, A)$ у відповідності із визначенням 1.1

Введемо наступні характеристики φ -перетворення:

$$k_r^{j j'} = \left\{ A_{ji} \mid A_{ji} \subseteq A_{j'i'} \subseteq X_r, i=1(1)d_j, i'=1(1)d_{j'} \right\} \quad k_{rj} = \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq j}}^q k_r^{j j'} \quad k^{j j'} = \sum_{r=1}^m k_r^{j j'}$$

$$A(\varphi_j) = \left\{ k^{j j'} / (k^{j j'} \neq 0) \wedge (\forall j'', j'' \in \{1, 2, \dots, q\}) [(j'' \neq j, j') \Rightarrow ((k^{j j''} = 0) \vee (k^{j'' j'} = 0))] \mid j \neq j', j' = 1(1)q \right\}$$

Можливі випадки:



Множина $A(\varphi_j)$ визначається однозначно. Позначимо через k_r^j число $k_r^{j j}$.

Визначення 2.1.

φ -базою $B_j = B(\varphi_j)$ відображення $\varphi_j: A_j \rightarrow A_j$ при заданому φ -перетворенні

$\varphi: (X, A) \rightarrow (X, A)$ зветься сума тих компонент підпростору X які перетинаються з

підпростором A_j , тобто. $B_j = \sum_{r \in J_j} X_r$, $J_j = \{r / k_r^j > 0\}$.

Визначення 2.2.

Комплексною φ -базою $B_l = B(X_l)$ над X_l зветься прообраз цієї компоненти при

заданому φ -перетворенні, тобто $B_l = \varphi^{-1}(X_l)$

Твердження 2.1.

Якщо задано φ -перетворення: $\varphi: (X, A) \rightarrow (X, A)$, $J_l = \{j / A_j \subseteq B_l\}$, $v_l = |J_l|$, $l=1(1)m$,

то 1) $B_l = \bigcup_{j \in J_l} B_j$, $l=1(1)m_0$

$$2) B_l \cap B_{l'} = 0, l \neq l', l, l' = 1(1)m_0$$

$$3) \sum_{l=1}^{m_0} v_l = q$$

Доведення цього твердження випливає із того факту, що B_l - множина компонентів просторів X «склеєних» в компоненту X_l по підсистемі A_j .

Визначення 2.3.

Графом комплексної φ -бази B_l φ -перетворення $\varphi: (X, A) \rightarrow (X, A)$ зветься граф Z_l ,

$Z_l = (Z_l^0, Z_l^1)$, де $Z_l^0 = \{x_r / X_r \subseteq B_l\}$ вершини з'єднані ребрами так, щоб на всіх вершинах x_r для яких $k_r^j \neq 0$ утворилося дерево з $k_r^j - 1$ -петлею в x_r для усіх $j, j = 1(1)q$.

Визначення 2.4.

Графом φ -баз φ -перетворення зветься граф $Z(X, X) = \sum_{l=1}^{m_0} Z_l$.

Твердження.

1) Граф $Z(X, X)$ визначенооднозначно $\Leftrightarrow p_0(B_j) \leq 2$ для $j = 1(1)q$ тобто. маємо не більше двох зв'язних компонент що перетинаються з системою A_j .

2) Якщо має місце умова: $(A_j = A_{j_1} \cup A_{j_2}) \quad d_j = 2$, для всіх $j = 1(1)q$, то граф $Z(X, X)$ задано однозначно.

Теорема 2.1.

Для кожного графа $Z(X, X) = Z$ φ -баз φ -перетворення $\varphi: (X, A) \rightarrow (X, A)$ маємо:

$$1) p_0(Z) = p_0(X)$$

$$2) p_1(Z) = \sum_{j=1}^q d_j + p_0(X) - p_0(X) - q$$

Для того, щоб упевнитися в справедливості цих властивостей достатньо обчислити

$$\alpha_1(Z(X, X)), \alpha_1(Z) = \sum_{j=1}^q (p_0(B_j) - 1) + \sum_{j=1}^q \sum_{r=1}^m (k_r^j - 1) + \sum_{j=1}^q \left\{ \left\{ k_r^j / k_r^j = 0 \right\} \right\},$$

де $m = p_0(X)$ та використати формулу $p_1(Z) = \alpha_1(Z) - \alpha_0(Z) + p_0(Z)$

Теорема 2.2.

Графи φ -баз $Z(X, X)$ прості (тобто. без кратних ребер та петель) $\Leftrightarrow k_r^j \leq 1$ і

$$\left\{ \left\{ \varphi_j / (k_r^j \neq 0) \wedge (k_{r'}^j \neq 0) \right\} \right\} \leq 1, \text{ де } r \neq r', r, r' = 1(1)m, j = 1(1)q$$

Іншими словами графи $\{Z\}$ прості $\Leftrightarrow 1)$ на кожній компоненті X_r маємо тільки один підпростір A_{j_i} . 2) на кожній парі таких компонент існує не більше однієї системи $\sum_{i=1}^{d_j} A_{j_i}$

Визначення 2.5.

Графом φ -перетворення $\varphi|_{B_l} : (B_l, B_l \cap A) \rightarrow (X_l, X_l \cap A)$ комплексної φ -базис B_l при заданому φ -перетворенні простору X зветься граф Λ_l , де

$$\Lambda_l^0 = \{x_r / X_r \subseteq B_l\} + \{y_j / A_j \subseteq B_l\}.$$

$$\Lambda_l^1 = \{(k_r^j - k_{r,j})(x_r, y_j) / (X_r \subseteq B_l) \wedge (A_j \subseteq B_l)\} + \{(y_j, y_{j'}) / (k^{j,j'} \in A(\varphi_j)) \wedge (A_j \subseteq B_l)\}.$$

Визначення 2.6.

Графом φ -перетворення простору X зветься граф: $\Lambda(X, X) = \sum_{l=1}^{m_0} \Lambda_l$

Твердження 2.3.

Граф $\Lambda(X, X)$ довільного φ -перетворення визначено однозначно і є простим \Leftrightarrow

$$k_r^j - k_{r,j} \leq 1 \quad j = 1(1)q, \quad r = 1(1)m.$$

Існує зв'язок між $p_1(Z)$ і $p_1(\Lambda)$.

Теорема 2.4.

Якщо для $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$, $d_j = 2$, $k^{j,j'} = 0$, при $j \neq j'$, $j, j' = 1(1)q$, то

$$Z(X, X) \cong \Lambda(X, X).$$

Справедливість теореми слідує із твердження 2.2. та визначення графів Z і Λ .

Визначення 2.7.

Відображення $\varphi_{j'}$, $\varphi_{j''}$, $j', j'' \in \{1, 2, \dots, q\}$ зветься суміжним, якщо в $\Lambda(X, X)$ існує ланцюг

$$\text{виду } y_{j'}(y_{j'}x_r)x_r(x_r y_{j''})y_{j''} \text{ або виду } y_{j'}\langle y_{j'}y_{j''} \rangle y_{j''}(y_{j''}x_r)x_r.$$

Говорять також, що $y_{j''}$, $y_{j'}$ суміжні на X_r .

Граф $\Phi(X, X)$ визначається наступним чином:

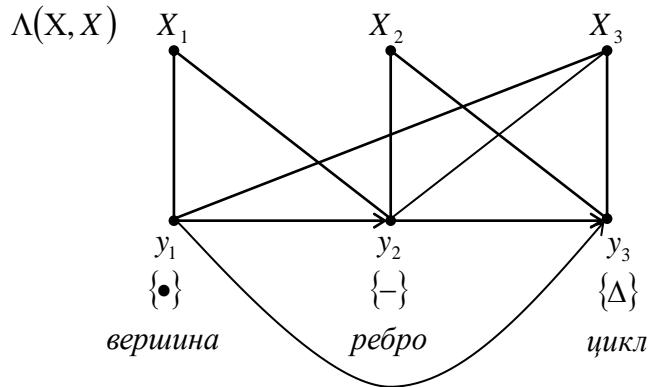
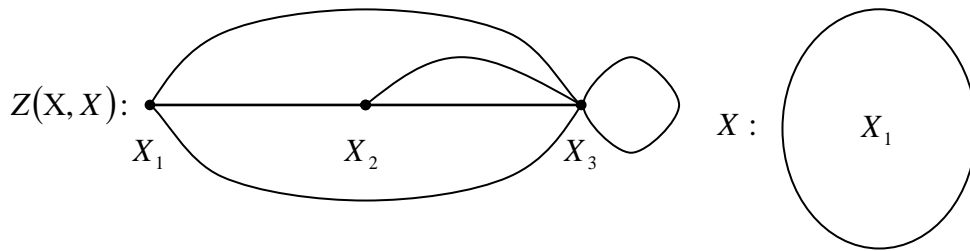
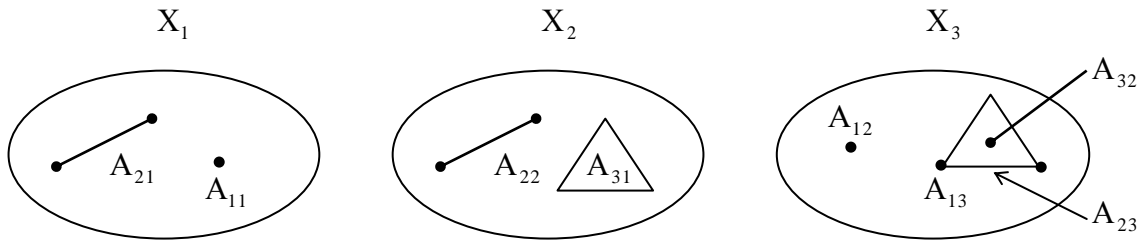
$$\Phi^0(X, X) = \{y_j\}_1^q$$

$$\Phi^1(X, X) = \{q_{j,j'}(y_j y_{j'}) / j \neq j', \quad j, j' = 1(1)q\}, \text{ де}$$

$$q_{j,j'} = [c_\Lambda(y_j y_{j'}) / c_\Lambda(y_j, y_{j'}) \subset \Lambda(X, X)] \wedge [c_\Lambda(y_j, y_{j'}) = y_j(y_j x_r)x_r(x_r y_{j'})y_{j'}] \vee [c_\Lambda(y_j, y_{j'}) = y_j\langle y_j y_{j'} \rangle y_{j'}]$$

тобто. $q_{j,j'}$ - число різних ланцюгів вказаного вище виду.

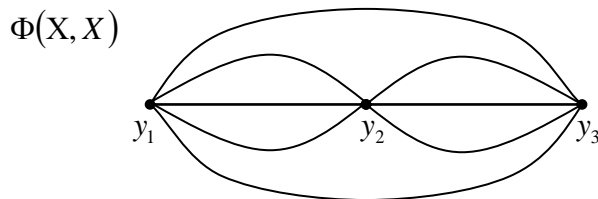
Розглянемо наступний приклад.



$$A_1 = \bigcup_{j=1}^4 A_{1j}$$

$$A_2 = \bigcup_{j=1}^3 A_{2j}$$

$$A_3 = \bigcup_{j=1}^2 A_{3j}$$



формулу $p_1(Z) = \alpha_1(Z) - \alpha_0(Z) + p_0(Z)$

Література

1. Хоменко М.П. Топологические аспекты теории графов, Київ 1971, АН УССР, институт математики.
2. Хоменко М.П. φ - перетворення графів, Київ 1973 институт математики АН УССР.
3. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование, Москва, Наука-Физматлит. 1997.

РОЗДІЛ 3. СТРУКТУРА ГРАФІВ НА ПРОЕКТИВНІЙ ПЛОЩИНІ ТА ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА

3.1. НОВА ВЕРХНЯ МЕЖА НЕОРІЄНТОВАНОГО РОДУ ПРОСТОГО ГРАФА.

Задача полягатиме в уточненні верхньої межі неорієнтованого роду простого графа G неорієнтованого роду $\gamma(G)$ як φ -образу двох не вироджених графів G_i неорієнтованого роду $\gamma(G_i)$ при ототождженні пар точок (x_{1j}, x_{2j}) із множин точок приєднання $X_i, j=1,2,\dots,|X_i|$, де під точкою розумітимемо, або вершину, або довільну точку ребра графа G .

Для множин точок приєднання X_i із заданим числом досяжності $t_i, t_i \geq 1$, яке дорівнює найменшій кількості кліток-граней на границях яких розміщуються всі точки множини X_i , та використовуються як відомі характеристики $\theta(X_i), \partial\theta(X_i)$, так і визначаються дві нові: 1) багатосторонність чи $st(X_{ij}, G_i)$ - доступ до точок з X_{ij} розташованих на границях кліток-граней неорієнтованої поверхні роду $\gamma(G_i)$; 2) $k4(X_{1j}, X_{2j})$ -кількість всіх різних частинних графів гомеоморфних K_4 чи $K_{2,3}$ породжених ототождженням пар точок (x_{1j}, x_{2j}) з множин точок $X_{ij}, j=1,2,\dots,|X_{ij}|$, $m = \sum_{j=1}^{t_i} |X_{ij}|, i=1,2$. Основний результат - теорема 1: Якщо задано φ -перетворення зв'язних графів G_1 та $St_m(G_2)$ неорієнтованого роду $\gamma(G_i)$ наступним чином:

$\varphi : (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ - квазізірка з центром G_2 та кількома ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини X_2, X_1 підмножина множини точок графа $G_i, X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, матиме число досяжності t_i та характеристики,

$\theta_i, \partial\theta_i, i=1,2$, то $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i) + k4 - st$, де $k4 \geq st \geq 0, st = \sum_{j=1}^{t_1} st(X_{1j}, G_1)$,

$k4 = \sum_{j=1}^{t_1} k4(X_{1j}, X_{2j}), k4 - st$ - число додаткових 2-ручок приклеєних до клітки s з множини

$\sigma_{r_1} \setminus f(G_1)$ при мінімальному вкладенні $f : G_1 \rightarrow S_{r_1}, r_1 = \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i)$, із st - стороннім доступом до тих точок приєднання на границі ∂s клітці s (до якої приклеєно r_2 штук 2-ручок і вкладено граф G_2), що при ототождженні пар точок приєднання (x_{1j}, x_{2j}) породжують $k4$ різних підграфів гомеоморфних K_4 , чи $K_{2,3}$.

Основні поняття та позначення узяті із [1]-[3], всі графи - неорієнтовані без кратних ребер-дуг та петель. В [4] отримано уточнену верхню межу орієнтованого роду склейки довільного неорієнтованого простого графа G_1 та квазізірки $St_m(G_2)$ з центром - графом G_2 без кратних ребер-дуг, що містять множину точок приєднання X із числом досяжності $t, t > 0$, та чотирьох наступних характеристик множини $X : \theta, \partial\theta, k4, st$, наведених нижче. Задача полягатиме в отриманні подібного результату для неорієнтованого роду склейки графа G та квазізірки з центром – графом G_2 (всі графи без кратних ребер-дуг та петель), що містять множину точок приєднання X із числом досяжності t та θ і $\partial\theta$ - характеристиками [7]. Ця задача подібна до задачі про верхню границі $\gamma(G)$ графа $G, G = G_1 \cup_k G_2, k > 0$, отриманого в результаті ототождження графів G_1, G_2 по $k, k > 0$, вершинам (k -amalgamation), через рід графів G_1, G_2 . В [5] є таке: 1)

$\gamma(G_1 \cup_k G_2) \leq \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + 2k - 2$ для орієнтованого роду, $2) |\bar{\gamma}(G_1 \cup_k G_2) - (\bar{\gamma}(G_1) + \bar{\gamma}(G_2))| \leq k^2 - 2$ для неорієнтованого роду $\bar{\gamma}(G)$ графа G , та відмічено, що перша нерівність отримана при допомозі стандартної операції приєднання 2-ручок до поверхні.

Нехай 2-многовид S без країв (дірок) неорієнтованого роду $\bar{\gamma}(S)$ подано як поверхню S' орієнтованого роду $\gamma(S')$, де $\gamma(S') \geq 0$, $\bar{\gamma}(S) = 2\gamma(S') + r$, до якої приклеєно r лент Мебіуса, $r > 0$; наприклад, поверхня S є пляшкою Клейна коли $\gamma(S') = 0$ і $r = 2$, чи поверхня S роду $\bar{\gamma}(S) = 3$ матиме S' - тор із однією приклеєною лентою Мебіуса. Для заданого вкладення f , $f: G \rightarrow S$, графа G в S та заданої множини точок X , $X \subset G^0 \cup G^1$ визначимо $t_G(X, S, f)$, $t = t_G(X, S, f)$, число досяжності множини X відносно S , якщо існує підмножина $S_G(X)$, $S_G(X) = S \setminus f(G)$, $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$, що задовольняє умові: $(f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^t \partial s_i \cap X) \wedge (f(X) \not\subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^t \partial s_i \cap X)$, $j = 1, 2, \dots, t$.

Будемо говорити, що множина X має число досяжності t , $t_G(X, S) = t$, відносно S , якщо серед всіх неізоморфних вкладень f , $f: G \rightarrow S$ число t є найменшим серед чисел $t_G(X, S, f)$. Вважатимемо надалі, що $\bar{\gamma}$ позначено через γ .

Визначення 1. Нехай задано вкладення f , $f: G \rightarrow S$, графа G в S , яке реалізує t , $t_G(X, S) = t$, де $S_G(X) = S \setminus f(G)$, $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$. Будемо говорити, що відносно заданої поверхні S множина X матиме характеристику $\theta_G(X, S, f)$, $\theta_G(X, S, f) = \theta$, $\theta \geq 1$, якщо існує θ трійок кліток $\{s_i\}_1^3$ з множини $S_G(X)$, на границях яких підмножини X_i , $X_i \subseteq X$, розміщуються довільним чином і задовольняють співвідношенню:

$G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \cong \{a_1\} \wedge G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \cong \{a_2\} \wedge G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \cong \{a_3\}$, та породжує найменший по включенню підграф G' графа G , (можливо вироджений в точку), який містить точки $\{a_i\}_1^3$ попарного перетину границь кліток $\{s_i\}_1^3$; Множина X матиме відносно S характеристику $\theta_G(X, S)$, якщо $\theta_G(X, S) = \max \theta_G(X, S, f)$, де максимум береться по всім неізоморфним вкладенням f , $f: G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X, S) = t$.

Визначення 2. Нехай задано вкладення f , $f: G \rightarrow S$, графа G в S , яке реалізує t , $t_G(X, S) = t$, де $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$, $S_G(X) = S \setminus f(G)$, та виконується рівність $\theta_G(X, S) = 0$. Будемо говорити, що відносно S множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta = \partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta \geq 1$, якщо існує підмножина $\{s_i, s_j, s_k\}$, множини $S_G(X)$, яка

задовольняє співвідношенням: $G^1 \cap \partial s_i \cap \partial s_j \supset \{(a_1, b_1)\}$ і $G^1 \cap \partial s_k \cap \partial s_j \supset \{(a_2, b_2)\}$, для всіх $i \neq j \neq k, i, j, k = 1, 2, 3$. На границях $\{\partial s_i, \partial s_j, \partial s_k\}$ множина X розміщується довільним чином, якщо не містить точок ребер $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ та особливим чином (без точок множини X на $\partial s_j \setminus L(a_1, a_2) \cup \{(a_2, a_{20}), (a_1, a_{10})\}$), якщо містить принаймні точку цих ребер. Також існують клітка s_0 та, можливо, клітка s_{00} . Клітка $s_0, s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$, границя якої містить простий ланцюг $L(a_1, a_2)$ ненульової довжини ни із кінцевими вершинами a_1, a_2 спільно із ∂s_j і два простих ланцюги, можливо вироджених в точку, $L_1(a_1, a_{12}), L_2(a_2, a_{22})$ спільними з ∂s_i та ∂s_k , відповідно, та ребро (a_{12}, a_{22}) . Клітка $s_{00}, s_{00} \in (S \setminus f(G)) \setminus (S_G(X) \cup \{s_0\})$, має границю яка містить простий ланцюг $L(a_{10}, a_{20})$ ненульової довжини із кінцевими вершинами a_{10}, a_{20} спільно із ∂s_j . Множина X матиме характеристику $\partial \theta_G(X, S)$, якщо $\partial \theta_G(X, S) = \max \partial \theta_G(X, S, f)$, де максимум по неізоморфним вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X, S) = t$ та $\theta_G(X, S)$.

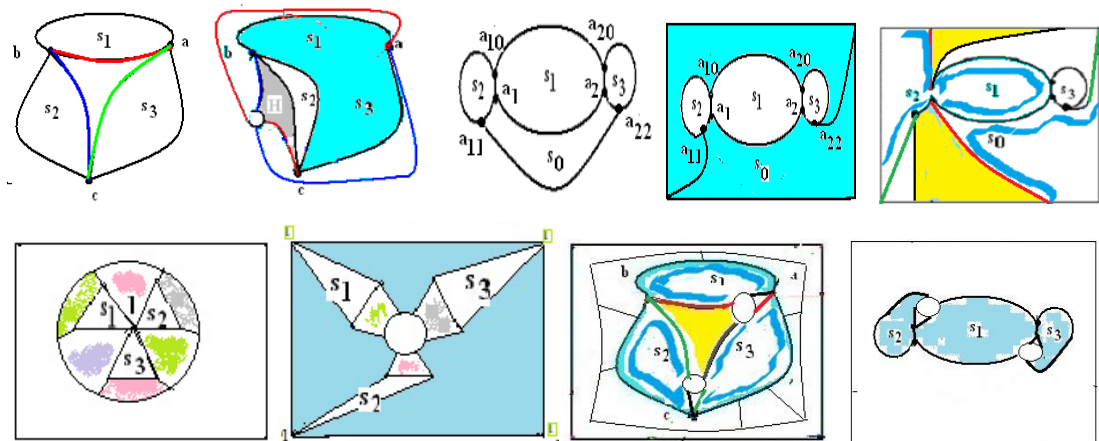


Рис. 1. На перших трьох картах другого ряду зіркова кліткова структура на проективній площині та плящі Клейна та ланцюжкова плящі Клейна

Твердження 1. Нехай для графа G , вкладеного в поверхню S - неорієнтованого роду, на множині $S_G(X)$ задано відношення інцидентності наявності, принаймні, однієї спільної точки на границях двох кліток. Мають місце наступні співвідношення:

1. а). Якщо S - проективна площина, то визначення 1 та 2 не виконуються в загальному випадку, лише визначення 2 задовольняється тоді, коли клітка s_0 має на ∂s_0 тільки одне ребро графа G , що не належить до $\partial s_i \cap G^1, i = 1, 2, 3$;

1. б). Якщо S - пляшка Клейна, то визначення 1 та визначення 2 виконуються в загальному випадку;

2. Якщо S - неорієнтованого роду $\gamma(S)$, $\gamma(S) > 2$, то визначення 1 та 2 виконуються в загальному випадку;

$$3. \theta_G(X, S) + \partial\theta_G(X, S) \leq \lceil t_G(X, S) - 2 \rceil.$$

Доведення. 2-многовид S - неорієнтованого роду $\gamma(S)$, $\gamma(S) > 0$, являтиме собою проєктивну площину P із $\gamma(S) - 1$ приклеєними лентами Мебіуса. Якщо $S = P$, то співвідношення 1 впливає з наступного. Припустимо, що $\theta(X, S) = 1$, т. то на проєктивній площині P є зіркова структура. У виродженому виді зіркову структуру описуватиме перша карта на рис. 1 тільки за умови, що навколо кліток s_1, s_3 немає інших кліток, які б мали спільні ребра із s_1, s_3 . Це суперечитиме умові, що $t_G(\bigcup_{i=1}^3 \partial s_i \cap X) = 3$.

Припущення невірне для виродженої зіркової структури. На проєктивній площині невироджену зіркову структуру описуватиме друга та третя карти на рис. 1 за умови, що три ребра трикутника (a, b, c) не входять до $L = \bigcup_{i=1}^3 \partial s_i \cap X$. Це суперечитиме умові, що $t_G(\bigcup_{i=1,3} \partial s_i \cap X) = 2$. Припущення невірне для не виродженої зіркової структури. Для проєктивної площини співвідношення 1.а) доведено.

Доведення співвідношення 1.а) стосовно визначення 2 впливає з того, що на проєктивній площині ланцюгова кліткова структура, (зображена на 4,5,6 картах рис.1) задовольняє визначенню 2 тільки тоді, коли інших внутрішніх граней графа G окрім кліток з множини $\{\partial s_i\}_{i=0}^3$ не буде, а на ∂s_0 є ребро графа G , можливо 1-підрозділене, яке не належить до $\bigcup_{i=1}^3 \partial s_i$, а на ∂s_i є тільки одне ребро графа G , яке не належить до $\bigcup_{i=1}^3 \partial s_i$, та на спільних ребрах немає точок множини X . Доведення співвідношення 1.а) закінчено.

Доведемо співвідношення 1.б). Якщо S - пляшка Клейна, то визначення 1 та 2 виконуються, як це показано та перших трьох для зіркової кліткової структури та четвертій картах для ланцюгової кліткової структури в другому ряду рис.1.

Доведемо співвідношення 2. Оскільки 2-многовид S - неорієнтованого роду $\gamma(S)$,

$\gamma(S) > 2$, то S являтиме собою тор із приклеєними, щонайбільше, $\left\lfloor \frac{\gamma(S) - 1}{2} \right\rfloor$ 2-ручками

та, принаймні, однією лентою Мебіуса. Тому на множини кліток $S_G(X, S)$ можливе виконання тих перетворень зіркової кліткової структури (за визначенням 1), що вписані в алгоритмі_О [8] для орієнтованого 2-многовида та наведені для повноти нижче в алгоритмі_НО, т. то матимемо нерівність $\theta_G(X, S) \geq 0$. Якщо $\theta_G(X, S) = 0$, то на множини

кліток $S_G(X, S)$ можливе виконання перетворень за визначенням 2, що виписані в алгоритмі_О [8] для орієнтованого 2-многовида та для повноти наведені нижче в алгоритмі_НО, т. то матимемо нерівність $\partial\theta_G(X, S) \geq 0$. Доведення співвідношення 3, т. то обчислення формальної суми, впливає із співвідношень 1,2.

Наслідок 1. Перетворення множини кліток-граней графа G , вкладеного до 2-многовида S , виконані за визначеннями 1 та 2, трансформують елементи з $S_G(X)$ за алгоритмом_НО, не змінюючи сусідні з ними клітки.

Алгоритм_НО.

Вхід. До 2-многовида S неорієнтованого роду вкладено граф G вкладенням f , $f: G \rightarrow S$, що реалізує $t_G(X, S) = t$ та $\theta_G(X, S) = \theta$. Занумеруємо перші три клітки з $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 1, як підмножину $\{s_i\}_1^3$, Вважатимемо заданими функції функція_ $\theta(M)$ та функція_ $\partial\theta(M)$, які визначають характеристики $\theta, \partial\theta$, відповідно, для M -множини кліток, впорядкованої відношенням суміжності на множині границь кліток з M .

Крок 0. Якщо $\theta = 0$, то переходимо до кроку 3,

інакше, доки $\theta > 0$ виконувати циклічно наступні дії:

початок циклу 1;

Крок 1. Для $S_G(X)$ використання характеристики θ для неорієнтованого роду означає приклеювання нової 2-ручки h на заміну трьох кліток-граней $\{s_i\}_1^3$ із границями, що мають, принаймні, одну спільну вершину чи вони попарно мають спільні вершини, на нову клітку-грань s поверхні на 1 більшого роду, що має границею $\partial s = \bigcup_1^3 \partial s_i$, $S := S + h$;

Крок 2. $S_G(X) := (S_G(X) \setminus \{s_i\}_1^3) \cup \{s\}$; $\theta =$ функція_ $\theta(S_G(X))$, $\theta := \theta - 1$;

перенумеруємо всі елементи нової множини $S_G(X)$ так, щоб перші три клітки з $S_G(X)$, для яких має місце визначення 1, мали номери 1,2,3;

кінець циклу 1;

Крок 3. $\partial\theta :=$ функція_ $\partial\theta(S_G(X))$, де $S_G(X)$ побудована циклом 1 множини кліток. Якщо $\partial\theta > 0$, то перенумеруємо клітки з побудованої вищенаведеним циклом множини кліток $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 2, як $\{s_i\}_1^3$ та s_0 ;

Якщо $\partial\theta = 0$, то переходимо до кроку 6,

інакше, доки $\partial\theta > 0$ виконувати наступні дії:

початок циклу 2;

Крок 4. Для $S_G(X)$ використання характеристики $\partial\theta$ для неорієнтованого роду означає

приклеювання нової 2-ручки h на заміну трьох клітин-граней $\{s_i\}_1^3$ із границями, де s_2 одна з трьох має два спільні ребра з двома іншими, та четвертої клітки s_0 ,

$s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$ на нову клітку-грань s поверхні на 1 більшого роду, що має

границею $\partial s = \bigcup_1^3 \partial s_i \setminus R$, де множина R складена, або з двох попарно спільних ребер без

точок з множини X , або з тієї частини границі ∂s_2 , що не належить до границь

$\partial s_1 \cup \partial s_2 \cup \partial s_0$ та без точок з множини X ; $\gamma(S) := \gamma(S) + 1$.

Крок 5. $S_G(X) := (S_G(X) \setminus \{s_i\}_1^3) \cup \{s\}$; $\partial\theta =$ функція $\partial\theta(S_G(X))$ $\partial\theta := \partial\theta - 1$; Якщо $\partial\theta > 0$,

то перенумеруємо всі елементи нової множини $S_G(X)$ так, щоб три клітки $\{s_i\}_1^3$ та четверта s_0 , для яких має місце визначення 2, мали номери 1,2,3.

кінець циклу 2;

Крок 6. Виводимо $S_G(X)$ та "Множина X розташована на границях кліток-граней з

множини" $S_G(X)$, "перетвореної до нульових характеристик $\theta, \partial\theta$, 2-многовида неорієнтованого роду $\gamma(S)$ ", кінець алгоритму

Твердження 2. Алгоритм_НО коректно перетворює 2-многовид S та вкладення $f: G \rightarrow S$ графа G в S , де $\gamma(G) \leq \gamma(S)$, в 2-многовид S' та вкладення $f': G \rightarrow S'$ графа G в S' , де $\gamma(S') > \gamma(S)$, шляхом використання характеристик $\theta, \partial\theta$, одна з яких має бути нульовою, множини точок X графа G та має поліноміальну часову складність.

Доведення. Згідно твердження 1 неорієнтований 2-многовид S може бути або проєктивною площиною, або тором чи орієнтовним 2-многовидом із приклеєною, принаймні, однією лентою Мебіуса. Алгоритм перетворення неорієнтованого 2-многовида S із вкладеним графом G в неорієнтований 2-многовид S' , де $\gamma(S') > \gamma(S)$, шляхом приклеювання до S нових 2-ручок спирається на використання характеристики θ множини точок X графа G . Вважатимемо, що ручка h приклеєна до кліток $s', s'' \in S(G, f)$ і позначати її через $h(s', s'')$, якщо задано φ -перетворення φ' в такий спосіб:

$\varphi'((s' \cup s'') \setminus (\tau' + \tau''), \partial\tau' + \partial\tau'') = (h, \tau^*)$, де τ', τ'' - такі регулярні двоклітки, що задовольняють $\tau' \subset s', \tau'' \subset s'', \partial\tau' \cap \partial\Delta s' = \partial\tau'' \cap s'' = \emptyset$. Вважатимемо заданими функцію $\theta(M)$ та функцію ∂

$\theta(M)$, які визначають характеристики $\theta, \partial\theta$, відповідно, на множини кліток M , що

впорядкована відношенням суміжності заданим на множині границь кліток з M , т. то якщо границі двох кліток мають принаймні спільну точку, то ці клітки суміжні.

Нехай до 2-многовиду S неорієнтованого роду $\gamma(S)$ вкладено граф G вкладенням f , $f: G \rightarrow S$, що реалізує $t_G(X, S) = t$ та $\theta_G(X, S) = \theta$. Занумеруємо перші три клітки з

$S_G(X)$, що задовольняють визначенню 1, як підмножину $\{s_i\}_1^3$ та позначимо через G' найменший по включенню підграф графа G , можливо вироджений в точку, який містить точки $\{a_i\}_1^3$ попарного перетину границь кліток $\{s_i\}_1^3$, причому $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\}$, і $G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\}$, $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$. Розглянемо плаский диск d з центром в a_1 та нескінченно малим радіусом ε , який своєю границею перетинатиме ребра підграфа G' , що інцидентні вершині a_1 , у внутрішніх точках a_{1j} , де $j = 1, 2, \dots, k$. Розщепимо кожну вершину a_{1j} на a'_{1j}, a'_{2j} , де $j = 1, 2, \dots, k$ степеня 2. Цим розіб'ємо підграф G' на частинні - підграфи G'_i , $i = 1, 2$, де G'_1 містить a'_{1j} та всі ребра (a_1, a'_{1j}) , G'_2 містить a'_{2j} .

Відображенням ϕ перевернемо на 180° підграф $f(G'_1)$ як множину образів ребер на поверхні, симетрично навколо вісі симетрії, яка є простим ланцюгом $L(a_2, a_3)$, що проходить через точки a_2, a_3 та задовольняє умові: $f(G'_2) \cap \partial s_3 = f(G') \cap \partial s_3 = L(a_2, a_3)$. В результаті отримаємо підграф $\phi f(G'_1)$ вкладений до $\overline{s_3}$, де $\overline{s_3} = s_3 \cup \partial s_3$. Відображенням ϕ' вигнемо за часовою стрілкою на 180° всі висячі ребра інцидентні a'_{2j} , де $j = 1, 2, \dots, k$, не змінюючи порядок слідування, і розмістимо їхні висячі вершини на лівій частині границі регулярної підклітки τ' , де $\tau' \subset \overline{s_3} \setminus \phi f(G'_1)$. В підграфі $f(G'_2)$ вкладеному до $\overline{s_1} \cup \overline{s_2}$, де $\overline{s_3} = s_3 \cup \partial s_3$, відображенням ϕ'' поміняємо місцями ребра в парах виду (a'_{1j}, a_1) , $(a'_{1(k-j+1)}, a_1)$ для всіх j , $j = 1, 2, \dots, k$, та за часовою стрілкою розмістимо на правій частині границі регулярної підклітки τ' , де $\tau' \subset (\overline{s_1} \cup \overline{s_2}) \setminus f(G'_1)$. Ототожнимо, за часовою стрілкою, пари вершин (a'_{1j}, a'_{2j}) у внутрішню точку a'_j деякого j -го ребра (a'_{1j}, a'_j, a'_{2j}) , для всіх j , $j = 1, 2, \dots, k$. Приклеєна ручка h до кліток $s' = \overline{s_3}$, $s'' = \overline{s_1} \cup \overline{s_2}$, $s', s'' \in S(G, f')$, позначена через $h(s', s'')$, матиме вкладені відображенням ϕ''' склеєні половинки ребра $\phi'' \phi' \phi f((a'_{1j}, a'_j, a'_{2j}))$, які розрізають її на клітки, де $j = 1, 2, \dots, k$. В результаті суперпозиції $\phi''' \phi'' \phi' \phi f$ наведених вище відображень отримаємо вкладення $f', f': G \rightarrow S'$,

$f' = \phi''' \phi'' \phi' \phi f$, графа G до 2-многовиду S' орієнтованого роду $\gamma(G) + 1$, причому

$$S'(G, f') = (S(G, f) \setminus \{s_1, s_2, s_3\}) \cup h(s', s'') \setminus \sum_{j=1}^k f'(a'_{1j}, a'_{2j}, a'_{3j}), \text{ т.то тіж самі клітки, тільки замість}$$

$$s_1, s_2, s_3 \text{ буде клітка } s, s \in h(s', s'') \setminus \sum_{j=1}^k f'(a'_{1j}, a'_{2j}, a'_{3j}), \text{ така, що } \partial s = \bigcup_{i=1}^3 \partial s_i. \text{ Крім цього}$$

множина $f'(X)$ на S' буде розміщуватися на границях $t_G(X, S) - 2$ та матиме характеристику $\theta_G(X, S) - 1$. Цим виконані всі дії ітерації циклу 1 алгоритма_НО.

Нехай до 2-многовиду S неорієнтованого роду $\gamma(S)$ вкладено граф G вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, що реалізує $t_G(X, S) = t, \theta_G(X, S) = 0$ та $\partial \theta_G(X, S) = \partial \theta, \partial \theta > 0$. Перші три з чотирьох кліток з множини $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 2, утворюють

підмножину $\{s_i\}_1^3$, а четверта s_0 . Для $S_G(X)$ використання характеристики $\partial \theta$ для

орієнтованого роду означає приклеювання нової 2-ручки $h, h = h(s_1, s_0)$ чи $h = h(s_1, s_{00})$, на

заміну чотирьох кліток-граней $\{s_i\}_1^3, s_0$, де s_1 одна з трьох має два спільні ребра e_i з

$$s_3, s_2 \text{ та клітки } s_0, s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X), \text{ на нову клітку-грань } s \text{ з границею } \partial s = \bigcup_{i=1}^3 \partial s_i \setminus R,$$

де множина R матиме два наступні варіанти складання: 1) якщо $h = h(s_1, s_0)$, то R є тією частиною границі ∂s_1 , що не належить до границь ∂s_0 та без точок з множини

$X \setminus \{\partial e_1 \cup \partial e_2\}$; 2) якщо $h = h(s_{00}, s_0)$ (за умови існування такої клітки s_{00} , що множина

точок $(\partial s_{00} \cap \partial s_1) \cup (\partial s_0 \cap \partial s_1)$ містить кінцеві вершини обох ребер e_i), то $R = e_1 \cup e_2$ і ребра

e_i не містять точок з множини $X \setminus \{\partial e_1 \cup \partial e_2\}$, де $e_1 \in \partial s_2 \cap \partial s_1, e_2 \in \partial s_1 \cap \partial s_3$. В кожному з цих

випадків на приклеєній 2-ручці розміщуються ребра e_i за допомогою вкладення f' ,

$f': G \rightarrow S', f'|G \setminus \{e_2, e_2\} = f|G \setminus \{e_2, e_2\}$, графа G до 2-многовиду S' орієнтованого роду

$\gamma(G) + 1$, причому множина $S'(G, f')$ для варіанту 2) матиме вид

$$(S(G, f) \setminus \{\bigcup_{i=0}^3 s_i \cup s_{00}\}) \cup (h(s_{00}, s_0) \setminus \sum_{j=1}^k f'(e_1, e_2)), \text{ для варіанту 1) є}$$

$$(S(G, f) \setminus \{\bigcup_{i=0}^3 s_i\}) \cup (h(s_1, s_0) \setminus \sum_{j=1}^k f'(e_1, e_2)). \text{ Тим самим всі дії однієї ітерації циклу 2}$$

алгоритму_0 виконані. Кількість ітерацій в обох циклах дорівнюватиме

$\theta_G(X, S) + \partial \theta_G(X, S)$. Оскільки $t_G(X, S)$ не перевищує числа кліток – граней графа G

неорієнтованого роду, вкладеного до 2-многовиду S роду $\gamma(G)$ і

$\theta_G(X, S) + \partial \theta_G(X, S) < t_G(X, S) - 2$, то алгоритм рекурсивно перетворюватиме множину

кліток допоки не отримаємо перетворену множину кліток-граней із нульовими характеристиками $\theta, \partial\theta$. Число ітерацій обох циклів не перевищуватиме

$2(2 - 2\gamma(G) - |G^0| + |G^1|)$, тобто матиме поліноміальну часову складність. Твердження 2 доведено. Зауважимо, що використання $\partial\theta$ можливе тільки після використання характеристики θ для орієнтованого роду і є перетворенням трьох клітин-граней, дві пари з яких мають два спільні ребра, шляхом приклеювання до них нової 2-ручки, на нову клітку-грань поверхні більшого роду, що має границею об'єднання границь цих трьох кліток без двох спільних ребер. Доведення закінчене.

Визначення 3. Позначимо через $krt_G(M)$, $kr = krt_G(M)$, kr - кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G , як найбільшу кількість варіантів вибору різних підмножини $S_G(M, S_\gamma)$ множини клітин $S_\gamma \setminus f(G)$ на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M , узята по всіх мінімальних вкладеннях f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ . Іншими словами, це найбільша кількість зірок які приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr 2-кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Визначення 4. Позначимо через $ms_G(M, s, f)$, $k = ms_G(M, s, f)$, k - сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітки s , $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f - задане мінімальне вкладення $f: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M . Найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх клітин s заданого мінімального вкладення f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $ms_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G які приєднані кінцевими вершинами до кожного із принаймні трьох елементів множини M та вкладені до однієї клітки із множини $S_\gamma \setminus f(G)$ заданого мінімального вкладення f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ .

Визначення 5. Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), \dots, ms_G(M, f_N))$ вектором l - стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, $l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0$, $|M| > 2$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ -множина всіх неізоморфних мінімальних вкладень f_k , $f_k: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел $ms_G(M, f_k)$ узяті по всім s та всім f_k ,

$s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, називатимемо характеристикою l -стороннього доступу до множини M точок графа G .

Теорема 1. Якщо задано наступне ϕ -перетворення графів G_i та $St_m(G_2)$ неорієнтованого роду $\gamma(G_i)$: $\phi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ -квазізірка з

центром G_2 та кількома ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини X_2, X_i множини точок графа G_i , $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, матиме число досяжності та характеристики t_i .

$\theta_i, \partial\theta_i$, то $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i) + k4 - st$, де $st = \sum_{j=1}^{t_1} st(X_{1j}, G_1)$, $k4 = \sum_{j=1}^{t_1} k4(X_{1j}, X_{2j})$,

$k4 - st$ - число 2-ручок приклеєних до клітки s з множини $\sigma_{r_1} \setminus f(G_1)$, $k4 - st \geq 0$, f - мініма

льне вкладення $f: G_1 \rightarrow \sigma_{r_1}$, $r_i = \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i)$, із st -стороннім доступом до тих точок

приєднання на границі ∂s клітці s (до якої приклеєно r_2 штуки 2-ручок і вкладено граф

G_2), що при ототоженні всіх пар точок приєднання типу (x_{1j}, x_{2j}) породжують $k4$ різних

підграфів чи частин графа G гомеоморфних K_4 , чи $K_{2,3}$.

Доведення. Нехай граф G розбито на дві частини G_1 та $St_m(G_2)$ із m спільними вершинами x_j , кожна з яких розщеплюється на вершини x_{1j}, x_{2j} , де $j = 1, 2, \dots, m$.

Ототоження цих пар задаватиме наступне ϕ -перетворення зв'язних графів G_1 та $St_m(G_2)$

роду $\gamma(G_i)$: $\phi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ -квазізірка з центром

G_2 та кількома ребрами-променями із кінцевими вершинами з множини X_2 , де X_i

множина точок графа G_i , $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, має число досяжності t_i та характеристики $\theta_i, \partial\theta_i$,

$i = 1, 2$. Нехай до 2-многовиду S_i неорієнтованого роду $\gamma(G_i)$ вкладено граф G_i

мінімальним вкладенням f_i , $f_i: G_i \rightarrow S_i$, що реалізує $t_{G_i}(X_i) = t_i$ та $\theta_{G_i}(X_i) = \theta_i$, де

$i = 1, 2$. Для графа G_i виконаємо перетворення за алгоритмом_НО та отримаємо

перетворену множину кліток-граней із нульовими характеристиками $\theta_i, \partial\theta_i$, із точною

кількістю, не більше ніж $t_i - (\theta_i + \partial\theta_i)$, кліток s_{ij} на границях яких розміщуються точки

приєднання із множини $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, де $i = 1, 2$.

Стандартним способом приклеїмо до 2-многовиду S_i p 2-ручок $h_{ij} = h(s_{i1}, s_{ij})$, де $p = t_i - (\theta_i + \partial\theta_i) - 1$, одним кінцем до клітки s_{i1} , а іншим до кожної клітки s_{ij} , $j = 2, \dots, m$, тим самим отримаємо клітку s_i^* на границі якої знаходяться всі точки з X_i , де $i = 1, 2$.

Відмітимо, що клітка s_i^* матиме st_i - багатосторонній доступ до вершин приєднання із множини X_i , де $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, як суму багатостороннього доступу $st_i = \sum_{j=1}^{t_i} st(X_{ij}, G_1)$ по всіх

тих кліток з яких утворилася клітка s_i^* , де $i = 1, 2$. Приклеїмо стандартним способом

циліндр C до кліток s_1^*, s_2^* та отримаємо вкладення $f, f = f_1 + f_2$, графа $G_1 + G_2$ до 2-

многовиду S^* орієнтованого роду $\gamma(G_1) + \gamma(G_2) + p$. Продовження f_2^* вкладення f_2 на

множину всіх висячих ребер квазізірки $St_m(G_2)$ із кінцевими вершинами x_{2j} які

ототожнюються з x_{1j} , $j = 1, 2, \dots, m$ можливо побудувати за умови розміщення на

додаткових $k_4 - st_1$ 2-ручках приклеєних до циліндру C по одному із перехрещених на C

ребер підграфів K_4 чи $K_{2,3}$, що породжені висячими ребрами квазізірки, т.то розведення

перехрещених ребер у кількості $k_4 - st_1$ штук, де st_1 - багатосторонній доступ матиме

клітка s_1^* до точок із X_1 , $X_1 = \{x_{1j}\}_1^m$. В результаті отримаємо вкладення $f', f' = f_1 + f_2^*$

графу G в 2-многовид S^{**} неорієнтованого роду $\gamma(G_1) + \gamma(G_2) + p + k_4 - st_1$, т. то

$$\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i) + k_4 - st_i.$$

Доведення теореми 1 закінчено.

Наслідок 1. Нехай $\varphi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$ та виконується умова

теореми 1 і рівності: $\theta_i = 0, \partial\theta_i = 0, s = 0, t_1 = t_2 = m$. Тоді $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + m^2 + m - 2$.

Доведення впливатиме із наведеної в теоремі 1 нерівності та умови $t_i = m$ за якою всі

$\theta_i = 0, \partial\theta_i = 0, s = 0$, а число k_4 є числом всіх різних пар перехрещених ребер на множині

всіх висячих ребер квазізірки $St_m(G_2)$, т. то $\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + 2m - 2 + m(m - 1)$.

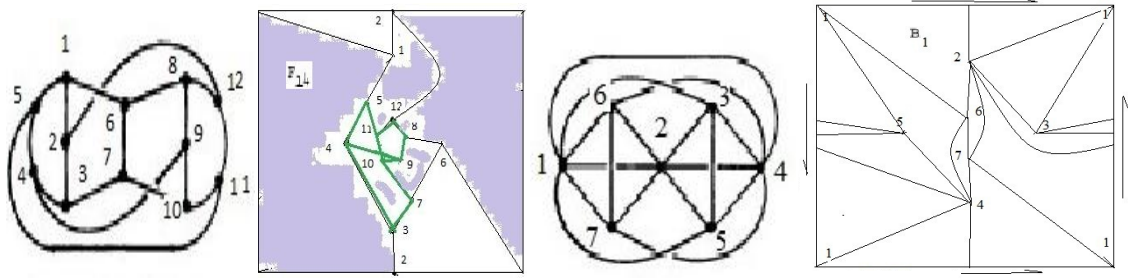


Рис.2. На першій карті непроективний граф F_{14} розміщено з перетином ребер на площині, на 2-й карті F_{14} розміщено на проєктивній площині P , де $G_1 = K_{2,3}$, $st_{G_1}(G_1^0, \sigma_1) = 2$, $G_2 = C_5$, $k_4 = 1$, на 4-й карті B_1 розміщено на поверхні Клейна, де $G_1 = K_4$, $st_{G_1}(G_1^0, P) = 2$, $G_2 = K_3$, $k_4 = 1$.

Наслідок 2. Нехай $\varphi : (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$ та виконується умова теореми 1, окрім умови мінімальності вкладення графа G_1 до неорієнтованої поверхні S . Якщо $\max st_{G_1}(G_1^0, S) - k_4(G_2, S)$ досягнуто на S , то верхня оцінка роду $\gamma(G)$ матиме мінімальне значення.

Доведення. Якщо граф G_1 вкладено до неорієнтованої поверхні не мінімального роду, принаймні $\gamma(G_1) + 1$, то можливе збільшення числа st та зменшення характеристики досяжності множини точок приєднання. (див. рис 3), що призводить до зменшення оцінки роду $\gamma(G)$ порівняно із мінімальним вкладенням G_1 до евклідової площини.

Приклад. На рис. 2 наведено залежність між характеристиками k_4 та st для графа F_{14} неорієнтованого роду 2.

Наслідок 3. Нехай задане перетворення $\varphi : (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$ та виконується умова теореми 1. Якщо кожне ребро є суттєвим відносно верхньої границі роду $\gamma(G)$ при його видаленні, то G є граф-обструкцією для неорієнтованої поверхні S . *Доведення.* Нехай виконана умова теореми 1. Якщо кожне ребро u є суттєвим відносно верхньої границі роду $\gamma(G)$ при його видаленні, тобто зменшить на 1 верхню оцінку неорієнтованого роду $\gamma(G)$, то матимемо нерівність $\gamma(G) - \gamma(G \setminus u) \leq 1$. Оскільки видалене ребро зменшує рід щонайбільше на 1, то матимемо рівність $\gamma(G) - \gamma(G \setminus u) = 1$.

Література

2. Хоменко М. П. φ -перетворення графів. препринт ИМ АНУ, Киев, 1973, 383 с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. препринт ИМ АНУ, Киев, 1970.
3. Хоменко Н. П. Островерхий Е. Б. Существенные элементы и род графа. препринт "Минимальные вложения графов" ИМ АНУ Киев 1972.
4. Петренюк В.І. Петренюк Д.А. Нова верхня оцінка орієнтованого роду./Теорія оптимальних рішень,2018.
5. Archdeacon D. The orientable genus is nonadditive. J. Graph theory, 11,1986, 385-401.
6. Bodendiek R., Wagner K. A characterization of the minimalbasis of the torus. Combinatorica 6,3,1986245-260.
7. Петренюк В. І. О структуре плоских графов с заданным числом достижимости некоторого множества точек. деп. рукопис в УкрНИИТИ N 2245-Ук86 22.09.1986.

3.2. ПРО СТРУКТУРУ 7-МИ ТА 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ПОВЕРХНІ НЕОРІЄНТОВАНОГО РОДУ 2.

Встановлені методом φ -перетворення графів структурні властивості 7-ми та 8-ми вершинних графів-обструкцій для поверхні неорієнтованого роду 2.

Розглянемо *задачу* вивчення методом φ -перетворення графів структурних властивостей 7-ми та 8-ми вершинних графів-обструкцій для неорієнтованої поверхні N_k роду k , $k=2$. Основні поняття та позначення узяті із [1]-[3], всі графи неорієнтовані без кратних ребер та петель. В [4], [5] отримано всі неізоморфні графи-обструкції для N_2 -поверхні Клейна на не більш ніж 9-ти вершинах, а в [6] наведено діаграми цих графів. Нехай 2-многовид S без країв (дірок) неорієнтованого роду $\bar{\gamma}(S)$ подано як поверхню S' орієнтованого роду $\gamma(S')$, де $\gamma(S') \geq 0$, $\bar{\gamma}(S) = 2\gamma(S') + r$, до якої приклеєно r лент Мебіуса, $r > 0$; наприклад, поверхня S є пляшкою Клейна коли $\gamma(S') = 0$ і $r = 2$, чи поверхня S роду $\bar{\gamma}(S) = 3$ матиме S' - тор із однією приклеєною лентою Мебіуса. Для заданого вкладення $f, f: G \rightarrow S$, графа G в S та заданої множини точок X , $X \subset G^0 \cup G^1$ визначимо $t_G(X, S, f), t = t_G(X, S, f)$, число досяжно сті множини X відносно S , якщо існує підмножина $S_G(X), S_G(X) = S \setminus f(G), S_G(X) = \{s_i\}_1^t$, що задовольняє умові: $(f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^t \partial s_i \cap X) \wedge (f(X) \not\subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^t \partial s_i \cap X), j=1, 2, \dots, t$. Будемо говорити, що множина X має число досяжності $t, t_G(X, S) = t$, відносно S , якщо серед всіх неізоморфних вкладень $f, f: G \rightarrow S$ число t є найменшим серед чисел $t_G(X, S, f)$. Вважатимемо надалі, що $\bar{\gamma}$ позначено через γ .

Визначення 1. Нехай задано вкладення $f, f: G \rightarrow S$, графа G в S , яке реалізує $t, t_G(X, S) = t$, де $S_G(X) = S \setminus f(G), S_G(X) = \{s_i\}_1^t$. Будемо говорити, що відносно заданої поверхні S множина X матиме характеристику $\theta_G(X, S, f), \theta_G(X, S, f) = \theta, \theta \geq 1$, якщо існує θ трійок кліток $\{s_i\}_1^3$ з множини $S_G(X)$, на границях яких підмножини $X_i, X_i \subseteq X$, розміщуються довільним чином і задовольняють співвідношенню:

$G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\} \wedge G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\} \wedge G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$, та породжує найменший по включенню підграф G' графа G , (можливо вироджений в точку), який містить точки $\{a_i\}_1^3$ попарного перетину границь кліток $\{s_i\}_1^3$; Множина X матиме

відносно S характеристику $\theta_G(X, S)$, якщо $\theta_G(X, S) = \max \theta_G(X, S, f)$, де максимум береться по всім неізоморфним вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X, S) = t$.

Визначення 2. Нехай задано вкладення $f, f: G \rightarrow S$, графа G в S , яке реалізує $t_G(X, S) = t$, де $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$, $S_G(X) = S \setminus f(G)$, та виконується рівність $\theta_G(X, S) = 0$. Будемо говорити, що відносно S множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta = \partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta \geq 1$, якщо існує підмножина $\{s_i, s_j, s_k\}$, множини $S_G(X)$, яка задовольняє співвідношенням: $G^1 \cap \partial s_i \cap \partial s_j \supset \{(a_1, b_1)\}$ і $G^1 \cap \partial s_k \cap \partial s_j \supset \{(a_2, b_2)\}$, для всіх $i \neq j \neq k, i, j, k = 1, 2, 3$. На границях $\{\partial s_i, \partial s_j, \partial s_k\}$ множина X розміщується довільним чином, якщо не містить точок ребер $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ та особливим чином (без точок множини X на $\partial s_j \setminus L(a_1, a_2) \cup \{(a_2, a_{20}), (a_1, a_{10})\}$), якщо містить принаймні точку цих ребер. Також існуватимуть клітка s_0 та, можливо, клітка s_{00} . Клітка $s_0, s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$, границя якої містить простий ланцюг $L(a_1, a_2)$ ненульової довжини між кінцевими вершинами a_1, a_2 спільно із ∂s_j і два простих ланцюги, можливо вироджених в точку, $L_1(a_1, a_{12}), L_1(a_2, a_{22})$ спільними з ∂s_i та ∂s_k , відповідно, та ребро (a_{12}, a_{22}) . Клітка $s_{00}, s_{00} \in (S \setminus f(G)) \setminus (S_G(X) \cup \{s_0\})$, має границю яка містить простий ланцюг $L(a_{10}, a_{20})$ ненульової довжини між кінцевими вершинами a_{10}, a_{20} спільно із ∂s_j . Множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X, S)$, якщо $\partial\theta_G(X, S) = \max \partial\theta_G(X, S, f)$, де максимум по неізоморфним вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X, S) = t$ та $\theta_G(X, S)$.

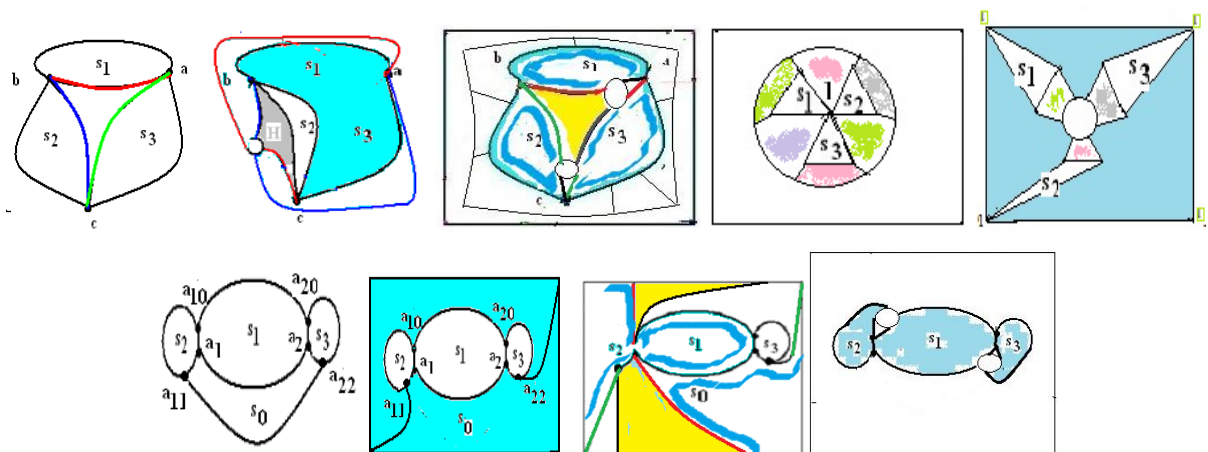


Рис. 1. В 1-му ряду на перших трьох картах циклічна кліткова структура, а інші ілюструють зіркову на проективній площині та плящі Клейна, на 2-му ряду перших трьох картах проілюстровано ланцюжкову кліткову структуру на проективній площині та плящі Клейна.

Визначення 3. Позначимо через $krt_G(M)$, $kr = krt_G(M)$, kr - кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G , як найбільшу кількість варіантів вибору різних підмножини $S_G(M, S_\gamma)$ множини клітин $S_\gamma \setminus f(G)$ на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M , узята по всіх мінімальних вкладеннях f , $f : G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ . Іншими словами, це найбільша кількість зірок які приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr 2-кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Визначення 4. Позначимо через $ms_G(M, s, f)$, $k = ms_G(M, s, f)$, k - сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітки s , $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f - задане мінімальне вкладення $f : G \rightarrow S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M . Найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх клітин s заданого мінімального вкладення f , $f : G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $ms_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G які приєднані кінцевими вершинами до кожного із принаймні трьох елементів множини M та вкладені до однієї клітки із множини $S_\gamma \setminus f(G)$ заданого мінімального вкладення f , $f : G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ .

Визначення 5. Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), \dots, ms_G(M, f_N))$ вектором l -стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, $l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0$, $|M| > 2$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ - множина всіх неізоморфних мінімальних вкладень f_k , $f_k : G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел $ms_G(M, f_k)$ узяте по всім s та всім f_k , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, називатимемо характеристикою l -стороннього доступу до множини M точок графа G та позначимо через $ms_G(M)$.

Твердження 1. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф, $G = K_6$, має на N_2 число досяжності множини вершин $t_G(K_6^0, N_2) = 2$ та не має вершини з подвійним доступом та кожне видалене ребро зменшує число $t_G(K_6^0, N_2)$;
2. Граф $G, G = K_5$, має на N_2 число досяжності множини вершин $t_G(G^0, N_2) = 1$ та дві вершини з двостороннім доступом, а граф $G, G = K_5 \setminus e$, має на N_2 три вершини з

двостороннім доступом; 3. Граф $G, G = K_7$, має рід $\gamma(G) = 3$; 4. Граф $G, G = K_8 \setminus K_{1,2}$, має рід $\gamma(G) = 3$; 5. Граф $G, G = K_6 \setminus 2K_2$, має на N_2 число досяжності множини вершин $t_G(G^0, N_2) = 2$ та має вершину з подвійним доступом, а $G = K_6 \setminus 3K_2$ має на N_2 $t_G(G^0, N_2) = 2$ та має тільки одну вершину без подвійного доступу;

6. Множина вершин $K_{3,3}^0$ графа $K_{3,3}$ має кратний доступ і є досяжною відносно N_2 ;

Доведення проілюстровано на рис 2, де на перших двох картах зображено вкладення графа K_7 в N_3 , відповідно, побудовані як продовження вкладення f_6 графа K_6 в N_2 та вкладення f_5 графа K_5 в N_2 , причому синім кольором позначимо клітку з множини $N_2 \setminus f_5(K_5)$ на якій маємо подвійний доступ до вершин з під множин $\{4\}, \{1\}$. На четвертій карті зображено мінімальне вкладення графа $K_8 \setminus K_{1,2}$ в N_4 . На п'ятій карті зображено вкладення графа K_6 в N_2 яке реалізує число $t_G(G^0, N_2) = 2$ та видно зменшення цього числа при видаленні ребра (3,5).

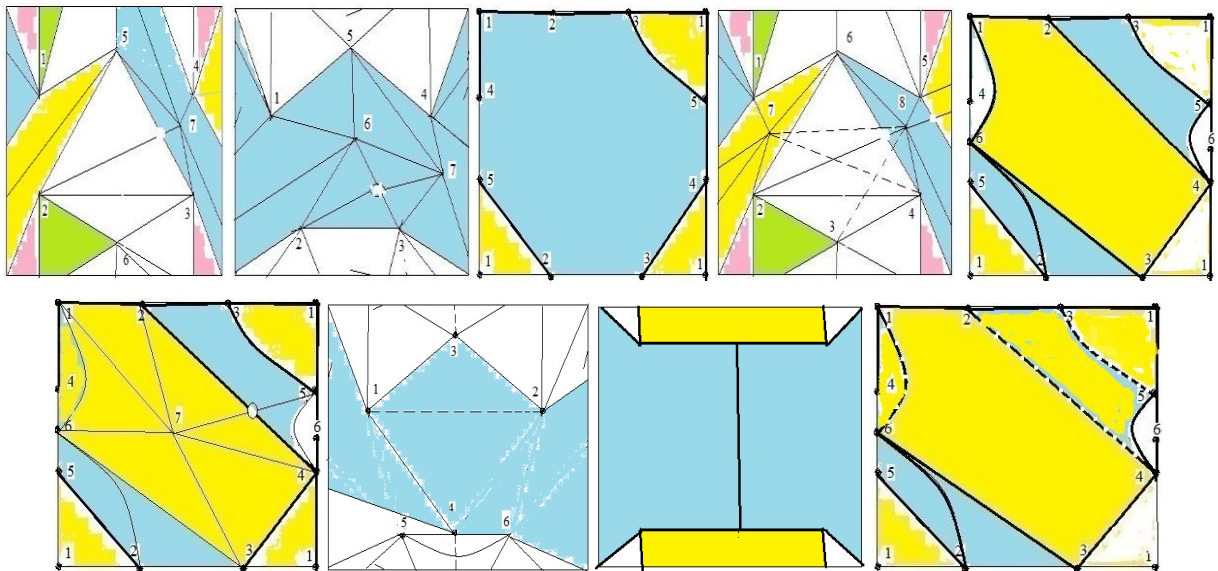


Рис. 2. На другій карті вершини 1,4 графа K_5 мають на N_2 двосторонній доступ, а на 3-й, 5-й, 6-й, 8-й, 9-й картах ребра позначені дугами та відрізками товстих ліній.

Твердження 2. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф $G_1, \bar{G}_1 = K_8 \setminus 4K_2^1$, є φ -образом графа $K_7 \setminus 3K_2$ та зірки $St_6(v_7)$ з центром v_7 та шести висячих ребер-променів, кінцеві вершини яких попарно приєднано до кожної вершини підграфа $K_7 \setminus 3K_2$, що утворюють множину з числом досяжності 2 відносно N_2 ;
2. Граф $G_2, \bar{G}_2 = K_8 \setminus (K_4^1 \setminus K_{1,2}^1)$, є φ -образом графа $K_7 \setminus e$ та зірки $St_5(v_4)$ з центром v_4 та шістьма п'ятьма променями, кінцеві вершини яких попарно приєднано до кожної вершини підграфа K_5 , які утворюють множину з числом досяжності 1 відносно N_2 ;

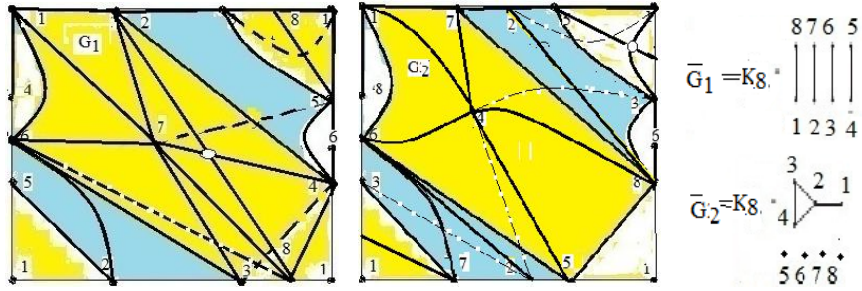


Рис. 3. На першій карті маємо вкладення графа G_1 в N_3 , а на другій карті графа G_2 в N_3 , де колом позначена лента Мебіуса, приклеєна до тора.

3. Граф G_3 , $\bar{G}_3 = K_8 \setminus 2K_3^1$, є φ -образом графа $K_{3,3}$ та квазізірки $St_{6,6}(K_2)$ з центром із ребра з вершинами v_7, v_8 , кожна з яких приєднана висячими ребрами до кожної вершини з множини $K_{3,3}^0$, яка має кратний доступ і є досяжною відносно N_2 ;

4. Граф G_4 , $\bar{G}_4 = K_8 \setminus 2St_{3,3}^1(K_2)$, є φ -образом графа K_6 та квазізірки $St_{3,3}(K_2)$ з центром із ребра з вершинами v_7, v_8 , кожна з яких приєднана висячими ребрами до кожної вершини з множини K_6^0 , які утворюють множину з числом досяжності 2 відносно N_2 ;

5. Граф G_5 , $\bar{G}_5 = K_8 \setminus (St_4^1(v_8) + St_2^1(v_7))$, є φ -образом графа K_6 та квазізірки $St_{3,4}(K_2)$ з центром із ребра з вершинами v_7, v_8, v_7, v_8 , кожна з яких приєднана висячими ребрами до кожної вершини з множини K_6^0 , які утворюють множину з числом досяжності 2 відносно N_2 .

Доведення. Схеми доведення тверджень 1,2,3,4,5 впливають з карт графів на рис. 3,4.

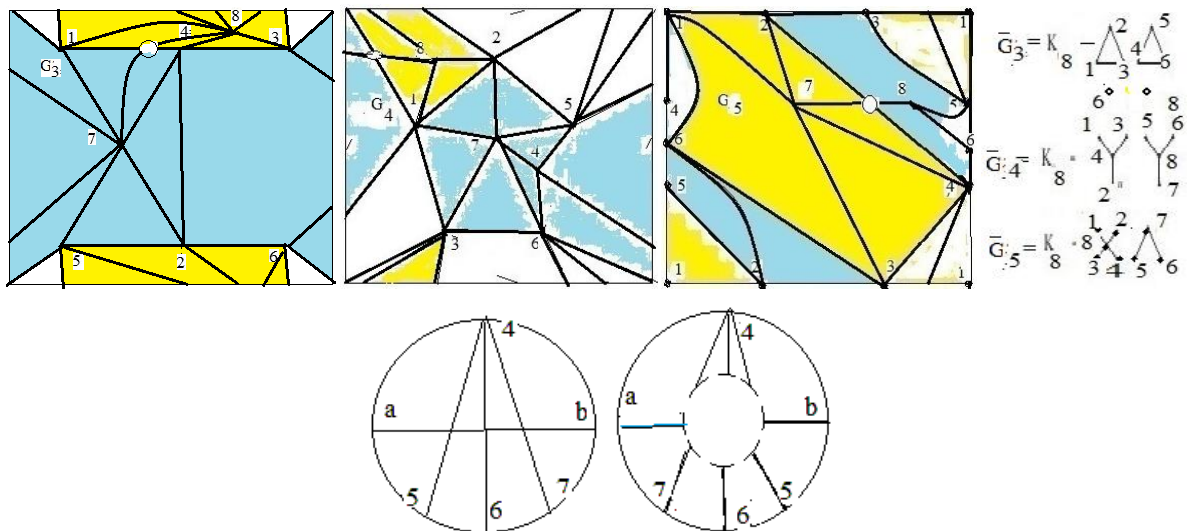


Рис. 4. На першій, другій та третій картах маємо вкладення графів G_3, G_4, G_5 в N_3 , другий ряд містить приклад підграфа K графа H з теореми 1, вкладеного до ленти Мебіуса.

Теорема 1. Кожен граф-обструкція H для N_2 - неорієнтованої поверхні рода 2 задовольняє наступним співвідношенням:

1. Довільне ребро $u, u = (a, b)$, розміщується на ленті Мебіуса деяким мінімальним вкладенням графа H в N_3 та існує локально проєктивно-площинний підграф K графа $H \setminus u$, який задовольняє умові: $(t_K(\{a, b\}, N_3) = 1) \wedge (t_{K \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2)$;

2. Існує найменша по включенню множина різних підграфів K_i 2-зв'язного графа H гомеоморфних $K + e$, де K - локально площинним підграфам графа $H \setminus e$ із доданим ребром e (принаймні $K + e \cong K_5$, чи $K + e \cong K_{3,3}$), що покриває множину ребер графа H .

Доведення. Доведемо співвідношення 1. Нехай $u, u = (a, b)$, довільне ребро графа-обструкції H для неорієнтованої поверхні N_2 рода 2 та мінімальне вкладення f , $f : H - u \rightarrow N_2$, яке розташовує кінцеві вершини ребра $u = (a, b)$ на границях двох кліток s_1, s_2 , $s_i \in S_H(N_2, f)$, $S_H(N_2, f) = N_2 \setminus f(H)$, де $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$. Оскільки $\gamma(H) > 1$, то існуватиме підграф графа-обструкції H для N_2 гомеоморфний або K_5 , або $K_{3,3}$, який вкладенням f розміщується на проєктивній площині із однією приклеєною лентою Мебіуса так, що всі його вершини виходитимуть на границю однієї клітки, причому деякі з подвійним доступом. Ребро $u = (a, b)$ на проєктивній площині схрещене із принаймні одним ребром u' , $u \neq u'$, та будуть розміщені на ленті Мебіуса разом з u , як показано на рис 4. Відмітимо, що $s_1 \neq s_2$, тобто матимемо рівняння $t_{H \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2$, бо у разі однієї клітки $s_1 = s_2$ було б можливо продовжити вкладення шляхом розміщення ребра $f(u)$ в середину клітки s_1 , що суперечить визначенню графа-обструкції для неорієнтованої поверхні N_2 рода 2. Тоді існуватиме найменший по включенню локально площинний на неорієнтованої поверхні N_2 підграф K графа $H \setminus u$, який містить всі вершини, що виходять на границі кліток $\partial s_1 \cup \partial s_2$, тобто задовольняє рівності $t_{H \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2$.

Довизначивши вкладення f шляхом додавання відрізка $[a, b]$ до 2-зв'язного підграфа $f(K)$, матимемо перетин принаймні одного ребра $f(u')$ з $[a, b]$. Приклеїмо до N_2 ленту Мебіуса в місці перетину ребер $f(u')$, та перевизначимо вкладення $f : H - u \rightarrow N_2$ шляхом розведення на ленті Мебіуса ребра $f(u')$ з ребром $f(u)$. Тим самим отримаємо мінімальне вкладення $f', f' : H \rightarrow N_3$, яке розташовує кінцеві вершини ребра $u = (a, b)$ на границі однієї клітки, та рівність $t_H(\{a, b\}, N_3) = 1$. Доведення співвідношення 1. закінчене.

Доведемо співвідношення 2 використовуючи наведені вище позначення для виділення локально площинних підграфів K_i графа $H \setminus u$, який задовольняє умові:

$(t_{K_i}(\{a, b\}, N_3) = 1) \wedge (t_{K_i \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2)$. Розглянемо всі можливі випадки для графа $H \setminus u$:

1). Існує простий цикл $f(z)$ графа $H \setminus u$, $u = (a, b)$, який містить вершини $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$;

2). Не існує простого циклу $f(z)$ графа $H \setminus u$, який містив би вершини $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$;

Випадок 1). Циклом $f(z)$ буде простий цикл, який містить принаймні ребра з кінцеви ми вершинами $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$ та входить до об'єднання границь тих кліток чи псевдокліток s_i , $s_i \in N_2 \setminus f(H)$, $i = 1, 2, \dots, n$, що утворюють ланцюжок з початком в s_1 та кінцем в s_n , $s_n = s_2$, а кожна наступна клітка ланцюжка матиме принаймні одне спільне ребро із попередньою кліткою цього ланцюжка. У виродженому випадку цей ланцюжок кліток складатиметься тільки з двох трикутних кліток чи псевдокліток s_1, s_2 . В графа $H \setminus u$ має існувати найменший по включенню локально площинний підграф K , який задовольняє умові: $(t_K(\{a, b\}, N_3) = 1) \wedge (t_{K \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2)$, бо інакше порушуватиметься умова про H як граф-обструкцію. Тобто мають бути, або три ланцюги ненульової довжини, що належать границям кліток ланцюжка і мають спільну кінцеву вершину, або два зхрещених на площині діагональ них відносно $f(z)$ ланцюги L_1, L_2 ненульової довжини, (один з них належатиме до границь кліток ланцюжка, а інший не матиме спільних ребер із границею жодної клітки ланцюжка), які парами своїх кінцевих вершин розділятимуть один одного та пару вершини a, b на $f(z)$. Тоді локально площинний підграф K матиме вигляд $f(z) \cup L_1 \cup L_2$ тобто $f(K) \cong K_4$, та задовольнятиме умові: $t_{K \setminus u}(\{a, b\}, N_2) = 2$ для довільного ребра $u = (a, b)$. У випадку коли вершини a, b є внутрішніми точками несуміжних ребер графа K , то граф $K + (a, b) \cong K_{3,3}$.

Випадок 2). Нехай не існує простого циклу $f(z)$ графа $H \setminus u$, який містив би вершини $a \in \partial s_1, b \in \partial s_2$. Це означатиме що, видалене ребро $u = (a, b)$ розірвало той простий цикл z' графа H , що за умови 2- зв'язності графа H проходив через вершини a, b . Тоді має бути 2-зв'язний підграф H' графа $H \setminus u$ який має вершину a та простий ланцюг L' , який задовольнятиме умові $H' \cup L' \cup u \supseteq z'$. Для 2-зв'язного підграфа H' виконуватиме -тсья наведений вище випадок 1). Доведення для випадку 2) закінчене. Таким чином для кожного ребра u графа 2-зв'язного графа H є підграф K_i , $K_i = K(u) + u$, де локально площинний підграф $K(u)$ із доданим ребром u (принаймні $K + e \cong K_5$, чи $K + e \cong K_{3,3}$). Тоді об'єднання всіх таких K_i покриває множину ребер графа H . Доведення співвідношення 2 закінчене. Доведення теореми закінчене.

Наслідок 1. Граф-обструкція H для неорієнтованої поверхні рода 2 є φ -образом двох квазізірок $St_{n_1, n_2, \dots, n_{k_1}}(H_1)$, $St_{m_1, m_2, \dots, m_{k_2}}(H_2)$ з центрами - підграфами H_i , $k_i = |H_i|$, $i \neq j, i, j = 1, 2$, де

квазізірка може не мати висячих ребер; у висячих ребер кожна l -та висяча вершина інцидентна nl висячим вершинам тих ребер, що приєднуються кінцевими вершинами до ml' вершин підграфа H_j , де $l=1,2,\dots,k_1$, $l'=1,2,\dots,k_2$, $i \neq j, i, j=1,2$, саме ці кінцеві вершини утворюють множину точок приєднання з числом досяжності 2 відносно N_2 та мають наступні властивості для 2-зв'язного H :

а). для кожна вершина центру H_i з підмножини точок приєднання приєднана, або висячим ребром до однієї вершини підграфа H_j , або двома висячими ребрами до кожної з кінцевих вершин деякого ребра підграфа H_j , або трьома висячими ребрами до кожної вершини підграфа K_3 графа H_j , де $i \neq j, i, j=1,2$;

б). кожне ребро підграфа H_i чи H_j є суттєвим при операції його видалення,

або відносно неорієнтованого роду $\gamma(H_i)$ чи $\gamma(H_j)$, де $i \neq j, i, j=1,2$,

або відносно числа досяжності $t_{H_i}(X_{ij}, N_2)$, множини точок приєднання X_{ij} ,

$X_{ij} = X(H_i, H_j)$, квазізірки $St_{n_1, n_2, \dots, n_{k_1}}(H_1)$ до графа H_j , де $i \neq j, i, j=1,2$,

або відносно числа багатосторонності $ms_{H_i}(X_{ij}, N_2)$, множини точок приєднання

X_{ij} , $X_{ij} = X(H_i, H_j)$, квазізірки $St_{n_1, n_2, \dots, n_{k_1}}(H_1)$ до графа H_j , де $i \neq j, i, j=1,2$.

Література

3. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. препринт ИМ АНУ, Київ, 1973, 383 с.
2. Хоменко Н. П. Топологические аспекты теории графов. препринт ИМ АНУ, Київ, 1970.
3. Хоменко Н. П. Островерхий Е. Б. Существенные элементы и род графа. препринт "Минимальные вложения графов" ИМ АНУ, Київ, 1972, 62 с.
4. Cashy J., Irreducible graphs for the Klein bottle, Ohio State University Ph.D. Thesis, 2000.
5. Mohar B., Thomassen C., Graphs on Surfaces, Johns Hopkins University Press, 2001.
6. Suhkjin Hur. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10, Phd, Ohio State University, 2008.
7. Петренко В.І., Петренко Д.А., Нова верхня межа неорієнтованого роду простого графа./Питання оптимізації обчислень ІК НАНУ, Київ, 2019.

3.3. СТРУКТУРА НЕПРОЕКТИВНИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ

Задача полягатиме у поданні графів-обструкцій проєктивної площини, тобто графів неорієнтованого роду 2, у яких кожне ребро є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, як результату ϕ -перетворення по підмножинам множин точок (точок приєднання із заданими характеристиками – числом досяжності та двостороннім доступом) графу гомеоморфного K_5 чи $K_{3,3}$ (можливо без ребра чи вершини) та квазізірки Y із центральним графом M гомеоморфним або K_4 чи $K_{2,3}$ та можливим стискуванням в точку деяких висячих ребер множини $Y^1 \setminus M^1$). Основний результат - теорема про подання довільної граф-обструкції неорієнтованого роду 2 як ϕ -образу двох зв'язних графів X, Y , які задовольняють одному з наступних випадків:

0) графи X, Y гомеоморфні K_5 чи $K_{3,3}$, і їхні множини точок приєднання мають число досяжності 1,

1) графи-квазізірки X, Y із центрами гомеоморфними K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо висячими ребрами, і множинами точок приєднання з числом досяжності 2,

2) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ та вкладений до проєктивної площини Σ , а інший граф X є площинним 2-мінімальним відносно множини точок приєднання до графа Y на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із нульовими характеристиками θ та $\partial\theta$ для множини точок приєднання до графа Y ,

3) графи X , Y є вкладеними до проєктивної площини графами-квазізірками з центром $K_5 \setminus e$ чи $K_{3,3} \setminus e$, можливо з висячими ребрами, і множиною точок приєднання графа X до графа Y із числом досяжності 2 та множини точок приєднання графа Y , що належать двом різним простим циклам.

Вступ. Основні позначення взяті із [1], [2]. Нехай G неорієнтований скінчений граф без петель і кратних ребер ейлерового роду $\gamma(G)$, а S - замкнутий 2-многовид роду $\gamma(S)$, де $\gamma(G) = \gamma(S) + 1$. Якщо поверхня орієнтована, то позначатимемо її через σ , а якщо це неорієнтована поверхня, то через Σ . Визначення 1,2 із [3],[4], відповідно.

Визначення 1. Граф G називається таким, що неприводиться над S , або $\gamma(G)$ -неприведеним (irreducible) для S , якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх $\gamma(G)$ -неприведених над S графів позначимо через $\zeta(S)$ та назовемо множиною перешкод (obstructions) для графів, що мають укладатися на заданій поверхні S .

Визначення 2. Граф G мінімальний (мінор) над S , якщо для будь-якого графа G' , отриманого з графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G') \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх графів мінімальних над S позначимо через Γ_S .

Множина всіх графів, що неприводяться над S містить Γ_S характеризує множину всіх графів рід яких не менше $\gamma(S) + 1$. Якщо $S = \sigma_0$ евклідова площина, то $\Gamma_S = \{K_5, K_{3,3}\}$. Якщо S проєктивна площина, то Γ_S складається із 103-х графів, діаграми яких наведені в [5], де повнота списку є доведеною, а в [6] вони зображені інакше.

Розглянемо **задачу** вивчення структурних властивостей двозв'язних графів-обструкцій та двозв'язних мінорів для проєктивної площини, поданих як ϕ -образи деякого простого графа та квазізірки, із подальшим використанням при побудові графів-обструкцій для довільної неорієнтованої поверхні. Наведемо короткий огляд результатів робіт, пов'язаних із цією задачею. Для проєктивної площини S були наступні два напрямки робіт пов'язаних з графами, що неприводяться над S . Один з них – “метод релятивних компонент” був заснований Вагнером (Wagner K.), який визначив мінімальний базис для множини скінчених графів, що не можуть бути вкладеними до S і застосував для опису мінімальних графів над проєктивною площиною. Разом з Бодендіеком (Bodendiek R.) були продовжені дослідження і знайдені мінімальні графи над тором, зокрема мінімальний базис з 12 графів для множини всіх скінчених графів-обструкцій проєктивної площини був побудований шляхом чотирьох спеціальних перетворень [7] множин вершин

і ребер графів та наведений в [8], де вони описані разом із методом релятивних компонент, яким отримано клас графів-обструкцій для пляшки Клейна.

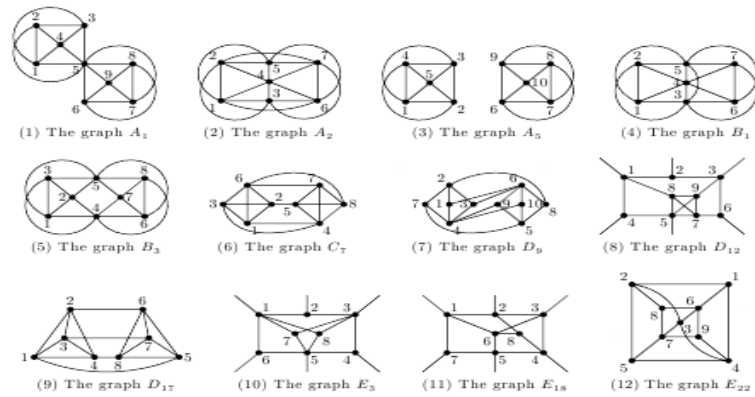


Рис. 1. Мінімальний базис множини мінорів проективної площини [8].

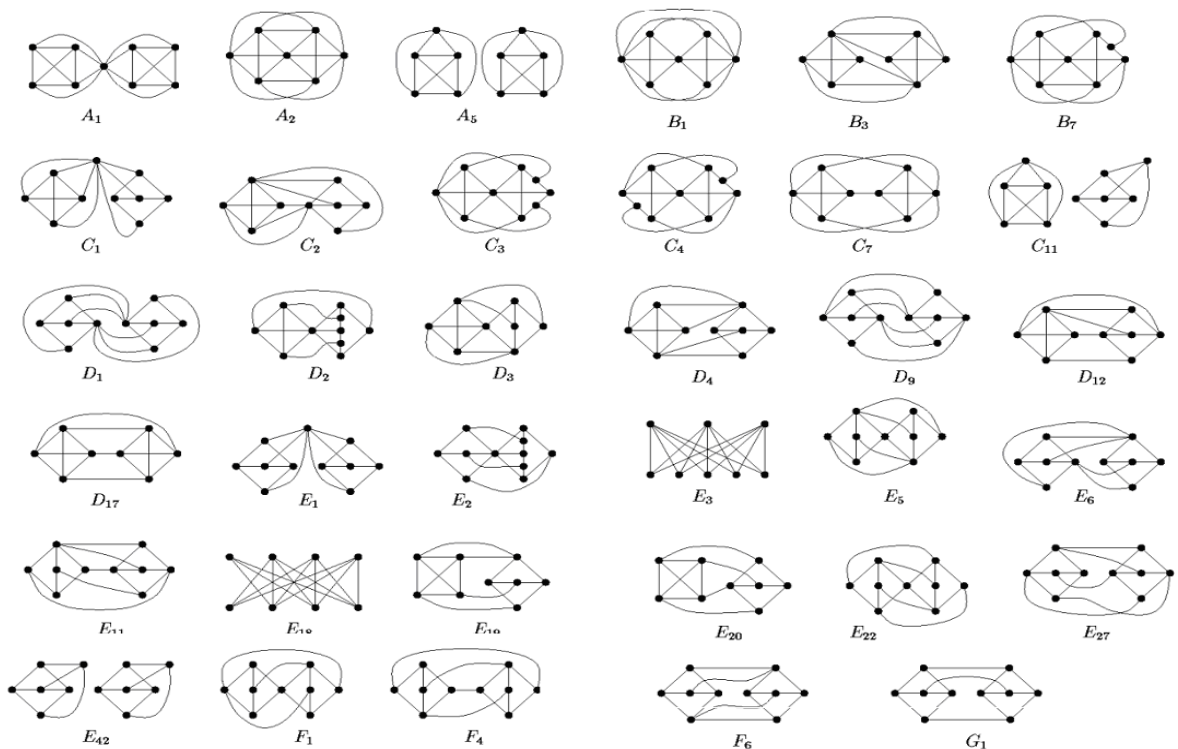


Рис. 2. Множина з 35-ти мінорів проективної площини.

Множина мінорів із сайту Д.Архидиякона (Dan Archdeacon) наведена на рис. 2
 Інший напрям в роботах Гловера, Ханеке та Ванга (Glover H., Huneke J. P., Wang C). Ними були виписані графи, що неприводяться над проективною площиною. В [3] поданий огляд результатів і було доведено, що є скінчена множина графів, які неприводяться над проективною площиною. Список із 103 таких графів був побудований в [4], де було вказано припущення, щодо повноти списку. В [5] представлений план доведення того, що вказаний список є повним, а в дисертації цього автора наведено доведення повноти та він стверджує, що ним побудовано 5 графів, з яких виходять інші в результаті операції

розщеплювання вершин чи видалення ребер графів. В [9] наведені структурні властивості кожного мінора (мінімального простого графа) G проєктивної площини, поданого як ϕ -образи деякого простого графа G' та простої зірки $St_G(v)$. В [14], [15] досліджувалися властивості графів мінімального базису проєктивної площини. По-іншому виглядатиме структура графа-обструкції роду g , якщо довести гіпотезу про належність його довільного ребра до об'єднання g штук підграфів чи частини, гомеоморфних K_5 чи $K_{3,3}$. В [13] підтверджено цю гіпотезу для графів неорієнтованого роду з числом вершин не більше 10, а в [16] авторитетно сказано про її справедливість для кубічних графів.

Основний результат. Визначимо, згідно [1], число досяжності заданої множини точок X як найменшу кількість кліток (компонент) s_i із множини компонент $S \setminus f(G)$ на границях ∂s_i , які з комбінаторної точки зору є маршрутами виду $\partial s_i \cap (G^0 \cup G^1)$ та на яких розміщено образ $f(X)$ множини X , де f - мінімальне вкладення графа G до S , а під точкою графа розумітимемо або вершину, або внутрішню точку ребра графа G . Псевдоклітку називатимемо проєктивною 2-кліткою, якщо її границя, як замкнутий ланцюг, не містить однакових вершин, інакше називатимемо проєктивною недвокліткою. Про досяжну множину точок X будемо говорити, якщо вона розміщується на границі деякої клітки s , $s \in S \setminus f(G)$. Якщо такої клітини s , $s \in S \setminus f(G)$, не існує, але є на множині кліток з розбитої вкладенням $f, f: G \rightarrow S$, проєктивної площини S мінімальна по включенню підмножина з k псевдодвокліток (граней графа G) $s'_i, i=1, k, k \geq 0$, кожна з границь $\partial s'_i$ яких містить принаймні один елемент із $X \setminus X \cap \bigcup_{j=1, j \neq i}^k \partial s'_j$, то матимемо

проєктивну досяжність $t_s(X)$, де $t_s(X) = k$, для вказаної множини X . Узагальнене число досяжності $t_G(X, S)$ підмножини X множини точок графа G на поверхні S роду γ , $\gamma \geq \gamma(G)$, є найменшою кількістю кліток з підмножини Δ множини $S \setminus f(G)$, де S поверхня роду γ , а $f, f: G \rightarrow S$, вкладення при якому елементи $f(X)$ розташовуються на границях кліток із підмножини Δ . Таке узагальнене число досяжності $t_G(X, S)$ потрібне для оцінки роду ϕ -образу деякого графа та простої зірки у випадку заміни зірки на квазізірку, доповнимо визначеннями, які враховують наявність на границі недвоклітки кількох копій вказаної множини точок X графа G .

Визначення 3. Позначимо через $krt_G(M)$, $kr = krt_G(M)$, kr - кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G , як найбільшу кількість різних кліток з

підмножини $S_G(M, S_\gamma)$ множини клітин $S_\gamma \setminus f(G)$ на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M , узяті по всіх мінімальних вкладеннях $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ . Іншими словами, це найбільша кількість зірок які приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr 2-кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Визначення 4. Позначимо через $ms_G(M, s, f), k = ms_G(M, s, f), k$ - сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої клітини \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітини s , $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f - задане мінімальне вкладення $f: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M , а найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх клітин s заданого мінімального вкладення $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $ms_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G приєднаних кінцевими вершинами до кожного з, принаймні трьох, елементів множини M та вкладені без перетину ребер у внутрішніх точках до однієї клітини $s, s \in S_\gamma \setminus f(G)$, із цикломатичним числом $p_1(\partial s)$, де $p_1(\partial s) \geq k$, та заданим мінімальним вкладенням $f, f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ .

Визначення 5. Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), \dots, ms_G(M, f_N))$ вектором l - стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої клітини $\bar{s}, s \in S_\gamma \setminus f_k(G), l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0, |M| > 2, \{f_k\}_{k=1}^N$ -множина всіх неізоморфних мінімальних вкладень $f_k, f_k: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел $ms_G(M, f_k)$ узяті по всіх s та всіх f_k , називатимемо l - стороннім доступом до заданої множини точок M графа G . *Позначення 1.* Під квазізіркою $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ з центром графом G_1 будемо розуміти об'єднання графа $G_1, G_1 = (\{v_i\}_{i=1}^3)$, та трьох зірок $St_{n_i}(v_i)$ із висячими вершинами $\{g_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ і ребрами в кількості n_i , але без спільних ребер та із центральними вершинами v_i , що породжують підграф G_1 графа G .

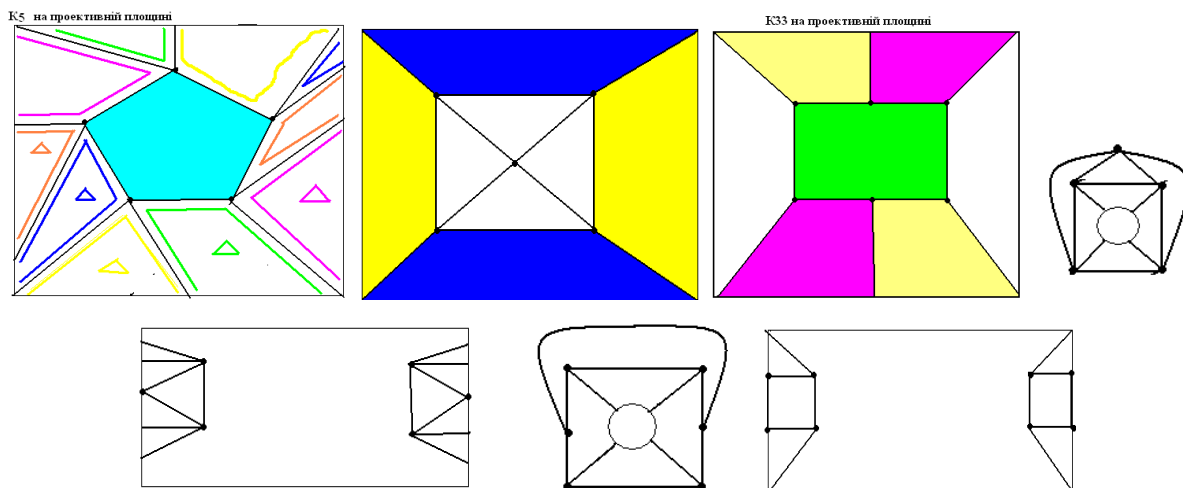


Рис.2.1. Вкладення графів K_5 , $K_{3,3}$ до проективної площини та ленти Мебіуса (нижній ряд), приклеєної до евклідової площини.

Лема 1. Нехай заданий граф G неорієнтованого роду 1 має досягну на S_1 множини точок M , $M = \{i'\}_{i=1}^k$, $k > 1$, із l -стороннім доступом до M , $l > 1$, яка на евклідовій площині S_0 має число досяжності 2, та задано квазізірку $St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)$ із центром G_1 - площинним зв'язним графом, $G_1^0 = V \cup \{v_i\}_{i=1}^k$, із підмножиною точок $\{v_i\}_{i=1}^k$, що має число досяжності t , $t = t_{G_1}(\{v_i\}_{i=1}^k) = 2$, та k зірками $St_{n_i}(v_i)$ із висячими вершинами i'' з множини $\{\{i''\}_{j=1}^{n_i}\}_{i=1}^k$, $p \geq k$, що можуть бути спільними для кількох зірок $St_{n_i}(v_i)$, $St_{n_j}(v_j)$, $l \neq j$ як підграфів квазізірки, і висячими ребрами в кількості $\sum_{j=1}^k n_j$, $n_j \geq 1$. Задамо ϕ -перетворення графів G і $St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)$ на граф \mathfrak{Z} , наступним чином:

$$\phi(G + St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)), \sum_{i=1}^k (i' + \{i''\}_{j=1}^{n_j}) \rightarrow (\mathfrak{Z}, \{i\}_{i=1}^k).$$

Якщо має місце нерівність $l \geq k \geq 2$, то $\gamma(\mathfrak{Z}) \leq 2$, інакше $\gamma(\mathfrak{Z}) \leq k - l + 1$, де $\gamma(\mathfrak{Z})$ - неорієнтовний рід.

Доведення. Нехай виконуються умови лема 1. Тоді граф G є або площинним, або містить підграф чи частину гомеоморфну K_5 чи $K_{3,3}$; вкладення його до проективної площини визначають множини кліток в які має вкладатися решта ребер графа \mathfrak{Z} . Розіб'ємо граф \mathfrak{Z} на два підграфи G та $St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)$ шляхом розщеплення кожної точки i з множини $M = \{i\}_{i=1}^k$ на дві точки i' , i'' до яких на загал приєднані тіж ребра, що й до точки i .

Ототодження висячих вершин i' з i'' , де $M' = \{i'\}_{i=1}^k$, $M'' = \{i''\}_{i=1}^k$, не залежить від їхньої нумерації. Доведемо нерівність $\gamma(\mathfrak{Z}) \geq 1$. Якщо припустити, що граф G площинний та

$\gamma(\mathfrak{S}) = 1$, то тоді довільне мінімальне вкладення f квазізірки $St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)$ в проєктивну площину має бути таким, що $\{\{i''\}_{j=1}^{n_i}\}_{i=1}^p$ - множина точок приєднання розміщуватиметься на границі деякої клітки g . Розширення цього f на граф G вкладатиме його в середину клітки g , бо множина M складена з його точок приєднання має бути досяжною на проєктивній площині. Тоді g має бути недвокліткою, бо множина M матиме на клітині g досяжність 1, тобто є двокліткою з приклеєною мебіусовою лентою на якій вкладено один із підграфів чи частин гомеоморфних K_5 чи $K_{3,3}$. Отримаємо протиріччя умові про рід графа G . Припущення невірне, тобто якщо граф G площинний та має місце нерівність $l \geq k \geq 2$, то $\gamma(\mathfrak{S}) = 1$.

Нехай має місце нерівність $l \geq k$. Згідно визначення l -стороннього доступу до заданої множини M точок графа G із числом досяжності 1 існуватиме таке мінімальне вкладення $f, f: G \rightarrow S_1$, що визначатиме l різних шляхів доступу до кожної точки M із довільної внутрішньої точки замкнутої клітини $\bar{s}, s \in S_1 \setminus f(G)$, де $l > 1, |M| \geq 2$. Вкладемо площинний граф G_1 до внутрішньої двоклітки s_1 замкнутої клітки \bar{s} за допомогою мінімального вкладення $f_1, f_1: G_1 \rightarrow s_1$, яке реалізує число досяжності $t, t = t_{G_1}(\{v_i\}_{i=1}^k), t = 2$, так, що матиме місце включення $f_1(\{v_i\}_{i=1}^k) \subseteq G_1^0 \cap (\partial s_1' \cup \partial s_2')$, де $s_1', s_2' \in s_1 \setminus f_1(G_1)$. Покладемо, що s_2' є зовнішньою гранню, а s_1' є внутрішньою гранню. Згідно [16] граф G_1 містить множину точок $\{v_i\}_{i=1}^k$ розміщену на підграфі гомеоморфному одному з наступних графів: $K_{2,3}, K_4, K_4^* = K_{3,3} \setminus e, K_5 \setminus e, (K_5 \setminus e)^*, (K_5 \setminus e)^{**}$. Ототожнимо із збереженням напрямку дві різнонаправлені стрілки $r_i, r_i \subset \bar{s}_i' \setminus \partial s_i', i = 1, 2$. Отримаємо перетворену множину $s_1 \setminus f_1(G_1)$ в якій замість s_1', s_2' є недвоклітка r на границі якої розміщуватиметься вся множина точок $f_1(\{v_i\}_{i=1}^k)$. Продовжимо вкладення f_1 на множину висячих ребер $\sum_{j=1}^k n_j$ і висячих вершин зірки $St_{n_i}(v_i)$, де $i = 1, 2, \dots, k$, розмістивши їх на s з приклеєною лентою Мебіуса без перетину у внутрішніх точках по різним l шляхам, де $l \geq k, l$ -стороннього доступу до заданої множини M точок графа G із числом досяжності 1, що реалізується на границі клітки s вкладенням $f: G \rightarrow S_1$. Принаймні одне висяче ребро деякої зірки $St_{n_i}(v_i), v_i \in \partial s_1' \setminus (\partial s_2' \cap f_1(\{v_i\}_{i=1}^k))$, вкладатиметься продовженим вкладенням f_1 на недвоклітці r , т.то приклеєній ленті до S_1 . Ототожнивши кожну кінцеву вершину висячого ребра з

множини $\sum_{i=1}^p \{i''\}_{j=1}^{n_j}$ із відповідною точкою множини M , $M = \{i'\}_{i=1}^k$ точок графа G , як це задано φ -перетворенням графів G і $St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)$ на граф \mathfrak{S} , отримаємо вкладення $f + f_1$, $f + f_1 : G + St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1) \rightarrow S_2$, де f_1 - продовжене вкладення. Отримаємо нерівність $\gamma(\mathfrak{S}) \leq 2$. Це означатиме, що $\gamma(\mathfrak{S}) = 2$.

Нехай має місце нерівність $l < k$ для графа G , що містить чи не містить підграф чи частину гомеоморфну K_5 чи $K_{3,3}$. Аналогічно до наведеного вище виконаємо побудову продовженого вкладення f_1 стосовно висячих ребер тих зірок $St_{n_i}(v_i)$, для яких $i \leq l$. Всі інші зірки $St_{n_i}(v_i)$, де $l < i \leq k$, потребуватимуть для розміщення своїх висячих ребер по одній ленті Мебіуса приклеєної одним кінцем до s_1' чи s_2' , а іншим до клітки, яка забезпечує l -сторонній доступ до множини точок M . Ототожнивши кожну кінцеву вершину висячого ребра з множини $\sum_{i=1}^p \{i''\}_{j=1}^{n_j}$ із відповідною точкою множини M , $M = \{i'\}_{i=1}^k$ точок графа G , як це задано φ -перетворенням графів G і $St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)$ на граф \mathfrak{S} , отримаємо вкладення $f + f_1$, $f + f_1 : G + St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1) \rightarrow S_{k-l+1}$, де f_1 - про довжене вкладення. Оскільки граф G неорієнтованого роду 1, то для неорієнтованого роду $\gamma(\mathfrak{S})$ графа \mathfrak{S} маємо нерівність $\gamma(\mathfrak{S}) \leq k - l + 1$. Доведення леми 1 закінчене.

Позначення 2. Будемо називати трикутним променем квазізірки $St_n(G_1)$ з центром-графом G_1 її підграф K_3 утворений з одного ребра графа G_1 та двох суміжних йому ребер із множини $St_n^1(G_1) \setminus G_1^1$ зі спільною вершиною степеня 2. Відмітимо, що такий трикутний промінь символізує приєднання довільної точки ребра як основи трикутника до його третьої вершини.

Лема 2. Нехай граф G має неорієнтований рід 1 та має досяжну на проективній площині множину точок до якої приєднано квазізірку $St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)$ з центром G_1 - площинним зв'язним графом, $G_1^0 = V \cup \{v_i\}_{i=1}^k$, із підмножиною точок $\{v_i\}_{i=1}^k$, що має число досяжності t , $t = t_{G_1}(\{v_i\}_{i=1}^k) = 2$, граф G_1 має k ребер до кожного з яких приєднано n_k трикутних ребер з $\{\{i''\}_{j=1}^{n_j}\}_{i=1}^p$, $k > 2$, та k зірками $St_{n_i}(v_i)$ із висячими вершинами i'' з множини $\{\{i''\}_{j=1}^{n_j}\}_{i=1}^p$, $p \geq k$, що можуть бути спільними для кількох зірок $St_{n_i}(v_i)$, $St_{n_j}(v_j)$, $l \neq j$, як

підграфів квазізірки. Задамо φ -перетворення графів G і $St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1)$ на граф \mathfrak{Z} ,

наступним чином: $\varphi(G + St_{n_1, n_2, \dots, n_k}(G_1), \sum_{i=1}^k (i^i + \{i^i\}_{j=1}^{n_j}) \rightarrow (\mathfrak{Z}, \{i\}_{i=1}^k)$.

Якщо $k = 3$, то $\gamma(\mathfrak{Z}) \leq 2$, а якщо $k = 3l$, то $\gamma(\mathfrak{Z}) \leq 2l$, де $\gamma(\mathfrak{Z})$ - неорієнтований рід.

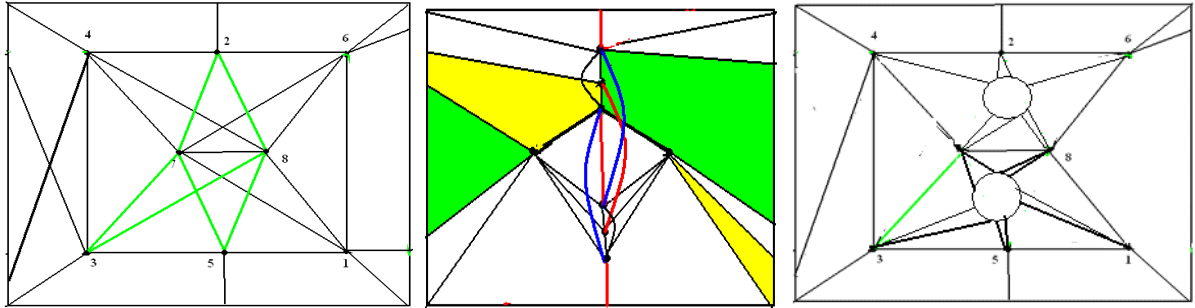


Рис.01. Вкладення графа $K_8 \setminus 2K_3^1$ в N_3 - неорієнтовану поверхню рода 3.

Твердження 1. Для проективної площини S мають місце наступні співвідношення:

- 1) Множина F_S всіх мінорів (мінімальних графів) над проективною площиною S складається із 35 графів на рис.2. 2) $F_S \cap F_{\Omega_1} \cong \{A_1, A_5, C_1, C_{11}, E_1, E_{42}\}$, де F_{Ω_1} множина всіх мінімальних графів над тором Ω_1 , частково наведена в [13].

Твердження 2. Для проективної площини S мають місце наступні властивості:

- 1) Граф $K_{2,3}$ вкладається трикомпонентно (три псевдоклітки) до проективної площини S , має множину всіх точок з числом досяжності 2 та має двосторонній доступ до множини вершин;
- 2) Граф K_4 вкладається трикомпонентно до проективної площини S , має досяжною множину всіх вершин, має множину всіх точок з числом досяжності 2 та має двосторонній доступ до множини вершин, яка має кратність доступу 3;
- 3) Граф $K_{3,3}$ вкладається чотирикомпонентно (2-клітка та три псевдоклітки) до проективної площини S та має досяжною множину всіх вершин, а множина всіх точок має число досяжності 3, причому жодна пара точок не має числа досяжності 2;
- 4) Граф K_5 вкладається шестикомпонентно (2-клітка та 5 псевдокліток) до проективної площини S та має досяжною множину всіх вершин, а множина всіх точок має число досяжності 4, причому жодна пара точок не має числа досяжності 2.

Доведення твердження 2 впливатиме з вкладень в проективну площину графів K_5 , $K_{3,3}$,

K_4 , $K_{2,3}$, наведених на рис.3, де вкладення в проективну площину (зліва направо)

наступних графів: K_5 на чотирьох перших різних за кількістю 2-кліток та єдине для $K_{3,3}$, а K_4 на першому, другому, третьому в середньому ряду, потім наведено вкладення $K_{2,3}$.

Останні два вкладення графів K_5 та $K_{3,3}$ до пляшки Клейна, відповідно.

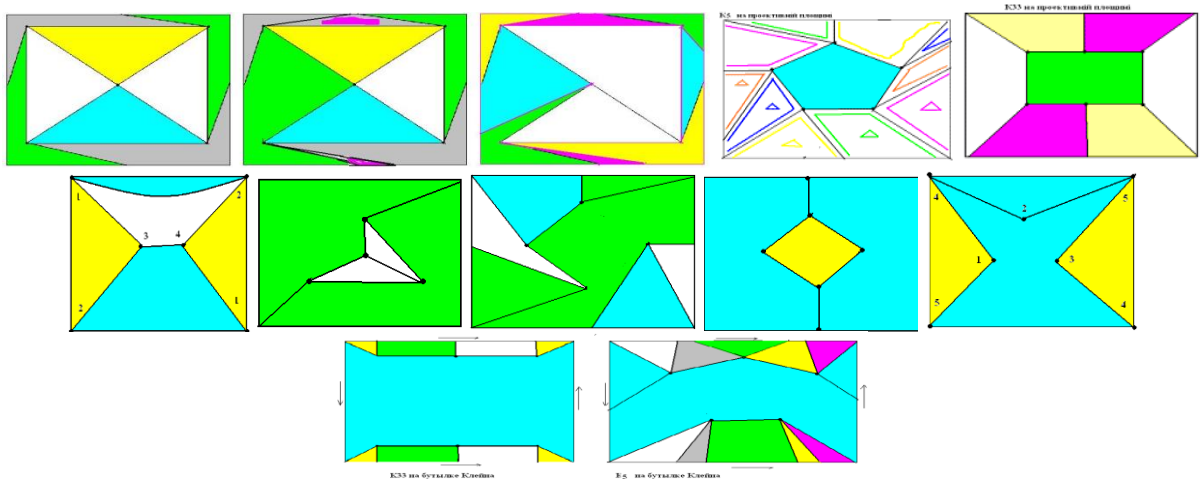


Рис 3. До співвідношень твердження 2.

Твердження 3. Для графів $A_2, B_1, B_3, C_7, D_8, D_{12}$ мінімального базису проективної площини P маємо φ -перетворення задані наступними співвідношеннями (за умови видалення одного з двох кратних ребер, які можливі у графі- φ -образі):

- 1) $\varphi(K_5 - (2', 4') + St_M(K_5 - (2'', 4'')), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (A_2, \{i\}_{i=1}^5)$, де $St_M(K_5 - (2'', 4''))$ є квазізіркою з центром-графом $K_5 - (2'', 4'')$ та двома висячими ребрами $(1'', 6), (5'', 7)$, $M = \{1'', 5''\}$, як це показано на рис. 3.1;
- 2) $\varphi(K_5 + (K_5 - (2'', 4'')), \sum_{i=2}^4 (i' + i'')) \rightarrow (B_1, \{i\}_{i=2}^4)$;
- 3) $\varphi(K_5 - (2', 1') + (K_5 - (2'', 1'')), \sum_{i=1}^2 (i' + i'')) \rightarrow (B_3, \{i\}_{i=1}^2)$, як це показано на рис. 3.1;
- 4) $\varphi(St_{M_1}(K_4) + St_{M_2}(K_4), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (C_7, \{i\}_{i=1}^5)$, де $St_{M_i}(K_4)$ є квазізіркою з центром-графом K_4 та висячими ребрами з множини $M_i, i=1,2, M_1 = \{(3', 5)\}$, $M_2 = \{(1'', 7), (2'', 8), (3'', 6), (4'', 8)\}$, як це показано на рис. 3.2;
- 5) $\varphi(St_{M_1}(K_{2,3}) + St_{M_2}(K_{2,3}), \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_8, \{i\}_{i=1}^6)$, де $St_{M_i}(K_{2,3})$ є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та множиною M_i висячих ребер, $i=1,2, M_1 = \{(1', 10), (2', 10), (3', 9)\}$, $M_2 = \{(4'', 8), (5'', 8), (6'', 8)\}$, як це показано на рис. 3.2;
- 6) $\varphi(K_{3,3} + St_M(K_4), \sum_{i=1}^4 (i' + i'')) \rightarrow (D_{12}, \{i\}_{i=1}^4)$, де $St_M(K_4)$ - квазізірка з центром-графом K_4 та двома висячими ребрами із множини $M, M = \{(1'', 5), (2'', 8)\}$;

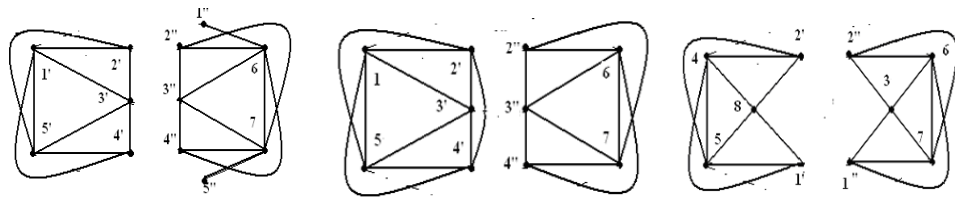


Рис. 3.1. Зліва-направо, перші два графи для ϕ -перетворення на граф A_2 , наступні два графи для V_1 , а останні два для V_3 .

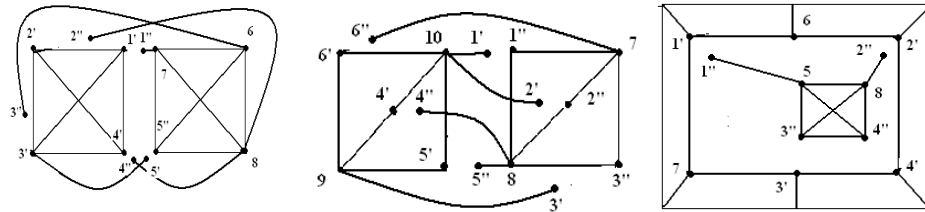


Рис. 3.2. Зліва-направо, перші два графи для ϕ -перетворення на граф C_7 , наступні два графи для D_8 , а останній для D_{12} .

Доведення. Доведемо співвідношення 1) твердження 3. Виконаємо ϕ -перетворення площинного графа $K_5 - e$, де $e = (2', 4')$, та площинного графа квазізірки

$St_M(K_5 - (2'', 4''))$ із центром-графом $K_5 - (2'', 4'')$ та двома висячими ребрами $(1'', 6)$, $(5'', 7)$, $M = \{1'', 5''\}$, на граф A_2 шляхом ототодження кожної пари (i', i'') вершин графа

$G_1 = K_5 - e$, та $G_2 = St_M(K_5 - (2'', 4'')) \setminus \{(1'', 6), (5'', 7)\}$ на вершину i графа A_2 , де $i = 1(1)5$, як

наведено на рис. 3.1. Для цього розглянемо вкладення що наведені на рис.2. Матимемо розміщення на ∂s , $s \in P \setminus f_1(G_1)$, границі клітки (псевдоклітки) множини вершин $\{i''\}_1^5$ та

кінцевих точок ребра e , тобто $t_{G_1}(\{i''\}_1^5, P) = 1$ -досяжність на P множини. До цієї s

вкладемо за допомогою f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$ граф G_2 та визначимо, що $t_{G_2}(\{2'', 4''\})$ -число

досяжності на P множини $\{2'', 4''\}$ дорівнює 2. Таким же є число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^5)$ на

P та всієї множини точок приєднання графа $f_2(G_2)$ до $f_1(G_1)$. Отримаємо нерівність

$\gamma(A_2) \geq 2$. Визначимо ребро u графа G_2 , яке не вкладається до s , бо кінцеві вершини його

мають число досяжності 2. З метою досяжності множини $f_2(\{i''\}_1^5)$ звузімо вкладення

$f_2' = f_2|_{G_2 \setminus u}$ та приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$,

$s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, на границях яких розташована пара вершин ∂u , вважатимемо, що

$\partial u = \{6, 7\}$, де $(1'', 6)$, $(5'', 7)$ висячі ребра квазізірки $f_2'(G_2 \setminus u)$. Для цього ототожнимо із

збереженням напрямку пару різнонаправлених стрілок із цих кліток s', s'' та вкладемо на

цю ленту ребро $f(u)$ разом із $f(1'', 6)$, а $f(5'', 7)$ розмістимо в s' . Отримаємо таким чином

вкладення $f : A_2 \rightarrow S_2$ графа A_2 до пляшки Клейна, причому $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, тобто $\gamma(A_2) \leq 2$.

Співвідношення 1) доведено.

Доведемо співвідношення 2) твердження 2. Позначимо через G_1 граф $K_5 - (2'', 4'')$, а через G_2 граф $K_5 - (2'', 1'')$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2 : G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як звуження одного із чотирьох неізоморфних вкладень графа K_5 , де $s \in P \setminus f_1(G_1)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{2'', 1''\}) = 2$, бо клітка $s = \overline{s \setminus \partial s}$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $\partial s \cap (\partial s' \cup \partial s'') = \emptyset$, кліток s', s'' . Тому, виконавши ϕ -перетворення по двом парам $(2', 1')$ та $(2'', 1'')$, матимемо нерівність $\gamma(B_1) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проєктивної площини на якій множина $f_2(\{2'', 3'', 4''\})$ є досяжною,

$f_2(\{2'', 3'', 4''\}) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню цю недвоклітку

l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=2}^4 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=2}^4$. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$,

$f : B_1 \rightarrow S_2$ графа B_1 до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(B_1) \leq 2$.

Таким чином $\gamma(B_1) = 2$.

Співвідношення 2) доведено.

Доведемо співвідношення 3) твердження 3. Позначимо через G_1 граф $K_5 - (2', 1')$, а через G_2 граф $K_5 - (2'', 1'')$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2 : G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як звуження одного із чотирьох неізоморфних вкладень графа K_5 , де $s \in P \setminus f_1(G_1)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{2'', 1''\}) = 2$, бо клітка $s = \overline{s \setminus \partial s}$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $\partial s \cap (\partial s' \cup \partial s'') = \emptyset$, кліток s', s'' . Тому, виконавши ϕ -перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(B_3) \geq 2$.

Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проєктивної площини на

якій множина $f_2(\{2'',1''\})$ є досяжною, $f_2(\{2'',1''\}) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню цю недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=2}^4 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=2}^4$.

Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f : B_3 \rightarrow S_2$ графа B_3 до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(B_3) \leq 2$. Таким чином $\gamma(B_3) = 2$.

Співвідношення 3) доведено.

Доведемо співвідношення 4) твердження 3. Позначимо через G_1 граф $St_{M_1}(K_4)$, а через G_2 граф $St_{M_2}(K_4)$, де $St_{M_i}(K_4)$ є квазізіркою з центром-графом K_4 та висячими ребрами з множини M_i , $i=1,2$, $M_1 = \{(3',5)\}$, $M_2 = \{(1'',7), (2'',8), (3'',6), (4'',8)\}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин M_1

розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2 : G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як звуження одного із трьох неізоморфних вкладень графа K_4 до P , де $s \in P \setminus f_1(G_1)$.

Матимемо число досяжності $t_{G_2}(M_2) = 2$, бо клітка $s = \overline{s \setminus \partial s}$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $\partial s \cap (\partial s' \cup \partial s'') = \emptyset$, кліток s', s'' . Тому, виконавши ϕ -перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(C_7) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$,

шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проєктивної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^5)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^5) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2'

зробивши зовнішньою гранню цю недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1}^5 (i' + i'')$ на

$\{i\}_{i=1}^5$ та вклавши всі висячі ребра з $M_2 = \{(1'',7), (2'',8), (3'',6), (4'',8)\}$. Отримаємо вкладення

$f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f : C_7 \rightarrow S_2$ графа C_7 до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(C_7) \leq 2$. Таким чином $\gamma(C_7) = 2$. Співвідношення 4) доведено.

Доведемо співвідношення 5) твердження 3. Позначимо через G_1 граф $St_{M_1}(K_{2,3})$, а через G_2 граф $St_{M_2}(K_{2,3})$, де $St_{M_i}(K_{2,3})$ є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та висячими ребрами з множини M_i , $i=1,2$, $M_1 = \{(1',10), (2',10), (3',9)\}$, $M_2 = \{(4'',8), (5'',8), (6'',8)\}$.

Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин $\{1',2',3'\}$ розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2 : G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як звуження одного із трьох неізоморфних вкладень графа $K_{2,3}$ до P , де

$s \in P \setminus f_1(G_1)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{4'', 5'', 6''\}) = 2$, бо клітка $s = \overline{s} \setminus \partial s$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $\partial s \cap (\partial s' \cup \partial s'') = \emptyset$, кліток s', s'' . Тому, виконавши φ -перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(D_8) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проєктивної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^5)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^6) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню цю недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1}^6 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1}^6$ і вклавши висячі ребра з $\{(4'', 8), (1'', 10)\}$ на приклеєну ленту. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f : D_8 \rightarrow S_2$ графа C_7 до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(D_8) \leq 2$. Таким чином $\gamma(D_8) = 2$.

Співвідношення 5) доведено.

Доведемо співвідношення 6) твердження 3. Позначимо через G_1 граф $K_{3,3}$, а через G_2 граф $St_M(K_4)$, який є квазізіркою з центром-графом K_4 та висячими ребрами з множини M , $M = \{(2'', 8), (1'', 5)\}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2 : G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як звуження одного неізоморфного вкладення графа $K_{3,3}$ до P , де $s \in P \setminus f_1(G_1)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^4) = 2$, бо клітка s , $s = \overline{s} \setminus \partial s$, є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$ кліток s', s'' , причому $\partial s \cap (\partial s' \cup \partial s'') = \emptyset$. Тому, виконавши φ -перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(D_{12}) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проєктивної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^4)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^4) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1,3,4}^4 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1,3,4}^4$ і вклавши висяче ребро $f_2'(2'', 8)$ на приклеєну ленту та ототожнимо пару вершин $(2', 2'')$ на 2 . Отримаємо вкладення

$f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f : D_{12} \rightarrow S_2$ графа D_{12} до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(D_{12}) \leq 2$. Таким чином $\gamma(D_{12}) = 2$. Співвідношення б) доведено.

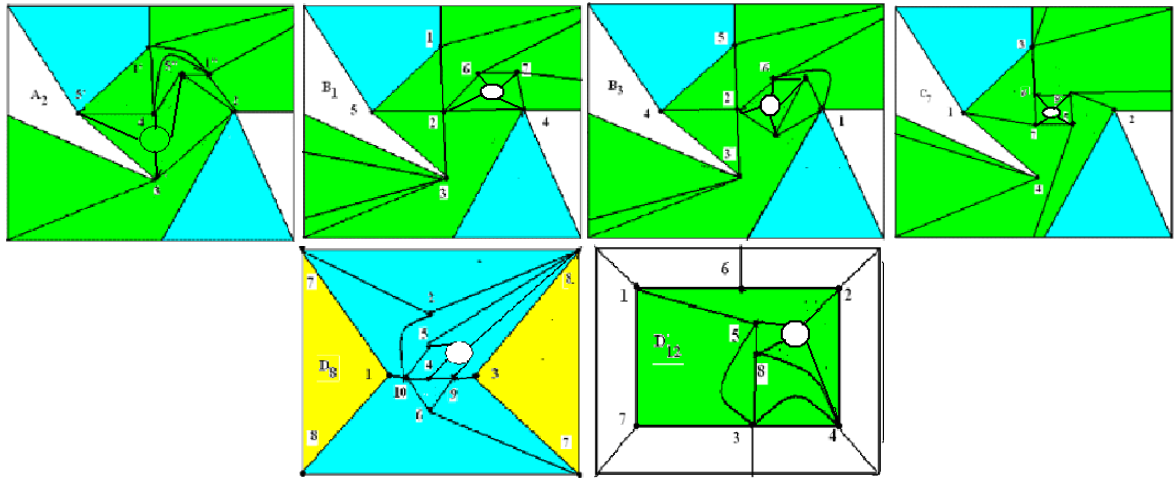


Рис.3.3. Схематичні вкладення графів A_2 , B_1 , B_3 , C_7 , D_8 та D_{12} в поверхню Клейна, за умови видалення кратних ребер.

Твердження 4. Для графів D_{17} , E_{13} , E_{18} , E_{22} із мінімального базису проективної площини маємо ϕ -перетворення задані наступними формулами, за умови видалення одного з двох кратних ребер, які можливі в новоствореному графі:

- 1) $\phi(K_4 + St_M(K_4), \sum_{i=1}^4 (i' + i'')) \rightarrow (D_{17}, \{i\}_{i=1}^4)$, де $St_M(K_4)$ є квазізіркою з центром-графом K_4 та висячими ребрами з M , $M = \{(1'', 5), (2'', 8), (3'', 6), (4'', 7)\}$, як це показано на рис. 4.1;
- 2) $\phi(K_{3,3} + K_{2,3}, \sum_{i=1}^3 (i' + i'')) \rightarrow (E_{13}, \{i\}_{i=1}^3)$;
- 3) $\phi(K_{3,3} + St_M(K_{2,3}), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (E_{18}, \{i\}_{i=1}^5)$, де $St_M(K_{2,3})$ є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та множиною M висячих ребер, $M = \{(3'', 9), (5'', 7)\}$, як показано на рис. 4.1;
- 4) $\phi(St_{M_1}(K_{2,3}) + St_{M_2}(K_{2,3}), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (E_{22}, \{i\}_{i=1}^5)$, де $St_{M_i}(K_{2,3})$ є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та множиною M_i висячих ребер, $i=1, 2$, $M_1 = \{(3', 9)\}$, $M_2 = \{(4'', 7), (3'', 6), (2'', 8)\}$, як це показано на рис. 4.1;

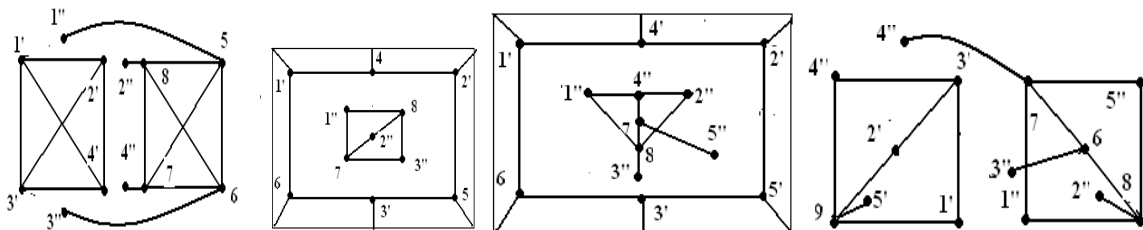


Рис. 4.1. Зліва-направо, перші два графи для ϕ -перетворення на граф D_{17} , наступні два графи для E_{13} та E_{18} , а останні два для E_{22} .

Доведення. Доведемо формулу 1) твердження 4. Позначимо через G_1 граф K_4 , а через G_2 граф $St_M(K_4)$, який є квазізіркою з центром-графом K_4 та висячими ребрами з множини M , $M = \{(1'',5), (2'',8), (3'',6), (4'',7)\}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , $s \in P \setminus f_1(G_1)$, як вкладення графа K_4 в P та трьох висячих ребер до зовнішньої грані s' , а ребро $(4'',7)$ вкладене до s'' , де $\{s', s''\} \subset s \setminus f_2(G_2)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^4) = 2$, бо клітка $s = \overline{s} \setminus \partial s$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$ кліток s', s'' . Виконавши ϕ -перетворення співвідношення 2) матимемо нерівність $\gamma(D_{17}) \geq 2$.

Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проєктивної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^4)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^4) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1,3,4}^4 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1,3,4}^4$ і вкладемо висяче ребро $f_2'(4'',7)$ на приклеєну ленту та ототожнимо пару вершин $(4', 4'')$ на 4. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f: D_{17} \rightarrow S_2$ графа D_{17} до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(D_{17}) \leq 2$. Таким чином $\gamma(D_{17}) = 2$.

Формула 1) твердження 4 доведена.

Доведемо формулу 2) твердження 3. Позначимо через G_1 граф $K_{3,3}$, а через G_2 граф $K_{2,3}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин $\{1', 2', 3'\}$ розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як вкладення графа $K_{2,3}$ до площини, де $s \in P \setminus f_1(G_1)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^3) = 2$, бо клітка $s = \overline{s} \setminus \partial s$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $2'' \in \partial s' \setminus \partial s''$, кліток s', s'' . Тому, виконавши ϕ -перетворення формули 2), матимемо нерівність $\gamma(E_3) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок, причому посередині однієї з цих стрілок розмістимо вершину $2'$, а $2''$ на середині іншої. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проєктивної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^3)$ є досяжною,

тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^3) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню цю недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1}^3 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1}^3$. Отримаємо вкладення

$f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f : E_3 \rightarrow S_2$ графа E_3 до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(E_3) \leq 2$. Таким чином $\gamma(E_3) = 2$. Формула 2) доведена.

Доведемо формулу 3) твердження 4. Позначимо через G_1 граф $K_{3,3}$, а через G_2 граф $St_M(K_{2,3})$, який є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та всіячими ребрами з множини M , $M = \{(2'', 8), (5'', 7)\}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2 : G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як вкладення графа $K_{2,3}$ до двоклітки площини, $s \in P \setminus f_1(G_1)$, причому висяче ребро $(2'', 8)$ розміщене на зовнішній грані s' , а до s'' вкладене ребро $(5'', 7)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^5) = 2$, бо клітка $s = \bar{s} \setminus \partial s$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $5'' \in \partial s' \setminus \partial s''$, $\{i''\}_1^4 \in \partial s'$. Тому, виконавши ϕ -перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(E_{18}) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$,

$s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток, так щоб вершина $5''$ була серединою одної стрілки, а $5''$ -серединою іншої стрілки. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проєктивної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^4)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^4) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню недвоклітку l та ототожнимо пари вершин

$\sum_{i=1,3,4}^5 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1,3,4}^5$ і вклавши висяче ребро $f_2'(5'', 7)$ на приклеєну ленту та ототожнимо

пару вершин $(5', 5'')$ на 5. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f : E_{18} \rightarrow S_2$ графа E_{18} до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(E_{18}) \leq 2$. Таким чином $\gamma(E_{18}) = 2$. Формулу 3) доведено.

Доведемо формулу 4) твердження 4. Позначимо через G_1 граф $St_{M_1}(K_{2,3})$, який є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та множиною всіячих ребер M_1 , $M_1 = \{(5', 9)\}$, а через G_2 граф $St_{M_2}(K_{2,3})$, який є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та множиною всіячих ребер M_2 , $M_2 = \{(4'', 7), (3'', 6), (2'', 8)\}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s ,

та вкладення $f_2, f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_1 до цієї s , як вкладення графа $K_{2,3}$ до двоклітки площини, $s \in P \setminus f_1(G_1)$, причому висячі ребра $(2'', 8), (4'', 7), (5'', 9)$ розміщені на зовнішній грані s' , а до s'' вкладене ребро $(3'', 6)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^5) = 2$, бо клітка $s = \bar{s} \setminus \partial s \in$ двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $5'' \in \partial s'' \setminus \partial s', \{i''\}_1^4 \in \partial s'$. Тому, виконавши ϕ -перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(E_{22}) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2), s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток, так щоб вершина $5''$ була серединою одної стрілки, а $5''$ -серединою іншої стрілки. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проєктивної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^4) \in$ досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^4) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1}^5 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1}^5$ і вклавши висяче ребро $f_2'(5'', 7)$ на приклеєну ленту та ототожнимо пару вершин $(5', 5'')$ на 5 . Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2', f: E_{22} \rightarrow S_2$ графа E_{22} до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(E_{22}) \leq 2$. Таким чином $\gamma(E_{22}) = 2$. Формулу 4) доведено. Доведення твердження 4) закінчено.

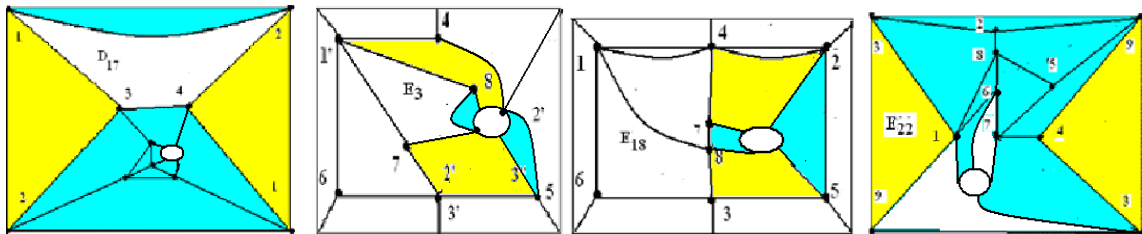


Рис.4.2. Схематичні вкладення графів D_{17}, E_3, E_{18} та E_{22} в поверхню Клейна, за умови видалення одного з двох кратних ребер, які можливі у графі.

Теорема 1. Зв'язна граф-обструкція неорієнтованого роду 2 є результатом ϕ -перетворення не більше ніж двох зв'язних графів X, Y , які задовольняють одному з наступних випадків:

- 1) графи X, Y гомеоморфні K_5 чи $K_{3,3}$, і множини точок приєднання є досяжними;
- 2) графи-квазізірки X, Y із центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання з числом досяжності 2;
- 3) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ та вкладений до проєктивної площини Σ , а інший X - граф-квазізірка із центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання до графа Y із числом досяжності 2;

4) граф $X \in K_5 \setminus e$ чи $K_{3,3} \setminus e$ вкладеними до проективної площини, а граф Y графом-квазізіркою з центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання з числом досяжності 2.

Доведення теореми 1. Нехай G довільний граф –обструкція проективної площини.

Тоді за допомогою перетворень методу компонент [8] отримаємо з графа G базисний граф G' , який може бути, або 2-зв'язним і для нього матимуть місце твердження 3 та 4, або не 2-зв'язним і для нього матимуть місце, або $G' = A_1$, або $G' = A_5$. Доведення закінчено.

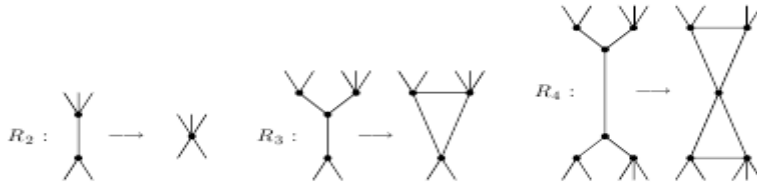


Рис 6. Перетворення R_i методу компонент, де $i=2,3,4$, R_1 -операція видалення ребра.

Терема 2. Довільна граф-обструкція \mathfrak{S} неорієнтованого роду $\gamma(\mathfrak{S})$, $\gamma(\mathfrak{S}) > 1$ є результатом ϕ -перетворення не більше ніж двох зв'язних графів X, Y , якщо $\gamma(\mathfrak{S}) = 2$ і виконується одна з наступних умов:

- 1) граф X граф-обструкція неорієнтованого роду $\gamma(X)$, $\gamma(X) = \gamma(\mathfrak{S}) - 1$, граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$, і множини точок приєднання є досяжними;
- 2) графи-квазізірки X, Y із центрами гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання з числом досяжності 2;
- 3) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ та вкладений до проективної площини Σ , а інший X - граф-квазізірка із центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання до графа Y із числом досяжності 2;
- 4) граф $X \in K_5 \setminus e$ чи $K_{3,3} \setminus e$ вкладеними до проективної площини, а граф Y графом-квазізіркою з центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання з числом досяжності 2.

Доведення. Нехай G - довільний зв'язний граф є граф-обструкцією проективної площини S_1 . Тоді довільне ребро u графа G має розміщуватися деяким мінімальним вкладенням $f, f : G \rightarrow S_2$ на ленті Мебіуса прикріпленої до S_1 , яка є результатом ототодження двох протилежно направлених стрілок, взятих із середини двох клітин s_1, s_2 з множини $S_2 \setminus f|_{G \setminus u}$ та без точок їхніх границь, а множина ребер $G^1 \setminus u$ може не мати підмножини з ребер K_5^1 чи $K_{3,3}^1$. Вкладення $f|_{G \setminus u} : G^1 \setminus u \rightarrow S_1$ розміщує $G^1 \setminus u$ на проективній площині. З іншого боку, жодна пара точок графів K_5 чи $K_{3,3}$ не має числа

досяжності 2, бо інакше мали б, принаймні, один з графів на множинах ребер $K_5^1 \cup u$ чи $K_{3,3}^1 \cup u$ з неорієнтованим родом 2, що неможливо. Якщо в графі G є підграф чи частина H гомеоморфні K_5 чи $K_{3,3}$, то існуватиме підграф M графа G , якому належатиме, принаймні, одна з кінцевих вершин ребра u графа G та підмножина $G^1 \setminus H^1 \cup X$, де $X \subset H^1$, із, принаймні, одним ребром, що не належатиме підграфу H . Зауважимо на те, що підграф M має вкладатися в s -одну із клітин мінімального вкладення підграфа H в S_1 без перетину пари ребер, які належать до пари простих ланцюгів, що парами кінцевих точок розділятимуть одна одну на границі клітки до якої вкладатимуться, або завдяки двосторонньому доступу до пари цих вершин.

Якщо в $G \setminus u$ є підграф чи частина H , гомеоморфні K_5 чи $K_{3,3}$, то існуватиме площинний підграф M з числом досяжності множини вершин не менше 2, заданий на непустій підмножині множині ребер $G^1 \setminus H^1 \cup X$, де $X \subset H^1$, та, принаймні, одним ребром, яке не належатиме підграфу H , якому належатиме, принаймні, одна з кінцевих точок ребра u графа G .

Якщо в $G \setminus u$ для деякого ребра u немає підграфа чи частини H гомеоморфної K_5 чи $K_{3,3}$, то існуватиме площинний підграф M графа G із множиною вершин, що має на проєктивній площині число досяжності множини вершин не менше 2, бо кінцеві вершини не належать до границі однієї з клітин, т.то множина du має число досяжності 2. У разі припущення, що видалення довільного ребра u приводить до відсутності в $G \setminus u$ підграфа H гомеоморфного K_5 чи $K_{3,3}$, то граф $G \setminus u$ матиме множини вершин з числом досяжності 2 та матиме площинний підграф M' гомеоморфний K_4 чи $K_{2,3}$, тому виконуючи додавання довільного ребра отримаємо $M'+u$ - єдиний підграф гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$, тобто граф G вкладатиметься до проєктивної площини, що є протиріччям умові теореми; припущення неправильне.

Якщо видалення деякого ребра u графа G призводить до того, що $G \setminus u$ не матиме частини чи підграфа H , гомеоморфних K_5 чи $K_{3,3}$, то існуватиме площинний підграф M з числом досяжності множини вершин не менше 2, якому належатимуть кінцеві вершини ребра u , та вкладений в проєктивну площину так, що множина кінцевих вершин ребра u матиме число досяжності 2.

Таким чином, для графа $G \setminus u$ маємо два наступні варіанти:

1) є підграф чи частина гомеоморфні K_5 чи $K_{3,3}$,

2) немає підграфа чи частини гомеоморфної K_5 чи $K_{3,3}$.

Розглянемо варіант 1), який має наступні два підваріанти: а) \in підграф чи частина гомеоморфні $K_{3,3}$; б) \in підграф чи частина гомеоморфні K_5 .

Розглянемо підваріант а). Позначимо через H , $H \cong K_{3,3}$, через f мінімальне вкладення $f: G \setminus u \rightarrow S_1$, яке є звуженням деякого мінімального вкладення f' графа G до S_2 та $f|_H$ - єдине мінімального вкладення графа H до S_1 . Тоді підграф M , що містить решту ребер графа G розміщується в середині двоклітки s , $s \in S_1 \setminus f|_H(H)$, та приєднується до H принаймні однією вершиною. Оскільки граф $K_{3,3}$ має двократний доступ до довільної пари точок на несуміжних ребрах, то підграф M має два різних простих ланцюги l_1, l_2 довжини 2, які в графі $f(G)$ на проєктивній площині перехрещуються між собою (у випадку продовження вкладення шляхом $f(u) \subset s$) та з'єднуються, принаймні, ребром u . Ланцюги l_1, l_2 довжини 2 містять, або обидві кінцеві вершини ∂u та вкладенням f розміщуються в різних псевдоклітках підграфа $f(H)$, реалізуючи на проєктивній площині число досяжності 2 та двократний доступ для множини ∂u , або містять тільки одну кінцеву вершину ребра u , а іншу містить підграф H . Зауважимо, що припущення про ланцюги l_1, l_2 довжини 1 означатиме вкладення графа $f(H \cup l_1 \cup l_2 \cup u)$ до S_1 , тобто суперечить тому, що граф G роду 2. Таким чином існуватиме φ -перетворення графів H та $St(M)$ задане так, як у виписаних в умові теореми випадках 1) чи 3). Стверджуємо, що множина кінцевих вершин довільного ребра u графа G належить до множини точок або найменшого по включенню підграфа H'' графа G гомеоморфного K_4 чи $K_{2,3}$, або найбільшого по включенню підграфа H' графа G гомеоморфного $K_5 \setminus e$ чи $K_{3,3} \setminus e$.

Розглянемо підваріант б). Нехай в графі $G \in H$ - підграф чи частина гомеоморфні K_5 .

Позначимо через H , $H \cong K_5$, через f мінімальне вкладення $f: G \setminus u \rightarrow S_1$, яке є звуженням деякого мінімального вкладення f' графа G до S_2 та $f|_H$ - мінімального вкладення графа H до S_1 . Тоді підграф M , що містить решту ребер графа G розміщується в середині двоклітки s , $s \in S_1 \setminus f|_H(H)$, та приєднується до H принаймні однією вершиною. Оскільки граф K_5 не має двократного доступу до довільної пари точок на несуміжних ребрах, то підграф M має два різних простих не вироджених ланцюги l_1, l_2 , які в графі $f(G)$ на проєктивній площині мають довжину 2 та перехрещуються між собою (у випадку продовження вкладення шляхом $f(u) \subset s$) і з'єднуються, принаймні, ребром u , або мають довжину 1 та перехрещуються в середині двоклітки графа H , що

вкладений до проективної площини. Таким чином у випадку 1) існуватиме ф-перетворення графа H та квазізірки $St(M)$, яка може вироджуватися в пару розділених ребер, задане так, як у виписаних в умові теореми випадках 1) чи 3).

Розглянемо варіант 2). Видалення довільного ребра u призводить до появи в $G \setminus u$ найменшого по включенню підграфа чи частини гомеоморфної $K_5 \setminus u$ або $K_{3,3} \setminus u$, позначеної через H_1 . Через H_2 позначимо підграф чи частину породжену рештою ребер $G^1 \setminus H_1^1$ та всіма тими ребрами, що з'єднують спільні кінцеві вершини ребер з H_i , $i = 1, 2$, графа $G \setminus u$. Позначимо через W підмножину спільних вершин, $W = H_1^0 \cap H_2^0$, а через $G \setminus u[W]$ породжений множиною підграф графа $G \setminus u$. Виконаємо розщеплення кожної вершини w_i на пару вершин (w_{i1}, w_{i2}) , так щоб виконувалася умова

$$\deg_{G \setminus u}(w_i) = \deg_{H_1}(w_{i1}) + \deg_{H_2}(w_{i2}).$$

Позначимо через W_i , $i = 1, 2$, підграф графа H_i породжений множиною вершин $\{w_{ij}\}_{j=1}^{k_i}$ та множиною ребер, що утворилися при розщепленні вершин спільних ребер, причому в одному з W_i можлива відсутність копії спільного ребра. Згідно варіанту 2) маємо наступне: а) не існуватиме простого ланцюга який належатиме до H_1 кінцевими вершинами, а його ребра та інші вершини належатимуть до H_2 , б) існуватиме в H_i , принаймні, пара різних простих ланцюгів $l_i(u_i, w_1)$, $i = 1, 2$, що починаються в вершині u_i та закінчуються в w_1 , $w_1 \in W$.

Наступні два підваріанти є вичерпними:

а) $f(G \setminus u)$ є однозв'язним підграфом; б) $f(G \setminus u)$ є блоком;

Розглянемо підваріант 1) варіанта 2). Позначимо через f мінімальне вкладення графа G до S_2 , а через H_1 підграф $f|_{H_1}(H_1)$ чи частину графа $f(G \setminus u)$, де $u = (u_1, u_2)$, гомеоморфну $K_5 \setminus u$ чи $K_{3,3} \setminus u$ та яка містить вершину u_1 ребра $f(u)$ разом з всіма кінцевими вершинами ребер суміжних з u_1 і вкладена до клітини s_1 , $s_1 \in S_1 \setminus f|_{G \setminus u}(G \setminus u)$. Позначимо через H_2 підграф чи частину із множиною ребер $f(G^1 \setminus u) \setminus H_1^1$, яка містить вершину u_2 ребра $f(u)$ та всі кінцеві вершини ребер суміжних з u_2 та всі ребра графа $G \setminus u$, що з'єднують їх. Оскільки в $f(G \setminus u)$ існує простий ланцюг $l = l(u_1, u_2)$, що з'єднує кінцеві вершини ребра u та містить також спільну вершину v цих H_i , $i = 1, 2$, і множина $\{u_1, u_2\}$ має на проективній площині число досяжності 2, то стверджуємо, що $\{v, u_2\}$ матиме на проективній площині число досяжності 1. Якби припустили, що $\{v, u_2\}$ матиме на проективній площині число досяжності 2, то тоді мали б підграф $f|_{H_1}(H_1)$ який

неможливо було би вкласти до клітини s_1 . Це означатиме, що H_2 є площинним графом – квазізіркою із деяким центром M , який містить вершини з $\{v, u_2\}$ графа $f(G \setminus u)$ та гомеоморфним одному з наступних графів: $K_5 \setminus u$, $K_{3,3} \setminus u$, K_4 , $K_{2,3}$.

Розглянемо підваріант 2) варіанта 2). Позначимо через f мінімальне вкладення графа G до S_2 , а через H_1 підграф чи частину графа $f(G \setminus u)$, де $u = (u_1, u_2)$, гомеоморфну $K_5 \setminus u$ чи $K_{3,3} \setminus u$ та яка містить вершину u_1 ребра $f(u)$ разом з всіма кінцевими вершинами ребер суміжних з u_1 і вкладає до S_1 . Для визначеності вважатимемо, що $f|_{H_1}(H_1)$ вкладає до проєктивної площини S_1 так, що множина $\{u_1, w_1\}$, $w_1 \in W$, розміщена на границі клітини s_1 , $s_1 \in S_1 \setminus f|_{G \setminus u}(H_1)$, тобто має на проєктивній площині число досяжності 1. Позначимо через H_2 підграф чи частину $G \setminus u$ із множиною ребер $f(G \setminus u) \setminus H_1$, вклавених в клітини $s_1 \cup \partial s_1$, який містить вершину u_2 та всі кінцеві вершини ребер суміжних з u_2 , а також всі ребра підграфа H_1 , що з'єднують спільні вершини обох цих H_i , $i = 1, 2$, графа $G \setminus u$. Підграф H_2 буде площинним з множиною вершин, що матиме число досяжності не менше 2, та вклавеним в середину клітини s_1 , $s_1 \in S_1 \setminus f|_{G \setminus u}(H_1)$, так, що $f(\{u_1, w_{11}, w_{12}\}) \subset \partial s_1$ та $f(\{u_2, w_{21}, w_{212}\}) \not\subset s_1$, де $\{w_1, w_2\} \subset H_1 \cap H_2$. З умови двозв'язності графа $G \setminus u$ випливає існування в підграфі H_2 принаймні пари різних простих ланцюгів $l_i = l(u_1, u_2)$ довжин не менше 2, $i = 1, 2$, що з'єднують кінцеві вершини ребра u та містять принаймні дві різні вершини w_i , які є спільними для підграфів H_i , $i = 1, 2$. Доведення закінчене..

Визначення 6. Граф K є t -мінімальним роду γ , якщо число досяжності множини вершин цього графа дорівнює t та при видаленні чи стисканні в точку довільного ребра зменшується число досяжності множини вершин нового графа чи зменшується рід нового графа утвореного з K . Наприклад, граф $K_6 \setminus K_3^1$ -2-мінімальний роду 1, тобто $K_{3,3}$ з додатковими трьома ребрами на вершинах однієї з двох його долей, або це граф $K_5 \setminus e$ із додатковою вершиною степеня 3, що суміжна з трьома вершинами графа $K_5 \setminus e$ із числом досяжності 2.

Визначення 7. Граф K є t -мінімальним роду 1, $t > 0$, відносно заданої підмножини N множини точок цього графа при вкладенні до клітки s , $s \in \sigma \setminus K$, границя якої може мати цикломатичне число $p_1(\partial s)$, $p_1(\partial s) \geq 0$, якщо число досяжності $t_K(N, \sigma_1)$ підмножини точок N цього графа дорівнює t та при видаленні довільного ребра e графа K матимемо або $t_K(N, \sigma_1) > t_{K \setminus e}(N, \sigma_1)$, або $\gamma(K \setminus e) = 0$.

Лема 1. Нехай граф G є ϕ -образом графів-обструкцій G_1 та G_2 при ϕ -перетворенні визначеному наступним чином: $\phi(G_1 + G_2, \sum_{i=1}^2 (e_i + e_2)) \rightarrow (G, e)$, де $e = (a, b)$, $e \in G^1$. $e_i = (a_i, b_i)$ є ребром, або частиною ребра графа G_i , $i = 1, 2$.

Для орієнтованого роду $\gamma(G)$ мають місце наступні твердження:

- 1). Якщо принаймні одна кінцева вершина кожного з ребер e_i не матиме двостороннього доступу, то маємо рівність $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$;
- 2). Якщо кожна кінцева вершина одного з ребер e_i має двосторонній доступ, то матимемо рівність $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1$;

Доведення. Доведення лема 1 для довільних графів-обструкцій G_1 та G_2 аналогічне доведенню для двох графів K_5 , виконаному на рис. 1.2.1. Наведемо на рис. 1.2.2 доведення тверджень лема 1.3. для двох вкладених (ребра K_4 сині) в тор графів, зліва-направо, отриманих з двох пар графів $(K_4, K_{3,3})$, (K_4, K_5) шляхом ϕ -перетвореннями заданим на парі ребер цих пар. Відмітимо, що наявність двостороннього доступу до ототожнених кінцевих вершин ребра означатиме відсутність додаткової 2-ручки. Так для графа K_5 вкладеного до Σ_2 -пляшки Клейна із двостороннім доступом до двох вершин (завдяки наявності кольорової клітини в яку можливо вкласти дві зірки із суміжними центрами на 5-ти та 6-ти ребрах-променях) та отримати мінімальне вкладення графа $K_7 \setminus e$ до Σ_2 .

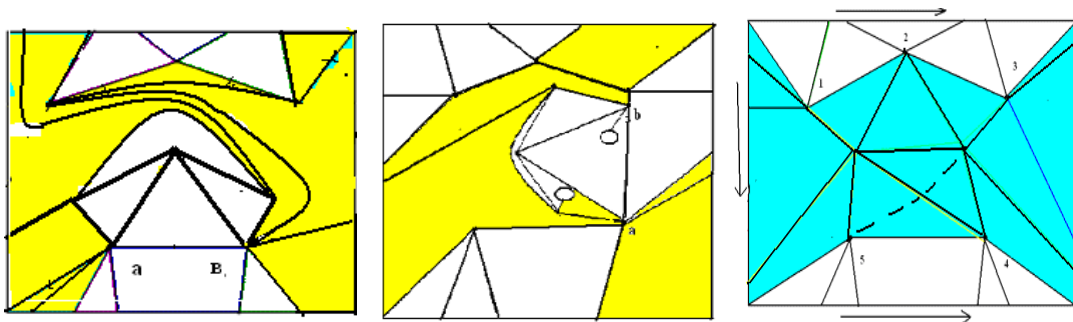


Рис.5. До тверджень лема 1 наведено два перші графи (зліва-направо), що отримані з двох графів K_5 двома наступними ϕ -перетвореннями: 1) по парі ребер, 2) по ребру $e = (a, b)$ та частині ребра u , відповідно, де кольоровою є не 2-клітка вкладення в тор графа K_5 , до якої вкладено інший K_5 та виконано склейку. 3) Наведено мінімальне вкладення графа $K_7 \setminus e$ до Σ_2 -пляшки Клейна.

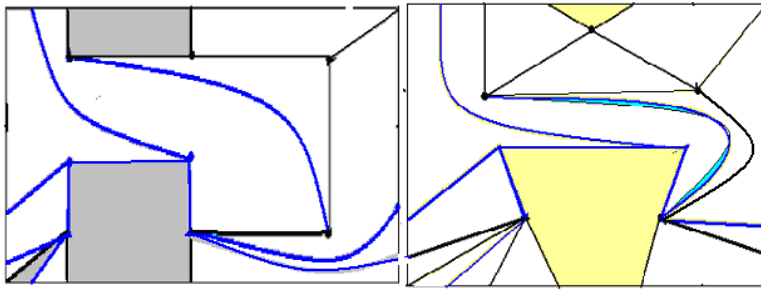


Рис. 6. Наведемо до тверджень леми 1 два вкладені в тор графи (зліва-направо) отримані з двох пар графів $(K_4, K_{3,3})$, (K_4, K_5) φ -перетвореннями на парах ребер.

Лема 2. Нехай граф G є φ -образом графів-обструкцій G_1 та G_2 при φ -перетворенні визначеному наступним чином: $\varphi(G_1 + G_2, \sum_{i=1}^2 (e_1 + e_2)) \rightarrow (G, e)$, де $e = (a, b)$, $e \in G^1$, $e_i = (a_i, b_i) \in$ ребром, або частиною ребра графа G_i , $i = 1, 2$.

Тоді для неорієнтованого роду $\gamma(G)$ не виконуються твердження леми 1.

Доведення. Дійсно із наведених на рис. 7 вкладень до проективної площини графів K_5 та $K_{3,3}$ видно відсутність двостороннього доступу до довільної підмножини їхніх вершин.

Але для $K_5 / (4,7)$ є двосторонній доступ до пари суміжних вершин 3, 4, 7, який не впливає на рід графа A_2 .

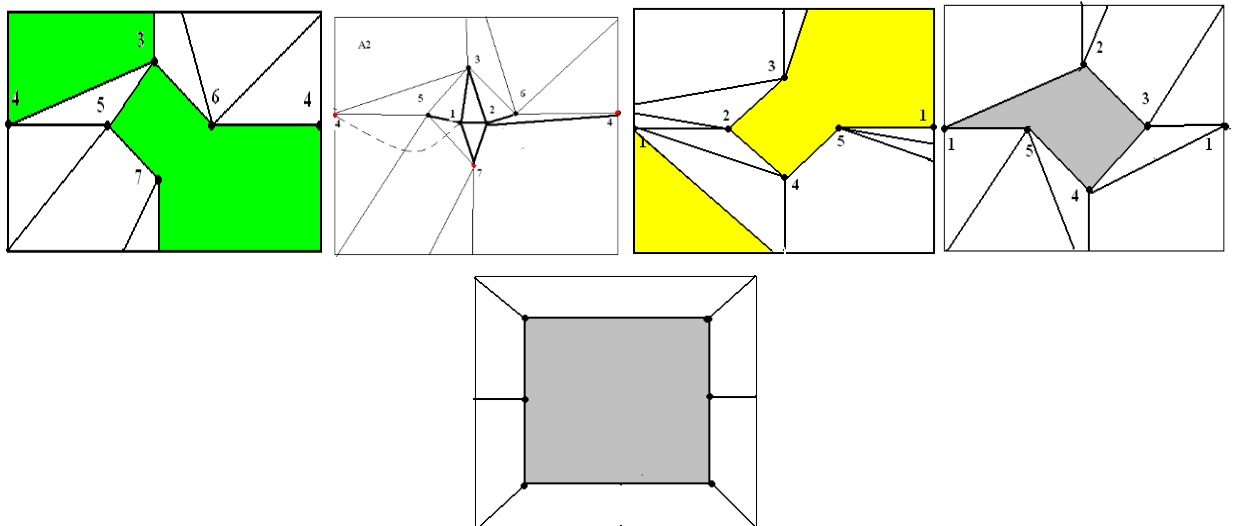


Рис.7. Мінімальні вкладення до проективної площини графів $K_5 / (4,7)$, $A_2 / (1,4)$, K_5 .

Твердження 5. Якщо площинний граф H із виділеною підмножиною точок X , що має число досяжності $t, t \leq 2$, та принаймні одним лишнім ребром відносно властивості 2-мінімальності при вкладенні (без перетину ребер у внутрішніх точках) до тору чи його не двоклітці, або на проективній площині чи її псевдоклітці, може за певних умов набувати властивості 2-мінімальності роду 1, то має місце наступне співвідношення:

Видалення ребра в такому площинному графі H призводить до збільшення на 1 числа двостороннього доступу до кінцевих точок видаленого ребра.

Наприклад, граф K утворений із K_4 у якого один трикутник K_3 має три пари 2-кратних ребер 1-підрозділених вершинами з множини $\{v_i\}_1^3$, які разом з вершиною $v, v \in K_4 \setminus K_3$ утворюють множини з числом досяжності 2, та при не 2-клітковому вкладенні в тор граф K є 2-мінімальним. Для проективної площини таким буде граф I утворений з K_3 у який має три пари 2-кратних ребер 1-підрозділених вершинами з $\{v_i\}_1^3$, що утворюють множини з числом досяжності 2 та при не 2-клітковому вкладенні в проективну площину граф I є 2-мінімальним.

Література

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, 1971, 378с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ НАНУ, Киев, 1970.
3. Brown T. Duke R. An irreducible graph consisting a single block. *J. Math. and Mech.* 1966, 15, № 1, 129–135.
4. Joachim E. Minimale nicht in die Ringfläche einbettbare Graphen. *Elem. Math.* 1978, 33, № 3, 57 – 61.
5. Archdeacon Dan. A Kuratowski theorem for the projective plane. *J. Graph Theory*, 5(3):243–246, 1981.
6. Glover Henry H., Huneke John P., Wang Chin San. 103 graphs that are irreducible for the projective plane. *J. Combin. Theory Ser. B*, 27(3):332–370, 1979.
7. Eripanov G. V.. Reductin of a plane graph to an edge by star-triangle transformations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 166:19–22, 1966.
8. Flóttotto Anna. Embeddability of graphs into the Klein surface. *PHDissertation. Univ. Bielefeld*, Mai 2010.
9. Петренюк В.І. Властивості мінімальних графів проективної площини. Матеріали міжнародного симпозиуму “Питання оптимізації обчислень (ПОО –XXXV)”, 2009 р., стр 194-197.
10. R. Bodendiek, H. Schumacher, and K. Wagner. Die Minimalbasis der Menge aller nicht in die projektive Ebene einbettbaren Graphen. *J. Reine Angew. Math.*, 327:119–142, 1981.
11. R. Bodendiek, H. Schumacher, and K. Wagner. Über Relationen auf Graphen-mengen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 51:232–243, 1981.
12. R. Bodendiek, H. Schumacher, and K. Wagner. Zur Minimalstruktur der nicht in die projektive Ebene einbettbaren Graphen. *J. Reine Angew. Math.*, 321:99–112, 1981.
13. Hur Suhjin. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. *PhD dissertation, Ohio State University*, 2008.
14. Петренюк В.І. Свойства графов минимальных базисов проективной плоскости и тора. Матеріали 11-го міжнародного семінара „ Дискретная математика и её приложения”, посвящен ного 80-летию со дня рождения академика О.Б.Лупанова, Москва, МГУ, 18-23 июня 2012, с 514-516.
15. Петренюк В.І. Про властивості мінімальних базисів тору та проективної площини. Матеріали 12-го міжнародного науково-практичного семінара , Кіровоград, 14-15 жовтня 2011 року с.81-84.
16. Петренюк В.І. Исследование структуры плоских графов с заданой достижимостью множества точек. Дисертация. ИК НАНУ, Киев, 14 января 1994 р.
17. D. Archdeacon. The Graph theory. *Survey*, 1995.
18. Brunet, Richter, Siran Covering genus reducing edges with Kuratowsky subgraphs, *Journal of graph theory*, vol. 22, 32-45, 1996

3.4. ВЛАСТИВОСТІ МІНІМАЛЬНИХ ГРАФІВ ПРОЕКТИВНОЇ ПЛОЩИНИ

Розглянемо задачу вивчення структурних властивостей мінімальних простих графів G проективної площини, поданих як ϕ -образи деякого простого графа G' та зірки $St_G(v)$. Наведемо короткий огляд результатів робіт, пов'язаних із цією задачею, а саме із описом всіх графів, що неприводяться (або мінімальних), над проективною площиною S . Більш докладний огляд наведений в [15], [30]. Граф G називається таким, що неприводиться

над поверхнею S або $\gamma(G)$ –(irreducible graph) неприведеним, якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх $\gamma(G)$ –неприведених графів позначимо через $\zeta(S)$ та назвемо множиною перешкод (obstructions) для графів, що мають укладтися на заданій поверхні. Граф G мінімальний над S , якщо для будь-якого графа G' , отриманого з графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G') \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх графів мінімальних над S позначимо через F_S . Ці визначення узяті з Brown T. Duke R.A., відповідно. Множина всіх графів, що не приводяться над S містить F_S і характеризує множину всіх графів роду не менше $\gamma(S)+1$. Якщо S 2–сфера, то $F_S = \{K_5, K_{3,3}\}$. Нехай G неорієнтовний граф без петель і кратних ребер ейлерового роду $\gamma(G)$, а S замкнута неорієнтована поверхня роду $\gamma(S)$ без краю, де $\gamma(G) = \gamma(S) + 1$. Для проективної площини S були наступні два напрями робіт, пов'язані з описом графів, які не приводяться над S . Одне з них було засноване Вагнером (Wagner), який ввів поняття мінімального базису для множини скінчених графів, що не можуть бути вкладеними до S і застосував для опису мінімальних графів над проективною площиною. В його з Бодендієком (Bodendiek R) були продовжені дослідження і знайдені деякі мінімальні графи над S . Мінімальний базис множини всіх скінчених графів не вкладених в S , що складається з 12 графів, був побудований. Інший напрям бере початок в роботах Гловера та Ханеке (Glover H., Huneke J. P.). Ними були описані графи, що не приводяться над проективною площиною. В [3] поданий огляд отриманих результатів і було доведено, що є скінчена множина графів, що не приводяться над проективною площиною. Список із 103 таких графів був побудований в [4], де було вказано припущення, що список повний. В [2] представлений план доведення того, що вказаний список є повним, а в дисертації цього автора наведено доведення повноти та він стверджує, що ним побудовано 5 графів, з яких інші виходять в результаті операції розщеплювання вершин і видалення ребер.

Визначимо, згідно [1], число досяжності заданої множини точок X як найменшу кількість 2-кліток (компонент) s_i із множини компонент $S \setminus f(G)$ на границях ∂s_i яких розміщено $f(X)$, де f –мінімальне вкладення графа G до S , а під точкою графа розумітимемо або вершину, або внутрішню точку ребра графа G . Про досяжну множину точок X будемо говорити, якщо вона розміщується на границі деякої 2-клітки s_i , $s_i \in S \setminus f(G)$, для якої існує на проективній площині розбиття на k -псевдокліток (частин)

$s'_i, i=1, \dots, k, k \geq 0$ кожна з границь $\partial s'_i$ яких містить точки із $X \setminus X \cap \bigcup_{j=1, j \neq i}^k \partial s'_j$ та матиме $t_S(X)$

проективну досяжність, де $t_S(X) = k$;

Твердження 1. Для проективної площини S мають місце наступні твердження:

1) Множина F_S всіх мінімальних графів над проективною площиною S складається із 35 графів. 2) $F_S \cap F_{\Omega_1} \supset \{A_1, A_5, C_1, C_{11}, E_1, E_{42}\}$, де F_{Ω_1} множина всіх мінімальних графів над тором Ω_1 , частково наведена [5].

Твердження 2. Для проективної площини S мають місце наступні твердження:

1) Граф $K_{2,3}$ вкладається однокомпонентно 2-клітково до проективної площини S та має досяжною множину всіх точок; 2) Граф K_4 вкладається двокомпонентно 2-клітково до проективної площини S та має досяжною множину всіх точок; 3) Граф $K_{3,3}$ вкладається трикомпонентно 2-клітково до проективної площини S та має досяжною множину всіх вершин точок, а множина всіх точок має число досяжності 1; 4) Граф K_5 вкладається п'ятикомпонентно 2-клітково до проективної площини S та має досяжною множину всіх вершин, а множина всіх точок має число досяжності 2.

Твердження 3. Для графів $D_i \setminus v$, де $D_i \in F_S$, $i = 1, 2, 3, 4, 9, 12, 17$, де v - вершина графа D_i , мають місце наступні твердження:

1) Якщо v -вершина степеня шість графа D_1 , то граф $D_1 \setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) двох копій графів $K_{2,3}$ по левом вершинам степеня 3, причому множина вершин $St_{D_1 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності t , $t = t_{D_1 \setminus v}(St_{D_1 \setminus v}(v) \setminus \{v\}) = 2$, а кожне ребро суттєве відносно числа досяжності t при його видаленні;

2) Якщо v -вершина степеня шість графа D_2 , то граф $D_2 \setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) двох графів $K_{2,3}, K_4$ по двом простим циклам довжини 3, причому множина вершин $St_{D_2 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2;

3) Якщо v -вершина степеня п'ять графа D_{12} , то граф $D_{12} \setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) двох графів $K_{2,3}, K_4$ по простому ланцюгу довжини 2 графа $K_{2,3}$ та суміжним частинам суміжних ребер графа K_4 , причому множина вершин $St_{D_{12} \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2;

4) Якщо v -вершина степеня п'ять графа D_4 , то граф $D_4 \setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) двох графів $K_{2,3}, K_4$ по двом вершинам степеня 2, 3, відповідно, причому множина вершин $St_{D_4 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2;

- 5) Якщо v -вершина степеня п'ять графа D_3 , то граф $D_3 \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох копій графів K_4 або по простим циклам довжини 3, або двох графів $K_{2,3}, K_4$ шляхом ототожнення двох ребер, відповідно, причому множина вершин $St_{D_3 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2;
- 6) Якщо v -вершина степеня п'ять графа D_9 , то граф $D_9 \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) трьох копій графів $K_{2,3}$, для двох шляхом ототожнення двох ребер, відповідно, та третього $K_{2,3}$ по простим циклам довжини 3, причому множина вершин $St_{D_9 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2;
- 7) Якщо v -вершина степеня чотири графа D_{17} , то граф $D_{17} \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох копій графів K_4 по простому ланцюгу довжини 2, та суміжним частинам суміжних ребер графа K_4 шляхом ототожнення двох ребер, відповідно, причому множина вершин $St_{D_{17} \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2;

Твердження 4. Для графів $E_i \setminus v$, де $E_i \in F_S$, $i=1,2,3,5,6,11,18,19,20,22,27,42$, де v -вершина графа E_i , мають місце наступні твердження:

- 1) Якщо вершина v степеня шість графа E_1 , то граф $E_1 \setminus v$ є об'єднанням двох копій графа $K_{2,3}$, причому множина вершин $St_{E_1 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2;
- 2) Якщо вершина v степеня шість графа E_2 , то граф $E_2 \setminus v$ є графом K_4 із всіма 1-підрозділеними ребрами, причому множина вершин $M = St_{E_2 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M) = 2$;
- 3) Якщо вершина v степеня шість графа E_3 , то граф $E_3 \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох копій графа $K_{2,3}$, задану шляхом попарного ототожнення трьох пар вершин степеня 2 взятих із копій графа $K_{2,3}$, причому множина вершин $M = St_{E_3 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M) = 2$. Існує таке 2-кліткове вкладення $f, f': E_3 \setminus v \rightarrow S$ графа $E_3 \setminus v$ до проективної площини S яке допускає розширення $f', f': E_3 \setminus (v, u) \rightarrow S$ при якому $f'(St_{E_3 \setminus v}(v) \setminus (v, u))$ розміщені в двох 2-клітках з множини $S \setminus f(E_3 \setminus v)$;
- 4) Якщо вершина v степеня чотири графа E_5 , то граф $E_5 \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох копій графа $K_{2,3}$, задану шляхом попарного ототожнення двох пар кінцевих вершин однакової степені двох ребер, взятих із різних копій графа $K_{2,3}$, з кінцевими вершинами

степеня 2 та 3; причому множина вершин $M = St_{E_5 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M) = 2$;

5) Якщо вершина v степеня п'ять графа E_6 , то граф $E_6 \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох копій графа $K_{2,3}$, задану шляхом ототожнення пари вершин степеня 2 та 3 взятих із різних копій графа $K_{2,3}$, причому множина вершин $St_{E_6 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2;

6) Якщо v - вершина степеня п'ять графа E_{11} , то граф $E_{11} \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох графів $K_{2,3}$, K_4 , задану шляхом попарного ототожнення ребер, взятих із двох простих циклів довжини 4 та 3, відповідно, причому множина вершин $M = St_{E_{11} \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M) = 2$;

7) Якщо v вершина степеня три графа E_{18} , то граф $E_{18} \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох графів $K_{2,3}$, $K_{3,3}$, задану шляхом попарного ототожнення трьох пар, утворених із частин трьох суміжних ребер $K_{2,3}$ та трьох несуміжних ребер графа $K_{3,3}$, причому множина вершин $M = St_{E_{18} \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M) = 2$. Граф $K_{3,3}$ є ϕ -образом (склеюкою) двох копій графа $K_{2,3}$, задану шляхом попарного ототожнення трьох пар суміжних ребер, взятих із різних копій;

8) Якщо v вершина степеня чотири графа E_{19} , то граф $E_{19} \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох графів $K_{2,3}$, K_4 , задану шляхом попарного ототожнення трьох пар, утворених із трьох суміжних ребер $K_{2,3}$ та трьох частин суміжних ребер графа K_4 , причому множина вершин $M = St_{E_{19} \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M) = 2$.

9) Якщо v вершина степеня чотири графа E_{20} , то граф $E_{20} \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) графів $K_{2,3}$ та K_4 , задану шляхом попарного ототожнення ребер, взятих із двох простих циклів довжини 4 та 3, відповідно, причому множина вершин $M = St_{E_{20} \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2 та $t_S(M) = 2$;

10) Якщо v вершина степеня чотири графа E_{22} , то граф $E_{22} \setminus v$ є ϕ -образом (склеюкою) двох копій графа $K_{2,3}$ та графа K_4 , задану в два кроки: а) шляхом попарного ототожнення ребер ланцюгів довжини 2 та кінцевими вершинами степеня 2, взятих із двох $K_{2,3}$, б) задану шляхом попарного ототожнення ребер, взятих із двох простих циклів

довжини 4 та 3, взятих із графа утвореного кроком а), та графа K_4 , відповідно, причому множина вершин $M=St_{E_{22}\setminus v}(v)\setminus\{v\}$ матиме число досяжності 2.

11) Якщо v вершина степеня чотири графа E_{27} , то граф $E_{27}\setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) двох графів $K_{2,3}$, K_4 , задану шляхом попарного ототожнення ребер простого ланцюга графа $K_{2,3}$ довжини 3, у якого кінцевими точками є вершина степені 3 та точка ребра, та простого ланцюга довжини 2 графа K_4 , у якого кінцевими точками є вершина степені 3 та точка ребра, відповідно, причому множина вершин $M=St_{E_{27}\setminus v}(v)\setminus\{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M)=2$;

12) Якщо v вершина степеня три графа E_{42} , то граф $E_{42}\setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) чотирьох копій графа $K_{2,3}$, задану в два кроки: а) шляхом попарного ототожнення трьох ребер суміжних вершині степеня 3, взятих із одного $K_{2,3}$, б) задану аналогічно кроку а) для іншої пари графів $K_{2,3}$, причому множина вершин $M=St_{E_{42}\setminus v}(v)\setminus\{v\}$ матиме число досяжності 2.

Твердження 5. Для графів $C_i\setminus v$, де $C_i \in F_S$, $i=1,2,3,5,6,7,11$, де v вершина графа C_i , мають місце наступні твердження: 1) Якщо v вершина степеня сім графа C_1 , то граф $C_1\setminus v$ є об'єднанням двох графів $K_{2,3}$, K_4 , причому множина вершин $M=St_{C_1\setminus v}(v)\setminus\{v\}$ матиме число досяжності 2; 2) Якщо v - вершина степеня шість графа C_2 , то граф $C_2\setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) двох графів $K_{2,3}$, K_4 , задану шляхом ототожнення пари вершин степеня 3, причому множина вершин $M=St_{C_2\setminus v}(v)\setminus\{v\}$ матиме число досяжності 2; 3) Якщо v вершина степеня шість графа C_3 , то граф $C_3\setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) двох копій графів K_4 , задану шляхом ототожнення двох пар (частина ребра, ребро), які інцидентні вершині u степеня 3, та пари простих ланцюгів довжини 1 та 2, що мають ту саму спільну вершину u , причому множина вершин $M=St_{C_3\setminus v}(v)\setminus\{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M)=2$; 4) Якщо v вершина степеня шість графа C_4 , то граф $C_4\setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) двох копій графів K_4 , задану шляхом ототожнення пари паростих циклів, причому множина вершин $M=St_{C_4\setminus v}(v)\setminus\{v\}$ матиме число досяжності 1 та $t_S(M)=2$; 5) Якщо v вершина степеня п'ять графа C_7 , то граф $C_7\setminus v$ є ϕ -образом (склейкою) двох копій графів K_4 , задану шляхом ототожнення пари (ребро, частина ребра), причому множина вершин $M=St_{C_7\setminus v}(v)\setminus\{v\}$ матиме число досяжності 2; б) Якщо v вершина степеня

чотири графа C_{11} , то граф $C_{11} \setminus v$ є об'єднанням графів K_4 , $K_{3,3}$, причому множина вершин $M = St_{C_{11} \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2.

Твердження 6. Для графів $B_i \setminus v$, де $B_i \in F_S$, $i = 1, 3, 7$, де v вершина графа B_i , мають місце наступні твердження: 1) Якщо v вершина степеня шість графа B_1 , то граф $B_1 \setminus v$ є φ -образом (склейкою) двох копій графів K_4 , задану шляхом ототожнення пари (ребро, ребро), причому множина вершин $M = St_{B_1 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2; 2) Якщо v вершина степеня п'ять графа B_3 , то граф $B_3 \setminus v$ є φ -образом (склейкою) двох копій графів K_4 , задану шляхом ототожнення пари вершин, причому множина вершин $M = St_{B_3 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2; 3) Якщо v вершина степеня п'ять графа B_7 , то граф $B_7 \setminus v$ є φ -образом (склейкою) двох копій графів K_4 , задану шляхом ототожнення пари (частина ребра, ребро) та пари простих ланцюгів довжини 1 та 2, що мають ту саму спільну вершину u з $B_7 \setminus v$, що й перша пара ребер, причому множина вершин $M = St_{B_7 \setminus v}(v) \setminus \{v\}$ матиме число досяжності 2. Доведення всіх цих тверджень 2,3,4,5,6 носять конструктивний характер.

1. Хоменко М. П. φ -перетворення графів. Препринт ИМ НАНУ, Київ, –1971.–375с.
2. Archdeacon D. A Kuratawaki theorem for projective plane. // J. Graph theory 1981, 5 № 3, 243 – 246.
3. Mochar B., Kawarabayashi K. Some Recent Progress and Applications in Graph Minor Theory, Preprint submitted to Elsevier Science. July 11, 2006.
4. Glover H., Huneke J. P. 103 graphs which are irreducible for projective plane. // J. Combin Theory Ser. B 27 (1979) № 3, 332 – 370.
5. Gagarin A., Myrvold W., Chambers J. The obstructions for toroidal graphs with no $K_{3,3}$'s. Preprint submitted to Elsevier Science, 1 February 2008

3.55. ПРО ГРАФ–МОДЕЛІ НЕОРІЄНТОВАНОГО РОДУ.

Розглянемо задачу моделювання складної системи в загальному виді та запропонуємо теоретико–графський підхід як спосіб мислення штучними образами–структурами. В [3] наведено задачі моделювання систем та математичні методи їхнього розв'язання в яких великі структури розглядаються як сукупність невеликих та простіших підструктур які можуть мати певні спільні частини, що підлягатимуть ототожненню при побудові дновленні цілої структур із скінченного числа підструктур. Основний метод - φ -перетворення графів (граф-моделей) отриманих як пара скінчених множин: множини об'єктів-вершин та множини об'єктів-ребер для визначення зв'язків між об'єктами структури. Основна ідея методу - φ -перетворення може інтерпретуватися як спосіб успадкування певної властивості підструктур всею структурою в залежності від властивостей з'єднання (ототожнення заданих частин підструктур). Наведені нижче результати можуть застосовуватися при системному аналізі граф-моделей. Прикладом використання є

перетворення основних задач системного програмування на задачі теорії графів із готовим для використання математичним забезпеченням алгоритмів їхніх розв'язків.

Граф-модель математичної моделі складної системи подають у вигляді неорієнтовного графа G без кратних ребер і петель та вивчають її шляхом досліджень структурованих властивостей графа вкладеного в замкнуту поверхню S неорієнтованого роду $\gamma(S)$; т.т. розміщені на S ребра графа розташовуватимуться принаймні на проективній площині чи ленті Мебіуса приклеєної до орієнтованої поверхні та не матимуть спільних точок крім вершин графа G роду $\gamma(G)$ та можуть розміщуватися не тільки на ручках. Граф G зветься незведеним над S ($\gamma(S)$ - незведеним) якщо для кожного власного підграфа H графа G має місце нерівність $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Мінімальним графом над S називають такий граф G який зменшує $\gamma(G)$ після того як із нього видалено ребро чи стягнуто ребро в точку. Для сфери S такими є K_5 та $K_{3,3}$. Основний результат:

Для графа ζ (отриманого як φ -образ $G' + St_n(g)$ при ототожненні n вершин зірки $St_n(g)$ із вершинами множини X , що має число досяжності $t_G(X)$ та характеристики

$\theta_G(X), \delta\theta_G(X)$) має місце нерівність: $\gamma(\zeta) \leq \gamma(G) - t_G(X) - \theta_G(X) - \delta\theta_G(X) + 1$

Введена характеристика $\delta\theta_G(x)$ яка є мірою циклічної зв'язності 2-клітин $S_G(X)$ на відміну від $\theta_G(X)$, що характеризує циклічність множини $S_G(X)$.

Описано алгоритм побудови 3-мінімальних графів.

Вони можуть застосовуватися при системному аналізі граф-моделей електричних схем чи комп'ютерних мереж розташованих на торі. З метою дослідження поведінки математичної моделі складної системи розміщеної на орієнтовній поверхні S розглянуто її граф-модель G без кратних ребер та петель. Тоді можливо використати метод φ -перетворень

створений для графів стосовно розв'язання задач моделювання шляхом розбиття на "простіші" підмоделі із подальшим ототожненням елементів, виконаним із наперед

заданими властивостями. Так розростання моделі G може визначитися наступним γ -

перетворенням: $\varphi(G + St_n(g), \sum g_i + a_i) = (\zeta, \{a_i^*\}_1^n)$, де $X = \{a_i^*\}_1^n$ - множина точок графа G

із числом досяжності $t_G(x)$, яка є однією множиною для ототожнення, а другою є $\{g_i\}_1^n$ -

множина кінцевих вершин зірки $St_n(g)$ із центром g . Основний результат:

1. Узагальнення характеристики $\theta_G(X)$, яка стосується циклічної структури множини X точок графа G вкладеного в поверхню S .

2. Введення нової характеристики $\delta\theta_G(X)$, що вимірює ланцюгову структуру множини X точок графа G на S . Цей результат прислужиться при системному аналізі як граф-моделей,

так і їхнього топологічного аспекту. який полягатиме у наявності спільної властивості у ребер та вершин графа-моделі. Розв'язок нашої задачі побудовано на методі φ -перетворень графів[1,2], засновником якого є М.П. Хоменко, та введених ним поняттях. Для повноти викладення наведемо найсуттєвіші з них.

Визначення 1.1.

φ - перетворенням простору X на X зветься відносний гомеоморфізм

$\varphi: (X, A) \rightarrow (X, A)$, який є сумою $\varphi_0 + \sum_{j=1}^q \varphi_j$ $q+1$ гомеоморфізмів;

1) $\varphi_0 = \varphi|_{X-A}: X \setminus A \cong X \setminus A$, φ_0 - гомеоморфізм.

2) $\varphi_j: A_j \rightarrow A_j$;

3) $\sum_{j=1}^q \varphi_j = \varphi|_A$; $\sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j + \sum_{j=k+1}^q \varphi_j \neq \varphi|_A$; $\forall k_i = 1(1)q$

4) $\varphi_j = \sum_{i=1}^{d_j} \varphi_{ji}$, $\varphi_{ji} = \varphi|_{A_{ji}}: A_{ji} \cong A_j$, $\bigcup_{i=1}^{d_j} A_{ji} = A_j$ причому $d_j \geq 2$, $j = 1(1)q$;

5) $-1 \leq \dim(A_{ji} \cap A_{j'i'}) \leq \dim A_{ji}$, $i \neq i'$; $i, i' = 1(1)d_j$, $j = 1(1)q$

6) $A_{ji} \neq A_{j'i'}$ при $j \neq j'$, $i, i' = 1(1)q$.

Важливий клас φ - перетворень складають φ -перетворення що задовольняють умові:

$A_{ji} \cap A_{j'i'} = \emptyset$ при $(i \neq i') \cup (j \neq j')$. Тоді підпростір A розкладається в суму q систем

підпростору A_{ji} , гомеоморфних один одному всередині кожної системи. Тим самим на

підпросторі A задано відношення R -еквівалентності, т.т. $R = \sum_{j=1}^q R_j$ причому

$$R_j[A_{ji}] = \sum_{i=1}^{d_j} A_{ji}.$$

Графи φ -перетворення та їх властивості.

Нехай $X = \sum_{r=1}^m X_r$, $X = \sum_{l=1}^{m_0} X_l$, $p_0(X_r) = p_0(X_l) = 1$ для $l = 1(1)m_0$, $r = 1(1)m$.

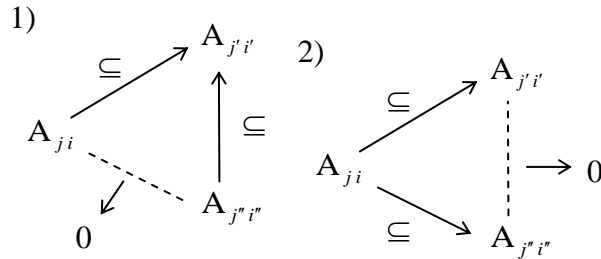
Задамо φ -перетворення $\varphi: (X, A) \rightarrow (X, A)$ у відповідності із визначенням 1.1

Введемо наступні характеристики φ -перетворення:

$$k_r^{j j'} = \left| \left\{ A_{ji} \mid A_{ji} \subseteq A_{j'i'} \subseteq X_r, i = 1(1)d_j, i' = 1(1)d_{j'} \right\} \right| \quad k_{rj} = \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq j}}^q k_r^{j j'} \quad k^{j j'} = \sum_{r=1}^m k_r^{j j'}$$

$$A(\varphi_j) = \left\{ k^{j j'} / (k^{j j'} \neq 0) \wedge (\forall j'', j'' \in \{1, 2, \dots, q\}) [(j'' \neq j, j') \Rightarrow ((k^{j j''} = 0) \vee (k^{j'' j'} = 0))] \right\} \mid j \neq j', j' = 1(1)q \}$$

Можливі випадки:



Множина $A(\varphi_j)$ визначається однозначно. Позначимо через k_r^j число k_r^{jj} .

Визначення 2.1.

φ -базою $B_j = B(\varphi_j)$ відображення $\varphi_j : A_j \rightarrow A_j$ при заданому φ -перетворенні $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$ зветься сума тих компонент підпростору X які перетинаються з підпростором A_j , тобто. $B_j = \sum_{r \in J_j} X_r$, $J_j = \{r / k_r^j > 0\}$.

Визначення 2.2.

Комплексною φ -базою $B_l = B(X_l)$ над X_l зветься прообраз цієї компоненти при заданому φ -перетворенні, тобто $B_l = \varphi^{-1}(X_l)$

Твердження 2.1.

Якщо задано φ -перетворення: $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$, $J_l = \{j / A_j \subseteq B_l\}$, $v_l = |J_l|$, $l = 1(1)m$,

то 1) $B_l = \bigcup_{j \in J_l} B_j$, $l = 1(1)m_0$

2) $B_l \cap B_{l'} = 0$, $l \neq l'$, $l, l' = 1(1)m_0$

3) $\sum_{l=1}^{m_0} v_l = q$

Доведкня цього твердження впливає із того факту, що B_l - множина компонентів просторів X «склеєних» в компоненту X_l по підсистемі A_j .

Визначення 2.3.

Графом комплексної φ -бази B_l φ -перетворення $\varphi : (X, A) \rightarrow (X, A)$ зветься граф Z_l , $Z_l = (Z_l^0, Z_l^1)$, де $Z_l^0 = \{x_r / X_r \subseteq B_l\}$ вершини з'єднані ребрами так, щоб на всіх вершинах x_r для яких $k_r^j \neq 0$ утворилося дерево з $k_r^j - 1$ -петлею в x_r для усіх j , $j = 1(1)q$.

Визначення 2.4.

Графом φ -баз φ -перетворення зветься граф $Z(X, X) = \sum_{l=1}^{m_0} Z_l$.

Твердження.

- 1) Граф $Z(X, X)$ визначенооднозначно $\Leftrightarrow p_0(B_j) \leq 2$ для $j = 1(1)q$ тобто. маємо не більше двох зв'язних компонент що перетинаються з системою A_j .
- 2) Якщо має місце умова: $(A_j = A_{j_1} \cup A_{j_2}) \quad d_j = 2$, для всіх $j = 1(1)q$, то граф $Z(X, X)$ задано однозначно.

Теорема 2.1.

Для кожного графа $Z(X, X) = Z$ φ -баз φ -перетворення $\varphi: (X, A) \rightarrow (X, A)$ маємо:

- 1) $p_0(Z) = p_0(X)$
- 2) $p_1(Z) = \sum_{j=1}^q d_j + p_0(X) - p_0(X) - q$

Для того, щоб упевнитися в справедливості цих властивостей достатньо обчислити

$$\alpha_1(Z(X, X)), \alpha_1(Z) = \sum_{j=1}^q (p_0(B_j) - 1) + \sum_{j=1}^q \sum_{r=1}^m (k_r^j - 1) + \sum_{j=1}^q \{k_r^j / k_r^j = 0\},$$

де $m = p_0(X)$ та використати формулу $p_1(Z) = \alpha_1(Z) - \alpha_0(Z) + p_0(Z)$

Теорема 2.2.

Графи φ -баз $Z(X, X)$ прості (тобто. без кратних ребер та петель) $\Leftrightarrow k_r^j \leq 1$ і

$$\|\varphi_j / (k_r^j \neq 0) \wedge (k_{r'}^j \neq 0)\| \leq 1, \text{ де } r \neq r', r, r' = 1(1)m, j = 1(1)q$$

Іншими словами графи $\{Z\}$ прості \Leftrightarrow

- 1) на кожній компоненті X_r маємо тільки один підпростір A_{ji} .
- 2) на кожній парі таких компонент існує не більше однієї системи $\sum_{i=1}^{d_j} A_{ji}$

Визначення 2.5.

Графом φ -перетворення $\varphi|B_l: (B_l, B_l \cap A) \rightarrow (X_l, X_l \cap A)$ комплексної φ -баз B_l при заданому φ -перетворенні простору X зветься граф Λ_l , де

$$\Lambda_l^0 = \{x_r / X_r \subseteq B_l\} + \{y_j / A_j \subseteq B_l\}.$$

$$\Lambda_l^1 = \left\{ (k_r^j - k_{r,j}) (x_r y_j) / (X_r \subseteq B_l) \wedge (A_j \subseteq B_l) \right\} + \left\{ \langle y_j y_{j'} \rangle / (k^{j j'} \in A(\varphi_j)) \wedge (A_j \subseteq B_l) \right\}.$$

Визначення 2.6.

Графом φ -перетворення простору X зветься граф: $\Lambda(X, X) = \sum_{l=1}^{m_0} \Lambda_l$

Твердження 2.3.

Граф $\Lambda(X, X)$ довільного φ -перетворення визначено однозначно и є простим \Leftrightarrow

$$k_r^j - k_{r,j} \leq 1 \quad j = 1(1)q, \quad r = 1(1)m.$$

Існує зв'язок між $p_1(Z)$ и $p_1(\Lambda)$.

Теорема 2.4.

Якщо для $\varphi: (X, A) \rightarrow (X, A)$, $d_j = 2$, $k^{j j'} = 0$, при $j \neq j'$, $j, j' = 1(1)q$, то

$$Z(X, X) \cong \Lambda(X, X).$$

Справедливість теореми слідує із твердження 2.2. та визначення графів Z и Λ .

Визначення 2.7.

Відображення $\varphi_{j'}, \varphi_{j''}$, $j', j'' \in \{1, 2, \dots, q\}$ зветься суміжним, якщо в $\Lambda(X, X)$ існує

ланцюг виду $y_{j'}(y_{j'} x_r) x_r (x_r y_{j''}) y_{j''}$ або виду $y_{j'} \langle y_{j'} y_{j''} \rangle y_{j''} (y_{j''} x_r) x_r$.

Говорять також, що $y_{j''}$, $y_{j'}$ суміжні на X_r .

Граф $\Phi(X, X)$ визначається наступним чином:

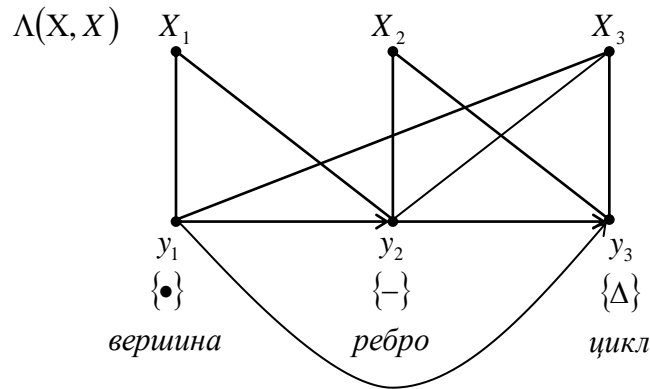
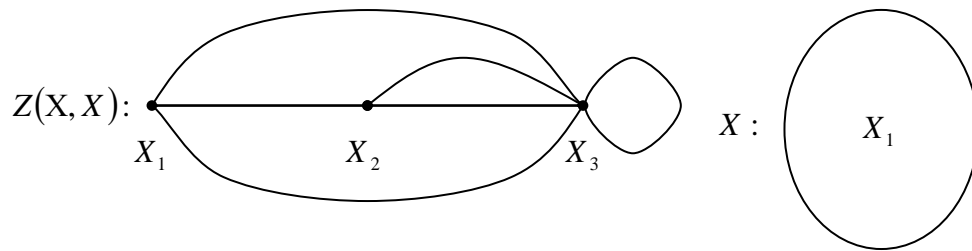
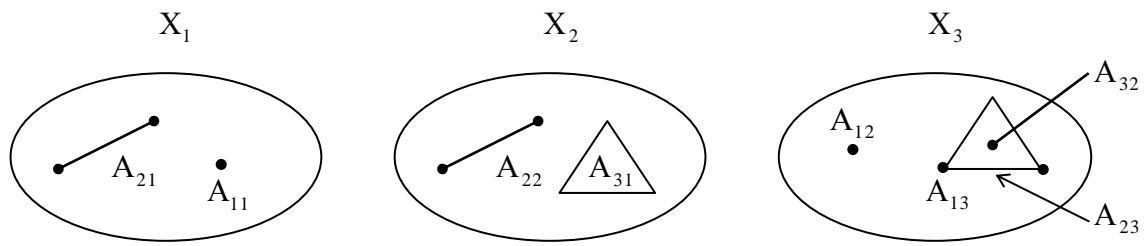
$$\Phi^0(X, X) = \{y_j\}_1^q$$

$$\Phi^1(X, X) = \{q_{j j'}(y_j y_{j'}) / j \neq j', \quad j, j' = 1(1)q\}, \text{ де}$$

$$q_{j j'} = |\{c_\Lambda(y_j y_{j'}) / c_\Lambda(y_j, y_{j'}) \subset \Lambda(X, X)\} \wedge [c_\Lambda(y_j, y_{j'}) = y_j(y_j x_r) x_r (x_r y_{j'}) y_{j'}] \vee [c_\Lambda(y_j, y_{j'}) = y_j \langle y_j y_{j'} \rangle y_{j'}]|$$

тобто. $q_{j j'}$ - число різних ланцюгів вказаного выше виду.

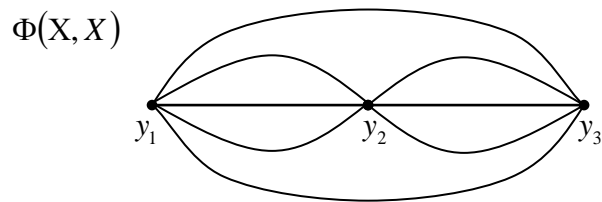
Розглянемо наступний приклад.



$$A_1 = \bigcup_{j=1}^4 A_{1j}$$

$$A_2 = \bigcup_{j=1}^3 A_{2j}$$

$$A_3 = \bigcup_{j=1}^2 A_{3j}$$



Література

1. Хоменко М.П. Топологические аспекты теории графов, Київ 1971, АН УССР, институт математики.
2. Хоменко М.П. φ - перетворення графів, Київ 1973 институт математики АН УССР.
3. А.А. Самарский, А.П. Михайлов Математическое моделирование, Москва, Наука-Физматлит. 1997.

ДОДАТОК 1. Список 3-мінімальних з 34-х графів

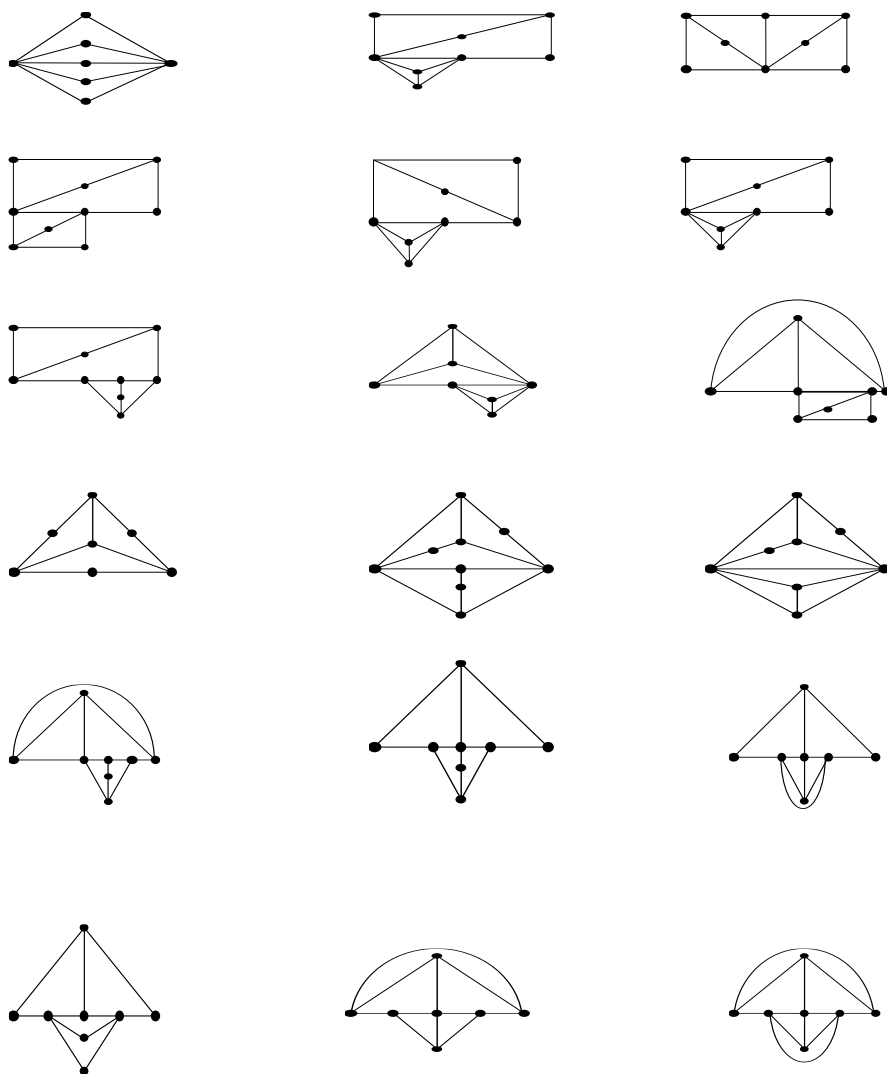
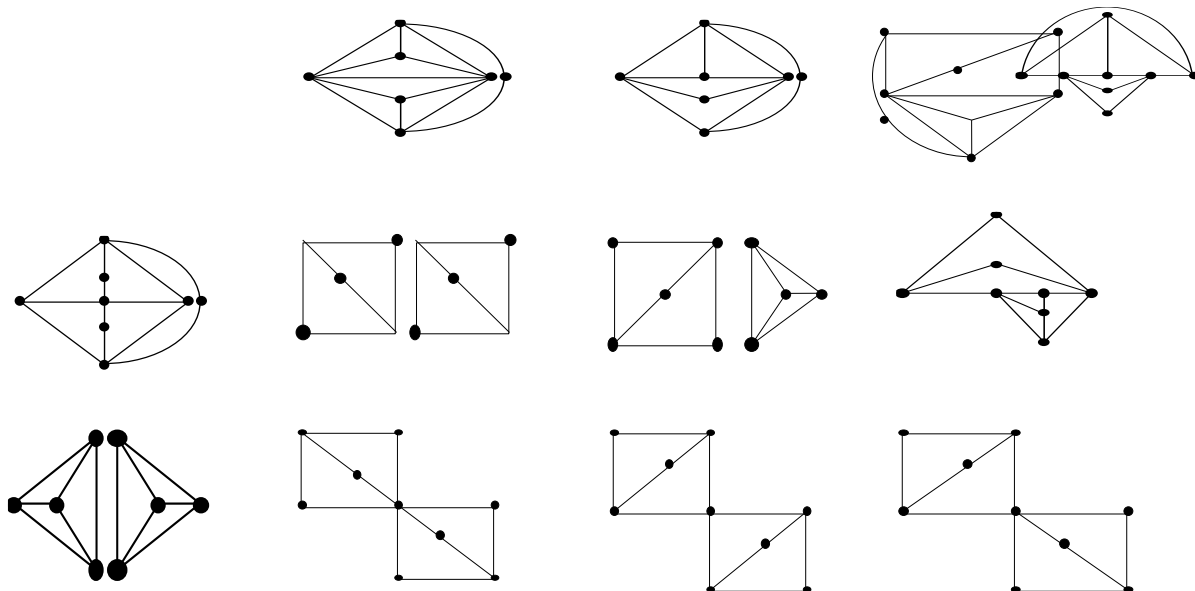


Рис.1. Графи 3-мінімальні із порядковими №№1-18.



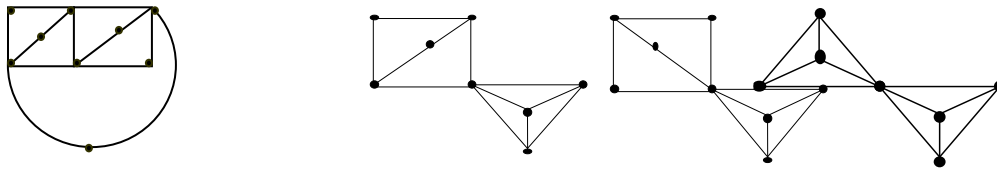


Рис.2. Графи 3-мінімальні із порядковими №№19-34.

ДОДАТОК 2

СПИСОК 4-МІНІМАЛЬНИХ ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ

Цей список складається із списків вершин графа в яких вершина відділяється двокрапкою від вершин інцидентних з нею, ці списки закінчуються крапкою з комою, а один граф відділяється від іншого графа, як списку списків вершин, символом \ після порядкового номера:

- 1\ 1:2,4; 2:1,3,5; 3:2,4; 4:1,3,5; 5:2,4,6,7,9,10,12; 6:5,8;
 7:5,8; 8:6,7,9; 9:5,8,11; 10:5,11; 11:9,10,12; 12:5,11;
- 2\ 1:2,3,4; 2:1,5; 3:1,5; 4:1,5; 5:2,3,4,6,7,9,10,12; 6:5,8;7:6,8;
 8:6,7,9; 9:5,8,11; 10:5,11; 11:9,10,12; 12:5,11;
- 3\ 1:2,4; 2:1,3,4; 3:2,4; 4:1,3,5; 5:2,4,6,9,11; 6:5,7,8; 7:6,9; 8:6,9;
 9:5,7,8,10,12; 10:9,11; 11:5,10,12; 12:9,11;
- 4\ 1:2,3,4; 2:1,5; 3:1,5; 4:1,5; 5:2,3,4,9,12; 6:5,7,8; 7:6,9; 8:6,9;
 9:5,7,8,9,11; 10:9,12; 11:9,12; 12:5,10,11;
- 5\ 1:2,3,4; 2:1,5; 3:1,5; 4:1,5,8,11; 5:1,3,6,7; 6:5,8; 7:5,8; 8:4,6, 7,9,10;9:8,11; 10:8,11; 11:4,9, 10;
- 6\ 1:2,4; 2:1,3,5; 3:2,4; 4:1,3,5,6,8,9,10; 5:2,4,7; 6:4,7; 7:5,6,8; 8:4,7,11; 9:4,11; 10:4,11; 11:8,9,10;
- 7\ 1:2,7; 2:1,3,4,12; 3:2,7; 4:2,5,6,7; 5:4,8; 6:4,8; 7:1,3,4,8,11; 8:5,6,7,9,10; 9:8,11,12; 10:8,11; 11:7,9,10; 12:2,9;
- 8\ 1:2,3, 9;2:1,4; 3:1,4; 4:2,3,9,10; 5:9,11; 6:9,11,12; 7:9,12; 8:9,12; 9:1,4,5,6,7,8; 10:4,11; 11:5,6,10; 12:6,7,8;
- 9\ 1:3,8; 2:3,8; 3:1,2,4,5,6; 4:3,7,8,11,12; 5:3,7; 6:5,7; 7:4,5,6; 8:1,2,4,9; 9:8,10; 10:9,11,12; 11:4,10; 12:4,10;
- 10\ 1:2,3,4; 2:1,3,4; 3:1,2,4; 4:1,2,3,5,6,8,9; 5:4,10; 6:4,10; 7:10,11; 8:4,11; 9:4,11; 10:5,6,7; 11:7,8,9;
- 11\ 1:2,3,4; 2:1,3,4,5,8,10; 3:1,2,4; 4:1,2,3; 5:2,6,7; 6:5,8; 7:5,8; 8:2,6,7,9,11; 9:8,10; 10:2,9, 11;11:2,10;
- 12\ 1:2,4;2:1,3,5; 3:2,4; 4:1,3,5,6,8; 5:2,4,7; 6:4,7; 7:5,6,8,9,11; 8:4,7,10; 9:7,10; 10:8,9,11; 11:7,10;
- 13\ 1:2,3,4; 2:1,5; 3:2,5; 4:1,5,7; 5:2,3,4,6,8,12; 6:5,7; 7:4, 6,8;
 8:5,7,9; 9:8,10,11; 10:9,12; 11:9,12; 12:5,10,11;
- 14\ 1:2,4; 2:1,3,5,9,10; 3:2,4; 4:1,3,7;5:2,6,11; 6:5,7,8; 7:4,6,11;
 8:6,11; 9:2,11; 10:2,11; 11:5,8,9,10;
- 15\ 1:2,3,4; 2:1,5,9; 3:1,9;4:1,9; 5:2,6,10; 6:5,7,9; 7:6,9,11; 8:7,9; 9:3,4,8,10,
 11;10: 5,9; 11:7,9;
- 16\ 1:2,3,4; 2:1,5,8; 3:1,11; 4:1,11; 5:2,6,7,9,11; 6:5,11; 7:5,8; 8:2,7,9; 9:5,8,11; 10:5,11; 11:3,4,6,9,11;

17\ 1:3,7; 2:3,7; 3:1,2,4; 4:3,5,7,11; 5:4,6,8; 6:5,7;
 7:1,2,6,8,9,10; 8:5,7; 9:7,11; 10:7,11; 11:4,9,10;
 18\ 1:2,3,5; 2:4,7; 3:1,4; 4:2,3,6,11; 5:1,6,7,8; 6:4,5; 7:5,9; 8:5,9; 9:6,7,8,10, 11; 10:9,11; 11:4,10,12; 12:9,11;
 19\ 1:3,7; 2:3,7; 3: 1,2,4; 4:3,5,10,12; 5:4,6,11; 6:5,7,9; 7:1,2,6,8; 8:7,11; 9:6,11; 10:4,11; 11:8,9,10,12; 12:7,11;
 20\ 1:2,3,7; 2:1,4; 3:1,4; 4:2,3,5; 5:4,6,9,10; 6:5,7,11; 7:1,6,8,12; 8:7,11; 9:5, 11; 10:5,11; 11:6,8,9,10,12; 12:7,11;
 21\ 1:3,7; 2:3,7; 3:1,2,4; 4:3,5; 5:4,6,12; 6:5,7,8,9,11; 7:1,2,6,10; 8:6,10; 9:6,10,12; 10:7,8,9; 11:6,12; 12:5,9,11;
 22\ 1:3 10; 2:3 10; 3:1 2 4; 4:3 5 7 9 11 12; 5:4 6; 6:5 7 11; 7:4 6 8; 8:7 10 12; 9:4 10; 10:1 2 8 9; 11:4 6; 12:4 8;
 23\ 1:2,3,7; 2:1,4; 3:1,4; 4:2,3,5,11; 5:4,6,8,9,10; 6:5,7; 7:1,6,8,9; 8:5,7; 9:5,7,11; 10:5,11; 11:4,9,10;
 24\ 1:3,8; 2:3,8; 3:1,2,4; 4:3,5; 5:4,6,11,12; 6:5,7; 7:6,8,9,10,11; 8:1,2,7,12; 9:7,12; 10:5,7; 11:5,7,12; 12:8,9,11;
 25\ 1:3,9; 2:3,9; 3:1,2,4; 4:3,5; 5:4,6; 6:5,7,11; 7:6,8,11; 8:7,9,11; 9:1,2,8,12; 10:8,12; 11:6,12; 12:5,7,9,10,11;
 26\ 1:2,3,9; 2:1,4; 3:1,4; 4:2,3,5; 5:4,6,11,12; 6:5,7; 7:6,8,10,11,12; 8:7,9; 9:1,8,10,12; 10:7,9; 11:4,7; 12:4,7,9;
 27\ 1:2,3,7; 2:3,8; 3:1,2,4; 4:3,12; 5:6,12; 6:5,7,12; 7:6,8,12; 8:7,9,11; 9:1,2,8,12; 10:6,12; 11:8,12; 12:4,5 7,9,10,11;
 28\ 1:3,10; 2:3,10; 3:1,2,4; 4:3,5,7, 9,11,12; 5:4,6; 6:5,7,11; 7:4,6,8; 8:7,9,12; 9:4,8,10;10:1,2,9;11:4,6;12:4,8;

 29\ 1:2,3,8; 2:1,4; 3:1,4; 4:2,3,5; 5:4,6,8,11,12; 6:5,7,8; 7:6,8; 8:1,5,7,9,10,11;9-6,8; 9:6,8; 10:8,12; 11:8,12;
 12:5,10,11; 30\ 1:3,8; 2:3,8; 3:1,2,4; 4:3,5; 5:4,6,8,10,11,12; 6:5,7; 7:6,8,12; 8:1,2,5,7,9; 9:8,10,11; 10:5,9; 11:5,9;
 12:5,7; 31\ 1:2,3,7; 2:1,4; 3:1,4; 4:3,5,12; 5:4,6,8; 6:5,7; 7:1,6,8,0,10,12; 8:5,7; 9:7,11; 10:7,11; 11:9,10,12;
 12:4,7,11; 32\ 1:2,3,8; 2:1,4; 3:1,4; 4:2,3,5,12; 5:4,6,8; 6:5,7,9; 7:6,8; 8:1,5,7,9,10,11; 9:6,8; 10:8,12; 11:8,12;
 12:4,10,11; 33\ 1:2,3,9; 2:1,4; 3:1,4; 4:2,3,5; 5:4,6,11,12; 6:5,7,9; 7:6,8,10; 8:7,9; 9:1,6,8,10,11,12;10:7,9; 11:5,9;
 12:5,9; 34\ 1:2,6; 2:3,6; 3:1,2,4; 4:3,5,10,11; 5:4,6,9; 6:1,2,5,7,8,10,11; 7:6,9; 8:6,9; 9:5,7,8; 10:4,6; 11:4,6; 35\
 1:2,3,6; 2:1,4; 3:1,2,4; 4:3,5,10,11; 5:4,6,8; 6:1,2,5,7,8,10,11; 7:6,9; 8:6,9; 9:5,7,8; 10:4,6; 11:4,6; 36\
 1:3,6; 2:3,6; 3:1,2,4; 4:3,5,12; 5:4,6,8,9,10; 6:1,2,5,8; 7:5,8; 8:6,7,12; 9:5,11; 10:5,11; 11:9,11,12; 12:4,8,11; 37\
 1:3,7; 2:3,7; 3:1,4; 4:3,5,11; 5:4,7,8,9,10; 6:5,7,12; 7:1,2,6; 8:5,12; 9:5,11; 10:5,11; 11:4,9,10; 12:4,6,8; 38\
 1:3,11; 2:3,11; 3:1,2,4; 4:3,5; 5:4,6,10,11; 6:5,7,8; 7:6,12; 8:6,12; 9:10,12; 10:5,9,11; 11:1,2,10,12; 12:5,7,8,9,11;
 39\
 1:3,6; 2:3,11; 3:1,2,4; 4:5,11,12; 5:4,6,8,9,10; 6:1,2,5,7; 7:6,12; 8:5,12; 9:5,11; 10:5,11; 11:4,9,10; 12:4,7,8; 40\
 1:2,3,11; 2:1,4; 3:1,4; 4: 2,4,5,6,11; 5:4,7; 6:4,7; 7:5,6,8; 8:7,9,10,11; 9:8,10,11; 10:8,9,11; 11:1,4,8,9,10; 41\
 1:2,8,9; 2:1,3,7; 3:2,4,5; 4:3,6; 5:3,7; 6:4,7,10,11; 7:2,5,6,8,9,10,11; 8:1,7; 9:1,7; 10:6,7,11; 11:6,7,11; 42\
 1:2,10,11; 2:1,3,4,5,9; 3:2,4,6; 4:2,4,6; 5:2,6,7,8; 6:3,4,5; 7:5,9; 8:5,9; 9:2,7,8,10,11; 10:1,9; 43\
 1:2,5,6; 2:1,3,7; 3:2,4,8; 4:3,7; 5:1,7; 6:1,7; 7:2,4,5,6,8,10,11; 8:3,7,9; 9:8,10,11; 10:7,9,11; 11:7,9,10; 44\
 1:2,7,10; 2:1,3,4,5,9; 3:2,6,8; 4:2,5,9; 5:2,4,9; 6:3,9; 7:1,9; 8:3,9; 9:2,3,4,5,7,8,10; 10:1,9; 45\
 1:2,7,8; 2:1,3,9,10,11; 3:2,4,5; 4:3,6; 5:3,6; 6:4,5,7,8,9; 7:1,6; 8:1,6; 9:2,6,10,11; 10:2,9,11; 11:2,9,10; 46\
 1:2,3,7; 2:1,3; 3:1,2,4; 4:3,5,10; 5:4,6,11; 6:5,7,10; 7:1,2,6,8,9; 8:7,10; 9:7,10; 10:4,6,8,9,11; 11:5,10;
 47\
 1:2,3,5; 2:1,3,5; 3:1,2,4,9,10; 4:3,5,7; 5:1,2,4,6,8; 6:5,7; 7:4,6,8,9,10; 8:5,7; 9:3,7; 19:3,7;
 48\
 1:2,3,6; 2:1,3,6; 3:1,2,4; 4:3,5,8,9; 5:4,6,10; 6:1,2,5,7,11; 7:6,10; 8:4,10; 9:4,10; 10:5,7,8,9,11; 11:6,10; 49\
 1:2,3,6; 2:1,3,6; 3:1,2,5,8,9; 4:6,10; 5:3,6,10; 6:1,2,4,5,7; 7:6,10; 8:3,10; 9:3,10; 10:4,5,7,8,9; 50\
 1:2,3,6; 2:1,3,6; 3:1,2,4,5; 4:3,5,9; 5:1,2,4,10,11; 6:3,7,8; 7:6,9; 8:6,9; 9:4,7,8,10,11; 10:5,9; 11:5,9; 51\
 1:2,3,5; 2:1,3,5; 3:1,2,4,6; 4:3,5,7,8,9; 5:1,2,4,10; 6:3,11; 7:4,10; 8:4,11; 9:4,10,11; 10:5,7,9; 11:6,8,9; 52\
 1:2,3,6; 2:1,3,6; 3:1,2,4,9; 4:3,5,7,8,10; 5:4,6,11; 6:1,2,5; 7:4,11; 8:4,9; 9:3,8,10; 10:4,9,11; 11:5,7,10; 53\
 1:2,3,7; 2:1,3,7; 3:1,2,4,8; 4:3,5,6,10; 5:4,6; 6:4,5,7,8,10; 7:1,2,6,9; 8:6,9; 9:7,8,10; 10:4,6,9; 54\
 1:2,3,7; 2:1,3,7; 3:1,2,4; 4:3,5,7,9; 5:4,6,11; 6:5,7; 7:1,2,4,6,8,10,11; 8:7,9; 9:4,8,10; 10:7,9; 55\
 1:2,3,8; 2:1,3,8; 3:1,2,4; 4:3,5,11; 5:4,6,10; 6:5,7,11; 7:6,8,9; 8:1,2,7,11; 9:7,11; 10:5,11; 11:4,6,8,9,10; 56\
 1:2,3,8; 2:1,3,8; 3:1,2,4; 4:3,5,10,11; 5:4,6; 6:5,7,9,10,11; 7:6,8; 8:1,2,7,9,11; 9:6,8; 10:4,6; 11:4,6,8;

57\ 1:2,3,6; 2:1,3,6; 3:1,2,4,8; 4:3,5,7; 5:4,6; 6:1,2,5,7,8,10,11; 7:4,6; 8:3,6,9; 9:8,10,11; 10:6,9; 11:6,9; 58\ 1:2,3,8;
2:1,3,8; 3:1,2,4,5; 4: 4:3,10,11; 5:3,6; 6:5,7,9,10,11; 7:6,8; 8:1,2,5,7,9,10,11; 9:5,8; 10:4,6; 11:4,6,8; 60\ 1:2,3,8;
2:1,3,8; 3:1,2,4; 4:3,5,10,11; 5:4,6,8; 6:5,7,9; 7:6,8,9; 8:1,2,7,9,10,11; 9:6,8; 10:3,8; 11:4,8; 61\ 1:2,3,7; 2::1,3,7;
3:1,2,10,11; 4:3,5,8; 5:4,6,9; 6:5,7; 7:1,2,6,8; 8:4,7,9,10,11; 9:5,8; 10:3,8; 11:3,8; 62\ 1:2,3,8; 2:1,3,8; 3:1,2,4,11;
4:3,5,7; 5:4,6,9; 6:5,7; 7:6,8,9; 8:1,2,3,7; 9:5,7; 10:3,7; 11:3,7; 63/ 1:2,3,11; 2:1,3,11; 3:1,2,4,5; 4:3,7,10,11; 5:3,6;
6:5,7,9; 7:4,6,8; 8:7,10,11; 9:4,6; 10:4,8; 11:1,2,4,8; \end

Література

1. Петренюк В.І. Список 3-минимальних планарних графів, препринт, ГПНБ -31,10,86, #2450-86,~7с.
- 2, Петренюк В.І. Склеювання планарних графів по ланцюгах, Матеріали семінару "Комбінаторні конфігурації та їх застосування",19-20.04.2006р,С.36-39.