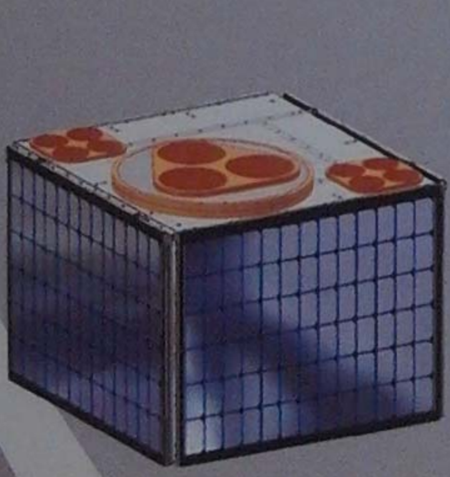
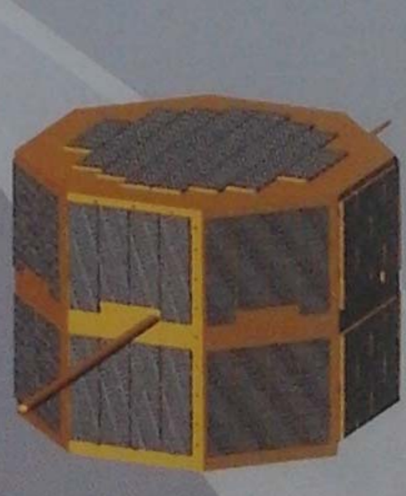
Филимонихин Г.Б.
Филимонихина И.И.
Пирогов В.В.

ВЕЛИЧИНА И ДИНАМИКА ИЗМЕНЕНИЯ УГЛА НУТАЦИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ НЕСУЩЕГО ТЕЛА В ИЗОЛИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ





Г.Б. Филимонихин, И.И. Филимонихина, В.В. Пирогов

ВЕЛИЧИНА И ДИНАМИКА ИЗМЕНЕНИЯ УГЛА НУТАЦИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ НЕСУЩЕГО ТЕЛА В ИЗОЛИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ

Монография

Под общей редакцией Г.Б. Филимонихина

Кировоград
Издатель Лысенко В.Ф.
2015

УДК 531.36 + 629.78
ББК 22.213 + 39.62
Ф531

Печатается по решению ученого совета
Кировоградского национального технического университета
протокол № 4 от 18 декабря 2014 года

Рецензенты:

Горошко Олег Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, профессор-консультант механико-математического факультета;

Давыдов Сергей Александрович – доктор технических наук, профессор, Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, заведующий кафедрой проектирования и конструкций летательных аппаратов;

Кифоренко Борис Никитич – доктор физико-математических наук, профессор, Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, ведущий научный сотрудник отдела динамики сложных систем.

Филимонихин Г.Б.

Ф531 Величина и динамика изменения угла нутации вращающегося несущего тела в изолированной системе: Монография / Г.Б. Филимонихин, И.И. Филимонихина, В.В. Пирогов; под общей редакцией Г.Б. Филимонихина. – Кировоград: издатель Лысенко В.Ф., 2015. – 267 с.

ISBN 978-617-7197-24-8

Решается актуальная проблема по методам выделения установившихся движений и определения условий их условной асимптотической устойчивости для изолированных систем, состоящих из вращающегося несущего тела и различных присоединенных к нему тел, относительному движению которых препятствуют силы вязкого сопротивления. Такими системами моделируются в ряде задач космические аппараты, положение которых в пространстве стабилизируется вращением. Основное внимание уделяется исследованию величины и динамики изменения угла нутации несущего тела.

Для научных и инженерно-технических работников в области теоретической механики и производства космических аппаратов.

ББК 22.213 + 39.62

ISBN 978-617-7197-24-8

ISBN 978-617-7197-24-8

УДК 531.36 + 629.78
ББК 22.213 + 39.62
Ф531

Друкується за рішенням вченої ради
Кіровоградського національного технічного університету
протокол № 4 від 18 грудня 2014 року

Рецензенти:

Горошко Олег Олександрович – доктор фізико-математичних наук, професор, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, професор-консультант механіко-математичного факультету;

Давидов Сергій Олександрович – доктор технічних наук, професор, Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, завідуючий кафедрою проектування й конструкцій літальних апаратів;

Кіфоренко Борис Микитович – доктор фізико-математичних наук, професор, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, провідний науковий співробітник відділу динаміки складних систем.

Філімоніхін Г.Б.

Ф531 Величина і динаміка зміни кута нутації обертового несучого тіла в ізольованій системі: Монографія / Г.Б. Філімоніхін, І.І. Філімоніхіна, В.В. Пирогов; під загальною редакцією Г.Б. Філімоніхіна. – Кіровоград: видавець Лисенко В.Ф., 2015. – 267 с. (Російською).

ISBN 978-617-7197-24-8

Вирішується актуальна проблема щодо методів виділення усталених рухів і визначення умов їх умовної асимптотичної стійкості для ізольованих систем, що складаються з обертового несучого тіла і різних приєднаних до нього тіл, відносному руху яких перешкоджають сили в'язкого опору. Такими системами моделюються в ряді задач космічні апарати, положення яких у просторі стабілізується обертанням. Основна увага приділяється дослідженню величини і динаміки зміни кута нутації несучого тіла.

Для наукових та інженерно-технічних працівників у галузі теоретичної механіки та виробництва космічних апаратів.

ББК 22.213 + 39.62

ISBN 978-617-7197-24-8

ISBN 978-617-7197-24-8

UDC 531.36 + 629.78
ББК 22.213 + 39.62
Ф531

Published by the decision of the academic council
of Kirovograd national technical university
the protocol No. 4 of December 18, 2014

Reviewers:

Goroshko Oleg Aleksandrovich – doctor of physics and mathematics sciences, professor, Taras Shevchenko national university of Kyiv, professor-consultant of faculty of mechanics and mathematics;

Davydov Sergey Aleksandrovich – doctor of technical sciences, professor, Oles Honchar Dnipropetrovsk national university, head of chair of designing and construction of aircrafts;

Kiforenko Boris Nikitich – doctor of physics and mathematics sciences, professor, S.P. Timoshenko Institute of mechanics of NAS Ukraine, leading researcher at the department of dynamics of complex systems.

Filimonikhin G.B.

Ф531 The magnitude and dynamics of change of the angle of nutation of the rotary carrier body in an isolated system: Monograph / G.B. Filimonikhin, I.I. Filimonikhina, V.V. Pirogov; under the general edition of G.B. Filimonikhin. – Kirovograd: publisher Lysenko V.F., 2015. – 267 p. (in Russian).

ISBN 978-617-7197-24-8

We solve the actual problem of the methods of allocation of steady motions and determine the conditions of their conditional asymptotic stability for isolated systems consisting of a rotating carrier body and the various bodies attached to it, which relative motion prevents the forces of viscous resistance. Such systems are modeled in a number of tasks the spacecraft, whose position in space is stabilized by rotation. The main attention is paid to research of magnitude and dynamics of change of the angle of nutation of the carrier body.

For scientific and technical workers in the field of theoretical mechanics and production of spacecrafts.

ББК 22.213 + 39.62

ISBN 978-617-7197-24-8

ISBN 978-617-7197-24-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ И УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Основные сокращения

АБ - (пассивный) автобалансир;
АТТ - абсолютно твердое тело;
ДН - демпфер (угла) нутации;
ИС - изолированная (механическая) система;
КА - космический аппарат;
КГ - корректирующий груз;
НТ - несущее тело;
ПТ - присоединенное тело;
СТ - составное тело (состоит из несущего и присоединенных тел).

Основные условные обозначения

$\mathbf{K}_G$ – вектор кинетического момента ИС;
$\mathbf{K}_{Oj}$ – вектор момента количества движения j-го маятника, найденный относительно точки подвеса – точки O_j;
$\mathbf{\Omega}$ – вектор угловой скорости вращения подвижных осей $O_jX_jY_jZ_j$;
$\boldsymbol{\rho}_{\mu i}$, $\boldsymbol{\rho}_j$ – соответственно относительный радиус-вектор i-ой материальной точки, создающей неуравновешенность, и j-го маятника, проведенные из точки O;
$\mathbf{r}_O$, $\mathbf{r}_{\mu i}$, $\mathbf{r}_j$– соответственно радиус-векторы точки O, i-ой материальной точки, создающей неуравновешенность, и j-ой сосредоточенной массы маятника, найденные относительно точки G;
$\mathbf{v}^r_O$, $\mathbf{v}^r_{\mu i}$, $\mathbf{v}^r_j$ – соответственно относительная скорость точки O_j, i-ой материальной точки, создающей неуравновешенность, и j-го маятника;
$\mathbf{u}_j$ – относительная скорость j-го маятника относительно подвижных осей $O_jX_jY_jZ_j$;
$\mathbf{a}_{O_j}$, $\mathbf{a}^r_{O_j}$, $\mathbf{a}^e_{O_j}$, $\mathbf{a}^c_{O_j}$ – соответственно вектор абсолютного, относительного, переносного и Кориолисового ускорения точки подвеса O_j;
$\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор углового ускорения вращения осей $GX_GY_GZ_G$;
$\mathbf{M}^e_{O_j}$ – главный момент внешних сил, действующих на j-ый маятник, найденный относительно точки O_j;
$\mathbf{J}_j$ – тензор инерции j-го маятника, найденный относительно точки O_j;
$\mathbf{J}_G$ – тензор инерции ИС найден относительно точки G ;

J_x, J_y, J_z – осевые моменты инерции ИС относительно осей $OXYZ$;

J_{xy}, J_{yz}, J_{xz} – центробежные моменты инерции ИС относительно осей $OXYZ$;

A_G, B_G, C_G – главные центральные осевые моменты инерции системы на основном движении.

M_Σ – суммарная масса ИС;

M – масса НТ;

μ_i – масса i-ой материальной точки, создающей неуравновешенность;

m_j – масса j-го маятника;

l_j – длина j-го маятника;

e_i, γ_i – соответственно эксцентриситет и угол, определяющий положение i-ой материальной точки, создающей неуравновешенность, относительно подвижных осей $O_iX_iY_iZ_i$;

d_i – соответственно расстояние, на котором располагается i-ая материальная точка, создающая неуравновешенность, от центра масс НТ относительно оси Z;

h_j – соответственно расстояние, на котором располагается j-ый маятник от центра масс НТ относительно оси Z;

H_j – коэффициент вязкого сопротивления j-го маятника;

φ_j – угол поворота j-го маятника;

x, y, z – координаты центра масс НТ относительно центра масс ИС;

α, β, γ – углы, определяющие угловое положение главных центральных осей инерции НТ.

Индексы обозначают: G – центр масс ИС; O – центр масс НТ.

Штрих обозначает дифференцирование по безразмерному времени τ; точка – дифференцирование по времени t.

ВВЕДЕНИЕ

В ряде задач КА, стабилизируемые вращением, можно моделировать ИС, состоящими из НТ и ПТ, относительному движению которых препятствуют, в частности, силы вязкого сопротивления. Эти системы со временем будут вращаться как одно жесткое целое вокруг оси, на которой лежит неизменный вектор кинетического момента системы. В идеальном случае система должна вращаться вокруг продольной оси НТ – то есть угол нутации должен быть устранен. Соответствующее установившееся движение будем называть основным, а все другие – побочными. На практике со временем будут осуществляться только устойчивые движения. Поэтому исследование таких систем сводится к выделению всех установившихся движений и исследованию их условной устойчивости (при условиях, что имеют место законы сохранения движения центра масс и кинетического момента системы).

Классическая схема исследования таких систем, примененная в работах Алпатова А.П., Алпера Дж.Р., Артюхина Ю.П., Болграбской И.А., Васильева В.Г., Воробъёва В.М., Горошко О.А., Исакова А.В., Каргу Л.И., Ковтуненко В.М., Кононыхина Г.А., Мирера С.А., Овчинникова М.Ю., Савченко А.Я., Сазонова В.В., Сарычева В.А., Симаева В.Л., Харламова П.В., Харламовой О.И., Хорошилова В.С., Alper J.R., Bainum P.M., Fuechsel P.G., Mackison D.L., Taylor R.S. и других ученых использует для выделения установившихся движений дифференциальные уравнения движения системы, а для оценки их устойчивости – первый метод Ляпунова. Из-за большого количества степеней свободы таких систем получаемые дифференциальные уравнения трудно обозримы и фактически не поддаются аналитическому анализу. Также большое количество установившихся движений делает исследования громоздкими. Но подход позволяет оценивать скорость протекания переходных процессов в системе и выбирать оптимальные значения ее параметров.

Другие - энергетические подходы, основаны Лагранжем и Раусом. К ним относится теория устойчивости стационарных движений систем с первыми и циклическими интегралами. Они позволяют без составления дифференциальных уравнений движения системы выделять все установившиеся движения и получать условия их условной устойчивости. Развитию этих подходов и исследованию с их применением устойчивости движений указанных систем посвящены работы Артюхина Ю.П., Бондаренко В.М., Воротникова В.И., Гашененко И.Н., Гробова В.А., Докучаева Л.В., Исакова А.В., Игнатьева А.О., Карапетяна А.В., Каргу Л.И., Ковтуненко В.М., Кононихина Г.А., Кубенко В.Д., Мартынюка А.А., Озиранера А.С.,

ISBN 978-617-7197-24-8

Пожарицкого Г.К., Рейтера Г.С., Румянцева В.В., Савченко А.Я., Сазонова В.В., Симаева В.Л., Томсона У.Т., Харламова П.В., Haseltine W.R., Likins P.W., Mingori D.L. и других ученых.

Практическое применение указанных выше методов для исследования динамики вращающихся ИС осложнено тем, что они не конкретизированы. Так, не оговорен выбор обобщенных координат, не конкретизирован вид основных динамических величин, закон их изменения, вид дифференциальных уравнений движения и их интегралов и т.п. Поэтому при решении каждой конкретной задачи приходиться заново возвращаться к этим вопросам, что делает решения задач громоздкими.

Вращению тела вокруг продольной оси мешают два фактора – неточность придания начального вращения НТ и его неуравновешенность относительно продольной оси. Для уменьшения первой составляющей угла нутации используются соответствующие демпферы. В подавляющем большинстве работ в исследованиях допускается, что масса ПТ демпфера намного меньше массы НТ и потому главные центральные оси инерции системы и НТ – совпадают. Это предположение упрощает проведение аналитических исследований, но при этом теряется точность решения задач и ряд явлений. Так, такие предположения не позволяют оценивать остаточные углы нутации в случае, когда ПТ могут сами создавать неуравновешенность. В некоторых работах указывается, что вторую составляющую угла нутации можно уменьшать пассивными АБ. ПТ пассивного АБ могут приходить в то положение, в котором уравновешивают НТ. Но теоретически на сегодня такая возможность не исследована, в том числе не исследованы ИС с конкретными типами АБ.

В связи с вышесказанным, актуально конкретизировать для указанных систем энергетические методы, основанные Лагранжем и Раусом. Также актуально с их применением установить условия условной устойчивости основных движений для ряда систем, актуальных с точки зрения практики. Также актуально построить теоретико-механические модели ИС, состоящих из вращающегося неуравновешенного НТ и маятниковых АБ, исследовать условную устойчивость установившихся движений, оценить переходные процессы и остаточный угол нутации.

В цикле работ авторов монографии [1-43] были проведены исследования по решению указанных научных проблем. В результате были впервые получены такие **наиболее существенные результаты**.

1. Для вращающихся ИС с вязким рассеиванием энергии конкретизировано применение энергетических методов, основанных Лагранжем и Раусом для составления дифференциальных уравнений движения и получения их (первых и вторых) интегралов, получения уравнений стационарных движений, оценки условной устойчивости этих движений.

2. Впервые установлено существование двух независимых тенденций при работе АБ любого типа: уменьшение угла нутации, вызванного неточным приданием начального вращения НТ только в случае сплюснутого СТ (работа АБ как демпфера угла нутации); тенденция к приходу тел АБ в положение, в котором они уравновешивают НТ (работа АБ как автобалансира) в случаях одного или двух АБ и вытянутого СТ, или сплюснутого СТ и одного АБ, расположенного вблизи центра масс системы.

Впервые установлено, что два АБ, установленные в двух разных плоскостях уравновешивания НТ, не могут устранить угол нутации, вызванный неуравновешенностью, а полностью устранить угол нутации можно только в случае статически неуравновешенного НТ, при условиях, что АБ установлен в плоскости неуравновешенности, расстояние от центра масс СТ до плоскости уравновешивания не превышает определенного предельного значения и СТ – сплюснуто.

3. Впервые, без каких-либо ограничений на массы ПТ, установлено, что: для двухмаятникового или жидкостного демпферов для устойчивости основного движения необходимо и достаточно, чтобы СТ было сплюснуто и расстояние от центра масс СТ до плоскости уравновешивания не превышало определенного предельного значения; для упруго закрепленного стержня, ориентированного по продольной оси НТ, для устойчивости основного движения необходимо и достаточно, чтобы СТ было сплюснуто и система вращалась с угловыми скоростями, не превышающими определенное предельное значение.

4. Впервые построены плоская и пространственная модели ИС, состоящие из неуравновешенного НТ и математических маятников, насаженных на его продольную ось, относительному движению которых препятствуют силы вязкого сопротивления, а также модель статически неуравновешенного НТ, совершающего плоскопараллельное движение, уравновешиваемого двумя связанными АТТ, вращающимися вокруг продольной и поперечных осей НТ.

5. С учетом аналогии в работе шаровых, маятниковых и жидкостных АБ впервые исследован процесс устранения больших углов нутации этими АБ, и оценен остаточный угол при установке этих АБ на большее, чем предельно допустимое расстояние до центра масс НТ.

6. В рамках моделей ИС с НТ, совершающим плоскопаралельное движение, впервые установлено, что побочные движения неустойчивы, а основные – асимптотически устойчивы.

7. В рамках пространственной модели ИС, при условии, что плоскость уравновешивания маятников совпадает с плоскостью статической неуравновешенности и расстояние от центра масс НТ до плоскости уравновешивания не превышает определенного предельного

значения, и в рамках плоской модели ИС с двумя маятниками впервые установлено, что в случае отсутствия неуравновешенности или в случае максимальной неуравновешенности, которую могут уравновесить маятники, у системы существует и условно асимптотически устойчива, соответственно, однопараметрическая семья или псевдосемья основных движений, при этом нулевой корень характеристического уравнения отвечает за переход от одного к другому установившемуся движению из семьи или псевдосемьи и не влияет на ее асимптотическую устойчивость.

Теоретическое и практическое значение полученных результатов. Теоретическое значение заключается в том, что с помощью конкретизированных энергетических подходов можно решить широкий класс задач по исследованию устойчивости установившихся движений вращающихся ИС с вязким рассеиванием энергии. Практическое значение заключается в том, что разработан единственный пассивный способ устранения угла нутации неуравновешенного вращающегося спутника пассивными АБ (технические решения защищены патентом Украины), также определены условия устойчивости основных движений различных ИС, моделирующих искусственные спутники Земли, что может быть использовано при проектировании и расчете параметров этих спутников.

Также, полученные результаты могут быть использованы при проектировании АБ-демпферов для КА, положение которых в пространстве стабилизируется вращением.

Результаты работы используются в учебном процессе кафедры деталей машин и прикладной механики КНТУ и вошли в заключительный отчет госбюджетной темы МОН Украины "Уравновешивание и виброзащита вращающихся тел", госрегистрация № 0108U001326.

Структура монографии. В настоящей монографии излагаются результаты, полученные авторами в работах [1-43]. Монография состоит из вступления, 8 глав, выводов, списка литературных источников.

В главе 1 проведен критический обзор литературы по динамике и устойчивости движения вращающихся ИС, в том числе по динамике КА, положение которых в пространстве стабилизируется вращением. В результате сделана оценка существующего уровня теории в указанной области, обоснованы цель и задачи исследований.

В главе 2 обосновывается выбор методов исследования динамики вращающихся ИС. Для теоретического исследования динамики таких систем принято решение использовать основные теоремы динамики, теорию условной устойчивости стационарных движений нелинейных автономных систем с первыми, в частности – циклическими интегралами, первый метод Ляпунова. Для компьютерного моделирования динамики таких систем принято решение использовать компьютерную САПР SolidWorks и ее модуль Cosmos Motion.

В главе 3 конкретизируются методы исследования динамики и устойчивости движений указанных систем, основанные на методе Рауса для систем с первыми, в частности – циклическими интегралами. Конкретизируется вид основных динамических величин, особенности выбора обобщенных координат, вид дифференциальных уравнений движения системы, уравнений установившихся движений, условий условной асимптотической устойчивости стационарных движений.

В главе 4 с использованием конкретизированного метода Рауса и эвристического критерия определяются условия уравновешивания пассивными АБ вращающегося НТ, входящего в состав ИС. Полученные результаты проверяются компьютерным моделированием с использованием компьютерной САПР SolidWorks и ее модуля Cosmos Motion.

В главе 5 применяется конкретизированный метод Рауса для систем с циклическими интегралами к исследованию устойчивости основных движений различных вращающихся ИС. Во всех моделях оставляется минимальное количество степеней свободы системы, позволяющее исследовать потерю устойчивости основным движением.

В главе 6 доказывается аналогия в работе маятниковых, шаровых и жидкостных АБ при устранении больших углов нутации, вызванных неточным приданием начального вращения НТ, и возникновении остаточного угла нутации из-за установки этих АБ на расстоянии до центра масс НТ, превышающем предельно допустимое. Оценивается скорость уменьшения больших углов нутации и оценивается остаточный угол нутации, вызванный неправильной установкой АБ на НТ.

В главе 7 исследуется процесс статического уравновешивания НТ, совершающего плоскопараллельное движение многомаятниковым (многошаровым) АБ или двумя связанными АТТ, вращающимися вокруг продольной и поперечных осей НТ.

В главе 8 исследуется процесс устранения двухмаятниковым (двухшаровым) АБ малых углов нутации НТ. Строится пространственная (в которой НТ осуществляет пространственное движение) теоретико-механическая модель уравновешивания маятниками НТ в ИС. В рамках этой модели ИС, в случае статически неуравновешенного НТ с двумя одинаковыми маятниками, ищутся основные установившиеся движения, исследуется их условная устойчивость первым методом Ляпунова при условии, что масса маятников намного меньше массы НТ. С помощью числового эксперимента исследуется влияние различных параметров системы на скорость затухания переходных процессов.

Соавторами глав 1, 2, 6 монографии являются Филимонихин Г.Б., Филимонихина И.И., Пирогов В.В., глав 3, 4, 5 – Филимонихин Г.Б., Филимонихина И.И., глав 7, 8 – Филимонихин Г.Б., Пирогов В.В.

ГЛАВА 1.
СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА, ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЙ

Проводится обзор проблем техники, в которых используются модели ИС, состоящих из вращающегося НТ и ПТ, относительному движению которых препятствуют силы вязкого сопротивления. Проводится обзор работ по исследованию динамики таких систем, в частности по определению стационарных (установившихся) движений таких систем и оценки их условной устойчивости и скорости протекания переходных процессов. Проводится обзор работ по теории условной устойчивости стационарных движений нелинейных автономных, в частности механических систем. Формулируются цель и задачи исследований.

ISBN 978-617-7197-24-8

1.1. Проблемы космической техники, приводящие к задачам исследования угла нутации вращающегося НТ в ИС

1.1.1. Общий обзор проблем, возникающих при одноосной стабилизации КА

Обзор имеющейся литературы [44-55, 57-60, 62-64, 68-74, 82, 83, 86-91, 94-97, 99, 106-110, 120-122, 124, 128, 129, 131, 134, 136, 149, 157, 161, 162, 170, 178, 179, 183, 184, 191-193, 198, 199, 201], национальных образовательных и аэрокосмических программ разных стран показывает, что в космической технике нашли широкое применение КА, положение которых в пространстве стабилизируется вращением. Это - так называемая одноосная стабилизация. Она обеспечивает заданную в пространстве ориентацию продольной оси КА. Такая стабилизация используется на ряде спутников связи, метеорологических, исследовательских и т.п., на КА во время консервирования, при межпланетном перелете и т.п.

При одноосной стабилизации возникают две технические проблемы [99, 124, 134, 178]. Первая – ориентации, заключающаяся в том, чтобы обеспечить надлежащую ориентация в пространстве оси вращения КА, вторая – стабилизации, заключающаяся в том, чтобы обеспечить вращение КА вокруг собственной продольной оси, то есть устранить или минимизировать угол нутации.

При одноосной стабилизации используются активные и пассивные способы ориентации. Активная ориентация расходует рабочее тело и поэтому быстротечна. При пассивной ориентации ось вращения КА направляется перпендикулярно плоскости орбиты или к центру орбиты (рис. 1.1.1).

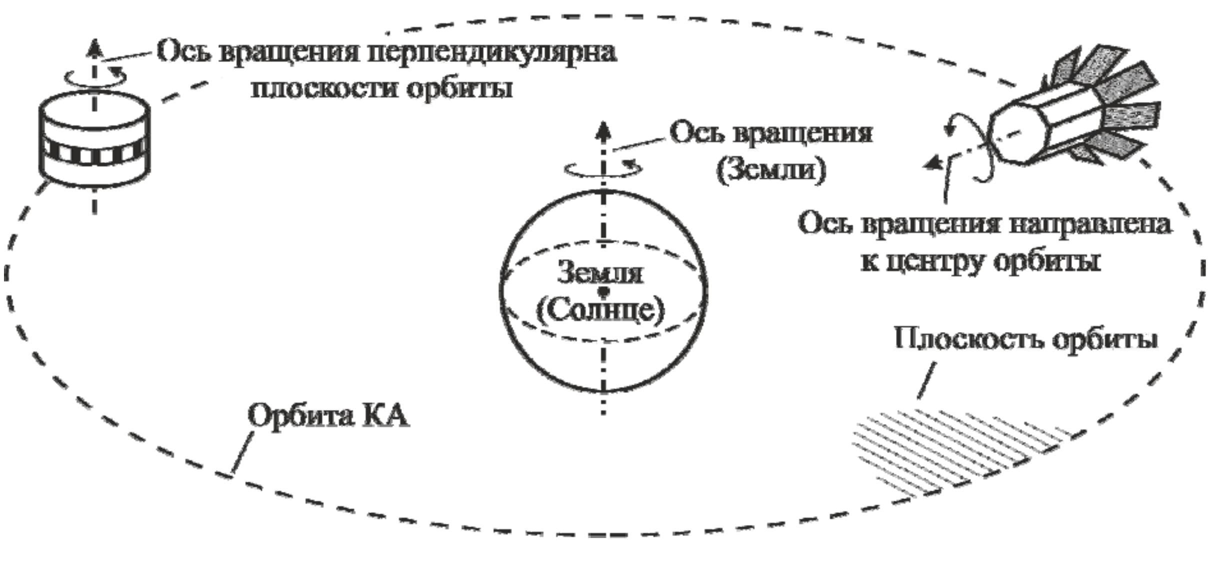
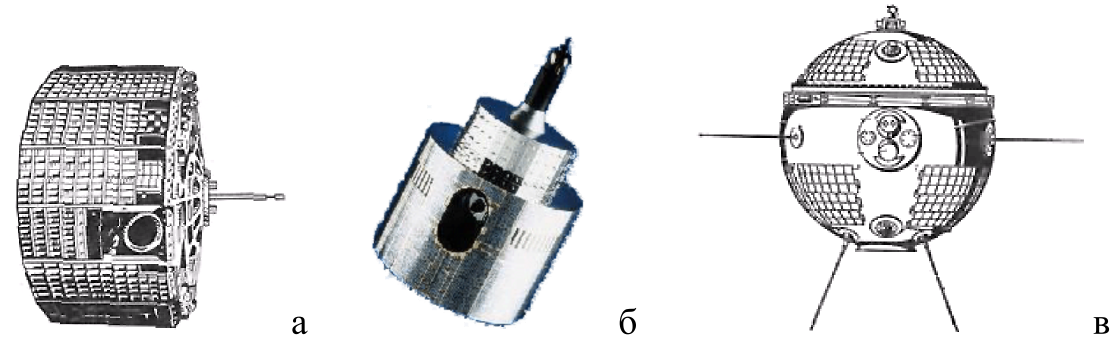


Рис. 1.1.1. Пассивная ориентация оси вращения КА, стабилизированного вращением

В первом случае для ориентации используется магнитное поле Земли, во втором – силы гравитации или солнечный ветер.

Пассивный процесс ориентации обеспечивается малыми внешними силами и поэтому длится от нескольких часов до нескольких суток.

КА, стабилизируемые вращением, могут иметь различную форму (рис. 1.1.2). В идеальном случае они должны перманентно вращаться вокруг своей продольной оси. Будем называть такое движение – основным.



а б в

Рис. 1.1.2. Примеры КА различной формы, стабилизируемых вращением:
а – TIROS IX,X, цилиндрические, метеорологические, США, в 1965 г.;
б – Meteosat - 1-7, цилиндрические, метеорологические, Германия, 1977-1997 г.г.;
в – Explorer 32 (AE-B), сферический, исследовательский США, 1966 г.

В работах Каргу Л.И. [134], Майорова В.А. [149], Попова В.И. [178], Рейтера Г.С., Томсона У.Т. [183], Токаря Е.Н. [197] и др., были выявлены следующие необходимые условия устойчивости основных движений:

- продольная ось КА должна быть главной центральной;
- осевой момент инерции C относительно продольной оси КА должен быть больше осевых моментов инерции A и B относительно поперечных осей (такие КА в ряде работ называют устойчивыми [45, 99, 109, 128, 129, 134, 178, 183]).

Полному устранению угла нутации мешают следующие причины.

1. Неточность придания начального вращения КА. Из-за нее КА в начальный момент времени имеет составляющие вектора угловой скорости, направленные перпендикулярно его продольной оси. Эти составляющие гасятся применением ДН [61, 79, 99, 124, 134, 178, 183]. Последние состоят из подвижных относительно КА масс, чувствительных к переменному полю ускорений внутри КА, возникающему, если КА не осуществляет регулярную прецессию. Переменное поле ускорений заставляет двигаться тела демпфера относительно КА. Относительному движению этих тел препятствуют силы вязкого сопротивления. При этом рассеивается энергия до тех пор, пока относительное движение тел демпфера не прекратится. Но это возможно только при перманентном вращении КА вокруг главной центральной оси инерции КА.

Демпфер обеспечивает быстрое устранение угла нутации (за несколько оборотов КА или за несколько минут). Поэтому, в отличие от процесса пассивной ориентации, это быстротечный процесс.

В роботе Рейтера Г.С., Томсона У.Т. [183], показано, что в результате относительного движения подвижных частей КА и движения тел внутри ДН, процесс устранения угла нутации сопровождается диссипацией энергии. При этом КА стремится к движению с минимальной энергией. При выполнении необходимых условий таким движением является перманентное вращение КА вокруг собственной продольной оси.

Конструкция различных ДН будет рассмотрена ниже.

2. Неуравновешенность КА относительно продольной оси. Приводит к тому, что продольная ось КА не является главной центральной осью инерции. Поэтому у неуравновешенного КА возникает неустранимый, остаточный угол нутации. Для его уменьшения КА уравновешивается на этапе изготовления. Оценке остаточного угла нутации, вызванного неуравновешенностью, посвящены работы Болграбской И.А., Игнатьева А.О., Кононихина Г.А., Савченко А.Я. [104], Токаря Е.М. [197] и других ученых. В нормально работающих спутниках остаточный угол нутации составляет 0,5÷5 градусов и вызван неуравновешенностью КА относительно продольной оси.

3. Вместе с основным режимом движения КА существуют альтернативные – побочные. В различных установившихся движениях ПТ (антенны, солнечные батареи, тела, образующие демпферы угла нутации, жидкость в топливных баках и тому подобное) занимают разные положения относительно КА. При этом сам КА по-разному ориентируется относительно оси вращения. На практике из всех теоретически возможных установившихся движений будут осуществляться только устойчивые. Поэтому возникает проблема проектирования таких КА, у которых основное движение устойчиво, а побочные – неустойчивы.

В космической технике часто вместе используются пассивный способ одноосной ориентации и пассивный способ демпфирования угла нутации. Это наиболее дешевые и надежные способы, потому что не нуждаются в расходах, как внутренней энергии, так и рабочего тела. Обзор публикаций [47, 51, 55, 62-67, 70, 74, 84, 86, 88-91, 94, 96, 101, 116, 120, 124, 128, 130, 134, 150-153, 169, 171, 178, 179, 183, 184, 196, 199, 201] показывает, что эти методы использовались и используются на ряде метеорологических, исследовательских и спутниках связи серии "Pioneer", "Explorer", "TIROS", "TELSTAR", "SYNKOM", "ATC", "ESSA", "Meteosat", "Gms", "SCD", "HESSI", "THC-0" (табл. 1.1.1). На целесообразность использования этих методов на современных микро и наноспутниках указывают сегодняшние образовательные, аэрокосмические и другие программы, в частности США ("CubeSat", "ION-F", "Constellation Pathfinder"), Японии ("TokyoTech"), Канады ("CanX"), Италии ("UniSat"), России ("ПСИНОМ"), Украины ("Освіта-КА") и др.

В связи с научно-техническим прогрессом, в космической отрасли в последние годы прослеживается тенденция уменьшения размеров и массы КА, а вместе с этим постоянно растет количество малых КА, на которых используют пассивные способы ориентации и устранения угла нутации. Поэтому растет актуальность решения проблем, связанных с одноосной стабилизацией КА.

Таблица 1.1.1

Некоторые КА, стабилизированные вращением с пассивными ДН

КА, назначение (страна или организация)	Год (годы) запуска	Класс (масса, кг)	Частота вращения КА об/мин	Тип ДН (остаточный угол нутации, град)
SYNKOM, связи (США)	1963	-	160	Ж ($0{,}5^0…2{,}5^0$)
TIROS - IX, X, метео (США)	1965	мини (135)	10	РМ
ATS 1, связи (США)	1966	мини (351)	100	Ж ($0{,}5^0…2{,}5^0$)
GOES - A, B,… H, метео (США)	1975-1987	мини (399)	100	Ж ($0{,}5^0…2{,}5^0$)
Meteosat 1,2.7, метео (Eumetsat)	1977-1997	мини (322)	100	Ж ($0{,}5^0…1{,}5^0$)
Gms - 1,2.5, метео (Японские США)	1977-1995	мини (320)	100	Ж ($0{,}5^0…1{,}5^0$)
SCD - 2, связи (Бразилия)	1998	мини (117)	228	Ж ($0{,}5^0…2{,}5^0$)
HESSI, исследовательский (США)	2002	мини (293)	15	Ж ($0{,}5^0…5^0$)
Rstar и Vstar, связи (Япония)	2007	микро (53)	10	-
MSG - 1,2,3 метео (Eumetsat)	2002, 2005, 2012	мини (500)	100	Ж ($0{,}5^0…1{,}5^0$)
РМ - резонансно-механический ДН; Ж - жидкостной ДН				

Обзор литературы показывает, что при исследовании процесса пассивной ориентации КА, стабилизируемых вращением, используются модели неизолированных систем [73, 75-78, 99, 104, 111-114, 117-119, 124, 131, 134, 135, 138-143, 145, 159, 161, 162, 166, 177-181, 184, 190]. Это объясняется тем, что такой процесс ориентации – долговременный, так как происходит под действием небольших внешних относительно КА сил. При исследовании угла нутации и различных конфигураций КА в разных установившихся движениях используются ИС [44-46, 48-50, 52-55, 57-60, 64, 68, 70-73, 82, 83, 87, 88, 92, 93, 95, 97, 99, 106-110, 121, 122, 124, 128, 129, 134, 136, 149, 157, 170, 175, 178, 179, 183, 186, 189, 191-193, 198, 199, 201]. Это объясняется тем, что изменение (демпфирование) угла нутации и приход КА к определенному установившемуся вращательному движению – быстротечный процесс, на который небольшие внешние силы практически не влияют.

Следовательно, основные задачи в космической технике, моделируемые вращающимися ИС – это задачи: устранения демпферами угла нутации вращающегося КА; определения всех возможных установившихся движений КА и оценки их устойчивости; оценки времени устранения угла нутации (длительности переходных процессов); оценки остаточного угла нутации.

В дальнейшем рассматриваются ИС, состоящие из вращающегося абсолютно твердого НТ и ПТ в виде материальных точек или других твердых тел. ПТ могут двигаться относительно НТ, при этом их относительному движению препятствуют силы вязкого сопротивления. Такие системы могут иметь элементы, способные накапливать потенциальную энергию.

1.1.2. Некоторые новые технические проблемы, представляющие интерес для практики

1. Об использовании пассивных АБ в качестве ДН. В работах LaBarber J.A., Wagner Kurt J., Oaks Sherman [80] и Mercer G.E. [85] заявляется теоретическая возможность устранения угла нутации КА от неуравновешенности шаровыми АБ. Но возможность такого применения АБ не обосновывается, как и не определяются условия, при которых вращательное движение неуравновешенного КА вокруг собственной продольной оси будет устойчивым. Следует отметить, что АБ подобны по принципу своей работы пассивным демпферам и дополнительно проявляют свойство устранять неуравновешенность АТТ (статическую или динамическую). Они нашли широкое применение для уравновешивания на ходу быстровращающихся роторов – CD/DVD дисков, абразивных кругов и дисков ручных шлифовальных машин, барабанов экстракторов, центрифуг, сепараторов центробежных машин, и т.д. [56, 81, 85, 102, 103, 123, 126, 160, 164, 168, 194, 202-204]. Поэтому актуально определить условия, при которых один или несколько АБ обеспечат вращение неуравновешенного НТ вокруг его продольной оси. Конечно, это будет возможно при условии, что тела АБ будут сами приходить в то положение, в котором устраняют неуравновешенность НТ.

2. Необходимость исследования работы ДН в двух режимах - устранение больших и малых углов нутации. В работах Hubert C., Swanson D. [70], Рейтера Г.С., Томсона У.Т. [183], был исследован процесс устранения жидкостным ДН угла нутации КА, стабилизируемого вращением. Жидкостный ДН, состоит из кольцевой трубки и жидкости, частично ее заполняющей. В результате исследований были выявлены два режима работы жидкостного ДН (рис. 1.1.2):

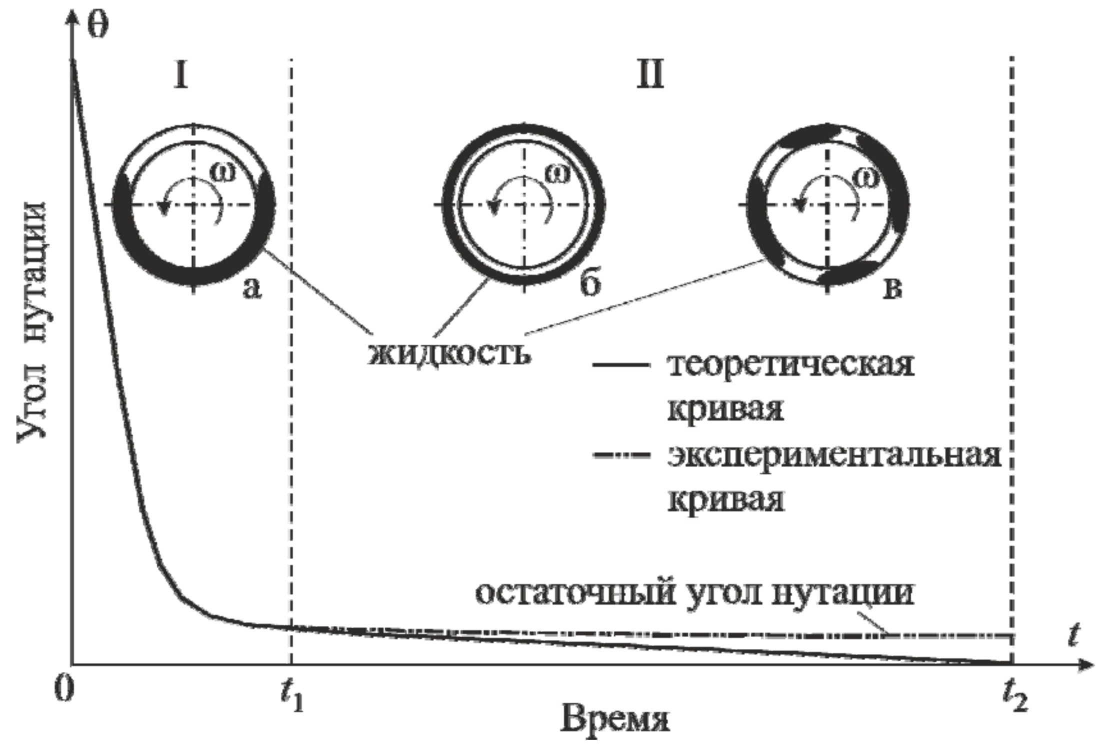


Рис. 1.1.2. Режимы устранения угла нутации пассивными ДН:
I – быстрый режим устранения больших углов нутации;
II – медленный режим устранения малых углов нутации

- в первом режиме работы, за промежуток времени от 0 до t_1 жидкостной ДН быстро устраняет большие углы нутации (участок I теоретической кривой, рис. 1.1.2), при этом жидкость в трубке собрана вместе, течет по трубке, заполняя собой все поперечное сечение, как это показано на рис. 1.1.2, а;

- во втором режиме работы, за промежуток времени от t_1 до t_2 остаточный угол нутации медленно уменьшается к нулю в результате микродвижений жидкости относительно трубки (участок II теоретической кривой, рис. 1.1.2), при этом жидкость равномерно растекается по трубке, образует свободную поверхность и почти синхронно движется с трубкой, как показано на рис. 1.1.2, б.

При исследовании процесса устранения угла нутации возникает необходимость в исследовании двух режимов работы пассивных ДН на КА, стабилизируемом вращением.

3. Необходимость исследования устойчивости различных установившихся движений, в частности в случае, когда ПТ могут сами создавать неуравновешенность.

Как оказалось, на практике, даже при выполнении необходимых условий устранения угла нутации, пассивные ДН не устраняют его полностью. По данным ряда работ Hubert C., Swanson D. [70], Каргу Л.И. [134], Попова В.И. [178], Рейтера Г.С., Томсона У.Т. [183], остаточный угол нутации на разных КА представлял $0{,}5 \div 5$ градусов и наблюдался даже через большой промежуток времени, когда КА вращался вокруг вектора кинетического момента с постоянной угловой скоростью.

Попытка объяснить возникновение остаточного угла нутации была сделана в работах Hubert C., Swanson D. [70], Рейтера Г.С., Томсона У.Т. [183]. Так, для ртутного ДН, возникновение остаточного угла нутации объяснялось неуравновешенностью, образованной из-за большого поверхностного натяжение ртути. Поверхностные силы натяжения мешают ртути равномерно распределиться по трубке (при малых углах нутации), как это показано на рис. 1.1.2, б. Ртуть собирается отдельными частицами - рис. 1.1.2, в. Так как неуравновешенность от ртути не является максимально-возможной, то такая модель не объясняет возникновения больших остаточных углов нутации. Отметим, что такая модель поведения жидкостного ДН не объясняет также большие остаточные углы нутации, возникающие при использовании, например, спиртовых ДН (известно, что спирт имеет незначительное поверхностное натяжение).

В работах Alper J.R. [45], Amieux J.C., Dureigne M. [46], Chinnery A.E., Hall C.D. [55], Cloutier G.J. [57-59], Cochran J.E., Thompson J.A. [60], Haseltine W.R. [68], Hubert C., Swanson D. [70], Likins P.W. [82], Newkirk H.L. [88], Sarychev V.A., Sazonov V.V. [92], Taylor R.S. [95] и др. было показано, что ДН могут значительно влиять на движение КА. При этом устойчивыми могут быть движения, в которых КА вращается не вокруг продольной оси, а вокруг близкой к ней оси.

Все это приводит к необходимости исследования устойчивости различных установившихся движений, в частности в случаях, когда ПТ могут сами создавать неуравновешенность.

1.2. Обзор работ по исследованию условной устойчивости стационарных движений вращающихся ИС, моделирующих движение КА

1.2.1. Общая характеристика работ

Работа ДН изучалась в работах Alper J.R. [45, 1965], Amieux J.C., Dureigne M. [46, 1972], Chinnery A.E., Hall C.D. [55, 1995], Cloutier G.J. [57 – 1969, 58 – 1972, 59 – 1976], Cochran J.E., Thompson J.A. [60, 1980], Haseltine W.R. [68, 1962], Likins P.W. [82, 1966], Newkirk H.L. [88, 1965], Sarychev V.A., Sazonov V.V. [92, 1976], Taylor R.S. [95, 1966], Васильева В.Г. [107, 108, 110, 1999], Васильева В.Г., Семенюк М.В. [106, 2001], Васильева В.Г., Ковтуненко В.М. [109, 1969], Гробова В.А., Сивенюка В.В. [121, 1973], Гробова В.А. [122, 1969], Докучаева Л.В., Рабиновича Б.И. [128, 1999], Мирера С.А., Сарычева В.А. [157, 1997], Сарычева В.А., Сазонова В.В. [191 – 1975, 192 – 1974], Сарычева В.А., Мирера С.А., Исакова А.В. [193, 1988] и других ученных.

В работах Де Бра Д.Б. [124], Каргу Л.И. [134], Попова В.И. [178], Рейтера Г.С., Томсона У.Т. [183] и других рассмотрен принцип работы ДН без исследования их динамики.

В работе Рейтера Г.С., Томсона У.Т. [183] описывается принцип работы ДН, их конструкция и получены основные условия, при которых устройства будут уменьшать угол нутации. Рассмотрим результаты этой работы более подробно.

Работа ДН заключается в следующем. Из-за неточности придания начального вращения изолированному осесимметричному НТ оно начинает осуществлять сложное вращательное движение вокруг своего центра масс. При этом НТ вращается вокруг собственной продольной оси, а продольная ось – вокруг неизменного вектора кинетического момента НТ. Это порождает внутри НТ переменное поле ускорений. Если внутрь НТ поместить ПТ с возможностью относительного движения, то под действием переменного поля ускорений эти тела начнут двигаться. Если относительным движениям ПТ будут препятствовать силы вязкого сопротивления, то будет рассеиваться энергия. Поскольку к системе (НТ – ПТ) не подводится энергия, то со временем относительное движение ПТ прекратится. Это будет возможно при условии, что НТ начнет вращаться вместе с ПТ как одно жесткое целое вокруг вектора кинетического момента.

В работе был описан принцип работы механического демпфера, состоящего из упруго-вязко закрепленного тела, установленного с возможностью прямолинейного движения относительно НТ. Также была описана работа жидкостного демпфера, состоящего из полого кольца (тора), частично заполненного жидкостью (ртутью), установленного соосно продольной оси НТ. Были приведены результаты экспериментальных данных, в соответствии с которыми указанные демпферы полностью не устраняют угол нутации. В работе это объясняется застоем ПТ в механическом демпфере из-за сухого трения и неравномерным растеканием ртути по трубке – в жидкостном демпфере.

КА, у которых продольный осевой момент инерции C больше поперечных A, B, называются во многих работах устойчивыми [45, 99, 109, 128, 129, 134, 178, 183]. По аналогии с роторными системами мы будем называть их сплюснутыми (короткими $C > A, B$), сферическими ($C \approx A \approx B$) и вытянутыми (длинными $C < A, B$). Такая терминология более удачная, потому что даже в случае "устойчивых" спутников основные движения могут быть неустойчивыми.

Исследованию динамики вращающихся КА с пассивными маятниковыми демпферами угла нутации, образованными одним и больше маятниками, прикрепленными к НТ вязкими или упруго-вязкими шарнирами, посвящены работы: Гробова В.А. [121, 122], Мирера С.А., Сарычева В.А. [157], Сарычева В.А., Сазонова В.В. [191, 192], Сарычева В.А., Мирера С.А., Исакова А.В. [193], Alper J.R. [45], Taylor R.S. [95] - рассмотрена динамика АТТ с одним маятником; Васильева В.Г., Ковтуненко В.М. [109] – рассмотрена динамика АТТ с четырьмя маятниками; Васильева В.Г. [107, 108, 110], Алпатова А.П., Закржевского А.Е., Хорошилова В.С. [184] – рассмотрена динамика вращающегося КА с упругими стержнями.

Исследованию динамики КА с пассивными жидкостными демпферами угла нутации или жидкостью посвящены работы Артюхина Ю.П., Каргу Л.И., Симаева В.Л. [99], Докучаева Л.С. [129], Луковского И.А. [147], Моисеева Н.Н., Румянцева В.В. [159], Мытарева А.И., Рабиновича Б.И. [161, 162], Пожарицкого Г.К., Румянцева В.В. [177], Рабиновича Б.И. [180], Рабиновича Б.И., Мытарева А.И., Клишева О.П. [181], Румянцева В.В. [187], Харламова П.С. [205] и других ученых.

Анализ примененных в работах моделей механических систем выявляет такие общие свойства:

1) системы – изолированы;

2) в НТ отсутствует неуравновешенность (статическая или динамическая) относительно его продольной оси, то есть продольная ось является главной центральной осью инерции тела;

3) на ПТ при их относительном движении действуют силы вязкого сопротивления и могут действовать силы упругости;

4) считается, что масса ПТ намного меньше массы НТ и поэтому центр масс всей системы совпадает с центром масс НТ.

В указанных работах было показано, что ПТ коренным образом изменяют движение НТ. Так было установлено, что: у системы появляются новые установившиеся движения; при определенных условиях угол нутации может стремиться к нулю (устойчивый спутник), может увеличиваться до 90^0 (неустойчивый спутник, который через определенное время начинает двигаться «кувырком»), а может стремиться к определенной величине (остаточному углу нутации – спутник устойчивый, но неустойчиво основное движение). Следует заметить, что предположение 4 существенно упрощает систему дифференциальных уравнений движения системы, потому что отсутствуют дифференциальные уравнения движения центра масс системы. Но при этом возможна потеря ряда существенных эффектов, вносимых ПТ в движение системы. В частности, такие предположения делают невозможным исследование явления автобалансировки, потому что для его моделирования надо учитывать влияние ПТ на массо-инерционные характеристики системы.

Как отмечалось выше, рассматриваемые системы теоретически могут совершать несколько стационарных (установившихся) движений и даже их семьи. Но среди всех возможных движений будут осуществляться только устойчивые. Поэтому при исследовании динамики рассматриваемых систем возникают такие задачи:

- выделение всех возможных стационарных движений системы;
- определение в пространстве параметров областей условной устойчивости этих движений (при условии, что выполняются интегралы движений - законы сохранения);
- оценка скорости прихода системы к определенному стационарному движению и подбор параметров, обеспечивающих самое быстрое затухание переходных процессов.

В указанных выше работах используются два различных метода исследований: основанный на первом методе Ляпунова (по уравнениям первого приближения); основанный на теории Рауса (исследование на условный экстремум энергетических функций, невозрастающих вдоль траектории движения системы). Рассмотрим соответствующие работы более подробно.

1.2.2. Особенности применения первого метода Ляпунова

Исследованию условной устойчивости установившихся движений ИС, с помощью подхода, ставшего классическим при решении подобных задач, и в основе которого лежит первый метод Ляпунова, посвящены работы Васильева В.Г., Семенюк Н.В. [106], Васильева В.Г. [107, 108, 110], Васильева В.Г., Ковтуненко В.М. [109], Докучаева Л.В., Рабиновича Б.И. [128], Мирера С.А., Сарычева В.А. [157], Сарычева В.А., Сазонова В.В. [191, 192], Сарычева В.А., Мирера С.А., Исакова А.В. [193] и др.

В работах Васильева В.Г. [107, 108, 110], Васильева В.Г., Семенюк Н.В. [106], Васильева В.Г., Ковтуненко В.М. [109], рассмотрена модель ИС, состоящей из осесимметричного НТ и четырех абсолютно твердых однородных стержней, присоединенных к НТ с помощью сферических упруго-вязких шарниров. Стержни расположены в плоскости, находящей-ся на определенном расстоянии от центра масс НТ, перпендикулярной его продольной оси. В работе Докучаева Л.В., Рабиновича Б.И. [128], рассмотрена модель ИС, состоящая из осесимметричного НТ и присоединенных к нему стержней, расположенных параллельно продольной оси НТ. В работах Мирера С.А., Сарычева В.А. [157], Сарычева В.А., Сазонова В.В. [192], Сарычева В.А., Мирера С.А., Исакова А.В. [193], рассмотрена модель ИС, состоящая из асимметричного НТ и маятника, присоединенного к нему с помощью упруго-вязкого подвеса. Маятник движется в плоскости, проходящей через центр масс НТ. В работе Сарычева В.А., Сазонова В.В. [191], в отличие от работ [157, 192, 193], рассматривается более общая модель ИС, состоящая из асимметричного НТ и демпфера, имеющего n степеней свободы относительно НТ.

Отметим, что в моделях ИС, рассмотренных в работах [106-110, 128, 157, 191-193], положение и движение НТ определяется относительно неподвижных осей, выходящих из центра масс НТ, с помощью углов Эйлера-Крылова или углов Кардана-Брайнта, а положение и движение ПТ определяется относительно подвижных осей, жестко связанных с НТ. Такой выбор координат и осей позволил получить автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений движения ИС.

В работах Васильева В.Г. [107, 110], Васильева В.Г., Ковтуненко В.М. [109], Докучаева Л.В., Рабиновича Б.И. [128], Мирера С.А., Сарычева В.А. [157], Сарычева В.А., Сазонова В.В. [191, 192], Сарычева В.А., Мирера С.А., Исакова А.В. [193], для построенных моделей ИС найдено изолированное стационарное решение (установившееся движение), при котором ИС вращается как одно целое, с постоянной угловой скоростью вокруг главной центральной оси максимального момента инерции НТ. С помощью первого метода Ляпунова исследовалась условная асимптотичес-кая устойчивость найденного установившегося движения, поскольку имеет место первый интеграл, выражающий закон сохранения кинетического момента системы. Допускалось, что константа интеграла движения не возмущается. К общим этапам исследований можно отнести следующие:

1) получение с помощью основных теорем динамики или уравнений Лагранжа II-го рода дифференциальных уравнений движения ИС и их интегралов;

2) линеаризация дифференциальных уравнений движения и первого интеграла в окрестности стационарного решения;

3) уменьшение порядка линейной системы с помощью линеаризованного первого интеграла;

4) приведение уравнений движения к безразмерному виду;

5) получение характеристического уравнения;

6) оценка устойчивости установившегося движения с помощью критерия Рауса-Гурвица или критерия Льенара-Шипара;

7) определение влияния параметров системы на скорость протекания переходных процессов с помощью числовых исследований.

В результате реализации указанных этапов были получены следующие результаты.

В работах Мирера С.А., Сарычева В.А. [157], Сарычева В.А., Сазонова В.В. [191, 192], Сарычева В.А., Мирера С.А., Исакова А.В. [193], было установлено, что найденное изолированное стационарное движение является условно асимптотически устойчивым, и найдены значения параметров системы, при которых достигается наиболее быстрое затухание переходных процессов. Отметим, что подход, примененный в работах [157, 191-193], удобный при исследовании условной устойчивости изолированных стационарных движений. Для случая, когда система имеет семьи стационарных движений применение данного подхода усложняется, так как у характеристического уравнения появляются нулевые корни.

В работах Васильева В.Г. [107, 110], Васильева В.Г., Ковтуненко В.М. [109], было установлено, что в случае, когда центры шарниров совпадают с центром масс НТ, независимо от величины скорости вращения, установившееся движение системы условно асимптотически устойчиво.

В работе Докучаева Л.В., Рабиновича Б.И. [128], было установлено, что установившееся движение системы может быть неустойчивым даже в случае, когда осевой момент инерции относительно продольной оси НТ превышает значение осевых моментов относительно поперечных осей в два раза.

В работе Васильева В.Г. [108], в отличие от работ [107, 109, 110, 128, 157, 191-193], выделены установившиеся движения построенной ИС, соответствующие ее различным равновесным конфигурациям, а в работе Васильева В.Г., Семенюк М.В. [106], с помощью первого метода Ляпунова, исследуется их условная устойчивость по следующей схеме:

1) для каждого установившегося движения составляется характеристическое уравнение и численно определяются его корни;

2) проверяется выполнение условия отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения.

Отметим, что подход, описанный в работах [106-110, 128, 157, 191-193], применим к ИС, у которых установившиеся движения изолированы. Также он позволяет оценить переходные процессы системы. Но в отмеченных работах не исследован процесс устранения угла нутации от неуравновешенности НТ. В случае существования семей установившихся движений (могут появляться у системы НТ – маятниковый АБ), существующий классический подход, примененный в работах [106-110, 128, 157, 191-193], не дает ответ об устойчивости семей установившихся движений, потому что у характеристического уравнения появляются нулевые корни.

Общим результатом работ [106-110, 128, 157, 191-193] является то, что для условной асимптотической устойчивости установившихся движений необходимо наличие сил вязкого сопротивления, причем их величина не влияет на сами условия устойчивости.

1.2.3. Особенности применения энергетических методов

Исследованию устойчивости установившихся движений ИС с пассивными ДН, с помощью метода энергетического стока "energy sink metod" (приближенный метод, в основе которого лежит энергетический подход), посвящены работы Alper J.R. [45], Amieux J.C., Dureigne M. [46], Chinnery A.E., Hall C.D. [55], Cloutier G.J. [57-59], Cochran J.E., Thompson J.A. [60], Haseltine W.R. [68], Likins P.W. [82], Newkirk H.L. [88], Taylor R.S. [95] и др.

Энергетический подход, примененный в отмеченных работах, основывается на теории устойчивости стационарных движений диссипативных механических систем с первыми (в частности - циклическими) интегралами, в основе которой лежит предположение о том, что у системы существует невозрастающая вдоль траектории движения системы функция (например, механическая энергия системы), и при этом у системы есть несколько первых интегралов [132, 133]. Исследование невозрастающей функции проводится на условный экстремум методом Лагранжа или с помощью критерия Сильвестра.

Одной из самых первых работ, в которой была рассмотрена модель ИС с пассивным маятниковым ДН, является работа Likins P.W. [82, 1966]. С помощью метода энергетического стока, для построенной модели ИС, было установлено, что устойчивым будет установившееся движение, при котором ИС вращается как одно целое, с постоянной угловой скоростью вокруг главной центральной оси инерции НТ, соответствующей максимальному моменту инерции. Был найден приближенный закон изменения угла нутации для случая, когда в ИС нет элементов, способных накапливать потенциальную энергию, и при условии, что имеет место закон сохранения кинетического момента ИС:

$$\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = \frac{AC}{K^2(C-A)}\dot{T}, \qquad (1.2.1)$$

где *A, C* - соответственно продольный и поперечный осевые моменты инерции НТ, *T* - кинетическая энергия ИС равная полной энергии ИС, *K* - модуль вектора кинетического момента ИС и точка над величиной означает производную по времени. Формула (1.2.1) была одновременно получена и в работе Рейтера Г.С., Томсона У.Т. [183, 1966], где вместо маятникового рассматривался жидкостной ДН.

Для диссипативных систем с вязкими силами сопротивления, подчиняющимися закону Ньютона, полная энергия системы *E* совпадает с кинетической *T* и производная по времени от полной механической энергии равна со знаком минус удвоенному значению диссипативной функции Релея Ф:

$$\dot{T} = -2\Phi, \qquad (1.2.2)$$

Метод энергетического стока удобно использовать как для исследования устойчивости стационарных движений ИС, так как он не нуждается в составлении дифференциальных уравнений движения, так и для приближенной оценки скорости затухания больших углов нутации КА. Но с помощью его невозможно исследовать характер переходных процессов при устранении малых углов нутации.

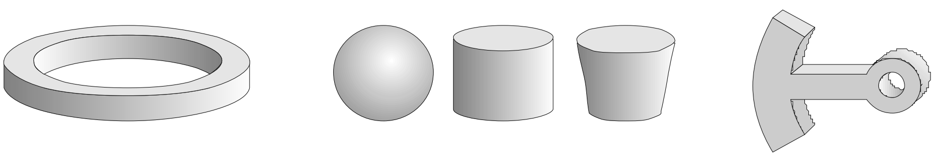
В работе Воротникова В.И., Румянцева В.В. [114, 2001] для выделения и исследования устойчивости стационарных движений вращающихся КА с ПТ используется теория устойчивости стационарных движений механических систем с первыми, в частности – циклическими интегралами. Используется то, что указанные механические системы допускают существование так называемой невозрастающей вдоль траекторий движения системы функции (полной механической энергии или функции, стоящей в левой части обобщенного интеграла энергии), и для таких систем одновременно выполняются первые интегралы, в частности – закон сохранения кинетического момента системы. Подробнее некоторые результаты этой теории будут рассмотрены ниже. Следует отметить, что теория позволяет без составления дифференциальных уравнений движения системы определять ее стационарные движения и оценивать их условную устойчивость исследованием на условный экстремум невозрастающей функции или исследованием на абсолютный экстремум так называемого потенциала приведенной системы. В условия устойчивости, получаемые такими методами, не входят коэффициенты диссипативных сил, но их наличие является обязательным. Поэтому этот метод исследования устойчивости значительно проще для реализации, чем первый метод Ляпунова.

1.3. Некоторые сведения из теории пассивных АБ и о возможности их применения как ДН

Исследованию конструкции, принципа действия и динамики пассивных АБ посвящены работы Блехмана И.И. [103], Гусарова А.А. [123], Детинко Ф.М. [126], Муйжниека А.И. [160], Нестеренко В.П. [168], Филимонихина Г.Б. [204] и других ученых. В них обобщается опыт исследований других авторов и получены новые результаты этого направления. Термин пассивные означает, что эти устройства не нуждаются в подводе энергии и системе управления для перемещения ПТ относительно НТ.

Как отмечается в работах [123, 204] АБ уже нашли широкое применение для уравновешивания барабанов экстракторов, центрифуг, сепараторов, CD/DVD дисков в соответствующих приводах, шлифовальных и отрезных дисков в ручных шлифовальных машинах и т.п. Известно использование этих устройств для уравновешивания шпинделей станков, автомобильных колес, вращающихся частей двигателей внутреннего сгорания, винтов самолетов и лопастей вертолетов и т.п. [204].

Широкое применение нашли так называемые классические АБ – кольцевые, шаровые, маятниковые, жидкостные [123, 204]. Они составлены из твердых тел в виде колец, шаров, маятников и т.п. или из жидкости (ПТ, рис. 1.3.1), размещаемых внутри быстровращающихся твердых тел (НТ), установленных на вязкоупругие опоры (роторов).



а б в г д

Рис. 1.3.1. Классические АБ с твердыми КГ:
а – кольцо; б – шар; в – ролик цилиндрический,
г – конический; д – маятник

Центры масс твердых ПТ в классических АБ движутся по окружностям, центры которых на продольной оси НТ и плоскости которых перпендикулярны этой оси (рис. 1.3.2). Существенно, что при этом не изменяется осевой момент инерции системы относительно продольной оси НТ.

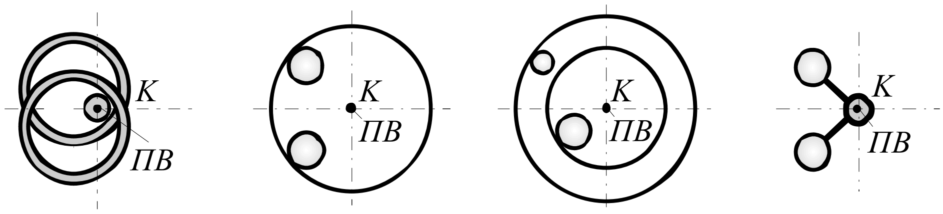


Рис. 1.3.2. Классические АБ с твердыми КГ:
а – кольцевой; б – шаровой (роликовый) однорядный,
в – двухрядный; г – маятниковый

На определенных скоростях вращения НТ и при определенных соотношениях между параметрами системы ПТ сами приходят в положение, в котором уравновешивают НТ – в случае твердых ПТ или уменьшают неуравновешенность – в случае жидких ПТ. Для статического уравновешивания вращающегося тела используется один АБ, устанавливаемый как можно ближе к плоскости статической неуравновешенности НТ. Для уравновешивания динамической неуравновешенности НТ (моментной и статической) используются два АБ, устанавливаемые в двух разных плоскостях уравновешивания НТ.

Как показывает обзор работ [103, 123, 126, 160, 168, 204], автобалансирующие системы могут совершать основное установившееся движение – в котором вращающееся тело уравновешено, ПТ неподвижны относительно НТ и система вращается как одно целое вокруг продольной оси НТ. Также у таких систем существуют побочные установившиеся движения, в которых НТ не уравновешено, причем в случае осесимметричных опор относительные движения ПТ прекращаются, и система вращается как одно целое не вокруг продольной оси НТ. Поэтому исследование динамики автобалансирующих роторных систем проводится по схеме, подобной исследованию динамики вращающихся ИС, рассмотренной выше. В частности, при исследованиях выделяются все установившиеся движения системы, и исследуется их устойчивость.

В работе [204] приводится обзор математических методов исследования устойчивости установившихся движений, используемых при исследовании динамики АБ. Это – теория устойчивости стационарных движений нелинейных автономных систем, в частности – первый метод Ляпунова (одно из первых применений – в работе Детинко Ф.М. [126]) и энергетический подход (одно из первых применений – в работе Муйжниека А.И. [160]), метод синхронизации динамических систем, в частности теория устойчивости периодических движений (метод разработан Блехманом И.И. и применен к двухшаровому АБ, уравновешивающему ротор, совершающий плоское движение [103]), и применен Нестеренко В.П. для исследования динамики роторов с АБ при разном упругом закреплении ротора [168]). Таким образом, методы и последовательность исследования динамики изолированных и неизолированных вращающихся систем имеют много общего.

В работе [204] впервые установлено, при каких условиях ПТ могут в принципе уравновесить вращающееся тело. Были предложены ПТ новой формы – неклассические КГ (рис. 1.3.3) и неклассические АБ. В последних ПТ осуществляют определенное движение вокруг точки *K* на продольной оси НТ, не являющееся вращением вокруг продольной оси (рис. 1.3.4).

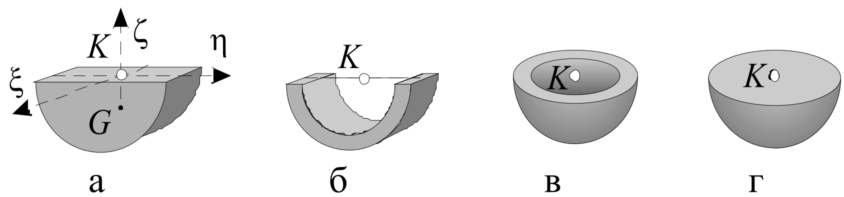


Рис.1.3.3. Неклассические КГ – для которых осевые моменты инерции относительно главных осей, проходящих через точку подвеса *K* такие, что: а, б – $J_\xi = J_\eta \neq J_\zeta$; в, г – $J_\xi = J_\eta = J_\zeta$

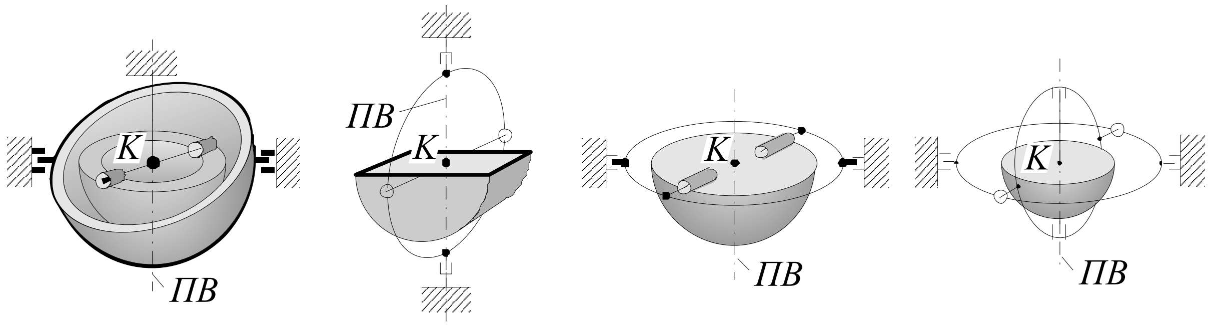


Рис.1.3.4. Неклассические АБ – в которых КГ вращаются вокруг:
а – поперечных осей НТ;
б – продольной и поперечной осей НТ;
в – двух осей, не являющихся продольными;
г – точки на продольной оси НТ

В работе [204] также был разработан эвристический (инженерный) критерий устойчивости основного движения (наступление автобалансировки) в случае уравновешивания ротора одним АБ. Была доказана его наибольшая эффективность в сравнении с другими существующими приближенными методами определения областей устойчивости основного движения.

Критерий наступления автобалансировки для одного АБ [204]: *для устранения пассивным АБ с твердыми КГ отклонения некоторой точки продольной оси ротора от оси вращения или для уменьшения этого отклонения жидкостным АБ необходимо и достаточно, чтобы эта точка под действием дисбаланса, в ней прилагаемого, в среднем за один оборот ротора отклонялась противоположно вектору дисбаланса.*

Математически критерий можно записать так

$$\bar{r}_{A\epsilon} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \vec{\epsilon}(\varphi)\cdot\vec{r}_A(\varphi)d\varphi < 0\,, \tag{1.3.1}$$

где: φ – угол поворота ротора; $\vec{\epsilon}$ – единичный вектор, направленный по вектору дисбаланса, как функция φ; $\vec{r}_A$ – вектор отклонения точки A вала от оси вращения, вызванный статическим дисбалансом, прилагаемым в точке A, как функция φ.

Этот критерий для случая уравновешивания ротора n АБ в разных плоскостях уравновешивания имеет такую формулировку.

Критерий наступления автобалансировки для *n* АБ [204]: *При уравновешивании вращающегося тела n пассивными АБ с твердыми телами в n разных плоскостях коррекции, для устойчивости основного движения необходимо и достаточно, чтобы при фиксированном положении тел АБ в положении, в котором они уравновешивают вращающееся тело, при любых элементарных дисбалансах* $\mathbf{s}_j$, *лежащих в j-й плоскости коррекции и прилагаемых в точках j на необходимой оси вращения НТ, выполнялось условие*

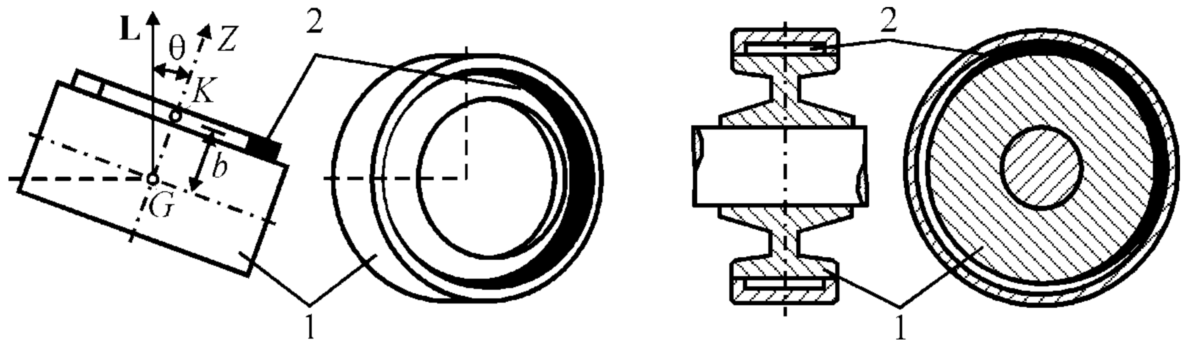
$$f(\mathbf{s}_1,...,\mathbf{s}_n) = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{s}_j(t)\cdot\mathbf{r}_j(t)\right)dt < 0\,, \tag{1.3.2}$$

где: t – время; $\mathbf{r}_j$ *– вектор отклонения точки j от ее положения в основном движении, вызванный элементарными дисбалансами; T – период в случае, если движение периодическое, если нет – бесконечно большой или другой характерный промежуток времени.*

В рамках линейной теории роторных систем критерий (1.3.2) дает некоторую квадратичную форму от параметров элементарных дисбалансов, потому что вектор отклонения $\mathbf{r}_j$ является линейной функцией элементарных дисбалансов $\mathbf{s}_1,...,\mathbf{s}_n$, и потому для устойчивости основного движения необходимо и достаточно, чтобы эта квадратичная форма была отрицательно-определенной. В отмеченной работе определены правила и последовательность применения критериев к роторным системам с АБ.

Преимущество разработанных методов заключается в том, что они позволяют определять области устойчивости основных движений роторных систем с АБ независимо от типа АБ. Это существенно из-за большого количества разных типов используемых АБ. В работе доказано, что точность метода растет с увеличением сил вязкого сопротивления, препятствующих относительным движениям ПТ АБ.

Обзор патентов и сравнение конструкций показывают, что известный кольцевой демпфер угла нутации [134, 178, 183] является жидкостным АБ Леблана [81]. В обоих этих устройствах жидкость (ртуть) частично заполняет кольцевую полость, и последняя располагается соосно продольной оси НТ (спутника – рис. 1.3.5, а или ротора – рис. 1.3.5, б).



а б

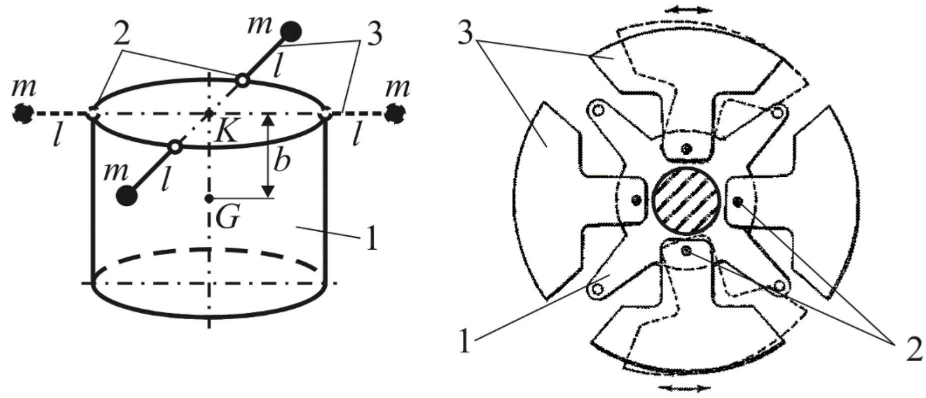
1 – спутник (ротор); 2 – кольцевая емкость, заполненная жидкостью (ртутью)

Рис.1.3.5. Жидкостной:
а – демпфер [134, 178, 183]; б – АБ Леблана [81]

Как отмечалось выше, даже в случае сплюснутого (устойчивого) НТ (спутника) жидкостной демпфер может оставлять определенный угол нутации. В некоторых работах остаточный угол объясняется поверхностным натяжением или стоячими волнами на поверхности жидкости [44, 47, 52, 53, 54, 183]. Но до сегодняшнего времени нет работ, в которых бы этот угол связывался с автобалансировочными свойствами жидкостного демпфера, то есть со способностью жидкости при определенных соотношениях между параметрами системы перетекать в такие положения, в которых создается или увеличивается неуравновешенность НТ.

Аналогично, известный двух или четырехмаятниковый демпфер угла нутации [68, 82, 88, 122, 128, 191, 192] (рис. 1.3.6, а) является маятниковым АБ Кларка (рис. 1.3.6, б) [56]. Его автобалансировочные свойства в случае ИС также не исследованы.

Следует отметить, что жидкостной и маятниковый демпферы быстрее других АБ устраняют угол нутации, вызванный неточным приданием начального вращения спутнику. Но как АБ они не могут полностью уравновесить статический дисбаланс вращающегося НТ [123, 204]. Больше того, это наименее эффективные АБ, и видимо поэтому, до настоящего времени, на их автобалансировочные свойства не обращали внимания. Как было доказано в работе [168], автобалансировочные свойства жидкостного демпфера увеличиваются с уменьшением толщины жидкости. В соответствии с результатами работы [123] автобалансировочные свойства маятникового демпфера растут с уменьшением расстояния от осей вращения маятников до продольной оси НТ.



а б

1 – корпус спутника (ротора); 2 – оси, параллельные продольной оси спутника (ротора); 3 – маятники

Рис.1.3.6. Маятниковый:
а – демпфер [68, 82, 88, 122, 128, 191, 192]; б – АБ Кларка [56]

Следует отметить, что в патентах [80, 85], улучшающих конструкцию шаровых АБ, указывается, что они применимы для уравновешивания вращающихся искусственных спутников Земли. Предложенные АБ, в отличие от демпферов угла нутации, в принципе способны полностью уравновесить спутник. Но теоретически такая возможность не исследована. Следовательно, неизвестно, при каких условиях АБ способны уравновесить вращающееся тело в ИС и способны ли они вообще устранить угол нутации, вызванный как неточным приданием вращения НТ, так и его неуравновешенностью относительно продольной оси.

1.4. Об исследовании условной устойчивости первым методом Ляпунова

1. Постановка задачи. Впервые, в самом общем виде, задача об условной устойчивости, в частности стационарных движений нелинейных автономных систем, была поставлена в докторской диссертации Ляпунова А.М. [148].

Пусть задана нелинейная автономная система дифференциальных уравнений. После линеаризации получим линейную автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{q}} = A\mathbf{q}, \tag{1.4.1}$$

или второго порядка

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0, \tag{1.4.2}$$

где $A = \|a_{kj}\|, B = \|b_{kj}\|, C = \|c_{kj}\|$ – квадратные матрицы с постоянными коэффициентами, $\mathbf{q}$ – матрицы-столбцы с элементами q_j.

Относительному состоянию равновесия соответствует решение

$$q_i = 0, \;\; / \, i = \overline{1, n} \, /, \tag{1.4.3}$$

системы дифференциальных уравнений (1.4.1) или (1.4.2).

Невозмущенное движение условно устойчиво для возмущений, не изменяющих констант интегралов

$$f_j(q_i, \dot{q}_i) = c_j, \;\; / \, j = \overline{1, m} \, /. \tag{1.4.4}$$

Приведем определение условной устойчивости и условной асимптотической устойчивости движения (Младов А.Г. [158]):

1) если без учета условий (1.4.4) движение неустойчиво по Ляпунову, а с учетом условий (1.4.4) возмущения при t>0 ведут себя, как при устойчивом движении, то такое движение, при выполнении условий (1.4.4), называется условно устойчивым;

2) если без учета условий (1.4.4) движение не является асимптотически устойчивым по Ляпунову, а с учетом условий (1.4.4) все возмущения при t>0 стремятся к нулю, то такое движение, при выполнении условий (1.4.4), называется условно асимптотически устойчивым.

2. Способы решения задач по исследованию условной устойчивости стационарных движений нелинейных автономных систем.

Из-за большого порядка системы автономных обыкновенных дифференциальных уравнений первого (1.4.1) или второго порядка (1.4.2) их непосредственное исследование затруднено. Поэтому ниже рассмотрим методы, упрощающие исследование таких систем.

2.1. Уменьшение порядка системы дифференциальных уравнений с помощью известных интегралов. В работах Леви-Чивита Т., Амальди У. [146], Уиттекера Э. [200], для уменьшения порядка линейной системы дифференциальных уравнений вида (1.4.1) или (1.4.2), было предложено использовать известные интегралы.

Так, если известны m независимых между собой интегралов системы (1.4.1), то с помощью их можно получить выражения для m неизвестных $q_\alpha \quad /\alpha = \overline{1,m}/$ через остальные неизвестные. Подставляя вместо $q_\alpha \quad /\alpha = \overline{1,m}/$ их выражения в другие $n-m$ уравнений (1.4.1), получим приведенную систему порядка $n-m$

$$\dot{\overline{\mathbf{q}}} = \overline{A}\,\overline{\mathbf{q}}\,, \tag{1.4.5}$$

где $\overline{\mathbf{q}}$ – векторы-столбцы с элементами q_{m+j} $(j = \overline{1, n-m})$.

2.2. Уменьшение порядка системы дифференциальных уравнений с помощью известных вторых интегралов с применением уравнений Лагранжа II рода. В работе Добронравова В.В. [127], для уменьшения порядка системы дифференциальных уравнений, было предложено использовать дополнительные уравнения голономных связей, налагаемых на голономную систему. В качестве таких дополнительных уравнений можно использовать вторые интегралы (закон сохранения движения центра масс ИС).

Пусть на материальную систему с n степенями свободы, движение которой описывают уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad /j = \overline{1,n}/, \tag{1.4.6}$$

наложено m дополнительных голономных связей

$$f_\alpha(q_i) = 0, \quad /\alpha = \overline{1,m}/. \tag{1.4.7}$$

Из уравнений (1.4.7) можно выразить m обобщенных координат в виде конечных соотношений через другие n–m координат. Число степеней свободы материальной системы в этом случае будет равно $p = n - m$. Зависимость между независимыми координатами q_μ и зависимыми q_h имеет вид:

$$q_h = f_h(q_\mu), \quad /\mu = \overline{1,p};\ h = \overline{p+1,n}/. \tag{1.4.8}$$

Выразив кинетическую энергию системы T, с помощью уравнений (1.4.8), через $\dot{q}_\mu$ и q_μ, получим уравнения Лагранжа в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_\mu} = \widetilde{Q}_\mu, \quad /\mu = \overline{1,p}/. \tag{1.4.9}$$

3. Критерии условной устойчивости и условной асимптотической устойчивости стационарных движений. Известно, что определенный класс стационарных движений описывается с помощью нормальной системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений или дифференциальных уравнений возмущенного движения [125, 155, 156, 158]:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{X}^*, \tag{1.4.10}$$

где $A = \left\| a_{kj} \right\|$ – квадратная матрица коэффициентов; $\mathbf{x}$ – матрицы-столбцы с элементами x_j; $\mathbf{X}^*$ – матрица нелинейных членов, зависящих от отклонений x_j в степени выше первой.

Уравнения, получаемые после отбрасывания нелинейных членов $\mathbf{X}^*$

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \tag{1.4.11}$$

называются уравнениями первого приближения.

Устойчивость или неустойчивость по Ляпунову движений, описываемых системой (1.4.10), определяется с помощью системы (1.4.11).

В ряде случаев, как было отмечено в работе Младова А.Г. [158], при неустойчивости или неасимптотической устойчивости по Ляпунову всех стационарных движений, описываемых системой (1.4.10), они иногда могут быть условно неасимптотически или условно асимптотически устойчивыми при выполнении условий (1.4.4), при этом будут иметь место следующие критерии [158].

Критерий 1. Для того, чтобы все движения, описываемые системой (1.4.10), были асимптотически устойчивыми по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения системы (1.4.11) имели отрицательные действительные части.

Критерий 2. Если хотя бы один из корней характеристического уравнения системы (1.4.11) имеет положительную действительную часть, то:

а) для того, чтобы все движения, описываемые системой (1.4.11), были неустойчивыми, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения системы (1.4.11) имели положительные действительные части;

б) если среди корней с положительными действительными частями есть хотя бы один корень с нулевой действительной частью, но нет корней с отрицательной действительной частью, то все движения, описываемые системой (1.4.10), неустойчивы, причем они могут быть условно неасимптотически устойчивы, но не могут быть условно асимптотически устойчивы;

в) если, кроме корней с положительными действительными частями, есть хотя бы один корень с отрицательной действительной частью, но нет корней с нулевой действительной частью, то все движения, описываемые системой (1.4.10), неустойчивы, причем они могут быть условно асимптотически устойчивыми, но не могут быть условно неасимптотически устойчивыми;

г) если, кроме корней с положительными действительными частями, есть хотя бы один корень с нулевой действительной частью и есть хотя бы один корень с отрицательной действительной частью, то все движения, описываемые системой (1.4.10), неустойчивы, причем они могут быть как условно неасимптотически устойчивыми, так и условно асимптотически устойчивыми.

Критерий 3. Если характеристическое уравнение системы (1.4.11) имеет один или несколько простых корней с нулевой действительной частью (то есть простой нулевой корень или (и) простые мнимые корни), а все другие корни (если они есть) имеют отрицательные действительные части, то:

а) для того, чтобы все движения, описываемые системой (1.4.10), были неасимптотически устойчивыми, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения системы (1.4.11) были простыми и имели нулевую действительную часть;

б) для того, чтобы все движения, описываемые системой (1.4.10), были устойчивыми, но неасимптотически (а, следовательно, могли бы быть условно асимптотически устойчивыми), необходимо и достаточно, чтобы кроме простых корней с нулевой действительной частью, был хотя бы один корень с отрицательной действительной частью.

Оценку действительных частей корней характеристического уравнения будем проводить с помощью теоремы Гурвица [98, 105, 156].

Теорема Гурвица. Для того, чтобы все корни полинома

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (1.4.12)$$

с действительными коэффициентами и положительным коэффициентом при старшем члене имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{Vmatrix}, \qquad (1.4.13)$$

составленной из коэффициентов уравнения (1.4.12), были положительными.

Теорема позволяет сформулировать критерий Рауса-Гурвица (критерий отрицательности действительных частей корней полинома с действительным коэффициентами). Математически его часто записывают в виде двух групп условий:

$$a_i > 0, \quad / i = \overline{0, n} /;$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0. \qquad (1.4.14)$$

Замечание 1. Первая группа условий является следствием из теоремы Виета. Если наряду с положительными существует хоть один отрицательный коэффициент полинома, то существует хотя бы один корень полинома с положительной действительной частью. Это является достаточным условием неустойчивости невозмущенного движения системы независимо от членов выше первого порядка малости. Поэтому при невыполнении первой группы условий вторая группа не проверяется.

Замечание 2. Если при $a_0 > 0$ все миноры Гурвица $\Delta_1, ..., \Delta_n$ положительны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от членов выше первого порядка малости.

Замечание 3. Если при выполнении первой группы условий хотя бы одно из неравенств второй группы имеет противоположный смысл, то среди корней $\lambda_1, ..., \lambda_n$ уравнения (1.4.12) есть такие, действительные части которых положительны. Это является достаточным условием неустойчивости невозмущенного движения системы независимо от членов выше первого порядка малости.

1.5. Об исследовании условной устойчивости энергетическими методами

1.5.1. Некоторые результаты из теории устойчивости стационарных движений, развивающие второй метод Ляпунова

Наиболее цельная и математически строгая теория устойчивости движений, в частности стационарных движений нелинейных автономных систем, была создана в докторской диссертации "Общая задача об устойчивости движения" Ляпуновым А.М. [148]. Наиболее весомым вкладом Ляпунова является математическое определение устойчивости движения, теория устойчивости движения по первому приближению (первый метод Ляпунова), второй или прямой метод Ляпунова исследования устойчивости движения, основывающийся на функциях Ляпунова и т.п.

Основу второго метода Ляпунова, применимого для автономных диссипативных систем, составляют (см. [148]) одна теорема об устойчивости и две теоремы о неустойчивости движения и целый ряд замечаний и следствий из этих теорем, распространяющих полученные результаты на случаи: асимптотической устойчивости; условной устойчивости – при условиях, что выполняются первые интегралы; механических систем с первыми, в частности циклическими интегралами и т.п. В более удобном виде (как теоремы, а не следствия из теорем) теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения формулируются, в частности, в работе [156] в таком виде.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости [156]. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию V, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений была бы знакоопределенной функцией противоположного знака с V, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Теорема (первая) Ляпунова о неустойчивости [156]. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти функцию V, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений является знакоопределенной функцией и которая может принимать в окрестности нуля значение одного знака с V, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Заметим, что Ляпунов считал свои функции обобщением энергетических функций механических систем, введенных Лагранжем и Раусом.

Историю дальнейшего развития теории устойчивости, в частности по Ляпунову и изложение соответствующих новых результатов можно найти в фундаментальных работах Барбашина Е.А. [100], Блехмана И.И. [102], Воротникова В.И., Румянцева В.В. [114], Гашененко И.М. [118], Карапетяна А.В. [132, 133], Красовского М.М. [144], Мартынюка А.А.

[154, 155], Савченко О.Я., Болграбской И.А., Кононихина Г.А. [190], Четаева Н.Г. [206] и многих других ученых.

Наиболее существенное обобщение теорем Ляпунова об асимптотической устойчивости дает следующая теорема.

Теорема Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости [144]. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти положительно-определенную функцию V такую, что ее производная* $\dot{V}$ *в силу этих уравнений удовлетворяет в окрестности нуля двум требованиям*:

$$1)\ \dot{V} < 0 \text{ вне } M, \quad 2)\ \dot{V} = 0 \text{ на } M,$$

где M – многообразие точек, не содержащее целых траекторий при $t_0 \le t < \infty$, *то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Обобщение заключается в том, что производная $\dot{V}$ не является знакоопределенной, но может принимать нулевые значения только на M – многообразии точек, не содержащем целых траекторий при $t_0 \le t < \infty$.

Наиболее существенное обобщение теорем Ляпунова (и Четаева [206]) о неустойчивости дает такая теорема.

Теорема Красовского о неустойчивости [144]. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти функцию V такую, что ее производная* $\dot{V}$ *удовлетворяет требованиям:*

$$1)\ \dot{V} > 0 \text{ вне } M, \quad 2)\ \dot{V} = 0 \text{ на } M,$$

где M – многообразие точек, не содержащее целых траекторий при $t_0 \le t < \infty$, *и если при этом можно указать точки, лежащие в сколь угодно малой окрестности начала координат, такие, что в них* $V > 0$, *то невозмущенное движение неустойчиво.*

Обобщение заключается в том, что производная $\dot{V}$ не является знакоопределенной, но может принимать нулевые значения только на M.

Дальнейшее развитие теория устойчивости стационарных движений динамических систем получила не только ослаблением соответствующих требований в теоремах Ляпунова, но и доказательством подобных теорем при исследовании устойчивости стационарных движений по части переменных, в частности – в работе Воротникова В.И., Румянцева В.В. [114].

Другим направлением развития теории устойчивости по Ляпунову стационарных движений является теория устойчивости инвариантных множеств. К последним относятся отдельные стационарные движения (неподвижные точки), одна и больше параметрические семьи неподвижных точек и решения дифференциальных уравнений, зависящие от времени и всегда находящиеся в определенном подмножестве координатного пространства. Основные результаты этого направления и обзор истории доказательства различных теорем можно найти в работе Карапетяна А.В. [133].

Все эти результаты распространены на теорию устойчивости стационарных движений механических систем. Характерной чертой таких систем является то, что часть переменных в них интерпретируется как координаты механической системы, а часть – как скорости движения (производные от координат). Поэтому обзор основных результатов соответствующих теорий проведем в отдельном подпункте.

1.5.2. Некоторые результаты из теории устойчивости стационарных движений диссипативных механических систем с циклическими и первыми интегралами

Основы теории условной устойчивости стационарных движений механических систем с первыми (в частности – циклическими) интегралами были впервые разработаны Раусом Е.Дж. [182]. Свое дальнейшее развитие теория получила в работах Воротникова В.И., Румянцева В.В. [114], Карапетяна А.В. [133], Пожарицкого Г.К., Румянцева В.В. [177], Румянцева В.В. [186, 187], Румянцева В.В., Озиранера А.С. [188] и др.

В теории устойчивости стационарных движений диссипативных механических систем с циклическими интегралами [167] предполагается, что кинетическая и потенциальная энергии, а также обобщенные диссипативные силы не зависят от некоторых k обобщенных координат, а обобщенные силы, соответствующие этим координатам, равняются нулю. Такие координаты называются циклическими. Остальные координаты называются позиционными. У таких систем существуют k первых циклических интегралов. Для таких систем вводится специальная функция Рауса R и приведенный потенциал W, не зависящие от циклических координат и скоростей. Дифференциальные уравнения движения системы распадаются на две подсистемы, интегрируемые отдельно. Первая подсистема описывает изменение позиционных координат и составляется подобно уравнениям Лагранжа II рода, только вместо функции Лагранжа L подставляется функция Рауса R. Вторая подсистема описывает изменение циклических координат.

Для таких систем имеют место такие теоремы Румянцева-Сальвадоре [167].

Теорема 1 (*об устойчивости движения*). Если на определенном стационарном движении (в определенной точке) приведенный потенциал принимает локально строгий минимум при фиксированных значениях постоянных интегрирования в циклических интегралах и это движение (точка) изолировано от других стационарных движений (точек) приведенного потенциала (если другие точки существуют), а диссипативные силы имеют полную диссипацию по отношению к позиционным скоростям, то это стационарное движение устойчиво и любое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, будет стремиться к некоторому стационарному движению, соответствующему возмущенным значением постоянных интегрирования в циклических интегралах, при $t \to +\infty$.

Теорема 2 (*о неустойчивости движения*). Если приведенный потенциал принимает стационарное значение, не являющееся даже нестрогим минимумом, при фиксированных значениях постоянных интегрирования в циклических интегралах на определенном стационарном движении (в точке), это движение (точка) изолировано от других стационарных движений (точек) приведенного потенциала (если другие точки существуют), а диссипативные силы имеют полную диссипацию по отношению к позиционным скоростям, то это стационарное движение неустойчиво.

Замечание 1. При не возмущении постоянных интегрирования в циклических интегралах стационарное движение будет асимптотически устойчивым относительно позиционных координат и скоростей. При этом имеет место условная асимптотическая устойчивость, потому что должны выполняться циклические интегралы.

Замечание 2. Теоремы 1, 2 будут иметь место и при более общих условиях, накладываемых на диссипативные силы. В частности, эти силы могут не иметь полной диссипации по позиционным координатам, но тогда механическая энергия системы должна принимать постоянные значения на многообразии точек, не содержащем целые траектории движения системы.

Замечание 3. Вместе теоремы 1 и 2 позволяют определять с точностью до границ области условной устойчивости и неустойчивости изолированных стационарных движений. Эти теоремы не дают ответ об устойчивости стационарного движения на границах областей устойчивости.

Для исследования на экстремум функции W используется критерий Сильвестра.

В теории устойчивости стационарных движений диссипативных механических систем с первыми (в частности – циклическими) интегралами предполагается, что у системы существует невозрастающая вдоль траекторий движения системы функция (механическая энергия или функция, стоящая в левой части обобщенного интеграла энергии и т.п.), и вместе с этим у системы есть несколько первых интегралов [182]. Наиболее полно теория устойчивости стационарных движений таких систем, в частности история возникновения и развития этой теории, изложена в работах Карапетяна А.В. [132, 133]. Основные теоремы об устойчивости и неустойчивости стационарных движений таких систем доказаны Карапетяном А.В., Румянцевым В.В., Озиранером А.С., Воротниковым В.И. и т.д. и являются развитием теорем Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости и Красовского о неустойчивости стационарных движений. Эта теория подобна теории Рауса об устойчивости стационарных движений механических систем с циклическими интегралами (потому что они также являются первыми интегралами). Только на изолированных условно асимптотически устойчивых стационарных движениях невозрастающая функция принимает локально строгое минимальное значение, а на неустойчивых – не принимает даже не строгого минимального значения при фиксированных постоянных интегрирования в первых интегралах. Исследование невозрастающей функции на условный экстремум проводится методом Лагранжа. Если невозрастающая функция является квадратичной формой относительно обобщенных координат и скоростей, а первые интегралы – линейные относительно обобщенных скоростей, то для исследования на условный экстремум используется критерий условной знакоопределенности квадратичных форм. Но из-за громоздкости этого критерия можно исследование на условный экстремум проводить с использованием критерия Сильвестра. Для этого надо сначала, с использованием первых интегралов, исключить из невозрастающей функции часть обобщенных скоростей. Потом новая функция, имеющая меньшее количество переменных (обобщенных координат и скоростей) исследуется на абсолютный экстремум с применением критерия Сильвестра.

Поскольку теория устойчивости стационарных движений диссипативных механических систем с циклическими интегралами является частным случаем теории устойчивости этих движений диссипативных механических систем с первыми интегралами, то обе теории при применении к механическим системам с циклическими интегралами будут давать одинаковые условия устойчивости. Но теория Рауса для систем с циклическими интегралами менее громоздка для применения.

Обзор работ [100, 114, 117, 118, 132, 133, 144, 148, 154-156, 167, 177, 182, 185-190, 205, 206] показывает, что возможна конкретизация методов Рауса к вращающимся ИС с вязким рассеиванием энергии. Так, целесообразно получить выражения для основных динамических величин, ввести системы координат, описывающие движение системы и процесс изменения угла нутации, конкретизировать вид дифференциальных уравнений движения системы, уравнений установившихся движений, условий устойчивости стационарных движений и т.п. Конкретизированные методы будет удобнее применять к решению конкретных однотипных задач.

Выводы главы 1

Проведенный обзор научных работ позволяет сделать такие выводы.

1. В ряде задач КА, стабилизируемые вращением, можно моделировать ИС, состоящими из НТ и ПТ (материальных точек, твердых, упругих и жидких тел), относительному движению которых препятствуют силы вязкого сопротивления. В частности, ПТ могут образовывать демпферы угла нутации, АБ, антенны, панели солнечных батарей, жидкость в топливных баках и тому подобное.

2. Эти системы со временем будут вращаться как одно жесткое целое вокруг оси, на которой лежит неизменный вектор кинетического момента системы. В идеальном случае система должна вращаться вокруг продольной оси НТ (КА) – то есть угол нутации должен быть устранен. Такое установившееся движение будем называть основным, а все другие – побочными. Но на практике этому мешают: неточность придания начального вращения КА; неуравновешенность КА относительно собственной продольной оси; существование рядом с желательным (основным) движением устойчивых нежелательных (побочных) движений и т.п.

3. Для устранения угла нутации, вызванного неточностью придания начального вращения КА, применяются ДН – маятниковые, шаровые, жидкостные и т.п. Они эффективно устраняют указанную составляющую угла нутации, однако оставляют составляющую, вызванную неуравновешенностью КА. В теории таких систем существуют существенные недостатки, вызванные, в частности, предположением, что масса ПТ намного меньше массы КА и поэтому центр масс системы совпадает с центром масс НТ. Такое предположение делает невозможным исследование ряда явлений, в частности – автобалансировки и автобалансирующих свойств ДН и искажает области параметров системы, при которых стационарное движение является устойчивым.

Так, при этом предположении энергетический подход дает необходимое условие устойчивости установившегося движения указанных систем, в соответствии с которым на устойчивом движении ось вращения системы должна быть осью максимального момента инерции (для краткости будем говорить, что в этом случае СТ – сплюснуто). Однако ряд исследований показывает, что для многих систем – это условие далеко от достаточных.

4. Заявлена принципиальная (гипотетическая) возможность полного устранения пассивными АБ угла нутации вращающегося КА, вызванного как неточным приданием начального вращения КА, так и его неуравновешенностью относительно продольной оси. Но на сегодня эта задача не решена. К тому же существует большое количество разных типов АБ, потому целесообразно эту задачу решать в таком виде, в котором тип АБ не влияет на полученные результаты.

5. Перечисленные выше задачи из космической техники приводят к возникновению таких актуальных задач теоретической механики, как: задача устранения ДН угла нутации вращающегося НТ, вызванного неточным приданием начального вращения НТ; задача устранения пассивными АБ угла нутации вращающегося НТ, вызванного как неточным приданием начального вращения НТ, так и его неуравновешенностью; задача определения всех установившихся движений (положений относительного равновесия) системы и исследования их условной устойчивости (при условиях, что имеют место законы сохранения движения центра масс и кинетического момента системы), и т.п.

6. При использовании подвижных систем координат, связанных с вращающимся телом, динамика таких систем описывается системой нелинейных автономных дифференциальных уравнений. Стационарные решения таких уравнений определяют разные положения относительного равновесия системы. На практике из всех положений относительного равновесия будут осуществляться только устойчивые. Такие системы допускают существование невозрастающих вдоль траектории движения функций (энергетические функции) и интегралов движения. Для исследования устойчивости этих движений, как правило, применяется теория устойчивости стационарных движений нелинейных автономных систем, в частности первый и второй методы Ляпунова, энергетические теории, основанные Лагранжем и Раусом. Исследование динамики таких систем традиционно содержит два этапа. Первый – выделение всех установившихся движений системы, второй – исследование их устойчивости.

7. Из-за большого числа степеней свободы таких систем, получаемые дифференциальные уравнения труднообозримы и фактически не поддаются аналитическому анализу. Также, большое количество установившихся движений делает исследование их устойчивости первым методом Ляпунова (по первому приближению) – громоздким.

8. Энергетические теории, основанные Лагранжем, Раусом, позволяют без выведения дифференциальных уравнений движения указанных систем находить все установившиеся движения и оценивать их устойчивость. При этом в ряде случаев полученные достаточные условия устойчивости, с точностью до границ совпадают с необходимыми. Применение этих теорий нуждается в определенной конкретизации. Эта конкретизация может быть существенной, если учесть при ее проведении все особенности рассматриваемых механических систем. Также актуально с применением конкретизированных методов установить условия условной устойчивости основных движений для ряда систем, актуальных с точки зрения практики.

9. На сегодня не исследованы ИС с конкретными типами АБ, в частности – маятниковыми, в которых маятники насажены на продольную ось НТ. Так же не оценен остаточный угол нутации, который могут

создавать эти АБ при определенных условиях.

10. В ИС, состоящих из НТ и АБ, в отличие от известных, могут появляться одно- или многопараметрические семьи установившихся движений. Теоретически остается неисследованной условная устойчивость этих семей движений, а также отсутствует опыт исследования переходных процессов в таких системах (первым методом Ляпунова).

11. Следовательно, актуальна такая цель исследований:

- конкретизировать энергетические методы, основанные Лагранжом и Раусом для исследования динамики ИС с вязким рассеиванием энергии, состоящих из вращающегося НТ и ПТ и с ее применением исследовать устойчивость основных движений разных систем;

- построить теоретико-механические модели ИС, состоящих из вращающегося неуравновешенного НТ и маятниковых АБ, исследовать условную устойчивость основных и побочных установившихся движений, оценить переходные процессы и остаточный угол нутации.

Для ее достижения надо решить такие задачи исследований:

1) конкретизировать для рассматриваемых систем применение метода Рауса для диссипативных систем с вязким рассеиванием энергии с учетом влияния ПТ на массо-инерционные характеристики системы;

2) с применением конкретизированного метода установить случаи, в которых АБ любого типа обеспечивают вращение неуравновешенного НТ вокруг его продольной оси;

3) с применением конкретизированного метода определить необходимые условия устойчивости основного движения, с точностью до границ, совпадающих с достаточными, для систем, в которых к НТ присоединены двухмаятниковый или жидкостной демпферы, упруго закрепленный стержень, ориентированный по продольной оси НТ.

4) построить плоские и пространственные теоретико-механические модели вращающихся ИС, состоящих из неуравновешенного НТ и маятников, насаженных на продольную ось НТ, относительному движению которых препятствуют силы вязкого сопротивления;

5) построить приближенную теорию устранения больших углов нутации шаровыми, маятниковыми и жидкостными АБ;

6) выделить основные и побочные установившиеся движения в рамках плоской модели ИС, основные движения в рамках пространственной модели ИС. Исследовать условную устойчивость установившихся движений;

7) оценить остаточный угол нутации в случаях устойчивости побочных движений;

8) оценить характер протекания переходных процессов в рассматриваемых ИС в случаях, когда основные движения устойчивы.

ГЛАВА 2.
МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ ИМИ ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Приводится общее описание изучаемых механических систем. Выбираются методы исследований, указывается последовательность их применения для решения поставленных задач исследований.

ISBN 978-617-7197-24-8

2.1. Общее описание изучаемых механических систем

Будем рассматривать ИС с голономными связями, состоящие из вращающегося НТ и ПТ в виде материальных точек или твердых тел. Под изолированными будем понимать системы, на которые не действуют внешние силы (как активные, так и пассивные) [173].

Поскольку система изолирована, то имеют место законы сохранения движения центра масс и кинетического момента системы. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что ее центр масс – точка G неподвижный. Также ее кинетический момент является постоянным вектором. Примем за начало отсчета точку G. Тогда

$$\mathbf{r}_G = 0, \quad \mathbf{K}_G = \mathbf{const}, \tag{2.1.1}$$

где $\mathbf{r}_G$ – радиус-вектор центра масс системы, а $\mathbf{K}_G$ – вектор ее кинетического момента, найденный относительно точки G. Следовательно, система допускает второй и первый интегралы. Будем считать, что во время движения системы константы этих интегралов не возмущаются.

На ПТ действуют внутренние диссипативные силы и могут действовать внутренние потенциальные силы с потенциальной энергией Π. Полная механическая энергия системы равняется

$$E = T + \Pi, \tag{2.1.2}$$

где T – кинетическая энергия системы.

Пусть относительные движения ПТ определяют N обобщенных координат $\mathbf{q}_N \in \mathbf{R}^N$, отсчитываемых относительно НТ, а движение НТ в пространстве – 6 обобщенных координат $\mathbf{q}_6 \in \mathbf{R}^6$. Тогда общее количество степеней свободы системы ($N+6$) и ее движение определяют обобщенные координаты $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_N, \mathbf{q}_6) \in \mathbf{R}^{N+6}$. Поскольку на систему не действуют внешние силы, а $\mathbf{q}_N$ – относительные координаты, то обобщенные силы $\mathbf{Q}_6 \in \mathbf{R}^6$, отвечающие обобщенным координатам $\mathbf{q}_6$, равняются нулю. Заметим, что относительные координаты, как правило, позиционные, а среди обобщенных координат $\mathbf{q}_6$ есть как позиционные, так и циклические.

Полная механическая энергия системы изменяется по закону

$$dE/dt \le \dot{\mathbf{q}}_N^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}_N. \tag{2.1.3}$$

Если силы вязкого сопротивления являются линейными относительно обобщенных скоростей, то

$$dE/dt = -2\Phi, \tag{2.1.4}$$

где Ф – диссипативна функция Релея, являющаяся квадратичной формой относительно обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}_N$ и коэффициенты которой зависят только от относительных обобщенных координат $\mathbf{q}_N$.

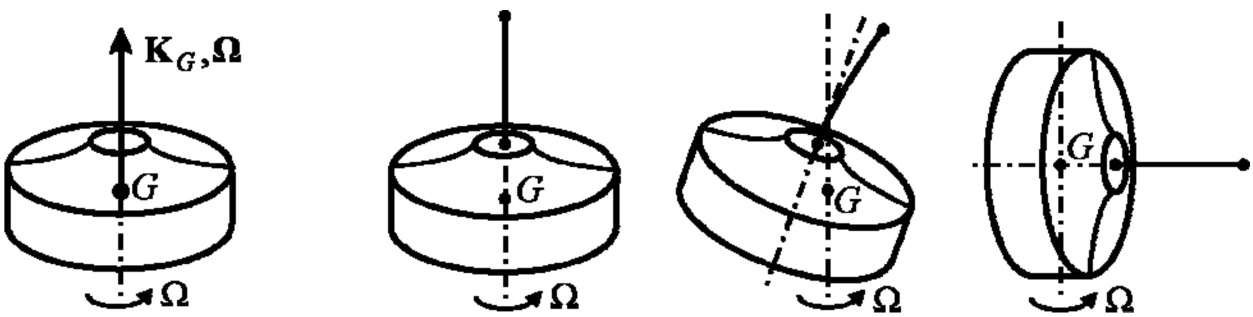
Таким образом, система допускает существование невозрастающей вдоль ее траекторий движения функции E. На установившихся движениях системы эта функция является постоянной и поэтому эти движения (по Раусу) называются стационарными. На этих движениях ПТ движутся с НТ как одно жесткое целое, так как относительные движения прекращаются.

Будем считать, что, по крайней мере, одно ПТ принуждается к относительному движению, если НТ осуществляет сложное движение, являющееся суммой прецессионного и нутационного движений. Тогда на установившихся движениях система будет вращаться вокруг неподвижной в пространстве оси, проходящей через центр масс системы, и на которой лежит вектор кинетического момента системы (рис. 2.1.1). К тому же во время переходных процессов полная механическая энергия системы будет убывать. С математической точки зрения для этого достаточно, чтобы $\dot{\mathbf{q}}_N^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}_N = 0$ $(\Phi = 0)$ только на установившихся движениях системы или на многообразии M_0 точек в фазовом пространстве системы, в котором нет целых траекторий движения системы, не соответствующих установившимся движениям. Следовательно

$$\forall(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \notin M_0 \quad \dot{\mathbf{q}}_N^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}_N \neq 0 \quad (\Phi \neq 0). \tag{2.1.5}$$

Заметим, что это более общее условие, чем условие, в соответствии с которым силы вязкого сопротивления должны иметь полную диссипацию.

В идеальном случае система должна вращаться как одно жесткое целое вокруг продольной оси НТ (рис. 2.1.1, б). Такое движение будем называть основным установившимся движением (основным движением). Этому препятствуют два фактора: неточность придания начального вращения системе; неуравновешенность НТ относительно продольной оси.



а б в г

Рис. 2.1.1. Основное и побочные движения системы

Кроме основного движения у системы могут существовать другие установившиеся движения, в которых она вращается не вокруг продольной оси НТ (рис. 2.1.1, в, г). Такие движения будем называть побочными.

В исследованиях будем в основном ограничиваться такими задачами:

- составлением дифференциальных уравнений движения системы;
- выделением всех установившихся движений;
- исследованием их устойчивости.

При оценке устойчивости мы будем интересоваться:

- условиями или областями устойчивости (в пространстве параметров);
- оценкой скорости затухания переходных процессов.

В монографии не будем исследовать поведение системы на границах областей устойчивости.

2.2. Метод Рауса исследования механических систем с циклическими координатами

Метод Рауса будем применять для составления дифференциальных уравнений движения рассматриваемых механических систем, для выделения стационарных (установившихся) движений и для исследования их устойчивости.

Конкретизация применения этого метода к рассматриваемым системам будет заключаться в получении выражений для основных динамических величин для рассматриваемых систем, введении систем координат, описывающих движение системы, в частности процесс устранения угла нутации, соответствующей конкретизации вида дифференциальных уравнений движения системы, уравнений установившихся движений, условий условной устойчивости стационарных движений и т.п. Конкретизированный метод будет применен к однотипному решению конкретных задач, сформулированных в задачах исследований.

Основные результаты этого метода, подлежащие конкретизации - следующие [182]. Движение системы описывают n обобщенных координат. Предполагается, что кинетическая и потенциальная энергии, а также обобщенные диссипативные силы не зависят от некоторых обобщенных координат $\mathbf{s} \in \mathbf{R}^k$ $(k < n)$ и обобщенные силы, соответствующие этим координатам, равны нулю:

$$T = T(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{s}}), \quad \Pi = \Pi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{(m)}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \in \mathbf{R}^m . \qquad (2.2.1)$$

Здесь $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^m$, $m + k = n$ и координаты $\mathbf{r}$ - позиционные, а $\mathbf{s}$ - циклические.

Уравнения Лагранжа II рода имеют такой вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{Q}^{(m)}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{s}}} = 0 . \qquad (2.2.2)$$

Система (2.2.2) допускает k первых циклических интегралов вида

$$\mathbf{p} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{s}}} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{const}, \quad \mathbf{c} \in \mathbf{R}^k . \qquad (2.2.3)$$

Функция Рауса имеет вид

$$R = R(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{c}) = (L - \dot{\mathbf{s}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{c})^* = R_2 + R_1 + R_0 , \qquad (2.2.4)$$

где: $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа; индекс * значит, что из R исключены циклические координаты $\dot{\mathbf{s}}$ с помощью уравнений (2.2.3); R_i – однородная степени i относительно позиционных скоростей $\dot{\mathbf{r}}$ часть функции Рауса, причем

$$R_1 = \mathbf{b}^{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{r}, \mathbf{c}), \quad \mathbf{b} \in \mathbf{R}^{(m)} . \qquad (2.2.5)$$

Уравнения Рауса для позиционных и циклических координат имеют, соответственно, вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{Q}^{(m)} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{r}} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{r}}, \tag{2.2.6}$$

$$\dot{\mathbf{c}} = 0, \quad \dot{\mathbf{s}} = -\frac{\partial R}{\partial \mathbf{c}}, \tag{2.2.7}$$

где

$$W = \Pi - R_0 \tag{2.2.8}$$

- потенциальная энергия приведенной системы,

$$\mathbf{G} = \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{r}}\right)^{\mathbf{T}} - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{G}^{\mathbf{T}} = -\mathbf{G}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{c}) \tag{2.2.9}$$

- матрица обобщенных гироскопических сил.

Приведенная система допускает невозрастающую функцию

$$H = R_2 + W, \quad dH/dt = \mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}^{(m)} \le 0. \tag{2.2.10}$$

Уравнение стационарных (установившихся) движений для позиционных координат

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{r}} = 0. \tag{2.2.11}$$

Из этой системы уравнений определяются положения равновесия приведенной системы. Если ее решением является $\mathbf{r}^0(\mathbf{c}^0)$ при фиксированных значениях $\mathbf{c}^0$ параметров $\mathbf{c}$, то приведенная система может осуществлять такое стационарное движение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^0(\mathbf{c}^0), \ \dot{\mathbf{r}} = 0, \tag{2.2.12}$$

Соответствующим стационарным движением исходной системы является

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^0(\mathbf{c}^0), \ \dot{\mathbf{r}} = 0, \ \mathbf{s} = \dot{\mathbf{s}}^0 t + \mathbf{s}^0, \ \dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}^0, \tag{2.2.13}$$

где $\dot{\mathbf{s}}^0, \mathbf{s}^0 \in \mathbf{R}^k$ – параметры, зависящие от начальных условий.

Для таких систем имеют место такие теоремы Румянцева-Сальвадоре.

Теорема 1 (*об устойчивости движения*). Если приведенный потенциал принимает локально строгий минимум при фиксированных значениях $\mathbf{c}^0$ параметров $\mathbf{c}$ в точке $\mathbf{r}^0(\mathbf{c}^0)$, эта точка изолирована от других стационарных точек приведенного потенциала (если другие точки существуют), а диссипативные силы имеют полную диссипацию по отношению к позиционным скоростям, то соответствующее этим параметрам $\mathbf{c}^0$ стационарное движение (2.2.13) устойчиво и любое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, будет стремиться к некоторому стационарному движению (2.2.13), отвечающему возмущенным значением параметров **c,** при $t \to +\infty$.

Теорема 2 (*о неустойчивости движения*). Если приведенный потенциал принимает стационарное значение, не являющееся даже нестрогим минимумом, при фиксированных значениях $\mathbf{c}^0$ параметров **c** в точке $\mathbf{r}^0(\mathbf{c}^0)$, эта точка изолирована от других стационарных точек приведенного потенциала (если другие точки существуют), а диссипативные силы имеют полную диссипацию по отношению к позиционным скоростям, то соответствующее этим параметрам $\mathbf{c}^0$ стационарное движение (2.2.13) неустойчиво.

Замечание 1. При не возмущении параметров **c** движение (2.2.13) будет асимптотически устойчивым относительно позиционных координат **r** и скоростей $\dot{\mathbf{r}}$. При этом имеет место условная асимптотическая устойчивость, так как должны выполняться циклические интегралы.

Замечание 2. Теоремы 1, 2 будут иметь место и при более общих условиях, наложенных на диссипативные силы. В частности, эти силы могут иметь полную диссипацию в смысле (2.1.5).

Замечание 3. Вместе теоремы 1 и 2 позволяют определять с точностью до границ области условной устойчивости и неустойчивости изолированных стационарных движений (2.2.12). Эти теоремы не дают ответ об устойчивости стационарного движения на границах областей устойчивости.

Для исследования на экстремум функции W будем использовать критерий Сильвестра. Введем обозначение

$$a_{ij} = \partial^2 W \big/ \partial q_i \partial q_j\,, \quad /\, i, j = \overline{1, m}\, /, \tag{2.2.14}$$

где $(q_1,...,q_m)^{\mathrm{T}} = \mathbf{r}$ – позиционные обобщенные координаты. Пусть на определенном установившемся движении (2.2.13) эти координаты и a_{ij} принимают постоянные значения

$$q_1 = \tilde{q}_1,...,q_m = \tilde{q}_m,\ a_{ij} = \tilde{a}_{ij},\ /\, i, j = \overline{1, m}\, /. \tag{2.2.15}$$

Тогда, в соответствии с критерием Сильвестра, условиями минимума функции W на этом установившемся движении будут:

$$\tilde{a}_{ii} > 0,\ /\, i = \overline{1, m}\, /, \qquad \Delta_j = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} \cdots \tilde{a}_{1j} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \tilde{a}_{j1} \cdots \tilde{a}_{jj} \end{vmatrix} > 0,\ /\, j = \overline{2, m}\, /. \tag{2.2.16}$$

Для рассматриваемых механических систем на стационарных движениях, из закона сохранения момента количества движения системы находим, что

$$\omega = K_G \,/\, J_{z_G}\,, \tag{2.2.17}$$

где ω – угловая скорость вращения системы, K_G – постоянная величина, равная модулю момента количества движения системы $\mathbf{K}_G$, J_{z_G} – осевой момент инерции системы относительно оси z_G, вокруг которой система вращается на стационарном движении. Также

$$R_0 = -K_G^2 /(2J_{z_G}), \qquad (2.2.18)$$

и потенциальная энергия приведенной системы имеет вид

$$W = \Pi + K_G^2 /(2J_{z_G}). \qquad (2.2.19)$$

Если система не имеет элементов, способных накапливать потенциальную энергию, то $\Pi = 0$ и

$$W = K_G^2 /(2J_{z_G}). \qquad (2.2.20)$$

Уравнения стационарных движений будут иметь вид

$$\partial J_{z_G} / \partial \mathbf{r} = 0. \qquad (2.2.21)$$

Из теорем 1 и 2 следует, что на устойчивых изолированных стационарных движениях осевой момент инерции системы J_{z_G} будет принимать максимальное значение, а на неустойчивых не будет принимать даже неизолированного максимума. Для исследования на экстремум осевого момента инерции J_{z_G} можно также использовать критерий Сильвестра. При этом

$$a_{ij} = -\partial^2 J_{z_G} \Big/ \partial q_i \partial q_j\,, \quad / i, j = \overline{1, m} /. \qquad (2.2.22)$$

Критерий максимума J_{z_G} будет иметь вид (2.2.16).

2.3. Определение условий наступления автобалансировки с применением эвристического критерия

Этот критерий [204] будем применять к неуравновешенному вращающемуся НТ в случае его уравновешивания одним или двумя АБ. С помощью критерия будем определять области параметров системы, в каких ПТ, образующие АБ, будут иметь тенденцию стремиться к положению, в котором уравновешивают НТ.

Критерий наступления автобалансировки для *n* АБ: *При уравновешивании вращающегося тела n пассивными АБ с твердыми телами в n различных плоскостях уравновешивания, для устойчивости основного движения необходимо и достаточно, чтобы при фиксированном положении тел АБ в положении, в котором они уравновешивают вращающееся тело, при любых элементарных дисбалансах* $\mathbf{s}_j$*, лежащих в j-й плоскости уравновешивания и прилагаемых в точках j на продольной оси вращающегося тела, выполнялось условие*

$$f(\mathbf{s}_1,...,\mathbf{s}_n)=\frac{1}{T}\int_0^T\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{s}_j(t)\cdot\mathbf{r}_j(t)\right)dt<0, \qquad (2.3.1)$$

где: t – время; $\mathbf{r}_j$ *– вектор отклонения точки j от ее положения в основном движении, вызванный элементарными дисбалансами; T – период в случае, если движение периодическое, если нет – бесконечно большой или другой характерный промежуток времени.*

Сделаем такие замечания:

- критерий применим как для твердых, так и деформируемых тел (роторов, валов, КА и тому подобное), причем в случае твердого тела его могут динамически уравновешивать два АБ ($n=2$) или статически - один АБ ($n=1$);

- в рамках линейной теории роторных систем критерий (2.3.1) дает некоторую квадратичную форму от параметров элементарных дисбалансов, так как вектор отклонения $\mathbf{r}_j$ является линейной функцией элементарных дисбалансов $\mathbf{s}_1,...,\mathbf{s}_n$, и поэтому для устойчивости основного движения (наступление автобалансировки) необходимо и достаточно, чтобы эта квадратичная форма была отрицательно-определенной.

Критерий наступления автобалансировки применяется в такой последовательности:

1) тела АБ (КГ) фиксируются в положениях, в которых они уравновешивают вращающееся тело;

2) в каждой плоскости уравновешивания к продольной оси вращающегося тела прикладываются элементарные дисбалансы, создаваемые элементарными массами, установленными на расстояниях, значительно превышающих отклонение продольной оси вращающегося тела от оси вращения в этих точках;
3) определяются законы установившихся движений этих точек, вызванные элементарными дисбалансами;
4) с применением критерия определяется алгебраическое условие наступления автобалансировки, имеющее вид квадратичной формы относительно дисбалансов;
5) с применением к этой форме критерия Сильвестра определяются области параметров системы, в которых наступает автобалансировка, в частности критические скорости вращения системы - скорости, при переходе через которые наступает или теряется автобалансировка.

2.4. Выбор методов исследования конкретных ИС

На основе проведенного обзора практического применения теории условной устойчивости стационарных движений нелинейных автономных систем избираем порядок и методы исследований, использованные в работах Мирера С.А., Сарычева В.А. [157], Сарычева В.А., Сазонова В.В. [191, 192], Сарычева В.А., Мирера С.А., Исакова А.В. [193].

1. Задачу построения приближенной теории устранения маятниковыми, шаровыми и жидкостными ДН больших углов нутации будем решать с использованием метода энергетического стока "energy sink metod".

Тогда приближенный закон изменения угла нутации будет иметь вид (1.2.1), где

$$\dot{T} = -2\Phi\,, \tag{2.4.1}$$

где Ф – диссипативная функция Релея.

Появляется задача конкретизации диссипативной функции Релея для маятниковых, шаровых и жидкостных ДН. После этого появляется возможность определения приближенного закона изменения угла нутации путем интегрирования уравнения (1.2.1).

2. Задачу построения теории устранения маятниками малых углов нутации будем решать с применением теории условной устойчивости стационарных движений нелинейных автономных систем, в частности – теории устойчивости по первому приближению. Ниже приведем порядок применения данного подхода.

2.1. Особенности построения теоретико-механической модели ИС. Модель состоит из вращающегося НТ, математических маятников, насаженных на его продольную ось, относительному движению которых препятствуют силы вязкого сопротивления, и точек, жестко связаных с НТ и создающих его неуравновешенность.

Для составления дифференциальных уравнений движения ИС будем использовать два разных метода с последующим сравнением полученных уравнений.

Первый метод – применение общих теорем динамики. Для описания движения ИС используем законы сохранения движения центра масс и кинетического момента относительно центра масс системы. Для ПТ применяем теорему об изменении момента количества движения точки или системы, составляя ее относительно подвижных осей, жестко связанных с НТ, выходящих из точки подвеса ПТ (например, работы [174, 204]):

$$\left(\frac{d'\mathbf{K}_{O_j}}{dt}+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{K}_{O_j}+\boldsymbol{\rho}_{O_j}\times m_j\mathbf{a}_{O_j}\right)\cdot\mathbf{u}_i=\mathbf{M}_{O_j}^{(e)}\cdot\mathbf{u}_i,$$

$$\mathbf{K}_{O_j}=\mathbf{J}_j\mathbf{\Omega}_j,\quad /\, i=\overline{1,3},\;\; j=\overline{1,n}\,/, \tag{2.4.2}$$

где $\mathbf{K}_{O_j}$ – момент количества движения j- го ПТ, найденный относительно точки подвеса – точки O_j; $d'\mathbf{K}_{O_j}/dt$ – его локальная производная по времени в подвижной системе координат; $\mathbf{\Omega}$ – угловая скорость вращения подвижных осей; $\mathbf{\Omega}_j$ – абсолютная угловая скорость вращения j-го ПТ; $\boldsymbol{\rho}_{O_j}$ – радиус-вектор центра масс j-го ПТ, проведенный из точки подвеса; m_j – масса j-го ПТ; $\mathbf{a}_{O_j}$ – абсолютное ускорение точки O_j; $\mathbf{u}_i$ – i-ий единичный вектор, направленный вдоль соответствующей координатной оси; $\mathbf{M}_{O_j}^{(e)}$ – главный момент внешних сил, действующих на ПТ номер j, найденный относительно точки O_j; $\mathbf{J}_j$ – тензор инерции ПТ, найденный относительно точки O_j.

Второй метод – применение уравнений Лагранжа II рода для диссипативных систем (например, работы [98, 115, 137, 146, 159, 165, 176]):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j},\quad /\, j=\overline{1,n}\,/, \tag{2.4.3}$$

где: q – обобщенная координата, $\dot{q}_j$ – обобщенная скорость, T – кинетическая энергия, Π – потенциальная энергия, Ф – диссипативная функция Релея.

Как и в работах [106-110, 128, 157, 191-193], положение и движение НТ будем определять относительно неподвижных осей, выходящих из центра масс НТ, с помощью углов Эйлера-Крылова или углов Кардана-Брайнта. Положение и движение ПТ будем определять относительно подвижных осей, жестко связанных с НТ. Такой выбор осей и координат, описывающих движение НТ и ПТ, позволяет:

- получить автономную систему дифференциальных уравнений движения ИС;
- получить стационарные решения автономной системы дифференциальных уравнений, соответствующие установившимся движениям ИС;
- применить теорию условной устойчивости стационарных движений нелинейных автономных систем с первыми интегралами.

2.2. Приведение дифференциальных уравнений движения ИС к безразмерному виду. Выделяется минимальная совокупность независимых безразмерных переменных и параметров, характеризующих динамику системы. Как было отмечено в [204], это дает следующие преимущества для дальнейших исследований:

- появляется возможность оценки влияния того, как и в какой комбинации с другими параметрами определенный размерный параметр влияет на динамику ИС;

- становится применимой теория подобия, то есть появляется возможность распространения результатов теоретических исследований на любую конкретную ИС, при условии, что ее дифференциальные уравнения движения имеют подобный вид;

- появляется возможность выделения малых и больших безразмерных параметров в важных с точки зрения практики случаях. Например, для рассматриваемых ИС, состоящих из НТ и ПТ, образующие ДН или АБ, малым параметром является отношение массы ПТ m к массе всей системы M_Σ, то есть $m/M_\Sigma \ll 1$.

2.3. Выделение установившихся движений (основных и побочных).

2.4. Исследование условной устойчивости стационарных (установившихся) движений с помощью первого метода Ляпунова. Данный метод будем использовать для исследования условной устойчивости основных изолированных установившихся движений и их семей (для случая статически неуравновешенного НТ), характера переходных процессов и оценки их скорости затухания.

Порядок применения данного метода, для исследования условной устойчивости изолированных установившихся движений, следующий:

1) проведение линеаризации дифференциальных уравнений движения, первых и вторых интегралов движения в окрестности стационарного решения;

2) уменьшение порядка линейной системы с помощью линеаризованных первых и вторых интегралов движения;

3) получение характеристического уравнения;

4) приближенное определение корней характеристического уравнения методом разложения корней полинома по степеням малого параметра [163, 172].

В соответствии с методом, корень полинома (1.4.12) подается несколькими первыми членами асимптотического разложения:

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \dots , \qquad (2.4.4)$$

где ε – параметр.

Порядок исследования условной устойчивости семьи установившихся движений подобен порядку исследования условной устойчивости изолированных установившихся движений, но имеет следующие особенные этапы:

1) выделения переменных, отвечающих за условную устойчивость семей установившихся движений;

2) получение замкнутой линеаризованной системы дифференциальных уравнений относительно этих переменных;

3) исследование по полученной системе уравнений условной устойчивости семей установившихся движений.

3. Оценку остаточных углов нутации будем проводить с помощью энергетического метода. Этот метод будем использовать для:

- исследования условной устойчивости основных и побочных установившихся движений (для случая статически неуравновешенного НТ);
- определения условий возникновения, существования и исчезновения различных установившихся движений;
- оценки остаточного угла нутации, возникающего при устойчивости того или иного побочного движения.

Будем определять остаточный угол нутации, а также характер устойчивости основных и побочных установившихся движений в зависимости от расстояния плоскости уравновешивания АБ до центра масс НТ.

Процесс возникновения, существования и исчезновения различных установившихся движений, их устойчивость, а также величину остаточного угла нутации будем исследовать путем исследования на экстремум полной энергии системы. Поскольку в ИС нет элементов, способных накапливать потенциальную энергию, устойчивость установившихся движений будем оценивать по осевому моменту инерции системы. На устойчивых установившихся движениях осевой момент инерции системы принимает максимальное или локальное максимальное значение.

2.5. Проверка полученных результатов компьютерным моделированием движения механических систем

Поскольку объектом исследования в этой работе являются механические системы, состоящие из дискретных материальных точек и АТТ, то для компьютерного моделирования их динамики будем использовать программную среду, реализующую в исследованиях метод конечных элементов. Будем использовать полностью автоматизированный программный продукт, совмещающий в себе возможности: создания трехмерных тел, образующих систему; задания между телами механических связей и силового взаимодействия; задания начальных условий; моделирования движений системы с визуализацией; выведения графиков различных механических величин, характеризующих движение системы, сил взаимодействия между отдельными элементами системы, массо-инерционных характеристик отдельных тел и системы в целом и т.п.

Для проверки полученных теоретических результатов будем использовать компьютерную САПР SolidWorks и ее модуль Cosmos Motion. Для исследования динамики рассматриваемых механических систем будем использовать методику моделирования процесса автобалансировки при уравновешивании быстровращающихся роторов, описанную в статьях Филимонихина Г.Б. Коваленко А.В. [202, 203].

Методика содержит такие основные этапы.

1. Создание в SolidWorks отдельных деталей, образующих механическую систему, неуравновешенное НТ, ПТ, образующие АБ.

2. Создание в SolidWorks сборки, в которой соединены вместе тела, образующие механическую систему.

3. Обработка сборки модулем Cosmos Motion – задание: вида крепления ПТ к НТ; вида относительных движений ПТ; сил, действующих на ПТ при их относительном движении; начальных условий.

4. Тестирование модели специфическими тестами, моделирующими движения ее отдельных элементов и процесс автобалансировки.

5. Моделирование динамики системы при различных соотношениях между параметрами системы и при различных начальных условиях.

Целью моделирования является проверка качественного поведения механической системы при определенных соотношениях между ее параметрами. То есть будем проверять, будет ли основное движение определенной системы устойчивым, если выполняются полученные теоретически условия устойчивости, и неустойчивым – в противном случае. Также будем наблюдать за тенденциями, проявляющимися во время движения исследуемой системы.

Более подробно последовательность применения методики моделирования будет описана в п. 4.3 главы 4.

Выводы главы 2

1. Для составления дифференциальных уравнений движения рассматриваемых механических систем, для выделения стационарных (установившихся) движений и для исследования их условной устойчивости будем применять метод Рауса для механических систем с циклическими интегралами.

2. Конкретизация применения метода Рауса для механических систем с циклическими интегралами к рассматриваемым системам будет заключаться в получении выражений для основных динамических величин, введении систем координат, описывающих движение системы, в частности процесс устранения угла нутации, соответствующей конкретизации вида дифференциальных уравнений движения системы, уравнений установившихся движений, условий устойчивости стационарных движений и т.п. С применением конкретизированного метода будут единообразно решены конкретные задачи, сформулированные в задачах исследования.

3. С использованием эмпирического критерия наступления автобалансировки будем определять области параметров системы, в которых ПТ, образующие АБ, будут иметь тенденцию стремиться к положению, в котором уравновешивают НТ. Будем рассматривать два случая: статически неуравновешенного вращающегося НТ, уравновешиваемого одним АБ, установленным в плоскости статической неуравновешенности; динамически неуравновешенного НТ, уравновешиваемого двумя АБ, установленными в двух разных плоскостях уравновешивания.

4. Для проверки полученных теоретических результатов будем моделировать движение системы в компьютерной САПР SolidWorks с использованием модуля Cosmos Motion.

5. Для исследования конкретных ИС будем использовать следующие методы:

- для построения приближенной теории устранения больших углов нутации шаровыми, маятниковыми и жидкостными АБ, для исследования условной устойчивости основных и побочных движений, а также для оценки остаточного угла нутации будем использовать энергетический метод;

- для исследования условной устойчивости основных движений и оценки характера протекания переходных процессов рассматриваемых ИС в случаях, когда основные движения устойчивы, будем использовать теорию условной устойчивости стационарных движений нелинейных автономных систем, в частности – теорию устойчивости по первому приближению (первый метод Ляпунова).

ГЛАВА 3.
КОНКРЕТИЗАЦИЯ МЕТОДА РАУСА ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ИС

Конкретизируется методика применения теории устойчивости стационарных движений динамических систем с первыми, в частности - циклическими интегралами к исследованию динамики ИС, состоящих из вращающегося НТ и ПТ. Выводятся разные формы дифференциальных уравнений движения системы, уравнений установившихся движений. Конкретизируется методика решения задачи по определению всех установившихся движений системы и оценки их условной устойчивости без составления дифференциальных уравнений движения системы.

ISBN 978-617-7197-24-8

3.1. Общее описание движения ИС

ИС состоит из вращающегося НТ (в дальнейшем – тела) и присоединенных к нему подвижных и неподвижных материальных точек (рис. 3.1.1). Тело имеет центр масс в точке O, массу M и вращается с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$. Поскольку система изолирована, то, не ограничивая общности, можно считать, что ее центр масс – точка G неподвижный. Также ее кинетический момент является постоянным вектором [137, 174, 195]. Примем за начало отсчета точку G. Тогда

$$\mathbf{r}_G = 0, \quad \mathbf{K}_G = \mathbf{const}, \tag{3.1.1}$$

где $\mathbf{r}_G$ – радиус-вектор центра масс системы, а $\mathbf{K}_G$ – вектор ее кинетического момента, найденный относительно точки G. Присоединенные точки делятся на k точек, жестко связанных с НТ, образовывающих неуравновешенность тела (в дальнейшем – неподвижные точки), имеющие массу μ_i, $/i = \overline{1,k}/$ и N точек, имеющих возможность двигаться относительно тела (в дальнейшем - подвижные точки), массой m_j, $/\, j = \overline{1,N}/$. Относительно точки G центр масс тела, точка O имеет радиус-вектор $\mathbf{r}_O$, неподвижные точки – $\mathbf{r}_{\mu i}$, $/i = \overline{1,k}/$, подвижные – $\mathbf{r}_j$, $/\, j = \overline{1,N}/$. Пусть относительно центра масс тела неподвижные точки имеют радиусы-векторы $\boldsymbol{\rho}_{\mu i}$, $/i = \overline{1,k}/$, а подвижные – $\boldsymbol{\rho}_j$, $/\, j = \overline{1,N}/$. Тогда

$$\mathbf{r}_{\mu i} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}_{\mu i}, \quad \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}_j, \quad /i = \overline{1,k};\ j = \overline{1,N}/. \tag{3.1.2}$$

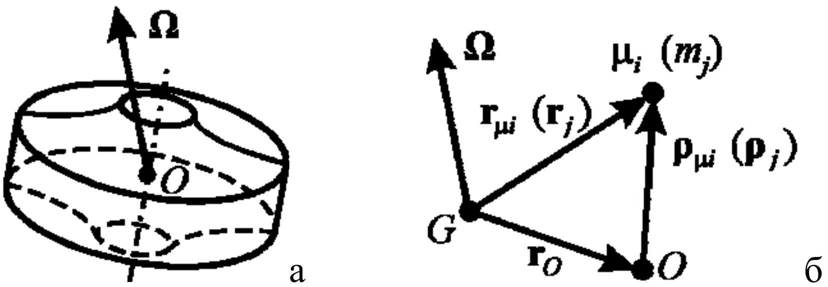


Рис. 3.1.1. Модель вращающейся ИС

Пусть из центра масс системы выходят оси $G\xi_G\eta_G\zeta_G$, синхронно вращающиеся с телом с угловой скоростью вращения тела – $\mathbf{\Omega}$. Будем представлять движение системы как сложное. За переносное движение примем вращение всей системы вокруг центра масс вместе с осями $G\xi_G\eta_G\zeta_G$, а за относительное движение – движение тела и присоединенных точек относительно подвижных осей $G\xi_G\eta_G\zeta_G$.

3.2. Основные динамические величины, законы сохранения и изменения

1. Закон сохранения движения центра масс ИС в абсолютных радиус-векторах имеет такой вид

$$M_\Sigma \mathbf{r}_G = M\mathbf{r}_O + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \mathbf{r}_{\mu i} + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j = 0, \qquad M_\Sigma = M + \sum_{i=1}^{k} \mu_i + \sum_{j=1}^{N} m_j, \qquad (3.2.1)$$

где M_Σ – масса всей системы. Данный закон в относительных радиус-векторах

$$M_\Sigma \mathbf{r}_G = M_\Sigma \mathbf{r}_O + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \boldsymbol{\rho}_{\mu i} + \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{\rho}_j = 0. \qquad (3.2.2)$$

Из (3.2.2) находим

$$\mathbf{r}_O = -\left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i \boldsymbol{\rho}_{\mu i} + \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{\rho}_j \right) \Big/ M_\Sigma . \qquad (3.2.3)$$

В дальнейшем будем рассматривать уравнения (3.2.1), (3.2.2) как уравнение геометрической связи. С его помощью будем упрощать вид основных динамических величин, и исключать из них характеристики относительного движения НТ.

По теореме о скорости точек при сложном движении имеем такие соотношения для скоростей [137, 174, 195]:

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_O^e + \mathbf{v}_O^r, \quad \mathbf{v}_{\mu i} = \mathbf{v}_{\mu i}^e + \mathbf{v}_{\mu i}^r, \quad \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j^e + \mathbf{v}_j^r,$$
$$\mathbf{v}_O^e = \Omega \times \mathbf{r}_O, \quad \mathbf{v}_{\mu i}^e = \Omega \times \mathbf{r}_{\mu i}, \quad \mathbf{v}_j^e = \Omega \times \mathbf{r}_j,$$
$$\mathbf{v}_{\mu i}^r = \mathbf{v}_O^r, \quad \mathbf{v}_j^r = \mathbf{v}_O^r + \mathbf{u}_j, \quad / i = \overline{1,k}; \quad j = \overline{1,N} /, \qquad (3.2.4)$$

где: $\mathbf{v}_O$ – абсолютная скорость точки O, $\mathbf{v}_{\mu i}$ – неподвижной точки номер i, $\mathbf{v}_j$ – подвижной точки номер j; с индексами $"e"$ и $"r"$ – соответственно переносная и относительная скорости соответствующей точки; $\mathbf{u}_j$ – относительная скорость подвижной точки номер j относительно точки O $/ j = \overline{1,N} /$.

Если взять абсолютную производную по времени от (3.2.1), то получим

$$M_\Sigma \mathbf{v}_G = M\mathbf{v}_O + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \mathbf{v}_{\mu i} + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j =$$
$$= M(\mathbf{v}_O^e + \mathbf{v}_O^r) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i (\mathbf{v}_{\mu i}^e + \mathbf{v}_{\mu i}^r) + \sum_{j=1}^{N} m_j (\mathbf{v}_j^e + \mathbf{v}_j^r) =$$

$$= M(\mathbf{v}_O^e + \mathbf{v}_O^r) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i (\mathbf{v}_{\mu i}^e + \mathbf{v}_O^r) + \sum_{j=1}^{N} m_j (\mathbf{v}_j^e + \mathbf{v}_O^r + \mathbf{u}_j) =$$

$$= M_\Sigma \mathbf{v}_O^r + M\mathbf{v}_O^e + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \mathbf{v}_{\mu i}^e + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j^e + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{u}_j =$$

$$= M_\Sigma \mathbf{v}_O^r + M\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_O + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_{\mu i} + \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{u}_j =$$

$$= M_\Sigma \mathbf{v}_O^r + \boldsymbol{\Omega}\times\Big(M\mathbf{r}_O + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \mathbf{r}_{\mu i} + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j\Big) + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{u}_j = M_\Sigma \mathbf{v}_O^r + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{u}_j = 0.$$

Откуда находим

$$M_\Sigma \mathbf{v}_O^r = -\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{u}_j, \quad \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{u}_j = -M_\Sigma \mathbf{v}_O^r. \tag{3.2.5}$$

2. Закон сохранения кинетического момента ИС относительно центра масс имеет вид

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_G^e + \mathbf{K}_G^r = \mathbf{const}. \tag{3.2.6}$$

Кинетический момент переносного движения

$$\mathbf{K}_G^e = \mathbf{J}_G \boldsymbol{\Omega}, \tag{3.2.7}$$

где $\mathbf{J}_G$ – центральный тензор инерции системы.

Кинетический момент относительного движения

$$\mathbf{K}_G^r = \mathbf{r}_O \times M\mathbf{v}_O^r + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{r}_{\mu i} \times \mu_i \mathbf{v}_{\mu i}^r + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{v}_j^r =$$

$$= \mathbf{r}_O \times M\mathbf{v}_O^r + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{r}_{\mu i} \times \mu_i \mathbf{v}_O^r + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_j \times m_j (\mathbf{v}_O^r + \mathbf{u}_j) =$$

$$= \left[M\mathbf{r}_O + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \mathbf{r}_{\mu i} + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j \right] \times \mathbf{v}_O^r + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{u}_j. \tag{3.2.8}$$

Тогда закон сохранения кинетического момента принимает вид

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{J}_G \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{h} = \mathbf{const}, \tag{3.2.9}$$

где:

$$\mathbf{h} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{N} (\boldsymbol{\rho}_j + \mathbf{r}_O) \times m_j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_j \times m_j \mathbf{u}_j + \mathbf{r}_O \times \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{u}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_j \times m_j \mathbf{u}_j - \frac{1}{M_\Sigma} \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i \boldsymbol{\rho}_{\mu i} + \sum_{s=1}^{N} m_s \boldsymbol{\rho}_s \right) \times \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{u}_j. \tag{3.2.10}$$

В дальнейшем векторное равенство (3.2.9) будем рассматривать как дифференциальное уравнение движения системы 1-го порядка, если составляются дифференциальные уравнения движения системы или как первый интеграл, если исследуется условная устойчивость стационарного движения при постоянном значении этого интеграла.

3. Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T=\frac{1}{2}Mv_O^2+\frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_{ATT_O}\mathbf{\Omega}+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}\mu_i v_{\mu i}^2+\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}m_j v_j^2\,, \tag{3.2.11}$$

где $\mathbf{J}_{ATT_O}$ – тензор инерции тела относительно точки O. После подстановки скоростей из (3.2.4) имеем

$$T=\frac{1}{2}M(\mathbf{v}_O^e+\mathbf{v}_O^r)^2+\frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_{ATT_O}\mathbf{\Omega}+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}\mu_i(\mathbf{v}_{\mu i}^e+\mathbf{v}_{\mu i}^r)^2+\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}m_j(\mathbf{v}_j^e+\mathbf{v}_j^r)^2=$$

$$=\frac{1}{2}M[(v_O^e)^2+2\mathbf{v}_O^e\mathbf{v}_O^r+(v_O^r)^2]+\frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_{ATT_O}\mathbf{\Omega}+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}\mu_i[(v_{\mu i}^e)^2+2\mathbf{v}_{\mu i}^e\mathbf{v}_{\mu i}^r+(v_{\mu i}^r)^2]+\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}m_j[(v_j^e)^2+2\mathbf{v}_j^e\mathbf{v}_j^r+(v_j^r)^2]\,.$$

Тогда кинетическую энергию системы можно подать в виде

$$T=T^e+T^{re}+T^r\,, \tag{3.2.12}$$

где

$$T^e=\frac{1}{2}M(v_O^e)^2+\frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_{ATT_O}\mathbf{\Omega}+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}\mu_i(v_{\mu i}^e)^2+\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}m_j(v_j^e)^2=\frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{\Omega}\,;$$

$$T^r=\frac{1}{2}\left[M(v_O^r)^2+\sum_{i=1}^{k}\mu_i(v_{\mu i}^r)^2+\sum_{j=1}^{N}m_j(v_j^r)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[M(v_O^r)^2+\sum_{i=1}^{k}\mu_i(v_O^r)^2+\sum_{j=1}^{N}m_j(\mathbf{v}_O^r+\mathbf{u}_j)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[M_\Sigma(v_O^r)^2+\sum_{j=1}^{N}m_j(u_j^2+2\mathbf{v}_O^r\cdot\mathbf{u}_j)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[M_\Sigma(v_O^r)^2+\sum_{j=1}^{N}m_ju_j^2+2\mathbf{v}_O^r\cdot\sum_{j=1}^{N}m_j\mathbf{u}_j\right]=\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{N}m_ju_j^2-M_\Sigma(v_O^r)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{N}m_ju_j^2-\left(\sum_{j=1}^{N}m_j\mathbf{u}_j\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{N}m_j\mathbf{u}_j\right)\Big/M_\Sigma\right];$$

$$T^{re} = M\mathbf{v}_O^e \cdot \mathbf{v}_O^r + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \mathbf{v}_{\mu i}^e \mathbf{v}_{\mu i}^r + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j^e \cdot \mathbf{v}_j^r =$$

$$= M\mathbf{v}_O^e \cdot \mathbf{v}_O^r + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \mathbf{v}_{\mu i}^e \cdot \mathbf{v}_O^r + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j^e \cdot (\mathbf{v}_O^r + \mathbf{u}_j) =$$

$$= \left\{ M(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_O) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i (\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_{\mu i}) + \sum_{j=1}^{N} m_j (\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_j) \right\} \cdot \mathbf{v}_O^r + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j^e \cdot \mathbf{u}_j =$$

$$= \left[\mathbf{\Omega} \times \left(M\mathbf{r}_O + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \mathbf{r}_{\mu i} + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j \right) \right] \cdot \mathbf{v}_O^r + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j^e \cdot \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j^e \cdot \mathbf{u}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{u}_j \cdot (\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_j) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{u}_j) = \mathbf{\Omega} \cdot \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{u}_j = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{h}$$

Или, окончательно

$$T^e = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G \mathbf{\Omega};$$

$$T^r = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{N} m_j u_j^2 - M_\Sigma (v_O^r)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{N} m_j u_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{u}_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{u}_j \right) \Big/ M_\Sigma \right];$$

$$T^{re} = \mathbf{\Omega} \cdot \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{u}_j = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{h}. \qquad (3.2.13)$$

4. Некоторые тождества и преобразования. Из курса векторной алгебры известны такие соотношения

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = a^2 b^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2, \quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}). \qquad (3.2.14)$$

Преобразуем кинетическую энергию переносного движения

$$T^e = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}^T \mathbf{J}_G \mathbf{\Omega} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[M(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_O)^2 + \sum_{i=1}^{k} \mu_i (\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_{\mu i})^2 + \sum_{j=1}^{N} m_j (\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_j)^2 + \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_{ATT_O} \mathbf{\Omega} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ M(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_O) \cdot (\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_O) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i [\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}_{\mu i})] \cdot (\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_{\mu i}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{N} m_j [\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}_j)] \cdot (\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_j) + \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_{ATT_O} \mathbf{\Omega} \right\} =$$

$$
=\frac{1}{2}(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_O)\cdot\left[\mathbf{\Omega}\times\left(M\mathbf{r}_O+\sum_{i=1}^{k}\mu_i\mathbf{r}_{\mu i}+\sum_{j=1}^{N}m_j\mathbf{r}_j\right)\right]+
$$

$$
+\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{k}\mu_i(\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{\rho}_{\mu i})\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_{\mu i})+\sum_{j=1}^{N}m_j(\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{\rho}_j)\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_j)+\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_{ATT_O}\mathbf{\Omega}\right\}=
$$

$$
=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{k}\mu_i(\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{\rho}_{\mu i})\cdot[\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{r}_O+\boldsymbol{\rho}_{\mu i})]+\right.
$$

$$
\left.+\sum_{j=1}^{N}m_j(\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{\rho}_j)\cdot[\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{r}_O+\boldsymbol{\rho}_{ji})]+\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_{ATT_O}\mathbf{\Omega}\right\}=
$$

$$
=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{k}\mu_i(\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{\rho}_{\mu i})^2+\sum_{j=1}^{N}m_j(\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{\rho}_j)^2+\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_{ATT_O}\mathbf{\Omega}+\right.
$$

$$
\left.+(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_O)\cdot\left[\mathbf{\Omega}\times\left(\sum_{i=1}^{k}\mu_i\,\boldsymbol{\rho}_{\mu i}+\sum_{j=1}^{N}m_j\boldsymbol{\rho}_j\right)\right]\right\}=\frac{1}{2}[\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_O\mathbf{\Omega}-M_{\Sigma}(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_O)^2],
$$

где $\mathbf{J}_O$ – тензор инерции системы относительно точки O.

Окончательно имеем

$$
T^e=\frac{1}{2}[\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_O\mathbf{\Omega}-M_{\Sigma}(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_O)^2]. \tag{3.2.15}
$$

3.3. Конкретизация для систем с первыми интегралами

1. Преобразование кинетической энергии системы с помощью интегралов $\mathbf{r}_G = 0$, $\mathbf{K}_G = \mathbf{const}$. Полная механическая энергия системы является невозрастающей функцией. Ее проще исследовать на абсолютный экстремум после исключения из нее зависимых координат и скоростей. Из (3.2.9) находим

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{J}_G^{-1}(\mathbf{K}_G - \mathbf{h}), \quad \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{K}_G - \mathbf{h})^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G^{-1}, \quad [\mathbf{J}_G^{-1} = (\mathbf{J}_G^{-1})^{\mathrm{T}}]. \tag{3.3.1}$$

Учитывая это, преобразовываем

$$T^e + T^{re} = \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{h} =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{K}_G - \mathbf{h})^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G^{-1}\mathbf{J}_G\mathbf{J}_G^{-1}(\mathbf{K}_G - \mathbf{h}) + (\mathbf{K}_G - \mathbf{h})^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G^{-1}\mathbf{h} =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{K}_G - \mathbf{h})^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G^{-1}(\mathbf{K}_G - \mathbf{h}) + (\mathbf{K}_G - \mathbf{h})^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G^{-1}\mathbf{h} = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_G - \mathbf{h})^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G^{-1}(\mathbf{K}_G - \mathbf{h} + 2\mathbf{h}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{K}_G - \mathbf{h})^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G^{-1}(\mathbf{K}_G + \mathbf{h}) = \frac{1}{2}\mathbf{K}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G^{-1}\mathbf{K}_G - \frac{1}{2}\mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G^{-1}\mathbf{h}.$$

Следовательно, имеем

$$T = \frac{1}{2}\left[\mathbf{K}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G^{-1}\mathbf{K}_G + \sum_{j=1}^{N} m_j u_j^2 - \mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G^{-1}\mathbf{h} - M_\Sigma (v_O^r)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathbf{K}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G^{-1}\mathbf{K}_G + \sum_{j=1}^{N} m_j u_j^2 - \mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G^{-1}\mathbf{h} - \left(\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{u}_j\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{u}_j\right) \Big/ M_\Sigma\right]. \tag{3.3.2}$$

Или в таком виде

$$T = T_0 + T_2, \qquad T_0 = \frac{1}{2}\mathbf{K}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G^{-1}\mathbf{K}_G,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} m_j u_j^2 - \mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G^{-1}\mathbf{h} - \left(\sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{u}_j\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{u}_j\right) \Big/ M_\Sigma\right]. \tag{3.3.3}$$

Это – кинетическая энергия системы, согласованная со связями (3.2.1) и (3.2.9). Видно, что T_0 – не зависит от обобщенных скоростей, а T_2 – положительно определенная квадратичная форма относительных скоростей:

$$T_0 = T_0(\mathbf{K}_G, \boldsymbol{\rho}_1, \ldots \boldsymbol{\rho}_N), \quad T_2 = T_2(\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_N, \boldsymbol{\rho}_1, \ldots \boldsymbol{\rho}_N), \quad \forall \mathbf{u}_j \neq 0 \;\; T_2 > 0. \tag{3.3.4}$$

2. Потенциальная и полная механическая энергии системы, диссипативна функция Релея, закон изменения полной механической энергии системы.

Потенциальная энергия системы образуется за счет относительного движения ПТ. Поэтому она имеет вид

$$\varPi = \varPi(\boldsymbol{\rho}_1,...\boldsymbol{\rho}_N)\,. \tag{3.3.5}$$

Силы вязкого сопротивления препятствуют относительному движению ПТ. Поэтому диссипативна функция Релея имеет вид

$$\varPhi = \varPhi(\mathbf{u}_1,...\mathbf{u}_N) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j u_j^2\,, \tag{3.3.6}$$

где α_j – коэффициенты сил вязкого сопротивления.

Поскольку на систему действуют только внутренние потенциальные и диссипативные силы, то

$$dE/dt = -2\varPhi,\;\; E = T + \varPi\,, \tag{3.3.7}$$

где E – полная механическая энергии системы.

Введем в рассмотрение приведенную потенциальную энергию системы

$$\varPi^* = T_0 + \varPi\,. \tag{3.3.8}$$

На установившихся движениях системы она принимает стационарное значение. Полная механическая энергия системы $E = T_2 + \varPi^*$.

3. Из теорем Барбашина-Красовского и Красовского (дополненных А.В. Карапетяном, В.В. Румянцевым, А.С. Озерянером, В.И. Воротниковым и т.д.) следует, что для рассматриваемых систем изолированное установившееся движение:

– *устойчиво, если приведенная потенциальная энергия системы имеет на нем изолированный минимум;*
– *неустойчиво, если приведенная потенциальная энергия системы не имеет на нем даже неизолированный минимум.*

Теорему иллюстрирует рис. 3.3.1, на котором изображен тяжелый шарик в поле сил тяжести.

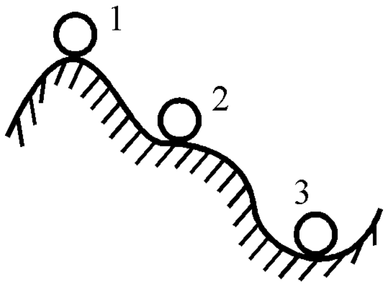
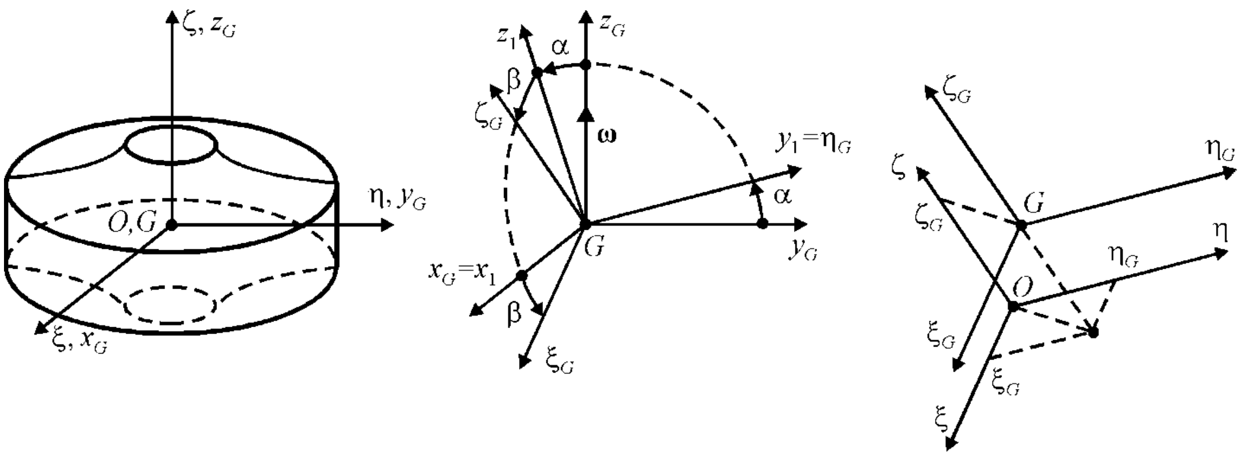


Рис. 3.3.1. Устойчивые и неустойчивые установившиеся движения системы

Его потенциальная энергия качественно характеризует разные энергетические уровни приведенной потенциальной энергии Π^* системы. В точке 1 – максимума или 2 – перегиба поверхности, на которой находится шарик, равновесие неустойчиво. В точке 3 – минимума равновесие устойчиво. Условия рассеивания и не подведения энергии обязательны, поскольку благодаря им точка может опускаться с верхних энергетических уровней E на нижние, и покинув определенный верхний энергетический уровень, уже не может к нему подняться.

3.4. Дальнейшая конкретизация описания системы

Схема движения тела изображена на рис. 3.4.1. Оно имеет главные центральные оси $O\xi\eta\zeta$. В идеальном случае тело должно вращаться вокруг своей продольной оси ζ. Этому мешает неточность придания начального вращения телу и его неуравновешенность относительно оси ζ, образованная неподвижными точками.



а б в

Рис. 3.4.1. Определение движения НТ

Введем в рассмотрение оси $Gx_Gy_Gz_G$, в которых ось z_G направлена вдоль вектора $\mathbf{K}_G$. Пусть они вращаются вокруг оси z_G с угловой скоростью ω, соответствующей первому повороту тела в пространстве на углы Эйлера-Крылова [119] (иногда эти углы называют углами Кардана-Брайнта [128]). Тогда соответствующий угол γ является циклической координатой и в уравнение движения входить не будет. В процессе дальнейшего движения оси $Gx_Gy_Gz_G$ переходят в оси $O\xi\eta\zeta$, определяющие конечное положение НТ, таким образом. Сначала оси $Gx_Gy_Gz_G$ поворачиваются на два других угла Кардана-Брайнта α, β, как это показано на рис. 3.4.1, б, в результате чего переходят в оси $G\xi_G\eta_G\zeta_G$. Затем оси $G\xi_G\eta_G\zeta_G$ перемещаются поступательно на $-\xi_G, -\eta_G, -\zeta_G$, в результате чего переходят в оси $O\xi\eta\zeta$, как это показано на рис. 3.4.1, в. Очевидно, что ξ_G, η_G, ζ_G – координаты центра масс системы относительно осей $O\xi\eta\zeta$, причем координаты ξ_G, η_G характеризуют статическую неуравновешенность системы относительно продольной оси тела ζ.

Предполагаем, что подвижные точки образуют пассивный АБ. Возможные случаи, когда подвижные материальные точки образуют АТТ, так называемые КГ. В дальнейшем считаем, что АБ состоит из нескольких

КГ, причем их относительные положения задают обобщенные координаты $\varphi_1,...\varphi_n$. Тогда у системы существуют так называемые *основные движения* – установившиеся движения, в которых тело уравновешено КГ и вращается вокруг своей продольной оси ζ, совпадающей с осью z_G. Также у системы существуют *побочные движения* – установившиеся движения, в которых тело не уравновешено и вращается вокруг оси z_G, не являющейся его продольной осью.

Тензор инерции системы образуется НТ и ПТ. Относительно осей $O\xi\eta\zeta$ его можно представить в виде

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\xi\eta} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\xi\zeta} & -J_{\eta\zeta} & J_\zeta \end{pmatrix}, \tag{3.4.1}$$

где центробежные моменты инерции системы $J_{\xi\zeta}$, $J_{\eta\zeta}$ характеризуют моментную неуравновешенность системы относительно продольной оси тела ζ.

Тензор инерции системы относительно центральных осей системы $G\xi_G\eta_G\zeta_G$:

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_O - M_\Sigma \begin{pmatrix} (\eta_G^2+\zeta_G^2) & -\xi_G\eta_G & -\xi_G\zeta_G \\ -\xi_G\eta_G & (\xi_G^2+\zeta_G^2) & -\eta_G\zeta_G \\ -\xi_G\zeta_G & -\eta_G\zeta_G & (\xi_G^2+\eta_G^2) \end{pmatrix}. \tag{3.4.2}$$

Заметим, что

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_{\xi_G} \\ \Omega_{\eta_G} \\ \Omega_{\zeta_G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot\alpha\cos\beta - \omega\cos\alpha\sin\beta \\ \dot\beta + \omega\sin\alpha \\ \dot\alpha\sin\beta + \omega\cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}, \tag{3.4.3}$$

$$\xi_G = \xi_G(\varphi_1,...\varphi_n),\quad \eta_G = \eta_G(\varphi_1,...\varphi_n),\quad J_{\xi\zeta} = J_{\xi\zeta}(\varphi_1,...\varphi_n),\quad J_{\eta\zeta} = J_{\eta\zeta}(\varphi_1,...\varphi_n),$$

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_G(\varphi_1,...,\varphi_n),\quad \mathit{\Pi} = \mathit{\Pi}(\varphi_1,...,\varphi_n),\quad \mathit{\Phi} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\dot\varphi_i\dot\varphi_j, \tag{3.4.4}$$

где $\mathit{\Phi}$ – положительно определенная квадратичная форма от обобщенных скоростей $\dot\varphi_1,...\dot\varphi_n$, причем коэффициенты этой формы α_{ij} в общем случае могут быть функциями обобщенных координат $\varphi_1,...\varphi_n$.

Движение системы полностью определяют такие независимые параметры

$$\alpha,\ \beta,\ \omega,\ \varphi_1,...\varphi_n. \tag{3.4.5}$$

На установившихся движениях системы они – постоянные. Параметр $\omega = \dot\gamma$ – отвечает циклической угловой координате γ. На установившихся движениях он определяет угловую скорость вращения системы.

Введем в рассмотрение единичные векторы, направленные по осям $Gx_G y_G z_G$:

$$\mathbf{x}_G = (\cos\beta,\, 0,\, \sin\beta)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{y}_G = (\sin\alpha\sin\beta,\, \cos\alpha,\, -\sin\alpha\cos\beta)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{z}_G = (-\cos\alpha\sin\beta,\, \sin\alpha,\, \cos\alpha\cos\beta)^{\mathrm{T}}. \tag{3.4.6}$$

Тогда:

$$\mathbf{K}_G = K\mathbf{z}_G,\; K = \mathrm{const}, \quad \mathbf{\Omega} = \omega\mathbf{z}_G + \dot\alpha\mathbf{x}_G + \dot\beta(\mathbf{y}_G\cos\alpha + \mathbf{z}_G\sin\alpha); \tag{3.4.7}$$

$$J_{x_G} = \mathbf{x}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{x}_G,\; J_{y_G} = \mathbf{y}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{y}_G,\; J_{z_G} = \mathbf{z}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{z}_G,$$

$$J_{x_G z_G} = -\mathbf{x}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{z}_G,\; J_{y_G z_G} = -\mathbf{y}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{z}_G,\quad J_{x_G y_G} = -\mathbf{x}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{y}_G; \tag{3.4.8}$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\mathbf{K}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G^{-1}\mathbf{K}_G = \frac{1}{2}K^2\mathbf{z}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G^{-1}\mathbf{z}_G = \frac{K^2}{2D}(J_{x_G}J_{y_G} - J_{x_G y_G}^2); \tag{3.4.9}$$

$$D = J_{x_G}J_{y_G}J_{z_G} - J_{x_G}J_{y_G z_G}^2 - J_{y_G}J_{x_G z_G}^2 - J_{z_G}J_{x_G y_G}^2 - 2J_{x_G y_G}J_{x_G z_G}J_{y_G z_G} =$$

$$= J_{\xi_G}J_{\eta_G}J_{\zeta_G} - J_{\xi_G}J_{\eta_G\zeta_G}^2 - J_{\eta_G}J_{\xi_G\zeta_G}^2 - J_{\zeta_G}J_{\xi_G\eta_G}^2 - 2J_{\xi_G\eta_G}J_{\xi_G\zeta_G}J_{\eta_G\zeta_G}. \tag{3.4.10}$$

Дискриминант D является инвариантом тензора инерции и поэтому не зависит от углов α, β поворота осей $G\xi_G\eta_G\zeta_G$ вокруг точки G и является одинаковым для любых осей, выходящих из точки G. Он является функцией вида

$$D = D(\varphi_1, ..., \varphi_n). \tag{3.4.11}$$

С учетом (3.4.10) кинетическую энергию T_0 можно подать в виде

$$T_0 = \frac{K^2}{2J_{z_G}} + \frac{J_{x_G}J_{y_G z_G}^2 + J_{y_G}J_{x_G z_G}^2 + 2J_{x_G y_G}J_{x_G z_G}J_{y_G z_G}}{2DJ_{z_G}}. \tag{3.4.12}$$

Подставим $\mathbf{\Omega}$ из (3.4.7) в (3.2.9), получим

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{J}_G[\omega\mathbf{z}_G + \dot\alpha\mathbf{x}_G + \dot\beta(\mathbf{y}_G\cos\alpha + \mathbf{z}_G\sin\alpha)] + \mathbf{h} = K\mathbf{z}_G.$$

Последовательным умножением этого равенства на $\mathbf{x}_G, \mathbf{y}_G, \mathbf{z}_G$ находим

$$J_{x_G}\dot\alpha - J_{x_G y_G}\dot\beta\cos\alpha - J_{x_G z_G}(\omega + \dot\beta\sin\alpha) + h_{x_G} = 0,$$

$$-J_{x_G y_G}\dot\alpha + J_{y_G}\dot\beta\cos\alpha - J_{y_G z_G}(\omega + \dot\beta\sin\alpha) + h_{y_G} = 0,$$

$$-J_{x_G y_G}\dot\alpha - J_{y_G z_G}\dot\beta\cos\alpha + J_{z_G}(\omega + \dot\beta\sin\alpha) + h_{z_G} = K. \tag{3.4.13}$$

3.5. Различные формы дифференциальных уравнений движения системы

1. Уравнения Лагранжа II рода. Пусть кинетическая энергия системы определена в форме (3.2.13). Тогда кинетическая и потенциальная энергии системы и диссипативная функция Релея являются функциями вида

$$T = T(\omega, \alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_n, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}_1, \ldots \dot{\varphi}_n),\ \Pi = \Pi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n),\ \Phi = \Phi(\dot{\varphi}_1, \ldots \dot{\varphi}_n). \quad (3.5.1)$$

Тогда уравнения Лагранжа II рода дают такие дифференциальные уравнения движения системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega} = 0,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_j},\ /\, j = \overline{1,n}\,/, \quad (3.5.2)$$

Из первого уравнения следует, что обобщенная координата γ, соответствующая угловой скорости $\omega = \dot{\gamma}$, является циклической координатой.

Если во время движения системы ее кинетический момент не возмущается, то вместо первых трех уравнений можно использовать закон сохранения кинетического момента системы. Дифференциальные уравнения движения системы в этом случае примут вид

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{J}_G \mathbf{\Omega} + \mathbf{h} = \mathbf{const},\ \ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_j},\ /\, j = \overline{1,n}\,/, \quad (3.5.3)$$

или с использованием углов α, β, γ:

$$J_{x_G}\dot{\alpha} - J_{x_G y_G}\dot{\beta}\cos\alpha - J_{x_G z_G}(\omega + \dot{\beta}\sin\alpha) + h_{x_G} = 0,$$

$$-J_{x_G y_G}\dot{\alpha} + J_{y_G}\dot{\beta}\cos\alpha - J_{y_G z_G}(\omega + \dot{\beta}\sin\alpha) + h_{y_G} = 0,$$

$$-J_{x_G y_G}\dot{\alpha} - J_{y_G z_G}\dot{\beta}\cos\alpha + J_{z_G}(\omega + \dot{\beta}\sin\alpha) + h_{z_G} = K,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_j},\ /\, j = \overline{1,n}\,/. \quad (3.5.4)$$

2. Уравнения Рауса. Применим для составления дифференциальных уравнений движения системы уравнения Рауса. Первое уравнение в (3.5.2) дает такой первый интеграл для определения ω:

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = \frac{\partial (T^e + T^{er})}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{\Omega}\right) + \frac{\partial}{\partial \omega}(\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{h}) =$$

$$= \frac{\partial \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}}{\partial \omega}\mathbf{J}_G\mathbf{\Omega} + \frac{\partial \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}}{\partial \omega}\mathbf{h} = \mathbf{z}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{\Omega} + \mathbf{z}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{h} =$$

$$= \mathbf{z}_G^{\mathrm{T}} (\mathbf{J}_G \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{h}) = \mathbf{z}_G^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_G = \mathbf{z}_G^{\mathrm{T}} \mathbf{z}_G K = K .$$

С другой стороны

$$\mathbf{z}_G^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{z}_G^{\mathrm{T}} \mathbf{h} = \mathbf{z}_G^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G [\omega \mathbf{z}_G + \dot{\alpha} \mathbf{x}_G + \dot{\beta} (\mathbf{y}_G \cos\alpha + \mathbf{z}_G \sin\alpha)] + \mathbf{z}_G^{\mathrm{T}} \mathbf{h} =$$

$$= J_{z_G} \omega - [J_{x_G z_G} \dot{\alpha} + \dot{\beta} (J_{y_G z_G} \cos\alpha - J_{z_G} \sin\alpha)] + h_{z_G} = K .$$

Откуда находим

$$\omega^* = \frac{K + J_{x_G z_G} \dot{\alpha} + \dot{\beta} (J_{y_G z_G} \cos\alpha - J_{z_G} \sin\alpha) - h_{z_G}}{J_{z_G}} . \qquad (3.5.5)$$

Кинетическая энергия переносного движения определяется как

$$T_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} J_{z_G} \omega^2 - \omega [J_{x_G z_G} \dot{\alpha} + \dot{\beta} (J_{y_G z_G} \cos\alpha - J_{z_G} \sin\alpha)] +$$

$$+ \frac{1}{2} [J_{x_G} \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 (J_{y_G} \cos^2\alpha + J_{z_G} \sin^2\alpha - J_{y_G z_G} \sin 2\alpha) -$$

$$- 2\dot{\alpha}\dot{\beta} (J_{x_G y_G} \cos\alpha + J_{x_G z_G} \sin\alpha)].$$

Подставляя (3.5.5) в (3.2.13), найдем кинетическую энергию системы в виде

$$T^* = T_0^* + T_1^* + T_2^* , \qquad (3.5.6)$$

где

$$T_0^* = K^2 / (2 J_{z_G}) \qquad (3.5.7)$$

– составляющая, не зависящая от обобщенных скоростей, T_1^*, T_2^* – составляющие, являющиеся соответственно линейными и квадратичными формами относительно обобщенных скоростей $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}_1, ... \dot{\varphi}_n$.

Функция Рауса будет иметь вид:

$$R = T^* - K\omega^* = R_0 + R_1 + R_2 , \qquad (3.5.8)$$

где

$$R_0 = -K^2 / (2 J_{z_G}) \qquad (3.5.9)$$

– составляющая, не зависящая от обобщенных скоростей, R_1, R_2 – составляющие, являющиеся соответственно линейными и квадратичными формами относительно обобщенных скоростей $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}_1, ... \dot{\varphi}_n$.

Уравнения движения Рауса для нециклических координат примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial R}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial R}{\partial \beta} = 0 ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial R}{\partial \varphi_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_j} , \ / j = \overline{1, n} / . \qquad (3.5.10)$$

Циклическая координата определяется из уравнения (3.5.4) квадратурой после определения из системы (3.5.10) законов изменения нециклических координат.

Если кинетический момент во время движения системы не изменяется, то вместо первых двух уравнений в (3.5.10) можно использовать первые два уравнения в (3.4.13), исключив из них ω с помощью (3.5.4) или, что то же самое, с помощью последнего равенства в (3.4.13). Так, из этого равенства находим

$$\omega + \dot{\beta}\sin\alpha = \frac{K + J_{x_G z_G}\dot{\alpha} + J_{y_G z_G}\dot{\beta}\cos\alpha - h_{z_G}}{J_{z_G}}.$$

Подставляя это в первые два уравнения (3.4.13), получаем

$$J_{x_G}\dot{\alpha} - J_{x_G y_G}\dot{\beta}\cos\alpha - J_{x_G z_G}\frac{K + J_{x_G z_G}\dot{\alpha} + J_{y_G z_G}\dot{\beta}\cos\alpha - h_{z_G}}{J_{z_G}} + h_{x_G} = 0,$$

$$-J_{x_G y_G}\dot{\alpha} + J_{y_G}\dot{\beta}\cos\alpha - J_{y_G z_G}\frac{K + J_{x_G z_G}\dot{\alpha} + J_{y_G z_G}\dot{\beta}\cos\alpha - h_{z_G}}{J_{z_G}} + h_{y_G} = 0,$$

или

$$\begin{aligned} &J_{x_G}J_{z_G}\dot{\alpha} - J_{x_G y_G}J_{z_G}\dot{\beta}\cos\alpha - J_{x_G z_G}(K + J_{x_G z_G}\dot{\alpha} + J_{y_G z_G}\dot{\beta}\cos\alpha - h_{z_G}) + \\ &\qquad + h_{x_G}J_{z_G} = 0, \\ &-J_{x_G y_G}J_{z_G}\dot{\alpha} + J_{y_G}J_{z_G}\dot{\beta}\cos\alpha - J_{y_G z_G}(K + J_{x_G z_G}\dot{\alpha} + J_{y_G z_G}\dot{\beta}\cos\alpha - h_{z_G}) + \\ &\qquad + h_{y_G}J_{z_G} = 0. \end{aligned}$$

Окончательно дифференциальные уравнения движения системы для нециклических координат можно подать в виде

$$\begin{aligned} &(J_{x_G}J_{z_G} - J^2_{x_G z_G})\dot{\alpha} - (J_{x_G y_G}J_{z_G} + J_{x_G z_G}J_{y_G z_G})\dot{\beta}\cos\alpha + \\ &\quad + J_{x_G z_G}h_{z_G} + J_{z_G}h_{x_G} - J_{x_G z_G}K = 0, \\ &-(J_{x_G y_G}J_{z_G} + J_{x_G z_G}J_{y_G z_G})\dot{\alpha} + (J_{y_G}J_{z_G} - J^2_{y_G z_G})\dot{\beta}\cos\alpha + \\ &\quad + J_{y_G z_G}h_{z_G} + h_{y_G}J_{z_G} - J_{y_G z_G}K = 0, \\ &\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial\dot{\varphi}_j} - \frac{\partial R}{\partial\varphi_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial\varphi_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial\dot{\varphi}_j}, \quad / \, j = \overline{1,n} \, /. \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

3.6. Конкретизация для систем с циклическими интегралами

1. Уравнение установившихся движений. Потенциальная энергия приведенной системы равняется

$$W(\alpha,\beta,\varphi_1,...,\varphi_n) = \Pi - R_0 = \Pi + K^2/(2J_{z_G}). \qquad (3.6.1)$$

Уравнения установившихся движений системы имеют вид

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0,\ \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0,\ \frac{\partial W}{\partial \varphi_j} = 0 \quad / \, j = \overline{1,n} \, /, \qquad (3.6.2)$$

или, после преобразований

$$\frac{\partial R_0}{\partial \alpha} = 0,\ \frac{\partial R_0}{\partial \beta} = 0,\ \frac{\partial R_0}{\partial \varphi_j} = \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_j} \quad / \, j = \overline{1,n} \, /.$$

Первые два уравнения этой системы, с учетом уравнений (3.5.11), эквивалентны таким двум уравнениям: $J_{x_G z_G} = 0$, $J_{y_G z_G} = 0$. Поэтому уравнения установившихся движений для рассматриваемых систем принимают такой вид:

$$J_{x_G z_G} = 0,\ J_{y_G z_G} = 0,\ \frac{\partial R_0}{\partial \varphi_j} = \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_j} \quad / \, j = \overline{1,n} \, /. \qquad (3.6.3)$$

Из этих уравнений следует, что на любом установившемся движении система вращается вокруг главной центральной оси инерции z_G и осевой момент инерции J_{z_G} является главным центральным.

Система уравнений (3.6.3) является системой нелинейных алгебраических уравнений. Такая система допускает несколько существенно различных решений, а в случае АБ со многими телами даже семьи установившихся движений, зависящих от одного или нескольких параметров [204].

2. Оценка устойчивости установившихся движений. Из уравнений (3.6.2) следует, что на установившемся движении приведенная потенциальная энергия системы W принимает экстремальное или критическое значение. В соответствии с теоремами Румянцева-Сальвадори для условной асимптотической устойчивости изолированного установившегося движения достаточно, чтобы на нем приведенная потенциальная энергия системы имела минимум. И изолированное установившееся движение будет неустойчивым, если приведенная потенциальная энергия системы не имеет на нем даже неизолированного минимума.

Введем обозначение

$$a_{ij} = \partial^2 W \Big/ \partial q_i \partial q_j\,, \quad q = (\alpha, \beta, \varphi_1, ...\varphi_n),\ /i, j = \overline{1, n}/\,. \tag{3.6.4}$$

Пусть на определенном установившемся движении

$$q = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\varphi}_1, ...\tilde{\varphi}_n),\ a_{ij} = \tilde{a}_{ij},\ /i, j = \overline{1, n}/\,. \tag{3.6.5}$$

Тогда, в соответствии с критерием Сильвестра, условиями минимума функции W на этом установившемся движении будут:

$$\tilde{a}_{ii} > 0,\ /i = \overline{1, n}/, \qquad \Delta_j = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} \cdots \tilde{a}_{1j} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \tilde{a}_{j1} \cdots \tilde{a}_{jj} \end{vmatrix} > 0,\ \ /j = \overline{2, n}/. \tag{3.6.6}$$

Если система не имеет элементов, способных накапливать потенциальную энергию, как это в случае, когда ПТ образуют АБ, то $\Pi = 0$ и

$$W(\alpha, \beta, \varphi_1, ..., \varphi_n) = -R_0 = K^2 /(2 J_{z_G})\,. \tag{3.6.7}$$

Из уравнений (3.6.2) с учетом (3.6.7) следует, что на установившемся движении осевой момент инерции J_{z_G} принимает экстремальное или критическое значение. Уравнения установившихся движений для таких систем имеют вид:

$$\partial J_{z_G} / \partial \alpha = 0,\ \ \partial J_{z_G} / \partial \beta = 0,\ \ \partial J_{z_G} / \partial \varphi_j = 0, \quad /j = \overline{1, n}/\,. \tag{3.6.8}$$

В соответствии с теоремами Румянцева-Сальвадори для устойчивости изолированного установившегося движения достаточно, чтобы на нем осевой момент инерции принимал максимальное значение. И изолированное установившееся движение неустойчиво, если осевой момент инерции на нем не имеет даже неизолированного максимума. При исследовании J_{z_G} на экстремум

$$a_{ij} = \partial^2 J_{z_G} \Big/ \partial q_i \partial q_j\,, \quad q = (\alpha, \beta, \varphi_1, ...\varphi_n),\ /i, j = \overline{1, n}/\,. \tag{3.6.9}$$

3.7. Сопоставление результатов двух конкретизаций

Утверждение 1. Алгебраические уравнения установившихся движений имеют вид

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \alpha} = 0, \ \frac{\partial \Pi^*}{\partial \beta} = 0; \ \frac{\partial \Pi^*}{\partial \varphi_j} = 0, \ / \ j = \overline{1, n} \, / . \tag{3.7.1}$$

Это – общеизвестный результат теории устойчивости стационарных движений диссипативных механических систем с первыми интегралами.

Проверка.

1. Проверим, что первые два условия в (3.7.1) эквивалентны условиям $J_{x_G z_G} = 0$, $J_{y_G z_G} = 0$. С учетом (3.3.8) (3.4.4) (3.4.9)

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \alpha} = \frac{\partial T_0}{\partial \alpha} = \frac{K^2}{2D} \frac{\partial (J_{x_G} J_{y_G} - J^2_{x_G y_G})}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \beta} = \frac{\partial T_0}{\partial \beta} = \frac{K^2}{2D} \frac{\partial (J_{x_G} J_{y_G} - J^2_{x_G y_G})}{\partial \beta} = 0.$$

Поскольку $K^2/(2D) \neq 0$, то эти уравнения эквивалентны таким двум уравнениям

$$\partial (J_{x_G} J_{y_G} - J^2_{x_G y_G}) / \partial \alpha = 0, \quad \partial (J_{x_G} J_{y_G} - J^2_{x_G y_G}) / \partial \beta = 0 . \tag{3.7.2}$$

В силу симметрии тензора $\mathbf{J}_G$

$$\partial J_{x_G} / \partial \alpha = 2\mathbf{x}_G^T \mathbf{J}_G \partial \mathbf{x}_G / \partial \alpha = 0 , \quad \partial J_{x_G} / \partial \beta = 2\mathbf{x}_G^T \mathbf{J}_G \partial \mathbf{x}_G / \partial \beta ,$$

$$\partial J_{y_G} / \partial \alpha = 2\mathbf{y}_G^T \mathbf{J}_G \partial \mathbf{y}_G / \partial \alpha , \quad \partial J_{y_G} / \partial \beta = 2\mathbf{y}_G^T \mathbf{J}_G \partial \mathbf{y}_G / \partial \beta ,$$

$$\partial J_{x_G y_G} / \partial \alpha = -(\partial \mathbf{x}_G / \partial \alpha)^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G \mathbf{y}_G - \mathbf{x}_G^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G (\partial \mathbf{y}_G / \partial \alpha) = -\mathbf{x}_G^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G (\partial \mathbf{y}_G / \partial \alpha) ,$$

$$\partial J_{x_G y_G} / \partial \beta = -(\partial \mathbf{x}_G / \partial \beta)^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G \mathbf{y}_G - \mathbf{x}_G^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G (\partial \mathbf{y}_G / \partial \beta) . \tag{3.7.3}$$

С учетом (3.4.6) находим

$$\partial \mathbf{x}_G / \partial \alpha = 0, \quad \partial \mathbf{x}_G / \partial \beta = -\mathbf{y}_G \sin \alpha + \mathbf{z}_G \cos \alpha ,$$

$$\partial \mathbf{y}_G / \partial \alpha = -\mathbf{z}_G , \quad \partial \mathbf{y}_G / \partial \beta = \mathbf{x}_G \sin \alpha . \tag{3.7.4}$$

Подставляя это в (3.7.3), получим

$$\partial J_{x_G} / \partial \alpha = 0 ,$$

$$\partial J_{x_G} / \partial \beta = 2\mathbf{x}_G^T \mathbf{J}_G (-\mathbf{y}_G \sin \alpha + \mathbf{z}_G \cos \alpha) = 2(J_{x_G y_G} \sin \alpha - J_{x_G z_G} \cos \alpha) ,$$

$$\partial J_{y_G} / \partial \alpha = 2\mathbf{y}_G^T \mathbf{J}_G (-\mathbf{z}_G) = 2J_{y_G z_G} ,$$

$$\partial J_{y_G} / \partial \beta = 2\mathbf{y}_G^T \mathbf{J}_G (\mathbf{x}_G \sin \alpha) = -2J_{x_G y_G} \sin \alpha ,$$

$$\partial J_{x_G y_G} / \partial \alpha = -\mathbf{x}_G^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G (-\mathbf{z}_G) = -J_{x_G z_G} ,$$

$$\partial J_{x_G y_G} / \partial \beta = -(-\mathbf{y}_G \sin \alpha + \mathbf{z}_G \cos \alpha)^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G \mathbf{y}_G - \mathbf{x}_G^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_G (\mathbf{x}_G \sin \alpha) =$$

$$=(J_{y_G}-J_{x_G})\sin\alpha+J_{y_G z_G}\cos\alpha\,. \qquad (3.7.5)$$

Тогда

$$\partial(J_{x_G}J_{y_G}-J^2_{x_G y_G})/\partial\alpha=J_{y_G}\partial J_{x_G}/\partial\alpha+J_{x_G}\partial J_{y_G}/\partial\alpha-2J_{x_G y_G}\partial J_{x_G y_G}/\partial\alpha=$$
$$=2(J_{x_G}J_{y_G z_G}+J_{x_G y_G}J_{x_G z_G})=0,$$
$$\partial(J_{x_G}J_{y_G}-J^2_{x_G y_G})/\partial\beta=J_{y_G}\partial J_{x_G}/\partial\beta+J_{x_G}\partial J_{y_G}/\partial\beta-2J_{x_G y_G}\partial J_{x_G y_G}/\partial\beta=$$
$$=2\{J_{y_G}(J_{x_G y_G}\sin\alpha-J_{x_G z_G}\cos\alpha)-J_{x_G}J_{x_G y_G}\sin\alpha-$$
$$-J_{x_G y_G}[(J_{y_G}-J_{x_G})\sin\alpha+J_{y_G z_G}\cos\alpha]\}=$$
$$=-2(J_{y_G}J_{x_G z_G}+J_{x_G y_G}J_{y_G z_G})\cos\alpha=0\,.$$

Можно показать, что эти два условия эквивалентны таким двум уравнениям

$$J_{x_G}J_{y_G z_G}+J_{x_G y_G}J_{x_G z_G}=0,\quad J_{y_G}J_{x_G z_G}+J_{x_G y_G}J_{y_G z_G}=0\,. \qquad (3.7.6)$$

Рассматриваем эту систему как систему уравнений для определения $J_{x_G z_G}$, $J_{y_G z_G}$. Ее дискриминант

$$\det=\begin{vmatrix} J_{x_G y_G} & J_{x_G} \\ J_{y_G} & J_{x_G y_G}\end{vmatrix}=-(J_{x_G}J_{y_G}-J^2_{x_G y_G})\neq 0\,.$$

Поэтому система допускает единственное - тривиальное решение

$$J_{x_G z_G}=0,\quad J_{y_G z_G}=0\,, \qquad (3.7.7)$$

что и надо было доказать.

2. Проверим остальные уравнения. Покажем, что при выполнении уравнений (3.7.7)

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial\varphi_j}=\frac{\partial W}{\partial\varphi_j}=0,\ \ /\ j=\overline{1,n}\,/\,. \qquad (3.7.8)$$

Для этого достаточно показать, что при $J_{x_G z_G}=0,\quad J_{y_G z_G}=0$:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_j}\left(\frac{J_{x_G}J_{y_G}-J^2_{x_G y_G}}{D}\right)=\frac{\partial}{\partial\varphi_j}\left(\frac{1}{J_{z_G}}\right)=0,\ \ /\ j=\overline{1,n}\,/. \qquad (3.7.9)$$

Рассматриваем

$$\frac{J_{x_G}J_{y_G}-J^2_{x_G y_G}}{D}=\frac{1}{J_{z_G}}+\frac{J_{x_G}J^2_{y_G z_G}+J_{y_G}J^2_{x_G z_G}+2J_{x_G y_G}J_{x_G z_G}J_{y_G z_G}}{J_{z_G}D}\,.$$

Производная по φ_j от второй составляющей последнего равенства всегда будет содержать составляющие, пропорциональные $J_{x_G z_G}$, $J_{y_G z_G}$. Поэтому когда $J_{x_G z_G}=0$, $J_{y_G z_G}=0$, то производная от второй составляющей равняется 0, поэтому выполняется равенство (3.7.9), а значит и равенство (3.7.8).

Следовательно, утверждение 1 справедливо.

Утверждение 2. На установившихся движениях функции Π^* и W принимают одинаковые значения:

$$\Pi^* = W. \tag{3.7.10}$$

Действительно, при выполнении уравнений (3.7.7)

$$D = J_{x_G} J_{y_G} J_{z_G} - J_{x_G} J^2_{y_G z_G} - J_{y_G} J^2_{x_G z_G} - J_{z_G} J^2_{x_G y_G} - 2J_{x_G y_G} J_{x_G z_G} J_{y_G z_G} =$$

$$= (J_{x_G} J_{y_G} - J^2_{x_G y_G}) J_{z_G},$$

$$T_0 = \frac{K^2}{2D}(J_{x_G} J_{y_G} - J^2_{x_G y_G}) = \frac{K^2}{2J_{z_G}}, \quad \Pi^* = T_0 + \Pi = \frac{K^2}{2J_{z_G}} + \Pi = W, \tag{3.7.11}$$

где W – потенциальная энергия приведенной системы из (3.6.1). Следовательно, на установившихся движениях $\Pi^* = W$. Утверждения 2 доказано.

Утверждение 3. В общем случае на установившихся движениях

$$\partial^2 \Pi^* \big/ \partial q_i \partial q_j \neq \partial^2 W \big/ \partial q_i \partial q_j, \quad q = (\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_n), \ /i, j = \overline{1, n}/, \tag{3.7.12}$$

но функции Π^* и W на определенном установившемся движении одновременно принимают одно и то же экстремальное (одновременно – минимальное или максимальное значение) или критическое значение и поэтому два метода дают идентичные условия существования и условной устойчивости установившихся движений.

Заметим, что метод Рауса для систем с циклическими интегралами дает более компактные уравнения и поэтому более удобный для использования.

Выводы главы 3

1. Для вращающихся ИС с вязким рассеиванием энергии, с учетом их свойств, конкретизировано применение энергетических методов, основанных Лагранжем и Раусом для составления уравнений установившихся движений и оценки их условной устойчивости.

2. Первый метод Рауса основывается на теории устойчивости стационарных движений нелинейных автономных механических систем, допускающих существование невозрастающей функции и первых интегралов. Второй метод Рауса основывается на теории устойчивости стационарных движений нелинейных автономных механических систем, имеющих циклические интегралы. Первый метод более общий и охватывает собой второй метод. Два метода дают идентичные достаточные условия условной устойчивости изолированных стационарных движений, с точностью до границ, совпадающих с необходимыми.

3. Конкретизированы алгоритмы: составления дифференциальных уравнений движения системы; получение уравнений установившихся движений; получение приведенной потенциальной энергии или потенциальной энергии приведенной системы; исследование последних функций на экстремум. Показана эффективность использования углов Кардана-Брайнта для описания углового положения НТ и для исследования процесса устранения угла нутации. Показана эффективность использования векторно-матричного метода определения осевых и центробежных моментов инерции системы относительно различных осей.

ГЛАВА 4.
УСЛОВИЯ УРАВНОВЕШИВАНИЯ АБ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ НТ В ИС

С использованием конкретизированной теории устойчивости стационарных движений диссипативных механических систем с циклическими интегралами и эвристического критерия определены условия уравновешивания пассивными АБ вращающегося НТ, входящего в состав ИС. Определены необходимые условия наступления самоуравновешивания, с точностью до границ совпадающие с достаточными.

Полученные результаты проверялись компьютерным моделированием с использованием компьютерной САПР SolidWorks и ее модуля Cosmos Motion. Были созданы трехмерные модели НТ и маятниковых АБ. Моделирование динамики этих систем полностью подтвердило обнаруженные свойства и тенденции.

ISBN 978-617-7197-24-8

4.1. Применение метода Рауса

4.1.1. Динамическое уравновешивание НТ

Пусть тела АБ могут устранить динамическую неуравновешенность НТ. Пусть система осуществляет основное движение, – в котором вращающееся тело уравновешено и система вращается как одно целое вокруг оси z_G . Пусть на основном движении оси $O\xi\eta\zeta$ и $Gx_Gy_Gz_G$ совпадают и относительно них система имеет главные центральные осевые моменты инерции A, B, C. Пусть тела АБ несколько отклонились от положения, в котором уравновешивают НТ. Тогда тензор инерции и координаты центра масс системы относительно осей $O\xi\eta\zeta$, можно представить в виде

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} A + \varepsilon\tilde{J}_\xi & -\varepsilon\tilde{J}_{\xi\eta} & -\varepsilon\tilde{J}_{\xi\zeta} \\ -\varepsilon\tilde{J}_{\xi\eta} & B + \varepsilon\tilde{J}_\eta & -\varepsilon\tilde{J}_{\eta\zeta} \\ -\varepsilon\tilde{J}_{\xi\zeta} & -\varepsilon\tilde{J}_{\eta\zeta} & C \end{pmatrix}, \ \xi_G = \varepsilon\tilde{\xi}_G, \quad \eta_G = \varepsilon\tilde{\eta}_G, \quad \zeta_C = \varepsilon\tilde{\zeta}_G, \quad (4.1.1)$$

где $|\varepsilon| << 1$ и учтено свойство тел АБ не изменять осевой момент инерции C [204].

Ищем α, β в виде

$$\alpha \approx \alpha_1\varepsilon, \quad \beta \approx \beta_1\varepsilon. \qquad (4.1.2)$$

Тогда с учетом (3.4.2), (3.4.6) из (3.4.8), с точностью до величин второго порядка малости включительно, находим

$$J_{z_G} \approx C - \varepsilon^2\{[(C-B)\alpha_1^2 + (C-A)\beta_1^2 + M_\Sigma(\tilde{\xi}_G^2 + \tilde{\eta}_G^2) + 2(\alpha_1\tilde{J}_{\eta\zeta} - \beta_1\tilde{J}_{\xi\zeta})]\}. \quad (4.1.3)$$

Будем рассматривать параметры неуравновешенности $\tilde{\xi}_G, \tilde{\eta}_G, \tilde{J}_{\xi\zeta}, \tilde{J}_{\eta\zeta}$ как обобщенные координаты, характеризующие движение системы. На основном движении они равняются нулю. Отметим, что они независимы (потому что АБ может устранить динамическую неуравновешенность НТ) и выражаются через обобщенные координаты $\varphi_1, ..\varphi_n$, задающие положение тел АБ относительно НТ.

Введем обозначение

$$a_{11} = C - B, \ a_{22} = C - A, \ a_{33} = a_{44} = M_\Sigma,$$
$$a_{55} = a_{66} = 0, \ a_{16} = 1, \ a_{25} = -1. \qquad (4.1.4)$$

Тогда, в соответствии с критерием Сильвестра, из первых условий (3.6.6) находим, что для того, чтобы осевой момент инерции J_{z_G} имел максимум, необходимо, чтобы

$$C > A, B, \qquad (4.1.5)$$

то есть, чтобы СТ, образованное НТ и АБ, было сплюснуто. Пусть условия (4.1.5) выполняются. Тогда

$$\Delta_2 = (C-B)(C-A) > 0, \quad \Delta_3 = \Delta_2 M_\Sigma > 0,$$

$$\Delta_4 = \Delta_3 M_\Sigma > 0, \quad \Delta_5 = -M_\Sigma^2 (C-B) < 0, \quad \Delta_6 = M_\Sigma^2 > 0. \qquad (4.1.6)$$

Откуда видно, что достаточные условия устойчивости не выполняются. Поскольку на основном движении у системы нет минимума потенциальной энергии приведенной системы, и во время переходных процессов в системе происходит рассеивание энергии, то это движение – неустойчиво.

Следовательно, если НТ динамически уравновешивается двумя АБ в разных плоскостях уравновешивания, то основное движение – неустойчиво. Эти результаты занесены в табл. 4.1. В ней свойство Д – демпфер заполнено в соответствии с теорией демпферов для уменьшения угла нутации. Это свойство означает способность ПТ уменьшать составляющую угла нутации, вызванную неточным приданием начального вращения НТ. Свойство УОД означает устойчивость основного движения.

Табл. 4.1.

Свойства, проявляемые двумя АБ, присоединенными к НТ

СТ	Ограничение \ Свойство	УОД	Д
Вытянутое	$A, B > C$	–	–
Сплюснутое	$C > A, B$	–	+

4.1.2. Статическое уравновешивание НТ

Пусть статическую неуравновешенность НТ устраняет один АБ. Пусть плоскость уравновешивания (и статической неуравновешенности) параллельна плоскости $O\xi\eta$ и смещена на координату b по оси ζ. Тогда

$$\tilde{J}_{\xi\zeta} = M_\Sigma \tilde{\xi}_G b, \qquad \tilde{J}_{\eta\zeta} = M_\Sigma \tilde{\eta}_G b. \qquad (4.1.7)$$

Тогда уравнение (4.1.3) примет вид

$$J_{z_G} \approx C - \varepsilon^2 [(C-B)\alpha_1^2 + (C-A)\beta_1^2 +$$

$$+ M_\Sigma(\tilde{\xi}_G^2 + \tilde{\eta}_G^2) + 2M_\Sigma b(\alpha_1 \tilde{\eta}_G - \beta_1 \tilde{\xi}_G)]. \qquad (4.1.8)$$

Будем рассматривать параметры неуравновешенности $\tilde{\xi}_G, \tilde{\eta}_G$ как обобщенные координаты, характеризующие движение системы. На основном движении они равняются нулю. Отметим, что они независимы (потому что АБ может устранить статическую неуравновешенность НТ) и выражаются через обобщенные координаты $\varphi_1, \ldots \varphi_n$, задающие положение тел АБ относительно НТ.

Введем обозначение

$$a_{11} = C - B, \quad a_{22} = C - A, \quad a_{33} = a_{44} = M_\Sigma,$$
$$a_{14} = bM_\Sigma, \quad a_{23} = -bM_\Sigma. \qquad (4.1.9)$$

Тогда первые условия в (3.6.6) ($n = 4$) дают необходимые условия устойчивости (4.1.5). Пусть эти условия выполняются, тогда остальные условия принимают вид:

$$\Delta_2 = (C - B)(C - A) > 0, \quad \Delta_3 = M_\Sigma (C - B)(C - A - b^2 M_\Sigma) > 0,$$
$$\Delta_4 = M_\Sigma^2 (C - A - b^2 M_\Sigma)(C - B - b^2 M_\Sigma) > 0. \qquad (4.1.10)$$

С учетом (4.1.5) и (4.1.10), достаточными условиями, что J_{z_G} принимает на основном движении максимальное значение, будут

$$C > A + b^2 M_\Sigma, \quad C > B + b^2 M_\Sigma. \qquad (4.1.11)$$

В этом случае СТ – сплюснуто, и плоскость уравновешивания находится вблизи центра масс системы.

Заметим, что в проведенных исследованиях тип АБ не обуславливался. Поэтому полученные условия устранения угла нутации применимы для АБ любого типа, то есть является обобщенными.

Условия (4.1.11) являются достаточными условиями устойчивости основного движения (устранение угла нутации), причем они с точностью до границ совпадают с необходимыми условиями.

Полученные результаты занесены в табл. 4.2. Столбик Д заполнен в соответствии с теорией демпферов для уменьшения угла нутации.

Табл. 4.2.

Свойства, проявляемые одним АБ, присоединенным к НТ

СТ	Ограничение / свойство	УОД	Д
Вытянутое	$A, B > C$	–	–
Сплюснутое	$C > A, B$; $C < A + b^2 M_\Sigma$, $C < B + b^2 M_\Sigma$	–	+
	$C > A + b^2 M_\Sigma$, $C > B + b^2 M_\Sigma$	+	+

Проведенные исследования позволяют утверждать, что полное устранение угла нутации вращающегося неуравновешенного спутника возможно только в случае сплюснутого (так называемого устойчивого) статически неуравновешенного спутника при условии, что АБ уравновешивает спутник в плоскости статического дисбаланса и эта плоскость удалена от центра масс системы так, что выполняются условия (4.1.11). Эти результаты были положены в разработку способов применения АБ в качестве демпферов угла нутации сплюснутых вращающихся КА [29].

4.2. Применение эвристического метода

4.2.1. Динамическое уравновешивание НТ

Пусть спутник уравновешивается двумя АБ в плоскостях, параллельных плоскости $O\xi\eta$ и смещенных на b_1, b_2 по оси ζ (рис. 4.2.1). Пусть в этих плоскостях возникли элементарные дисбалансы со следующими характеристиками (рис. 4.2.1)

$$\xi_i, \eta_i, b_i, \quad m_i = \varepsilon m, \quad |\varepsilon| << 1, \quad /i = 1{,}2/, \tag{4.2.1}$$

где ξ_i, η_i, b_i – координаты элементарной массы, создающей элементарную неуравновешенность $\mathbf{s}_i$ в плоскости уравновешивания i.

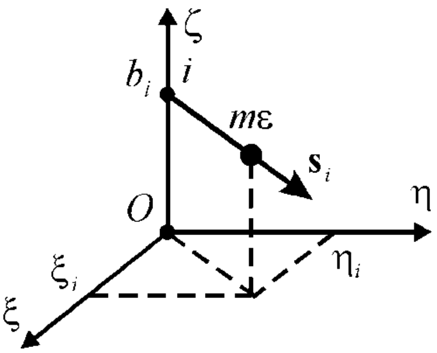


Рис. 4.2.1. Элементарная неуравновешенность

Тогда относительно осей $O\xi\eta\zeta$

$$\tilde{J}_{\xi\zeta} = m\varepsilon(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2), \quad \tilde{J}_{\eta\zeta} = m\varepsilon(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2),$$

$$J_{\xi\zeta} = m(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2), \quad J_{\eta\zeta} = m(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2),$$

$$\tilde{\xi}_G = m\varepsilon(\xi_1 + \xi_2)/M_\Sigma, \quad \tilde{\eta}_G = m\varepsilon(\eta_1 + \eta_2)/M_\Sigma, \quad \tilde{\zeta}_G = \varepsilon\zeta_G, \tag{4.2.2}$$

где M_Σ – масса всей системы. С точностью до величин первого порядка малости включительно

$$\mathbf{J}_G \approx \mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} A + \varepsilon J_\xi & -\varepsilon J_{\xi\eta} & -m\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\xi_i b_i \\ -\varepsilon J_{\xi\eta} & B + \varepsilon J_\eta & -m\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\eta_i b_i \\ -m\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\xi_i b_i & -m\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\eta_i b_i & C \end{pmatrix}. \tag{4.2.3}$$

Составим дифференциальные уравнения движения системы при неподвижных телах АБ. Во время движения системы имеем следующие проекции угловой скорости вращения системы и ее главного момента количества движения на оси спутника

$$\omega_\xi = \dot\alpha\cos\beta - \omega\cos\alpha\sin\beta,\quad \omega_\eta = \dot\beta + \omega\sin\alpha,\quad \omega_\zeta = \dot\alpha\sin\beta + \omega\cos\alpha\cos\beta,$$

$$K_\xi = -K\cos\alpha\sin\beta,\quad K_\eta = K\sin\alpha,\quad K_\zeta = K\cos\alpha\cos\beta. \tag{4.2.4}$$

Ищем ω, α, β с точностью до величин первого порядка малости относительно ε включительно в виде

$$\omega \approx \omega_0 + \omega_1\varepsilon \quad \alpha \approx \alpha_1\varepsilon,\quad \beta \approx \beta_1\varepsilon. \tag{4.2.5}$$

Тогда с этой же точностью

$$\omega_\xi \approx \dot\alpha_1\varepsilon - \omega_0\beta_1\varepsilon,\quad \omega_\eta \approx \dot\beta_1\varepsilon + \omega_0\alpha_1\varepsilon,\quad \omega_\zeta \approx \omega_0 + \omega_1\varepsilon,$$

$$K_\xi \approx -K\beta_1\varepsilon,\quad K_\eta \approx K\alpha_1\varepsilon,\quad K_\zeta \approx K. \tag{4.2.6}$$

С другой стороны, с точностью до величин первого порядка малости включительно

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{J}_G\boldsymbol{\omega} \approx \begin{pmatrix} A\dot\alpha_1\varepsilon - \omega_0\varepsilon[\beta_1 A + m(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2)] \\ B\dot\beta_1\varepsilon + \omega_0\varepsilon[\alpha_1 B - m(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2)] \\ C\omega_0 + C\omega_1\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{4.2.7}$$

Приравнивая в (4.2.6) и (4.2.7) коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующую систему уравнений для определения $\omega_0, \omega_1, \alpha_1, \beta_1$:

$$K = C\omega_0,\quad C\omega_1 = 0,$$

$$-K\beta_1 = A\dot\alpha_1 - \omega_0[\beta_1 A + m(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2)],$$

$$K\alpha_1 = B\dot\beta_1 + \omega_0[\alpha_1 B - m(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2)]. \tag{4.2.8}$$

В дальнейшем будем рассматривать только сплюснутые ($C > A, B$) или вытянутые ($C < A, B$) СТ. Тогда решением системы (4.2.8) будет

$$\omega_0 = K/C,\quad \omega_1 = 0,$$

$$\alpha_1 = m(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2)/(B - C) + C_1\sin pt + C_2\cos pt,$$

$$\beta_1 = -m(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2)/(A - C) + C_3\sin pt + C_4\cos pt, \tag{4.2.9}$$

где

$$p = \omega_0\sqrt{(A-C)(B-C)/(AB)},$$

$$C_3 = \frac{ApC_2}{(A-C)\omega_0},\quad C_4 = -\frac{ApC_1}{(A-C)\omega_0}, \tag{4.2.10}$$

и C_1, C_2 – некоторые постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий. Для указанных тел p принимает действительное значение и движение системы – периодическое с периодом

$$T = 2\pi/p. \tag{4.2.11}$$

Отметим, что в случаях $A < C < B$ или $B < C < A$ решение системы (4.2.8) – апериодическое и в зависимости от начальных условий может быстро и неограниченно расти. Из теории демпферов угла нутации спутников [183] известно, что в этом случае спутник имеет тенденцию двигаться "кувырком" и потому даже небольшое присоединенное к спутнику тело может принципиально изменить его движение. Поэтому такие спутники вращением не стабилизируют.

С точностью до величин первого порядка малости включительно в проекциях на оси $O\xi\eta\zeta$:

$$\mathbf{r}_i \approx \varepsilon(\beta_1 b_i - \xi_G,\, -\alpha_1 b_i - \eta_G,\, -\zeta_G)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{s}_i \approx m\varepsilon(\xi_i,\, \eta_i,\, 0)^{\mathrm{T}}, \quad /\, i = 1{,}2\, /. \quad (4.2.12)$$

Критерий наступления самого уравновешивания принимает вид

$$f(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\sum_{i=1}^{2} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{s}_i \right) dt \approx \frac{m\varepsilon^2}{T}\int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^{2} [\xi_i(\beta_1 b_i - \xi_G) - \eta_i(\alpha_1 b_i + \eta_G)] \right\} dt < 0 .$$

С точностью до величин второго порядка малости включительно

$$f(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \approx -p(x_1, x_2, x_3, x_4) / M_\Sigma < 0, \quad (4.2.13)$$

где

$$x_1 = m\varepsilon\xi_1, \quad x_2 = m\varepsilon\xi_2, \quad x_3 = m\varepsilon\eta_1, \quad x_4 = m\varepsilon\eta_2,$$

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2, \quad (4.2.14)$$

и в равенстве (4.2.14)

$$a_{11} = \frac{A + b_1^2 M_\Sigma - C}{A - C}, \quad a_{22} = \frac{A + b_2^2 M_\Sigma - C}{A - C},$$

$$a_{12} = \frac{A + b_1 b_2 M_\Sigma - C}{A - C}, \quad a_{33} = \frac{B + b_1^2 M_\Sigma - C}{B - C},$$

$$a_{44} = \frac{B + b_2^2 M_\Sigma - C}{B - C}, \quad a_{34} = \frac{B + b_1 b_2 M_\Sigma - C}{B - C}. \quad (4.2.15)$$

Для наступления самоуравновешивания необходимо, чтобы квадратичная форма (4.2.14) была положительно определена. Применяя критерий Сильвестра, находим следующие условия

$$a_{jj} > 0, \quad /\, j = \overline{1{,}4}\, /,$$

$$\Delta_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad \Delta_{34} = a_{33}a_{44} - a_{34}^2 > 0 . \quad (4.2.16)$$

Учитывая, что

$$\Delta_{12} = M_\Sigma (b_1 - b_2)^2 / (B - C), \quad \Delta_{34} = M_\Sigma (b_1 - b_2)^2 / (A - C), \quad (4.2.17)$$

из (4.2.16) находим условие наступления самоуравновешивания

$$A, B > C, \quad (4.2.18)$$

в соответствие с которым спутник должен быть вытянутым.

Свойство ПТ стремиться к положению, в котором они уравновешивают НТ, обозначим через АБ. Полученные результаты занесены в табл. 4.3.

Табл. 4.3.

Свойства, проявляемые двумя АБ, присоединенными к НТ

СТ	Ограничение \ Свойство	УОД	Д	АБ
Вытянутое	$A, B>C$	–	–	+
Сплюснутое	$C>A, B$	–	+	–

4.2.2. Статическое уравновешивание НТ

Положим в (4.2.14) $\xi_2, \eta_2 = 0$. Тогда $x_2 = x_4 = 0$ и квадратичная форма примет вид

$$p(x_1, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{33}x_3^2 \,. \tag{4.2.19}$$

Условие (4.2.13) будет выполняться при выполнении условий $a_{11} > 0,\ a_{33} > 0$ или

$$\frac{A + b_1^2 M_\Sigma - C}{A - C} > 0, \quad \frac{B + b_1^2 M_\Sigma - C}{B - C} > 0 \,. \tag{4.2.20}$$

Эти условия эквивалентны условиям (4.1.12).

Полученные результаты занесены в табл. 4.4.

Табл. 4.4.

Свойства, проявляемые одним АБ, присоединенным к НТ

СТ	Ограничение / свойство	УОД	Д	АБ
Вытянутое	$A, B>C$	–	–	+
Сплюснутое	$C>A, B$; $C<A+ b^2M_\Sigma$, $C<B+ b^2M_\Sigma$	–	+	–
	$C>A+ b^2M_\Sigma$, $C>B+ b^2M_\Sigma$	+	+	+

Таким образом, эвристический метод выявил тенденцию к приходу при определенных условиях тел АБ к положению, в котором они уравновешивают спутник. Свойство УОД будет проявляться тогда и только тогда, когда будут одновременно проявляться свойства Д и АБ.

4.3. Компьютерное моделирование

4.3.1. Задачи компьютерного моделирования

Целью компьютерного моделирования является качественная проверка проявления двух тенденций при движении вращающихся ИС с АБ. Эти тенденции задает для случая двух АБ табл. 4.3, а для случая одного АБ – табл. 4.4. В соответствии с указанными таблицами надо смоделировать движение таких вращающихся ИС:

1) система с двумя АБ образует вытянутое СТ (A, $B>C$);
2) система с двумя АБ образует сплюснутое СТ ($C>A$, B);
3) система с одним АБ образует вытянутое СТ (A, $B>C$);
4) система с одним АБ образует сплюснутое СТ ($C>A$, B), причем АБ удален от центра масс СТ так, что $C>A+b^2M$, $C>B+b^2M$;
5) система с одним АБ образует сплюснутое СТ ($C>A$, B), причем АБ удален от центра масс СТ так, что $C>A+b^2M_{\Sigma}$, $C>B+b^2M_{\Sigma}$.

В экспериментах 1, 2 (с двумя АБ) надо рассмотреть случаи:

1) отсутствие неуравновешенности;
2) статической неуравновешенности;
3) моментной неуравновешенности;
4) полной неуравновешенности.

В экспериментах 3-5 (с одним АБ) надо рассмотреть случаи:

1) отсутствие неуравновешенности;
2) статической неуравновешенности в плоскости маятников.

Под качественной проверкой имеется в виду наблюдение за движением разных вращающихся систем до тех пор, пока не установится определенное установившееся движение, выделение различных этапов переходных процессов, соответствующих проявлению двух тенденций и исследования взаимного влияния этих тенденций одна на другую. Конкретные параметры отдельных тел, образующих систему, не имеют принципиального значения для такой проверки. Поэтому в моделировании эти величины (без особой надобности) не указываются. Также ниже описываются наиболее наглядные проведенные эксперименты, в которых поведение системы легко проверяется, исходя из физических рассуждений.

В соответствии с полученными результатами для асимптотической устойчивости установившихся движений необходимо наличие внутренних сил вязкого сопротивления. Величины этих сил не влияют на устойчивость, а влияют на ход переходных процессов. Поэтому ниже величины сил вязкого сопротивления указываются только в отдельных случаях, необходимых для описания переходных процессов. В частности это указывается, если эксперименты проводятся для случая, когда только на одно тело в АБ действуют силы вязкого сопротивления. Такие эксперименты нужны для исследования явления, в котором относительные движения одних тел АБ затухают за счет рассеивания энергии другими телами АБ.

В связи с вычислительными трудностями, возникающими на границах областей, во всех экспериментах массо-инерционные и геометрические параметры системы изменяются в пределах, обеспечивающих выполнение соответствующих условий с запасом 5% и больше. Например, в экспериментах с вытянутым СТ A, $B \geq 1{,}05 \cdot C$.

4.3.2. Динамика НТ с двумя АБ

Для проведения экспериментов 1, 2 была создана трехмерная компьютерная модель вращающейся ИС, состоящей из вращающегося НТ и двух двухмаятниковых АБ. Этапы компьютерного моделирования следующие (в соответствии с работами [202, 203]).

1. Создание отдельных деталей (в SolidWorks). На рис. 4.3.1 показаны созданные отдельные твердые тела (детали), в совокупности составляющие систему.

2. Создание из деталей сборки (в SolidWorks). Варианты механических систем в сборе (сборка) изображены на рис. 4.3.2. Для проведения эксперимента 1 используется вытянутый корпус (рис. 4.3.2, а), а для эксперимента 2 – сплюснутый (рис. 4.3.2, б). Для моделирования любой неуравновешенности используются два кольцевых сегмента.

Для проверки будет ли СТ вытянутым или сплюснутым, используется инструмент "Массовые характеристики" в меню "Инструменты", предназначенный для расчета массо-инерционных характеристик как отдельных тел, так и их сборок. Величины неуравновешенностей регулируются заданием масс сегментов, а направления векторов неуравновешенностей – местом расположения сегментов на кольцевых дорожках корпуса. При отсутствии неуравновешенностей сегменты в состав системы не входят.

3. Обработка сборки модулем Cosmos Motion.

Наложение кинематических связей. Все тела отнесены к подвижным (Moving Part). С использованием инструмента фиксирующего соединения (Fixed) ось жестко соединяется с корпусом. Так именно с корпусом жестко соединяются полукольца, создающие неуравновешенность. С использованием связи типа петля (Revolute Joint) маятникам предоставляется возможность свободно вращаться вокруг оси.

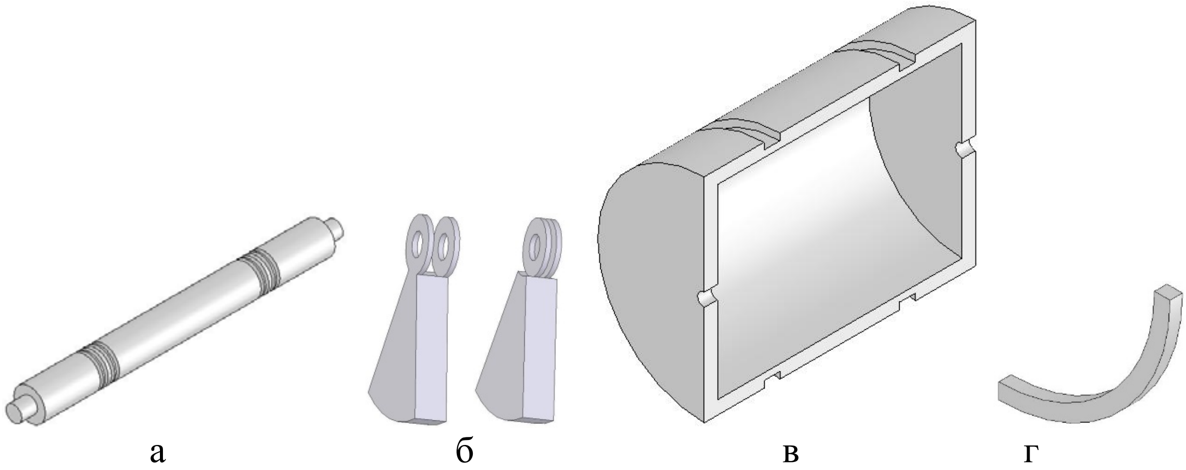


Рис. 4.3.1. Тела, моделирующие динамику вращающегося НТ с двумя двухмаятниковыми АБ:
а – ось; б – пара маятников; в – корпус; г – кольцевой сегмент

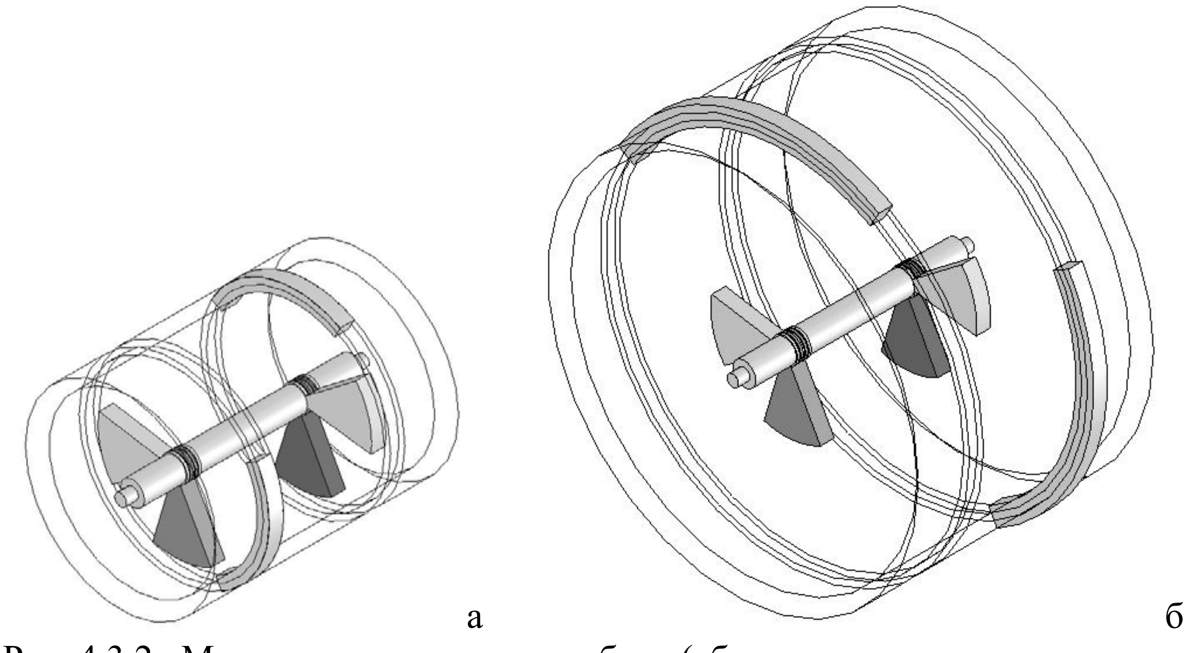


Рис. 4.3.2. Механическая система в сборе (сборка, корпус для наглядности каркасный):
а – СТ вытянуто; б – сплюснуто

Добавление силовых взаимодействий между телами системы. С использованием инструмента Add Torsion Damper к маятникам были приложены моменты сил вязкого сопротивления ($10^{-6}\div 0{,}1$ [$Н{\cdot}м{\cdot}с/град$]), действующие на маятники при их вращении вокруг оси. С использованием инструмента "Add Impact Force" маятникам запрещается проходить один сквозь другой, и создаются силы, возникающие при их ударах.

Задание начальных условий. С использованием инструмента IC's (Initial velocities) задаются начальные условия для каждого тела системы. В большинстве описанных экспериментов начальная составляющая скорости вращения корпуса (с осью и полукольцами) вокруг продольной оси принималась равной 5 *об/с.* Остальные начальные условия задаются так, чтобы центр масс системы имел нулевую начальную скорость.

Наблюдение за переходными процессами проводилось:

1) визуально, в частности за движением НТ и относительными движениями маятников;
2) по графику изменения угла Эйлера θ (угла нутации), построенного для оси (с корпусом и кольцевыми сегментами), отчисляемого от начального положения продольной оси НТ;
3) по графику изменения модуля угловой скорости вращения, построенного для оси (с корпусом и кольцевыми сегментами).

Следует отметить, что в теории угол нутации θ^* отчислялся от вектора кинетического момента **K** системы. На основном движении такой угол равняется нулю, а на побочном - некоторой константе. При компьютерном моделировании угол нутации θ отсчитывается от начального z_0 положения продольной оси z НТ (рис. 4.3.3).

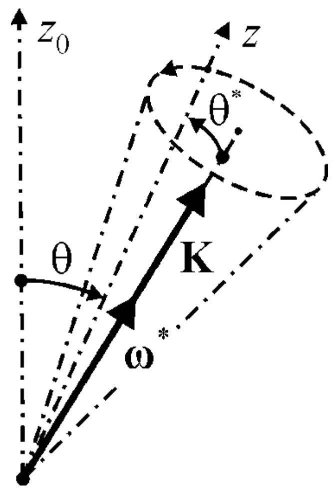


Рис. 4.3.3. Разные способы отсчета угла нутации :
θ – от начального положения z_0 продольной оси НТ (SolidWorks);
θ^* – от вектора кинетического момента (теория)

В общем случае вектор кинетического момента не лежит на начальном положении продольной оси НТ. Поэтому на основном установившемся движении угол нутации θ постоянен, а на побочных – изменяется по периодическому закону с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^*$ вращения системы вокруг вектора кинетического момента.

Ниже график изменения угла Эйлера θ используется только в случаях, когда установившееся движение – основное или вектор кинетического момента лежит на начальном положении продольной оси НТ. В иных случаях используется график изменения модуля угловой скорости вращения системы. На установившихся движениях такая угловая скорость (ω^*) – постоянная величина.

4. Результаты моделирования.

Эксперименты 1. Система с двумя АБ образует вытянутое СТ (A, $B > C$). Во всех экспериментах время симуляции – 60 *с*.

Результаты экспериментов 1 приведены в табл. 4.3.1.

Если моменты сил вязкого сопротивления действуют на каждый маятник, то в поведении системы выделяются такие характерные участки:

1) приход маятников в окрестность положения, в котором они уравновешивают НТ;
2) движение маятников в окрестности положения, в котором они уравновешивают НТ, – участок автобалансировки;
3) переход маятников в конечное положение, соответствующее установившемуся движению;
4) установившийся режим движения системы – "кувырком".

Изменение параметров моделирования показывает, что проявлению тенденции автобалансировки способствуют такие факторы:

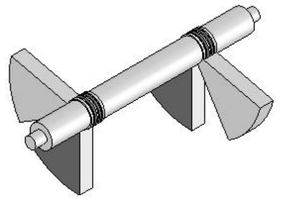
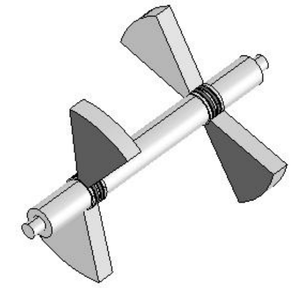
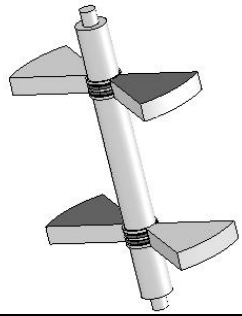
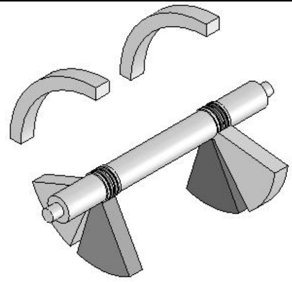
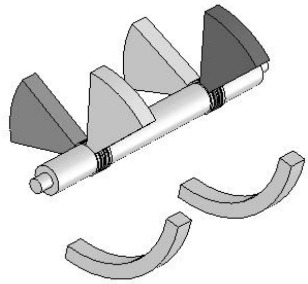
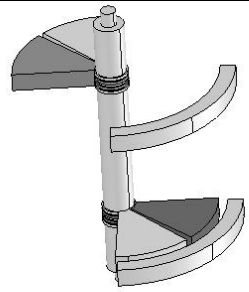
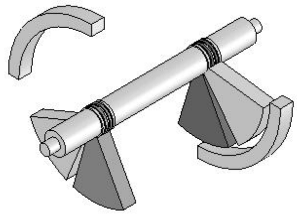
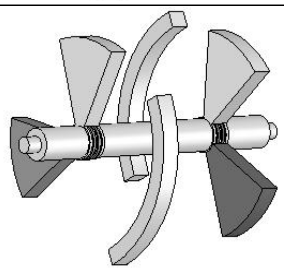
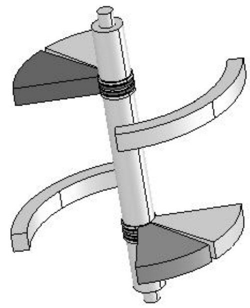
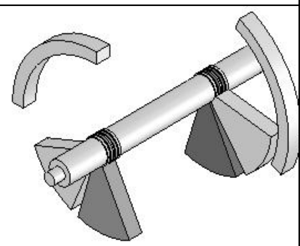
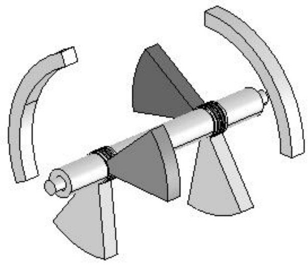
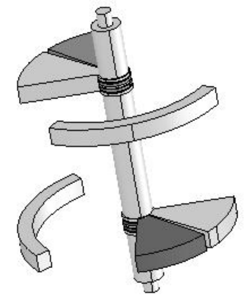
- увеличение момента вязкого трения между маятниками и осью;
- начальные условия, задающие начальное вращение СТ почти вокруг продольной оси НТ.

Автобалансировка может не наступать при уменьшении момента вязкого трения между маятниками и осью. Так, в проведенных экспериментах при автобалансировании момент сопротивления, действующий на каждый маятник, составлял $10^{-5}\div 0{,}1$ [*Н·м·с/град*]. Автобалансировка почти не наблюдается при моменте, меньшем 10^{-5} [*Н·м·с/град*], действующем, по крайней мере, на один маятник. В этом случае происходит некоторый переходной процесс, в котором нет закономерностей в движениях маятников, и который заканчивается соответствующим установившимся движением системы.

Рассмотрим подробнее результаты эксперимента 1.2. НТ статически неуравновешенно (табл. 4.3.1, строка 2). Система изначально вращается вокруг продольной оси НТ. Угол нутации θ изначально равняется 0^0, и вектор кинетического момента параллелен продольной оси НТ. Поэтому переходные процессы удобнее изучать по графику изменения угла нутации θ – рис. 4.3.4.

Табл. 4.3.1

Эксперименты 1 - система с двумя АБ образует вытянутое СТ (A, $B > C$)

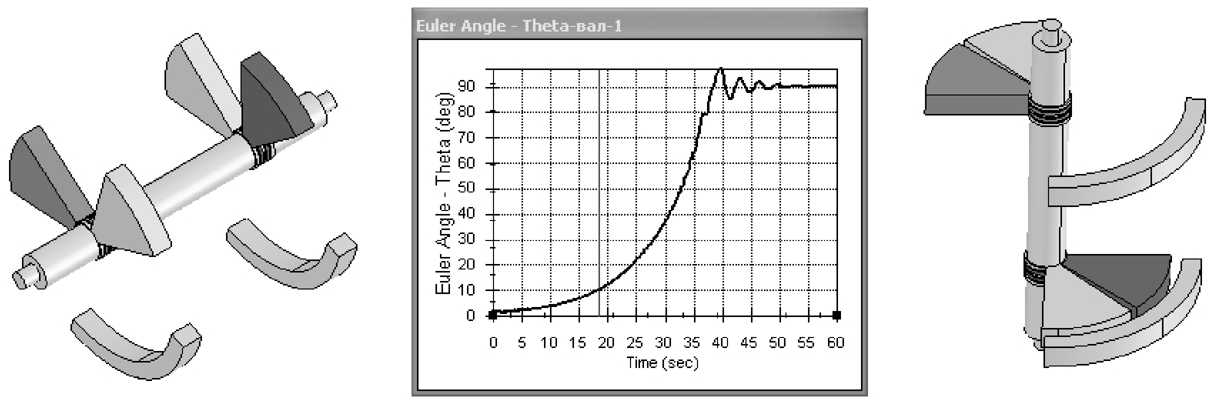
Тип неуравновешенности	Начальное положение	Участок автобалансировки	Установившееся движение
1. Нет			
2. Статическая			
3. Моментная			
4. Полная			

В поведении системы выделяются такие характерные участки:

1) приход маятников в окрестность положения, в котором они уравновешивают НТ (0÷5 c, угол нутации в конце участка достигает 20^0);

2) движение маятников в окрестности положения, в котором они уравновешивают НТ, - участок автобалансировки (6÷25 *с*, угол нутации в конце участка достигает 20^0);
3) переход маятников в конечное положение, соответствующее установившемуся движению (25÷50 *с*, угол нутации в конце участка составляет 90^0);
4) установившийся режим движения системы – "кувырком" (50÷+∞ *с*, угол нутации составляет 90^0).

Через 38 *с* угол нутации увеличивается почти до 90^0 и система начинает вращаться вокруг оси, близкой к поперечной оси НТ – оси наибольшего осевого момента инерции системы. Таким образом, все время симуляции проявляется тенденция к увеличению угла нутации в случае вытянутого СТ.



а б в

Рис. 4.3.4. Эксперимент 1.2 – статически неуравновешенное НТ:
а – участок автобалансировки;
б – график изменения угла нутации (угла Эйлера ϑ);
в – установившийся режим движения системы - "кувырком"

Эксперименты 2. Система с двумя АБ образует сплюснутое СТ ($C > A$, B). При любой неуравновешенности НТ наблюдается переходный процесс, на котором маятники каждой пары сходятся и приходят в то положение, в котором создают наибольшую моментную неуравновешенность системы (рис. 4.3.5). В дальнейшем система вращается как одно жесткое целое вокруг оси, близкой к продольной оси НТ – новой оси наибольшего осевого момента инерции системы. Небольшой постоянный остаточный угол нутации θ^* вызван неуравновешенностью системы относительно продольной оси НТ. Составляющая угла θ^* от неточного придания начального вращения телу стремится к нулю, поскольку АБ работают демпферами.

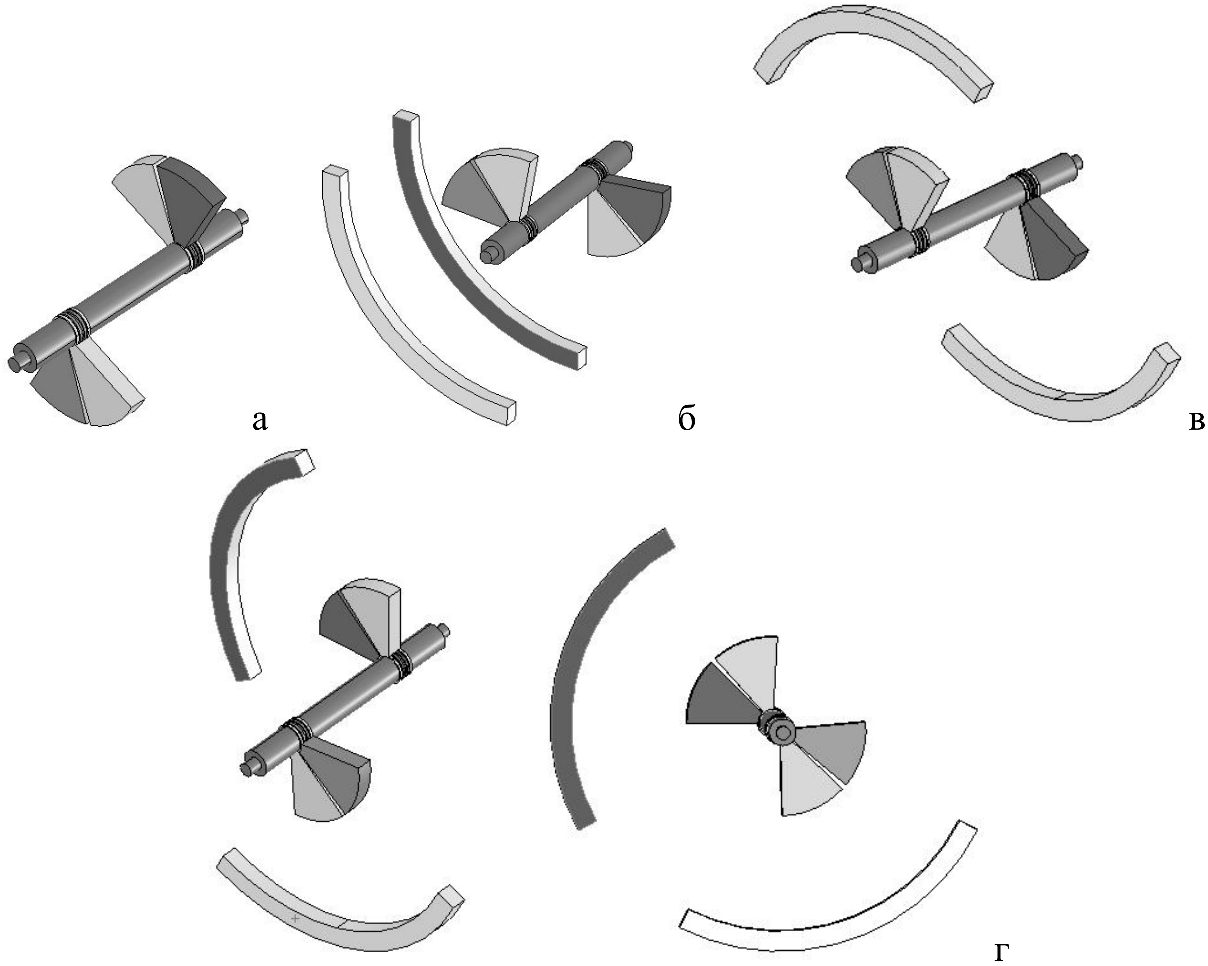


Рис. 4.3.5. Эксперименты 2 – система с двумя АБ образует сплюснутое СТ ($C > A, B$), положение маятников относительно НТ на установившихся движениях при разных типах неуравновешенности НТ :
а – неуравновешенности нет; б – статическая неуравновешенность;
в – моментная неуравновешенность; г – полная неуравновешенность

Таким образом, АБ не проявляют свойства автобалансировки, но проявляют свойства демпферов угла нутации.

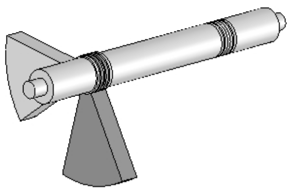
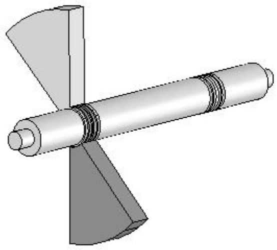
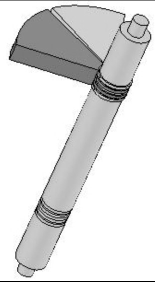
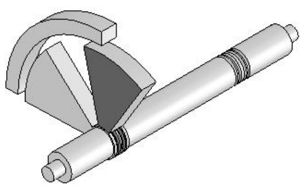
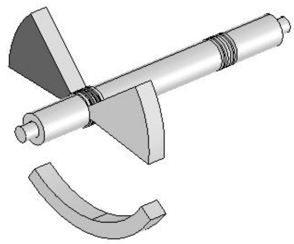
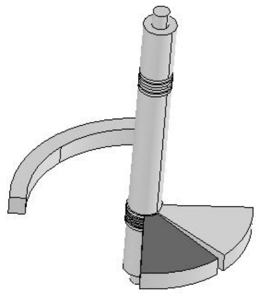
Описанное качественное поведение системы не зависит от величин сил вязкого сопротивления, действующих на маятники. Эти силы только влияют на длительность переходных процессов. В частности, момент сил вязкого сопротивления может действовать только на один маятник. При этом относительные движения остальных маятников все равно прекратятся через рассеивание энергии этим маятником.

4.3.3. Динамика вытянутого НТ с одним АБ

Эксперименты 3. Система с одним двухмаятниковым АБ образует вытянутое СТ (A, $B > C$) и уравновешено или имеет статическую неуравновешенность в плоскости маятников. Для проведения этих экспериментов используется та же компьютерная модель системы, что и для проведения экспериментов 1,2, только с одной парой маятников. Результаты экспериментов занесены в табл. 4.3.2. Система ведет себя аналогично экспериментам 1.

Табл. 4.3.2

Эксперименты 3 - система с одним АБ образует вытянутое СТ (A, B>C)

Тип неуравновешенности	Начальное положение	Участок автобалансировки	Установившееся движение
1. Нет			
2. Статическая			

4.3.4. Динамика сплюснутого НТ с одним АБ

Для проведения экспериментов 4, 5 была создана соответствующая модель вращающейся ИС с одним двухмаятниковым АБ. Этапы компьютерного моделирования следующие (в соответствии с работами [202, 203]).

1. Создание отдельных деталей. На рис. 4.3.6 показаны созданные с использованием SolidWorks отдельные тела (детали), в совокупности моделирующие статическое уравновешивание сплюснутого вращающегося НТ одной парой маятников.

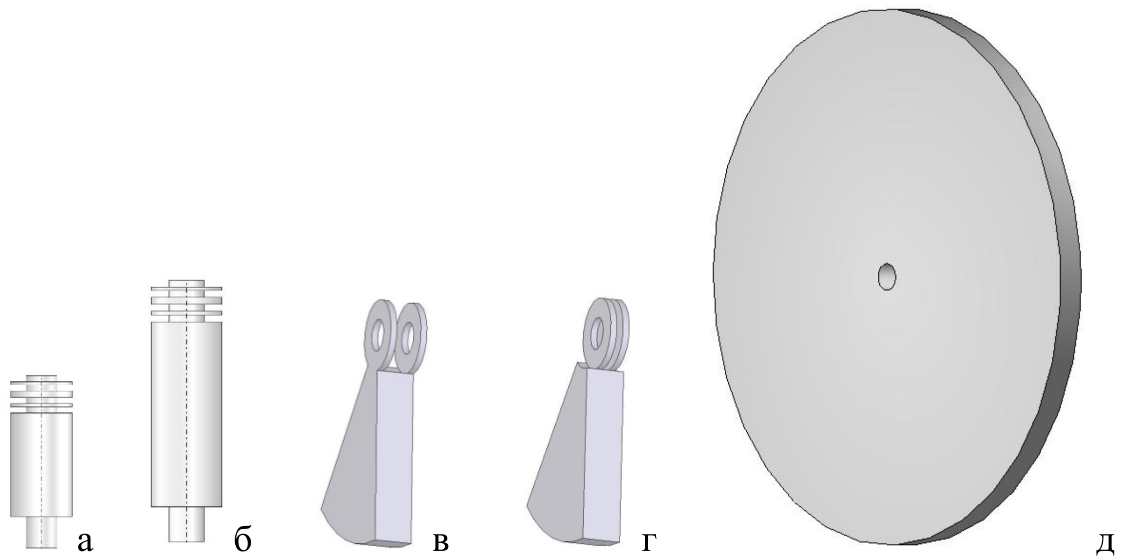
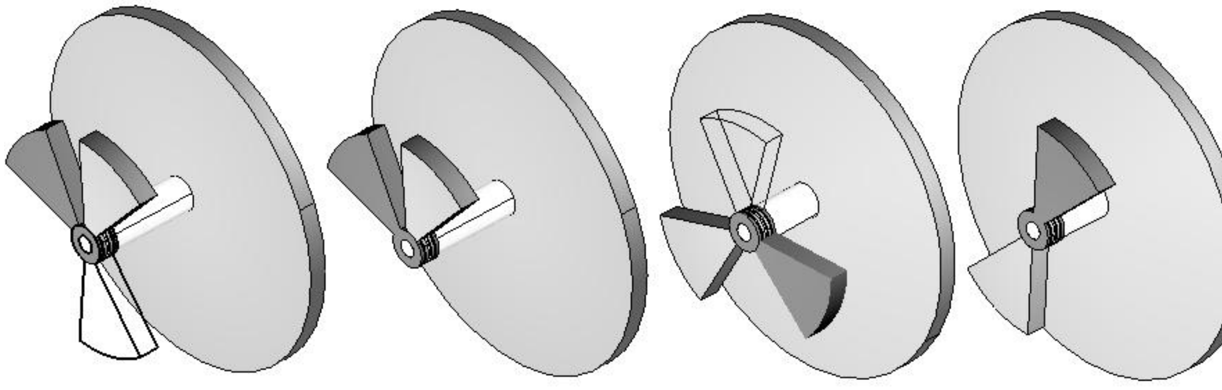


Рис. 4.3.6. Тела, моделирующие статическое уравновешивание сплюснутого вращающегося НТ двухмаятниковым АБ, :
а – ось короткая, б – длинная; в, г – пара маятников; д – диск

2. Создание из деталей сборки. Механическая система в сборе (сборка) изображена на рис. 4.3.7.

Изменением длины оси, а вместе с этим и параметра b можно обеспечивать как выполнение условия наступления автобалансировки (4.1.33), так и ее нарушение. Статическая неуравновешенность создается третьим маятником (изображается каркасно), жестко связанным с осью. Маятники, образующие АБ, устанавливаются на ось с возможностью свободного вращения.



а б в г

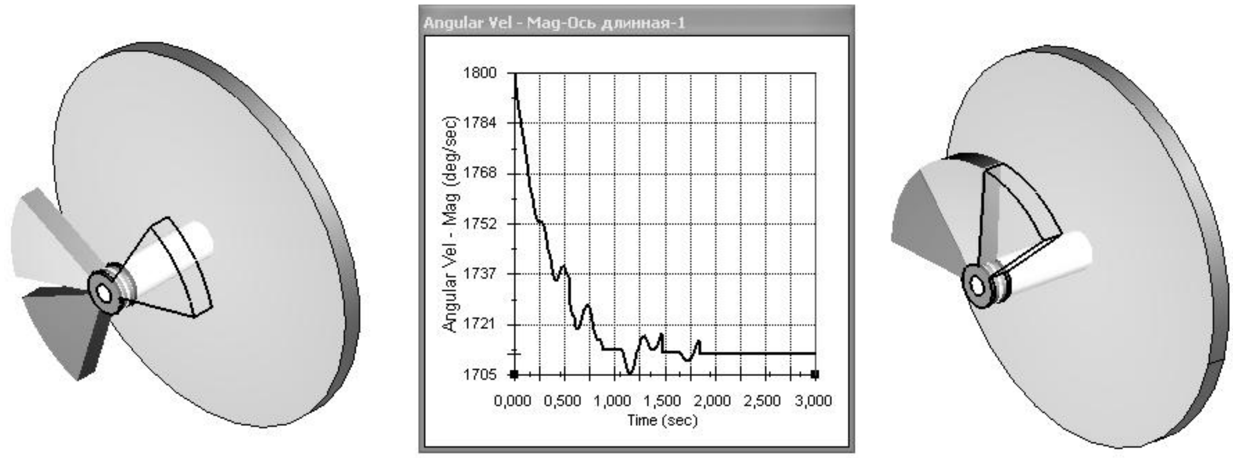
Рис. 4.3.7. Механическая система в сборе (сборка):
а – длинная ось, неуравновешенность статическая (полупрозрачный маятник);
б – длинная ось, неуравновешенности нет;
в – короткая ось, неуравновешенность статическая (полупрозрачный маятник);
г – короткая ось, неуравновешенности нет;

3. Обработка сборки модулем Cosmos Motion – аналогична этому процессу для предыдущей модели.

Эксперименты 4. В экспериментах ось – длинная, то есть условие (4.1.33) не выполняется. Система изначально вращается вокруг продольной оси НТ с угловой скоростью 5 *об/с* (1800^0 *град/с*), то есть угол нутации изначально равен 0^0.

Эксперимент 4.1. НТ статически неуравновешенно – рис. 4.3.8. Время симуляции – 3 *с*.

Через 1,85 *с* маятники приходят в конечное положение, и система начинает вращаться с постоянной угловой скоростью как одно целое вокруг неподвижной в пространстве оси. На установившемся движении маятники собраны вместе и создают наибольшую статическую неуравновешенность НТ. Быстрое протекание переходных процессов объясняется тем, что маятник, жестко связанный с осью, разгоняет подвижные маятники. Падение скорости вращения НТ ниже величины в установившемся движении объясняется тем, что маятник, жестко соединенный с осью, бьет по подвижным маятникам, и они во вращении начинают опережать НТ.



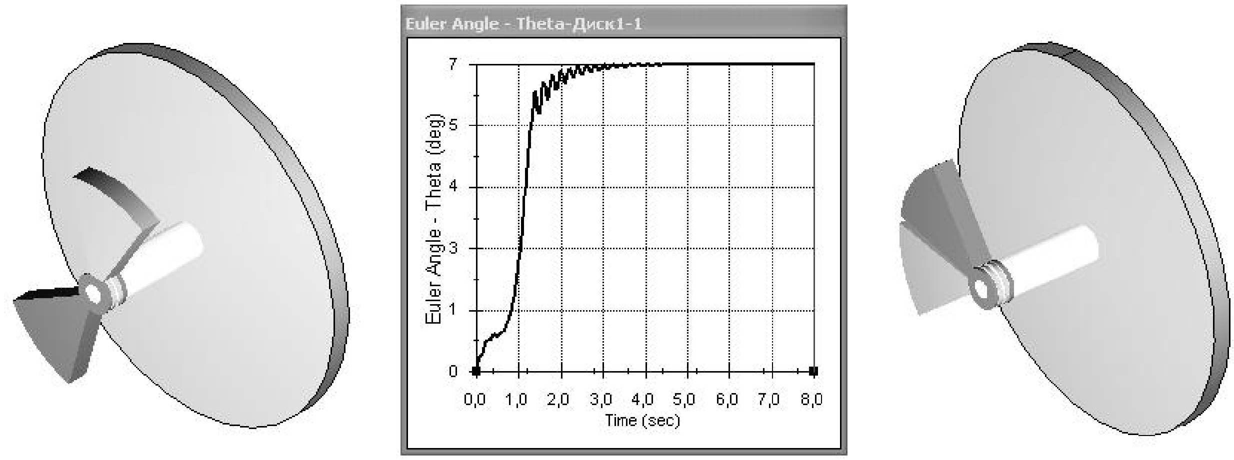
а б в

Рис. 4.3.8. Эксперимент 4.1 – статически неуравновешенное сплюснутое НТ с одним АБ, ось длинная:
а – начальное положение системы;
б – график изменения угловой скорости вращения НТ;
в – положение маятников относительно НТ на установившемся движении

Поскольку в начальный момент времени кинетический момент системы направлен не по продольной оси НТ, а угол Эйлера отсчитывается от этого положения, то он со временем не стремится к постоянному значению, а начинает изменяться периодически. Поэтому скорость протекания переходных процессов оценивается по модулю угловой скорости вращения НТ.

Эксперимент 4.2. НТ уравновешено – рис. 4.3.9. Время симуляции – 8 *с*. В начальный момент времени НТ с осью вращаются вокруг продольной оси тела и поэтому вектор кинетического момента направлен по начальному положению этой оси. Поэтому поведение системы исследовалось по углу Эйлера.

Через 4,5 *с* маятники приходят в конечное положение, и система начинает вращаться с постоянной угловой скоростью как одно целое вокруг неподвижной в пространстве оси. На установившемся движении маятники собраны вместе и создают наибольшую статическую неуравновешенность НТ. Угол нутации системы через 4,5 *с* принимает конечное – постоянное значение 7^0. Он вызван неуравновешенностью системы относительно продольной оси НТ, созданной маятниками.



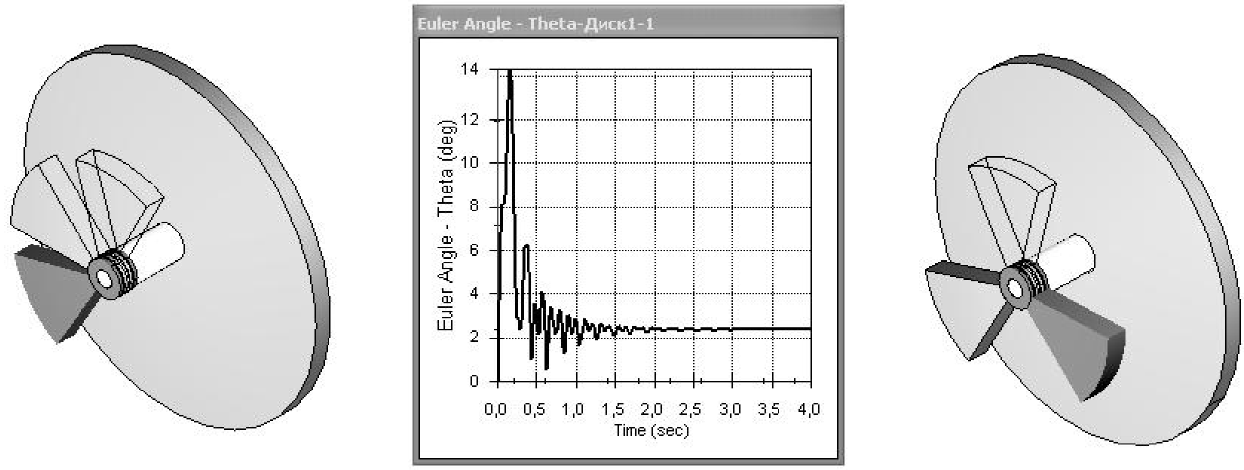
а б в

Рис. 4.3.9. Эксперимент 4.2 – уравновешенное сплюснутое НТ с одним АБ, ось длинная:
а – начальное положение системы;
б – график изменения угла нутации (угла Эйлера ϑ);
в – конечное положение системы (на установившемся движении)

Эксперименты 5. В экспериментах ось – короткая, то есть условие (4.1.33) выполняется. Система изначально вращается вокруг двух осей: продольной оси НТ с угловой скоростью 1800^0 *град/с*; вокруг поперечной оси с угловой скоростью 180^0 *град/с,* то есть имеется составляющая, вызванная неточностью придания начального вращения системе.

Эксперимент 5.1. НТ статически неуравновешенно – рис. 4.3.10. Время симуляции – 3 *с*.

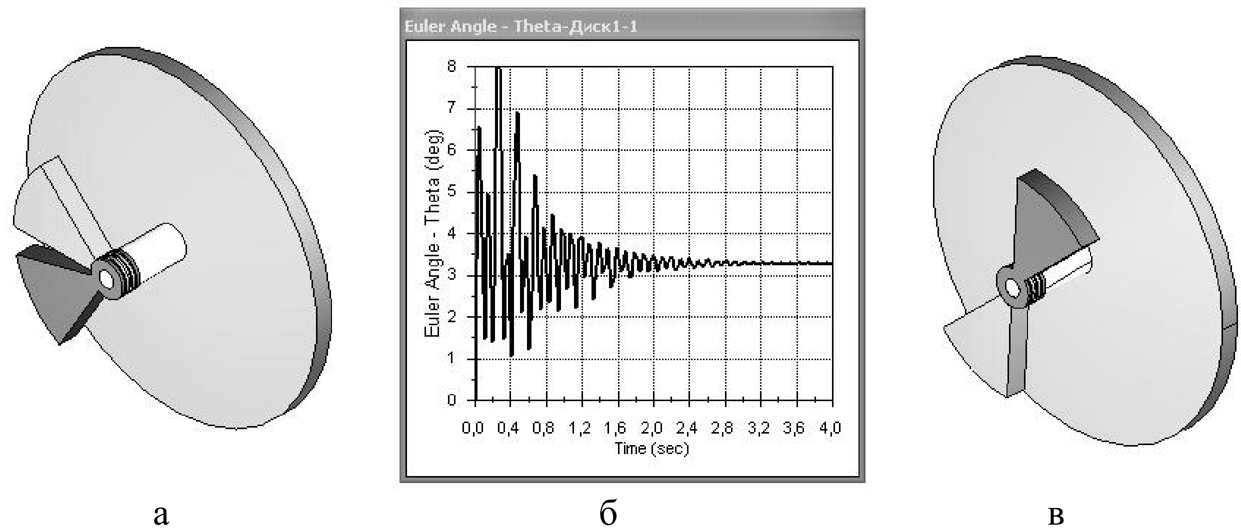
Через 1,85 *с* маятники приходят в конечное положение, и система начинает вращаться с постоянной угловой скоростью как одно целое вокруг неподвижной в пространстве оси. На установившемся движении маятники расходятся на 120^0, чем уравновешивают НТ относительно его продольной оси. Быстрое протекание переходных процессов объясняется тем, что маятник, жестко связанный с осью, разгоняет подвижные маятники. Поскольку в начальный момент времени кинетический момент системы направлен не по продольной оси НТ, а угол Эйлера θ отсчитывается от начального положения продольной оси, то со временем угол Эйлера стремиться к определенному постоянному значению, равному $2{,}3^0$.



а б в

Рис. 4.3.10. Эксперимент 4.3 – статически неуравновешенное сплюснутое НТ с одним АБ, ось короткая:
а – начальное положение системы;
б – график изменения угловой скорости вращения НТ;
в – конечное положение системы (на установившемся движении)

Эксперимент 5.2. НТ уравновешено – рис. 4.3.11. Время симуляции – 4 *с*.



а б в

Рис. 4.3.11. Эксперимент 4.4 – уравновешенное сплюснутое НТ с одним АБ, ось короткая:
а – начальное положение системы;
б – график изменения угла нутации (угла Эйлера ϑ);
в – конечное положение системы (на установившемся движении)

Через 3,2 *с* маятники приходят в конечное положение, и система начинает вращаться с постоянной угловой скоростью как одно целое вокруг продольной оси НТ. На установившемся движении маятники расходятся на 180^0, и тем самым не создают неуравновешенность. При этом у системы существует семья таких движений, потому что маятники могут быть повернуты на любой угол вокруг оси. Угол нутации системы через 3,2 *с* принимает конечное – постоянное значение $3{,}3^0$.

Остаточный угол объясняется тем, что угол Эйлера θ отсчитывается от начального положения оси, а не от вектора кинетического момента.

Если в экспериментах 5 моменты сил вязкого сопротивления действуют только на один подвижной маятник, то скорость протекания переходных процессов увеличивается, но после них система осуществляет основное движение, то есть уравновешена.

Эксперименты 5 проводились при разной длине оси. Было установлено, что при выполнении условия (4.1.33) с точностью $b \le 0{,}95b^*$, где b^* – предельное значение параметра *b*, автобалансировка происходит (устойчиво – основное движение), а при невыполнении с точностью $b \ge 1{,}05b^*$ – нет. В последнем случае маятники всегда собираются вместе, чем создают наибольшую статическую неуравновешенность. Выявить побочное движение, зарождаемое из основного, на границе области устойчивости ($b \approx b^*$) вычислительными экспериментами не удалось.

Выводы главы 4

Проведенные исследования позволяют сделать такие выводы.

1. Существуют две тенденции при работе АБ любого типа: уменьшение угла нутации, вызванного неточным приданием начального вращения телу только в случае сплюснутого СТ (работа АБ как демпфера угла нутации); тенденция к приходу тел АБ к положению, в котором они уравновешивают тело в случаях вытянутого или сплюснутого СТ (работа АБ как автобалансира).

2. В случае сплюснутого неуравновешенного вращающегося НТ АБ будут всегда работать демпферами угла нутации.

3. В случае вытянутого неуравновешенного (статически или динамически) тела АБ не будут работать демпферами, но могут уменьшать угол нутации от неуравновешенности тела за счет прихода тел АБ в окрестность положения, в котором они уравновешивают (статически или динамически) НТ.

4. Два АБ, установленные в двух разных плоскостях уравновешивания тела, ни при каких условиях не могут устранить угол нутации, вызванный неуравновешенностью.

5. Полностью устранить угол нутации можно только в случае сплюснутого статически неуравновешенного тела, при условии, что АБ установлен в плоскости дисбаланса и расстояние от центра масс СТ до плоскости уравновешивания не превышает определенного предельного значения.

6. Для условной асимптотической устойчивости основного движения достаточно, чтобы силы вязкого сопротивления действовали только на одно ПТ, а другие ПТ на переходных процессах заставляли это тело двигаться относительно НТ.

ГЛАВА 5.
УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОСНОВНЫХ ДВИЖЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ИС

Применяется конкретизированная теория устойчивости стационарных движений диссипативных механических систем с циклическими интегралами к исследованию устойчивости основных движений разных вращающихся ИС, состоящих из вращающегося НТ (в дальнейшем – НТ или просто тела) и ПТ, образующих двухмаятниковый демпфер (АБ), жидкостной демпфер (АБ), упруго закрепленный математический маятник, направленный по продольной оси НТ. Получены достаточные условия устойчивости, с точностью до границ совпадающие с необходимыми.

ISBN 978-617-7197-24-8

5.1. Двухмаятниковый демпфер или АБ

5.1.1. Описание системы, ее осевой момент инерции

ИС состоит из НТ и двух маятников (рис. 5.1.1). Тело имеет центр масс в точке O, массу M и осевые моменты инерции A, B, C относительно собственных главных центральных осей инерции $O\xi\eta\zeta$. На две оси, параллельные оси ζ, расположенные на расстоянии a от нее, насажены два математических маятника длиной l и массой $m/2$ (рис. 5.1.1, б).

Маятники двигаются в плоскости $O_1\xi_1\eta_1$, параллельной плоскости $O\xi\eta$, расположенной на расстоянии b от нее. В основном движении маятники лежат на одной прямой и система вращается как одно жесткое целое вокруг продольной оси тела ζ. На побочном движении, находящемся вблизи основного движения, в силу симметрии системы, маятники образуют с этой прямой угол φ и система вращается как одно жесткое целое вокруг оси z_G, с которой ось ζ образует угол α (рис. 5.1.1, в). Следовательно, на основном движении

$$\varphi = 0,\ \alpha = 0, \tag{5.1.1}$$

а на побочном

$$\varphi \neq 0,\ \alpha \neq 0,\ |\varphi| << 1,\ |\alpha| << 1. \tag{5.1.2}$$

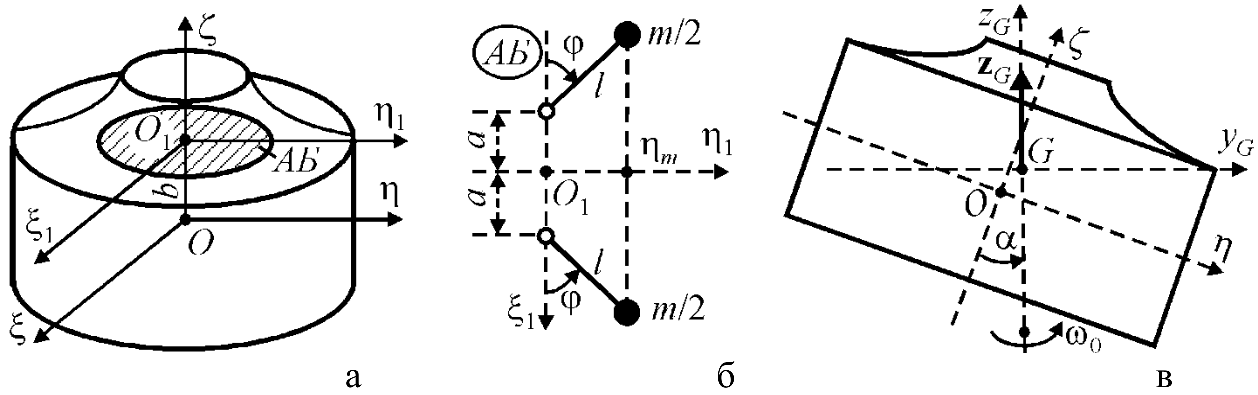


Рис. 5.1.1. Модель вращающегося тела с двумя математическими маятниками

Поскольку у системы нет элементов, способных накапливать потенциальную энергию, то, в соответствии с результатами главы 3, устойчивость установившихся движений можно оценивать по осевому моменту инерции системы J_{z_G} относительно оси z_G. На устойчивых установившихся движениях он должен принимать максимальное или локальное максимальное значение. Заметим, что в общем случае J_{z_G} является функцией четырех обобщенных координат, две из которых α, β задают положение оси z_G относительно осей $O\xi\eta\zeta$, а две φ_1, φ_2 - положение маятников относительно НТ. В дальнейших исследованиях будем использовать симметрию системы для уменьшения количества ее степеней свободы. При этом принимаем к сведению, что в основном движении маятники не отклонены, а в побочном - отклонены на одинаковые углы $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Для исследования такого механизма потери устойчивости достаточно оставить две обобщенных координаты φ, α. определяющие положение системы на установившихся движениях.

Ищем осевой момент инерции системы J_{z_G} как функцию координат φ, α. По рис. 5.1.1, а находим координаты масс маятников относительно осей $O\xi\eta\zeta$

$$\xi_m = \pm(a + l\cos\varphi), \quad \eta_m = l\sin\varphi, \quad \zeta_m = b. \tag{5.1.3}$$

Тогда координаты центра масс системы относительно осей $O\xi\eta\zeta$ будут иметь вид

$$\xi_G = 0, \quad \eta_G = \frac{m\eta_m}{M_\Sigma} = \frac{ml\sin\varphi}{M_\Sigma}, \quad \zeta_G = \frac{m\zeta_m}{M_\Sigma} = \frac{mb}{M_\Sigma}. \tag{5.1.4}$$

Осевые и центробежные моменты инерции системы относительно осей $O\xi\eta\zeta$:

$$J_\xi = A + m(\eta_m^2 + \zeta_m^2) = A + m(l^2\sin^2\varphi + b^2),$$

$$J_\eta = A + m(\xi_m^2 + \zeta_m^2) = A + m[(a + l\cos\varphi)^2 + b^2],$$

$$J_\zeta = C + m(\xi_m^2 + \eta_m^2) = C + m[l^2\sin^2\varphi + (a + l\cos\varphi)^2],$$

$$J_{\xi\eta} = J_{\xi\zeta} = 0, \quad J_{\eta\zeta} = m\eta_m\zeta_m = mlb\sin\varphi. \tag{5.1.5}$$

Относительно центральных осей $O\xi_G\eta_G\zeta_G$, параллельных осям $O\xi\eta\zeta$, тензор инерции имеет вид

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_O - M_\Sigma \begin{pmatrix} (\eta_G^2 + \zeta_G^2) & -\xi_G\eta_G & -\xi_G\zeta_G \\ -\xi_G\eta_G & (\xi_G^2 + \zeta_G^2) & -\eta_G\zeta_G \\ -\xi_G\zeta_G & -\eta_G\zeta_G & (\xi_G^2 + \eta_G^2) \end{pmatrix}, \tag{5.1.6}$$

или в развернутом виде

$$J_{\xi_G} = A_G + \frac{mMl^2}{M_\Sigma}\sin^2\varphi, \quad J_{\eta_G} = B_G - ml[2a(1 - \cos\varphi) + l\sin^2\varphi],$$

$$J_{\zeta_G} = C_G - 2mla(1-\cos\varphi) - \frac{m^2l^2}{M_\Sigma}\sin^2\varphi,$$

$$J_{\xi_G\eta_G} = J_{\xi_G\zeta_G} = 0, \quad J_{\eta_G\zeta_G} = \frac{mMlb}{M_\Sigma}\sin\varphi, \tag{5.1.7}$$

где

$$A_G = A + \frac{mMb^2}{M_\Sigma}, \quad B_G = B + m(a+l)^2 + \frac{mMb^2}{M_\Sigma}, \quad C_G = C + m(a+l)^2 \tag{5.1.8}$$

- главные центральные осевые моменты инерции системы на основном движении.

В дальнейшем считаем, что $B_G > A_G$. Только в этом случае при потере устойчивости основным движением система начнет поворачиваться вокруг оси η_G, что отвечает построенной схеме. Такое соотношение имеет место и в случае осесимметричного НТ ($A = B$).

Единичный вектор $\mathbf{z}_G$, направленный по оси z_G, имеет в проекциях на оси $O\xi_G\eta_G\zeta_G$ такие составляющие (рис. 5.1.1, в)

$$z_G = (0, -\sin\alpha, \cos\alpha)^{\mathrm{T}}. \tag{5.1.9}$$

Тогда осевой момент инерции системы относительно оси z_G имеет вид

$$J_{z_G} = \mathbf{z}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{z}_G = \{B_G - ml[2a(1-\cos\varphi) + l\sin^2\varphi]\}\sin^2\alpha + \frac{mMlb}{M_\Sigma}\sin\varphi\sin 2\alpha +$$

$$+\left[C_G - 2mla(1-\cos\varphi) - \frac{m^2l^2}{M_\Sigma}\sin^2\varphi\right]\cos^2\alpha. \tag{5.1.10}$$

Дальше исследуем его на экстремум.

5.1.2. Условия устойчивости основного движения системы

Введем в рассмотрение коэффициенты

$$k = ml^2, \quad a_0 = \frac{C_G}{ml^2},$$

$$a_{11} = \frac{a}{l} + \frac{m}{M_\Sigma}, \quad a_{22} = \frac{C_G - B_G}{ml^2}, \quad a_{12} = -\frac{b}{l}\cdot\frac{M}{M_\Sigma}. \tag{5.1.11}$$

Тогда в окрестности основного движения $\varphi=0, \alpha=0$ с точностью до величин второго порядка малости включительно

$$J_{z_G} \approx k[a_0 - (a_{11}\varphi^2 + 2a_{12}\varphi\alpha + a_{22}\alpha^2)]. \tag{5.1.12}$$

Для устойчивости основного движения необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма $a_{11}\varphi^2 + 2a_{12}\varphi\alpha + a_{22}\alpha^2$ имела минимум. Критерий Сильвестра дает такие условия устойчивости

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad \Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 .$$

Из этих условий находим

$$C_G > B_G, \qquad \Delta_2 = \frac{1}{ml^2}\left\{(C_G - B_G)\frac{a}{l} + \left[(C_G - B_G) - \frac{M^2b^2}{M_\Sigma}\right]\frac{m}{M_\Sigma}\right\} =$$

$$= \frac{1}{ml^2}\left\{(C_G - B_G)\frac{a}{l} + \left[(C_G - B_G) - M_\Sigma b'^2\right]\frac{m}{M_\Sigma}\right\} > 0, \qquad (5.1.13)$$

где

$$b' = Mb / M_\Sigma \qquad (5.1.14)$$

- расстояние от центра масс системы до плоскости маятников.

В случае, когда расстояние $a \sim l$ (расстояния a и l – величины одного порядка) и масса маятников намного меньшее массы НТ $m << M$, условия устойчивости принимают вид

$$C_G - B_G > 0 . \qquad (5.1.15)$$

То есть для устойчивости основного движения достаточно, чтобы СТ было сплюснуто. Заметим, что в этом случае маятниковый демпфер почти не работает как АБ, так как не может существенно уменьшать неуравновешенность системы.

В случае, когда маятники насажены на продольную ось тела, то $a = 0$ и условия устойчивости принимают вид

$$C_G - B_G - M_\Sigma b'^2 > 0 . \qquad (5.1.16)$$

То есть для устойчивости основного движения недостаточно, чтобы СТ было сплюснуто, а нужно, чтобы плоскость маятников находилась вблизи центра масс системы. Заметим, что в этом случае маятниковый демпфер лучше всего работает как АБ, так как может полностью устранить статическую неуравновешенность системы, расположенную в плоскости маятников.

Заметим, что в случае, когда $A_G > B_G$ и $a \neq 0$ при потере устойчивости основным движением система поворачивается вокруг оси ξ_G. В этом случае для устойчивости основного движения необходимо и достаточно, чтобы СТ на основном движении было сплюснуто ($A_G < B_G$).

5.2. Жидкостной АБ "Дункан"

5.2.1. Описание системы, ее осевой момент инерции

ИС состоит из вращающегося НТ (в дальнейшем - тела) и жидкостного АБ "Дункан" (рис. 5.2.1). Тело такое же, как и в предыдущей задаче, и в той же плоскости $O_1\xi_1\eta_1$ расположен жидкостной демпфер. Общая масса жидкости – m, ее толщина h незначительна *(h~0)* и потому считаем, что жидкость двигается в плоскости $O_1\xi_1\eta_1$. Жидкость внешне ограничивает цилиндрическая емкость радиуса R (рис. 5.2.1). Внутри жидкости плавает пустой цилиндр радиуса r. Его массой пренебрегаем или относим ее к массе жидкости. На установившихся движениях, в силу симметрии системы, считаем, что центр цилиндра находится на расстоянии e от оси, но на оси z_G.

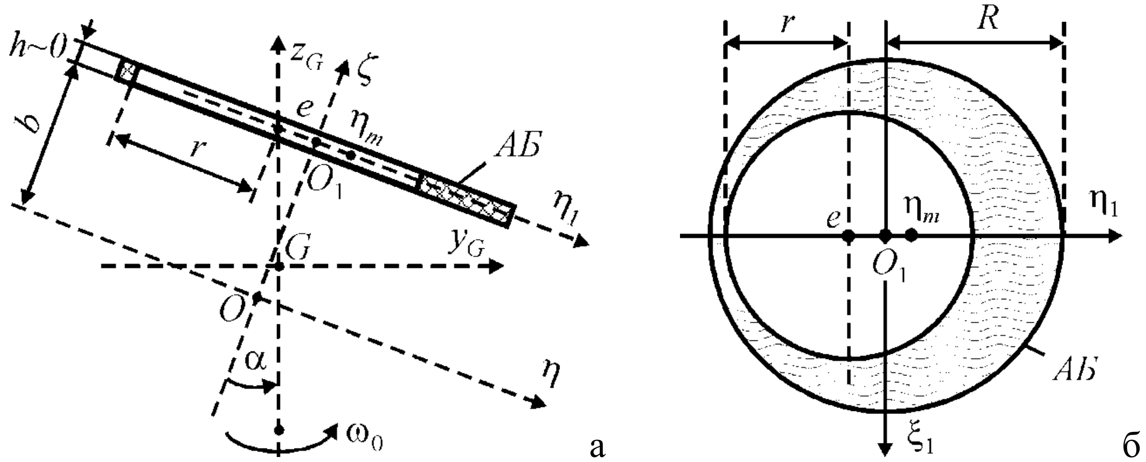


Рис. 5.2.1. Вращающееся тело с жидкостным АБ "Дункан"

По рис. 5.2.1 находим координаты центра масс жидкости относительно осей $O\xi\eta\zeta$

$$\xi_m = 0, \quad \eta_m = \eta_m, \quad \zeta_m = b. \tag{5.2.1}$$

Тогда координаты центра масс системы относительно осей $O\xi\eta\zeta$ будут иметь вид

$$\xi_G = 0, \quad \eta_G = \frac{m\eta_m}{M_\Sigma}, \quad \zeta_G = \frac{m\zeta_m}{M_\Sigma} = \frac{mb}{M_\Sigma}. \tag{5.2.2}$$

Введем обозначение

$$a = r/R, \quad m_1 = m/(1-a^2), \quad m_2 = -ma^2/(1-a^2). \tag{5.2.3}$$

Тогда

$$-m_2 e = m\eta_m, \quad e = -m\eta_m/m_2 = \eta_m(1-a^2)/a^2. \tag{5.2.4}$$

Осевые и центробежные моменты инерции системы относительно осей $O\xi\eta\zeta$:

$$J_\xi = A + \frac{m_1}{4}R^2 + m_1 b^2 + \frac{m_2}{4}r^2 + m_2(e^2 + b^2) =$$

$$= A + \frac{mR^2}{4}(1+a^2) + mb^2 - m\eta_m{}^2\frac{1-a^2}{a^2},$$

$$J_\eta = B + \frac{m_1}{4}R^2 + m_1 b^2 + \frac{m_2}{4}r^2 + m_2 b^2 = B + \frac{mR^2}{4}(1+a^2) + mb^2,$$

$$J_\zeta = C + \frac{m_1}{2}R^2 + \frac{m_2}{2}r^2 + m_2 e^2 = C + \frac{mR^2}{2}(1+a^2) - m\eta_m^2\frac{1-a^2}{a^2}.$$

$$J_{\xi\eta} = J_{\xi\zeta} = 0, \quad J_{\eta\zeta} = m\eta_m\zeta_m = mb\eta_m. \tag{5.2.5}$$

Относительно центральных осей $O\xi_G\eta_G\zeta_G$, параллельных осям $O\xi\eta\zeta$, тензор инерции имеет вид (5.1.6) или в развернутом виде

$$J_{\xi_G} = A_G - \frac{m^2\eta_m^2}{M_\Sigma}, \quad J_{\eta_G} = B_G, \quad J_{\zeta_G} = C_G - m\left(\frac{1}{a^2} - \frac{M}{M_\Sigma}\right)\eta_m^2,$$

$$J_{\xi_G\eta_G} = J_{\xi_G\zeta_G} = 0, \quad J_{\eta_G\zeta_G} = \frac{mMb}{M_\Sigma}\eta_m. \tag{5.2.6}$$

где

$$A_G = A + \frac{1}{4}mR^2(1+a^2) + \frac{mMb^2}{M_\Sigma}, \quad B_G = B + \frac{1}{4}mR^2(1+a^2) + \frac{mMb^2}{M_\Sigma},$$

$$C_G = C + \frac{1}{2}mR^2(1+a^2) \tag{5.2.7}$$

В дальнейшем считаем, что $B_G \ge A_G$, что отвечает построенной модели потери устойчивости.

Осевой момент инерции J_{z_G} системы

$$J_{z_G} = \mathbf{z}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{z}_G =$$

$$= B_G\sin^2\alpha + \frac{2mMb}{M_\Sigma}\eta_m\sin\alpha\cos\alpha + \left[C_G - m\left(\frac{1}{a^2} - \frac{M}{M_\Sigma}\right)\eta_m^2\right]\cos^2\alpha. \tag{5.2.8}$$

По рис. 5.2.1, а находим такое выражение для эксцентриситета e

$$e = (b - \zeta_G)\operatorname{tg}\alpha - \eta_G. \tag{5.2.9}$$

Из (5.2.4) и (5.2.9) находим

$$\eta_m = \frac{a^2 Mb\operatorname{tg}\alpha}{M_\Sigma - a^2 M}. \tag{5.2.10}$$

Подставляя это в (5.2.8), получаем такое выражение для осевого момента инерции

$$J_{z_G} = C_G - \Delta \sin^2 \alpha\,, \tag{5.2.11}$$

где

$$\Delta = C_G - B_G - \frac{a^2 m b^2 M^2}{M_\Sigma (M_\Sigma - a^2 M)}\,. \tag{5.2.12}$$

5.2.2. Условия устойчивости основного движения системы

Из (5.2.11) следует, что J_{z_G} будет иметь максимум на основном движении $\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\Delta = C_G - B_G - \frac{a^2 m b^2 M^2}{M_\Sigma (M_\Sigma - a^2 M)} > 0\,. \tag{5.2.13}$$

В случае, когда жидкость почти полностью заполняет камеру АБ $r \to 0$, $a \to 0$ и условие устойчивости принимает вид

$$C_G - B_G > 0\,. \tag{5.2.14}$$

То есть для устойчивости основного движения достаточно, чтобы СТ было сплюснуто ($C_G > B_G$). Заметим, что в этом случае АБ "Дункан" почти не работает как АБ, потому что при уравновешивании статического дисбаланса в своей плоскости его немного уменьшает и оставляет при этом большой остаточный дисбаланс.

В случае, когда толщина кольца жидкости стремиться к нулю $r \to R$, $a \to 1$ и условия устойчивости принимают вид

$$C_G - B_G - M^2 b^2 / M_\Sigma > 0\,. \tag{5.2.15}$$

Введем в рассмотрение расстояние от центра масс системы до плоскости жидкости

$$b' = Mb / M_\Sigma\,. \tag{5.2.16}$$

Тогда условие устойчивости (5.2.15) примет вид

$$C_G - B_G - M_\Sigma b'^2 > 0\,. \tag{5.2.17}$$

Таким образом, для устойчивости основного движения недостаточно, чтобы СТ было сплюснуто ($C_G > B_G$), а нужно, чтобы плоскость жидкости находилась вблизи центра масс системы. Заметим, что в этом случае АБ "Дункан" лучше всего работает как пассивный АБ, потому что при уравновешивании статического дисбаланса в своей плоскости почти не оставляет остаточного дисбаланса.

5.3. Жидкостной демпфер или АБ Леблана

ИС состоит из вращающегося НТ и жидкостного демпфера, АБ ли Леблана (рис. 5.3.1).

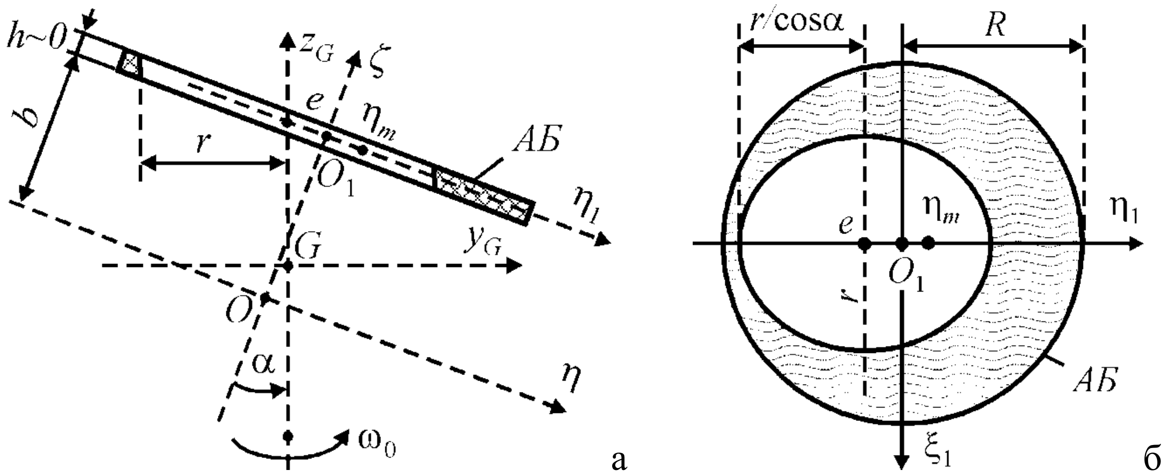


Рис. 5.3.1. Вращающееся тело с жидкостным демпфером или АБ Леблана

Тело такое же, как и в предыдущих задачах, и в той же плоскости $O_1\xi_1\eta_1$ расположен жидкостной демпфер. Общая масса жидкости – m, ее толщина h незначительна $(h$~$0)$ и потому считаем, что жидкость движется в плоскости $O_1\xi_1\eta_1$. Жидкость внешне ограничивает цилиндрическая емкость радиуса R (рис. 5.3.1). Площадь сплошного круга радиуса R равняется πR^2. Пусть полость в нем, образованная воздухом, имеет площадь $a^2\pi R^2, 0 < a^2 < 1$. На установившихся движениях полость ограничена свободной поверхностью жидкости – цилиндрической поверхностью радиуса r с центральной осью z_G. Тогда полость имеет форму эллипса с полуосями $r, r/\cos\alpha$. Площадь эллипса равняется площади полости, откуда следует, что

$$\pi r^2/\cos\alpha = a^2\pi R^2, \quad r = aR\sqrt{\cos\alpha}\,. \tag{5.3.1}$$

Как и в случае АБ "Дункан"

$$m_1 = m/(1-a^2), \quad m_2 = -ma^2/(1-a^2), \ e = \eta_m(1-a^2)/a^2,$$

$$\eta_m = \frac{a^2 Mb\,\mathrm{tg}\,\alpha}{M_\Sigma - a^2 M}. \tag{5.3.2}$$

Определяем тензор инерции системы относительно осей $O\xi\eta\zeta$. При условии, что эллипс полностью внутри круга

$$J_\xi = A + \frac{m_1}{4}R^2 + m_1 b^2 + \frac{m_2}{4}\cdot\frac{r^2}{\cos^2\alpha} + m_2(b^2+e^2) =$$
$$= A + \frac{mR^2}{4}\cdot\frac{\cos\alpha - a^4}{(1-a^2)\cos\alpha} + mb^2 - m\eta_m^2\frac{1-a^2}{a^2},$$
$$J_\eta = B + \frac{m_1}{4}R^2 + m_1 b^2 + \frac{m_2}{4}\cdot r^2 + m_2 b^2 = B + \frac{mR^2}{4}\cdot\frac{1-a^4\cos\alpha}{1-a^2} + mb^2,$$
$$J_\zeta = C + \frac{m_1}{2}R^2 + \frac{m_2}{4}\cdot\left(r^2 + \frac{r^2}{\cos^2\alpha}\right) + m_2 e^2 =$$
$$= C + \frac{mR^2}{4}\cdot\frac{2\cos\alpha - a^4(1+\cos^2\alpha)}{(1-a^2)\cos\alpha} - m\eta_m^2\frac{1-a^2}{a^2},$$
$$J_{\xi\eta} = J_{\xi\zeta} = 0,\quad J_{\eta\zeta} = mb\eta_m. \tag{5.3.3}$$

Относительно центральных осей $O\xi_G\eta_G\zeta_G$, параллельных осям $O\xi\eta\zeta$, тензор инерции имеет вид (5.1.6) или в развернутом виде

$$J_{\xi_G} = A_G - m\left(\frac{1}{a^2} - \frac{M}{M_\Sigma}\right)\eta_m^2 - \frac{a^4 mR^2}{4}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{(1-a^2)\cos\alpha},$$
$$J_{\eta_G} = B_G + \frac{a^4 mR^2}{4}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{1-a^2},$$
$$J_{\zeta_G} = C_G - m\left(\frac{1}{a^2} - \frac{M}{M_\Sigma}\right)\eta_m^2 - \frac{a^4 mR^2}{4}\cdot\frac{(1-\cos\alpha)^2}{(1-a^2)\cos\alpha},$$
$$J_{\xi_G\eta_G} = J_{\xi_G\zeta_G} = 0,\quad J_{\eta_G\zeta_G} = \frac{mMb}{M_\Sigma}\eta_m. \tag{5.3.4}$$

где A_G, B_G, C_G – из (5.2.7), и как в предыдущей задаче считается, что $B_G > A_G$.

Осевой момент инерции J_{z_G} системы

$$J_{z_G} = \mathbf{z}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{z}_G =$$
$$= -\frac{a^4 mR^2}{2(1-a^2)}\cos\alpha + \left[B_G + \frac{a^4 mR^2}{4(1-a^2)}\right]\sin^2\alpha - \frac{2mMb}{M_\Sigma}\eta_m\sin\alpha\cos\alpha +$$
$$+\left[C_G + \frac{a^4 mR^2}{2(1-a^2)} - m\left(\frac{1}{a^2} - \frac{M}{M_\Sigma}\right)\eta_m^2\right]\cos^2\alpha. \tag{5.3.5}$$

Подставляя сюда η_m из (5.3.2), преобразовываем J_{z_G} к виду

$$J_{z_G} = C_G + \frac{a^4 mR^2}{2(1-a^2)}(1-\cos\alpha) -$$

$$-\left[C_G - B_G + \frac{a^4 mR^2}{4(1-a^2)} - \frac{a^2 mb^2 M^2}{M_\Sigma (M_\Sigma - a^2 M)}\right]\sin^2\alpha . \qquad (5.3.6)$$

Введем обозначение

$$x = \sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (5.3.7)$$

Тогда J_{z_G} можно подать в виде

$$J_{z_G} = C_G - 4x^2\left\{\Delta - \left[\Delta + \frac{a^4 mR^2}{4(1-a^2)}\right]x^2\right\}. \qquad (5.3.8)$$

На основном движении $x=0$ и осевой момент инерции J_{z_G} будет иметь максимум, при условии (5.2.13), из чего следует, что условия устойчивости основных движений в случаях АБ Леблана и АБ "Дункан" - совпадают.

5.4. Упруго закрепленный стержень, направленный по продольной оси НТ

5.4.1. Описание системы, потенциальная энергия приведенной системы

ИС состоит из НТ и невесомого стержня c массой m на конце, направленного по продольной оси ζ НТ (рис. 5.4.1). НТ такое же, как и в предыдущих задачах. В первом случае стержень абсолютно жесткий, прикрепленный вязко-упругим сферическим шарниром к НТ. Во втором случае стержень – упругий.

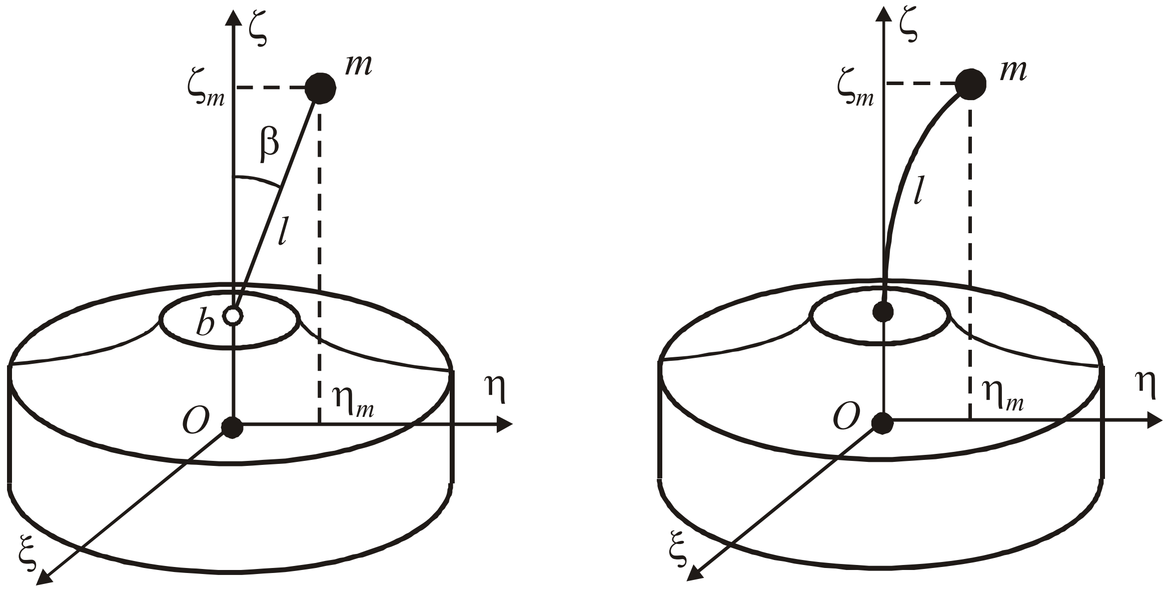


Рис. 5.4.1. Модель вращающегося НТ со стержнем, направленным по продольной оси

Когда маятник не отклонен или стержень не деформирован, то масса находится на расстоянии b от точки O. В основном движении маятник лежит на оси ζ, и система вращается вокруг этой оси. На побочном движении, в силу симметрии системы, считаем, что масса маятника будет находиться на расстоянии η_m от оси ζ.

По рис. 5.4.1 находим координаты центра масс сосредоточенной массы относительно осей $O\xi\eta\zeta$

$$\xi_m = 0, \quad \eta_m = \eta_m, \quad \zeta_m = \zeta_m. \tag{5.4.1}$$

Тогда координаты центра масс системы относительно осей $O\xi\eta\zeta$ будут иметь вид

$$\xi_G = 0,\ \eta_G = \frac{m\eta_m}{M_\Sigma},\ \zeta_G = \frac{m\zeta_m}{M_\Sigma}. \tag{5.4.2}$$

Осевые и центробежные моменты инерции системы относительно осей $O\xi\eta\zeta$:

$$J_\xi = A + m(\eta_m^2 + \zeta_m^2),\quad J_\eta = B + m\zeta_m^2,\quad J_\zeta = C + m\eta_m^2,$$
$$J_{\xi\eta} = J_{\xi\zeta} = 0,\quad J_{\eta\zeta} = m\eta_m\zeta_m. \tag{5.4.3}$$

Относительно центральных осей $O\xi_G\eta_G\zeta_G$, параллельных осям $O\xi\eta\zeta$, тензор инерции имеет вид (5.1.6) или в развернутом виде

$$J_{\xi_G} = A_G + \frac{mM}{M_\Sigma}(\eta_m^2 + \zeta_m^2 - b^2),\quad J_{\eta_G} = B_G + \frac{mM}{M_\Sigma}(\zeta_m^2 - b^2),$$
$$J_{\zeta_G} = C + \frac{mM}{M_\Sigma}\eta_m^2,\quad J_{\xi_G\eta_G} = J_{\xi_G\zeta_G} = 0,\quad J_{\eta_G\zeta_G} = \frac{mM}{M_\Sigma}\eta_m\zeta_m, \tag{5.4.4}$$

где

$$A_G = A + \frac{mMb^2}{M_\Sigma},\quad B_G = B + \frac{mMb^2}{M_\Sigma}. \tag{5.4.5}$$

В дальнейшем считаем, что $B_G \ge A_G$, что соответствует построенной модели потери устойчивости.

Осевой момент инерции J_{z_G} системы

$$J_{z_G} = \mathbf{z}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{z}_G = \left[B_G + \frac{mM}{M_\Sigma}(\zeta_m^2 - b^2)\right]\sin^2\alpha -$$
$$-\frac{mM}{M_\Sigma}\eta_m\zeta_m\sin 2\alpha + \left(C + \frac{mM}{M_\Sigma}\eta_m^2\right)\cos^2\alpha. \tag{5.4.6}$$

Кинетическая энергия системы на установившемся движении

$$T_0 = \frac{K^2}{2J_{z_G}} = \frac{\omega_0^2 C^2}{2J_{z_G}}, \tag{5.4.7}$$

где K – модуль вектора кинетического момента системы, ω_0 – скорость вращения системы на основном движении.

С точностью до величин второго порядка малости включительно потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2}c\eta_m^2, \tag{5.4.8}$$

где c – коэффициент жесткости шарнира или стержня.

Потенциальная энергия приведенной системы

$$W = T_0 + \Pi =$$

$$= \frac{\omega_0^2 C^2}{2\left\{\left[B_G + \frac{mM}{M_\Sigma}(\zeta_m^2 - b^2)\right]\sin^2\alpha - \frac{mM}{M_\Sigma}\eta_m\zeta_m \sin 2\alpha + \left(C + \frac{mM}{M_\Sigma}\eta_m^2\right)\cos^2\alpha\right\}} +$$

$$+ \frac{1}{2}c\eta_m^2. \qquad (5.4.9)$$

На устойчивых установившихся движениях потенциальная энергия приведенной системы должна принимать минимальное или локальное минимальное значение.

5.4.2. Условия устойчивости основного движения системы

Для гибкого или жесткого стержня координату ζ_m, с точностью до величин второго порядка малости относительно η_m можно подать в виде

$$\zeta_m \approx b - b_2\eta_m^2, \qquad (5.4.10)$$

где b_2 – некоторая постоянная величина. Введем в рассмотрение новую безразмерную переменную

$$\varphi = \eta_m / b. \qquad (5.4.11)$$

Разложение W по степеням обобщенных координат φ, α имеет вид

$$2W \approx k[a_0 + a_{11}\varphi^2 + 2a_{12}\varphi\alpha + a_{22}\alpha^2 - \cdots], \qquad (5.4.12)$$

где

$$k = mb^2\omega_0^2, \quad a_0 = \frac{C}{mb^2},$$

$$a_{11} = \frac{cM_\Sigma - mM\omega_0^2}{mM_\Sigma\omega_0^2}, \quad a_{12} = -\frac{M}{M_\Sigma}, \quad a_{22} = \frac{C - B_G}{mb^2}. \qquad (5.4.13)$$

Из первой группы условий критерия Сильвестра находим такие необходимые условия устойчивости основного движения

$$\omega_0 < \omega_1 = \sqrt{\frac{cM_\Sigma}{mM}}, \quad C > B_G. \qquad (5.4.14)$$

Вторая группа условий дает

$$\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{M}{mb^2M_\Sigma\omega_0^2}\left[(C - B_G)\omega_1^2 - \left(C - B_G + \frac{mb^2M}{M_\Sigma}\right)\omega_0^2\right] =$$

$$= \frac{M}{mb^2M_\Sigma\omega_0^2}\left[(C - B_G)\omega_1^2 - (C - B)\omega_0^2\right] > 0,$$

откуда находим такое необходимое условие устойчивости

$$\omega_0 < \omega_1\sqrt{\frac{C-B_G}{C-B}} = \sqrt{\frac{cM_\Sigma}{mM}}\cdot\sqrt{\frac{C-B_G}{C-B}}\,. \tag{5.4.15}$$

Вместе условия (5.4.14) и (5.4.15) дают такие необходимые и достаточные условия устойчивости основного движения

$$C > B_G,\quad \omega_0 < \sqrt{\frac{cM_\Sigma}{mM}}\cdot\sqrt{\frac{C-B_G}{C-B}}\,, \tag{5.4.16}$$

Из полученных условий следует, что даже в случае сплюснутого СТ ($C > B_G$) существует критическая скорость

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{cM_\Sigma}{mM}}\cdot\sqrt{\frac{C-B_G}{C-B}}\,, \tag{5.4.17}$$

при превышении которой основное движение теряет устойчивость.

Выводы главы 5

Проведенные исследования позволяют сделать такие выводы.

1. Условие устойчивости установившегося движения вращающейся ИС, в соответствии с которой на этом движении СТ должно вращаться вокруг оси наибольшего момента инерции (быть сплюснутым) является необходимым, но не является достаточным условием устойчивости.

2. Если ПТ образуют демпферы, проявляющие автобалансировочные свойства (маятниковые, жидкостные), то для устойчивости основного движения необходимо и достаточно, чтобы СТ было сплюснуто и, чтобы расстояние от центра масс системы до плоскости уравновешивания не превышало определенного предельного значения.

3. Если ПТ - упруго закрепленный стержень, ориентированный по продольной оси НТ, то для устойчивости основного движения необходимо и достаточно, чтобы СТ было сплюснуто и система вращалась с угловыми скоростями, не превышающими определенное предельное значение.

ГЛАВА 6.
ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА УСТРАНЕНИЯ АБ БОЛЬШИХ УГЛОВ НУТАЦИИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНОГО УГЛА НУТАЦИИ

Показана аналогия в работе маятниковых, шаровых и жидкостных АБ при устранении больших углов нутации, вызванных неточным приданием начального вращения НТ, и возникновении остаточного угла нутации из-за установки этих АБ на расстоянии до центра масс НТ большем предельно–допустимого. Оценен остаточный угол нутации при установке маятников на расстоянии, превышающем предельное.

ISBN 978-617-7197-24-8

6.1. Исследование процесса устранения АБ больших углов нутации

6.1.1. Принцип действия АБ

Рассмотрим сначала случай вращения изолированного осесимметричного АТТ без АБ, с центром масс в точке O и осевыми моментами инерции A и B относительно поперченных осей ξ и η соответственно ($A=B$), и осевым моментом инерции C относительно продольной оси ζ, являющейся осью симметрии и главной центральной осью инерции АТТ (рис. 6.1.1, а, б). Не ограничивая общности, можно считать, что АТТ вращается вокруг неподвижной в пространстве точки O. По закону сохранения кинетического момента, вектор кинетического момента АТТ – $\mathbf{K}$ неизменен. В идеальном случае ось ζ должна совпадать с вектором $\mathbf{K}$ и АТТ должно вращаться вокруг этой оси. В результате неточного предоставления начального вращения АТТ ось ζ и вектор кинетического момента $\mathbf{K}$ не совпадает. Мгновенное вращательное движение АТТ вокруг центра масс характеризует вектор мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. В соответствии с интерпретацией движения Пуансо [137], геометрически движение АТТ вокруг неподвижной точки можно подать как качение без скольжения подвижного аксоида по неподвижному. На рис. 6.1.1, е показан случай прямой прецессии (при $C < A$), а на рис. 6.1.1, д – случай обратной прецессии (при $C > A$).

В работе [183] получена формула, связывающая угол нутации θ с кинетической энергией системы T в случае осесимметричного АТТ:

$$\frac{K^2}{2}\left(\frac{\cos^2\theta}{C}+\frac{\sin^2\theta}{A}\right)=T\,.$$

Поскольку АТТ – изолированное, то имеет место закон сохранения полной (кинетической) энергии системы. Поэтому, при отсутствии рассеивания энергии картина движения АТТ будет неизменной.

Добавим в систему маятниковый, шаровой или жидкостной АБ. На рис. 6.1.1, а, б – АБ насажен на ось ζ, причем плоскость его расположения находится на расстоянии b от центра масс АТТ. В дальнейшем АТТ будем рассматривать как НТ. Разложим $\boldsymbol{\omega}$ на составляющие, направленные по вектору $\mathbf{K}$ и оси ζ: $\boldsymbol{\Omega}_K$, $\boldsymbol{\Omega}_\zeta$. Под действием центробежных сил, возникающих за счет составляющей $\boldsymbol{\Omega}_K$, маятники, шары или жидкость будут максимально отклоняться от вектора кинетического момента $\mathbf{K}$. НТ при этом будет вращаться относительно маятников, шаров или жидкости вокруг оси ζ с относительной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_\zeta$.

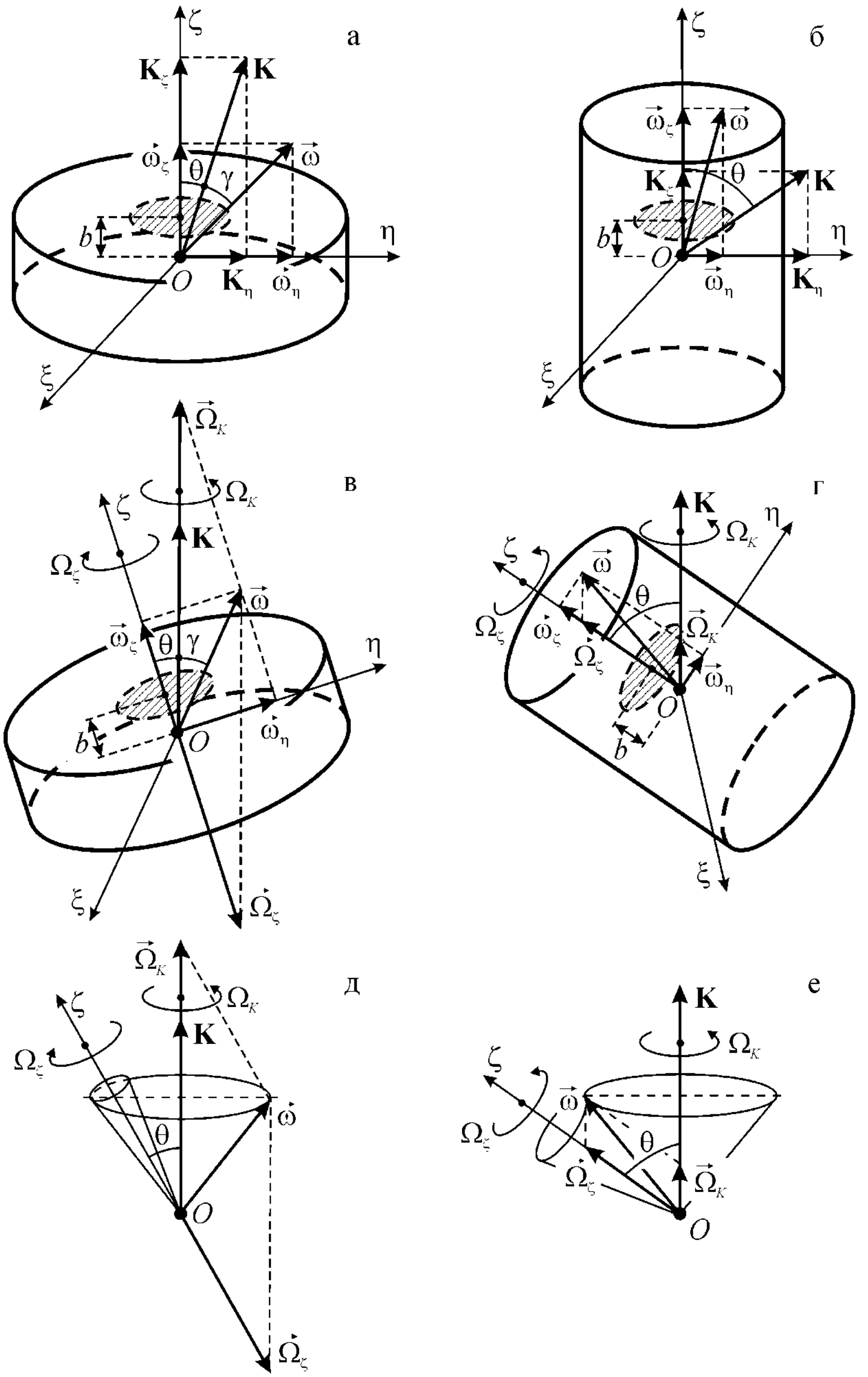


Рис. 6.1.1. Модель движения вытянутого и сплюснутого АТТ

При наличии вязкого трения угол нутации θ в случае сплюснутого НТ ($C > A$) будет уменьшаться, а в случае вытянутого НТ ($C < A$) – будет увеличиваться. Это объясняет, почему АБ и ДН надо использовать на сплюснутых НТ.

6.1.2. Условия уменьшения угла нутации

Схема нутационно-прецессионного движения осесимметричного НТ показана на рис. 6.1.1, в, г.

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ находится в плоскости $O\eta\zeta$. Из рис. 6.1.1, в, находим:

$$\omega = \sqrt{\omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2}\,,\ \omega_\eta = \omega\sin(\theta+\gamma),\ \omega_\zeta = \omega\cos(\theta+\gamma),\ \mathrm{tg}(\theta+\gamma) = \omega_\eta/\omega_\zeta. \quad (6.1.1)$$

Кинетический момент НТ находим через составляющие:

$$K_\eta = A\omega_\eta, \quad K_\zeta = C\omega_\zeta, \quad K^2 = A^2\omega_\eta^2 + C^2\omega_\zeta^2. \quad (6.1.2)$$

Из-за осевой симметрии НТ вектор **K** находится в плоскости $O\eta\zeta$. Из рис. 6.1.1, а, находим:

$$K = \sqrt{K_\eta^2 + K_\zeta^2}, \quad K_\eta = K\sin\theta, \quad K_\zeta = K\cos\theta, \quad \mathrm{tg}\,\theta = K_\eta / K_\zeta. \quad (6.1.3)$$

Кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{1}{2}(A\omega_\eta^2 + C\omega_\zeta^2). \quad (6.1.4)$$

Рассмотрим

$$2TC - K^2 = AC\omega_\eta^2 + C^2\omega_\zeta^2 - A^2\omega_\eta^2 - C^2\omega_\zeta^2 = A(C-A)\omega_\eta^2,$$

Откуда находим

$$\omega_\eta^2 = \frac{2TC - K^2}{A(C-A)}. \quad (6.1.5)$$

Из (6.1.2) и (6.1.3) находим

$$\omega_\eta = \frac{K_\eta}{A}, \quad K_\eta = K\sin\theta, \quad \omega_\eta = \frac{K}{A}\sin\theta,$$

$$\omega_\zeta = \frac{K_\zeta}{C}, \quad K_\zeta = K\cos\theta, \quad \omega_\zeta = \frac{K}{C}\cos\theta. \quad (6.1.6)$$

Подставляя ω_η из (6.1.6) в (6.1.5), получаем

$$\frac{K^2\sin^2\theta}{A^2} = \frac{2TC - K^2}{A(C-A)},$$

или, после преобразований

$$\sin^2\theta = \frac{(2TC - K^2)A}{K^2(C-A)}. \quad (6.1.7)$$

Возьмем производную по времени от равенства (6.1.7), получим

$$\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = \frac{AC}{K^2(C-A)}\dot{T}, \tag{6.1.8}$$

приближенный закон изменения угла нутации для осесимметричного НТ, полученный в работах [82, 183].

Так как на систему действуют диссипативные силы, то

$$\dot{T} = -2\Phi . \tag{6.1.9}$$

где Φ – диссипативная функция Релея. Тогда из уравнения (6.1.8) находим такой приближенный закон изменения угла нутации

$$\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = -\frac{2AC}{K^2(C-A)}\Phi . \tag{6.1.10}$$

6.1.3. Приближенное вычисление диссипативной функции Релея

Диссипативная функция Релея имеет вид

$$\Phi = \mu\Omega_\zeta^2 / 2 . \tag{6.1.11}$$

Из рис. 6.1.2 находим

$$\omega_\eta = \Omega_K \sin\theta, \quad \Omega_\zeta \sin\theta = \omega_\eta \cos\theta - \omega_\zeta \sin\theta . \tag{6.1.12}$$

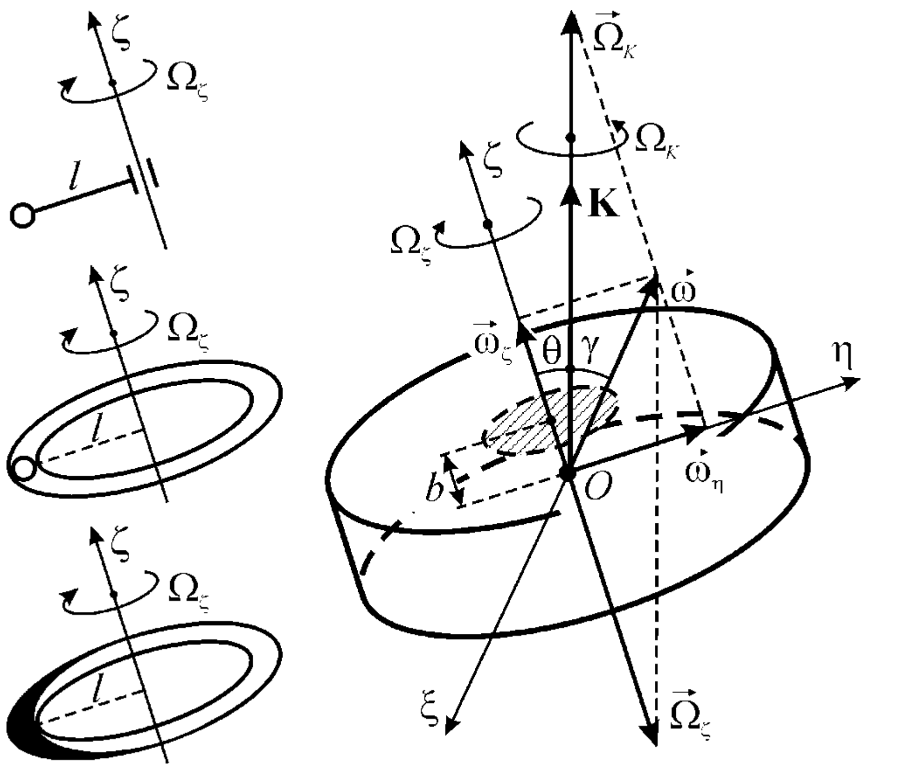


Рис. 6.1.2. Схемы АБ–демпферов и процесс устранения ими больших углов нутации

Из (6.1.12), с учетом (6.1.6), находим

$$\Omega_K = \omega_\eta / \sin\theta = K / A,$$

$$\Omega_\zeta = \frac{\omega_\eta}{\operatorname{tg}\theta} - \omega_\zeta = \frac{K\sin\theta}{A}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} - \frac{K\cos\theta}{C} = \frac{C-A}{AC}K\cos\theta. \qquad (6.1.13)$$

Подставляя Ω_ζ из (6.1.13) в (6.1.11), получим

$$\Phi = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{C-A}{AC}\right)^2 K^2\cos^2\theta. \qquad (6.1.14)$$

Из рис. 6.1.2 находим

$$\omega_\zeta = \Omega_H\cos\theta - \Omega_\zeta = \frac{K}{A}\cos\theta - \frac{C-A}{AC}K\cos\theta = \frac{K}{A}\left(1-\frac{C-A}{C}\right)\cos\theta = \frac{K}{C}\cos\theta$$

что совпадает с формулой (6.1.6).

6.1.4. Оценка скорости затухания больших углов нутации

Случай осесимметричного НТ. Подставим (6.1.14) в (6.1.10), получим

$$\dot\theta\sin\theta\cos\theta = -\frac{2AC}{K^2(C-A)}\frac{1}{2}\mu\left(\frac{C-A}{AC}\right)^2 K^2\cos^2\theta,$$

$$\dot\theta\sin\theta = -\mu\left(\frac{C-A}{AC}\right)\cos\theta,$$

или окончательно

$$\frac{d\cos\theta}{dt} = \mu\left(\frac{C-A}{AC}\right)\cos\theta. \qquad (6.1.15)$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение:

$$u=\cos\theta,\quad \frac{du}{dt} = \mu\left(\frac{C-A}{AC}\right)u,\quad \frac{du}{u} = \mu\left(\frac{C-A}{AC}\right)dt,\quad \ln u = \mu\left(\frac{C-A}{AC}\right)t + \ln u_0,$$

$$\ln\frac{u}{u_0} = \mu\left(\frac{C-A}{AC}\right)t,\quad \frac{u}{u_0} = e^{\mu\left(\frac{C-A}{AC}\right)t},\quad u = u_0 e^{\mu\left(\frac{C-A}{AC}\right)t}.$$

Окончательно получаем такой закон изменения угла нутации

$$\cos\theta = \cos\theta_0 e^{\mu\left(\frac{C-A}{AC}\right)t},\ \left|\cos\theta\right| \le 1. \qquad (6.1.16)$$

Из (6.1.16) следует, что $\cos\theta$ очень быстро стремится к 1 со временем. При этом угол θ очень быстро стремится к 0. Скорость уменьшения угла нутации будет тем больше, чем C больше A.

Случай неосесимметричного НТ. Рассмотрим неосесимметричное НТ, у которого $A < B < C$.

Уменьшим у этого НТ осевой момент инерции B до A. Тогда получим такую оценку для изменения угла нутации

$$\cos\theta \geq \cos\theta_0 e^{\mu\left(\frac{C-A}{AC}\right)t}, \quad |\cos\theta| \leq 1. \tag{6.1.17}$$

Увеличим у этого НТ осевой момент инерции A до B. Тогда получим такую оценку для изменения угла нутации

$$\cos\theta \leq \cos\theta_0 e^{\mu\left(\frac{C-B}{BC}\right)t}, \quad |\cos\theta| \leq 1. \tag{6.1.18}$$

Окончательно, для изменения большого угла нутации неосесимметричного НТ справедлива такая оценка

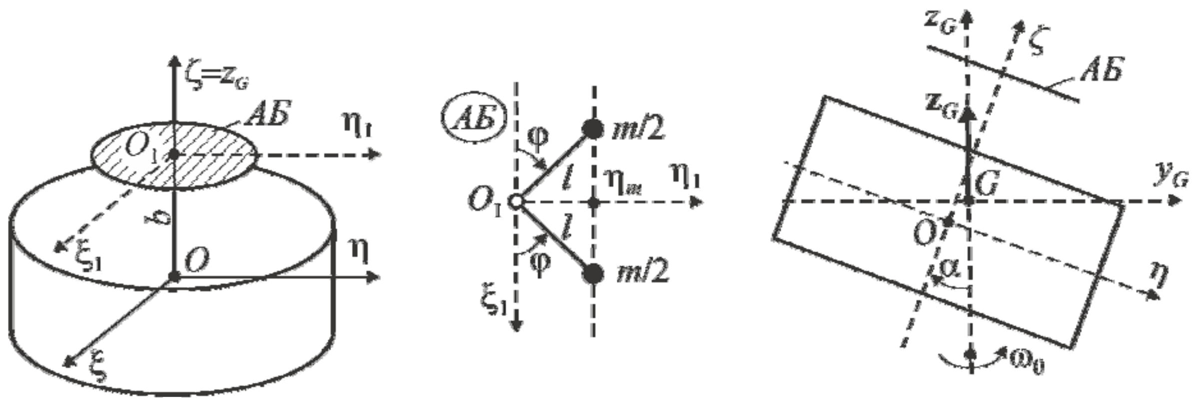
$$\cos\theta_0 e^{\mu\left(\frac{C-A}{AC}\right)t} \leq \cos\theta \leq \cos\theta_0 e^{\mu\left(\frac{C-B}{BC}\right)t}, \quad |\cos\theta| \leq 1. \tag{6.1.19}$$

6.2. Исследование остаточного угла нутации

6.2.1. Модель, описывающая потерю устойчивости основным установившемся движением

ИС состоит из НТ и двух маятников, образующих маятниковый АБ (рис. 2.2.1). НТ имеет центр масс в точке O, массу M и осевые моменты инерции A, B, C относительно собственных главных центральных осей инерции $O\xi\eta\zeta$. На продольную ось ζ НТ насажены два математических маятника длиной l и массой $m/2$ каждый (рис. 6.2.1, б).

Маятники движутся в плоскости $O_1\xi_1\eta_1$, параллельной плоскости $O\xi\eta$, расположенной на расстоянии b от нее. При повороте маятников относительно НТ, на них действуют силы вязкого сопротивления, величина и природа которых несущественны.



а б в

Рис. 6.2.1. Модель, описывающая потерю устойчивости основным установившемся движением

На установившихся движениях ИС вращается вокруг оси z_G, на которой лежит вектор кинетического момента ИС и расположен ее центр масс – точка G. На основном движении маятники лежат на прямой ξ_1, и ИС вращается вокруг продольной оси НТ ζ=z_G (рис. 6.2.1, а). На побочном движении, в результате симметрии системы, маятники отклонены от прямой ξ_1 на угол φ (рис. 6.2.1, б) и ось ζ образует с осью z_G угол α (рис. 6.2.1, в). Следовательно, на основном движении

$$\varphi=0, \quad \alpha=0,$$

а на побочном

$$\varphi\neq0, \quad \alpha\neq0, \quad |\varphi|<<1, \quad |\alpha|<<1.$$

Так как в ИС нет элементов, накапливающих потенциальную энергию, то устойчивость установившихся движений можно оценить по осевому моменту инерции системы J_{z_G} относительно оси z_G. На устойчивых установившихся движениях он должен принимать максимальное или локальное максимальное значение [13]. Заметим, что в общем случае J_{z_G} является обобщенной функцией четырех обобщенных координат, две из которых – α, β задают положение оси z_G относительно осей $O\xi\eta\zeta$, а φ_1, φ_2 – положение маятников относительно НТ. В дальнейшем будем использовать симметрию системы для уменьшения количества ее степеней свободы. При этом будем учитывать, что на основном движении маятники не отклонены, а на побочных – отклонены на одинаковые углы $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$. Для исследования такого механизма потери устойчивости достаточно оставить две обобщенных координаты φ, α, определяющие положение системы на установившихся движениях. Отметим, что описанный механизм потери устойчивости включает в себя не все возможные установившиеся движения. Но можно проверить, что на неохваченных движениях осевой момент инерции J_{z_G} меньший, чем наибольший момент J_{z_G} на движениях, рассмотренных ниже.

Ищем осевой момент инерции системы J_{z_G} как функцию координат φ, α. Координаты масс маятников относительно осей $O\xi\eta\zeta$ (рис. 6.2.1, а)

$$\xi_m = \pm l\cos\varphi,\ \ \eta_m = l\sin\varphi,\ \ \zeta_m = b. \tag{6.2.1}$$

Координаты центра масс системы относительно осей $O\xi\eta\zeta$:

$$\xi_G = 0,\ \ \eta_G = \frac{m\eta_m}{M_\Sigma} = \frac{ml\sin\varphi}{M_\Sigma},\ \ \zeta_G = \frac{m\zeta_m}{M_\Sigma} = \frac{mb}{M_\Sigma}\quad (M_\Sigma = M + m). \tag{6.2.2}$$

Тензор инерции, осевые и центробежные моменты инерции системы относительно осей $O\xi\eta\zeta$:

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ 0 & -J_{\eta\zeta} & J_\zeta \end{pmatrix},$$

где

$$J_\xi = A + m(\eta_m^2 + \zeta_m^2) = A + m(l^2\sin^2\varphi + b^2),$$
$$J_\eta = B + m(\xi_m^2 + \zeta_m^2) = B + m(l^2\cos^2\varphi^2 + b^2),$$
$$J_\zeta = C + m(\xi_m^2 + \eta_m^2) = C + ml^2,$$
$$J_{\xi\eta} = J_{\xi\zeta} = 0,\quad J_{\eta\zeta} = m\eta_m\zeta_m = mlb\sin\varphi. \tag{6.2.3}$$

Относительно центральных осей $O\xi_G\eta_G\zeta_G$, параллельных осям $O\xi\eta\zeta$, тензор инерции имеет вид:

$$\mathbf{J}_G=\mathbf{J}_O-M_\Sigma\begin{pmatrix}\eta_G^2+\zeta_G^2 & -\xi_G\eta_G & -\xi_G\zeta_G\\ -\xi_G\eta_G & \xi_G^2+\zeta_G^2 & -\eta_G\zeta_G\\ -\xi_G\zeta_G & -\eta_G\zeta_G & \xi_G^2+\eta_G^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_{\xi G} & 0 & 0\\ 0 & J_{\eta G} & -J_{\eta_G\zeta_G}\\ 0 & -J_{\eta_G\zeta_G} & J_{\zeta G}\end{pmatrix},$$

где

$$J_{\xi_G}=A_G+\frac{mMl^2}{M_\Sigma}\sin^2\varphi,\quad J_{\eta G}=B_G-ml^2\sin^2\varphi,\quad J_{\zeta G}=C_G-\frac{m^2l^2}{M_\Sigma}\sin^2\varphi,$$

$$J_{\xi_G\eta_G}=J_{\xi_G\zeta_G}=0,\quad J_{\eta_G\zeta_G}=\frac{mMlb}{M_\Sigma}\sin\varphi,\tag{6.2.4}$$

где

$$A_G=A+mMb^2/M_\Sigma,\quad B_G=B+ml^2+mMb^2/M_\Sigma,\quad C_G=C+ml^2\tag{6.2.5}$$

– главные центральные осевые моменты инерции системы на основном движении.

Единичный вектор $\mathbf{z}_G$, направленный по оси z_G, имеет в проекциях на оси $O\xi_G\eta_G\zeta_G$ составляющие $\mathbf{z}_G=(0,-\sin\alpha,\cos\alpha)^{\mathrm{T}}$ (рис. 6.2.1, в). Тогда осевой момент инерции системы относительно оси z_G имеет вид

$$J_{z_G}=\mathbf{z}_G^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{z}_G=(0,-\sin\alpha,\cos\alpha)\begin{pmatrix}J_{\xi G} & 0 & 0\\ 0 & J_{\eta G} & -J_{\eta_G\zeta_G}\\ 0 & -J_{\eta_G\zeta_G} & J_{\zeta G}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}=$$

$$=(0,\ -J_{\eta G}\sin\alpha-J_{\eta_G\zeta_G}\cos\alpha,\ J_{\eta_G\zeta_G}\sin\alpha+J_{\zeta G}\cos\alpha)\begin{pmatrix}0\\ -\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}=$$

$$=(J_{\eta G}\sin\alpha+J_{\eta_G\zeta_G}\cos\alpha)\sin\alpha+(J_{\eta_G\zeta_G}\sin\alpha+J_{\zeta G}\cos\alpha)\cos\alpha=$$

$$=J_{\eta G}\sin^2\alpha+J_{\zeta G}\cos^2\alpha+2J_{\eta_G\zeta_G}\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Преобразуем J_{z_G}, используя тригонометрические тождества

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2},\quad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2},\quad 2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha$$

получаем

$$J_{z_G}=(B_G-ml^2\sin^2\varphi)\sin^2\alpha+2\frac{mMlb}{M_\Sigma}\sin\varphi\sin\alpha\cos\alpha+\left(C_G-\frac{m^2l^2}{M_\Sigma}\sin^2\varphi\right)\cos^2\alpha=$$

$$=C_G-(C_G-B_G+ml^2\sin^2\varphi)\frac{1-\cos2\alpha}{2}+\frac{mlMb}{M_\Sigma}\sin\varphi\sin2\alpha-\frac{m^2l^2}{M_\Sigma}\sin^2\varphi\frac{1+\cos2\alpha}{2}=$$

$$=C_G-(C_G-B_G+ml^2u^2)\frac{1-\cos2\alpha}{2}+mlb'u\sin2\alpha-\frac{m^2l^2}{M_\Sigma}u^2\frac{1+\cos2\alpha}{2},\tag{6.2.6}$$

где введены такие обозначения

$$u = \sin\varphi,\ \ u \in [-1,\ 1];\ \ b' = b - \zeta_G = b - mb/M_\Sigma = Mb/M_\Sigma. \qquad (6.2.7)$$

В (6.2.7) b' – это расстояние от центра масс системы до плоскости маятников.

Приведем J_{z_G} к безразмерному виду

$$\widetilde{J}_{z_G} = \frac{J_{z_G}}{C_G} = 1 - \left(1 - \frac{B_G}{C_G} + \frac{ml^2}{C_G}\sin^2\varphi\right)\frac{1-\cos 2\alpha}{2} +$$

$$+\frac{mlb'}{C_G}\sin\varphi\sin 2\alpha\frac{m^2l^2}{C_G M_\Sigma}\sin^2\varphi\frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Введем безразмерные параметры

$$\widetilde{m} = ml^2/C_G,\ \ \widetilde{J} = C_G/(M_\Sigma l^2),\ \ \widetilde{B}_G = B_G/C_G,\ \ \widetilde{b} = b'/l. \qquad (6.2.8)$$

Учитывая, что

$$\frac{m^2l^2}{C_G M_\Sigma} = \frac{ml^2 ml^2 C_G}{C_G C_G l^2 M_\Sigma} = \widetilde{m}^2\widetilde{J},$$

получим

$$\widetilde{J}_{z_G} = \frac{J_{z_G}}{C_G} = 1 - (1 - \widetilde{B}_G + \widetilde{m}u^2)\frac{1-\cos 2\alpha}{2} +$$

$$+\widetilde{m}\widetilde{b}u\sin 2\alpha - \widetilde{m}^2\widetilde{J}\frac{1+\cos 2\alpha}{2}u^2. \qquad (6.2.9)$$

В дальнейшем считаем, что $B_G > A_G$. Только в этом случае при потере устойчивости основным движением система начнет поворачиваться вокруг оси ξ_G, что соответствует построенной схеме. Такое соотношение имеет место и в случае осесимметричного НТ ($A = B$). В дальнейшем для большей сжатости будем называть НТ: сплюснутым, если $C_G > B_G$; сферическим, если $C_G = B_G$; вытянутым, если $C_G < B_G$.

6.2.2. Условия устойчивости основного движения ИС

Введем в рассмотрение коэффициенты

$$a_{11} = \widetilde{m}^2\widetilde{J},\quad a_{22} = 1 - \widetilde{B}_G,\quad a_{12} = -\widetilde{m}\widetilde{b}. \qquad (6.2.10)$$

Тогда в окрестности основного движения (φ=0, α=0) с точностью до величин второго порядка малости включительно

$$\widetilde{J}_{z_G} \approx 1 - (a_{11}\varphi^2 + 2a_{12}\varphi\alpha + a_{22}\alpha^2). \qquad (6.2.11)$$

Для устойчивости основного движения необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма $a_{11}\varphi^2 + 2a_{12}\varphi\alpha + a_{22}\alpha^2$ имела минимум. Критерий Сильвестра дает такие условия устойчивости

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad \Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0,$$

из которых находим

$$1 - \widetilde{B}_G > 0, \quad \Delta_2 = \widetilde{m}^2[\widetilde{J}(1 - \widetilde{B}_G) - \widetilde{b}^{\,2}] > 0.$$

Эти два условия будут выполняться, если будет выполняться условие

$$\widetilde{J}(1 - \widetilde{B}_G) - \widetilde{b}^{\,2} > 0.$$

В размерном виде

$$\frac{C_G}{M_\Sigma l^2}\left(1 - \frac{B_G}{C_G}\right) - \frac{b'^2}{l^2} > 0, \quad \frac{1}{M_\Sigma}(C_G - B_G) - b'^2 > 0,$$

или

$$C_G - B_G - M_\Sigma b'^2 > 0. \tag{6.2.12}$$

С учетом (6.2.5)

$$C_G - B_G = C + ml^2 - \left(B + ml^2 + \frac{mMb^2}{M_\Sigma}\right) = C - B - \frac{mMb^2}{M_\Sigma},$$

$$C_G - B_G - M_\Sigma b'^2 = C - B - \frac{mMb^2}{M_\Sigma} - M_\Sigma b'^2 = C - B - \frac{mMb^2}{M_\Sigma} - M_\Sigma \frac{M^2 b^2}{M_\Sigma^2} =$$
$$= C - B - Mb^2.$$

Тогда условие (6.2.12) принимает вид

$$C - B - Mb^2 > 0. \tag{6.2.13}$$

Отметим, что маятники образуют АБ, способный устранять статическую неуравновешенность системы, расположенную в плоскости маятников. Условие (6.2.13) является конкретизацией условия (6.2.12) для рассматриваемой системы.

Из (6.2.13) находим критическое значение b, при превышении которого основное движение теряет устойчивость

$$b_c = \sqrt{(C - B)/M}. \tag{6.2.14}$$

Заметим, что значение b_c не зависит от массы маятников. Это значит, что даже маятники бесконечно малой массы, установленные на расстоянии, большем, чем b_c, могут привести к потере устойчивости основным движением. СТ на основном движении становится почти сферическим при условии, что

$$C_G - B_G = C - B - \frac{mMb^2}{M_\Sigma} = 0,$$

откуда находим

$$b^* = \sqrt{M_\Sigma (C - B)/(mM)} = b_c \sqrt{M_\Sigma / m}. \tag{6.2.15}$$

Если $b < b^*$, то устойчиво основное движение, а если $b > b^*$ – побочное.

6.2.3. Условия возникновения, существования и исчезновения разных установившихся движений

Необходимые условия существования экстремума $\tilde{J}_{z_G}$:

$$\frac{\partial \tilde{J}_{z_G}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \tilde{J}_{z_G}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\tilde{m}[u(1-\cos 2\alpha) - \tilde{b}\sin 2\alpha + \tilde{m}\tilde{J}u(1+\cos 2\alpha)]\cos\varphi = 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{J}_{z_G}}{\partial \alpha} = -(1 - \tilde{B}_G + \tilde{m}u^2)\sin 2\alpha + 2\tilde{m}\tilde{b}\,u\cos 2\alpha + \tilde{m}^2\tilde{J}u^2\sin 2\alpha = 0. \quad (6.2.16)$$

Решение системы (6.2.16) соответствующе основному движению

$$\alpha = 0, \quad \varphi = 0 \quad (u = 0). \quad (6.2.17)$$

Это движение существует при любых значениях параметров системы.

Найдем побочные движения.

Первое побочное движение – случай $\varphi = 0$ $(u = 0)$, $\alpha \neq 0$. Из (6.2.16) находим, что

$$\partial \tilde{J}_{z_G} \big/ \partial \varphi = \tilde{m}\tilde{b}\sin 2\alpha = 0, \quad \partial \tilde{J}_{z_G} \big/ \partial \alpha = -(1 - \tilde{B}_G)\sin 2\alpha = 0, \quad (6.2.18)$$

откуда находим первое побочное движение

$$\alpha = \pi/2, \quad \varphi = 0, \quad (u = 0). \quad (6.2.19)$$

Заметим, что это решение существует при любых значениях параметров системы.

Второе побочное движение – случай $\varphi = \pi/2$. В этом случае $\cos\varphi$, производная $\partial \tilde{J}_{z_G} \big/ \partial \varphi = 0$ и $u = 1$. Тогда

$$\partial \tilde{J}_{z_G} / \partial \alpha = -(1 - \tilde{B}_G + \tilde{m})\sin 2\alpha + 2\tilde{m}\tilde{b}\cos 2\alpha + \tilde{m}^2\tilde{J}\sin 2\alpha = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2\tilde{m}\tilde{b} / (1 - \tilde{B}_G + \tilde{m} - \tilde{m}^2\tilde{J}). \quad (6.2.20)$$

В размерном виде

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\dfrac{ml^2}{C_G}\dfrac{b'}{l}}{1 - \dfrac{B_G}{C_G} + \dfrac{ml^2}{C_G} - \left(\dfrac{ml^2}{C_G}\right)^2 \dfrac{C_G}{M_\Sigma l^2}} = \frac{2mlb'}{C_G - B_G + ml^2 - \dfrac{m^2l^2}{M_\Sigma}} =$$

$$= \frac{2mlM_\Sigma b'}{(C_G - B_G + ml^2)M_\Sigma - m^2l^2} = \frac{2mlMb}{(C_G - B_G + ml^2)M_\Sigma - m^2l^2} = \frac{2mMbl}{(C-B)M_\Sigma - mM(b^2 - l^2)}.$$

Окончательно, в размерном виде

$$\varphi = \pi/2, \quad \alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\frac{2mMbl}{(C-B)M_\Sigma - mM(b^2 - l^2)}\right]. \quad (6.2.21)$$

Это – второе побочное движение. Оно существует при любых значениях параметров системы.

Из (6.2.21) видно, что угол $\alpha = \pi/4$ тогда, когда

$$(C-B)M_\Sigma - mM(b^2 - l^2) = 0,$$

откуда

$$b_{\alpha=\pi/4} = \sqrt{M_\Sigma (C-B)/(mM) + l^2}\ .$$

Угол $\alpha \to \pi/2$ тогда, когда $b \to +\infty$.

Третье побочное движение – случай $0<\varphi<\pi/2$ ($u\neq 0$). Из первого уравнения в (6.2.16) найдем:

$$u = \tilde{b}\sin 2\alpha \big/ [1-\cos 2\alpha + \tilde{m}\tilde{J}(1+\cos 2\alpha)]\,. \tag{6.2.22}$$

В размерном виде

$$u = \frac{Mb\sin 2\alpha}{l[M_\Sigma(1-\cos 2\alpha) + m(1+\cos 2\alpha)]}\,. \tag{6.2.23}$$

Подставим (6.2.22) во второе уравнение системы (6.2.16), получим

$$\frac{\partial \tilde{J}_{z_G}}{\partial \alpha} = -\frac{(pv^2 - qv + r)\sin 2\alpha}{[1 - v + \tilde{m}\tilde{J}(1+v)]^2}, \tag{6.2.24}$$

где

$$p = (1-\tilde{m}\tilde{J})[(1-\tilde{B}_G)(1-\tilde{m}\tilde{J}) + \tilde{m}\tilde{b}^2], \quad q = (1+\tilde{m}\tilde{J})[(1-\tilde{B}_G)(1-\tilde{m}\tilde{J}) + \tilde{m}\tilde{b}^2],$$

$$r = p + 4\tilde{m}\tilde{J}(1-\tilde{B}_G), \quad v = \cos 2\alpha, \quad |v| \le 1\,. \tag{6.2.25}$$

Новые побочные установившиеся движения определяются решением уравнения

$$pv^2 - qv + r = 0, \quad v = \cos 2\alpha. \tag{6.2.26}$$

Корни этого уравнения

$$v_{1,2} = \frac{1+\tilde{m}\tilde{J}}{1-\tilde{m}\tilde{J}} \mp \frac{2\tilde{m}\tilde{J}}{1-\tilde{m}\tilde{J}}\sqrt{\frac{\tilde{b}^2}{\tilde{J}(1-\tilde{B}_G)(1-\tilde{m}\tilde{J}) + \tilde{m}\tilde{J}\tilde{b}^2}} = 1 + \frac{2\tilde{m}\tilde{J}}{1-\tilde{m}\tilde{J}}\left[1 \mp \tilde{b}\Big/\sqrt{\tilde{J}(1-\tilde{B}_G)(1-\tilde{m}\tilde{J}) + \tilde{m}\tilde{J}\tilde{b}^2}\right]$$

.

Здесь верхний знак "–" отвечает корню v_1, а знак "+" – v_2. Поскольку $|v| \le 1$, то данному условию удовлетворяет корень:

$$v = 1 + \frac{2\tilde{m}\tilde{J}}{1-\tilde{m}\tilde{J}}\left[1 - \tilde{b}\Big/\sqrt{\tilde{J}(1-\tilde{B}_G)(1-\tilde{m}\tilde{J}) + \tilde{m}\tilde{J}\tilde{b}^2}\right]. \tag{6.2.27}$$

В размерном виде

$$v = \frac{1 + \dfrac{m}{M_\Sigma}}{1 - \dfrac{m}{M_\Sigma}} - \frac{2\dfrac{m}{M_\Sigma}}{1 - \dfrac{m}{M_\Sigma}}\sqrt{\frac{\left(\dfrac{b'}{l}\right)^2}{\dfrac{C_G}{M_\Sigma l^2}\left(1 - \dfrac{B_G}{C_G}\right)\left(1 - \dfrac{m}{M_\Sigma}\right) + \dfrac{m}{M_\Sigma}\left(\dfrac{b'}{l}\right)^2}} =$$

$$= \frac{M_\Sigma + m}{M_\Sigma - m} - \frac{2mM_\Sigma b'}{M_\Sigma - m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(C_G - B_G)(M_\Sigma - m) + mM_\Sigma b'^2}} =$$

$$= \frac{1}{M_\Sigma - m}\left(M_\Sigma + m - \frac{2mM_\Sigma b'}{\sqrt{(C_G - B_G)(M_\Sigma - m) + mM_\Sigma b'^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{M}\left(M + 2m - \frac{2mb}{\sqrt{(C_G - B_G)/M + mb^2/(M+m)}} \right).$$

Или, окончательно

$$v = \cos 2\alpha = \frac{1}{M}\left(M + 2m - \frac{2mb}{\sqrt{(C-B)/M}} \right), \qquad (6.2.28)$$

где учтено, что

$$(C_G - B_G)/M + mb^2/(M+m) = (C-B)/M .$$

Заметим, что функция $v(b)$ монотонно убывает с увеличением b и $v(0) = (M + 2m)/M > 1$. Поэтому для малых b это движение не существует.

Ниже рассмотрим случаи, когда $v=\pm 1$.

Когда $v=1$, то $\alpha = 0$, $\varphi = 0$ и из (6.2.28) находим

$$v - 1 = \frac{2m}{M}\left(1 - \frac{b}{\sqrt{(C-B)/M}} \right) = 0 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{b}{\sqrt{(C-B)/M}} = 0,$$

откуда

$$b_{v=1} = b_c = \sqrt{(C-B)/M} . \qquad (6.2.29)$$

Из (6.2.29) следует, что это побочное движение зарождается из основного движения в точке $b_{v=1} = b_c$ (на оси b), в которой теряет устойчивость основное движение.

Когда $v = -1$, то $\cos 2\alpha = -1 \Rightarrow 2\alpha = \pi$, $\alpha = \pi/2$. Из (6.2.22) следует, что при этом $u = \sin\varphi = 0$, откуда находим, что $\varphi = 0$. Из (6.2.28) находим

$$v + 1 = \frac{2}{M}\left(M + m - \frac{mb}{\sqrt{(C-B)/M}} \right) = 0,$$

откуда

$$b_{v=-1} = \frac{M_\Sigma}{m}\sqrt{\frac{C-B}{M}} = \frac{M_\Sigma}{m} b_c = b^* \sqrt{\frac{M_\Sigma}{m}} . \qquad (6.2.30)$$

Из (6.2.30) следует, что это побочное движение перестает существовать в точке $b_{v=-1}$ (на оси b), и в этой точке оно сливается с первым побочным движением (6.2.19). Заметим, что для реальных КА $b_c \ll b^* \ll b_{v=-1}$.

Таким образом, необходимым условием существования этого побочного движения является

$$b_c \le b \le b_{v=-1}. \qquad (6.2.31)$$

Поскольку $0 < \varphi < \pi/2$, то $u = \sin\varphi$ из (6.2.23) можно подать в виде

$$u = \frac{Mb\sqrt{1-v^2}}{l[(M+m)(1-v)+m(1+v)]}. \qquad (6.2.32)$$

Подстановка в это уравнение v из (6.2.28) дает

$$u = \sin\varphi = \frac{1}{l}\sqrt{b\frac{M+2m}{m}\sqrt{\frac{C-B}{M}} - \frac{M+m}{m}\cdot\frac{C-B}{M} - b^2}.$$

В критических случаях $u = 0$ и $u = 1$. Подадим u в виде

$$u = \sin\varphi = \frac{1}{l}\sqrt{b(b_{v=-1}+b_c) - b_{v=-1}\cdot b_c - b^2} = \frac{1}{l}\sqrt{(b-b_c)(b_{v=-1}-b)}. \qquad (6.2.33)$$

При $b = b_c$ или $b = b_{v=-1}$ $u = \sin\varphi = 0$, что соответствует полученным выше результатам.

В случае, когда $u = 1$, из (6.2.33) находим

$$l^2 = (b-b_c)(b_{v=-1}-b),$$

или окончательно

$$b^2 - (b_{v=-1}+b_c)b + b_c b_{v=-1} + l^2 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются

$$b_{1/2,u=1} = \frac{b_c+b_{v=-1}}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b_c+b_{v=-1}}{2}\right)^2 - b_c b_{v=-1} - l^2} =$$

$$= \frac{b_c+b_{v=-1}}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(b_{v=-1}+b_c)(b_{v=-1}-b_c) - l^2}.$$

или окончательно

$$b_{1/2,u=1} = \frac{b_c+b_{v=-1}}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{b_{v=-1}^2 - b_c^2 - l^2}.$$

В явном виде

$$b_{1/2,u=1} = \frac{1}{2m}\left[(M+2m)\sqrt{\frac{C-B}{M}} \mp \sqrt{M(C-B)-4l^2m^2}\right]. \qquad (6.2.34)$$

где индексу 1 при b отвечает знак "–" в правой части, а индексу 2 – "+".

Введем в рассмотрение параметр

$$l^* = \frac{\sqrt{M(C-B)}}{2m}. \qquad (6.2.35)$$

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. $l < l^*$. При этом $M(C-B)-4l^2m^2 > 0$ и существуют не равные между собой b из (6.2.34), при которых $u=1$. Тогда третье побочное движение существует на таких интервалах

$$b \in [b_c, b_{1,\,u=1}]; \;\; b \in [b_{2,\,u=1}, b_{v=-1}]. \qquad (6.2.36)$$

Можно проверить, что при этом $b_c < b_{1,\,u=1}$ и $b_{2,\,u=1} < b_{v=-1}$.

Докажем, что при этом $b_c < b_{1,\,u=1}$:

$$\sqrt{\frac{C-B}{M}} < \frac{1}{2m}\left[(M+2m)\sqrt{\frac{C-B}{M}} - \sqrt{M(C-B)-4l^2m^2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2m}\left[M\sqrt{\frac{C-B}{M}} - \sqrt{M(C-B)-4l^2m^2}\right] > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{M(C-B)} > \sqrt{M(C-B)-4l^2m^2}\,.$$

Докажем, что при этом $b_{2,\,u=1} < b_{v=-1}$:

$$\frac{1}{2m}\left[(M+2m)\sqrt{\frac{C-B}{M}} + \sqrt{M(C-B)-4l^2m^2}\right] < \frac{M_\Sigma}{m}\sqrt{\frac{C-B}{M}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2m}\left[2(M+m)\sqrt{\frac{C-B}{M}} - (M+2m)\sqrt{\frac{C-B}{M}} - \sqrt{M(C-B)-4l^2m^2}\right] > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2m}\left[\sqrt{M(C-B)} - \sqrt{M(C-B)-4l^2m^2}\right] > 0\,.$$

В точках $b = b_{1,\,u=1}$ и $b = b_{2,\,u=1}$ получаем, что $u=1$ и угол $\varphi = \pi/2$. Следовательно, в этих точках третье побочное движение сливается со вторым. Таким образом, при увеличении параметра b в точке $b = b_c$ из основного движения зарождается третье побочное движение, которое потом исчезает в точке $b = b_{1,\,u=1}$, сливаясь со вторым. Потом, в точке $b = b_{2,\,u=1}$ третье побочное движение зарождается из второго, а в точке $b = b_{v=-1}$ ($u=0$, $\varphi = 0$) – исчезает, сливаясь с первым.

2. $l \geq l^*$. При этом $M(C-B)-4l^2m^2 \leq 0$ и не существуют не равных между собой b из (6.2.34), при которых $u=1$. Поэтому третье побочное движение существует для любого b из (6.2.31).

С увеличением параметра b в точке $b = b_c$ из основного движения зарождается третье побочное движение, которое потом в точке $b = b_{v=-1}$ сливается с первым, в связи с чем – исчезает.

6.2.4. Осевые моменты инерции на различных установившихся движениях, устойчивость установившихся движений

1. Осевые моменты инерции на разных установившихся движениях.

На основном движении

$$J_{z_G}^{(0)} = C_G = C + ml^2. \qquad (6.2.37)$$

На первом побочном движении

$$J_{z_G}^{(1)} = B_G = B + ml^2 + \frac{mMb^2}{M_\Sigma} = J_{z_G}^{(0)} + \frac{mM}{M_\Sigma}\left[b^2 - \frac{M_\Sigma(C-B)}{mM}\right]. \qquad (6.2.38)$$

На втором побочном движении

$$J_{z_G}^{(2)} = \frac{J_{\zeta G} + J_{\eta G}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{\zeta G} - J_{\eta G}}{2}\right)^2 + J_{\eta_G \zeta_G}^2}\,. \qquad (6.2.39)$$

где

$$J_{\eta_G} = B_G - ml^2 = B + mMb^2 / M_\Sigma,$$

$$J_{\zeta_G} = C_G - m^2 l^2 / M_\Sigma = C + mMl^2 / M_\Sigma, \quad J_{\eta_G \zeta_G} = mMlb / M_\Sigma. \qquad (6.2.40)$$

Подставив (6.2.40) в (6.2.39), получим

$$J_{z_G}^{(2)} = \frac{1}{2M_\Sigma}\{(C+B)M_\Sigma + mM(l^2 + b^2) +$$

$$+ \sqrt{[(C-B)M_\Sigma + mM(l^2 - b^2)]^2 + 4(mMlb)^2}\}. \qquad (6.2.41)$$

Чтобы найти J_{z_G} на третьем побочном движении, воспользуемся (6.2.6). Запишем это уравнение в виде

$$J_{z_G} = C_G - (C_G - B_G + ml^2u^2)\frac{1-v}{2} + \frac{mlMb}{M_\Sigma}u\sqrt{1-v^2} - \frac{m^2l^2}{M_\Sigma}u^2\frac{1+v}{2}. \qquad (6.2.42)$$

Подставляем в него v из (6.2.28) и u из (6.2.33), после преобразований получим

$$J_{z_G}^{(3)} = J_{z_G}^{(0)} + m\left(b - \sqrt{\frac{C-B}{M}}\right)^2,$$

$$b \in \begin{cases} [b_c,\, b_{v=-1}], \text{ если } l \ge l^*; \\ [b_c,\, b_{1,u=1}] \cup [b_{2,u=1},\, b_{v=-1}], \text{ если } l < l^*. \end{cases} \qquad (6.2.43)$$

Можно показать, что

$$J_{z_G}^{(3)} = J_{z_G}^{(1)} + \frac{m^2}{M_\Sigma}\left(b - \frac{M_\Sigma}{m}\sqrt{\frac{C-B}{M}}\right)^2. \qquad (6.2.44)$$

2. Устойчивость установившихся движений. Для ответа на вопрос, какое установившееся движение будет устойчивым в зависимости от величины параметров b и l, сравним между собой осевые моменты инерции J_{z_G} на разных движениях.

Соотношение между $J_{z_G}^{(1)}, J_{z_G}^{(0)}$ (B_G, C_G):

$$\exists b^*: J_{z_G}^{(1)}(b^*) = J_{z_G}^{(0)}(b^*) \quad \text{и} \quad \begin{cases} \forall b \in [0, b^*) & J_{z_G}^{(1)} < J_{z_G}^{(0)} \quad (B_G < C_G), \\ \forall b > b^* & J_{z_G}^{(1)} > J_{z_G}^{(0)} \quad (B_G > C_G). \end{cases} \qquad (6.2.45)$$

Соотношение между $J_{z_G}^{(2)}, J_{z_G}^{(0)}$:

$$\exists b_{20} = \sqrt{\frac{C-B+ml^2}{M}} : J_{z_G}^{(2)}(b_{20}) = J_{z_G}^{(0)}(b_{20}) \text{ и } \begin{cases} \forall b \in [0, b_{20}) & J_{z_G}^{(2)} < J_{z_G}^{(0)}, \\ \forall b > b_{20} & J_{z_G}^{(2)} > J_{z_G}^{(0)}. \end{cases} \qquad (6.2.46)$$

Существенно, что $b_{20} > b_c$.

Соотношение между $J_{z_G}^{(3)}, J_{z_G}^{(0)}$: при условии существования $J_{z_G}^{(3)}$ имеет место неравенство $J_{z_G}^{(3)} \geq J_{z_G}^{(0)}$, причем знак равенства будет только в точке $b = b_c$.

Соотношение между $J_{z_G}^{(2)}, J_{z_G}^{(1)}$:

- если $(C-B)M_\Sigma > m^2 l^2$, то

$$\exists b_{21} = \frac{M_\Sigma}{m}\sqrt{\frac{C-B}{M} - \frac{m^2 l^2}{MM_\Sigma}} : J_{z_G}^{(2)}(b_{21}) = J_{z_G}^{(1)}(b_{21}) \quad \text{и}$$

$$\begin{cases} \forall b \in [0, b_{21}) & J_{z_G}^{(2)} > J_{z_G}^{(1)}, \\ \forall b > b_{21} & J_{z_G}^{(1)} > J_{z_G}^{(2)}; \end{cases} \qquad (6.2.47)$$

- если $(C-B)M_\Sigma \leq m^2 l^2$, то $\forall b > 0 \;\; J_{z_G}^{(1)} > J_{z_G}^{(2)}$.

Соотношение между $J_{z_G}^{(3)}, J_{z_G}^{(1)}$: при условии существования $J_{z_G}^{(3)}$ имеет место неравенство $J_{z_G}^{(3)} \geq J_{z_G}^{(1)}$, причем знак равенства будет только в точке $b = b_{v=-1}$.

Соотношение между $J_{z_G}^{(3)}, J_{z_G}^{(2)}$:

- если $l \leq l^*$, то $J_{z_G}^{(3)} = J_{z_G}^{(2)} \Leftrightarrow b = b_{1/2,u=1}$, и $\forall b \in [b_c, b_{1,u=1}) \bigcup (b_{2,u=1}, b_{v=-1}]$ $J_{z_G}^{(3)} > J_{z_G}^{(2)}$;
- если $l > l^*$, то $\forall b \in [b_c, b_{v=-1}]$ $J_{z_G}^{(3)} > J_{z_G}^{(2)}$.

Отметим, что формально если $l < l^*$, то $\forall b \in (b_{1,u=1}, b_{2,u=1})$ $J_{z_G}^{(2)} > J_{z_G}^{(3)} > J_{z_G}^{(1)}$.

Следовательно, в зависимости от значений параметров l и b, условно асимптотически устойчивы такие движения (рис. 6.2.2).

Случай 1. Если $l < l^*$, то устойчиво: $\forall b \in [0, b_c]$ – основное движение (рис. 6.2.2, а); $\forall b \in [b_c,\ b_{1,u=1}]$ – побочное движение 3 (рис. 6.2.2, б); $\forall b \in [b_c,\ b_{1,u=1}]$ – побочное движение 2 (рис. 6.2.2, в); $\forall b \in [b_{2,u=1}, b_{v=-1}]$ – побочное движение 3 (рис. 6.2.2, г); $\forall b \in [b_{2,u=1}, b_{v=-1}]$ – побочное движение 1 (рис. 6.2.2, д). Углы α, φ в зависимости от b изменяются по закону:

$$\alpha(b) = \begin{cases} 0, \ \ b \in [0,\ b_c], \\ \dfrac{1}{2}\arccos\left[\dfrac{1}{M}\left(M + 2m - \dfrac{2mb}{\sqrt{(C-B)/M}}\right)\right], \ b \in (b_c,\ b_{1,u=1}) \bigcup (b_{2,u=1},\ b_{v=-1}), \\ \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\dfrac{2mMbl}{(C-B)M_{\Sigma} - mM(b^2 - l^2)}\right], \ b \in [b_{1,u=1},\ b_{2,u=1}], \\ \pi/2, \ \ b \in [b_{v=-1}, +\infty); \end{cases}$$

$$\varphi(b) = \begin{cases} 0, \ b \in [0,\ b_c] \bigcup [b_{v=-1}, +\infty), \\ \arcsin\left(\dfrac{1}{l}\sqrt{b\dfrac{M+2m}{m}\sqrt{\dfrac{C-B}{M}} - \dfrac{M+m}{m}\cdot\dfrac{C-B}{M} - b^2}\right), b \in (b_c,\ b_{1,u=1}) \bigcup (b_{2,u=1},\ b_{v=-1}), \\ \pi/2, \ b \in [b_{1,u=1},\ b_{2,u=1}]. \end{cases}$$

(6.2.48)

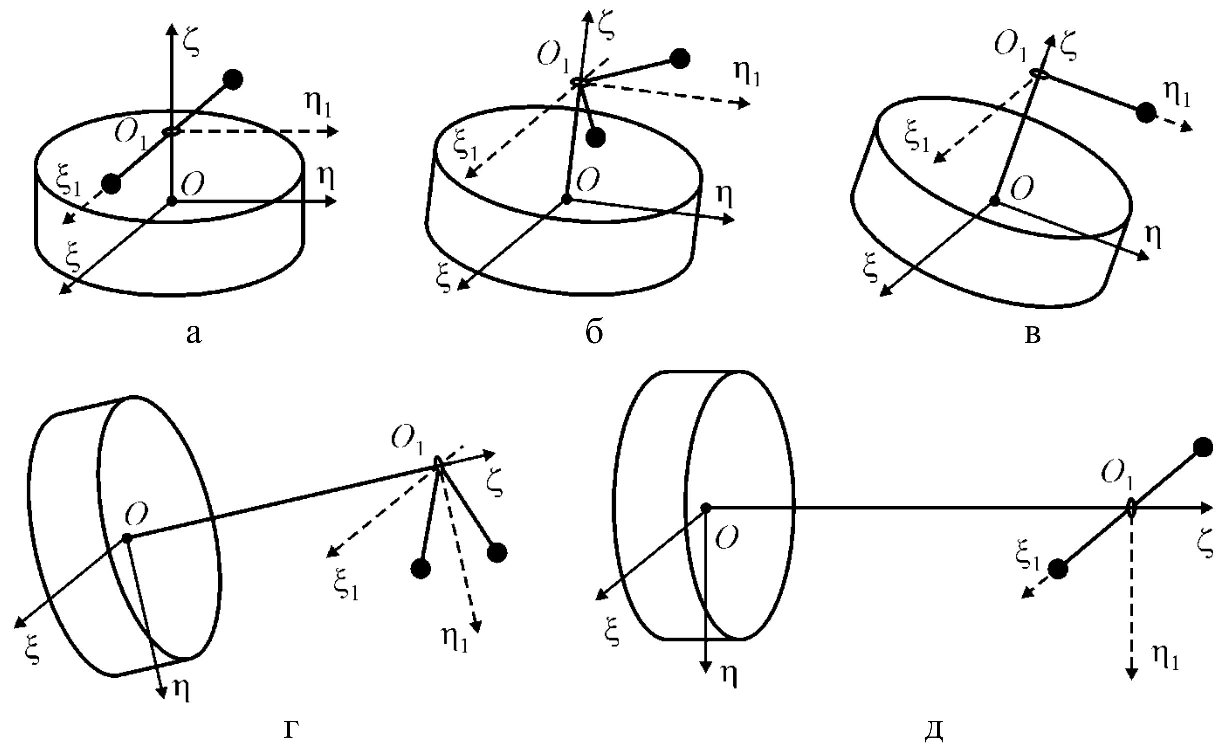


Рис. 6.2.2. Установившиеся движения системы

Случай 2. Если $\forall b \in [b_c, b_{\nu=-1}]$, то устойчиво: $\forall b \in [0, b_c]$ – основное движение (рис. 6.2.2, а); $\forall b \in [b_c, b_{\nu=-1}]$ – побочное движение 3 (рис. 6.2.2, б г); $\forall b \in [b_{\nu=-1}, +\infty)$ – побочное движение 1 (рис. 6.2.2, д). Углы α, φ в зависимости от b изменяются по закону:

$$\alpha(b) = \begin{cases} 0, \ b \in [0, \ b_c], \\ \dfrac{1}{2}\arccos\left[\dfrac{1}{M}\left(M + 2m - \dfrac{2mb}{\sqrt{(C-B)/M}}\right)\right], \ b \in (b_c, \ b_{\nu=-1}), \\ \pi/2, \ b \in [b_{\nu=-1}, +\infty); \end{cases}$$

$$\varphi(b) = \begin{cases} 0, \ b \in [0, b_c] \cup [b_{\nu=-1}, +\infty), \\ \arcsin\left(\dfrac{1}{l}\sqrt{b\dfrac{M+2m}{m}\sqrt{\dfrac{C-B}{M}} - \dfrac{M+m}{m}\cdot\dfrac{C-B}{M} - b^2}\right), \ b \in (b_c, b_{\nu=-1}). \end{cases} \qquad (6.2.49)$$

Полученные формулы для угла нутации (6.2.48), (6.2.49) можно использовать для: подбора параметров маятниковых или шаровых АБ; оценки остаточного угла нутации при использовании маятникового, шарового или жидкостного АБ.

6.2.5. Пример оценки остаточного угла нутации

Пример 1 – случай, когда $l < l^*$. Расчеты проводились для таких значений параметров системы:

$$M = 50 \ кг, \ B = 75 \ кг \cdot м^2, \ C = 100 \ кг \cdot м^2, \ m = 1 \ кг, \ l = 0{,}75 \ м .$$

Были найдены критические значения параметра b:

$$b_c = 0{,}707 \ м, b_{1,u=1} = 0{,}723 \ м, b_{2,u=1} = 36{,}047 \ м, b_{\nu=-1} = 36{,}062 \ м, b^* = 5{,}05 \ м .$$

Заметим, что поскольку

$$l = 0{,}75 \ м < l^* = \sqrt{M(C-B)}\big/(2m) \approx 17{,}7 \ м ,$$

то существуют действительные положительные $b_{1,u=1}, b_{2,u=1}$.

На рис. 6.2.3 показаны графики изменения углов φ, α в зависимости от расстояния b. Общую картину дает рис. 6.2.3, а. Остальные рисунки детализируют изменение углов на характерных участках.

$\forall b \in [0, b_c]$ – устойчиво основное движение (рис. 6.2.2, а).

$\forall b \in [b_c, b_{1,u=1}]$ – устойчиво третье побочное движение (рис. 6.2.2, б).

На этом участке несколько увеличивается угол α (рис. 6.2.3, г) и очень стремительно растет от 0 до 90^0 угол φ (рис. 6.2.3, е).

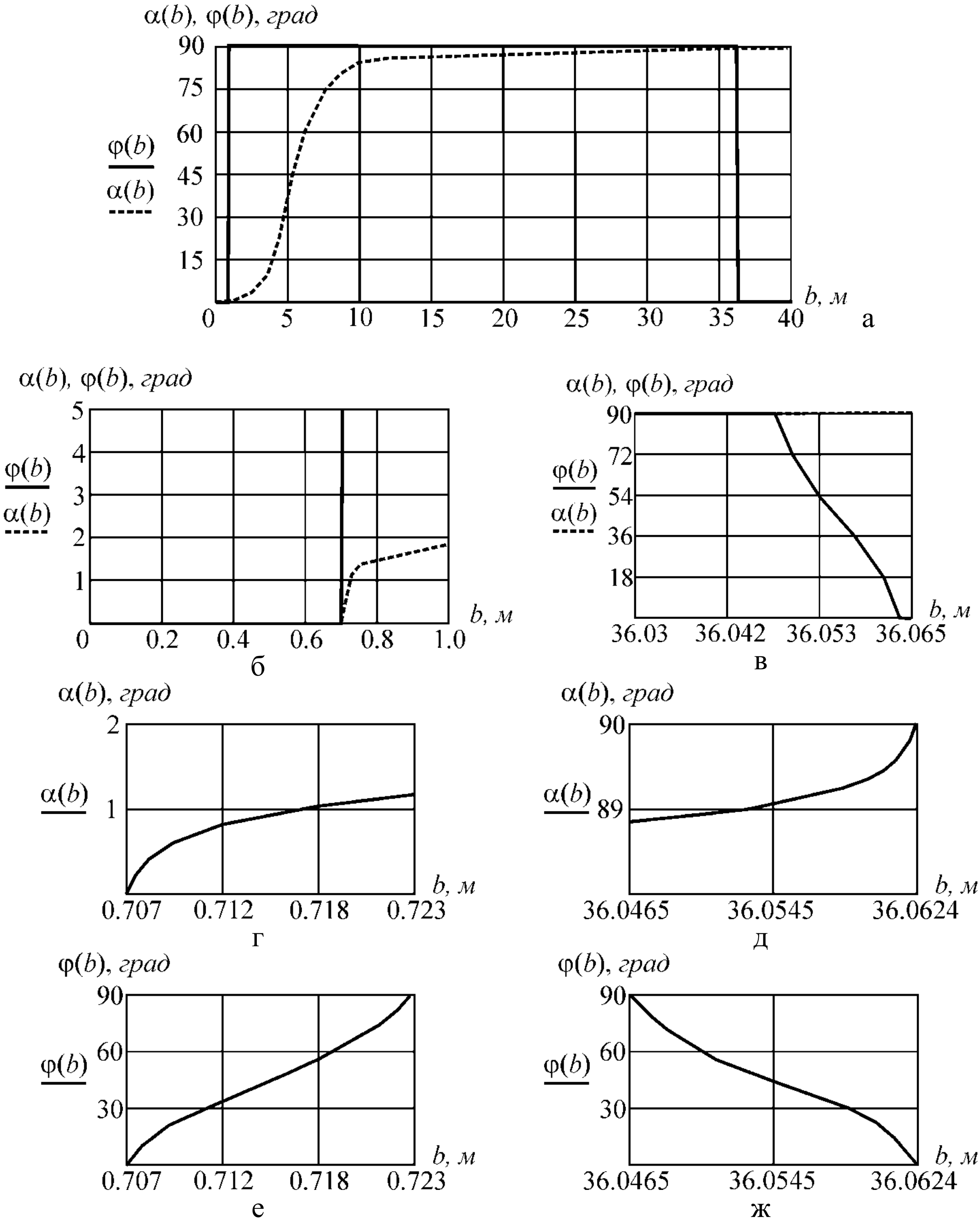


Рис. 6.2.3.

$\forall b \in [b_{1,u=1}, b_{2,u=1}]$ – устойчиво второе побочное движение (рис. 6.2.2, в). На этом участке угол α постепенно растет почти до 89^0, а угол $\varphi = 90^0$, то есть маятники максимально сближены (рис. 6.2.3, а).

$\forall b \in [b_{2,u=1}, b_{v=-1}]$ – устойчиво третье побочное движение (рис. 6.2.2, г). На этом участке угол α растет до 90^0 (рис. 6.2.3, д) и очень стремительно уменьшается от 90^0 до 0 угол φ (рис. 6.2.3, ж).

$\forall b \in [b_{v=-1}, +\infty)$ – устойчиво первое побочное движение (рис. 6.2.2, д).

Заметим, что на основном движении СТ остается сплюснутым относительно продольной оси НТ до $b = b^* = 6{,}005\ м$. А устойчивость основного движения теряется уже при $b = b_c = 0{,}707\ м$. Следовательно, для устойчивости основного движения не достаточно, чтобы на нем НТ было сплюснутым. Надо, чтобы расстояние b было ограничено сверху величиной b_c.

Пример 2 – случай, когда $l > l^*$. Расчеты проводились для таких значений параметров системы:

$$M = 50\ кг,\ B = 75\ кг \cdot м^2,\ C = 100\ кг \cdot м^2,\ m = 4\ кг,\ l = 5\ м.$$

Были найдены критические значения параметра b:

$$b_c = 0{,}707\ м,\quad b_{v=-1} = 9{,}546\ м,\quad b^* = 2{,}598\ м.$$

Заметим, что поскольку

$$l = 5\ м > l^* = \sqrt{M(C-B)}\big/(2m) \approx 4{,}42\ м,$$

то не существуют действительные положительные $b_{1,u=1}, b_{2,u=1}$.

На рис. 6.2.4 показан график изменения углов φ, α в зависимости от b.

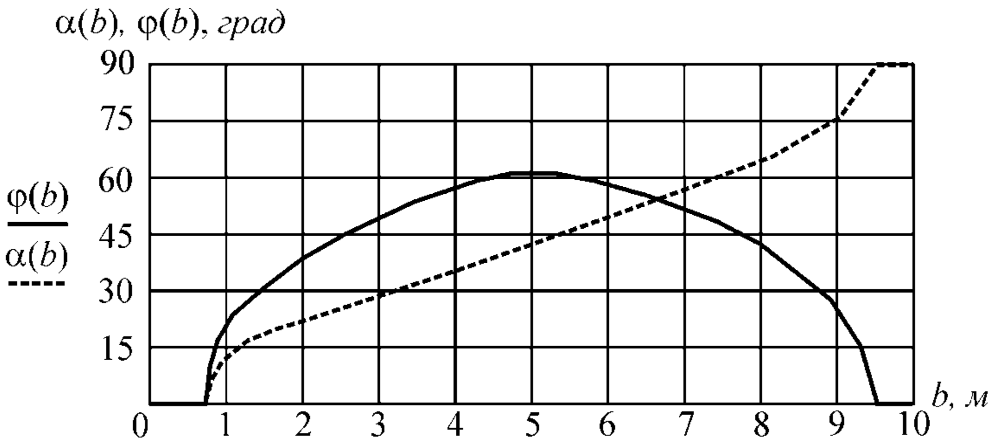


Рис. 6.2.4.

$\forall b \in [0, b_c]$ – устойчиво основное движение (рис. 6.2.2, а).

$\forall b \in [b_c, b_{v=-1}]$ – устойчиво третье побочное движение (рис. 6.2.2, б, г). На этом участке угол α увеличивается от 0 до 90^0, а угол φ увеличивается от 0 до максимума (приблизительно до 60^0), а потом – уменьшается до 0.

$\forall b \in [b_{v=-1}, +\infty)$ – устойчиво первое побочное движение (рис. 6.2.2, д).

Заметим, что на основном движении СТ остается сплюснутым относительно продольной оси НТ до $b = b^* = 2{,}598\ м$. А устойчивость основного движения теряется уже при $b = b_c = 0{,}707\ м$. Следовательно, для устойчивости основного движения не достаточно, чтобы на нем НТ было сплюснутым. Надо, чтобы расстояние b было ограничено сверху величиной b_c.

Пример 3 – оценка окончательного угла нутации для НТ с жидкостным АБ. Расчетные данные взяты для бразильского КА SACI–2 [63, 64]:

$$C = 5{,}05\ кг \cdot м^2,\quad B = 5\ кг \cdot м^2,\quad M_\Sigma = 85\ кг,\quad m = 0{,}066\ кг,\quad b = 0{,}18\ м.$$

Кольцевой демпфер – тороидальная трубка со срединным радиусом $l = 0{,}095\ м$, диаметром поперечного сечения трубки $d = 0{,}019\ м$, частично заполненной спиртом массой $m = 0{,}066\ кг$ ($m/M \approx 7{,}76 \cdot 10^{-4}$). Соотношение $2l/d = 10 >> 1$, говорит о хороших автобалансирующих свойствах этого АБ и о применимости формул (6.2.48) (6.2.49). Высота НТ 0,6 *м*, центр масс – посредине, что ограничивает сверху параметр b величиной $b_{\max} = 0{,}6/2 = 0{,}3\ м$.

Расчеты дают следующие величины:

$$l^* = 15{,}6118\ м,\ b_c = 0{,}0243 м,\ b_{1,\,u=1} = 0{,}0246\ м,\ b^* = 0{,}8707\ м,$$
$$b_{2,\,u=1} = 31{,}2475\ м,\ b_{v=-1} = 31{,}2478\ м.$$

Поскольку $l < l^*$, то угол α в зависимости от b изменяется по закону (6.2.48). Графики его изменения приведены на рис. 6.2.5, где α – в градусах, b – метрах.

Остаточный угол нутации $\alpha(0{,}18) = 1{,}332\ град$. При максимальном удалении АБ от центра масс НТ $\alpha(0{,}30) = 2{,}406\ град$, при этом НТ будет сплюснутым ("устойчивым"), поскольку b с запасом меньше предельного значения $b^* = 0{,}8707\ м$, но основное движение потеряет устойчивость уже при $b > b_c = 0{,}0243\ м$.

Поскольку в работах [63, 64] числовым моделированием был найден остаточный угол нутации, то методом проб была обоснована целесообразность изменения величин осевых моментов инерции НТ: $C = 10{,}1\ кг \cdot м^2$, $B = 7{,}22\ кг \cdot м^2$. Расчеты показывают, что при этом $b_c = 0{,}1841\ м$, что лишь не намного больше $b = 0{,}18\ м$, но обеспечивает устойчивость основного движения. Заметим, что дальнейшее, даже совсем незначительное отдаление АБ от центра масс НТ приведет к потере устойчивости основным движением.

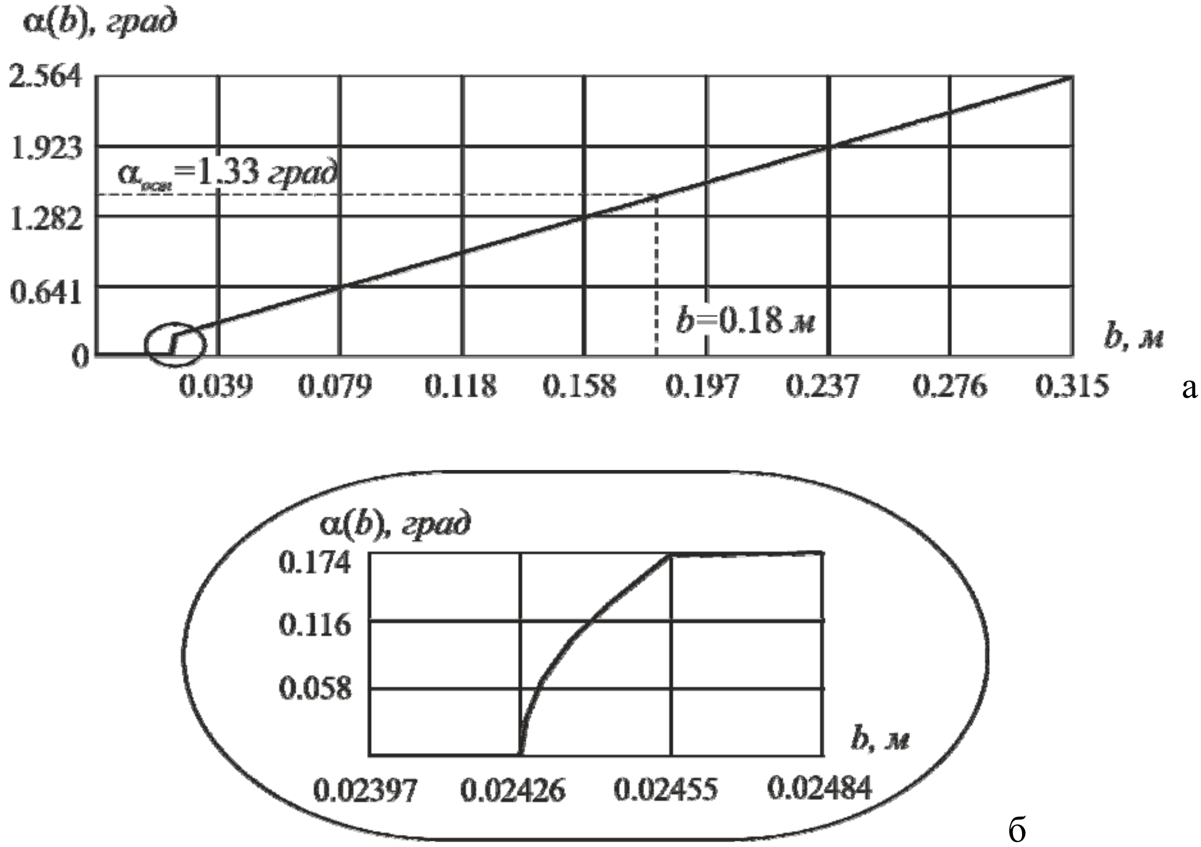


Рис. 6.2.5. Графики изменения угла нутации α

Проведенные исследования и числовой пример показывают, каким образом и насколько ПТ в виде маятниковых, шаровых или кольцевых АБ изменяют поведение НТ. Необходимо учесть, что ПТ не только увеличивают число возможных установившихся движений, но и сильно сужают область устойчивости основного движения. Неверная установка АБ на НТ ($b > b_c$) может привести к возникновению окончательного угла нутации даже в случае "устойчивого" с большим запасом НТ.

Выводы главы 6

1. Принцип действия различных типов пассивных демпферов угла нутации (маятниковых, шаровых и жидкостных) во время устранения угла нутации одинаковый.

2. Приближенный закон изменения угла нутации можно использовать для любых типов пассивных демпферов угла нутации, причем он выполняется лишь для больших углов нутации и не выполняется для малых.

3. Пассивные демпферы угла нутации эффективны для уменьшения угла нутации только в случае сплюснутого НТ.

4. На скорость изменения угла нутации существенно влияют соотношения между осевыми моментами инерции НТ и коэффициент сил вязкого сопротивления.

5. При превышении определенного предельного расстояния от центра масс НТ до плоскости уравновешивания АБ, появляется остаточный угол нутации, а побочные движения при этом становятся устойчивыми.

ГЛАВА 7.
ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА УРАВНОВЕШИВАНИЯ АБ НТ, СОВЕРШАЮЩЕГО ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Построены модели ИС, в которых НТ движется плоскопараллельно, внутри НТ находится материальная точка, создающая статическую неуравновешенность и для ее уравновешивания на продольную ось НТ насажены n математических маятников или внутри НТ установлены два связанных АТТ, которые могут вращаться вместе вокруг продольной оси НТ и в противоположных направлениях на равные углы вокруг поперечных осей НТ.

В рамках модели НТ с двумя или n одинаковыми маятниками найдены установившиеся движения системы, исследовано: их условная устойчивость энергетическим методом; устойчивость основных движений первым методом Ляпунова при условии, что масса маятников намного меньше массы НТ. С помощью числового эксперимента исследовано влияние разных параметров системы на скорость затухания переходных процессов в случае двух маятников.

В рамках модели НТ с двумя одинаковыми связанными АТТ найдены установившиеся движения системы и исследована: их условная устойчивость энергетическим методом; устойчивость основных движений первым методом Ляпунова.

ISBN 978-617-7197-24-8

7.1. Плоская модель уравновешивания НТ многомаятниковым АБ

7.1.1. Описание модели системы

В рассматриваемую ИС входит вращающееся НТ массой M (рис. 7.1.1). В идеальном случае оно должно вращаться вокруг собственной главной центральной оси инерции Z, проходящей через центр масс НТ – точку O (направлена на нас). Пусть C - осевой момент инерции НТ относительно оси Z. Внутри НТ находится неподвижная относительно НТ материальная точка массой m_0, создающая статическую неуравновешенность. Для компенсации неуравновешенности внутри НТ установлен многомаятниковый АБ (рис. 7.1.1). Он состоит из n математических маятников, насаженных на ось Z. Масса j-го маятника m_j, длина l_j, осевой момент инерции относительно оси, на которую насажен, $m_j l_j^2$. Заметим, что в силу особенностей системы любая ось, параллельная оси Z – главная ось инерции системы.

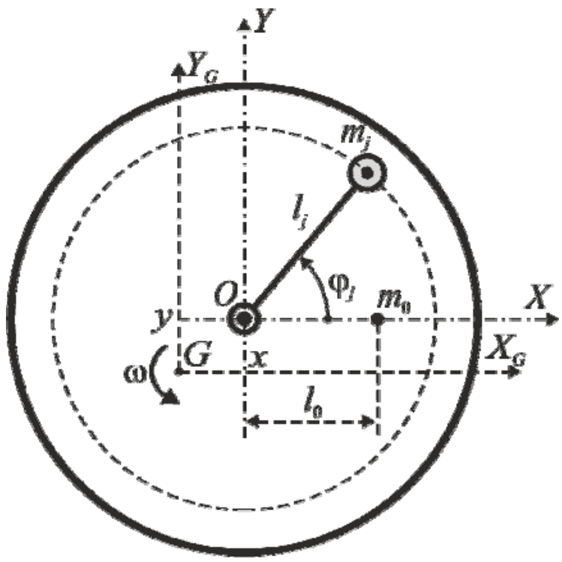


Рис. 7.1.1. Модель НТ и многомаятникового АБ

Для описания движения НТ введем оси OXY, выходящие из точки O и жестко связанные с НТ. Ось X направим в сторону массы m_0, а ось Y так, чтобы система координат была правая.

Так как система изолированная, то центр масс системы – точка G движется равномерно, прямолинейно. Не ограничивая общности, считаем, что точка G неподвижна. В соответствии с законом сохранения момента количества движения системы $\mathbf{K}_G = \mathbf{const}$. Введем неподвижные оси

$G\xi\eta\zeta$, причем ось ζ направим вдоль вектора $\mathbf{K}_G$ (на рис. 7.1.1 оси $G\xi\eta\zeta$ – не показаны). Оси $OXYZ$ жестко связаны с НТ, описывают его движение относительно осей $G\xi\eta\zeta$ и определяют его текущее положение.

Плоскопараллельное движение НТ будем рассматривать как движение осей OXY относительно осей $G\xi\eta$. После поворота осей $G\xi\eta$ вокруг оси $\zeta = Z$ на угол γ получаем оси GX_GY_G. Оси GX_GY_G переходят в оси OXY после поступательных перемещений на x, y вдоль соответствующих координатных осей (рис. 7.1.1). Угловая скорость вращения НТ $\omega = \dot{\gamma}$.

Масса m_0 относительно осей $OXYZ$ имеет координаты $(l_0, 0, 0)$.

Положение маятников относительно НТ определяется углами φ_j, отсчитываемыми от положительного направления оси X. При движении маятника относительно НТ на него действует момент сил вязкого сопротивления $-H_j l_j^2 \dot{\varphi}_j$, где $H_j l_j^2$ – коэффициент момента сил вязкого сопротивления, приведенный к плечу l_j, $\dot{\varphi}_j$ – относительная угловая скорость вращения маятника.

Пусть согласно начальных условий НТ двигалось плоскопараллельно. Силы, возникающие при движении маятников (шаров) относительно НТ, не будут выводить его из плоскопараллельного движения. Поэтому считаем, что НТ и дальше движется плоскопараллельно.

Считаем, что ось Z – наибольшего момента инерции. Иначе считаем, что существует активная система, поддерживающая плоскопараллельное движение НТ, причем, в силу указанных особенностей системы, ее масса и создаваемые силы – малы и их не учитываем.

Будем выделять основные (установившиеся) движения, в которых масса m_0 уравновешивается маятниками, точки O и G совпадают и НТ вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг оси $Z = Z_G$.

Ниже будем полагать, что

$$m_0 l_0 \le \sum_{j=1}^{n} m_j l_j , \tag{7.1.1}$$

причем данное неравенство – достаточное условие существования основных движений. Вместе с основными движениями существуют побочные (установившиеся) движения, в которых масса m_0 не уравновешена и НТ вращается вокруг оси Z_G, не совпадающей с осью Z. Отметим, что ось Z_G – главная центральная ось инерции системы.

Таким образом, плоское движение ИС определяют $n+3$ обобщенных координат

$$\varphi_j, / \, j = \overline{1,n} \, /, \gamma, x, y .$$

Заметим, что угол γ – циклическая координата.

7.1.2. Уравнения движения системы

1. Массо-инерционные характеристики ИС. Введем в рассмотрение абсолютные радиус-векторы, выходящие из неподвижного начала отчета – точки G, определяющие абсолютное положение: $\mathbf{r}_O$ – центра масс НТ; $\mathbf{r}_G$ – точки G, ($\mathbf{r}_G = 0$); $\mathbf{r}_0$ – материальной точки, создающей неуравновешенность; $\mathbf{r}_j$ – сосредоточенной массы j-го маятника, $/\, j = \overline{1, n}\, /$.

Введем относительные радиус-векторы, выходящие из точки O и определяющие положения относительно НТ: $\boldsymbol{\rho}_0$ – материальной точки, создающей неуравновешенность; $\boldsymbol{\rho}_j$ – сосредоточенной массы j-го маятника, $/\, j = \overline{1, n}\, /$.

Связь между абсолютными и относительными радиус-векторами:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}_0, \;\; \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}_j, \;\; /\, j = \overline{1, n}\, /. \qquad (7.1.2)$$

В проекциях на координатные оси $OXYZ$:

$$\mathbf{r}_O = (x,\ y,\ 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\rho}_0 = (l_0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}, \;\; \boldsymbol{\rho}_j = (l_j \cos\varphi_j,\ l_j \sin\varphi_j,\ 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{r}_j = (x + l_j \cos\varphi_j,\ \ y + l_j \sin\varphi_j,\ \ 0)^{\mathrm{T}}, \quad /\, j = \overline{1, n}\, /. \qquad (7.1.3)$$

Суммарная масса системы

$$M_\Sigma = M + m_0 + \sum_{j=1}^{n} m_j\ . \qquad (7.1.4)$$

Осевой момент инерции системы относительно оси Z

$$J_z = C + m_0 l_0^2 + \sum_{j=1}^{n} m_j l_j^2\ . \qquad (7.1.5)$$

Осевой момент инерции системы относительно оси Z_G

$$J_{z_G} = J_z - M_\Sigma (x^2 + y^2)\,. \qquad (7.1.6)$$

2. Первую группу уравнений движения получим из закона сохранения движения центра масс системы:

$$M_\Sigma \mathbf{r}_G = M\mathbf{r}_O + m_0 \mathbf{r}_0 + \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{r}_j = 0\,, \qquad (7.1.7)$$

Отметим, что уравнение (7.1.7) является вторым интегралом.

Подставляя (7.1.2) в (7.1.7), получим закон сохранения движения центра масс системы в относительных радиус-векторах:

$$M_\Sigma \mathbf{r}_G = M\mathbf{r}_O + m_0(\mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}_0) + \sum_{j=1}^{n} m_j(\mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}_j) =$$

$$= M_\Sigma \mathbf{r}_O + m_0 \boldsymbol{\rho}_0 + \sum_{j=1}^{n} m_j \boldsymbol{\rho}_j = 0. \qquad (7.1.8)$$

Вторые интегралы в проекциях на оси $GX_GY_GZ_G$ имеют вид**:**

$$M_\Sigma x + m_0 l_0 + \sum_{j=1}^{n} m_j l_j \cos\varphi_j = 0, \quad M_\Sigma y + \sum_{j=1}^{n} m_j l_j \sin\varphi_j = 0. \qquad (7.1.9)$$

3. Вторую группу уравнений движения получим из закона сохранения кинетического момента относительно центра масс системы. Приняв за переносное движение вращение системы вокруг точки G вместе с осями $GX_GY_GZ_G$, а за относительное – движение системы относительно осей $GX_GY_GZ_G$, получим:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_G^e + \mathbf{K}_G^r = \mathbf{const}, \qquad (7.1.10)$$

где $\mathbf{K}_G^e$ – кинетический момент переносного движения; $\mathbf{K}_G^r$ – кинетический момент относительного движения. Отметим, что уравнение (7.1.10) является первым интегралом.

В проекциях на оси $GX_GY_GZ_G$ векторы угловой скорости вращения осей $GX_GY_GZ_G$ и **кинетического момента переносного движения** имеют, соответственно, вид:

$$\mathbf{\Omega} = (0, \quad 0, \quad \omega)^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{K}_G^e = (0, \ 0, \ K_{z_G}^e)^{\mathrm{T}}, \qquad (7.1.11)$$

где

$$K_{z_G}^e = J_{z_G}\omega. \qquad (7.1.12)$$

Кинетический момент относительного движения имеет вид:

$$\mathbf{K}_G^r = \mathbf{r}_O \times M\mathbf{v}_O^r + \mathbf{r}_0 \times m_0 \mathbf{v}_0^r + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{v}_j^r, \qquad (7.1.13)$$

где $\mathbf{v}_O^r$, $\mathbf{v}_0^r$, $\mathbf{v}_j^r$ – соответственно относительные скорости точки O, материальной точки, создающей неуравновешенность, и сосредоточенной массы j-го маятника.

Заметим, что:

$$\mathbf{v}_0^r = \mathbf{v}_O^r, \ \mathbf{v}_j^r = \mathbf{v}_O^r + \mathbf{u}_j, \ / \, j = \overline{1,n} \, /, \qquad (7.1.14)$$

где $\mathbf{u}_j$ – относительная скорость j-го маятника (вызвана изменением соответствующего угла поворота маятника). В проекциях на оси $GX_GY_GZ_G$:

$$\mathbf{u}_j = l_j \dot\varphi_j (-\sin\varphi_j, \ \cos\varphi_j, \ 0)^{\mathrm{T}}, \ / \, j = \overline{1,n} \, /. \qquad (7.1.15)$$

Подставляя (7.1.14) в (7.1.13) и учитывая равенство (7.1.7), получим:

$$\mathbf{K}_G^r = \mathbf{r}_O \times M\mathbf{v}_O^r + \mathbf{r}_0 \times m_0 \mathbf{v}_O^r + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j \times m_j (\mathbf{v}_O^r + \mathbf{u}_j) =$$

$$= \left(M\mathbf{r}_O + m_0 \mathbf{r}_0 + \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{r}_j \right) \times \mathbf{v}_O^r + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{u}_j. \qquad (7.1.16)$$

Тогда

$$\mathbf{K}_G^r = (0, \quad 0, \quad K_{z_G}^r)^{\mathrm{T}}, \tag{7.1.17}$$

где

$$K_{z_G}^r = \sum_{j=1}^{n} m_j l_j \dot{\varphi}_j (l_j + x\cos\varphi_j + y\sin\varphi_j). \tag{7.1.18}$$

На основном движении маятники устранили неуравновешенность, их относительное движение прекратилось, и система вращается с постоянной угловой скоростью ω_0, как одно жесткое целое, вокруг оси $Z_G = Z = \zeta$. При этом $x, y, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}_j = 0$, вектор $\mathbf{K}_G$ направлен вдоль оси Z_G и имеет модуль:

$$K = J_z \omega_0. \tag{7.1.19}$$

Следовательно, **первый интеграл** в проекциях на ось Z_G имеет вид**:**

$$J_{z_G}\omega + \sum_{j=1}^{n} m_j l_j \dot{\varphi}_j (l_j + x\cos\varphi_j + y\sin\varphi_j) = J_z \omega_0; \tag{7.1.20}$$

4. Третью группу n дифференциальных уравнений движения маятников найдем с помощью теоремы об изменении момента количества движения материальной точки. Для j -го маятника теорема имеет вид:

$$\left(d'\mathbf{K}_{O_j} / dt + \mathbf{\Omega}_{OXYZ} \times \mathbf{K}_{O_j} + \boldsymbol{\rho}_j \times m_j \mathbf{a}_O \right) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{M}_{O_j}^{(e)} \cdot \mathbf{k}, \ / \ j = \overline{1, n} \ /, \tag{7.1.21}$$

где: $\mathbf{K}_{O_j}$ – вектор момента количества движения j-го маятника, найденный относительно точки O; $d'\mathbf{K}_{O_j} / dt$ – его локальная производная по времени в подвижной системе координат $OXYZ$; $\mathbf{\Omega}_{OXYZ}$ – вектор угловой скорости вращения подвижных осей $OXYZ$; $\mathbf{a}_O$ – абсолютное ускорение точки O; $\mathbf{k}$ – единичный вектор, направленный вдоль оси Z; $\mathbf{M}_{O_j}^{(e)}$ – главный момент внешних сил, действующих на j-й маятник, найденный относительно точки O.

В свою очередь:

$$\mathbf{K}_{O_j} = \mathbf{J}_j \mathbf{\Omega}_j, \ / \ j = \overline{1, n} \ /, \tag{7.1.22}$$

где: $\mathbf{\Omega}_j$ – вектор абсолютной угловой скорости вращения j-го маятника; $\mathbf{J}_j$ – тензор инерции маятника, найденный относительно точки O.

В проекциях на координатные оси $OXYZ$ и относительно этих осей:

$$\mathbf{\Omega}_{OXYZ} = \mathbf{\Omega} = (0, \ 0, \ \omega)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{\Omega}_j = (0, \ 0, \ \omega + \dot{\varphi}_j)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{J}_j = m_j l_j^2 \begin{bmatrix} \sin^2\varphi_j & -\cos\varphi_j \sin\varphi_j & 0 \\ -\cos\varphi_j \sin\varphi_j & \cos^2\varphi_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{Oj} = m_j l_j^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_z + \dot{\varphi}_j \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_O = \begin{bmatrix} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x - \dot{\omega} y \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y + \dot{\omega} x \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{M}_{O_j}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -H_j l_j^2 \dot{\varphi}_j \end{bmatrix}. \qquad (7.1.23)$$

Подставляя (7.1.23) в (7.1.21), получим уравнения движения маятников:

$$m_j l_j^2 (\dot{\omega} + \ddot{\varphi}_j) + H_j l_j^2 \dot{\varphi}_j + m_j l_j [(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y + \dot{\omega} x)\cos\varphi_j -$$
$$-(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x - \dot{\omega} y)\sin\varphi_j] = 0, \ /\, j = \overline{1,n}\,/. \qquad (7.1.24)$$

5. Уравнение движения ИС в случае *n* одинаковых маятников. В случае n одинаковых математических маятников: $m_j = m, l_j = l$, $/\, j = \overline{1,n}\,/$. Пусть при относительном движении на маятники действуют моменты сил вязкого сопротивления с одинаковым коэффициентом: $H_j = H$, $/\, j = \overline{1,n}\,/$.

Осевой момент инерции системы относительно оси Z имеет вид:

$$J_z = C + m_0 l_0^2 + nml^2. \qquad (7.1.25)$$

Осевой момент инерции системы относительно оси Z_G имеет вид:

$$J_{zG} = C + m_0 l_0^2 + nml^2 - M_\Sigma (x^2 + y^2), \qquad (7.1.26)$$

где $M_\Sigma = M + m_0 + nm$.

Уравнения движения имеют вид:

- вторые интегралы

$$M_\Sigma x + m_0 l_0 + ml\sum_{j=1}^{n}\cos\varphi_j = 0, \ M_\Sigma y + ml\sum_{j=1}^{n}\sin\varphi_j = 0; \qquad (7.1.27)$$

- первый интеграл

$$J_{zG}\omega + ml\sum_{j=1}^{n}\dot{\varphi}_j (l + x\cos\varphi_j + y\sin\varphi_j) = J_z\omega_0; \qquad (7.1.28)$$

- уравнения движения маятников

$$ml^2 (\dot{\omega} + \ddot{\varphi}_j) + Hl^2 \dot{\varphi}_j + ml[(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y + \dot{\omega} x)\cos\varphi_j -$$
$$-(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x - \dot{\omega} y)\sin\varphi_j] = 0, \ /\, j = \overline{1,n}\,/. \qquad (7.1.29)$$

7.1.3. Приведение уравнений движения к безразмерному виду

Рассматриваем случай n одинаковых маятников. Из уравнений (7.1.27)-(7.1.29), видно, что в общем случае динамику системы характеризуют восемь размерных параметров (и один безразмерный – n):

$$M, \ m_0, \ l_0, \ m, \ l, \ C, \ H, \ \omega_0.$$

Для выделения существенно различных параметров приведем уравнения (7.1.27)-(7.1.29) к безразмерному виду. Введем характерный размер r^* и характерный масштаб времени $t^* = 1/\omega^*$. Тогда, новое безразмерное время и переменные

$$\tau = t/t^* = \omega^* t, \quad \xi = x/r^*, \quad \eta = y/r^*. \qquad \text{(а)}$$

Между производной по времени t и производной по безразмерному времени τ существует такая связь

$$\frac{d\,\bullet}{dt} = \frac{d\,\bullet}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \omega^* \frac{d\,\bullet}{d\tau}, \quad \left(\dot{(\bullet)} = \omega^* (\bullet)' \right). \qquad \text{(б)}$$

где штрих справа над величиной означает производную по безразмерному времени.

С учетом (а), (б) уравнения движения принимают вид:

- вторые интегралы

$$M_\Sigma \xi r^* + m_0 l_0 + ml\sum_{j=1}^{n} \cos\varphi_j = 0, \; M_\Sigma \eta r^* + ml\sum_{j=1}^{n} \sin\varphi_j = 0; \qquad \text{(в)}$$

- первый интеграл

$$[J_z - M_\Sigma r^{*2}(\xi^2 + \eta^2)]\omega + ml\sum_{j=1}^{n} \varphi'_j \omega^* (l + \xi r^* \cos\varphi_j + \eta r^* \sin\varphi_j) = J_z \omega_0; \; \text{(г)}$$

- уравнения движения маятников

$$\begin{gathered} ml^2(\omega'\omega^* + \varphi''_j \omega^{*2}) + Hl^2 \varphi'_j \omega^* + \\ + ml[(\eta''\omega^{*2} r^* + 2\omega\xi'\omega^* - \omega^2 \eta r^* + \omega'\omega^* \xi r^*)\cos\varphi_j - \\ -(\xi''\omega^{*2} r^* - 2\omega\eta' r^* - \omega^2 \xi r^* - \omega'\omega^* \eta r^*)\sin\varphi_j] = 0, \; / j = \overline{1,n} /, \end{gathered} \qquad \text{(д)}$$

Представим уравнения движения (в)-(д) в виде

$$\tilde{a}_1 = \frac{M_\Sigma r^*}{nml}\xi + \frac{m_0 l_0}{nml} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos\varphi_j = 0, \quad \tilde{a}_2 = \frac{M_\Sigma r^*}{nml}\eta + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sin\varphi_j = 0;$$

$$\tilde{a}_3 = \left[\frac{J_z}{M_\Sigma r^{*2}} - (\xi^2 + \eta^2)\right]\frac{\omega}{\omega^*} + \frac{ml}{M_\Sigma r^*}\sum_{j=1}^{n}\varphi'_j\left(\frac{l}{r^*} + \xi\cos\varphi_j + \eta\sin\varphi_j\right) = \frac{J_z}{M_\Sigma r^{*2}} \cdot \frac{\omega_0}{\omega^*};$$

$$\begin{gathered} \tilde{a}_{3+j} = \frac{\omega'}{\omega^*} + \varphi''_j + \frac{H}{m\omega^*}\varphi'_j + \frac{r^*}{l}\left[\left(\eta'' + 2\frac{\omega}{\omega^*}\xi' - \frac{\omega^2}{\omega^{*2}}\eta + \frac{\omega'}{\omega^*}\xi\right)\cos\varphi_j - \right. \\ \left. -\left(\xi'' - 2\frac{\omega}{\omega^*}\eta' - \frac{\omega^2}{\omega^{*2}}\xi - \frac{\omega'}{\omega^*}\eta\right)\sin\varphi_j\right] = 0, \; / j = \overline{1,n} /. \end{gathered} \qquad \text{(е)}$$

Определим масштаб времени $t^* = 1/\omega^*$ и характерный размер r^* следующим образом

$$t^* = 1/\omega_0 \; (\omega^* = \omega_0), \quad r^* = nml/M_\Sigma. \qquad (7.1.30)$$

Введем новые безразмерные координаты ξ, η, угловую скорость вращения ротора R_ω и время τ:

$$\xi = x / r^*, \;\; \eta = y / r^*, \;\; R_\omega = \omega / \omega_0, \;\; \tau = \omega_0 t. \qquad (7.1.31)$$

Введем безразмерные дисбаланс $\tilde{e}_0$, суммарную массу маятников R_m, коэффициент силы вязкого сопротивления движению шаров h, осевой момент инерции системы относительно продольной оси НТ R_J:

$$\tilde{e}_0 = \frac{m_0 l_0}{nml}, \;\; R_m = \frac{nm}{M_\Sigma}, \;\; h = \frac{H}{m\omega_0}, \;\; R_J = \frac{C + m_0 l_0^2 + nml^2}{M_\Sigma r^{*2}}. \qquad (7.1.32)$$

Получим следующие уравнения движения в безразмерном виде

$$\tilde{a}_1 = \xi + \tilde{e}_0 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos\varphi_j = 0, \;\; \tilde{a}_2 = \eta + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sin\varphi_j = 0;$$

$$\tilde{a}_3 = (R_J - \xi^2 - \eta^2) R_\omega + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi'_j\left(\frac{1}{R_m} + \xi\cos\varphi_j + \eta\sin\varphi_j\right) = R_J;$$

$$\tilde{a}_{j+3} = \varphi''_j + R'_\omega + h\varphi'_j - R_m[(\xi'' - 2R_\omega\eta' - R_\omega^2\xi - R'_\omega\eta)\sin\varphi_j -$$

$$- (\eta'' + 2R_\omega\xi' - R_\omega^2\eta + R'_\omega\xi)\cos\varphi_j] = 0, \;\; / \, j = \overline{1,n} \, /. \qquad (7.1.33)$$

Введем безразмерный осевой момент инерции системы относительно главной центральной оси инерции $\tilde{J}_{z_G}$:

$$\tilde{J}_{z_G} = \frac{J_{z_G}}{M_\Sigma r^{*2}} = -\frac{J_z - M_\Sigma r^{*2}(\xi^2 + \eta^2)}{M_\Sigma r^{*2}} = R_J - (\xi^2 + \eta^2). \qquad (7.1.34)$$

С учетом первых двух уравнений в (7.1.33)

$$\tilde{J}_{z_G} = R_J - \left(\tilde{e}_0 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos\varphi_j\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sin\varphi_j\right)^2. \qquad (7.1.35)$$

Из системы уравнений (7.1.33) видно, что в общем случае динамику системы характеризуют пять существенно различных безразмерных параметров:

$$h \ge 0, \;\; n \ge 2, \;\; 0 \le \tilde{e}_0 \le 1, \;\; R_J > 0, \;\; 0 < R_m < 1. \qquad (7.1.36)$$

Введем комплексную переменную

$$z = \xi + i\eta. \qquad (7.1.37)$$

Тогда, уравнения движения маятников примут вид:

$$\varphi''_j + R'_\omega + h\varphi'_j - i\tilde{R}_m[(z'' + 2iR_\omega z' - R_\omega^2 z + iR'_\omega z)\, e^{-i\varphi_j} -$$

$$- (\bar{z}'' - 2iR_\omega\bar{z}' - R_\omega^2\bar{z} - iR'_\omega\bar{z})e^{i\varphi_j}] = 0, \;\; / \, j = \overline{1,n} \, /. \qquad (7.1.38)$$

Используя вторые интегралы $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$, представим первый интеграл $\tilde{a}_3$ в виде

$$(R_J - \xi^2 - \eta^2) R_\omega + \xi'\eta - \eta'\xi + \frac{1}{nR_m}\sum_{j=1}^{n}\varphi'_j = R_J. \qquad (7.1.39)$$

7.2. Двухмаятниковый АБ. Определение условий условной устойчивости установившихся движений энергетическим методом

7.2.1. Выделение основных и побочных установившихся движений

На любом установившемся движении безразмерные координаты $\varphi_1, \varphi_2, \xi, \eta$ и угловая скорость R_ω – постоянные. Тогда уравнения установившихся движений с учетом уравнений (7.1.33) имеют вид (все производные от указанных координат и угловой скорости равняются нулю):

$$\tilde{a}_1 = \xi + \tilde{e}_0 + \frac{1}{2}(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) = 0,\ \tilde{a}_2 = \eta + \frac{1}{2}(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) = 0,$$

$$\tilde{a}_3 = (R_J - \xi^2 - \eta^2) R_\omega = R_J,$$

$$\tilde{a}_{j+3} = R_m R_\omega^2 (\xi \sin\varphi_j - \eta\cos\varphi_j) = 0,\ /\, j = 1{,}2\, /. \qquad (7.2.1)$$

Введем безразмерные суммарные неуравновешенности по оси X и Y:

$$e_{x0} = \tilde{e}_0 + \frac{1}{2}(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2),\ e_{y0} = \frac{1}{2}(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2). \qquad (7.2.2)$$

Основные движения. На основных движениях маятники устранили неуравновешенность и система вращается вокруг продольной оси НТ. При этом:

$$\tilde{\xi} = 0,\ \tilde{\eta} = 0,\ \tilde{R}_\omega, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 - \text{const}. \qquad (7.2.3)$$

Подставляя (7.2.3) в уравнения (7.2.1) получаем, что на основных движениях:

$$\tilde{a}_1 = \tilde{e}_0 + \frac{1}{2}(\cos\tilde{\varphi}_1 + \cos\tilde{\varphi}_2) = 0,\ \tilde{a}_2 = \sin\tilde{\varphi}_1 + \sin\tilde{\varphi}_2 = 0,\ \tilde{R}_\omega = 1. \ (7.2.4)$$

Найдем решение уравнений $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$ системы (7.2.4). Будем искать существенно различные движения, то есть не принимаем во внимание обмен местами маятниками и изменение углов $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ с шагом 2π.

Основные движения будем различать по величине неуравновешенности: $0 < \tilde{e}_0 < 1$ – неуравновешенность есть и маятники могут ее устранить с определенным запасом (рис. 7.2.1, а); $\tilde{e}_0 = 0$ – неуравновешенность отсутствует (рис. 7.2.1, б); $\tilde{e}_0 = 1$ – неуравновешенность наибольшая, которую могут устранить маятники (рис. 7.2.1, в).

1. Когда $0 < \tilde{e}_0 < 1$ (рис. 7.2.1, а), из второго уравнения (7.2.4) находим, что $\sin\tilde{\varphi}_1 = -\sin\tilde{\varphi}_2$. Тогда $\tilde{\varphi}_1 = -\tilde{\varphi}_2$ и первое уравнение системы (7.2.4) принимает вид $\tilde{e}_0 + (\cos\tilde{\varphi}_1 + \cos\tilde{\varphi}_1)/2 = \tilde{e}_0 + \cos\tilde{\varphi}_1 = 0$, откуда $\cos\tilde{\varphi}_1 = -\tilde{e}_0$. Тогда

$$\tilde{\varphi}_1 = -\tilde{\varphi}_2 = \pi - \arccos \tilde{e}_0 = (\pi/2) + \tilde{\varphi}_0,$$
$$(\tilde{\varphi}_0 = \arcsin \tilde{e}_0,\ \tilde{\varphi}_0 \in (0,\ \pi/2)), \qquad (7.2.5)$$

где $\tilde{\varphi}_0$ - введенный для удобства угол между маятником и осью Y. В этом случае у системы существует единственное (изолированное) основное движение.

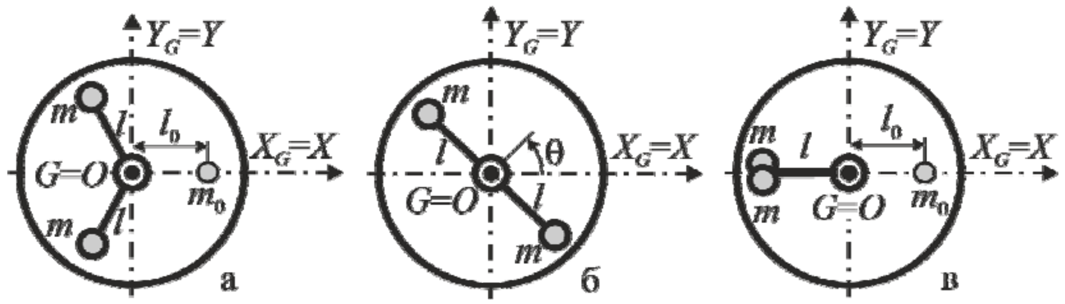


Рис. 7.2.1. Основные установившиеся движения

2. Когда $\tilde{e}_0 = 0$ (рис. 7.2.1, б), из первого уравнения системы (7.2.4) получаем, что $\cos\tilde{\varphi}_1 = -\cos\tilde{\varphi}_2$ откуда $\tilde{\varphi}_2 = \pi + \tilde{\varphi}_1$. Подставляя это во второе уравнение системы, получаем $\tilde{a}_2 = \sin\tilde{\varphi}_1 + \sin(\tilde{\varphi}_1 + \pi) \equiv 0$. В этом случае механическая система имеет однопараметрическую семью основных движений, в которой $\tilde{\varphi}_1$- параметр, а $\tilde{\varphi}_2$ отличается от $\tilde{\varphi}_1$ на π.

Будем представлять однопараметрическую семью основных движений следующим образом:

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{\pi}{2} + \theta,\ \tilde{\varphi}_2 = -\frac{\pi}{2} + \theta,\ \theta \in [0,\ \pi), \qquad (7.2.6)$$

где θ – некоторый параметр, определяющий определенное основное движение из образованной однопараметрической семьи основных движений. Отметим, что $\theta \in [0,\ \pi)$, потому что для остальных значений $\theta \in [\pi,\ 2\pi)$ можно получить те же установившиеся движения, меняя местами маятники.

3. Если $\tilde{e}_0 = 1$ (рис. 7.2.1, в), из системы уравнений (7.2.4) получаем одно изолированное основное движение, в котором маятники отклонены в противоположную сторону от точки, создающей неуравновешенность:

$$\tilde{\varphi}_1 = \pi,\ \tilde{\varphi}_2 = -\pi. \qquad (7.2.7)$$

Побочные движения. На побочных движениях механическая система не уравновешена и вращается не вокруг продольной оси НТ. Поэтому

$$e_{x0}^2 + e_{y0}^2 > 0,\ \xi^2 + \eta^2 > 0. \qquad (7.2.8)$$

Пусть материальная точка создает ненулевую неуравновешенность $\tilde{e}_0 \neq 0$. Рассмотрим три возможных случая.

1. $e_{x0} = 0$, $e_{y0} \neq 0$. Из первого уравнения системы (7.2.1) получаем, что $\xi = 0$. Тогда

$$\tilde{a}_{j+3} = -R_m R_\omega^2 \eta \cos\varphi_j = 0, \ \ /\, j = 1{,}2\, /, \quad \eta \neq 0.$$

Из этого следует, что $\cos\varphi_j = 0, \ /\, j = 1{,}2\, /$. Но тогда получаем противоречие $e_{x0} = \tilde{e}_0 \neq 0$. Поэтому этот случай невозможен.

2. $e_{x0} \neq 0$, $e_{y0} = 0$. Тогда из второго уравнения системы (7.2.1) получаем, что $\eta = 0$. Тогда

$$\tilde{a}_{j+3} = R_m R_\omega^2 \xi \sin\varphi_j = 0, \ \ /\, j = 1{,}2\, /, \quad \xi \neq 0.$$

Поэтому на побочных движениях $\sin\varphi_j = 0$ $(/\, j = 1{,}2\, /)$. Это дает такие существенно-различные изолированные побочные движения:

а) маятники отклонены в противоположную сторону от точки, создающей неуравновешенность (рис. 7.2.2, а)

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \pi; \qquad (7.2.9)$$

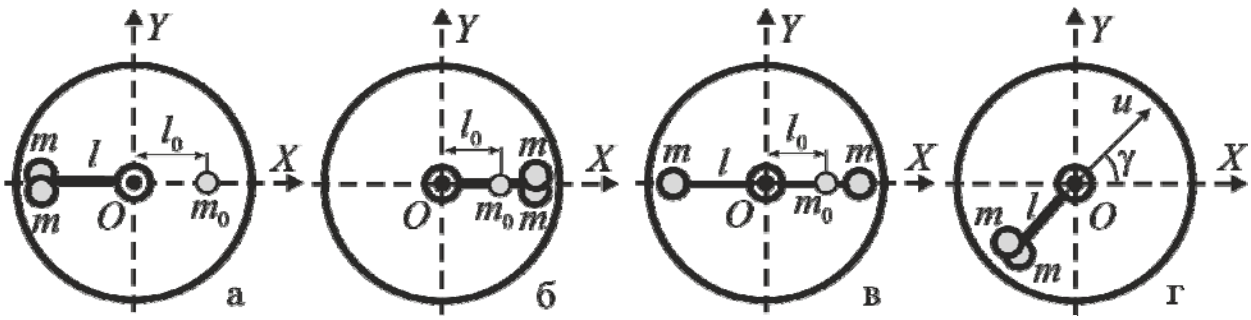


Рис. 7.2.2. Побочные установившиеся движения

б) маятники отклонены в сторону точки, создающей неуравновешенность (рис. 7.2.2, б)

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0; \qquad (7.2.10)$$

в) маятники отклонены по разные стороны от точки, создающей неуравновешенность (рис. 7.2.2, в)

$$\varphi_1 = 0, \ \ \varphi_2 = \pi. \qquad (7.2.11)$$

3. $e_{x0} \neq 0$, $e_{y0} \neq 0$. Тогда из первых двух уравнений системы (7.2.1) получаем:

$$\xi = -\tilde{e}_0 - \frac{1}{2}(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) \neq 0, \ \ \eta = -\frac{1}{2}(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) \neq 0.$$

Тогда последние два уравнения системы (7.2.1) дают

$$\sum_{j=1}^{2}(\xi\sin\varphi_j-\eta\cos\varphi_j)=0=-\tilde{e}_0(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)=-2\tilde{e}_0 e_{y0}\,.$$

Так как $\tilde{e}_0\neq 0$, то $e_{y0}=0$. Получили противоречие, в связи с чем, этот случай невозможен.

Пусть материальная точка создает нулевую неуравновешенность $\tilde{e}_0=0$. Тогда из первых двух уравнений системы (7.2.1) получаем:

$$\xi=-\frac{1}{2}(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2),\;\; \eta=-\frac{1}{2}(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)\,.$$

Из последних двух уравнений системы (7.2.1) получаем

$$\xi\sin\varphi_1-\eta\cos\varphi_1-(\xi\sin\varphi_2-\eta\cos\varphi_2)=0=-\sin(\varphi_1-\varphi_2)\,.$$

Рассмотрим два возможных решения.

1. $\varphi_1=\varphi_2$. В этом случае $\xi^2+\eta^2>0$. Отсюда находим однопараметрическую семью побочных движений $\varphi_1=\varphi_2$, где угол φ_2 принят за параметр. Представим эту семью в виде

$$\varphi_1=\varphi_2=\gamma+\pi,\;\;\gamma\in[0,\,\pi)\,, \qquad (7.2.12)$$

где γ – параметр. В этой семье маятники отклонены на одинаковые углы и лежат на линии u, образуемой поворотом на угол γ оси X (рис. 7.2.2, г).

2. $\varphi_1=\varphi_2+\pi$. В этом случае $\xi^2+\eta^2=0$, что соответствует ранее полученной семье основных движений (7.2.6).

7.2.2. Исследование условной устойчивости основных движений

Исследуем устойчивость основных движений путем изучения на условный экстремум осевого момента инерции системы $\tilde{J}_z$.

Исследуем на условный экстремум $\tilde{J}_{z_G}$ **как функцию** ξ, η. С учетом выражение (7.1.34) первые частные производные от $\tilde{J}_{z_G}$ по ξ, η, имеют вид:

$$\partial\tilde{J}_z/\partial\xi=-2\xi=0,\;\;\partial\tilde{J}_z/\partial\eta=-2\eta=0\,. \qquad (7.2.13)$$

Необходимое условие существования экстремума выполняется при $\xi,\eta=0$. Заметим, что это соответствует основным движениям системы. Вторые частные производные от осевого момента инерции системы (7.1.34) по ξ и η, имеют вид:

$$a_{11}=\frac{\partial^2\widetilde{J}_z}{\partial\xi^2}=-2,\ a_{22}=\frac{\partial^2\widetilde{J}_z}{\partial\eta^2}=-2,$$

$$a_{12}=a_{21}=\frac{\partial^2\widetilde{J}_z}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial^2\widetilde{J}_z}{\partial\eta\partial\xi}=0. \tag{7.2.14}$$

Введем в рассмотрение квадратную матрицу 2-го порядка A, составленную из элементов (7.2.14). Тогда ее главные диагональные миноры имеют вид:

$$\Delta_1=a_{11},\ \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{7.2.15}$$

Подставляя (7.2.14) в (7.2.15), получаем $\Delta_1=-2<0$, $\Delta_2=4>0$. В соответствии с критерием Сильвестра $\widetilde{J}_{z_G}$ принимает максимальное значение и основные движения устойчивы (при условии их существования).

Исследуем на условный экстремум $\widetilde{J}_{z_G}$ **как функцию** φ_j. Используя выражение (7.1.35), находим вторые частные производные от $\widetilde{J}_{z_G}$ по φ_j:

$$\frac{\partial^2\widetilde{J}_z}{\partial\varphi_j^2}=a_{jj}=\widetilde{e}_0\cos\varphi_j+\frac{1}{2}\cos(\varphi_j-\varphi_i),\ \frac{\partial^2\widetilde{J}_z}{\partial\varphi_j\partial\varphi_i}=\frac{\partial^2\widetilde{J}_z}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j}=$$

$$=a_{ji}=-\frac{1}{2}\cos(\varphi_j-\varphi_i),\ \ /\,j,i=1,2,\quad j\neq i\,/. \tag{7.2.16}$$

Подставляя (7.2.5) в (7.2.16), а (7.2.16) – в (7.2.15), получим для случая, когда $0<\widetilde{e}_0<1$:

$$a_{11}=a_{22}=-1/2,\ a_{12}=a_{21}=\frac{1}{2}-\widetilde{e}_0^2,$$

$$\Delta_1=-1/2<0,\ \Delta_2=\widetilde{e}_0^2(1-\widetilde{e}_0^2)>0. \tag{7.2.17}$$

В соответствии с критерием Сильвестра $\widetilde{J}_{z_G}$ принимает максимальное значение, поэтому основное движение устойчиво.

На основном движении в случае, когда $\widetilde{e}_0=0$ или $\widetilde{e}_0=1$ получаем:

$$a_{11}=a_{22}=-1/2,\ a_{12}=a_{21}=\pm 1/2,$$

$$\Delta_1=-1/2<0,\ \Delta_2=0. \tag{7.2.18}$$

В (7.2.18) знак “+” соответствует случаю, когда $\widetilde{e}_0=0$, а знак “–” – когда $\widetilde{e}_0=1$. Это критический случай и критерий Сильвестра не позволяет оценить устойчивость или неустойчивость рассматриваемого основного движения.

7.2.3. Исследование условной устойчивости побочных движений

Устойчивость побочных движений при $\tilde{e}_0 \neq 0$.

В случае, когда маятники отклонены в противоположные стороны ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$), из (7.2.15) и (7.2.16) получим:

$$a_{11} = \tilde{e}_0 - \frac{1}{2},\ a_{22} = -\left(\tilde{e}_0 + \frac{1}{2}\right),\ a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2},$$

$$\Delta_1 = \tilde{e}_0 - \frac{1}{2},\ \Delta_2 = -\tilde{e}_0^2 < 0. \qquad (7.2.19)$$

В соответствии с критерием Сильвестра $\tilde{J}_{z_G}$ не может принять максимальное значение, поэтому рассматриваемое побочное движение неустойчиво.

В случае, когда маятники отклонены в сторону точки, создающей неуравновешенность ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$), из (7.2.15) и (7.2.16) получим:

$$a_{11} = a_{22} = \tilde{e}_0 + \frac{1}{2},\ a_{12} = a_{21} = -\frac{1}{2},$$

$$\Delta_1 = \tilde{e}_0 + \frac{1}{2} > 0,\ \Delta_2 = \tilde{e}_0(1 + \tilde{e}_0) > 0. \qquad (7.2.20)$$

В соответствии с критерием Сильвестра $\tilde{J}_{z_G}$ принимает минимальное значение, поэтому рассматриваемое побочное движение неустойчиво.

В случае, когда маятники отклонены в противоположные стороны от точки, создающей неуравновешенность ($\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = \pi$), из (7.2.15) и (7.2.16) получим:

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{2} - \tilde{e}_0,\ a_{12} = a_{21} = -\frac{1}{2},$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} - \tilde{e}_0,\ \Delta_2 = -\tilde{e}_0(1 - \tilde{e}_0) < 0. \qquad (7.2.21)$$

В соответствии с критерием Сильвестра $\tilde{J}_{z_G}$ не может принять даже неизолированное максимальное значение, поэтому рассматриваемое побочное движение неустойчиво.

Устойчивость побочных движений при $\tilde{e}_0 = 0$. В случае, когда маятники отклонены в одну сторону ($\varphi_1 = \varphi_2$), из (7.2.15) и (7.2.16) получим:

$$a_{11} = a_{22} = 1/2,\ a_{12} = a_{21} = -1/2,\ \Delta_1 = 1/2 > 0,\ \Delta_2 = 0. \qquad (7.2.22)$$

В соответствии с критерием Сильвестра $\tilde{J}_{z_G}$ не может принять даже неизолированное максимальное значение, поэтому рассматриваемое побочное движение неустойчиво.

7.3. Двухмаятниковый АБ. Исследование процесса уравновешивания НТ первым методом Ляпунова

7.3.1. Исследование условной устойчивости изолированного основного движения ($0 < \widetilde{e}_0 < 1$)

Исследуем условную устойчивость основного движения с использованием системы уравнений движения (7.1.33). Введем в рассмотрение возмущенное движение:

$$\xi = u, \;\; \eta = v, \;\; \varphi_1 = \widetilde{\varphi}_1 + \alpha_1, \;\; \varphi_2 = \widetilde{\varphi}_2 + \alpha_2, \;\; R_\omega = 1 + p, \qquad (7.3.1)$$

где: $u, v, \alpha_1, \alpha_2, p$ – возмущения ($|u|, |v|, |\alpha_1|, |\alpha_2|, |p| << 1$); $0, 0, \widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2, 1$ – невозмущенное движение.

1. Линеаризация уравнений движения.

Рассмотрим некоторые тригонометрические тождества:

$$\cos\widetilde{\varphi}_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \widetilde{\varphi}_0\right) = -\sin\widetilde{\varphi}_0, \quad \cos\widetilde{\varphi}_2 = \cos\widetilde{\varphi}_1 = -\sin\widetilde{\varphi}_0,$$

$$\sin\widetilde{\varphi}_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \widetilde{\varphi}_0\right) = \cos\widetilde{\varphi}_0, \quad \sin\widetilde{\varphi}_2 = -\sin\widetilde{\varphi}_1 = -\cos\widetilde{\varphi}_0. \qquad (7.3.2)$$

Для $\cos\varphi_j$ и $\sin\varphi_j$, с учетом (7.3.2), получим:

$$\cos\varphi_1 = \cos(\widetilde{\varphi}_1 + \alpha_1) = \cos\widetilde{\varphi}_1 \cos\alpha_1 - \sin\widetilde{\varphi}_1 \sin\alpha_1 \approx -\sin\widetilde{\varphi}_0 - \alpha_1 \cos\widetilde{\varphi}_0,$$

$$\cos\varphi_2 = \cos(\widetilde{\varphi}_2 + \alpha_2) = \cos\widetilde{\varphi}_2 \cos\alpha_2 - \sin\widetilde{\varphi}_2 \sin\alpha_2 \approx -\sin\widetilde{\varphi}_0 + \alpha_2 \cos\widetilde{\varphi}_0,$$

$$\sin\varphi_1 = \sin(\widetilde{\varphi}_1 + \alpha_1) = \sin\widetilde{\varphi}_1 \cos\alpha_1 + \cos\widetilde{\varphi}_1 \sin\alpha_1 \approx \cos\widetilde{\varphi}_0 - \alpha_1 \sin\widetilde{\varphi}_0,$$

$$\sin\varphi_2 = \sin(\widetilde{\varphi}_2 + \alpha_2) = \sin\widetilde{\varphi}_2 \cos\alpha_2 + \cos\widetilde{\varphi}_2 \sin\alpha_2 \approx$$
$$\approx -\cos\widetilde{\varphi}_0 - \alpha_2 \sin\widetilde{\varphi}_0. \qquad (7.3.3)$$

С учетом (7.3.1), (7.3.3) из первых двух уравнений системы (7.1.33) получим:

$$\widetilde{a}_1 = u - \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{2}\cos\widetilde{\varphi}_0 = 0, \;\; \widetilde{a}_2 = v - \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}\sin\widetilde{\varphi}_0 = 0. \qquad (7.3.4)$$

Из третьего уравнения системы (7.1.33) получим:

$$\widetilde{a}_3 = R_J p + \frac{(\alpha_1' + \alpha_2')}{2R_m} = 0. \qquad (7.3.5)$$

С учетом (7.3.1), (7.3.3) уравнения для маятников после линеаризации принимают вид:

$$\widetilde{a}_4 = \alpha_1'' + p' + h\alpha_1' - R_m[(u'' - 2v' - u)\cos\widetilde{\varphi}_0 + (v'' + 2u' - v)\sin\widetilde{\varphi}_0] = 0,$$

$$\widetilde{a}_5 = \alpha_2'' + p' + h\alpha_2' + R_m[(u'' - 2v' - u)\cos\widetilde{\varphi}_0 - (v'' + 2u' - v)\sin\widetilde{\varphi}_0] = 0. \qquad (7.3.6)$$

2. Введение новых переменных. Для удобства интерпретации условной устойчивости основного движения введем новые переменные:

$$\gamma_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)/2, \quad \gamma_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)/2. \qquad (7.3.7)$$

Тогда из уравнений (7.3.4) и (7.3.5) получим:

$$u = \gamma_2 \cos\tilde{\varphi}_0, \; u' = \gamma_2' \cos\tilde{\varphi}_0, \; u'' = \gamma_2'' \cos\tilde{\varphi}_0,$$

$$v = \gamma_1 \sin\tilde{\varphi}_0, \; v' = \gamma_1' \sin\tilde{\varphi}_0, \; v'' = \gamma_1'' \sin\tilde{\varphi}_0,$$

$$p = -\gamma_1'/(R_m R_J), \; p' = -\gamma_1''/(R_m R_J). \qquad (7.3.8)$$

С учетом (7.3.7) из уравнений (7.3.6) получаем:

$$L_1 = (\tilde{a}_4 + \tilde{a}_5)/2 = \gamma_1'' + h\gamma_1' + p' - R_m(v'' + 2u' - v)\sin\tilde{\varphi}_0 = 0,$$

$$L_2 = (\tilde{a}_4 - \tilde{a}_5)/2 = \gamma_2'' + h\gamma_2' - R_m(u'' - 2v' - u)\cos\tilde{\varphi}_0 = 0. \qquad (7.3.9)$$

С помощью уравнений (7.3.8) исключим из уравнений (7.3.9) переменные u, v, p, получим:

$$L_1 = \gamma_1'' + h\gamma_1' - \frac{\gamma_1''}{R_m R_J} - R_m(\gamma_1''\sin\tilde{\varphi}_0 + 2\gamma_2'\cos\tilde{\varphi}_0 - \gamma_1\sin\tilde{\varphi}_0)\sin\tilde{\varphi}_0 = 0,$$

$$L_2 = \gamma_2'' + h\gamma_2' - R_m(\gamma_2''\cos\tilde{\varphi}_0 - 2\gamma_1'\sin\tilde{\varphi}_0 - \gamma_2\cos\tilde{\varphi}_0)\cos\tilde{\varphi}_0 = 0.$$

Группируя соответствующие составляющие при γ_1, γ_2 и их производных, окончательно будем иметь:

$$L_1 = \left(1 - qR_m - R_m\sin^2\tilde{\varphi}_0\right)\gamma_1'' + h\gamma_1' + R_m\gamma_1\sin^2\tilde{\varphi}_0 - R_m\gamma_2'\sin 2\tilde{\varphi}_0 = 0,$$

$$L_2 = (1 - R_m\cos^2\tilde{\varphi}_0)\gamma_2'' + h\gamma_2' + R_m\gamma_2\cos^2\tilde{\varphi}_0 + R_m\gamma_1'\sin 2\tilde{\varphi}_0 = 0, \qquad (7.3.10)$$

где

$$q = 1/(R_m^2 R_J) = M_\Sigma l^2 / \left(J_0 + m_0 l_0^2 + nml^2\right),$$

$$qR_m = \frac{nm}{M_\Sigma}\cdot\frac{M_\Sigma l^2}{J_0 + m_0 l_0^2 + nml^2} = \frac{nml^2}{J_0 + m_0 l_0^2 + nml^2} < 1, \; (n=2). \qquad (7.3.11)$$

Заметим, что $q \sim 1$. Действительно

$$C = M\rho_0^2, \; \rho_0^2 \sim l_0^2 \sim l^2, \; q = \frac{l^2(M + m_0 + nm)}{\rho_0^2\left(M + m_0\dfrac{l_0^2}{\rho_0^2} + nm\dfrac{l^2}{\rho_0^2}\right)} \sim 1,$$

где ρ_0 – радиус инерции НТ относительно собственной главной центральной оси инерции Z.

3. Характеристическое уравнение.

Введем обозначение:

$$a_{11} = \left(1 - qR_m - R_m\sin^2\tilde{\varphi}_0\right)\lambda^2 + h\lambda + R_m\sin^2\tilde{\varphi}_0,$$

$$a_{12} = -a_{21} = -R_m\lambda\sin 2\tilde{\varphi}_0,$$

$$a_{22} = (1 - R_m\cos^2\tilde{\varphi}_0)\lambda^2 + h\lambda + R_m\cos^2\tilde{\varphi}_0. \qquad (7.3.12)$$

Тогда характеристическое уравнение системы (7.3.10) можно представить в виде определителя или полинома:

$$\Delta(\lambda) = |a_{ij}| = a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \qquad (7.3.13)$$

где

$$a_4 = (1 - R_m \cos^2 \tilde{\varphi}_0)[1 - R_m (q + \sin^2 \tilde{\varphi}_0)],\ \ a_3 = h[2 - R_m (1 + q)],$$

$$a_2 = h^2 + R_m - R_m^2 \cos^2 \tilde{\varphi}_0 (q - 2\sin^2 \tilde{\varphi}_0),$$

$$a_1 = hR_m,\ a_0 = 0{,}25 R_m^2 \sin^2 2\tilde{\varphi}_0. \qquad (7.3.14)$$

4. Приближенное определение корней характеристического уравнения.

Согласно теореме Ляпунова об устойчивости движения по первому приближению, основное движение (условно) асимптотически устойчиво, когда все корни характеристического уравнения (7.3.13) имеют отрицательные действительные части:

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0,\ \ /\, i = \overline{1{,}5}\, /, \qquad (7.3.15)$$

где λ_i – i-й корень. Критерий Рауса-Гурвица дает следующие условия асимптотической устойчивости основного движения:

$$a_i > 0,\ \ /\, i = \overline{0{,}5}\, /,\ \ \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,\ \ \Delta_3 = a_3 \Delta_2 - a_4 a_1^2 > 0. \qquad (7.3.16)$$

Из второй группы условий (7.3.16) получаем такие условия:

$$\Delta_2 = hR_m [h^2 + R_m (1 - 0{,}5 \sin^2 2\tilde{\varphi}_0) + R_m^2 \cos^2 \tilde{\varphi}_0 (3 \sin^2 \tilde{\varphi}_0 - q \cos^2 \tilde{\varphi}_0)] > 0,$$

$$\Delta_3 = h^2 R_m \{2h^2 - R_m [1 - h^2 (1 + q) - \sin^2 2\tilde{\varphi}_0] +$$
$$+ 2R_m^2 \cos^2 \tilde{\varphi}_0 (4 \sin^2 \tilde{\varphi}_0 - q \cos^2 \tilde{\varphi}_0) +$$
$$+ R_m^3 \cos^2 \tilde{\varphi}_0 [q^2 \cos^2 \tilde{\varphi}_0 - 4 \sin^2 \tilde{\varphi}_0 (1 + q)]\} > 0. \qquad (7.3.17)$$

Заметим, что все условия устойчивости будут выполняться в случае, когда $R_m << 1$ – масса маятников намного меньше массы НТ.

В общем случае анализ условий (7.3.16) и получение корней характеристического уравнения (7.3.13) в аналитическом виде невозможны. Поэтому корни характеристического уравнения (7.3.13) будем определять приближенно – методом прямого разложения корней полинома по степеням малого параметра, в предположении, что $R_m << 1$.

В нулевом приближении ($R_m = 0$), характеристическое уравнение (7.3.13) имеет вид:

$$(\lambda + h)^2 \lambda^2 = 0. \qquad (7.3.18)$$

Его корни следующие:

$$\lambda_{1,2}^{(0)} = -h,\ \ \lambda_{3,4}^{(0)} = 0. \qquad (7.3.19)$$

Первые два корня имеют отрицательную действительную часть, поэтому устойчивость движения будут определять следующие приближения двух последних нулевых корней. Будем искать разложения этих корней в виде:

$$\lambda_{4,5} = R_m \lambda_{4,5}^{(1)} + \ldots\ . \qquad (7.3.20)$$

Подставляя (7.3.20) в характеристическое уравнение (7.3.13) и собирая коэффициенты при R_m^2, получим следующее уравнение:

$$h^2(\lambda_{3,4}^{(1)})^2 + h\lambda_{3,4}^{(1)} + 0{,}25\sin^2 2\tilde{\varphi}_0 = 0. \qquad (7.3.21)$$

Корни этого уравнения действительны, отрицательны и имеют вид:

$$\lambda_3^{(1)} = -\sin^2\tilde{\varphi}_0/h,\ \lambda_4^{(1)} = -\cos^2\tilde{\varphi}_0/h\ . \qquad (7.3.22)$$

Следовательно, когда $R_m \ll 1$, корни характеристического уравнения (7.3.13) имеют такие разложения:

$$\lambda_{1,2} \approx -h,\ \lambda_3 \approx -R_m\tilde{e}_0^2/h,\ \lambda_4 \approx -R_m(1-\tilde{e}_0^2)/h. \qquad (7.3.23,\ \text{а})$$

Выше учтено, что на основном движении $\sin\tilde{\varphi}_0 = \tilde{e}_0$. В размерном виде:

$$\lambda_{1,2} \approx -\frac{H}{m\omega_0},\ \lambda_3 \approx -\frac{\omega_0 m_0^2 l_0^2}{2M_\Sigma H l^2},\ \lambda_4 \approx -\frac{\omega_0}{2M_\Sigma H l^2}(4m^2l^2 - m_0^2 l_0^2). \qquad (7.3.23,\ \text{б})$$

Видно, что корни (7.3.23, а, б) действительные и отрицательные, поэтому основное движение асимптотически устойчиво, а переходные процессы апериодические.

7.3.2. Исследование условной устойчивости семьи основных движений ($\tilde{e}_0 = 0$)

В случае, когда $\tilde{e}_0 = 0$ $(\sin\tilde{\varphi}_0 = 0)$, система уравнений (7.3.10) принимает вид:

$$L_1 = (1-qR_m)\gamma_1'' + h\gamma_1' = 0,\ L_2 = (1-R_m)\gamma_2'' + h\gamma_2' + R_m\gamma_2 = 0. \qquad (7.3.24)$$

Видно, что эта система распадается на два независимых уравнения. В первое уравнение системы входит переменная γ_1, во второе – γ_2.

Характеристическое уравнение второго уравнения системы (7.3.24) имеет вид:

$$(1-R_m)\nu^2 + h\nu + R_m = 0. \qquad (7.3.25)$$

Его корни:

$$\nu_{1,2} = -\frac{1}{2(1-R_m)}\left[h \pm \sqrt{h^2 - 4R_m(1-R_m)}\right], \qquad (7.3.26,\ \text{а})$$

или в размерном виде

$$\nu_{1,2} = -\frac{M_\Sigma}{2(M_\Sigma - 2m)}\left[\frac{H}{m\omega_0} \pm \sqrt{\frac{H^2M_\Sigma^2 - 8m^3\omega_0^2(M_\Sigma - 2m)}{M_\Sigma^2 m^2\omega_0^2}}\right]. \qquad (7.3.26,\ \text{б})$$

Корни (7.3.26, а) всегда имеют отрицательную действительную часть, поскольку $R_m < 1$. При этом переходные процессы по γ_2 апериодические или колебательно-затухающие (в зависимости от параметров системы), причем имеет место асимптотическая устойчивость по γ_2.

Характеристическое уравнение первого уравнения системы (7.3.24) имеет вид:

$$(1-qR_m)\mu^2+h\mu=0. \tag{7.3.27}$$

Его корни:

$$\mu_1=-h/(1-qR_m),\ \mu_2=0, \tag{7.3.28, а}$$

или в размерном виде

$$\mu_1=-\frac{HM_\Sigma}{m\omega_0(M_\Sigma-2qm)},\ \mu_2=0. \tag{7.3.28, б}$$

Корень μ_1 всегда отрицательный, поскольку $qR_m<1$.

Таким образом, со временем $\gamma_2\to 0,\ \gamma_1\to\mathrm{const}$. Скорость стремления к нулю возмущения γ_2 полностью характеризуют действительные части корней (7.3.28).

Изучим влияние корней на устойчивость движений. Рассмотрим

$$\begin{gathered}\gamma_1=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=\frac{\varphi_1-\tilde\varphi_1+\varphi_2-\tilde\varphi_2}{2}=\frac{\varphi_1+\varphi_2-(\tilde\varphi_1+\tilde\varphi_2)}{2}=\frac{\varphi_1+\varphi_2-2\theta}{2},\\ \gamma_2=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}=\frac{\varphi_1-\tilde\varphi_1-(\varphi_2-\tilde\varphi_2)}{2}=\frac{\varphi_1-\varphi_2-(\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2)}{2}=\frac{\varphi_1-\varphi_2-\pi}{2}.\end{gathered} \tag{7.3.29}$$

Поскольку $\gamma_1\to\mathrm{const}$, а $\gamma_2\to 0$, то после установления движения:

$$\tilde\gamma_1=(\tilde{\tilde\varphi}_1+\tilde{\tilde\varphi}_2-2\theta)/2=\mathrm{const},\qquad \tilde\gamma_2=(\tilde{\tilde\varphi}_1-\tilde{\tilde\varphi}_2-\pi)/2=0.$$

Решая эту систему уравнений относительно $\tilde{\tilde\varphi}_1$, $\tilde{\tilde\varphi}_2$ получим

$$\tilde{\tilde\varphi}_1=\frac{\pi}{2}+\theta^*,\quad \tilde{\tilde\varphi}_2=-\frac{\pi}{2}+\theta^*,\ \theta^*=\theta+\mathrm{const}. \tag{7.3.30}$$

Полученное установившееся движение принадлежит однопараметрической семье основных движений (7.2.6). При этом ненулевой корень μ_1 определяет скорость стремления возмущенного движения к одному из основных движений, а нулевой корень отвечает за переход от одного к другому основному установившемуся движению из однопараметрической семьи (рис. 7.3.1).

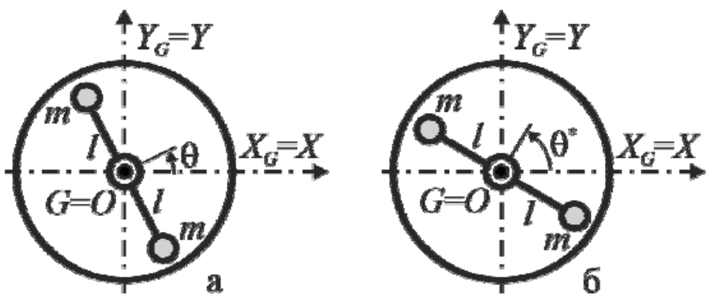


Рис. 7.3.1. Асимптотическая устойчивость однопараметрической семьи основных движений

7.3.3. Исследование условной устойчивости псевдосемьи основных движений ($\tilde{e}_0 = 1$)

В случае, когда $\tilde{e}_0 = 1$ ($\sin\tilde{\varphi}_0 = 1$), система уравнений (7.3.10) принимает вид:

$$L_1 = [1 - R_m(1+q)]\gamma_1'' + h\gamma_1' + R_m\gamma_1 = 0,\ \ L_2 = \gamma_2'' + h\gamma_2' = 0. \quad (7.3.31)$$

Она распалась на два независимых уравнения. В первое уравнение входит переменная γ_1, во второе – γ_2.

Характеристическое уравнение первого уравнения системы (7.3.31) имеет вид:

$$[1 - R_m(1+q)]\upsilon^2 + h\upsilon + R_m = 0. \quad (7.3.32)$$

В общем случае его корни имеют вид:

$$\upsilon_{1,2} = -\frac{1}{2[1 - R_m(1+q)]}\left[h \pm \sqrt{h^2 - 4R_m[1 - R_m(1+q)]}\right], \quad (7.3.33,\ а)$$

или в размерном виде

$$\upsilon_{1,2} = -\frac{M_\Sigma}{2[M_\Sigma - 2m(1+q)]}\times$$

$$\times\left\{\frac{H}{m\omega_0} \pm \sqrt{\frac{H^2 M_\Sigma^2 - 8m^3\omega_0^2[M_\Sigma - 2m(1+q)]}{M_\Sigma^2 m^2\omega_0^2}}\right\}. \quad (7.3.33,\ б)$$

Эти корни отрицательны, если $R_m(1+q) < 1$. При этом переходные процессы по γ_1 (в зависимости от параметров системы) апериодические или колебательно-затухающие, причем имеет место асимптотическая устойчивость по γ_1.

Характеристическое уравнение второго уравнения системы (7.3.31) имеет вид:

$$\kappa^2 + h\kappa = 0, \quad (7.3.34)$$

корни которого следующие

$$\kappa_1 = -h,\ \ \kappa_2 = 0, \quad (7.3.35,\ а)$$

или в размерном виде

$$\kappa_1 = -\frac{H}{m\omega_0},\ \ \kappa_2 = 0. \quad (7.3.35,\ б)$$

Таким образом, со временем $\gamma_1 \to 0,\ \gamma_2 \to \mathrm{const}$. Скорость стремления к нулю возмущения γ_1 полностью характеризуют действительные части корней (7.3.33).

Изучим влияние корней на устойчивость движения. Рассмотрим

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = \frac{\varphi_1-\tilde{\varphi}_1+\varphi_2-\tilde{\varphi}_2}{2} = \frac{\varphi_1+\varphi_2-(\tilde{\varphi}_1+\tilde{\varphi}_2)}{2} = \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2},$$
$$\gamma_2 = \frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} = \frac{\varphi_1-\tilde{\varphi}_1-(\varphi_2-\tilde{\varphi}_2)}{2} = \frac{\varphi_1-\varphi_2-(\tilde{\varphi}_1-\tilde{\varphi}_2)}{2} = \frac{\varphi_1-\varphi_2-2\pi}{2}. \quad (7.3.36)$$

Поскольку со временем $\gamma_1 \to 0$, а $\gamma_2 \to \mathrm{const}$, то после установления движения:

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{\tilde{\tilde{\varphi}}_1+\tilde{\tilde{\varphi}}_2}{2} = 0, \quad \tilde{\gamma}_2 = \frac{\tilde{\tilde{\varphi}}_1-\tilde{\tilde{\varphi}}_2-2\pi}{2} = \mathrm{const}.$$

Решая эту систему уравнений относительно $\tilde{\tilde{\varphi}}_1$, $\tilde{\tilde{\varphi}}_2$ получим

$$\tilde{\tilde{\varphi}}_1 = \pi+\Delta\varphi, \quad \tilde{\tilde{\varphi}}_2 = -\pi-\Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = \mathrm{const}. \quad (7.3.37)$$

На основном движении маятники занимают положение, показанное на рис. 7.3.2, а. Пусть маятники отклонились от основного движения и заняли положение, показанное на рис. 7.3.2, б. Из рис. 7.3.2, в, находим проекции суммарной неуравновешенности на оси X, Y:

$$s_\mu = m_0 l_0 - 2ml\cos\Delta\phi \approx m_0 l_0 - 2ml\left(1-\frac{\Delta\phi^2}{2}\right), \quad s_Y = 0.$$

Учитывая, что на основном движении в рассматриваемом случае $m_0 l_0 = 2ml$, получаем, что

$$s_X \approx ml\Delta\varphi^2 \sim 0, \quad s_Y = 0. \quad (7.3.38)$$

В связи с тем, что $|\Delta\varphi| << 1$ получаем, что отклонение маятников от основного движения на величину первого порядка малости $|\Delta\varphi| << 1$ с точностью до величин первого порядка малости включительно не создает неуравновешенность системы. Поэтому движения (7.3.37) можно рассматривать как однопараметрическую псевдосемью основных движений, где $\Delta\varphi$ псевдопараметр.

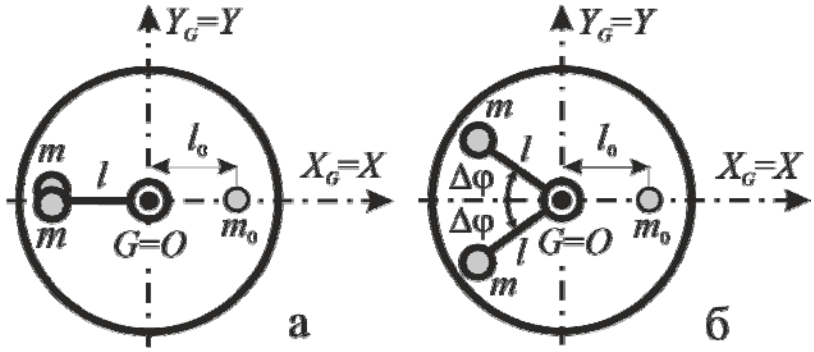


Рис. 7.3.2. Асимптотическая устойчивость однопараметрической псевдосемьи основных движений

Таким образом, в случае максимальной неуравновешенности условно асимптотически устойчива однопараметрическая псевдосемья основных движений. Ненулевые корни (7.3.33) отвечают за скорость стремления возмущенных движений к основным движениям из псевдосемьи, а нулевой корень отвечает за переход от одного к другому установившемуся движению из однопараметрической псевдосемьи.

7.3.4. Числовой эксперимент

Исследуется влияние параметров системы на скорость прихода системы к основному движению. Параметры расчетов подобраны по параметрам КА IMAGE [70] стабилизированного вращением. Корпус КА выполнен в форме прямого кругового цилиндра, а его масса, радиус боковой поверхности и высота цилиндрического корпуса соответственно равны $M = 490$ *кг*, $R = 1{,}1$ *м*, $H_C = 1{,}5$ *м*. Для уменьшения угла нутации на КА установлен жидкостный демпфер, масса жидкости которого составляет $m = 1{,}2$ *кг* ($m/M \approx 2{,}4\cdot 10^{-3}$). Массу маятников берем равной массе жидкости демпфера. Другие параметры имеют значение: $\mu = 1{,}2$ *кг*, $e = 0{,}9$ *м*, $\gamma = 0$. В табл. 7.3.1 приведены пределы изменения параметров, шаг их изменения и значения в модели.

Табл. 7.3.1

Пределы, шаг и оптимальное значение параметров в модели

Параметр	Значение по умолчанию	Пределы изменения параметра	Шаг изменения параметра	Оптимальное значение
n, *об/мин*	50	1 – 301	10	60 (m_1)
				50 (m_2)
				60 (m_3)
Hl^2, $кг \cdot м^2 \cdot c^{-1}$	0,25	0 – 5	0,25	0,25 (m_1)
	1,25			1,25 (m_2)
	2,75			2,75 (m_3)
m, *кг*	1,2	0,6 – 9,6	0,6	7,2 (n_1)
	4,8			4,8 (n_2)
	9,6			4,8 (n_3)
l, *м*	0,65	0,45 – 1,1	0,05	0,65 (m_1)
	0,85			0,85 (m_2)
	0,9			0,9 (m_3)

Результаты вычислительного эксперимента в виде графиков представлены на рис. 7.3.3. По вертикальной оси графиков откладывается максимальное значение действительных частей корней характеристического уравнения (7.3.13), а по горизонтальной – исследуемый параметр, при этом остальные исследуемые параметры имеют фиксированное значение.

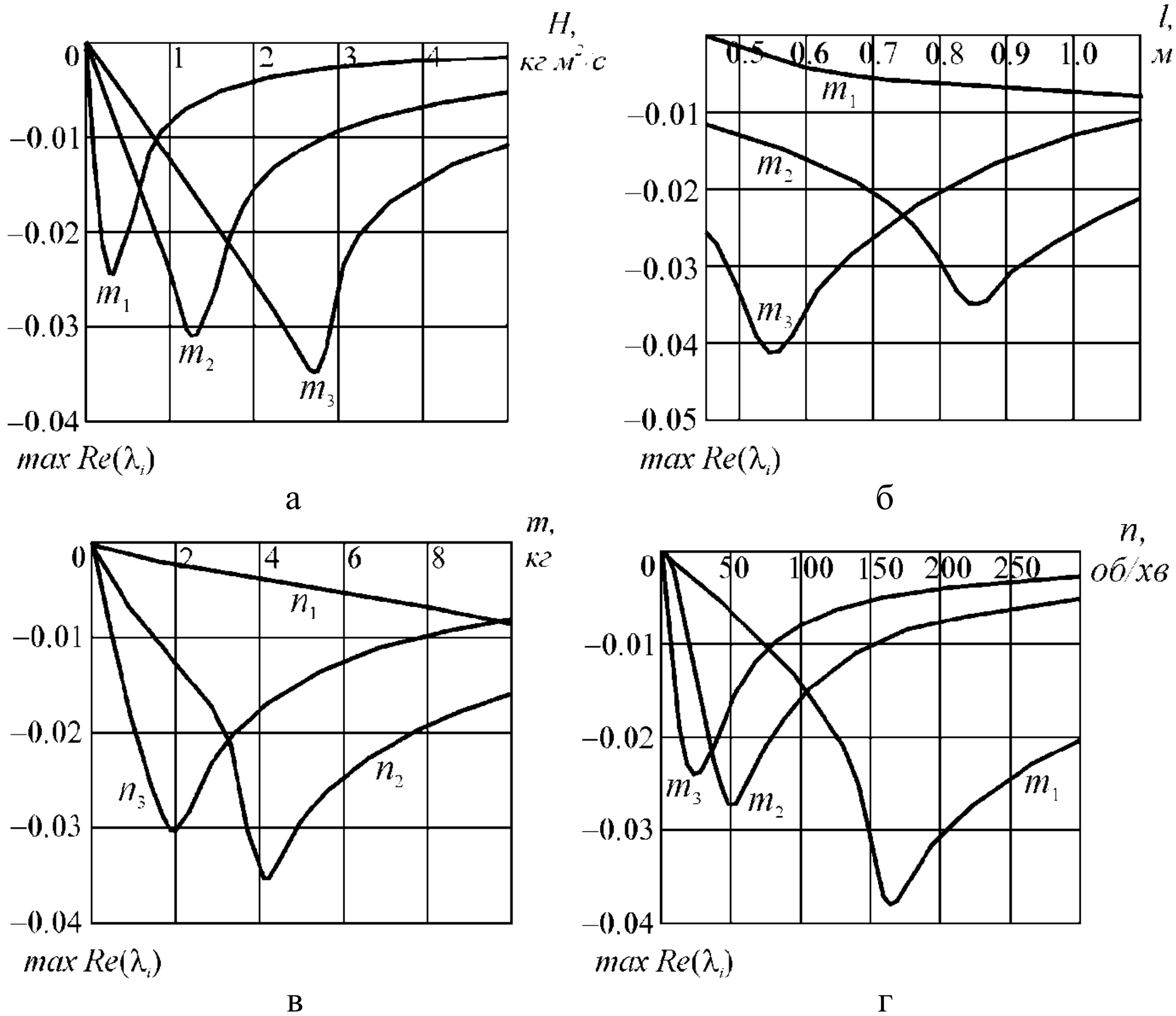


Рис. 7.3.3. Влияние параметров системы на максимальное значение действительных частей корней характеристического уравнения

7.4. Многомаятниковый АБ

7.4.1. Исследование условной устойчивости установившихся движений энергетическим методом

Определение количества установившихся движений и их классификация. Поскольку на систему действуют только диссипативные силы и ее полная энергия совпадает с кинетической, то устойчивыми могут быть только те установившиеся движения, на которых безразмерный главный центральный осевой момент инерции системы

$$\widetilde{J}_z = R_J - \xi^2 - \eta^2 = R_J - \left(e_0 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \cos\varphi_j \right)^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \sin\varphi_j \right)^2 \qquad (7.4.1)$$

принимает максимальное значение. Поэтому далее будем исследовать на условный экстремум этот осевой момент инерции.

Найдем первые частные производные от $\widetilde{J}_z$ по φ_j и приравняем их к нулю, будем иметь следующую систему n нелинейных алгебраических уравнений:

$$\partial\widetilde{J}_z \big/ \partial\varphi_j = 2\left(e_{u0}\sin\varphi_j - e_{v0}\cos\varphi_j\right) \big/ n = 0\,, \quad / \, j = \overline{1,n} \, /\,, \qquad (7.4.2)$$

где

$$e_{u0} = e_0 + \sum_{i=1}^{n} \cos\varphi_i \big/ n\,, \;\; e_{v0} = \sum_{i=1}^{n} \sin\varphi_i \big/ n \qquad (7.4.3)$$

– безразмерные неуравновешенности по оси u и v. Анализ системы уравнений (7.4.2) показывает, что она имеет следующие существенно различные решения.

1. Основные движения, в которых осуществляется стабилизация положения оси вращения АТТ ($z = w$) и $e_{u0} = 0$, $e_{v0} = 0$. Для определения n неизвестных углов используются два алгебраических уравнения. Их решение дает $(n-2)$ параметрическое семейство движений, в которых $\xi = 0$ и $\eta = 0$.

2. Побочные движения, в которых система не уравновешена и не осуществляется стабилизация положения оси вращения АТТ ($z \neq w$). Побочные движения будем различать по положению маятников относительно точек D и O.

а) В случае, когда $e_0 \neq 0$, маятники будут отклонены вдоль оси u (рис. 7.4.1, а) и решение будет иметь вид:

$$\varphi_j = k_j\pi\,, \;\; \cos\varphi_j = (-1)^{k_j}\,, \;\; / \, j = \overline{1,n} \, /\,, \qquad (7.4.4)$$

где k_j – числа, задающие направления отклонений маятников. Если $k_j = 0$, то маятник j отклонен в сторону точки D, если $k_j = 1$ – в противоположную сторону. Заметим, что маятники создают неуравновешенность

$$e(k_1,...,k_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{k_i}}{n}. \qquad (7.4.5)$$

Поскольку маятники одинаковые, то существенно различных побочных движений будет ($n+1$).

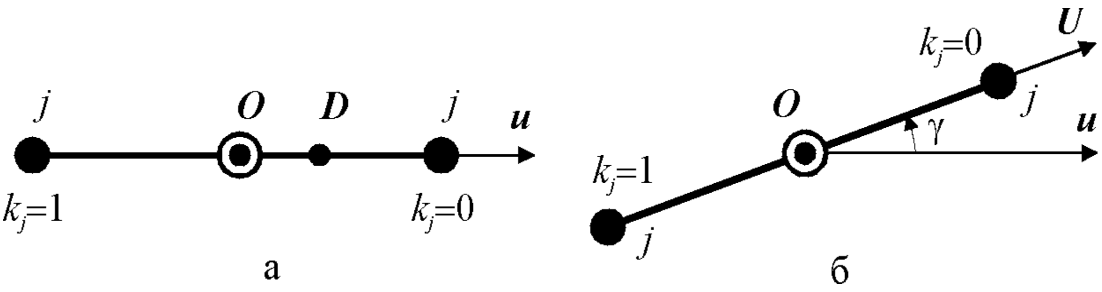


Рис. 7.4.1. Побочные движения при:
а – $e_0 \neq 0$; б – $e_0 = 0$

б) В случае, когда $e_0 = 0$, маятники отклонены вдоль оси U, повернутой на угол γ относительно оси u (рис. 7.4.1, б) и создают неуравновешенность $e(k_1,...,k_n)$ из (7.4.5). При этом

$$\varphi_j = \gamma + k_j\pi,\ \ \cos\varphi_j = \cos(\gamma + k_j\pi) = \cos\gamma(-1)^{k_j},\ \ /\ j = \overline{1,n}\ /, \qquad (7.4.6)$$

где γ – некоторый параметр. Поскольку маятники одинаковые, и при замене угла γ на угол γ+π, они изменяют ориентацию на противоположную, то общее количество существенно различных семейств однопараметрических движений следующее: для четного количества маятников – ($n/2+1$); для нечетного – $(n+1)/2$.

Исследование устойчивости установившихся движений энергетическим методом. Представим безразмерный осевой момент инерции (7.4.1) в виде

$$\tilde{J}_z = R_J - \xi^2 - \eta^2 = R_J - \tilde{e}^2, \qquad (7.4.7)$$

где

$$\tilde{e} = \sqrt{\left(e_0 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos\varphi_j\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sin\varphi_j\right)^2} \qquad (7.4.8)$$

– модуль безразмерной неуравновешенности.

Безразмерный осевой момент инерции (7.4.7) принимает наибольшее значение на тех установившихся движениях, на которых модуль безразмерной неуравновешености (7.4.8) принимает наименьшее значение. Это происходит на основных движениях (на них $\tilde{e} = 0$).

7.4.2. Исследование условной устойчивости основных движений первым методом Ляпунова в случае $0 < e_0 < 1$

Данное исследование дает возможность определить скорость затухания переходных процессов (при наличии колебаний системы – и их частоту) в случае, когда система будет выведена, вследствие возмущений, из любого движения из семьи основных. Будем использовать первые два уравнения из системы (7.1.33), дифференциальные уравнения движения маятников в виде (7.1.38) и первые интегралы в виде (7.1.39).

Возмущенное движение имеет вид:

$$z = s;\ \varphi_j = \tilde{\varphi}_j + \alpha_j;\ R_\omega = 1 + p, \tag{7.4.9}$$

где s, α_j, p – возмущения ($|s|, |\alpha_j|, |p| << 1$); $0, \tilde{\varphi}_j, 1$ – невозмущенное движение. Учитывая, что для основного движения $\xi, \eta = 0$, из первых двух уравнений (7.1.33) и уравнения (7.1.39) найдем:

$$s = -\frac{i}{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e^{i\tilde{\varphi}_j},\quad \bar{s} = \frac{i}{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e^{-i\tilde{\varphi}_j},\quad p = -\frac{1}{R_m R_J n}\sum_{j=1}^{n}\alpha'_j. \tag{7.4.10}$$

Устойчивость основного движения будем исследовать по параметру s, определяющему отклонение главной центральной оси НТ Z от главной центральной оси системы Z_G. Поэтому систему из n уравнений движения маятников (7.1.38) преобразуем в систему с минимальным количеством уравнений относительно переменной s. Введем новую переменную:

$$\beta = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j, \tag{7.4.11}$$

– „средний” угол поворота маятников (шаров). Учитывая выражения (7.4.10), получим следующую систему n линеаризованных дифференциальных уравнений движения для маятников:

$$D_l = \alpha''_l + h_l\alpha'_l - \beta''/(R_m R_J) - i\frac{R_m}{2}[(s'' + 2is' - s)\,e^{-i\tilde{\varphi}_l} - (\bar{s}'' - 2i\bar{s}' - \bar{s})\,e^{i\tilde{\varphi}_l}] = 0,$$

$$/\,l = \overline{1, n}\,/. \tag{7.4.12}$$

Если осуществляется одно из основных движений из семьи основных, то $s = \bar{s} = 0$, и

$$e_0 = -\sum_{l=1}^{n}e^{i\tilde{\varphi}_l}\Big/n,\quad e_0 = -\sum_{l=1}^{n}e^{-i\tilde{\varphi}_l}\Big/n. \tag{7.4.13}$$

Введем обозначение

$$\mu = \beta',\quad \mu' = \beta''. \tag{7.4.14}$$

Тогда, учитывая выражения (7.4.13) и (7.4.14), из n уравнений (7.4.12) получим следующую систему уравнений с тремя неизвестными переменными μ, s и $\bar{s}$:

$$\sum_{l=1}^{n} D_l \big/ n = \mu' + h\mu - \mu'/(R_m R_J) - i\frac{R_m}{2} e_0 [(s'' + 2is' - s) - (\bar{s}'' - 2i\bar{s}' - \bar{s})] = 0\,,$$

$$L = -\sum_{l=1}^{n} D_l i e^{i\tilde{\varphi}_l} \big/ n = s'' + hs' - ie_0\mu'/(R_m R_J) +$$

$$+\frac{R_m}{2}[-(s'' + 2is' - s) + (\bar{s}'' - 2i\bar{s}' - \bar{s})\tilde{b}_{12}] = 0\,, \quad \bar{L} = 0\,, \qquad (7.4.15)$$

где

$$\tilde{b}_{12} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} e^{2i\tilde{\varphi}_l}\,, \quad \left|\tilde{b}_{12}\right| < 1 \qquad (7.4.16)$$

– постоянные параметры, вычисленные на текущем основном движении из семьи, совершаемом системой. Из системы уравнений (7.4.15) видно, что устойчивость любого движения системы из семьи основных определяют переменные s, $\bar{s}$ и μ.

Введем обозначение:

$$qR_m = 1/(R_m R_J) = nml^2 \big/ \left(J_O + m_0 l_0^2 + nml^2\right). \qquad (7.4.17)$$

Тогда

$$q = M_\Sigma l^2 \big/ \left(J_0 + m_0 l_0^2 + nml^2\right) \sim 1\,.$$

Представим характеристическое уравнение системы (7.4.15) в виде полинома:

$$\Delta(\lambda) = a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5\,, \qquad (7.4.18)$$

где

$$a_0 = 1 - qR_m - R_m[1 - qR_m(1 - e_0)]; \quad a_1 = h\{3 - 2qR_m - R_m[2 - qR_m(1 - e_0)]\};$$

$$a_2 = h^2(3 - qR_m) + R_m[1 - h^2 - qR_m(1 - e_0)] + \frac{R_m^2}{4}[2qR_m e_0(1 - \tilde{b}_{12} - \bar{\tilde{b}}_{12}) +$$

$$+ (1 - qR_m)(1 - \tilde{b}_{12}\bar{\tilde{b}}_{12})];$$

$$a_3 = h\{h^2 + R_m[2 - qR_m(1 - e_0)] + [R_m^2(1 - \tilde{b}_{12}\bar{\tilde{b}}_{12})/4]\};$$

$$a_4 = R_m h^2 + \frac{R_m^2}{4}[2qR_m e_0(1 - \tilde{b}_{12} - \bar{\tilde{b}}_{12}) + (1 - qR_m)(1 - \tilde{b}_{12}\bar{\tilde{b}}_{12})];$$

$$a_5 = R_m^2 h(1 - \tilde{b}_{12}\bar{\tilde{b}}_{12})\big/4\,. \qquad (7.4.19)$$

Полученный полином пятой степени имеет действительные коэффициенты, поэтому возможны следующие варианты: 1) все корни действительные; 2) три корня действительные и одна пара комплексно-сопряженных; 3) один корень действительный и две пары комплексно-сопряженных.

Исследуем устойчивость основных движений в случае, когда масса маятников (шаров) намного меньше массы системы, то есть $R_m << 1$, ($q \sim 1$). Тогда корни характеристического уравнения (7.4.18) имеют следующие разложения по степеням малого параметра R_m:

$$\lambda_{1,2,3} \approx -h,\ \lambda_4 \approx \frac{R_m}{2h}\left(-1+\sqrt{\tilde{b}_{12}\tilde{\tilde{b}}_{12}}\right),\ \lambda_5 \approx \frac{R_m}{2h}\left(-1-\sqrt{\tilde{b}_{12}\tilde{\tilde{b}}_{12}}\right), \quad (7.4.20)$$

где с учетом (7.4.16) $0<\tilde{b}_{12}\tilde{\tilde{b}}_{12}<1$.

Поскольку корни (7.4.20) действительные и отрицательные, то основные движения устойчивы, а переходные процессы апериодические.

7.5. Уравновешивание НТ связанными АТТ

7.5.1. Описание модели системы

Система - изолированная, и состоит из стабилизируемого НТ массой M (рис. 7.5.1, а). В идеальном случае оно должно вращаться вокруг собственной главной центральной оси W, проходящей через центр масс НТ – точку O. Предполагаем, что тело симметрично относительно плоскости N, проходящей через точку O, и перпендикулярную оси W. Внутри НТ, в плоскости N находится неподвижная относительно НТ материальная точка D массой m_d, создающая неуравновешенность (рис. 7.5.1, а). Для ее компенсации внутрь НТ на невесомый подвес установлены связанные АТТ (рис. 7.5.1, б), имеющие неподвижные точки K_i на оси W. АТТ одинаковы и имеют следующие массо-инерционные характеристики относительно главных осей X_1, X_2, X_3, изображенных на рис. 7.5.1, г, и выходящих из точек K_i:

$$I_1 = A_1, \quad I_2 = I_3 = B, \quad \mathbf{l}_G = (0,0,-l)^{\mathrm{T}}. \tag{7.5.1}$$

Здесь: I_1, I_2, I_3 – осевые моменты инерции АТТ; $\mathbf{l}_G$ – радиус-вектор центра масс АТТ относительно точки K_i; т – знак транспонирования. Общий центр масс связанных АТТ – точка G, находится в одной плоскости с точками O, D. В этой же плоскости находится и центр масс системы – точка C (рис. 7.5.1, в). Заметим, что в силу особенностей системы любая ось, параллельная оси W, является главной осью инерции системы.

Проведем через точку O вспомогательные оси $U,V,W,$ жестко связанны с телом, причем ось U направим в сторону точки $D,$ а ось V так, чтобы система координат была правой. Обозначим через J_O осевой момент инерции НТ относительно оси W, и через ω – угловую скорость вращения НТ. Координаты точки D относительно осей U,V,W имеют вид $(e,\ 0,\ 0)$.

Движение НТ определяем относительно осей $X,Y,Z,$ выходящих из центра масс системы – точки C, и параллельных, соответственно, осям U,V,W (рис. 7.5.1, в). Центр масс ИС движется прямолинейно и равномерно. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что он неподвижен.

Для описания движения АТТ используем вспомогательные оси U_i, выходящие из точек K_i и параллельные оси U, и оси Ξ_i, выходящие из точек K_i и получающиеся из осей U_i после их поворота на угол ψ вокруг оси W (рис. 7.5.1, б). АТТ имеют относительно НТ две степени свободы, а именно: могут поворачиваться вместе на угол ψ вокруг оси W и на равные углы φ в противоположные стороны вокруг осей Ξ_i. При поворотах АТТ вокруг осей вращения возникают моменты сопротивления $-H_1\dot{\varphi},\ -2H_2\dot{\psi}$, где H_1, H_2 – коэффициенты вязкого трения; $\dot{\varphi},\dot{\psi}$ – относительные угловые скорости вращения АТТ.

Полагаем, что в силу начальных условий тело двигалось плоскопараллельно. Силы, возникающие при движении связанных АТТ относительно НТ, не будут нарушать плоскопараллельного движения НТ. Поэтому будем считать, что тело и далее движется плоскопараллельно.

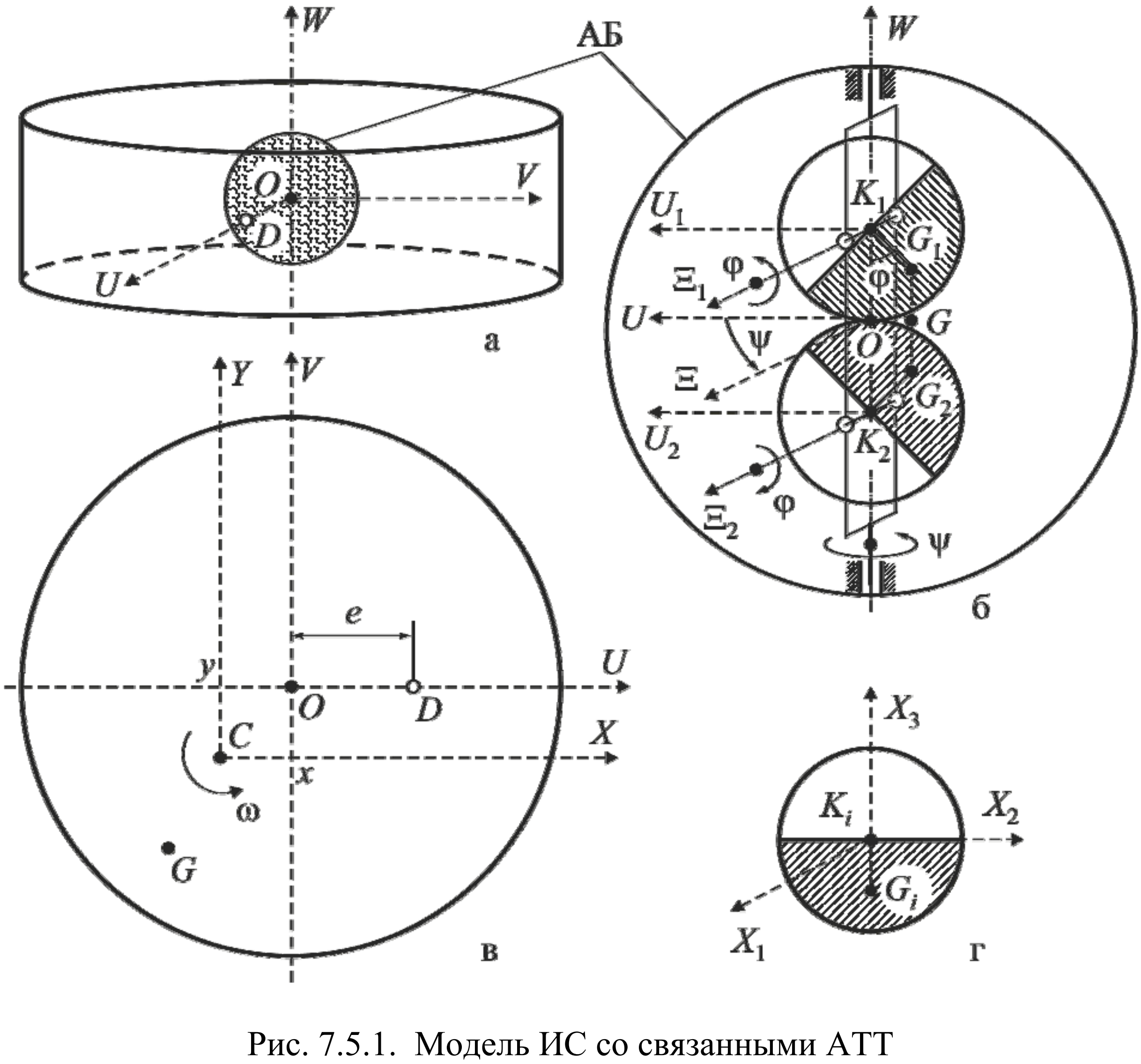


Рис. 7.5.1. Модель ИС со связанными АТТ

Предполагаем, что ось W – наибольшего момента инерции. В противном случае предполагаем, что существует активная система по поддержанию плоскопараллельного движения НТ. Причем, в силу указанных особенностей системы, ее масса и создаваемые силы – малы и их можно не учитывать.

Будем выделять основные движения, в которых точка D уравновешена связанными АТТ, точки O и C совпадают и тело вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси W=Z. Наряду с основными движениями могут существовать побочные. В них точка D не уравновешена, и тело вращается вокруг оси Z, не совпадающей с осью W. Заметим, что в силу особенностей системы ось Z – ее главная центральная ось инерции.

С учетом вышеизложенного, движение системы определяем обобщенными координатами x, y, φ, ψ.

7.5.2. Уравнения движения системы

Тогда имеем следующую систему уравнений в безразмерном виде, описывающих движение системы, полученных из:

- теоремы о движении центра масс системы

$$\xi + 2R_m\left(e_0 - \sin\varphi\sin\psi\right) = 0, \quad \eta + 2R_m\sin\varphi\cos\psi = 0; \tag{7.5.2}$$

- закона сохранения момента количества движения материальной системы

$$[R_J - \xi^2 - \eta^2]R_\omega + \xi'\eta - \eta'\xi + 2R_\rho^2 R_m\psi' = R_J; \tag{7.5.3}$$

- и теоремы об изменении момента количества движения для связанных АТТ

$$\begin{gathered}\varphi'' + h_1\varphi' - [(\xi'' - 2R_\omega\eta' - R_\omega^2\xi - R'_\omega\eta)\sin\psi - \\ - (\eta'' + 2R_\omega\xi' - R_\omega^2\eta + R'_\omega\xi)\cos\psi]\cos\varphi = 0, \\ (\psi'' + R'_\omega)R_\rho^2 + h_2R_\rho^2\psi' - [(\xi'' - 2R_\omega\eta' - R_\omega^2\xi - R'_\omega\eta)\cos\psi + \\ + (\eta'' + 2R_\omega\xi' - R_\omega^2\eta + R'_\omega\xi)\sin\psi]\sin\varphi = 0,\end{gathered} \tag{7.5.4}$$

где в (7.5.2-7.5.4) безразмерные переменные и время:

$$\xi = \frac{xl}{\rho_1^2}, \quad \eta = \frac{yl}{\rho_1^2}, \quad R_\omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \left(\frac{d}{dt} = \omega_0\frac{d}{d\tau}\right), \tag{7.5.5}$$

и безразмерные параметры:

$$R_J = \frac{(J_O + m_d e^2 + 2B)\ l^2}{M_\Sigma\rho_1^4}; \quad R_m = \frac{ml^2}{M_\Sigma\rho_1^2}; \quad h_{1/2} = \frac{H_{1/2}}{m\rho_{1/2}^2\omega_0},$$

$$R_\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad e_0 = \frac{m_d e}{2ml}, \tag{7.5.6}$$

причем в (7.5.5) и (7.5.6) $M_\Sigma = M + m_d + 2m$, $\rho_1 = \sqrt{A/m}$, $\rho_2 = \sqrt{B/m}$, ω_0 – угловая скорость, с которой бы вращалась уравновешенная система как жесткое целое вокруг главной центральной оси НТ, t – размерное время.

7.5.3. Исследование условной устойчивости установившихся движений энергетическим методом

1. Приведение задачи определения условий стабилизации положения оси вращения НТ к задаче исследования осевого момента инерции системы на условный экстремум.

Поскольку на систему действуют только диссипативные силы и ее полная энергия совпадает с кинетической, то

$$\frac{dT}{dt} = -2R, \tag{7.5.7}$$

где T – кинетическая энергия системы, R – диссипативная функция Релея. Удвоенное значение функции Релея характеризует быстроту уменьшения полной механической энергии. В связи с тем, что во время переходных процессов к системе не подводится внешняя и внутренняя энергия, то со временем движение системы установится и кинетическая энергия системы примет экстремальное значение. В установившихся движениях связанные АТТ с телом будут вращаться как одно целое и кинетическая энергия системы будет определяться формулой:

$$T = \frac{1}{2}\widetilde{J}_z R_\omega^2, \tag{7.5.8}$$

где

$$\widetilde{J}_Z = R_J - \xi^2 - \eta^2 = R_J - 4R_m^2 e_0^2 + 8R_m^2 e_0 \sin\varphi \sin\psi - 4R_m^2 \sin^2\varphi, \tag{7.5.9}$$

- безразмерный осевой момент инерции системы.

Из (7.5.8), (7.5.9) видно, что в установившемся движении кинетическая энергия системы зависит от параметров $\xi, \eta, \varphi, \psi, R_\omega$, связанных уравнениями (7.5.2) и (7.5.3).

Сделаем следующие замечания:

- из уравнений (7.5.2) и (7.5.3) можно заключить, что параметры $\xi, \eta, \varphi, \psi, R_\omega$ изменяются одновременно или одновременно являются постоянными;
- во время переходных процессов кинетическая энергия системы уменьшается, так как диссипативная функция – положительна;
- если количество установившихся движений конечно, то осуществляться будут только те, в которых кинетическая энергия системы будет иметь абсолютный или локальный минимум.

С учетом уравнения (7.5.3), кинетическую энергию системы в установившемся движении можно записать следующим образом:

$$T = \frac{1}{2}\frac{R_J^2}{\widetilde{J}_z}, \tag{7.5.10}$$

где $R_J^2/2 = \text{const}$. Из (7.5.10) видно, что когда T принимает минимальное значение, $\widetilde{J}_z$ принимает максимум и т. д. Поэтому будем исследовать на условный экстремум осевой момент инерции $\widetilde{J}_z$, а не кинетическую энергию системы.

2. Исследование осевого момента инерции системы на условный экстремум.

Исследования осевого момента инерции системы на условный экстремум позволяют дать ответ относительно того, устойчивы или неустойчивы установившиеся движения системы. Используем для этого критерий Сильвестра.

1. Исследование на условный экстремум осевого момента инерции системы как функции ξ, η. Найдем первые частные производные от равенства (7.5.9) по ξ,η и приравняем их к нулю, получим:

$$\partial\widetilde{J}_z / \partial\xi = -2\xi = 0, \quad \partial\widetilde{J}_z / \partial\eta = -2\eta = 0. \qquad (7.5.11)$$

Необходимое условие существования экстремума выполняется при $\xi, \eta = 0$. Заметим, что это соответствует одному из основных движений (при условии его существования), так как в них тело вращается вокруг собственной главной центральной оси. Найдем вторые частные производные от равенства (7.5.9) по ξ и η, получим:

$$a_{11} = \frac{\partial^2\widetilde{J}_z}{\partial\xi^2} = -2, \; a_{22} = \frac{\partial^2\widetilde{J}_z}{\partial\eta^2} = -2, \; a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2\widetilde{J}_z}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{\partial^2\widetilde{J}_z}{\partial\eta\partial\xi} = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 4 > 0. \qquad (7.5.12)$$

Согласно критерия Сильвестра $\widetilde{J}_z$ принимает максимальное значение. Тогда T принимает минимальное значение и поэтому основное движение устойчиво или устойчивы основные движения (при условии его или их существования).

2. Исследование на условный экстремум осевого момента инерции системы как функции φ, ψ. Найдем первые частные производные от равенства (7.5.9) по φ и ψ:

$$\frac{\partial\widetilde{J}_z}{\partial\varphi} = 8R_m^2\cos\varphi\left(e_0\sin\psi - \sin\varphi\right) = 0, \; \frac{\partial\widetilde{J}_z}{\partial\psi} = 8R_m^2 e_0\sin\varphi\cos\psi = 0. \; (7.5.13)$$

Анализ полученной системы уравнений показывает, что установившиеся движения делятся на три группы, в которых связанные АТТ вращаются синхронно с телом.

В первой группе (рис. 7.5.2, а, б) $\varphi_1 = \varphi_0$, $\varphi_2 = \pi - \varphi_0$, $\varphi_0 = \arcsin(e_0)$ – АТТ отклонены противоположно точке D – ровно на столько, что компенсируют неуравновешенность. В этих движениях осуществлена стабилизация оси вращения НТ ξ=η=0. Поэтому это два основных движения. Здесь и ниже будем полагать, что

$$0 < e_0 < 1, \qquad (7.5.14)$$

причем данное неравенство – достаточное условие существования двух основных движений.

Во второй группе (рис. 7.5.2, в, г) $\varphi_3 = -\pi/2$, $\varphi_4 = \pi/2$ – АТТ максимально отклонены в сторону материальной точки, создающей неуравновешенность, или отклонены в противоположную сторону, не уравновешивают тело и поэтому это побочные движения.

В третьей группе (рис. 7.5.2, д, е.) $\varphi_5 = 0$, $\varphi_6 = \pi$ – АТТ не отклонены или повернуты вокруг вторых осей вращения на 180^0, не уравновешивают тело и поэтому это побочные движения. В обоих движениях вторые оси вращения АТТ параллельны вектору отклонения центральной оси НТ от оси вращения.

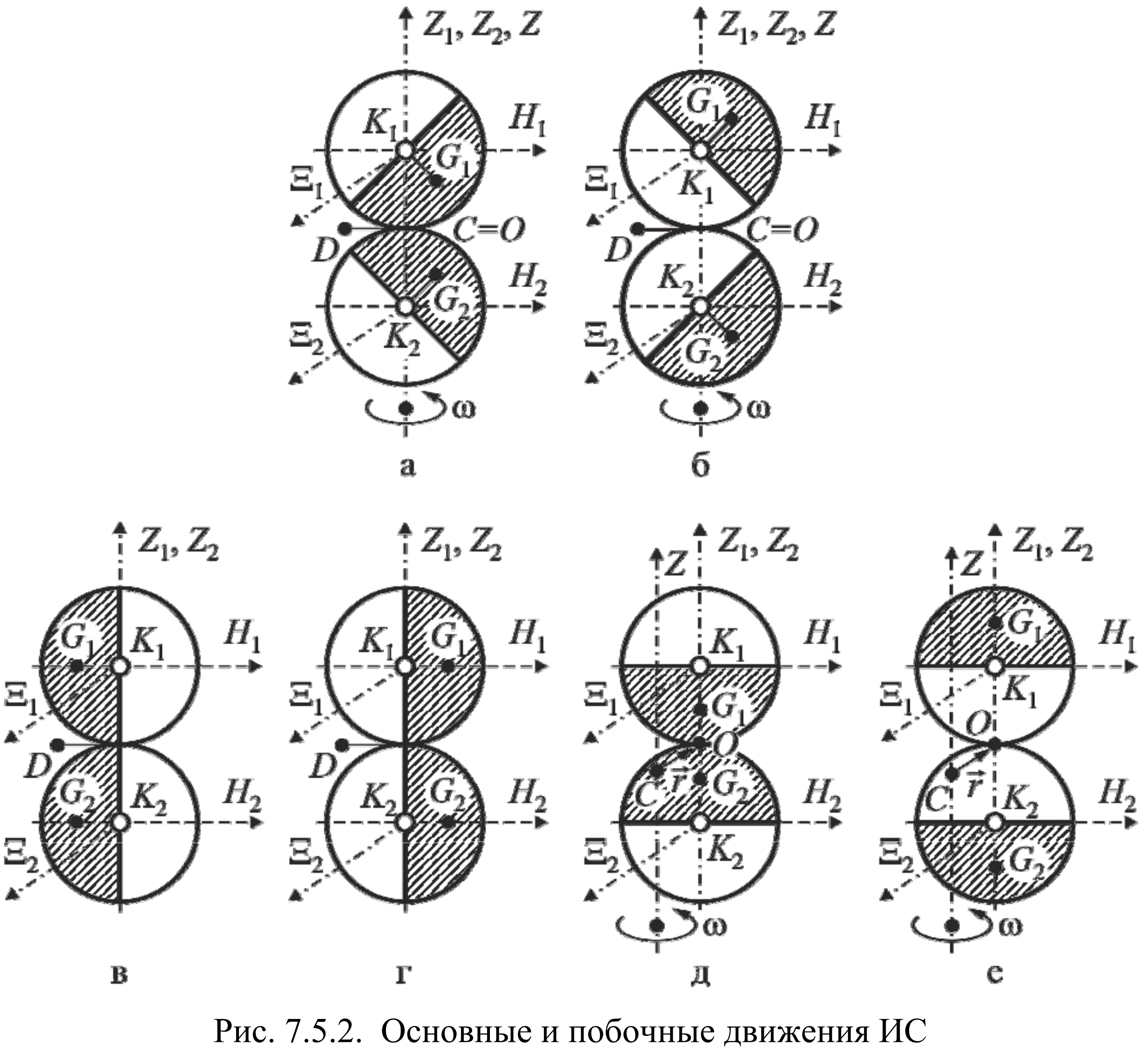


Рис. 7.5.2. Основные и побочные движения ИС

Для основных движений будем иметь:

$$\Delta_1 = a_{11} = \frac{\partial^2 \widetilde{J}_z}{\partial \varphi^2} = -8R_m^2\left(1-e_0^2\right) < 0\,, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 \widetilde{J}_z}{\partial \psi^2} = -8R_m^2 e_0^2\,,$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 \widetilde{J}_z}{\partial \varphi\psi} = \frac{\partial^2 \widetilde{J}_z}{\partial \psi\varphi} = 0\,, \; \Delta_2 = 64R_m^4 e_0^2\left(1-e_0^2\right) > 0\,. \qquad (7.5.15)$$

Видно, что $\widetilde{J}_z$ будет иметь максимум, T – минимум, и основные движения – устойчивы.

Для движения φ_3 будем иметь:

$$\Delta_1 = a_{11} = 8R_m^2\left(1+e_0\right) > 0\,, \quad a_{22} = 8R_m^2 e_0\,, \quad a_{12} = a_{21} = 0\,,$$

$$\Delta_2 = 64R_{\mathrm{m}}^4 e_0\left(1+e_0\right) > 0\,. \qquad (7.5.16)$$

Видно, что $\widetilde{J}_z$ принимает минимальное значение, а T – максимальное, и рассматриваемое движение неустойчиво.

Для движения φ_4 будем иметь:

$$\Delta_1 = a_{11} = 8R_m^2\left(1-e_0\right) > 0\,, \quad a_{22} = -8R_m^2 e_0\,, \quad a_{12} = a_{21} = 0\,,$$

$$\Delta_2 = -64R_{\mathrm{m}}^4 e_0 (1-e_0) < 0\,. \qquad (7.5.17)$$

Видно, что и $\widetilde{J}_z$, и T принимают значения, не являющиеся максимумом или минимумом, и рассматриваемые движения неустойчивы.

Аналогично для движений φ_5 и φ_6 будем соответственно иметь:

$$\Delta_1 = a_{11} = -8R_m^2 < 0\,,\; a_{22} = 0\,,\; a_{12} = a_{21} = \pm 8R_m^2 e_0\,,\; \Delta_2 = -64R_{\mathrm{m}}^4 e_0^2 < 0\,. \qquad (7.5.18)$$

где верхний знак соответствует движению φ_5, а нижний – φ_6. Видно, что и $\widetilde{J}_z$, и T принимают значения, не являющиеся максимумом или минимумом, и рассматриваемые движения неустойчивы.

Поскольку у системы конечное число установившихся движений и среди них устойчивы основные, а побочные – неустойчивы, то со временем будет осуществляться только одно из основных движений.

Заметим, что найденные установившиеся движения системы можно получить и из уравнений движений (7.5.2-7.5.4), положив в них производные равными нулю. Однако для ответа на вопрос об устойчивости (неустойчивости) движений необходимы исследования, проведенные выше.

7.5.4. Исследование условной устойчивости основного установившегося движения первым методом Ляпунова для случая $0 < e_0 < 1$

Данное исследование с применением первого метода Ляпунова дает возможность определить скорость затухания переходных процессов, а также собственные частоты колебаний системы в случае, когда она была выведена, вследствие возмущений, из основного движения.

Введем отклонение от основного движения:

$$\xi = u\,;\; \eta = v\,;\; \varphi = \tilde{\varphi} + \alpha\,;\; \psi = \tilde{\psi} + \beta\,;\; R_\omega = \tilde{R}_\omega + p\,, \tag{7.5.19}$$

где u, v, α, β, p – возмущения ($|u|,|v|,|\alpha|,|\beta|,|p| << 1$); $0, 0, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{R}_\omega$ – невозмущенное движение. Из (7.5.2) находим u,v и их первые и вторые производные v', v'', u', u'', а из (7.5.3) находим p и p'. Тогда уравнения (7.5.4) после линеаризации и преобразований примут вид:

$$(1 - 2R_m\cos^2\tilde{\varphi})\alpha'' + h_1\alpha' + 2R_m\cos^2\tilde{\varphi}\alpha + 2R_m\sin 2\tilde{\varphi}\beta' = 0\,;$$

$$\left(R_\rho^2 - 2\frac{R_\rho^4}{R_J}R_m - 2R_m\sin^2\tilde{\varphi}\right)\beta'' + h_2R_\rho^2\beta' + 2R_m\sin^2\tilde{\varphi}\beta - 2R_m\sin 2\tilde{\varphi}\alpha' = 0\,. \tag{7.5.20}$$

Обозначим:

$$b_{11} = \left(1 - 2R_m\cos^2\tilde{\varphi}\right)\lambda^2 + h_1\lambda + 2R_m\cos^2\tilde{\varphi};\; b_{12} = 2R_m\sin 2\tilde{\varphi}\lambda\,;$$

$$b_{21} = -2R_m\sin 2\tilde{\varphi}\lambda\,;$$

$$b_{22} = \left(R_\rho^2 - 2\frac{R_\rho^4}{R_J}R_m - 2R_m\sin^2\tilde{\varphi}\right)\lambda^2 + h_2R_\rho^2\lambda + 2R_m\sin^2\tilde{\varphi}\,. \tag{7.5.21}$$

Тогда характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0\,,$$

$$a_0 = (1 - 2R_m\cos^2\tilde{\varphi})d\,; \qquad a_1 = (1 - 2R_m\cos^2\tilde{\varphi})h_2R_\rho^2 + dh_1\,;$$

$$a_2 = h_1h_2R_\rho^2 + 4R_m^2\sin^2 2\tilde{\varphi} + \left(1 - 2R_m\cos^2\tilde{\varphi}\right)2R_m\sin^2\tilde{\varphi} + 2dR_m\cos^2\tilde{\varphi}\,;$$

$$a_3 = 2h_1R_m\sin^2\tilde{\varphi} + 2h_2R_mR_\rho^2\cos^2\tilde{\varphi}\,; \qquad a_4 = R_m^2\sin^2 2\tilde{\varphi}\,, \tag{7.5.22}$$

где

$$d = R_\rho^2 - 2\frac{R_\rho^4}{R_J}R_m - 2R_m\sin^2\tilde{\varphi}\,. \tag{7.5.23}$$

Критерий Рауса-Гурвица дает следующие условия асимптотической устойчивости основных движений:

$$a_i > 0, \quad / i = \overline{1,4} /,$$
$$\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,\ \Delta_3 = \Delta_2 a_3 - a_1^2 a_4 > 0,$$
$$\Delta_4 = a_4 \Delta_3 > 0. \qquad (7.5.24)$$

Первая группа условий будет выполняться, если будет выполняться условие: $d > 0$. Или, в наиболее неблагоприятном случае ($\sin^2 \tilde{\varphi} \approx 1$):

$$d = R_\rho^2 - \left(2R_\rho^4 R_m \big/ R_J\right) - 2R_m > 0. \qquad (7.5.25)$$

Учитывая выражения (7.5.6), приводим условие (7.5.25) к виду:

$$\left[M + 2m\left(1 - \frac{ml^2}{B}\right)\right](J_O + m_d e^2) + J_O m_d > 0, \qquad (7.5.26)$$

Условие (7.5.26) является условием существования основного движения и выполняется всегда, поскольку для любого АТТ $ml^2 < B$. Вторая группа условий в (7.5.24), при подстановке a_i, будет иметь вид:

$$\Delta_1 = (1 - 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi}) h_2 R_\rho^2 + dh_1 > 0;$$
$$\Delta_2 = 2h_2 R_m R_\rho^2 \sin^2 \tilde{\varphi} (1 - 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi})^2 +$$
$$+ 2h_1 R_m \cos^2 \tilde{\varphi} d^2 + (h_1 h_2 R_\rho^2 + 4R_m^2 \sin^2 2\tilde{\varphi})[h_2 R_\rho^2 (1 - 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi}) + h_1 d] > 0;$$
$$\Delta_3 = 4R_m^2 R_\rho^2 h_1 h_2 [(1 - 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi}) \sin^2 \tilde{\varphi} + d \cos^2 \tilde{\varphi}]^2 +$$
$$+ 2R_m [(1 - 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi}) R_\rho^2 h_2 + dh_1] \times$$
$$\times (R_\rho^2 h_1 h_2 + 4R_m^2 \sin^2 2\tilde{\varphi})(h_1 \sin^2 \tilde{\varphi} + R_\rho^2 h_2 \cos^2 \tilde{\varphi}) > 0. \qquad (7.5.27)$$

Видно, что эти условия автоматически выполняются при выполнении условия (7.5.26).

Исследуем устойчивость основных движений в случае, когда $R_m << 1$. Тогда корни характеристического уравнения (7.5.22) имеют следующие разложения по степеням малого параметра R_m:

$$\lambda_{1,2} \approx -h,\ \lambda_4 \approx -\frac{2R_m \cos^2 \tilde{\varphi}}{h_1},\ \lambda_5 \approx -\frac{2R_m \sin^2 \tilde{\varphi}}{h_2 R_\rho^2}. \qquad (7.5.28)$$

Поскольку корни (7.5.28) действительные и отрицательные, то основные движения устойчивы, а переходные процессы апериодические.

Выводы главы 7

В данной главе исследовалась условная устойчивость установившихся движений ИС, в рамках НТ движется плоскопараллельно. При этом получены следующие основные результаты.

1. Впервые построена плоская (НТ осуществляет плоскопараллельное движение) теоретико-механическая модель ИС, состоящей из вращающегося НТ, неподвижной относительно НТ материальной точки, создающей неуравновешенность, и математических маятников, насаженных на продольную ось НТ, относительному движению которых препятствуют силы вязкого сопротивления.

2. Установлено, что в общем случае движение системы определяют $n+3$ обобщенных координат. В случае n одинаковых маятников динамику системы характеризуют восемь размерных или пять существенно различных безразмерных параметров.

3. Впервые установлено, что в рамках плоской модели ИС с двумя одинаковыми математическими маятниками:

- в случае, когда есть неуравновешенность и маятники могут ее устранить с определенным запасом, существует одно основное движение;
- в случае, когда неуравновешенность отсутствует, существует однопараметрическая семья основных движений;
- в случае, когда неуравновешенность максимальна, которую могут устранить маятники, существует одно основное движение, но оно порождает псевдосемью основных движений;
- условно асимптотически устойчивыми являются отдельные основные движения, если они изолированы, или семья, или псевдосемья основных движений;
- в случае отсутствия неуравновешенности, один нулевой корень характеристического уравнения не влияет на устойчивость однопараметрической семьи основных движений, а отвечает за переход от одного к другому установившемуся движению из семьи;
- в случае максимальной неуравновешенности наличие одного нулевого корня у характеристического уравнения не влияет на устойчивость основного движения, а отвечает за переход от одного к другому установившемуся движению из псевдосемьи;
- в случае, когда масса маятников намного меньше массы системы, переходные процессы в зависимости от параметров системы могут быть апериодично- или колебательно-затухающими;
- побочные движения неустойчивы.

4. Впервые установлено, что в рамках плоской модели ИС с n одинаковыми математическими маятниками:

- система имеет $n-2$ параметрическое семейство основных движений, в которых точка уравновешена и осуществляется стабилизация положения оси вращения АТТ ($z = w$);
- система имеет побочные движения, в которых точка не уравновешена и не осуществляется стабилизации положения оси вращения АТТ, причем при $e_0 \neq 0$ для четного и нечетного количества маятников существует $(n+1)$ существенно различных побочных движений, а при $e_0 = 0$ для четного числа маятников – $n/2+1$, для нечетного – $(n+1)/2$ существенно различных однопараметрических семейств побочных движений;
- основные движения устойчивы, а побочные – неустойчивы;
- со временем система будет совершать определенное движение из семейства основных, то есть осуществится стабилизация положения оси вращения АТТ;
- в случае, когда $R_m << 1$ и система была выведена из основного движения, переходные процессы апериодические.

5. Впервые установлено, что в рамках ИС, в которой НТ совершает плоскопараллельное движение и уравновешивается двумя связанными АТТ:

- рассматриваемая система имеет шесть существенно различных установившихся движений: два основных, в которых связанные АТТ компенсируют неуравновешенность, создаваемую точкой; четыре побочных, в которых система не уравновешена, причем в первом – связанные АТТ максимально отклонены в сторону точки, создающей неуравновешенность, во втором – в противоположную сторону, в третьем и четвертом положении не отклонены или повернуты на 180^0;
- основные движения устойчивы, а побочные неустойчивы;
- со временем система будет осуществлять одно из основных движений, т.е. произойдет стабилизация положения оси вращения НТ;
- в случае, когда $R_m << 1$ и система была выведена из основного движения, переходные процессы апериодические.

ГЛАВА 8.
ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА УСТРАНЕНИЯ МАЯТНИКОВЫМИ АБ МАЛЫХ УГЛОВ НУТАЦИИ

Построена пространственная (в которой НТ осуществляет пространственное движение) теоретико-механическая модель уравновешивания маятниками НТ в ИС. Найдены массо-инерционные характеристики ИС. С помощью основных теорем динамики составлены уравнения движения системы и приведены к безразмерному виду.

В случае статически неуравновешенного НТ с двумя одинаковыми маятниками проведен анализ основных установившихся движений, исследована их условная устойчивость первым методом Ляпунова при условии, что масса маятников намного меньше массы НТ. С помощью числового эксперимента исследовано влияние разных параметров системы на скорость затухания переходных процессов.

ISBN 978-617-7197-24-8

8.1. Построение теоретико-механической модели ИС

8.1.1. Описание теоретико-механической модели ИС

1. Общее описание модели. НТ имеет массу M, центр масс в точке O и осевые моменты инерции A, B, C относительно его главных центральных осей инерции X, Y, Z (рис. 8.1.1, а). Неуравновешенность НТ относительно оси Z создают k неподвижных относительно НТ материальных точек, расположенных в плоскостях $X_i D_i Y_i$, параллельных плоскости XOY (рис. 8.1.1). Положение плоскости $X_i D_i Y_i$ задает координата d_i, отсчитываемая по оси Z. Материальная точка имеет массу μ_i и ее положение задает эксцентриситет e_i и угол γ_i $/ i = \overline{1,k} /$.

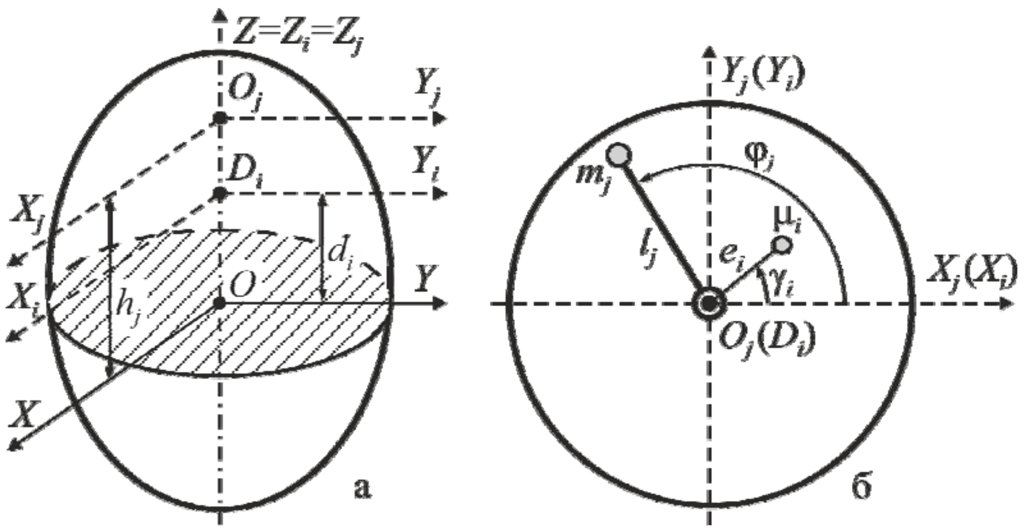


Рис. 8.1.1. Модель ИС

На ось Z насажены n математических маятников длины l_j и массы m_j, расположенных в плоскостях $X_j O_j Y_j$, параллельных плоскости XOY (рис. 8.1.1, а, б). Положение плоскости $X_j O_j Y_j$ задает координата h_j, отсчитываемая по оси Z. В случае n одинаковых математических маятников: $m_j = m$, $l_j = l$.

Отметим, что в рассмотренных моделях вместо маятников можно рассматривать шары массой m_j, движущиеся по кольцевым дорожкам радиуса l_j. Причем шары принимаются за материальные точки, или l_j – расстояние от оси Z_j до центра масс j-го шара, и осевым моментом инерции шара относительно собственного центра масс пренебрегаем. В дальнейшем, для краткости, будем ссылаться лишь на маятники.

2. Описание движения маятников и НТ.

Движение маятника. Положение j-го маятника определяет угол поворота φ_j, отсчитываемый от оси X_j, параллельной оси X, причем ось X_j выходит из точки O_j, вокруг которой вращается маятник (рис. 8.1.1, б). При движении маятника относительно НТ, на него действует момент сил вязкого сопротивления $-H_j l_j^2 \dot{\varphi}_j$, где $H_j l_j^2$ – коэффициент момента сил вязкого сопротивления, приведенный к плечу l_j.

Особенности движения системы. Так как система изолирована, то центр масс системы – точка G движется равномерно, прямолинейно. Не ограничивая общности, считаем, что точка G неподвижна. В соответствии с законом сохранения момента количества движения системы $\mathbf{K}_G = \mathbf{const}$. Введем неподвижные оси $G\xi\eta\zeta$, причем ось ζ направим вдоль вектора $\mathbf{K}_G$ (на рис. 8.1.1 и 8.1.2 оси $G\xi\eta\zeta$ – не показаны). Оси $OXYZ$, жестко связанные с НТ, описывают его движение относительно осей $G\xi\eta\zeta$ и определяют его текущее положение.

Пространственное движение НТ представим так (рис. 8.1.2).

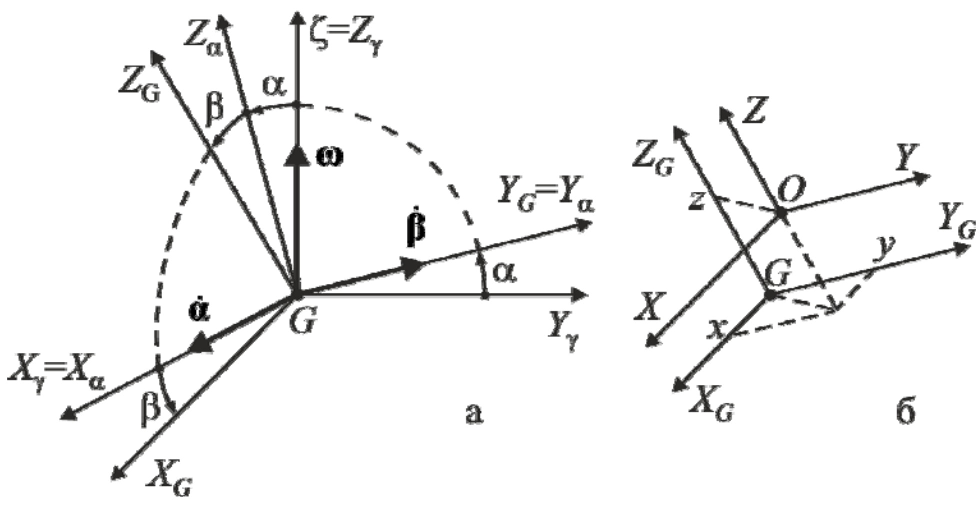


Рис. 8.1.2. Схема пространственного движения НТ

При первом повороте осей $G\xi\eta\zeta$ вокруг оси ζ на угол γ, соответствующем первому углу поворота Эйлера-Крылова, оси $G\xi\eta\zeta$ переходят в оси $GX_\gamma Y_\gamma Z_\gamma$, $Z_\gamma = \zeta$ (на рис. 8.1.2, а оси $G\xi\eta\zeta$ и первый поворот не показаны). После второго поворота на угол α вокруг оси X_γ оси $GX_\gamma Y_\gamma Z_\gamma$ переходят в оси $GX_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$, $X_\alpha = X_\gamma$. После третьего поворота на угол β вокруг оси Y_α, оси $GX_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$ переходят в оси $GX_G Y_G Z_G$, $Y_\alpha = Y_G$, определяющие конечную угловую ориентацию НТ, потому что параллельны осям $OXYZ$ (рис. 8.1.2, а). Оси $GX_G Y_G Z_G$ переходят в оси $OXYZ$ после поступательных перемещений на x, y, z, вдоль соответствующих координатных осей (рис. 8.1.2, б). Следовательно, пространственное движение ИС определяют $n+6$ обобщенных координат

$$\varphi_j,\ /\ j=\overline{1,n}\ /,\ \gamma,\ \alpha,\ \beta,\ x,\ y,\ z.$$

Заметим, что угол γ – циклическая координата.

3. Массо-инерционные характеристики ИС.

В проекциях на оси $GX_G Y_G Z_G$ или оси $OXYZ$ абсолютный радиус-вектор центра масс НТ $\mathbf{r}_O$ (проведен из точки G), относительный радиус-вектор i-ой материальной точки $\boldsymbol{\rho}_{\mu i}$, создающей неуравновешенность и относительный радиус-вектор j-го маятника $\boldsymbol{\rho}_j$ (проведены из точки O), имеют вид:

$$\mathbf{r}_O = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\rho}_{\mu i} = \begin{bmatrix} e_i \cos\gamma_i \\ e_i \sin\gamma_i \\ d_i \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\rho}_j = \begin{bmatrix} l_j \cos\varphi_j \\ l_j \sin\varphi_j \\ h_j \end{bmatrix},\ /\, i=\overline{1,k};\ \ j=\overline{1,n}\,/. \quad (8.1.1)$$

Тензор инерции системы относительно осей $OXYZ$ имеет вид:

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}, \quad (8.1.2)$$

где

$$J_x = A + \sum_{i=1}^{k} \mu_i (d_i^2 + e_i^2 \sin^2\gamma_i) + \sum_{j=1}^{n} m_j (h_j^2 + l_j^2 \sin^2\varphi_j),$$

$$J_{xy} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i^2 \sin 2\gamma_i + \sum_{j=1}^{n} m_j l_j^2 \sin 2\varphi_j \right),$$

$$J_{xz} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i d_i \cos\gamma_i + \sum_{j=1}^{n} m_j l_j h_j \cos\varphi_j\,,$$

$$J_y = B + \sum_{i=1}^{k} \mu_i (d_i^2 + e_i^2 \cos^2\gamma_i) + \sum_{j=1}^{n} m_j (h_j^2 + l_j^2 \cos^2\varphi_j),$$

$$J_{yz} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i d_i \sin\gamma_i + \sum_{j=1}^{n} m_j l_j h_j \sin\varphi_j,\ \ J_z = C + \sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i^2 + \sum_{j=1}^{n} m_j l_j^2\,. \quad (8.1.3)$$

Тензор инерции системы относительно осей $GX_G Y_G Z_G$ имеет вид:

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_O - M_\Sigma \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} J_{x_G} & -J_{x_G y_G} & -J_{x_G z_G} \\ -J_{x_G y_G} & J_{y_G} & -J_{y_G z_G} \\ -J_{x_G z_G} & -J_{y_G z_G} & J_{z_G} \end{pmatrix}. \qquad (8.1.4)$$

где $M_\Sigma = M + \sum_{i=1}^{k} \mu_i + \sum_{j=1}^{n} m_j$ – суммарная масса системы. В связи с этим осевые и центробежные моменты инерции системы относительно центральных осей $GX_G Y_G Z_G$ имеют вид:

$$J_{x_G} = J_x - M_\Sigma (y^2 + z^2),\ J_{x_G y_G} = J_{xy} - M_\Sigma xy,\ J_{x_G z_G} = J_{xz} - M_\Sigma xz,$$
$$J_{y_G} = J_y - M_\Sigma (x^2 + z^2),\ J_{y_G z_G} = J_{yz} - M_\Sigma yz,\ J_{z_G} = J_z - M_\Sigma (x^2 + y^2). \qquad (8.1.5)$$

8.1.2. Уравнения движения ИС

1. Уравнение движения ИС, полученные с помощью закона сохранения движения центра масс системы. Первую группу уравнений движения получим с помощью закона сохранения движения центра масс системы:

$$M_\Sigma \mathbf{r}_G = M\mathbf{r}_O + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \mathbf{r}_{\mu i} + \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{r}_j = 0,, \qquad (8.1.6)$$

где $\mathbf{r}_O$, $\mathbf{r}_{\mu i}$, $\mathbf{r}_j$ – соответственно радиус-векторы точки O, i-ой материальной точки, создающей неуравновешенность, и j-ой сосредоточенной массы маятника, найденные относительно точки G. В свою очередь

$$\mathbf{r}_{\mu i} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}_{\mu i},\ \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}_j. \qquad (8.1.7)$$

Отметим, что уравнение (8.1.6) является вторым интегралом, с помощью которого будем исследовать условную устойчивость стационарных движений.

Подставляя (8.1.7) в (8.1.6) получим закон сохранения движения системы в относительных радиус-векторах:

$$M_\Sigma \mathbf{r}_G = M_\Sigma \mathbf{r}_O + \sum_{i=1}^{k} \mu_i (\mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}_{\mu i}) + \sum_{j=1}^{n} m_j (\mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}_j) =$$

$$= M_\Sigma \mathbf{r}_O + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \boldsymbol{\rho}_{\mu i} + \sum_{j=1}^{n} m_j \boldsymbol{\rho}_j = 0. \qquad (8.1.8)$$

Следовательно, **вторые интегралы** в общем случае в проекциях на оси $GX_GY_GZ_G$, с учетом (8.1.1), имеют вид**:**

$$M_\Sigma x+\sum_{i=1}^{k}\mu_i e_i\cos\gamma_i+\sum_{j=1}^{n}m_j l_j\cos\varphi_j=0,$$

$$M_\Sigma y+\sum_{i=1}^{k}\mu_i e_i\sin\gamma_i+\sum_{j=1}^{n}m_j l_j\sin\varphi_j=0,\ \ M_\Sigma z+\sum_{i=1}^{k}\mu_i d_i+\sum_{j=1}^{n}m_j h_j=0\,. \tag{8.1.9}$$

2. Уравнение движения ИС, полученные с помощью закона сохранения кинетического момента относительно центра масс системы. Вторую группу уравнений движения получим с помощью закона сохранения кинетического момента относительно центра масс системы. Приняв за переносное движение вращение системы вокруг точки G вместе с осями $GX_GY_GZ_G$, а за относительное – движение системы относительно осей $GX_GY_GZ_G$, получим:

$$\mathbf{K}_G=\mathbf{K}_G^e+\mathbf{K}_G^r=\mathbf{const}, \tag{8.1.10}$$

где $\mathbf{K}_G^e$ – кинетический момент переносного движения; $\mathbf{K}_G^r$ – кинетический момент относительного движения. Отметим, что уравнение (8.1.10) является первым интегралом, с помощью которого будем исследовать условную устойчивость стационарных движений.

Кинетический момент переносного движения имеет вид:

$$\mathbf{K}_G^e=\mathbf{J}_G\mathbf{\Omega}, \tag{8.1.11}$$

где $\mathbf{\Omega}$ – угловая скорость вращения осей $GX_GY_GZ_G$.

Из рис. 8.1.2 находим

$$\mathbf{\Omega}=\begin{bmatrix}\Omega_x\\ \Omega_y\\ \Omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot\alpha\cos\beta-\omega\cos\alpha\sin\beta\\ \dot\beta+\omega\sin\alpha\\ \dot\alpha\sin\beta+\omega\cos\alpha\cos\beta\end{bmatrix}. \tag{8.1.12}$$

В проекциях на оси $GX_GY_GZ_G$ получим:

$$\mathbf{K}_G^e=(K_{x_G}^e,\ K_{y_G}^e,\ K_{z_G}^e)^{\mathrm{T}}, \tag{8.1.13}$$

где в неявном виде

$$K_{x_G}^e=J_{x_G}\Omega_x-J_{x_Gy_G}\Omega_y-J_{x_Gz_G}\Omega_z,$$
$$K_{y_G}^e=-J_{x_Gy_G}\Omega_x+J_{y_G}\Omega_y-J_{y_Gz_G}\Omega_z,$$
$$K_{z_G}^e=-J_{x_Gz_G}\Omega_x-J_{y_Gz_G}\Omega_y+J_{z_G}\Omega_z. \tag{8.1.14}$$

Кинетический момент относительного движения имеет вид:

$$\mathbf{K}_G^r=\mathbf{r}_O\times M\mathbf{v}_O^r+\sum_{i=1}^{k}\mathbf{r}_{\mu i}\times\mu_i\mathbf{v}_{\mu i}^r+\sum_{j=1}^{n}\mathbf{r}_j\times m_j\mathbf{v}_j^r, \tag{8.1.15}$$

где $\mathbf{v}_O^r$, $\mathbf{v}_{\mu i}^r$, $\mathbf{v}_j^r$ – соответственно относительные скорости точки O, i-ой материальной точки, создающей неуравновешенность, и сосредоточенной массы j-го маятника.

Заметим, что:

$$\mathbf{v}_{\mu i}^r = \mathbf{v}_O^r, \ \mathbf{v}_j^r = \mathbf{v}_O^r + \mathbf{u}_j, \ /i = \overline{1,k}; \ j = \overline{1,n}/, \tag{8.1.16}$$

где $\mathbf{u}_j$ – составляющая относительной скорости j-го маятника, вызванная изменением соответствующего угла поворота маятника. В проекциях на оси $GX_GY_GZ_G$:

$$\mathbf{u}_j = l_j\dot{\varphi}_j \begin{bmatrix} -\sin\varphi_j \\ \cos\varphi_j \\ 0 \end{bmatrix}, \ /j = \overline{1,n}/. \tag{8.1.17}$$

Подставляя (8.1.16) в (8.1.15) и учитывая равенство (8.1.6), получим:

$$\mathbf{K}_G^r = \mathbf{r}_O \times M\mathbf{v}_O^r + \sum_{i=1}^{k}\mathbf{r}_{\mu i} \times \mu_i \mathbf{v}_O^r + \sum_{j=1}^{n}\mathbf{r}_j \times m_j(\mathbf{v}_O^r + \mathbf{u}_j) =$$

$$= \left(M\mathbf{r}_O + \sum_{i=1}^{k}\mu_i\mathbf{r}_{\mu i} + \sum_{j=1}^{n} m_j\mathbf{r}_j \right) \times \mathbf{v}_O^r + \sum_{j=1}^{n}\mathbf{r}_j \times m_j\mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{r}_j \times m_j\mathbf{u}_j. \tag{8.1.18}$$

В проекциях на оси $GX_GY_GZ_G$:

$$\mathbf{K}_G^r = (K_{x_G}^r, \ \ K_{y_G}^r, \ \ K_{z_G}^r)^{\mathrm{T}}, \tag{8.1.19}$$

где

$$K_{x_G}^r = -\sum_{j=1}^{n} m_j l_j (z + h_j)\dot{\varphi}_j \cos\varphi_j, \ K_{y_G}^r = -\sum_{j=1}^{n} m_j l_j (z + h_j)\dot{\varphi}_j \sin\varphi_j,$$

$$K_{z_G}^r = \sum_{j=1}^{n} m_j l_j \dot{\varphi}_j (l_j + x\cos\varphi_j + y\sin\varphi_j). \tag{8.1.20}$$

На основном движении маятники устранили неуравновешенность, их относительное движение прекратилось, и система вращается с постоянной угловой скоростью ω_0, как одно жесткое целое, вокруг оси $\zeta = Z_G = Z$. Тогда считая, что на основном движении $\alpha, \beta, x, y, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}_j = 0$, получим, что вектор $\mathbf{K}_G$ направлен вдоль оси ζ и имеет модуль $K = J_z\omega_0$. Тогда на любом установившемся движении (в том числе и побочном) в проекциях на оси $GX_GY_GZ_G$:

$$\mathbf{K}_G = K(-\cos\alpha\sin\beta, \ \sin\alpha, \ \cos\alpha\cos\beta)^{\mathrm{T}}. \tag{8.1.21}$$

Следовательно, **первые интегралы** в общем случае в проекциях на оси $GX_GY_GZ_G$, с учетом (8.1.14), (8.1.20) и (8.1.21), имеют вид**:**

$$J_{x_G}\Omega_x - J_{x_G y_G}\Omega_y - J_{x_G z_G}\Omega_z - \sum_{j=1}^{n} m_j l_j (z + h_j)\dot{\varphi}_j \cos\varphi_j = -K\cos\alpha\sin\beta,$$

$$-J_{x_G y_G}\Omega_x + J_{y_G}\Omega_y - J_{y_G z_G}\Omega_z - \sum_{j=1}^{n} m_j l_j (z + h_j)\dot{\varphi}_j \sin\varphi_j = K\sin\alpha,$$

$$-J_{x_G z_G}\Omega_x - J_{y_G z_G}\Omega_y + J_{z_G}\Omega_z + \sum_{j=1}^{n} m_j l_j \dot{\varphi}_j (l_j + x\cos\varphi_j + y\sin\varphi_j) =$$

$$= K\cos\alpha\cos\beta. \qquad (8.1.22)$$

3. Уравнение движения маятников. Третью группу n дифференциальных уравнений движения маятников найдем с помощью теоремы об изменении момента количества движения материальной точки. Для j-го маятника теорема имеет вид:

$$\left(\frac{d'\mathbf{K}_{O_j}}{dt} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{K}_{O_j} + \boldsymbol{\rho}_{O_j}\times m_j\mathbf{a}_{O_j}\right)\cdot\mathbf{k} = \mathbf{M}_{O_j}^{(e)}\cdot\mathbf{k},\ /\ j = \overline{1,n}\ /, \qquad (8.1.23)$$

где: $\mathbf{K}_{O_j}$ – момент количества движения j-го маятника, найденный относительно точки O_j; $d'\mathbf{K}_{O_j}/dt$ – его локальная производная по времени в подвижной системе координат $O_j X_j Y_j Z_j$; $\mathbf{\Omega}$ – угловая скорость вращения подвижных осей $O_j X_j Y_j Z_j$ (не зависит от индекса j); $\boldsymbol{\rho}_{O_j}$ – радиус вектор j-го маятника, выходящий из точки O_j и заканчивающийся в сосредоточенной массе маятника, определен относительно осей $O_j X_j Y_j Z_j$; m_j – масса j-го маятника; $\mathbf{a}_{O_j}$ – абсолютное ускорение точки O_j; $\mathbf{k}$ – единичный вектор, направленный вдоль оси Z_j (не зависит от индекса j); $\mathbf{M}_{O_j}^{(e)}$ – главный момент внешних сил, действующих на j-ый маятник, найденный относительно точки O_j.

В свою очередь:

$$\mathbf{K}_{O_j} = \mathbf{J}_j\mathbf{\Omega}_j,\ /\ j = \overline{1,n}\ /, \qquad (8.1.24)$$

где: $\mathbf{\Omega}_j$ – абсолютная угловая скорость вращения j-го маятника; $\mathbf{J}_j$ – тензор инерции маятника, найденный относительно точки O_j.

В проекциях на координатные оси $GX_G Y_G Z_G$:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix}\Omega_x\\ \Omega_y\\ \Omega_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot{\alpha}\cos\beta - \omega\cos\alpha\sin\beta\\ \dot{\beta} + \omega\sin\alpha\\ \dot{\alpha}\sin\beta + \omega\cos\alpha\cos\beta\end{bmatrix},\ \mathbf{\Omega}_j = \begin{bmatrix}\Omega_x\\ \Omega_y\\ \Omega_z + \dot{\varphi}_j\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\rho}_{O_j} = l_j\begin{bmatrix}\cos\varphi_j\\ \sin\varphi_j\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_j = m_j l_j^2 \begin{bmatrix} \sin^2\varphi_j & -\cos\varphi_j \sin\varphi_j & 0 \\ -\cos\varphi_j \sin\varphi_j & \cos^2\varphi_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{O_j}^{(e)} = \begin{bmatrix} M_{xj}^e \\ M_{yj}^e \\ -H_i\dot{\varphi}_j \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{O_j} = m_j l_j^2 \begin{bmatrix} \Omega_x \sin^2\varphi_j - \Omega_y \sin\varphi_j \cos\varphi_j \\ \Omega_y \cos^2\varphi_j - \Omega_x \sin\varphi_j \cos\varphi_j \\ \Omega_z + \dot{\varphi}_j \end{bmatrix}. \tag{8.1.25}$$

Ищем абсолютное ускорение точки O_j, как при сложном движении. За переносное движение примем ее вращательное движение с осями $GX_GY_GZ_G$ вокруг точки G, за относительное – движение относительно осей $GX_GY_GZ_G$. В соответствии с теоремой Кориолиса ускорение точки O_j имеет вид [137]:

$$\mathbf{a}_{O_j} = \mathbf{a}_{O_j}^r + \mathbf{a}_{O_j}^e + \mathbf{a}_{O_j}^c, \tag{8.1.26}$$

где: $\mathbf{a}_{O_j}^r$, $\mathbf{a}_{O_j}^e$, $\mathbf{a}_{O_j}^c$ – соответственно относительное, переносное, Кориолисово ускорение точки O_j. Из рис. 8.1.2 определяем в проекциях на оси $GX_GY_GZ_G$ радиус-вектор точки O_j, ее относительные скорость и ускорение:

$$\mathbf{r}_{O_j} = (x,\quad y,\quad z + h_j)^{\mathrm{T}},\ \mathbf{v}_{O_j}^r = (\dot{x},\quad \dot{y},\quad 0)^{\mathrm{T}},\ \mathbf{a}_{O_j}^r = (\ddot{x},\quad \ddot{y},\quad 0)^{\mathrm{T}}. \tag{8.1.27}$$

Переносное ускорение точки O_j имеет вид:

$$\mathbf{a}_{O_j}^e = \mathbf{a}_{O_j}^{вр} + \mathbf{a}_{O_j}^{цс}, \tag{8.1.28}$$

где $\mathbf{a}_{O_j}^{вр}$, $\mathbf{a}_{O_j}^{цс}$ – соответственно вращательное и центростремительное ускорение точки O_j.

В свою очередь:

$$\mathbf{a}_{O_j}^{вр} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{O_j},\ \mathbf{a}_{O_j}^{цс} = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{O_j}), \tag{8.1.29}$$

В (8.1.29) $\boldsymbol{\varepsilon}$ – угловое ускорение вращения осей $GX_GY_GZ_G$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{\Omega}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} = \frac{d'\boldsymbol{\Omega}}{dt} = (\dot{\Omega}_x,\quad \dot{\Omega}_y,\quad \dot{\Omega}_z)^{\mathrm{T}}, \tag{8.1.30}$$

где

$$\dot{\Omega}_x = \ddot{\alpha}\cos\beta - \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta - \dot{\omega}\cos\alpha\sin\beta + \omega\dot{\alpha}\sin\alpha\sin\beta - \omega\dot{\beta}\cos\alpha\cos\beta,$$

$$\dot{\Omega}_y = \ddot{\beta} + \dot{\omega}\sin\alpha + \omega\dot{\alpha}\cos\alpha,$$

$$\dot{\Omega}_z = \ddot{\alpha}\sin\beta + \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta + \dot{\omega}\cos\alpha\cos\beta - \omega\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\beta - \omega\dot{\beta}\cos\alpha\sin\beta.$$

С учетом (8.1.27) и (8.1.30), ускорения $\mathbf{a}_{O_j}^{вр}$, $\mathbf{a}_{O_j}^{цс}$ и $\mathbf{a}_{O_j}^{c}$ имеют вид:

$$\mathbf{a}^{c}_{O_j} = 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}^{r}_{O_j} = 2\begin{bmatrix} -\dot{y}\Omega_z \\ \dot{x}\Omega_z \\ \dot{y}\Omega_x - \dot{x}\Omega_y \end{bmatrix},\ \mathbf{a}^{вр}_{O_j} = \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_y(z+h_j) - \dot{\Omega}_z y \\ \dot{\Omega}_z x - \dot{\Omega}_x(z+h_j) \\ \dot{\Omega}_x y - \dot{\Omega}_y x \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}^{цс}_{O_j} = \begin{bmatrix} -(\Omega_y^2+\Omega_z^2)x + \Omega_x[\Omega_y y + \Omega_z(z+h_j)] \\ -(\Omega_x^2+\Omega_z^2)y + \Omega_y[\Omega_x x + \Omega_z(z+h_j)] \\ -(\Omega_x^2+\Omega_y^2)(z+h_j) + \Omega_z(\Omega_x x + \Omega_y y) \end{bmatrix}. \qquad (8.1.31)$$

С учетом (8.1.31), проекции абсолютного ускорения точки O_j на оси X_j и Y_j имеют следующий вид:

$$a_{O_j x} = \ddot{x} + \dot{\Omega}_y(z+h_j) - \dot{\Omega}_z y - (\Omega_y^2+\Omega_z^2)x + \Omega_x[\Omega_y y + \Omega_z(z+h_j)] - 2\Omega_z\dot{y},$$

$$a_{O_j y} = \ddot{y} + \dot{\Omega}_z x - \dot{\Omega}_x(z+h_j) - (\Omega_x^2+\Omega_z^2)y +$$
$$+\Omega_y[\Omega_x x + \Omega_z(z+h_j)] + 2\Omega_z\dot{x}. \qquad (8.1.32)$$

Окончательно, с учетом (8.1.25) и (8.1.32), дифференциальное уравнение движения j-го маятника имеет вид:

$$m_j l_j^2\ddot{\varphi}_j + H_j\dot{\varphi}_j + m_j l_j[\ddot{y}\cos\varphi_j - \ddot{x}\sin\varphi_j + \dot{\Omega}_z(l_j + x\cos\varphi_j + y\sin\varphi_j) -$$
$$-(z+h_j)(\dot{\Omega}_y\sin\varphi_j + \dot{\Omega}_x\cos\varphi_j) + 2\Omega_z(\dot{x}\cos\varphi_j + \dot{y}\sin\varphi_j) - \Omega_x^2(y + l_j\sin\varphi_j)\cos\varphi_j +$$
$$+\Omega_y^2(x + l_j\cos\varphi_j)\sin\varphi_j - \Omega_z^2(y\cos\varphi_j - x\sin\varphi_j) - \Omega_x\Omega_y(y\sin\varphi_j - x\cos\varphi_j -$$
$$-l_j\cos 2\varphi_j) - \Omega_z(z+h_j)(\Omega_x\sin\varphi_j - \Omega_y\cos\varphi_j)] = 0,\ \ /j=\overline{1,n}/. \qquad (8.1.33)$$

8.1.3. Уравнение движения ИС в случаях одинаковых маятников

1. Случай динамического уравновешивания НТ двумя парами одинаковых маятников. НТ совершает пространственное движение. Динамическую неуравновешенность создают две неподвижные относительно НТ материальные точки, расположенные соответственно в плоскостях $X_1O_1Y_1$ и $X_2O_2Y_2$. В каждой плоскости находится пара одинаковых маятников. Тогда неуравновешенность и маятники характеризуют такие параметры: μ_i, e_i, γ_i, $m_j = m$, $l_j = l$, $d_i = h_j$, $/i = j = 1,2/$.

Осевые и центробежные моменты инерции системы относительно осей $OXYZ$ имеют вид:

$$J_x = A + \sum_{i=1}^{2}\mu_i(h_i^2 + e_i^2\sin^2\gamma_i) + m\sum_{j=1}^{2}[2h_j^2 + l^2(\sin^2\varphi_j + \sin^2\psi_j)],$$

$$J_{xy} = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{2}\mu_i e_i^2\sin 2\gamma_i + ml^2\sum_{j=1}^{2}(\sin 2\varphi_j + \sin 2\psi_j)\right],$$

$$J_{xz} = \sum_{i=1}^{2} \mu_i e_i h_i \cos\gamma_i + ml\sum_{j=1}^{2} h_j(\cos\varphi_j + \cos\psi_j),$$

$$J_y = B + \sum_{i=1}^{2} \mu_i (h_i^2 + e_i^2 \cos^2\gamma_i) + m\sum_{j=1}^{n}[2h_j^2 + l^2(\cos^2\varphi_j + \cos^2\psi_j)],$$

$$J_{yz} = \sum_{i=1}^{2}\mu_i e_i h_i \sin\gamma_i + ml\sum_{j=1}^{2} h_j(\sin\varphi_j + \sin\psi_j),\ \ J_z = C + \sum_{i=1}^{2}\mu_i e_i^2 + 4ml^2; \quad (8.1.34)$$

Осевые и центробежные моменты инерции системы относительно осей $GX_GY_GZ_G$ имеют вид:

$$J_{x_G} = J_x - M_\Sigma(y^2 + z^2),\quad J_{x_Gy_G} = J_{xy} - M_\Sigma xy,\quad J_{x_Gz_G} = J_{xz} - M_\Sigma xz,$$

$$J_{y_G} = J_y - M_\Sigma(x^2 + z^2),\quad J_{y_Gz_G} = J_{yz} - M_\Sigma yz,$$

$$J_{z_G} = J_z - M_\Sigma(x^2 + y^2), \quad (8.1.35)$$

где $M_\Sigma = M + \mu_1 + \mu_2 + 4m$ – масса всей системы.

Уравнения движения имеют вид:

- вторые интегралы

$$M_\Sigma x + \sum_{i=1}^{2}\mu_i e_i \cos\gamma_i + ml\sum_{j=1}^{2}(\cos\varphi_j + \cos\psi_j) = 0,$$

$$M_\Sigma y + \sum_{i=1}^{2}\mu_i e_i \sin\gamma_i + ml\sum_{j=1}^{2}(\sin\varphi_j + \sin\psi_j) = 0,$$

$$M_\Sigma z + \sum_{i=1}^{2} h_i(\mu_i + 2m) = 0; \quad (8.1.36)$$

- первые интегралы

$$J_{x_G}\Omega_x - J_{x_Gy_G}\Omega_y - J_{x_Gz_G}\Omega_z -$$

$$-ml\sum_{j=1}^{2}(z + h_j)(\dot\varphi_j\cos\varphi_j + \dot\psi_j\cos\psi_j) = -K\cos\alpha\sin\beta,$$

$$-J_{x_Gy_G}\Omega_x + J_{y_G}\Omega_y - J_{y_Gz_G}\Omega_z -$$

$$-ml\sum_{j=1}^{2}(z + h_j)(\dot\varphi_j\sin\varphi_j + \dot\psi_j\sin\psi_j) = K\sin\alpha,$$

$$-J_{x_Gz_G}\Omega_x - J_{y_Gz_G}\Omega_y + J_{z_G}\Omega_z + ml\sum_{j=1}^{2}[\dot\varphi_j(l + x\cos\varphi_j + y\sin\varphi_j) +$$

$$+\dot\psi_j(l + x\cos\psi_j + y\sin\psi_j)] = K\cos\alpha\cos\beta; \quad (8.1.37)$$

- уравнение движения маятников

$$H\dot\phi_j + ml[\ddot\varphi_j l + \ddot y\cos\phi_j - \ddot x\sin\phi_j + \dot\Omega_z(l + x\cos\phi_j + y\sin\phi_j) -$$

$$-(z + h_1)(\dot\Omega_y\sin\phi_j + \dot\Omega_x\cos\phi_j) + 2\Omega_z(\dot x\cos\phi_j + \dot y\sin\phi_j) -$$

$$-\Omega_x^2(y+l\sin\phi_j)\cos\phi_j+\Omega_y^2(x+l\cos\phi_j)\sin\phi_j-\Omega_z^2(y\cos\phi_j-x\sin\phi_j)-$$
$$-\Omega_x\Omega_y(y\sin\phi_j-x\cos\phi_j-l\cos 2\phi_j)-\Omega_z(z+h_j)(\Omega_x\sin\phi_j-\Omega_y\cos\phi_j)]=0,$$
$$/\ j=\overline{1,2};\ \ \phi=\varphi,\psi\ /. \qquad (8.1.38)$$

2. Случай статического уравновешивания НТ двумя маятниками. НТ осуществляет пространственное движение. Статическую неуравновешенность создает неподвижная относительно НТ материальная точка, расположенная в плоскости $X_1O_1Y_1$, находящейся на расстоянии h от плоскости XOY. В плоскости $X_1O_1Y_1$ находится пара одинаковых маятников. Следовательно, неуравновешенность и маятники характеризуют такие параметры: $\mu_i=\mu$, $e_i=e_0$, $\gamma_i=\gamma_0$, $m_j=m$, $l_j=l$, $d_i=h_j=h$, $/i=1,\ j=1,2/$.

Осевые и центробежные моменты инерции системы относительно осей $OXYZ$ имеют вид:

$$J_x=A+\mu(h^2+e_0^2\sin^2\gamma_0)+m\left(2h^2+l^2\sum_{j=1}^{2}\sin^2\varphi_j\right),$$
$$J_{xy}=\frac{1}{2}\left(\mu e_0^2\sin 2\gamma_0+ml^2\sum_{j=1}^{2}\sin 2\varphi_j\right),\ J_{xz}=h\left(\mu e_0\cos\gamma_0+ml\sum_{j=1}^{2}\cos\varphi_j\right),$$
$$J_y=B+\mu(h^2+e_0^2\cos^2\gamma_0)+m\left(2h^2+l^2\sum_{j=1}^{2}\cos^2\varphi_j\right),$$
$$J_{yz}=h\left(\mu e_0\sin\gamma_0+ml\sum_{j=1}^{2}\sin\varphi_j\right),\ J_z=C+\mu e_0^2+2ml^2. \qquad (8.1.39)$$

Осевые и центробежные моменты инерции системы относительно осей $GX_GY_GZ_G$ имеют вид:

$$J_{x_G}=J_x-M_\Sigma(y^2+z^2),\quad J_{x_Gy_G}=J_{xy}-M_\Sigma xy,\quad J_{x_Gz_G}=J_{xz}-M_\Sigma xz,$$
$$J_{y_G}=J_y-M_\Sigma(x^2+z^2),\quad J_{y_Gz_G}=J_{yz}-M_\Sigma yz,$$
$$J_{z_G}=J_z-M_\Sigma(x^2+y^2), \qquad (8.1.40)$$

где $M_\Sigma=M+\mu+2m$ - масса всей системы.

Уравнения движения имеют вид:

- вторые интегралы

$$M_\Sigma x+\mu e_0\cos\gamma_0+ml\sum_{j=1}^{2}\cos\varphi_j=0,$$
$$M_\Sigma y+\mu e_0\sin\gamma_0+ml\sum_{j=1}^{2}\sin\varphi_j=0,\ M_\Sigma z+h(\mu+2m)=0; \ (8.1.41)$$

- первые интегралы

$$J_{x_G}\Omega_x - J_{x_G y_G}\Omega_y - J_{x_G z_G}\Omega_z - ml(z+h)\sum_{j=1}^{2}\dot{\varphi}_j\cos\varphi_j = -K\cos\alpha\sin\beta,$$

$$-J_{x_G y_G}\Omega_x + J_{y_G}\Omega_y - J_{y_G z_G}\Omega_z - ml(z+h)\sum_{j=1}^{2}\dot{\varphi}_j\sin\varphi_j = K\sin\alpha,$$

$$-J_{x_G z_G}\Omega_x - J_{y_G z_G}\Omega_y + J_{z_G}\Omega_z +$$

$$+ml\sum_{j=1}^{2}\dot{\varphi}_j(l + x\cos\varphi_j + y\sin\varphi_j) = K\cos\alpha\cos\beta; \qquad (8.1.42)$$

- уравнение движения маятников

$$H\dot{\varphi}_j + ml[\ddot{\varphi}_j l + \ddot{y}\cos\varphi_j - \ddot{x}\sin\varphi_j + \dot{\Omega}_z(l + x\cos\varphi_j + y\sin\varphi_j) -$$

$$-(z+h_1)(\dot{\Omega}_y\sin\varphi_j + \dot{\Omega}_x\cos\varphi_j) + 2\Omega_z(\dot{x}\cos\varphi_j + \dot{y}\sin\varphi_j) -$$

$$-\Omega_x^2(y + l\sin\varphi_j)\cos\varphi_j + \Omega_y^2(x + l\cos\varphi_j)\sin\varphi_j -$$

$$-\Omega_z^2(y\cos\varphi_j - x\sin\varphi_j) - \Omega_x\Omega_y(y\sin\varphi_j - x\cos\varphi_j -$$

$$-l\cos 2\varphi_j) - \Omega_z(z+h_j)(\Omega_x\sin\varphi_j - \Omega_y\cos\varphi_j)] = 0, \quad / j = \overline{1,2} /. \qquad (8.1.43)$$

8.1.4. Приведение уравнений движения к безразмерному виду

Учитывая результаты главы 4 будем исследовать устойчивость основного движения, в частности – характер протекания переходных процессов и влияние параметров системы на этот процесс, только в случае статического уравновешивания НТ двумя одинаковыми маятниками. Из уравнений (8.1.41) – (8.1.43) видно, что в этом случае динамику системы характеризуют двенадцать размерных параметров:

$$M,\ \mu,\ m,\ e_0,\ \gamma_0,\ l,\ h,\ A,\ B,\ C,\ H,\ \omega_0. \qquad (a)$$

Для выделения существенно различных параметров приведем уравнения (8.1.41) - (8.1.43) к безразмерному виду.

Введем новые:

- безразмерные переменные и время

$$\xi = \frac{x}{l},\ \eta = \frac{y}{l},\ \zeta = \frac{z}{l},\ R_\omega = \frac{\omega}{\omega_0},\ \tau = \omega_0 t,\ \left(\frac{d\,\cdot}{dt} = \omega_0\frac{d\,\cdot}{d\tau}\right); \qquad (8.1.44)$$

- безразмерные параметры

$$\tilde{J}_x = \frac{A + \mu(h^2 + e_0^2\sin^2\gamma_0) + 2mh^2}{J_z},\ \tilde{J}_y = \frac{B + \mu(h^2 + e_0^2\cos^2\gamma_0) + 2mh^2}{J_z},$$

$$\tilde{H} = \frac{H}{ml^2\omega_0},\ R_m = \frac{m}{M_\Sigma},\ R_J = \frac{M_\Sigma l^2}{J_z},\ R_h = \frac{h}{l},\ R_e = \frac{e_0}{l},\ \tilde{e}_0 = \frac{\mu e_0}{2ml}. \qquad (8.1.45)$$

1. Вспомогательные преобразования.

Преобразовываем угловые скорости:

$$\tilde{\Omega}_x = \frac{\Omega_x}{\omega_0} = \frac{\dot{\alpha}\cos\beta - \omega\cos\alpha\sin\beta}{\omega_0} = \frac{\alpha'\omega_0\cos\beta - \omega\cos\alpha\sin\beta}{\omega_0} = \alpha'\cos\beta - R_\omega\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\tilde{\Omega}_y = \frac{\Omega_y}{\omega_0} = \frac{\dot{\beta} + \omega\sin\alpha}{\omega_0} = \frac{\beta'\omega_0 + \omega\sin\alpha}{\omega_0} = \beta' + R_\omega\sin\alpha,$$

$$\tilde{\Omega}_z = \frac{\Omega_z}{\omega_0} = \frac{\dot{\alpha}\sin\beta + \omega\cos\alpha\cos\beta}{\omega_0} = \frac{\alpha'\omega_0\sin\beta + \omega\cos\alpha\cos\beta}{\omega_0} =$$

$$= \alpha'\sin\beta + R_\omega\cos\alpha\cos\beta. \qquad (а)$$

Преобразовываем угловые ускорения:

$$\tilde{\Omega}'_x = \alpha''\cos\beta - \alpha'\beta'\sin\beta - R'_\omega\cos\alpha\sin\beta + \alpha' R_\omega\sin\alpha\sin\beta - \beta' R_\omega\cos\alpha\cos\beta,$$

$$\tilde{\Omega}'_y = \beta'' + R'_\omega\sin\alpha + \alpha' R_\omega\cos\alpha,$$

$$\tilde{\Omega}'_z = \alpha''\sin\beta - \alpha'\beta'\cos\beta + R'_\omega\cos\alpha\cos\beta - \alpha' R_\omega\sin\alpha\cos\beta - \beta' R_\omega\cos\alpha\sin\beta. \qquad (б)$$

Также имеют место такие соотношения:

$$\Omega_x = \omega_0\tilde{\Omega}_x,\ \Omega_y = \omega_0\tilde{\Omega}_y,\ \Omega_z = \omega_0\tilde{\Omega}_z,\ \dot{\Omega}_x = \omega_0^2\tilde{\Omega}'_x,\ \dot{\Omega}_y = \omega_0^2\tilde{\Omega}'_y,\ \dot{\Omega}_z = \omega_0^2\tilde{\Omega}'_z. \qquad (в)$$

Преобразовываем осевые моменты инерции системы:

$$\frac{J_x}{J_z} = \frac{1}{J_z}\left[A + \mu(h^2 + e_0^2\sin^2\gamma_0) + m\left(2h^2 + l^2\sum_{j=1}^{2}\sin^2\varphi_j\right)\right] =$$

$$= \frac{A + \mu(h^2 + e_0^2\sin^2\gamma_0) + 2mh^2}{J_z} + \frac{ml^2}{J_z}\sum_{j=1}^{2}\sin^2\varphi_j = \tilde{J}_x + \frac{ml^2}{J_z}\frac{M_\Sigma}{M_\Sigma}\sum_{j=1}^{2}\sin^2\varphi_j =$$

$$= \tilde{J}_x + \frac{m}{M_\Sigma}\frac{M_\Sigma l^2}{J_z}\sum_{j=1}^{2}\sin^2\varphi_j = \tilde{J}_x + R_m R_J\sum_{j=1}^{2}\sin^2\varphi_j,$$

$$\frac{J_y}{J_z} = \frac{1}{J_z}\left[B + \mu(h^2 + e_0^2\cos^2\gamma_0) + m\left(2h^2 + l^2\sum_{j=1}^{2}\cos^2\varphi_j\right)\right] =$$

$$= \frac{B + \mu(h^2 + e_0^2\cos^2\gamma_0) + 2mh^2}{J_z} + \frac{m}{M_\Sigma}\frac{M_\Sigma l^2}{J_z}\sum_{j=1}^{2}\cos^2\varphi_j = \tilde{J}_y + R_m R_J\sum_{j=1}^{2}\cos^2\varphi_j. \qquad (г)$$

Выше сделано такое преобразование:

$$\frac{\mu e_0^2}{J_z} = 2\frac{e_0}{l}\cdot\frac{\mu e_0}{2ml}\cdot\frac{m}{M_\Sigma}\cdot\frac{M_\Sigma l^2}{J_z} = 2R_e e_0 R_m R_J. \qquad (д)$$

Преобразовываем центробежные моменты инерции системы:

$$\frac{J_{xy}}{J_z}=\frac{1}{2J_z}\left(\mu e_0^2\sin 2\gamma_0+ml^2\sum_{j=1}^{2}\sin 2\varphi_j\right)=\frac{1}{2}\left(2\frac{e_0}{l}\cdot\frac{\mu e_0}{2ml}\cdot\frac{m}{M_\Sigma}\cdot\frac{M_\Sigma l^2}{J_z}\sin 2\gamma_0+\right.$$

$$\left.+\frac{m}{M_\Sigma}\frac{M_\Sigma l^2}{J_z}\sum_{j=1}^{2}\sin 2\varphi_j\right)=\frac{1}{2}R_m R_J\left(2R_e\tilde{e}_0\sin 2\gamma_0+\sum_{j=1}^{2}\sin 2\varphi_j\right);$$

$$\frac{J_{xz}}{J_z}=\frac{h}{J_z}\left(\mu e_0\cos\gamma_0+ml\sum_{j=1}^{2}\cos\varphi_j\right)=\frac{h}{J_z}\frac{M_\Sigma ml^2}{M_\Sigma ml^2}\left(\mu e_0\cos\gamma_0+ml\sum_{j=1}^{2}\cos\varphi_j\right)=$$

$$=\frac{m}{M_\Sigma}\frac{M_\Sigma l^2}{J_z}\frac{h}{l}\left(\frac{2\mu e_0}{2ml}\cos\gamma_0+\sum_{j=1}^{2}\cos\varphi_j\right)=R_m R_J R_h\left(2\tilde{e}_0\cos\gamma_0+\sum_{j=1}^{2}\cos\varphi_j\right);$$

$$\frac{J_{yz}}{J_z}=\frac{h}{J_z}\left(\mu e_0\sin\gamma_0+ml\sum_{j=1}^{2}\sin\varphi_j\right)=\frac{h}{J_z}\frac{M_\Sigma ml^2}{M_\Sigma ml^2}\left(\mu e_0\sin\gamma_0+ml\sum_{j=1}^{2}\sin\varphi_j\right)=$$

$$=\frac{m}{M_\Sigma}\frac{M_\Sigma l^2}{J_z}\frac{h}{l}\left(\frac{2\mu e_0}{2ml}\sin\gamma_0+\sum_{j=1}^{2}\sin\varphi_j\right)=R_m R_J R_h\left(2\tilde{e}_0\sin\gamma_0+\sum_{j=1}^{2}\sin\varphi_j\right).\qquad\text{(е)}$$

2. Преобразование уравнений движения.

Преобразовываем вторые интегралы (8.1.41). Делим их на $M_\Sigma l$, получаем:

$$\tilde{b}_1=\frac{M_\Sigma x+\mu e_0\cos\gamma_0+ml(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)}{M_\Sigma l}=\frac{x}{l}+\frac{\mu e_0}{M_\Sigma l}\frac{2ml}{2ml}\cos\gamma_0+$$

$$+\frac{ml}{M_\Sigma l}(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)=\xi+R_m(2\tilde{e}_0\cos\gamma_0+\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)=0,$$

$$\tilde{b}_2=\frac{M_\Sigma y+\mu e_0\sin\gamma_0+ml(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)}{M_\Sigma l}=\frac{y}{l}+\frac{\mu e_0}{M_\Sigma l}\frac{2ml}{2ml}\sin\gamma_0+$$

$$+\frac{ml}{M_\Sigma l}(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)=\eta+R_m(2\tilde{e}_0\sin\gamma_0+\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)=0,$$

$$\tilde{b}_3=\frac{M_\Sigma z+h(\mu+2m)}{M_\Sigma l}=\frac{z}{l}+\frac{h}{l}\left(\frac{\mu}{M_\Sigma}+\frac{2m}{M_\Sigma}\right)=$$

$$=\zeta+R_h\left(2\frac{m}{M_\Sigma}\cdot\frac{\mu e_0}{2ml}\cdot\frac{l}{e_0}+2\frac{m}{M_\Sigma}\right)=\zeta+2R_m R_h\left(\frac{\tilde{e}_0}{R_e}+1\right)=0\,.\qquad\text{(ж)}$$

Преобразовываем первые интегралы. Записываем их в виде

$$b_4=[J_x-M_\Sigma(y^2+z^2)]\Omega_x-(J_{xy}-M_\Sigma xy)\Omega_y-$$

$$-(J_{xz}-M_\Sigma xz)\Omega_z-ml(z+h)\sum_{j=1}^{2}\dot{\varphi}_j\cos\varphi_j+K\cos\alpha\sin\beta=0,$$

$$b_5=-(J_{xy}-M_\Sigma xy)\Omega_x+[J_y-M_\Sigma(x^2+z^2)]\Omega_y-$$

$$-(J_{yz}-M_\Sigma yz)\Omega_z - ml(z+h)\sum_{j=1}^{2}\dot{\varphi}_j\sin\varphi_j - K\sin\alpha = 0,$$

$$b_6 = -(J_{xz}-M_\Sigma xz)\Omega_x - (J_{yz}-M_\Sigma yz)\Omega_y + [J_z - M_\Sigma(x^2+y^2)]\Omega_z +$$

$$+ml\sum_{j=1}^{2}(l\dot{\varphi}_j + x\dot{\varphi}_j\cos\varphi_j + y\dot{\varphi}_j\sin\varphi_j) - K\cos\alpha\cos\beta = 0.$$

Делим на $K = J_z\omega_0$, получаем:

$$\widetilde{b}_4 = \frac{b_4}{J_z\omega_0} = \left[\frac{J_x}{J_z} - \frac{M_\Sigma l^2}{J_z l^2}(y^2+z^2)\right]\frac{\widetilde{\Omega}_x\omega_0}{\omega_0} - \left(\frac{J_{xy}}{J_z} - \frac{M_\Sigma l^2 xy}{J_z l^2}\right)\frac{\widetilde{\Omega}_y\omega_0}{\omega_0} -$$

$$-\left(\frac{J_{xz}}{J_z} - \frac{M_\Sigma l^2 xz}{J_z l^2}\right)\frac{\widetilde{\Omega}_z\omega_0}{\omega_0} - \frac{ml(z+h)}{J_z\omega_0}\frac{M_\Sigma l^2}{M_\Sigma l^2}\sum_{j=1}^{2}\varphi'_j\omega_0\cos\varphi_j + \cos\alpha\sin\beta =$$

$$=\left[\left(\widetilde{J}_x + R_m R_J\sum_{j=1}^{2}\sin^2\varphi_j\right) - R_J(\eta^2+\zeta^2)\right]\widetilde{\Omega}_x - \left[\frac{1}{2}R_m\Big(2R_e\widetilde{e}_0\sin 2\gamma_0 +\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{2}\sin 2\varphi_j\Big) - \xi\eta\right]R_J\widetilde{\Omega}_y - \left[R_m R_h\left(2\widetilde{e}_0\cos\gamma_0 + \sum_{j=1}^{2}\cos\varphi_j\right) - \xi\zeta\right]R_J\widetilde{\Omega}_z -$$

$$-R_m R_J(\zeta+R_h)\sum_{j=1}^{2}\varphi'_j\cos\varphi_j + \cos\alpha\sin\beta = 0,$$

$$\widetilde{b}_5 = \frac{b_5}{J_z\omega_0} = -\left(\frac{J_{xy}}{J_z} - \frac{M_\Sigma l^2 xy}{J_z l^2}\right)\frac{\widetilde{\Omega}_x\omega_0}{\omega_0} + \left[\frac{J_y}{J_z} - \frac{M_\Sigma l^2}{J_z l^2}(x^2+z^2)\right]\frac{\widetilde{\Omega}_y\omega_0}{\omega_0} -$$

$$-\left(\frac{J_{yz}}{J_z} - \frac{M_\Sigma l^2 yz}{J_z l^2}\right)\frac{\widetilde{\Omega}_z\omega_0}{\omega_0} - \frac{ml(z+h)}{J_z\omega_0}\frac{M_\Sigma l^2}{M_\Sigma l^2}\sum_{j=1}^{2}\varphi'_j\omega_0\sin\varphi_j + \sin\alpha =$$

$$= -\left[\frac{1}{2}R_m\left(2R_e\widetilde{e}_0\sin 2\gamma_0 + \sum_{j=1}^{2}\sin 2\varphi_j\right) - \xi\eta\right]R_J\widetilde{\Omega}_x + \left[\left(\widetilde{J}_y + R_m R_J\sum_{j=1}^{2}\cos^2\varphi_j\right) -\right.$$

$$\left.-R_J(\eta^2+\zeta^2)\right]\widetilde{\Omega}_y - \left[R_m R_h\left(2\widetilde{e}_0\sin\gamma_0 + \sum_{j=1}^{2}\sin\varphi_j\right) - \eta\zeta\right]R_J\widetilde{\Omega}_z -$$

$$-R_J R_m(\zeta+R_h)\sum_{j=1}^{2}\varphi'_j\sin\varphi_j - \sin\alpha = 0,$$

$$\widetilde{b}_6 = \frac{b_6}{J_z\omega_0} = -\left(\frac{J_{xz}}{J_z} - \frac{M_\Sigma l^2 xz}{J_z l^2}\right)\frac{\widetilde{\Omega}_x\omega_0}{\omega_0} - \left(\frac{J_{yz}}{J_z} - \frac{M_\Sigma l^2 yz}{J_z l^2}\right)\frac{\widetilde{\Omega}_y\omega_0}{\omega_0} +$$

$$+\left[\frac{J_z}{J_z} - \frac{M_\Sigma l^2}{J_z l^2}(x^2+y^2)\right]\frac{\widetilde{\Omega}_z\omega_0}{\omega_0} + \frac{ml^2}{J_z\omega_0}\frac{M_\Sigma l^2}{M_\Sigma l^2}\sum_{j=1}^{2}\varphi'_j\omega_0 +$$

$$+\frac{ml}{J_z\omega_0}\frac{M_\Sigma l^2}{M_\Sigma l^2}\left(x\sum_{j=1}^{2}\varphi'_j\omega_0\cos\varphi_j+y\sum_{j=1}^{2}\varphi'_j\omega_0\sin\varphi_j\right)-\cos\alpha\cos\beta=$$

$$=-\left[R_mR_h\left(2\tilde{e}_0\cos\gamma_0+\sum_{j=1}^{2}\cos\varphi_j\right)-\xi\zeta\right]R_J\tilde{\Omega}_x-\left[R_mR_h\left(2\tilde{e}_0\sin\gamma_0+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{2}\sin\varphi_j\right)-\eta\zeta\right]R_J\tilde{\Omega}_y+\left[1-R_J(\xi^2+\eta^2)\right]\tilde{\Omega}_z+$$

$$+R_mR_J\left[\sum_{j=1}^{2}\varphi'_j+\xi\sum_{j=1}^{2}\varphi'_j\cos\varphi_j+\eta\sum_{j=1}^{2}\varphi'_j\sin\varphi_j\right]-\cos\alpha\cos\beta=0\,. \qquad (з)$$

Преобразовываем уравнения движения маятников (8.1.43). Делим их на $ml^2\omega_0^2$, получаем:

$$\tilde{b}_{j+6}=\frac{H\omega_0\varphi'_j}{ml^2\omega_0^2}+\varphi''_j+\frac{y''}{l}\cos\varphi_j-\frac{x''}{l}\sin\varphi_j+\tilde{\Omega}'_z\left(1+\frac{x}{l}\cos\varphi_j+\frac{y}{l}\sin\varphi_j\right)-$$

$$-\frac{(z+h)}{l}(\tilde{\Omega}'_y\sin\varphi_j+\tilde{\Omega}'_x\cos\varphi_j)+2\tilde{\Omega}_z\left(\frac{x'}{l}\cos\varphi_j+\frac{y'}{l}\sin\varphi_j\right)-$$

$$-\tilde{\Omega}_x^2\left(\frac{y}{l}+\sin\varphi_j\right)\cos\varphi_j+\tilde{\Omega}_y^2\left(\frac{x}{l}+\cos\varphi_j\right)\sin\varphi_j-\tilde{\Omega}_z^2\left(\frac{y}{l}\cos\varphi_j-\frac{x}{l}\sin\varphi_j\right)-$$

$$-\tilde{\Omega}_x\tilde{\Omega}_y\left(\frac{y}{l}\sin\varphi_j-\frac{x}{l}\cos\varphi_j-\cos 2\varphi_j\right)-\tilde{\Omega}_z\frac{(z+h)}{l}(\tilde{\Omega}_x\sin\varphi_j-\tilde{\Omega}_y\cos\varphi_j)=$$

$$=\varphi''_j+\tilde{H}\varphi'_j+\eta''\cos\varphi_j-\xi''\sin\varphi_j+\tilde{\Omega}'_z(1+\xi\cos\varphi_j+\eta\sin\varphi_j)-(\zeta+R_h)\times$$

$$\times(\tilde{\Omega}'_y\sin\varphi_j+\tilde{\Omega}'_x\cos\varphi_j)+2\tilde{\Omega}_z(\xi'\cos\varphi_j+\eta'\sin\varphi_j)-\tilde{\Omega}_x^2(\eta+\sin\varphi_j)\cos\varphi_j+$$

$$+\tilde{\Omega}_y^2(\xi+\cos\varphi_j)\sin\varphi_j-\tilde{\Omega}_z^2(\eta\cos\varphi_j-\xi\sin\varphi_j)-\tilde{\Omega}_x\tilde{\Omega}_y(\eta\sin\varphi_j-\xi\cos\varphi_j-$$

$$-\cos 2\varphi_j)-\tilde{\Omega}_z(\zeta+R_h)(\tilde{\Omega}_x\sin\varphi_j-\tilde{\Omega}_y\cos\varphi_j)=0,\ \ /\,j=1{,}2\,/\,. \qquad (и)$$

Окончательно получаем такие уравнения движения в безразмерном виде:

- вторые интегралы

$$\tilde{b}_1=\xi+R_m(2\tilde{e}_0\cos\gamma_0+\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)=0\,,$$

$$\tilde{b}_2=\eta+R_m(2\tilde{e}_0\sin\gamma_0+\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)=0\,,$$

$$\tilde{b}_3=\zeta+2R_mR_h\left(\frac{\tilde{e}_0}{R_e}+1\right)=0\,; \qquad (8.1.46)$$

- первые интегралы

$$\tilde{b}_4=\tilde{J}_{x_G}\tilde{\Omega}_x-\tilde{J}_{x_Gy_G}\tilde{\Omega}_y-\tilde{J}_{x_Gz_G}\tilde{\Omega}_z-R_mR_J(\zeta+R_h)\sum_{j=1}^{2}\varphi'_j\cos\varphi_j+\cos\alpha\sin\beta=0\,,$$

$$\widetilde{b}_5 = -\widetilde{J}_{x_G y_G}\widetilde{\Omega}_x + \widetilde{J}_{y_G}\widetilde{\Omega}_y - \widetilde{J}_{y_G z_G}\widetilde{\Omega}_z - R_J R_m (\zeta + R_h)\sum_{j=1}^{2}\varphi'_j \sin\varphi_j - \sin\alpha = 0,$$

$$\widetilde{b}_6 = -\widetilde{J}_{x_G z_G}\widetilde{\Omega}_x - \widetilde{J}_{y_G z_G}\widetilde{\Omega}_y + \widetilde{J}_{z_G}\widetilde{\Omega}_z +$$

$$+ R_m R_J \sum_{j=1}^{2}\varphi'_j (1 + \xi\cos\varphi_j + \eta\sin\varphi_j) - \cos\alpha\cos\beta = 0; \quad (8.1.47)$$

- уравнения движения маятников

$$\widetilde{b}_{j+6} = \varphi''_j + \widetilde{H}\varphi'_j + \eta''\cos\varphi_j - \xi''\sin\varphi_j + \widetilde{\Omega}'_z(1 + \xi\cos\varphi_j + \eta\sin\varphi_j) -$$

$$-(\zeta + R_h)(\widetilde{\Omega}'_y \sin\varphi_j + \widetilde{\Omega}'_x\cos\varphi_j) + 2\widetilde{\Omega}_z(\xi'\cos\varphi_j + \eta'\sin\varphi_j) -$$

$$-\widetilde{\Omega}_x^2(\eta + \sin\varphi_j)\cos\varphi_j + \widetilde{\Omega}_y^2(\xi + \cos\varphi_j)\sin\varphi_j - \widetilde{\Omega}_z^2(\eta\cos\varphi_j - \xi\sin\varphi_j) -$$

$$-\widetilde{\Omega}_x\widetilde{\Omega}_y(\eta\sin\varphi_j - \xi\cos\varphi_j - \cos 2\varphi_j) - \widetilde{\Omega}_z(\zeta + R_h)\times$$

$$\times(\widetilde{\Omega}_x\sin\varphi_j - \widetilde{\Omega}_y\cos\varphi_j) = 0, \ \ /\,j = 1,2\,/. \quad (8.1.48)$$

В (8.1.47)

$$\widetilde{J}_{x_G} = \widetilde{J}_x + R_m R_J \sum_{j=1}^{2}\sin^2\varphi_j - R_J(\eta^2 + \zeta^2),$$

$$\widetilde{J}_{y_G} = \widetilde{J}_y + R_m R_J \sum_{j=1}^{2}\cos^2\varphi_j - R_J(\xi^2 + \zeta^2), \ \ \widetilde{J}_{z_G} = 1 - R_J(\xi^2 + \eta^2),$$

$$\widetilde{J}_{x_G y_G} = \left[\frac{R_m}{2}\left(2R_e\widetilde{e}_0\sin 2\gamma_0 + \sum_{j=1}^{2}\sin 2\varphi_j\right) - \xi\eta\right]R_J,$$

$$\widetilde{J}_{x_G z_G} = \left[R_m R_h\left(2\widetilde{e}_0\cos\gamma_0 + \sum_{j=1}^{2}\cos\varphi_j\right) - \xi\zeta\right]R_J,$$

$$\widetilde{J}_{y_G z_G} = \left[R_m R_h\left(2\widetilde{e}_0\sin\gamma_0 + \sum_{j=1}^{2}\sin\varphi_j\right) - \eta\zeta\right]R_J, \quad (8.1.49)$$

- безразмерные осевые и центробежные моменты инерции системы, найденные относительно центральных осей X_G, Y_G, Z_G.

Из третьего уравнения системы (8.1.46) получаем, что

$$\zeta = -2R_m R_h (R_e + \widetilde{e}_0)/R_e = \text{const}. \quad (8.1.50)$$

Введем новый безразмерный параметр

$$\zeta_h = \zeta + R_h = \text{const}. \quad (8.1.51)$$

В связи с тем, что уравнение $\widetilde{b}_3$ – отдельное алгебраическое уравнение, то координата ζ, равно как и координата ζ_h, на устойчивость установившихся движений влиять не будет. Поэтому в дальнейшем уравнение $\widetilde{b}_3$ не будем использовать.

8.2. Анализ основных установившихся движений

8.2.1. Выделение основных установившихся движений

На любом установившемся движении безразмерные координаты $\varphi_1, \varphi_2, \alpha, \beta, \xi, \eta, \zeta$ и угловая скорость R_ω – постоянны. Тогда уравнения установившихся движений получаем из уравнений (8.1.46) – (8.1.48), полагая все производные от указанных координат и угловой скорости равными нулю:

$$\tilde{b}_1 = \xi + R_m(2\tilde{e}_0 \cos\gamma_0 + \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) = 0,$$
$$\tilde{b}_2 = \eta + R_m(2\tilde{e}_0 \sin\gamma_0 + \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) = 0; \qquad (8.2.1)$$

$$\tilde{b}_4 = \tilde{J}_{x_G}\tilde{\Omega}_x - \tilde{J}_{x_G y_G}\tilde{\Omega}_y - \tilde{J}_{x_G z_G}\tilde{\Omega}_z + \cos\alpha\sin\beta = 0,$$
$$\tilde{b}_5 = -\tilde{J}_{x_G y_G}\tilde{\Omega}_x + \tilde{J}_{y_G}\tilde{\Omega}_y - \tilde{J}_{y_G z_G}\tilde{\Omega}_z - \sin\alpha = 0,$$
$$\tilde{b}_6 = -\tilde{J}_{x_G z_G}\tilde{\Omega}_x - \tilde{J}_{y_G z_G}\tilde{\Omega}_y + \tilde{J}_{z_G}\tilde{\Omega}_z - \cos\alpha\cos\beta = 0; \qquad (8.2.2)$$

$$\tilde{b}_{j+6} = -\tilde{\Omega}_x^2(\eta + \sin\varphi_j)\cos\varphi_j + \tilde{\Omega}_y^2(\xi + \cos\varphi_j)\sin\varphi_j -$$
$$-\tilde{\Omega}_z^2(\eta\cos\varphi_j - \xi\sin\varphi_j) - \tilde{\Omega}_x\tilde{\Omega}_y(\eta\sin\varphi_j - \xi\cos\varphi_j - \cos 2\varphi_j) -$$
$$-\tilde{\Omega}_z(\zeta + R_h)(\tilde{\Omega}_x\sin\varphi_j - \tilde{\Omega}_y\cos\varphi_j) = 0, \quad / \, j = 1,2 \, /; \qquad (8.2.3)$$

где в (8.2.1) - (8.2.3) на установившемся движении

$$\tilde{\Omega}_x = -R_\omega\cos\alpha\sin\beta, \; \tilde{\Omega}_y = R_\omega\sin\alpha, \; \tilde{\Omega}_z = R_\omega\cos\alpha\cos\beta. \qquad (8.2.4)$$

В дальнейшем будем рассматривать только основные движения, так как для устранения неуравновешенности НТ маятниками необходимо, чтобы из всех установившихся движений устойчивыми были только они.

На основном установившемся движении маятники устранили неуравновешенность и система вращается вокруг продольной оси НТ, тогда:

$$\tilde{\xi} = 0, \; \tilde{\eta} = 0, \; \tilde{\alpha} = 0, \; \tilde{\beta} = 0, \; \tilde{\zeta}, \tilde{R}_\omega, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 - const. \qquad (8.2.5)$$

Подставляя (8.2.5) в равенства (8.2.4) найдем:

$$\tilde{\Omega}_x = 0, \; \tilde{\Omega}_y = 0, \; \tilde{\Omega}_z = R_\omega. \qquad (a)$$

Подставляя (а) и (8.2.5) в уравнения (8.2.1) - (8.2.3) найдем:

$$\tilde{b}_1 = 2\tilde{e}_0\cos\gamma_0 + \cos\tilde{\varphi}_1 + \cos\tilde{\varphi}_2 = 0, \; \tilde{b}_2 = 2\tilde{e}_0\sin\gamma_0 + \sin\tilde{\varphi}_1 + \sin\tilde{\varphi}_2 = 0,$$
$$\tilde{b}_4 = -\tilde{J}_{x_G z_G}\tilde{R}_\omega = 0, \; \tilde{b}_5 = -\tilde{J}_{y_G z_G}\tilde{R}_\omega = 0, \; \tilde{b}_6 = \tilde{R}_\omega - 1 = 0, \; \tilde{b}_7, \; \tilde{b}_8 \equiv 0. \qquad (8.2.6)$$

Из уравнения $\tilde{b}_6$ системы (8.2.6) получаем, что на основных движениях $\tilde{R}_\omega = 1$. Из уравнений $\tilde{b}_4, \tilde{b}_5$ находим, что $\tilde{J}_{x_G z_G}, \tilde{J}_{y_G z_G} = 0$. Но эти два равенства выполняются на основных движениях автоматически, если равны нулю первые два уравнения системы (8.2.6).

Найдем решение уравнений $\widetilde{b}_1$ и $\widetilde{b}_2$ системы (8.2.6). Для этого умножим уравнение $\widetilde{b}_2$ на мнимую единицу i и сложим его с $\widetilde{b}_1$, получим:

$$2\widetilde{e}_0 \cdot e^{i\gamma_0} + e^{i\widetilde{\varphi}_1} + e^{i\widetilde{\varphi}_2} = 0. \qquad (8.2.7)$$

Разделив уравнение (8.2.7) на $e^{i\gamma_0}$, получим: $2\widetilde{e}_0 + e^{i(\widetilde{\varphi}_1-\gamma_0)} + e^{i(\widetilde{\varphi}_2-\gamma_0)} = 0$, или перейдя к действительной форме

$$2\widetilde{e}_0 + \cos(\widetilde{\varphi}_1 - \gamma_0) + \cos(\widetilde{\varphi}_2 - \gamma_0) = 0, \ \sin(\widetilde{\varphi}_1 - \gamma_0) + \sin(\widetilde{\varphi}_2 - \gamma_0) = 0. \qquad (8.2.8)$$

Из второго уравнения (8.2.8) находим:

$$\sin(\widetilde{\varphi}_1 - \gamma_0) = -\sin(\widetilde{\varphi}_2 - \gamma_0).$$

Ищем существенно различные движения, то есть не принимаем во внимание замену местами маятников, и изменение углов с шагом 2π, тогда:

$$\widetilde{\varphi}_1 - \gamma_0 = -(\widetilde{\varphi}_2 - \gamma_0).$$

Подставим это в первое уравнение системы (8.2.8), получим:

$$2\widetilde{e}_0 + \cos(\widetilde{\varphi}_1 - \gamma_0) + \cos(\widetilde{\varphi}_1 - \gamma_0) = 2\widetilde{e}_0 + 2\cos(\widetilde{\varphi}_1 - \gamma_0) = 0. \qquad (8.2.9)$$

Обозначим $\varphi_0 = \widetilde{\varphi}_1 - \gamma_0$, тогда из (8.2.9) получим:

$$\cos\varphi_0 = -\widetilde{e}_0. \qquad (8.2.10)$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. $0 < \widetilde{e}_0 < 1$ (рис. 8.2.1, а). Решение первых двух уравнений системы (8.2.6) имеет вид:

$$\widetilde{\varphi}_1 = \varphi_0 + \gamma_0, \ \widetilde{\varphi}_2 = -\varphi_0 + \gamma_0, \ \gamma_0 \in [0, 2\pi), \qquad (8.2.11)$$

где

$$\varphi_0 = \pi - \arccos\widetilde{e}_0, \ \varphi_0 \in (\pi/2, \ \pi). \qquad (8.2.12)$$

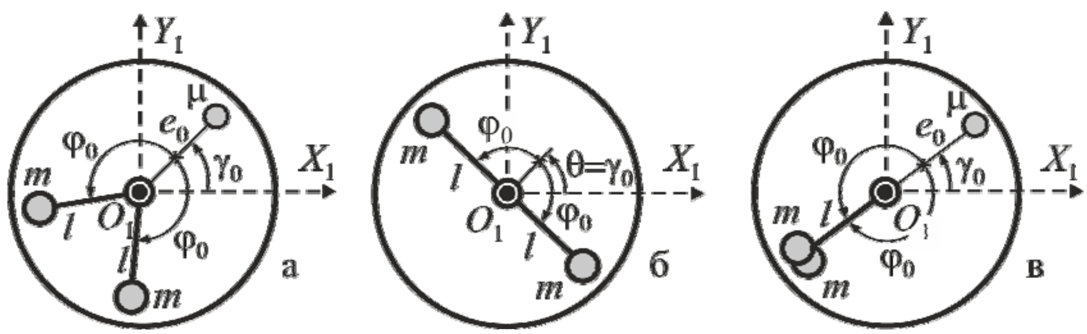


Рис. 8.2.1. Основные установившиеся движения

2. $\widetilde{e}_0 = 0$. Параметр γ_0 (направление вектора неуравновешенности) теряет смысл. Поэтому, вместо него введем некоторый параметр θ, определяющий одно конкретное движение из однопараметрической семьи основных движений, образуемой при этом (рис. 8.2.1, б). Из (8.2.10) получаем, что $\cos\varphi_0 = 0$, откуда $\varphi_0 = \pi/2$, тогда решение первых двух уравнений системы (8.2.6) имеет вид:

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{\pi}{2} + \theta,\ \tilde{\varphi}_2 = -\frac{\pi}{2} + \theta,\ \theta \in [0,\ \pi). \qquad (8.2.13)$$

Заметим, что $\theta \in [0,\ \pi)$, так как для остальных значений $\theta \in [\pi, 2\pi)$ можно получить те же установившиеся движения, лишь меняя местами маятники.

3. $\tilde{e}_0 = 1$ (рис. 8.2.1, в). Из (8.2.10) получаем, что $\cos\varphi_0 = -1$, откуда $\varphi_0 = \pi$. Тогда решение первых двух уравнений системы (8.2.6) имеет вид:

$$\tilde{\varphi}_1 = \pi + \gamma_0,\ \tilde{\varphi}_2 = -\pi + \gamma_0,\ \forall\gamma_0 \in [0, 2\pi). \qquad (8.2.14)$$

8.2.2. Тензор инерции системы на основном движении

На основном движении $x = y = 0$, $J_{x_G z_G} = 0$, $J_{y_G z_G} = 0$, и безразмерный тензор инерции системы относительно осей $GX_G Y_G Z_G$ имеет вид:

$$\hat{\mathbf{J}}_G = \begin{pmatrix} \hat{J}_{x_G} & -\hat{J}_{x_G y_G} & 0 \\ -\hat{J}_{x_G y_G} & \hat{J}_{y_G} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{J}_{z_G} \end{pmatrix}. \qquad (8.2.15)$$

В (8.2.15) осевые и центробежные моменты инерции системы имеют вид:

$$\hat{J}_{x_G} = A + \mu(h^2 + e_0^2 \sin^2\gamma_0) + m\left(2h^2 + l^2 \sum_{j=1}^{2} \sin^2\varphi_j\right) - M_\Sigma z^2,$$

$$\hat{J}_{x_G y_G} = \frac{1}{2}\left(\mu e_0^2 \sin 2\gamma_0 + ml^2 \sum_{j=1}^{2} \sin 2\varphi_j\right),\ \hat{J}_{y_G} = B + \mu(h^2 + e_0^2 \cos^2\gamma_0) +$$

$$+ m\left(2h^2 + l^2 \sum_{j=1}^{2} \cos^2\varphi_j\right) - M_\Sigma z^2,\ \hat{J}_{z_G} = C + \mu e_0^2 + 2ml^2. \qquad (8.2.16)$$

Учитывая (8.2.11) выпишем некоторые тригонометрические тождества:

$\sin\tilde{\varphi}_1 = \sin(\varphi_0 + \gamma_0) = \sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \cos\varphi_0 \sin\gamma_0,$

$\sin\tilde{\varphi}_2 = \sin(-\varphi_0 + \gamma_0) = -\sin(\varphi_0 - \gamma_0) = -\sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \cos\varphi_0 \sin\gamma_0,$

$\cos\tilde{\varphi}_1 = \cos(\varphi_0 + \gamma_0) = \cos\varphi_0 \cos\gamma_0 - \sin\varphi_0 \sin\gamma_0,$

$\cos\tilde{\varphi}_2 = \cos(-\varphi_0 + \gamma_0) = \cos(\varphi_0 - \gamma_0) = \cos\varphi_0 \cos\gamma_0 + \sin\varphi_0 \sin\gamma_0,$

$$\sum_{j=1}^{2} \sin^2\tilde{\varphi}_j = (\sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \cos\varphi_0 \sin\gamma_0)^2 + (-\sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \cos\varphi_0 \sin\gamma_0)^2 =$$

$$= \sin^2\varphi_0 \cos^2\gamma_0 + 2\sin\varphi_0 \cos\gamma_0 \cos\varphi_0 \sin\gamma_0 + \cos^2\varphi_0 \sin^2\gamma_0 +$$

$$+ \sin^2\varphi_0 \cos^2\gamma_0 - 2\sin\varphi_0 \cos\gamma_0 \cos\varphi_0 \sin\gamma_0 + \cos^2\varphi_0 \sin^2\gamma_0 =$$

$$= 2(\sin^2\varphi_0 \cos^2\gamma_0 + \cos^2\varphi_0 \sin^2\gamma_0) = 2(\cos^2\varphi_0 - \cos 2\varphi_0 \cos^2\gamma_0),$$

$$\sum_{j=1}^{2} \cos^2\tilde{\varphi}_j = (\cos\varphi_0 \cos\gamma_0 - \sin\varphi_0 \sin\gamma_0)^2 + (\cos\varphi_0 \cos\gamma_0 + \sin\varphi_0 \sin\gamma_0)^2 =$$

$$= \cos^2\varphi_0\cos^2\gamma_0 - 2\cos\varphi_0\cos\gamma_0\sin\varphi_0\sin\gamma_0 + \sin^2\varphi_0\sin^2\gamma_0 +$$
$$+ \cos^2\varphi_0\cos^2\gamma_0 + 2\cos\varphi_0\cos\gamma_0\sin\varphi_0\sin\gamma_0 + \sin^2\varphi_0\sin^2\gamma_0 =$$
$$= 2(\cos^2\varphi_0\cos^2\gamma_0 + \sin^2\varphi_0\sin^2\gamma_0) = 2(\sin^2\varphi_0 + \cos 2\varphi_0\cos^2\gamma_0),$$

$$\sum_{j=1}^{2}\sin 2\tilde{\varphi}_j = 2(\sin\tilde{\varphi}_1\cos\tilde{\varphi}_1 + \sin\tilde{\varphi}_2\cos\tilde{\varphi}_2) = 2[(\sin\varphi_0\cos\gamma_0 +$$
$$+ \cos\varphi_0\sin\gamma_0)(\cos\varphi_0\cos\gamma_0 - \sin\varphi_0\sin\gamma_0) + (-\sin\varphi_0\cos\gamma_0 +$$
$$+ \cos\varphi_0\sin\gamma_0)(\cos\varphi_0\cos\gamma_0 + \sin\varphi_0\sin\gamma_0)] = 2(\sin\varphi_0\cos\varphi_0\cos^2\gamma_0 -$$
$$- \sin^2\varphi_0\sin\gamma_0\cos\gamma_0 + \cos^2\varphi_0\sin\gamma_0\cos\gamma_0 - \sin\varphi_0\cos\varphi_0\sin^2\gamma_0 -$$
$$- \sin\varphi_0\cos\varphi_0\cos^2\gamma_0 - \sin^2\varphi_0\sin\gamma_0\cos\gamma_0 +$$
$$+ \cos^2\varphi_0\sin\gamma_0\cos\gamma_0 + \sin\varphi_0\cos\varphi_0\sin^2\gamma_0) = 2\cos 2\varphi_0\sin 2\gamma_0. \qquad (8.2.17)$$

Подставив (8.2.11) и (8.2.17) в (8.2.16), получим:

$$\hat{J}_{x_G} = A + \mu(h^2 + e_0^2\sin^2\gamma_0) + 2m(h^2 + l^2 f) - M_\Sigma z^2,$$
$$\hat{J}_{y_G} = B + \mu(h^2 + e_0^2\cos^2\gamma_0) + 2m[h^2 + l^2(1-f)] - M_\Sigma z^2,$$
$$\hat{J}_{z_G} = C_G = C + \mu e_0^2 + 2ml^2,\ \hat{J}_{x_G y_G} = (\mu e_0^2 + 2ml^2\cos 2\varphi_0)\sin 2\gamma_0/2. \qquad (8.2.18)$$

где

$$f = (\cos^2\varphi_0 - \cos 2\varphi_0\cos^2\gamma_0) = \tilde{e}_0^2\sin^2\gamma_0 + (1-\tilde{e}_0^2)\cos^2\gamma_0. \qquad (8.2.19)$$

Важно отметить, что параметр f в зависимости от величины и направления неуравновешенности изменяется в пределах $0 \le f \le 1$.

Заметим, что главные центральные осевые моменты инерции системы – A_G, B_G, C_G, можно найти, решив задачу о нахождении главных осевых моментов инерции центрального тензора инерции (задача о собственных векторах и числах):

$$\det\left|\mathbf{\hat{J}}_G - \lambda\mathbf{E}\right| = \begin{vmatrix} \hat{J}_{x_G} - \lambda & -\hat{J}_{x_G y_G} & 0 \\ -\hat{J}_{x_G y_G} & \hat{J}_{y_G} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \hat{J}_{z_G} - \lambda \end{vmatrix} =$$
$$= [(\hat{J}_{x_G} - \lambda)(\hat{J}_{y_G} - \lambda) - \hat{J}_{x_G y_G}^2](\hat{J}_{z_G} - \lambda) = 0. \qquad (8.2.20)$$

Решением уравнения (8.2.20) будут главные центральные осевые моменты инерции системы:

$$\lambda_1 = \frac{\hat{J}_{x_G} + \hat{J}_{y_G}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\hat{J}_{x_G} - \hat{J}_{y_G})^2 + 4\hat{J}_{x_G y_G}^2} = A_G,$$
$$\lambda_2 = \frac{\hat{J}_{x_G} + \hat{J}_{y_G}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\hat{J}_{x_G} - \hat{J}_{y_G})^2 + 4\hat{J}_{x_G y_G}^2} = B_G,\ \lambda_3 = \hat{J}_{z_G} = C_G. \qquad (8.2.21)$$

В главе 4 установлено, что единственным случаем, когда можно устранить угол нутации, является случай статически неуравновешенного НТ, в плоскости статической неуравновешенности которого установлен АБ любого типа, при выполнении условий:

$$C_G - A_G - M_\Sigma h_z^2 > 0,\ C_G - B_G - M_\Sigma h_z^2 > 0. \qquad (8.2.22)$$

В дальнейшем, при выполнении условий (8.2.22), будем называть СТ (состоят из неуравновешенного НТ и маятников) **более чем сплюснутым**. Это значит, что СТ не только сплюснуто ($C_G > A_G$, $C_G > B_G$), но и плоскость уравновешивания находится вблизи центра масс системы (расстояние h_z ограничено сверху определенной величиной).

8.3. Исследование условной устойчивости основных движений первым методом Ляпунова

8.3.1. Исследование условной устойчивости изолированного основного движения ($0<\tilde{e}_0<1$)

1. Линеаризация уравнений движения и введение новых переменных γ_1 и γ_2.

1.1. Введем в рассмотрение возмущенное движение:

$$\xi=u,\ \ \eta=v,\ \ \alpha=\alpha,\ \ \beta=\beta,\ \ R_\omega=1+p,$$

$$\varphi_1=\tilde{\varphi}_1+\alpha_1=\varphi_0+\gamma_0+\alpha_1,\ \ \varphi_2=\tilde{\varphi}_2+\alpha_2=-\varphi_0+\gamma_0+\alpha_2, \tag{8.3.1}$$

где $u,v,\alpha,\beta,p,\alpha_1,\alpha_2$ – отклонения от невозмущенного движения ($|u|,|v|,|\alpha|,|\beta|,|p|,|\alpha_1|,\ |\alpha_2|<<1$).

Учитывая (8.3.1) запишем следующие соотношения для $\cos\varphi_j$ и $\sin\varphi_j$, $/\,j=1{,}2\,/$ имеющие место с точностью до величин первого порядка малости.

$$\cos\varphi_j=\cos(\tilde{\varphi}_j+\alpha_j)=\cos\tilde{\varphi}_j\cos\alpha_j-\sin\tilde{\varphi}_j\sin\alpha_j\approx\cos\tilde{\varphi}_j-\alpha_j\sin\tilde{\varphi}_j,$$

$$\sin\varphi_j=\sin(\tilde{\varphi}_j+\alpha_j)=\sin\tilde{\varphi}_j\cos\alpha_j+\cos\tilde{\varphi}_j\sin\alpha_j\approx\sin\tilde{\varphi}_j+\alpha_j\cos\tilde{\varphi}_j. \tag{8.3.2}$$

Аналогично для угловой скорости и ускорения получим:

$$\tilde{\mathbf{\Omega}}=\begin{bmatrix}\tilde{\Omega}_x\\ \tilde{\Omega}_y\\ \tilde{\Omega}_z\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}\alpha'-\beta\\ \beta'+\alpha\\ 1+p\end{bmatrix},\ \ \tilde{\mathbf{\Omega}}'=\begin{bmatrix}\tilde{\Omega}'_x\\ \tilde{\Omega}'_y\\ \tilde{\Omega}'_z\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}\alpha''-\beta'\\ \beta''+\alpha'\\ p'\end{bmatrix}. \tag{8.3.3}$$

1.2. Проведем тригонометрические преобразования:

$$\sum_{j=1}^{2}\sin\tilde{\varphi}_j=\sin\varphi_0\cos\gamma_0+\cos\varphi_0\sin\gamma_0-\sin\varphi_0\cos\gamma_0+\cos\varphi_0\sin\gamma_0=2\cos\varphi_0\sin\gamma_0,$$

$$\sum_{j=1}^{2}\cos\tilde{\varphi}_j=\cos\varphi_0\cos\gamma_0-\sin\varphi_0\sin\gamma_0+\cos\varphi_0\cos\gamma_0+\sin\varphi_0\sin\gamma_0=2\cos\varphi_0\cos\gamma_0,$$

$$\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\sin\tilde{\varphi}_j=\alpha_1(\sin\varphi_0\cos\gamma_0+\cos\varphi_0\sin\gamma_0)-\alpha_2(\sin\varphi_0\cos\gamma_0-\cos\varphi_0\sin\gamma_0)=$$

$$=(\alpha_1-\alpha_2)\sin\varphi_0\cos\gamma_0+(\alpha_1+\alpha_2)\cos\varphi_0\sin\gamma_0=2(\gamma_2\sin\varphi_0\cos\gamma_0+\gamma_1\cos\varphi_0\sin\gamma_0),$$

$$\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\cos\tilde{\varphi}_j=\alpha_1(\cos\varphi_0\cos\gamma_0-\sin\varphi_0\sin\gamma_0)+\alpha_2(\cos\varphi_0\cos\gamma_0+\sin\varphi_0\sin\gamma_0)=$$

$$=(\alpha_1+\alpha_2)\cos\varphi_0\cos\gamma_0-(\alpha_1-\alpha_2)\sin\varphi_0\sin\gamma_0=2(\gamma_1\cos\varphi_0\cos\gamma_0-\gamma_2\sin\varphi_0\sin\gamma_0),$$

$$\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\cos2\tilde{\varphi}_j=\alpha_1\cos2(\varphi_0+\gamma_0)+\alpha_2\cos2(\varphi_0-\gamma_0)=\alpha_1(\cos2\varphi_0\cos2\gamma_0-$$

$$-\sin 2\varphi_0 \sin 2\gamma_0) + \alpha_2(\cos 2\varphi_0 \cos 2\gamma_0 + \sin 2\varphi_0 \sin 2\gamma_0) = (\alpha_1 + \alpha_2)\cos 2\varphi_0 \cos 2\gamma_0 -$$
$$-(\alpha_1 - \alpha_2)\sin 2\varphi_0 \sin 2\gamma_0 = 2(\gamma_1 \cos 2\varphi_0 \cos 2\gamma_0 - \gamma_2 \sin 2\varphi_0 \sin 2\gamma_0),$$
$$\sum_{j=1}^{2} \alpha_j \sin 2\widetilde{\varphi}_j = \alpha_1 \sin 2(\varphi_0 + \gamma_0) - \alpha_2 \sin 2(\varphi_0 - \gamma_0) =$$
$$= \alpha_1(\sin 2\varphi_0 \cos 2\gamma_0 + \cos 2\varphi_0 \sin 2\gamma_0) - \alpha_2(\sin 2\varphi_0 \cos 2\gamma_0 -$$
$$- \cos 2\varphi_0 \sin 2\gamma_0) = (\alpha_1 - \alpha_2)\sin 2\varphi_0 \cos 2\gamma_0 + (\alpha_1 + \alpha_2)\cos 2\varphi_0 \sin 2\gamma_0 =$$
$$= 2(\gamma_2 \sin 2\varphi_0 \cos 2\gamma_0 + \gamma_1 \cos 2\varphi_0 \sin 2\gamma_0), \qquad (8.3.4)$$

где в (8.3.4)

$$\gamma_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)/2, \ \ \gamma_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)/2, \qquad (8.3.5)$$

- новые переменные.

1.3. Преобразовываем осевые и центробежные моменты инерции. Для осевых и центробежных моментов инерции системы с учетом (8.1.49), (8.3.4) и (8.3.5) получим:

$$\widetilde{J}_{x_G} = \widetilde{J}_x + R_m R_J \sum_{j=1}^{2} \sin^2(\widetilde{\varphi}_j + \alpha_j) - R_J \zeta^2 = \widetilde{J}_x + R_m R_J \sum_{j=1}^{2} (\sin\widetilde{\varphi}_j + \alpha_j \cos\widetilde{\varphi}_j)^2 -$$
$$- R_J \zeta^2 = \widetilde{J}_x + R_m R_J \sum_{j=1}^{2} \sin^2 \widetilde{\varphi}_j - R_J \zeta^2 + R_m R_J \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \sin 2\widetilde{\varphi}_j =$$
$$= \widetilde{J}_x + 2R_m R_J f - R_J \zeta^2 + 2R_m R_J (\gamma_1 \sin 2\gamma_0 \cos 2\varphi_0 + \gamma_2 \cos 2\gamma_0 \sin 2\varphi_0),$$
$$\widetilde{J}_{y_G} = \widetilde{J}_y + R_m R_J \sum_{j=1}^{2} \cos^2(\widetilde{\varphi}_j + \alpha_j) - R_J \zeta^2 = \widetilde{J}_y + R_m R_J \sum_{j=1}^{2} (\cos\widetilde{\varphi}_j - \alpha_j \sin\widetilde{\varphi}_j)^2 -$$
$$- R_J \zeta^2 = \widetilde{J}_y + R_m R_J \sum_{j=1}^{2} \cos^2 \widetilde{\varphi}_j - R_J \zeta^2 - R_m R_J \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \sin 2\widetilde{\varphi}_j =$$
$$= \widetilde{J}_y + 2R_m R_J (1 - f) - R_J \zeta^2 - 2R_m R_J (\gamma_1 \sin 2\gamma_0 \cos 2\varphi_0 + \gamma_2 \cos 2\gamma_0 \sin 2\varphi_0),$$
$$\widetilde{J}_{z_G} = 1, \ \ \widetilde{J}_{x_G y_G} = \frac{1}{2} R_m R_J \left(2R_e \widetilde{e}_0 \sin 2\gamma_0 + \sum_{j=1}^{2} \sin 2\varphi_j \right) = R_m R_J [R_e \widetilde{e}_0 \sin 2\gamma_0 +$$
$$+ \sum_{j=1}^{2} \sin(\widetilde{\varphi}_j + \alpha_j)\cos(\widetilde{\varphi}_j + \alpha_j)] = R_m R_J [R_e \widetilde{e}_0 \sin 2\gamma_0 + \sum_{j=1}^{2} (\sin\widetilde{\varphi}_j + \alpha_j \cos\widetilde{\varphi}_j) \times$$
$$\times (\cos\widetilde{\varphi}_j - \alpha_j \sin\widetilde{\varphi}_j)] = R_m R_J (R_e \widetilde{e}_0 \sin 2\gamma_0 + \sum_{j=1}^{2} \sin\widetilde{\varphi}_j \cos\widetilde{\varphi}_j) +$$
$$+ R_m R_J \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \cos 2\widetilde{\varphi}_j = R_m R_J \sin 2\gamma_0 (R_e \widetilde{e}_0 + \cos 2\varphi_0) +$$
$$+ 2R_m R_J (\gamma_1 \cos 2\varphi_0 \cos 2\gamma_0 - \gamma_2 \sin 2\varphi_0 \sin 2\gamma_0),$$
$$\widetilde{J}_{x_G z_G} = \left[R_m R_h \left(2\widetilde{e}_0 \cos\gamma_0 + \sum_{j=1}^{2} \cos(\widetilde{\varphi}_j + \alpha_j) \right) - u\zeta \right] R_J = \{ R_m R_h [2\widetilde{e}_0 \cos\gamma_0 +$$

$$+\sum_{j=1}^{2}(\cos\tilde{\varphi}_j-\alpha_j\sin\tilde{\varphi}_j)]-u\zeta\}R_J=[R_mR_h(2\tilde{e}_0\cos\gamma_0+\cos\tilde{\varphi}_1+\cos\tilde{\varphi}_2)-$$

$$-R_mR_h\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\sin\tilde{\varphi}_j-u\zeta]R_J=[2R_mR_h\cos\gamma_0(\tilde{e}_0+\cos\varphi_0)-$$

$$-2R_mR_h(\gamma_2\sin\varphi_0\cos\gamma_0+\gamma_1\cos\varphi_0\sin\gamma_0)-u\zeta]R_J=$$

$$=-[2R_mR_h(\gamma_2\sin\varphi_0\cos\gamma_0+\gamma_1\cos\varphi_0\sin\gamma_0)+u\zeta]R_J,$$

$$\tilde{J}_{y_Gz_G}=\left[R_mR_h\left(2\tilde{e}_0\sin\gamma_0+\sum_{j=1}^{2}\sin(\tilde{\varphi}_j+\alpha_j)\right)-v\zeta\right]R_J=\{R_mR_h[2\tilde{e}_0\sin\gamma_0+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}(\sin\tilde{\varphi}_j+\alpha_j\cos\tilde{\varphi}_j)]-v\zeta\}R_J=[R_mR_h(2\tilde{e}_0\sin\gamma_0+\sin\tilde{\varphi}_1+\sin\tilde{\varphi}_2)+$$

$$+R_mR_h\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\cos\tilde{\varphi}_j-v\zeta]R_J=[2R_mR_h\sin\gamma_0(\tilde{e}_0+\cos\varphi_0)+$$

$$+2R_mR_h(\gamma_1\cos\varphi_0\cos\gamma_0-\gamma_2\sin\varphi_0\sin\gamma_0)-v\zeta]R_J=$$

$$=[2R_mR_h(\gamma_1\cos\varphi_0\cos\gamma_0-\gamma_2\sin\varphi_0\sin\gamma_0)-v\zeta]R_J.$$

Окончательно:

$$\tilde{J}_{x_G}\approx\tilde{J}^{(0)}_{x_G}+\tilde{J}^{(1)}_{x_G},\ \tilde{J}_{y_G}\approx\tilde{J}^{(0)}_{y_G}+\tilde{J}^{(1)}_{y_G},\ \tilde{J}_{z_G}=\tilde{J}^{(0)}_{z_G},$$

$$\tilde{J}_{x_Gy_G}\approx\tilde{J}^{(0)}_{x_Gy_G}+\tilde{J}^{(1)}_{x_Gy_G},\ \tilde{J}_{x_Gz_G}\approx\tilde{J}^{(1)}_{x_Gz_G},\ \tilde{J}_{y_Gz_G}\approx\tilde{J}^{(1)}_{y_Gz_G},\qquad(8.3.6)$$

где

$$\tilde{J}^{(0)}_{x_G}=\tilde{J}_x+2R_mR_Jf-R_J\zeta^2,\ \tilde{J}^{(0)}_{y_G}=\tilde{J}_y+2R_mR_J(1-f)-R_J\zeta^2,$$

$$\tilde{J}^{(0)}_{z_G}=1,\ \tilde{J}^{(0)}_{x_Gy_G}=R_mR_J\sin2\gamma_0(R_e\tilde{e}_0+\cos2\varphi_0),$$

$$\tilde{J}^{(1)}_{x_G}=2R_mR_J(\gamma_1\sin2\gamma_0\cos2\varphi_0+\gamma_2\cos2\gamma_0\sin2\varphi_0),\ \tilde{J}^{(1)}_{y_G}=-\tilde{J}^{(1)}_{x_G},$$

$$\tilde{J}^{(1)}_{x_Gy_G}=2R_mR_J(\gamma_1\cos2\varphi_0\cos2\gamma_0-\gamma_2\sin2\varphi_0\sin2\gamma_0),$$

$$\tilde{J}^{(1)}_{x_Gz_G}=-[2R_mR_h(\gamma_2\sin\varphi_0\cos\gamma_0+\gamma_1\cos\varphi_0\sin\gamma_0)+u\zeta]R_J,$$

$$\tilde{J}^{(1)}_{y_Gz_G}=[2R_mR_h(\gamma_1\cos\varphi_0\cos\gamma_0-\gamma_2\sin\varphi_0\sin\gamma_0)-v\zeta]R_J.\quad(8.3.7)$$

1.4. Преобразовываем уравнения движения системы.

Вторые интегралы:

$$\tilde{b}_1=u+R_m\left[2\tilde{e}_0\cos\gamma_0+\sum_{j=1}^{2}\cos(\tilde{\varphi}_j+\alpha_j)\right]=$$

$$=u+R_m\left[2\tilde{e}_0\cos\gamma_0+\sum_{j=1}^{2}(\cos\tilde{\varphi}_j-\alpha_j\sin\tilde{\varphi}_j)\right]=$$

$$=R_m\left(2\tilde{e}_0\cos\gamma_0+\sum_{j=1}^{2}\cos\tilde{\varphi}_j\right)+u-R_m\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\sin\tilde{\varphi}_j=2R_m\cos\gamma_0(\tilde{e}_0+\cos\varphi_0)+u-$$

$$-R_m[(\alpha_1-\alpha_2)\sin\varphi_0\cos\gamma_0+(\alpha_1+\alpha_2)\cos\varphi_0\sin\gamma_0]=$$
$$=u-2R_m(\gamma_2\sin\varphi_0\cos\gamma_0+\gamma_1\cos\varphi_0\sin\gamma_0)=0,$$
$$\widetilde{b}_2=v+R_m\left[2\widetilde{e}_0\sin\gamma_0+\sum_{j=1}^{2}\sin(\widetilde{\varphi}_j+\alpha_j)\right]=$$
$$=v+R_m\left[2\widetilde{e}_0\sin\gamma_0+\sum_{j=1}^{2}(\sin\widetilde{\varphi}_j+\alpha_j\cos\widetilde{\varphi}_j)\right]=$$
$$=R_m\left(2e_0\sin\gamma_0+\sum_{j=1}^{2}\sin\widetilde{\varphi}_j\right)+v+R_m\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\cos\widetilde{\varphi}_j=2R_m\sin\gamma_0(\widetilde{e}_0+\cos\varphi_0)+v+$$
$$+R_m[(\alpha_1+\alpha_2)\cos\varphi_0\cos\gamma_0-(\alpha_1-\alpha_2)\sin\varphi_0\sin\gamma_0]=$$
$$=v+2R_m(\gamma_1\cos\varphi_0\cos\gamma_0-\gamma_2\sin\varphi_0\sin\gamma_0)=0.$$

Первые интегралы:

$$\widetilde{b}_4=[\widetilde{J}_x+R_mR_J(\sin^2\widetilde{\varphi}_1+\sin^2\widetilde{\varphi}_2)-R_J\zeta^2](\alpha'-\beta)-\frac{1}{2}R_mR_J(2R_e\widetilde{e}_0\sin 2\gamma_0+$$
$$+\sin 2\widetilde{\varphi}_1+\sin 2\widetilde{\varphi}_2)(\beta'+\alpha)-R_mR_JR_h\big(2\widetilde{e}_0\cos\gamma_0+\cos\widetilde{\varphi}_1+\cos\widetilde{\varphi}_2\big)p+$$
$$+R_J\left(u\zeta+R_mR_h\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\sin\widetilde{\varphi}_j\right)-R_mR_J(\zeta+R_h)\sum_{j=1}^{2}\alpha'_j\cos\widetilde{\varphi}_j+\beta=$$
$$=\widetilde{J}_A(\alpha'-\beta)-R_m\widetilde{J}_{AB}(\beta'+\alpha)+\beta+R_J[u\zeta+2R_mR_h(\gamma_2\sin\varphi_0\cos\gamma_0+$$
$$+\gamma_1\cos\varphi_0\sin\gamma_0)]-2R_mR_J\zeta_h(\gamma'_1\cos\varphi_0\cos\gamma_0-\gamma'_2\sin\varphi_0\sin\gamma_0)=0,$$
$$\widetilde{b}_5=-\frac{1}{2}R_mR_J(2R_e\widetilde{e}_0\sin 2\gamma_0+\sin 2\widetilde{\varphi}_1+\sin 2\widetilde{\varphi}_2)(\alpha'-\beta)+[\widetilde{J}_y+R_mR_J(\cos^2\varphi_1+$$
$$+\cos^2\varphi_2)-R_J\zeta^2](\beta'+\alpha)-R_JR_mR_h\big(2\widetilde{e}_0\sin\gamma_0+\sin\widetilde{\varphi}_1+\sin\widetilde{\varphi}_2\big)p+$$
$$+R_J\left(v\zeta-R_mR_h\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\cos\widetilde{\varphi}_j\right)-R_JR_m(\zeta+R_h)\sum_{j=1}^{2}\alpha'_j\sin\widetilde{\varphi}_j-\alpha=$$
$$=-R_m\widetilde{J}_{AB}(\alpha'-\beta)+\widetilde{J}_B(\beta'+\alpha)-\alpha+R_J[v\zeta-2R_mR_h(\gamma_1\cos\varphi_0\cos\gamma_0-$$
$$-\gamma_2\sin\varphi_0\sin\gamma_0)]-2R_JR_m\zeta_h(\gamma'_2\sin\varphi_0\cos\gamma_0+\gamma'_1\cos\varphi_0\sin\gamma_0)=0,$$
$$\widetilde{b}_6=R_JR_mR_h(2\widetilde{e}_0\cos\gamma_0+\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)(\alpha'-\beta)-R_JR_mR_h(2\widetilde{e}_0\sin\gamma_0+$$
$$+\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)(\beta'+\alpha)+p+R_mR_J(\alpha'_1+\alpha'_2)=p+2R_mR_J\gamma'_1=0,$$

где введены новые безразмерные параметры

$$\widetilde{J}_A=\widetilde{J}^{(0)}_{x_G},\ \widetilde{J}_B=\widetilde{J}^{(0)}_{y_G},\ \widetilde{J}_{AB}=\widetilde{J}^{(0)}_{x_Gy_G}/R_m=R_J\sin 2\gamma_0(R_e\widetilde{e}_0+\cos 2\varphi_0).\ (8.3.8)$$

Уравнение движения маятников:

$$\widetilde{b}_{j+6}=\alpha''_j+\widetilde{H}\alpha'_j+v''\cos\widetilde{\varphi}_j-u''\sin\widetilde{\varphi}_j+p'-(\zeta+R_h)[(\beta''+\alpha')\sin\widetilde{\varphi}_j+$$
$$+(\alpha''-\beta')\cos\widetilde{\varphi}_j]+2(u'\cos\widetilde{\varphi}_j+v'\sin\widetilde{\varphi}_j)-v\cos\widetilde{\varphi}_j+u\sin\widetilde{\varphi}_j-$$
$$-(\zeta+R_h)[(\alpha'-\beta)\sin\widetilde{\varphi}_j-(\beta'+\alpha)\cos\widetilde{\varphi}_j]=0,\ \ /\ j=1,2\ /,$$

или после преобразований

$$\widetilde{b}_{j+6} = \alpha''_j + \widetilde{H}\alpha'_j + p' - (\zeta + R_h)[(\alpha'' - 2\beta' - \alpha)\cos\widetilde{\varphi}_j + (\beta'' + 2\alpha' - \beta)\sin\widetilde{\varphi}_j] -$$
$$-(u'' - 2v' - u)\sin\widetilde{\varphi}_j + (v'' + 2u' - v)\cos\widetilde{\varphi}_j = 0, \quad / \, j = 1,2 \, /.$$

Учитывая (8.2.17), получим:

$$\widetilde{b}_7 = \alpha''_1 + \widetilde{H}\alpha'_1 + p' - (\zeta + R_h)[(\alpha'' - 2\beta' - \alpha)(\cos\varphi_0\cos\gamma_0 - \sin\varphi_0\sin\gamma_0) +$$
$$+(\beta'' + 2\alpha' - \beta)(\sin\varphi_0\cos\gamma_0 + \cos\varphi_0\sin\gamma_0)] - (u'' - 2v' - u)\times$$
$$\times(\sin\varphi_0\cos\gamma_0 + \cos\varphi_0\sin\gamma_0) + (v'' + 2u' - v)(\cos\varphi_0\cos\gamma_0 - \sin\varphi_0\sin\gamma_0) = 0,$$
$$\widetilde{b}_8 = \alpha''_2 + \widetilde{H}\alpha'_2 + p' - (\zeta + R_h)[(\alpha'' - 2\beta' - \alpha)(\cos\varphi_0\cos\gamma_0 + \sin\varphi_0\sin\gamma_0) +$$
$$+(\beta'' + 2\alpha' - \beta)(-\sin\varphi_0\cos\gamma_0 + \cos\varphi_0\sin\gamma_0)] - (u'' - 2v' - u)\times$$
$$\times(-\sin\varphi_0\cos\gamma_0 + \cos\varphi_0\sin\gamma_0) + (v'' + 2u' - v)(\cos\varphi_0\cos\gamma_0 + \sin\varphi_0\sin\gamma_0) = 0.$$

Окончательно, линеаризованные уравнения движения системы в новых переменных γ_1 и γ_2 имеют вид:

- вторые интегралы

$$\widetilde{b}_1 = u - 2R_m(\gamma_2\sin\varphi_0\cos\gamma_0 + \gamma_1\cos\varphi_0\sin\gamma_0) = 0,$$
$$\widetilde{b}_2 = v + 2R_m(\gamma_1\cos\varphi_0\cos\gamma_0 - \gamma_2\sin\varphi_0\sin\gamma_0) = 0; \qquad (8.3.9)$$

- первые интегралы

$$\widetilde{b}_4 = \widetilde{J}_A(\alpha' - \beta) - R_m\widetilde{J}_{AB}(\beta' + \alpha) + \beta + R_J[u\zeta + 2R_mR_h(\gamma_2\sin\varphi_0\cos\gamma_0 +$$
$$+\gamma_1\cos\varphi_0\sin\gamma_0)] - 2R_mR_J\zeta_h(\gamma'_1\cos\varphi_0\cos\gamma_0 - \gamma'_2\sin\varphi_0\sin\gamma_0) = 0,$$
$$\widetilde{b}_5 = -R_m\widetilde{J}_{AB}(\alpha' - \beta) + \widetilde{J}_B(\beta' + \alpha) - \alpha + R_J[v\zeta - 2R_mR_h(\gamma_1\cos\varphi_0\cos\gamma_0 -$$
$$-\gamma_2\sin\varphi_0\sin\gamma_0)] - 2R_JR_m\zeta_h(\gamma'_2\sin\varphi_0\cos\gamma_0 + \gamma'_1\cos\varphi_0\sin\gamma_0) = 0,$$
$$\widetilde{b}_6 = p + 2R_mR_J\gamma'_1 = 0; \qquad (8.3.10)$$

- уравнение движения маятников

$$L_1 = \frac{\widetilde{b}_7 + \widetilde{b}_8}{2} = \gamma''_1 + \widetilde{H}\gamma'_1 + p' - \zeta_h\cos\varphi_0[(\alpha'' - 2\beta' - \alpha)\cos\gamma_0 +$$
$$+(\beta'' + 2\alpha' - \beta)\sin\gamma_0] - \cos\varphi_0[(u'' - 2v' - u)\sin\gamma_0 - (v'' + 2u' - v)\cos\gamma_0] = 0,$$
$$L_2 = \frac{\widetilde{b}_7 - \widetilde{b}_8}{2} = \gamma''_2 + \widetilde{H}\gamma'_2 + \zeta_h\sin\varphi_0[(\alpha'' - 2\beta' - \alpha)\sin\gamma_0 -$$
$$-(\beta'' + 2\alpha' - \beta)\cos\gamma_0] - \sin\varphi_0[(u'' - 2v' - u)\cos\gamma_0 + (v'' + 2u' - v)\sin\gamma_0] = 0. \; (8.3.11)$$

1.5. Исключим из первых двух уравнений системы (8.3.10) и системы уравнений (8.3.11) переменные u, v, p. Из уравнений (8.3.9) и третьего уравнения системы (8.3.10) найдем:

$$u = 2R_m(\gamma_2\sin\varphi_0\cos\gamma_0 + \gamma_1\cos\varphi_0\sin\gamma_0),$$
$$u' = 2R_m(\gamma'_2\sin\varphi_0\cos\gamma_0 + \gamma'_1\cos\varphi_0\sin\gamma_0),$$
$$u'' = 2R_m(\gamma''_2\sin\varphi_0\cos\gamma_0 + \gamma''_1\cos\varphi_0\sin\gamma_0),$$

$$\nu = 2R_m(\gamma_2 \sin\varphi_0 \sin\gamma_0 - \gamma_1 \cos\varphi_0 \cos\gamma_0),$$
$$\nu' = 2R_m(\gamma_2' \sin\varphi_0 \sin\gamma_0 - \gamma_1' \cos\varphi_0 \cos\gamma_0),$$
$$\nu'' = 2R_m(\gamma_2'' \sin\varphi_0 \sin\gamma_0 - \gamma_1'' \cos\varphi_0 \cos\gamma_0),$$
$$p = -2R_m R_J \gamma_1', \quad p' = -2R_m R_J \gamma_1''. \qquad (8.3.12)$$

С учетом (8.3.12), первые два уравнения системы (8.3.10) примут вид:

$$\widetilde{b}_4 = \widetilde{J}_A(\alpha' - \beta) - R_m \widetilde{J}_{AB}(\beta' + \alpha) + \beta + 2R_J R_m[\zeta(\gamma_2 \sin\varphi_0 \cos\gamma_0 +$$
$$+ \gamma_1 \cos\varphi_0 \sin\gamma_0) + R_h(\gamma_2 \sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \gamma_1 \cos\varphi_0 \sin\gamma_0)] -$$
$$- 2R_m R_J \zeta_h(\gamma_1' \cos\varphi_0 \cos\gamma_0 - \gamma_2' \sin\varphi_0 \sin\gamma_0) = 0,$$
$$\widetilde{b}_5 = -R_m \widetilde{J}_{AB}(\alpha' - \beta) + \widetilde{J}_B(\beta' + \alpha) - \alpha + 2R_m R_J[\zeta(\gamma_2 \sin\varphi_0 \sin\gamma_0 -$$
$$- \gamma_1 \cos\varphi_0 \cos\gamma_0) + R_h(\gamma_2 \sin\varphi_0 \sin\gamma_0 - \gamma_1 \cos\varphi_0 \cos\gamma_0)] -$$
$$- 2R_J R_m \zeta_h(\gamma_2' \sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \gamma_1' \cos\varphi_0 \sin\gamma_0) = 0,$$

или

$$\widetilde{b}_4 = \widetilde{J}_A(\alpha' - \beta) - R_m \widetilde{J}_{AB}(\beta' + \alpha) + \beta + 2R_J R_m \zeta_h(\gamma_2 \sin\varphi_0 \cos\gamma_0 +$$
$$+ \gamma_1 \cos\varphi_0 \sin\gamma_0) - 2R_m R_J \zeta_h(\gamma_1' \cos\varphi_0 \cos\gamma_0 - \gamma_2' \sin\varphi_0 \sin\gamma_0) = 0,$$
$$\widetilde{b}_5 = -R_m \widetilde{J}_{AB}(\alpha' - \beta) + \widetilde{J}_B(\beta' + \alpha) - \alpha + 2R_m R_J \zeta_h(\gamma_2 \sin\varphi_0 \sin\gamma_0 -$$
$$- \gamma_1 \cos\varphi_0 \cos\gamma_0) - 2R_J R_m \zeta_h(\gamma_2' \sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \gamma_1' \cos\varphi_0 \sin\gamma_0) = 0.$$

С учетом (8.3.12), уравнения (8.3.11) примут вид:

$$L_1 = (1 - 2R_m R_J)\gamma_1'' + \widetilde{H}\gamma_1' - \zeta_h \cos\varphi_0[(\alpha'' - 2\beta' - \alpha)\cos\gamma_0 + (\beta'' + 2\alpha' - \beta)\sin\gamma_0] -$$
$$- 2R_m \cos\varphi_0\{[\gamma_2'' \sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \gamma_1'' \cos\varphi_0 \sin\gamma_0 - 2(\gamma_2' \sin\varphi_0 \sin\gamma_0 -$$
$$- \gamma_1' \cos\varphi_0 \cos\gamma_0) - (\gamma_2 \sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \gamma_1 \cos\varphi_0 \sin\gamma_0)]\sin\gamma_0 -$$
$$- [(\gamma_2'' \sin\varphi_0 \sin\gamma_0 - \gamma_1'' \cos\varphi_0 \cos\gamma_0) + 2(\gamma_2' \sin\varphi_0 \cos\gamma_0 +$$
$$+ \gamma_1' \cos\varphi_0 \sin\gamma_0) - (\gamma_2 \sin\varphi_0 \sin\gamma_0 - \gamma_1 \cos\varphi_0 \cos\gamma_0)]\cos\gamma_0\} = 0,$$
$$L_2 = \gamma_2'' + \widetilde{H}\gamma_2' + \zeta_h \sin\varphi_0[(\alpha'' - 2\beta' - \alpha)\sin\gamma_0 - (\beta'' + 2\alpha' - \beta)\cos\gamma_0] -$$
$$- 2R_m \sin\varphi_0\{[\gamma_2'' \sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \gamma_1'' \cos\varphi_0 \sin\gamma_0 - 2(\gamma_2' \sin\varphi_0 \sin\gamma_0 -$$
$$- \gamma_1' \cos\varphi_0 \cos\gamma_0) - (\gamma_2 \sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \gamma_1 \cos\varphi_0 \sin\gamma_0)]\cos\gamma_0 +$$
$$+ [\gamma_2'' \sin\varphi_0 \sin\gamma_0 - \gamma_1'' \cos\varphi_0 \cos\gamma_0 + 2(\gamma_2' \sin\varphi_0 \cos\gamma_0 +$$
$$+ \gamma_1' \cos\varphi_0 \sin\gamma_0) - (\gamma_2 \sin\varphi_0 \sin\gamma_0 - \gamma_1 \cos\varphi_0 \cos\gamma_0)]\sin\gamma_0\} = 0.$$

Сгруппировав соответствующие составляющие при γ_1, γ_2 и их производных, получим:

$$L_1 = -\zeta_h \cos\varphi_0[(\alpha'' - 2\beta' - \alpha)\cos\gamma_0 + (\beta'' + 2\alpha' - \beta)\sin\gamma_0] +$$
$$+ \left(1 - 2R_m R_J - 2R_m \cos^2\varphi_0\right)\gamma_1'' + \widetilde{H}\gamma_1' + 2R_m \cos^2\varphi_0 \gamma_1 + 2R_m \sin 2\varphi_0 \gamma_2' = 0,$$
$$L_2 = (\zeta + R_h)\sin\varphi_0[(\alpha'' - 2\beta' - \alpha)\sin\gamma_0 - (\beta'' + 2\alpha' - \beta)\cos\gamma_0] -$$
$$- 2R_m \sin 2\varphi_0 \gamma_1' + \left(1 - 2R_m \sin^2\varphi_0\right)\gamma_2'' + \widetilde{H}\gamma_2' + 2R_m \sin^2\varphi_0 \gamma_2 = 0.$$

Окончательно, **уравнения первого приближения в новых переменных** γ_1, γ_2, после исключения части переменных, имеют вид:

$$\widetilde{b}_4 = \widetilde{J}_A \alpha' - R_m \widetilde{J}_{AB}\alpha - R_m \widetilde{J}_{AB}\beta' + (1-\widetilde{J}_A)\beta - 2R_J R_m \zeta_h [(\gamma_1' \cos\gamma_0 - \gamma_1 \sin\gamma_0)\cos\varphi_0 - (\gamma_2' \sin\gamma_0 + \gamma_2 \cos\gamma_0)\sin\varphi_0] = 0,$$

$$\widetilde{b}_5 = -R_m \widetilde{J}_{AB}\alpha' - (1-\widetilde{J}_B)\alpha + \widetilde{J}_B \beta' + R_m \widetilde{J}_{AB}\beta - 2R_J R_m \zeta_h [(\gamma_1' \sin\gamma_0 + \gamma_1 \cos\gamma_0)\cos\varphi_0 + (\gamma_2' \cos\gamma_0 - \gamma_2 \sin\gamma_0)\sin\varphi_0] = 0,$$

$$L_1 = -\zeta_h \cos\varphi_0 (\alpha'' \cos\gamma_0 + 2\alpha' \sin\gamma_0 - \alpha\cos\gamma_0 + \beta'' \sin\gamma_0 - 2\beta' \cos\gamma_0 - \beta\sin\gamma_0) + \left(1 - 2R_m R_J - 2R_m \cos^2\varphi_0\right)\gamma_1'' + \widetilde{H}\gamma_1' + 2R_m \cos^2\varphi_0 \gamma_1 + 2R_m \sin 2\varphi_0 \gamma_2' = 0,$$

$$L_2 = \zeta_h \sin\varphi_0 (\alpha'' \sin\gamma_0 - 2\alpha' \cos\gamma_0 - \alpha\sin\gamma_0 - \beta'' \cos\gamma_0 - 2\beta' \sin\gamma_0 + \beta\cos\gamma_0) - 2R_m \sin 2\varphi_0 \gamma_1' + \left(1 - 2R_m \sin^2\varphi_0\right)\gamma_2'' + \widetilde{H}\gamma_2' + 2R_m \sin^2\varphi_0 \gamma_2 = 0. \quad (8.3.13)$$

2. Характеристическое уравнение и необходимые условия устойчивости.

2.1. Найдем характеристическое уравнение. Для этого воспользуемся системой уравнений (8.3.13). Введем обозначение:

$$a_{11} = \widetilde{J}_A\lambda - R_m\widetilde{J}_{AB},\ \ a_{12} = -R_m\widetilde{J}_{AB}\lambda + (1-\widetilde{J}_A),$$

$$a_{13} = -2R_J R_m \zeta_h \cos\varphi_0 (\lambda\cos\gamma_0 - \sin\gamma_0),$$

$$a_{14} = 2R_J R_m \zeta_h \sin\varphi_0 (\lambda\sin\gamma_0 + \cos\gamma_0),\ \ a_{21} = -R_m\widetilde{J}_{AB}\lambda - (1-\widetilde{J}_B),$$

$$a_{22} = \widetilde{J}_B\lambda + R_m\widetilde{J}_{AB},\ \ a_{23} = -a_{14}\cos\varphi_0/\sin\varphi_0,\ \ a_{24} = a_{13}\sin\varphi_0/\cos\varphi_0,$$

$$a_{31} = -\zeta_h \cos\varphi_0 (\lambda^2\cos\gamma_0 + 2\lambda\sin\gamma_0 - \cos\gamma_0),$$

$$a_{32} = -\zeta_h \cos\varphi_0 (\lambda^2\sin\gamma_0 - 2\lambda\cos\gamma_0 - \sin\gamma_0),$$

$$a_{33} = (1 - 2R_m R_J - 2R_m\cos^2\varphi_0)\lambda^2 + \widetilde{H}\lambda + 2R_m\cos^2\varphi_0,$$

$$a_{34} = 2R_m\sin 2\varphi_0\lambda,\ \ a_{41} = -a_{32}\sin\varphi_0/\cos\varphi_0,\ \ a_{42} = a_{31}\sin\varphi_0/\cos\varphi_0,$$

$$a_{43} = -a_{34},\ \ a_{44} = (1 - 2R_m\sin^2\varphi_0)\lambda^2 + \widetilde{H}\lambda + 2R_m\sin^2\varphi_0. \quad (8.3.14)$$

Тогда характеристическое уравнение системы (8.3.13) можно представить в виде определителя или полинома:

$$\Delta(\lambda) = \left|a_{ij}\right|_1^4 = a_6\lambda^6 + a_5\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (8.3.15)$$

где

$$a_0 = a_0^{(2)}R_m^2 + a_0^{(4)}R_m^4,\ \ a_1 = a_1^{(1)}R_m + a_1^{(2)}R_m^2 + a_1^{(3)}R_m^3,$$

$$a_i = a_i^{(0)} + a_i^{(1)}R_m + a_i^{(2)}R_m^2 + a_i^{(3)}R_m^3 + a_i^{(4)}R_m^4,$$

$$a_j = a_j^{(0)} + a_j^{(1)}R_m + a_j^{(2)}R_m^2 + a_j^{(3)}R_m^3,\ \ /\,i = 2,4,6;\ j = 3,5\,/, \quad (8.3.16)$$

и коэффициенты:

- при R_m^0

$$a_6^{(0)} = \widetilde{J}_A \widetilde{J}_B,\ a_5^{(0)} = 2\widetilde{H} a_6^{(0)},\ a_4^{(0)} = \widetilde{H}^2 \widetilde{J}_A \widetilde{J}_B + (1-\widetilde{J}_A)(1-\widetilde{J}_B),$$

$$a_3^{(0)} = 2\widetilde{H}(1-\widetilde{J}_A)(1-\widetilde{J}_B),\ a_2^{(0)} = \widetilde{H} a_3^{(0)} / 2;$$

- при R_m

$$a_6^{(1)} = -2\left\langle \widetilde{J}_A \widetilde{J}_B + R_J \{\widetilde{J}_A \widetilde{J}_B + \zeta_h^2[\widetilde{J}_A f + \widetilde{J}_B (1-f)]\}\right\rangle, \quad a_5^{(1)} = \widetilde{H} a_6^{(1)},$$

$$a_4^{(1)} = -2\{1-\widetilde{J}_A - \widetilde{J}_B + R_J[(1-\widetilde{J}_A)(1-\widetilde{J}_B) - 3\zeta_h^2 - \zeta_h^2(\widetilde{J}_A + \widetilde{J}_B)(2\widetilde{e}_0^2 - 1)\cos 2\gamma_0]\},$$

$$a_3^{(1)} = \widetilde{H} a_4^{(1)},\ a_2^{(1)} = 2[(1-f)(1-\widetilde{J}_A)(1-\widetilde{J}_B - R_J \zeta_h^2) +$$

$$+ f(1-\widetilde{J}_B)(1-\widetilde{J}_A - R_J \zeta_h^2)],\ a_1^{(1)} = \widetilde{H} a_2^{(1)};$$

- при R_m^2

$$a_6^{(2)} = 4\widetilde{J}_A \widetilde{J}_B \widetilde{e}_0^2 (1-\widetilde{e}_0^2) - \widetilde{J}_{AB}^2 + R_J\{4\widetilde{J}_A \widetilde{J}_B (1-\widetilde{e}_0^2) + \zeta_h^2[4(\widetilde{J}_A + \widetilde{J}_B)\widetilde{e}_0^2(1-\widetilde{e}_0^2) -$$

$$-2\widetilde{J}_{AB} \sin 2\gamma_0 (2\widetilde{e}_0^2 - 1)]\} + R_J^2 \zeta_h^2 (1-\widetilde{e}_0^2)[4\zeta_h^2 \widetilde{e}_0^2 + 4(\widetilde{J}_A \cos^2\gamma_0 + \widetilde{J}_B \sin^2\gamma_0)],$$

$$a_5^{(2)} = -2\widetilde{H}\widetilde{J}_{AB}[\widetilde{J}_{AB} + R_J \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (2\widetilde{e}_0^2 - 1)],\ a_4^{(2)} = -\widetilde{J}_{AB}^2 (1+\widetilde{H}^2) + 4\widetilde{e}_0^2 (1-\widetilde{e}_0^2) \times$$

$$\times (1-\widetilde{J}_A)(1-\widetilde{J}_B) + R_J\{4(1-\widetilde{e}_0^2)(1-\widetilde{J}_A - \widetilde{J}_B) + 4\zeta_h^2[\widetilde{e}_0^2(1-\widetilde{e}_0^2)(3\widetilde{J}_A + 3\widetilde{J}_B - 2) -$$

$$-\widetilde{J}_{AB} \sin 2\gamma_0 (2\widetilde{e}_0^2 - 1)]\} + 4R_J^2 \zeta_h^2 (1-\widetilde{e}_0^2)[3\zeta_h^2 \widetilde{e}_0^2 + (\widetilde{J}_A \cos 2\gamma_0 - \widetilde{J}_B \cos 2\gamma_0 - 3)],$$

$$a_3^{(2)} = -2\widetilde{H}\widetilde{J}_{AB}[\widetilde{J}_{AB} + 2R_J \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (2\widetilde{e}_0^2 - 1)],\ a_2^{(2)} = -\widetilde{H}^2 \widetilde{J}_{AB}^2 + 4\widetilde{e}_0^2 (1-\widetilde{e}_0^2) \times$$

$$\times (2 - 2\widetilde{J}_A - 2\widetilde{J}_B + 3\widetilde{J}_A \widetilde{J}_B) - R_J\{4(1-\widetilde{J}_A - \widetilde{J}_B)(1-\widetilde{e}_0^2) -$$

$$-2\zeta_h^2[2\widetilde{e}_0^2(1-\widetilde{e}_0^2)(3\widetilde{J}_A + 3\widetilde{J}_B - 4) - \widetilde{J}_{AB} \sin 2\gamma_0 (2\widetilde{e}_0^2 - 1)]\} +$$

$$+4R_J^2 \zeta_h^2 (1-\widetilde{e}_0^2)[3\zeta_h^2 \widetilde{e}_0^2 + (1-\widetilde{J}_A \sin^2\gamma_0 - \widetilde{J}_B \cos^2\gamma_0)],$$

$$a_1^{(2)} = -2\widetilde{H} R_J \widetilde{J}_{AB} \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (2\widetilde{e}_0^2 - 1),\ a_0^{(2)} = 4\widetilde{e}_0^2 (1-\widetilde{e}_0^2)(1-\widetilde{J}_A - R_J \zeta_h^2)(1-\widetilde{J}_B - R_J \zeta_h^2);$$

- при R_m^3

$$a_6^{(3)} = 2\widetilde{J}_{AB}[\widetilde{J}_{AB} + R_J \widetilde{J}_{AB} - 2R_J^2 \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (1-\widetilde{e}_0^2)],\ a_5^{(3)} = 2\widetilde{J}_{AB}^2 (1+R_J),$$

$$a_4^{(3)} = 2R_J \widetilde{J}_{AB}[\widetilde{J}_{AB} - 4R_J \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (1-\widetilde{e}_0^2)],\ a_3^{(3)} = 2\widetilde{H} R_J \widetilde{J}_{AB}^2,$$

$$a_2^{(3)} = -2\widetilde{J}_{AB}[\widetilde{J}_{AB} + 2R_J^2 \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (1-\widetilde{e}_0^2)],\ a_1^{(3)} = -2\widetilde{H}\widetilde{J}_{AB}^2;$$

- при R_m^4

$$a_6^{(4)} = -4\widetilde{J}_{AB}^2 (\widetilde{e}_0^2 + R_J)(1-\widetilde{e}_0^2),\ a_4^{(4)} = -12\widetilde{J}_{AB}^2 \widetilde{e}_0^2 (1-\widetilde{e}_0^2),$$

$$a_2^{(4)} = -4\widetilde{J}_{AB}^2 (1-\widetilde{e}_0^2)[3\widetilde{e}_0^2 - R_J],\ a_0^{(4)} = -4\widetilde{J}_{AB}^2 \widetilde{e}_0^2 (1-\widetilde{e}_0^2). \qquad (8.3.17)$$

Согласно теореме Ляпунова об устойчивости движения по первому приближению, основное движение асимптотически устойчиво, когда:

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0, \quad / i = \overline{1,6} /, \qquad (8.3.18)$$

где λ_i – i-й корень характеристического уравнения (8.3.15). Критерий Рауса-Гурвица дает следующие условия асимптотической устойчивости основного движения:

$$a_i > 0,\ /i = \overline{0{,}6}/,\ \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,\ \Delta_3 = a_3\Delta_2 - a_4 a_1^2 > 0. \quad (8.3.19)$$

Из (8.3.17) видно, что случаи отсутствия ($\tilde{e}_0 = 0$) и максимальной ($\tilde{e}_0 = 1$) неуравновешенности являются критическими по Ляпунову случаями одного нулевого корня и нуждаются в отдельном изучении (при $\tilde{e}_0 = 0$ и $\tilde{e}_0 = 1$ получаем, что $a_0 = 0$).

3. Приближенное определение корней характеристического уравнения. В общем случае аналитически найти корни полинома (8.3.15) или провести анализ условий критерия Рауса-Гурвица невозможно. Поэтому ниже проведем исследование в случае, когда масса маятников намного меньше массы ИС, то есть $R_m \ll 1$.

Главные составляющие коэффициентов a_i полинома (8.3.15) и условия (8.3.19) дают такие необходимые условия устойчивости:

$$1 - \tilde{J}_A - R_J\zeta_h^2 > 0,\ 1 - \tilde{J}_B - R_J\zeta_h^2 > 0,\ \text{(а)}$$

$$1 - \tilde{J}_A - R_J\zeta_h^2 < 0,\ 1 - \tilde{J}_B - R_J\zeta_h^2 < 0.\ \text{(б)} \quad (8.3.20)$$

Эти условия более жесткие чем условия, когда СТ должно быть вытянутым ($1 < \tilde{J}_A$, $1 < \tilde{J}_B$) или сплюснутым ($1 > \tilde{J}_A$, $1 > \tilde{J}_B$). Поэтому договоримся в дальнейшем употреблять термины более чем сплюснутое НТ – условия (8.3.20, а), более чем вытянутое НТ – условия (8.3.20, б).

Представим корни характеристического уравнения (8.3.15) разложениями:

$$\lambda = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)} R_m + \lambda^{(2)} R_m^2 + \cdots. \quad (8.3.21)$$

Тогда, в нулевом приближении ($R_m = 0$) уравнение (8.3.15) имеет вид:

$$[a_6^{(0)}(\lambda^{(0)})^4 + a_5^{(0)}(\lambda^{(0)})^3 + a_4^{(0)}(\lambda^{(0)})^2 + a_3^{(0)}(\lambda^{(0)}) + a_2^{(0)}](\lambda^{(0)})^2 = 0,$$

или после преобразований

$$(\lambda^{(0)} + H`)^2[\tilde{J}_A\tilde{J}_B(\lambda^{(0)})^2 + (1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B)](\lambda^{(0)})^2 = 0. \quad (8.3.22)$$

Корнями полинома (8.3.22) являются:

$$\lambda_{1,2}^{(0)} = -H`,\ \lambda_{3,4}^{(0)} = \pm ik,\ \lambda_{5,6}^{(0)} = 0, \quad (8.3.23)$$

где

$$k = \sqrt{(1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B)\tilde{J}_A^{-1}\tilde{J}_B^{-1}}. \quad (8.3.24)$$

Для поиска следующего приближения мнимых в нулевом приближении корней $\lambda_{3,4}$ представим их в виде:

$$\lambda_{3,4} \approx \lambda_{3,4}^{(0)} + \lambda_{3,4}^{(1)} R_m. \quad (8.3.25)$$

Подставляя (8.3.25) в (8.3.15), и собирая составляющие при R_m, получим:

$$(k_1 \pm ik_2)\lambda_{3,4}^{(1)} + k_3 \pm ik_4 = 0, \qquad (8.3.26)$$

где

$$k_1 = (5a_5^{(0)}k^2 - 3a_3^{(0)})k^2 = \frac{4\widetilde{H}}{\widetilde{J}_A\widetilde{J}_B}(1-\widetilde{J}_A)^2(1-\widetilde{J}_B)^2,$$

$$k_2 = 2(3a_6^{(0)}k^4 - 2a_4^{(0)}k^2 + a_2^{(0)})k =$$

$$= -\frac{2k}{\widetilde{J}_A\widetilde{J}_B}(1-\widetilde{J}_A)(1-\widetilde{J}_B)[\widetilde{H}^2\widetilde{J}_A\widetilde{J}_B - (1-\widetilde{J}_A)(1-\widetilde{J}_B)],$$

$$k_3 = -(a_6^{(1)}k^4 - a_4^{(1)}k^2 + a_2^{(1)})k^2 = \frac{2R_J\zeta_h^2}{\widetilde{J}_A^3\widetilde{J}_B^3}(1-\widetilde{J}_A)(1-\widetilde{J}_B)\times$$

$$\times[\widetilde{J}_B(1-\widetilde{J}_A)(1+\widetilde{J}_A-\widetilde{J}_B)^2 + (\widetilde{J}_A-\widetilde{J}_B)(1-\widetilde{J}_A-\widetilde{J}_B)^2 f],$$

$$k_4 == (a_5^{(1)}k^4 - a_3^{(1)}k^2 + a_1^{(1)})k = -\frac{\widetilde{H}\widetilde{J}_A\widetilde{J}_B kk_3}{(1-\widetilde{J}_A)(1-\widetilde{J}_B)}. \qquad (8.3.27)$$

Корни линейного уравнения (8.3.26) имеют вид:

$$\lambda_{3,4}^{(1)} = -\frac{k_1k_3 + k_2k_4 \pm i(k_1k_4 - k_2k_3)}{k_1^2 + k_2^2}. \qquad (8.3.28)$$

Для поиска следующего приближения нулевых в нулевом приближении корней $\lambda_{5,6}$ представим их в виде:

$$\lambda_{5,6} \approx \lambda_{5,6}^{(1)}R_m. \qquad (8.3.29)$$

Подставляя (8.3.29) в (8.3.15), и собирая составляющие при R_m^2, получим уравнение:

$$a_2^{(0)}(\lambda_{5,6}^{(1)})^2 + a_1^{(1)}(f)\lambda_{5,6}^{(1)} + a_0^{(2)} = 0, \qquad (8.3.30)$$

корни которого имеют вид

$$\lambda_{5,6}^{(1)} = \frac{-a_1^{(1)} \mp \sqrt{(a_1^{(1)})^2 - 4a_2^{(0)}a_0^{(2)}}}{2a_2^{(0)}}. \qquad (8.3.31)$$

В (8.3.30) и (8.3.31) учитывая (8.3.17):

$$a_2^{(0)} = \widetilde{H}^2(1-\widetilde{J}_A)(1-\widetilde{J}_B), \quad a_1^{(1)} = 2\widetilde{H}[(1-f)(1-\widetilde{J}_A)\times$$

$$\times(1-\widetilde{J}_B - R_J\zeta_h^2) + f(1-\widetilde{J}_B)(1-\widetilde{J}_A - R_J\zeta_h^2)],$$

$$a_0^{(2)} = 4\widetilde{e}_0^2(1-\widetilde{e}_0^2)(1-\widetilde{J}_A - R_J\zeta_h^2)(1-\widetilde{J}_B - R_J\zeta_h^2). \qquad (8.3.32)$$

Согласно следствиям формул Виета корни (8.3.31) будут иметь отрицательные действительные части при выполнении условий:

$$a_2^{(0)} > 0, \ a_1^{(1)} > 0, \ a_0^{(2)} > 0. \qquad (8.3.33)$$

Учитывая условия (8.3.20, а), условия (8.3.33) выполняются автоматически.

Следовательно, в случае, когда $R_m << 1$ корни характеристического уравнения (8.3.15) имеют такие разложения:

$$\lambda_{1,2} \approx -\widetilde{H},\ \ \lambda_{3,4} \approx \pm ik - \frac{R_m R_J \zeta_h^2 (a + bf)(\widetilde{H} \mp ik)}{c\widetilde{J}_A \widetilde{J}_B (1-\widetilde{J}_A)(1-\widetilde{J}_B)},$$

$$\lambda_{5,6} \approx -\frac{R_m [a_1^{(1)} \pm \sqrt{(a_1^{(1)})^2 - 4a_2^{(0)} a_0^{(2)}}\,]}{2a_2^{(0)}}, \qquad (8.3.34)$$

где

$$k = \sqrt{(1-\widetilde{J}_A)(1-\widetilde{J}_B)\widetilde{J}_A^{-1}\widetilde{J}_B^{-1}},\ \ a = \widetilde{J}_B (1-\widetilde{J}_A)(1+\widetilde{J}_A - \widetilde{J}_B)^2,$$

$$b = (\widetilde{J}_A - \widetilde{J}_B)(1-\widetilde{J}_A - \widetilde{J}_B)^2,\ \ c = [\widetilde{H}^2 \widetilde{J}_A \widetilde{J}_B + (1-\widetilde{J}_A)(1-\widetilde{J}_B)]. \qquad (8.3.35)$$

Действительные части корней (8.3.34) будут отрицательны только в случае более чем сплюснутого НТ, то есть при выполнении условий (8.3.20, а).

Следовательно, из корней (8.3.34) характеристического уравнения (8.3.15), и из условий (8.3.20, а) видно, что:

- при одновременном выполнении условий (8.3.20, а), основное движение условно асимптотически устойчиво, а переходные процессы – колебательно-затухающие;
- величина безразмерного коэффициента трения $\widetilde{H}$ влияет лишь на скорость затухания переходных процессов, но не на устойчивость.

Проанализируем детальнее условия (8.3.20, а). При этом будем считать, что масса рассматриваемой ИС при изменении неуравновешенности не изменяется и поэтому, с учетом (8.1.45) $\mu = \mathrm{const} \neq 0$ и $\widetilde{e}_0 = 0$ только в случае, когда $e_0 = 0$. Чтобы основные движения были условно асимптотически устойчивы для любого $0 < \widetilde{e}_0 < 1$ достаточно, чтобы эти условия выполнялись в наиболее жестких – предельных случаях (рис. 8.3.1):

1) $\widetilde{e}_0 = 0$ ($\varphi_{01} = \pi/2$), $\gamma_{01} = 0$ (рис. 8.3.1, а);

2) $\widetilde{e}_0 = 1$ ($\varphi_{02} = \pi$), $\gamma_{02} = \pi/2$ (рис. 8.3.1, б);

3) $\widetilde{e}_0 = 0$ ($\varphi_{03} = \pi/2$), $\gamma_{03} = \pi/2$ (рис. 8.3.1, в);

4) $\widetilde{e}_0 = 1$ ($\varphi_{04} = \pi$), $\gamma_{04} = 0$ (рис. 8.3.1, г).

Отличие случаев заключается в том, что в случаях 1, 2 маятники располагаются на оси Y (рис. 8.3.1, а, б соответственно), а в случаях 3, 4 – на оси X (рис. 8.3.1, в, г соответственно).

В предельных случаях тензор инерции системы – главный центральный и имеет вид:

$$\hat{\mathbf{J}}_{Gi} = \mathrm{diag}(A_{Gi},\, B_{Gi},\, C_G),\ \ /\, i = \overline{1,4}\, /, \qquad (8.3.36)$$

где $\hat{J}_{x_{Gi}} = A_{Gi}$, $\hat{J}_{y_{Gi}} = B_{Gi}$, $\hat{J}_{z_G} = C_G$ – главные центральные моменты инерции системы (относительно осей X_G, Y_G, Z_G) на i-ом основном движении в граничных случаях.

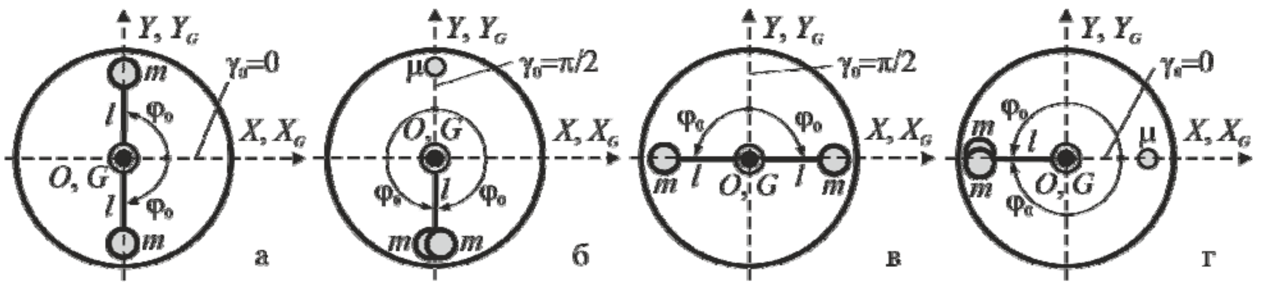


Рис. 8.3.1. Положение маятников на основном движении в граничных (критических) случаях

Учитывая (8.2.18), будем иметь:

$$A_{G1} = A + \mu h^2 + 2m(h^2 + l^2) - M_\Sigma z^2,\ A_{G2} = A_{G1} + \mu e_0^2,\ A_{Gi} = A_{G1} - 2ml^2,$$

$$B_{Gj} = B + h^2(\mu + 2m) - M_\Sigma z^2,$$

$$B_{G3} = B_{Gj} + 2ml^2,\ B_{G4} = B_{G3} + \mu e_0^2,\ /\ j = 1,2;\ i = 3,4\ /. \quad (8.3.37)$$

Из (8.3.37) видно, что A_{G2} и B_{G4} – наибольшие осевые моменты инерции системы.

Отметим, что безразмерные параметры $\widetilde{J}_A$, $\widetilde{J}_B$, учитывая (8.3.8) и предельные случаи, можно представить так:

$$\widetilde{J}_{Ai} = A_{Gi}/C_G,\ \widetilde{J}_{Bi} = B_{Gi}/C_G,\ /\ i = \overline{1,4}\ /. \quad (8.3.38)$$

Следовательно, действительные части корней λ_{1-5} характеристического уравнения (8.3.15) будут отрицательны при одновременном выполнении условий (8.3.20, а), которые с учетом (8.1.45), (8.3.38) и того, что $\zeta_h = \zeta + R_h$, в предельных случаях имеют вид

$$1 - \frac{A_{Gi}}{C_G} - \frac{M_\Sigma l^2}{C_G}\left(\frac{z}{l} + \frac{h}{l}\right)^2 > 0,\ 1 - \frac{B_{Gi}}{C_G} - \frac{M_\Sigma l^2}{C_G}\left(\frac{z}{l} + \frac{h}{l}\right)^2 > 0,\ \ /\ i = \overline{1,4}\ /,$$

или после преобразований

$$C_G - A_{Gi} - M_\Sigma h_z^2 > 0,\ C_G - B_{Gi} - M_\Sigma h_z^2 > 0,\ /i = \overline{1,4}/, \quad (8.3.39)$$

где $h_z = h + z$. Отметим, что условия (8.3.39), полученные в предельных случаях, эквивалентны условиям, полученным в главе 4, но для данной задачи есть возможность конкретизировать эти условия. В явном виде относительно параметров системы, в наиболее опасных случаях (когда A_{Gi} и B_{Gi} достигают наибольших значений), условия (8.3.39) с учетом (8.3.37), принимают вид:

$$C - A - Mh^2 > 0,\ \ C - B - Mh^2 > 0. \qquad (8.3.40)$$

Для выяснения влияния нулевого корня характеристического уравнения (8.3.15) на устойчивость основных движений и характер переходных процессов исследуем ниже корни характеристического уравнения в критических случаях.

8.3.2. Исследование условной устойчивости семьи основных движений ($\widetilde{e}_0 = 0$)

Система уравнений (8.3.13) в случае, когда $\widetilde{e}_0 = 0$ ($\varphi_{01} = \pi/2$), $\gamma_{01} = 0$, имеет вид:

$$\widetilde{b}_4 = \widetilde{J}_{A1}\alpha' + (1-\widetilde{J}_{A1})\beta + 2R_m R_J \zeta_h \gamma_2 = 0,$$

$$\widetilde{b}_5 = -(1-\widetilde{J}_{B1})\alpha + \widetilde{J}_{B1}\beta' - 2R_m R_J \zeta_h \gamma_2' = 0,\ \ L_1 = (1-2R_J R_m)\gamma_1'' + \widetilde{H}\gamma_1' = 0,$$

$$L_2 = -\zeta_h(\beta'' + 2\alpha' - \beta) + (1-2R_m)\gamma_2'' + \widetilde{H}\gamma_2' + 2R_m\gamma_2 = 0. \qquad (8.3.41)$$

В случае, когда $\widetilde{e}_0 = 0$ ($\varphi_{03} = \pi/2$), $\gamma_{03} = \pi/2$, система (8.3.13) имеет вид:

$$\widetilde{b}_4 = \widetilde{J}_{A3}\alpha' + (1-\widetilde{J}_{A3})\beta + 2R_m R_J \zeta_h \gamma_2' = 0,$$

$$\widetilde{b}_5 = -(1-\widetilde{J}_{B3})\alpha + \widetilde{J}_{B3}\beta' + 2R_m R_J \zeta_h \gamma_2 = 0,\ \ L_1 = (1-2R_J R_m)\gamma_1'' + \widetilde{H}\gamma_1' = 0,$$

$$L_2 = \zeta_h(\alpha'' - 2\beta' - \alpha) + (1-2R_m)\gamma_2'' + \widetilde{H}\gamma_2' + 2R_m\gamma_2 = 0. \qquad (8.3.42)$$

Видно, что система уравнений (8.3.41) и (8.3.42) распадается на две независимых подсистемы. В первую подсистему системы уравнений (8.3.41) и (8.3.42) входит первое, второе и четвертое уравнение с переменными α, β, γ_2, а во вторую – третье уравнение с переменной γ_1.

Исследуем первую подсистему уравнений системы (8.3.41). Введем обозначение, имея в виду, что в данном случае $\lambda = \lambda(\pi/2,0)$:

$$b_{11} = \widetilde{J}_{A1}\lambda,\ \ b_{12} = 1-\widetilde{J}_{A1},\ \ b_{13} = 2R_m R_J \zeta_h,$$

$$b_{21} = -(1-\widetilde{J}_{B1}),\ \ b_{22} = \widetilde{J}_{B1}\lambda,\ \ b_{23} = -2R_m R_J \zeta_h \lambda,$$

$$b_{31} = -2\zeta_h\lambda,\ \ b_{32} = -\zeta_h(\lambda^2 - 1),\ \ b_{33} = (1-2R_m)\lambda^2 + \widetilde{H}\lambda + 2R_m. \qquad (8.3.43)$$

Характеристическое уравнение первой подсистемы уравнений системы (8.3.41) имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = \left|b_{ij}\right|_1^3 = b_4\lambda^4 + b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0, \qquad (8.3.44)$$

где

$$b_4 = b_4^{(0)} + b_4^{(1)}R_m,\ \ b_3 = b_3^{(0)},\ \ b_2 = b_2^{(0)} + b_2^{(1)}R_m,$$
$$b_1 = b_1^{(0)},\ \ b_0 = b_0^{(1)}R_m, \qquad (8.3.45)$$

и коэффициенты:

- при $R_m = 0$

$$b_4^{(0)} = \widetilde{J}_{A1}\widetilde{J}_{B1},\ b_3^{(0)} = \widetilde{H}\widetilde{J}_{A1}\widetilde{J}_{B1},\ b_2^{(0)} = (1-\widetilde{J}_{A1})(1-\widetilde{J}_{B1}),\ b_1^{(0)} = \widetilde{H}b_2^{(0)};$$

- коэффициенты при R_m

$$b_4^{(1)} = -2\widetilde{J}_{A1}(\widetilde{J}_{B1} + R_J\zeta_h^2),\ b_2^{(1)} = -2[1-\widetilde{J}_{A1} - \widetilde{J}_{B1} - R_J\zeta_h^2(3+\widetilde{J}_{B1} - \widetilde{J}_{A1})],$$

$$b_0^{(1)} = 2(1-\widetilde{J}_{B1})(1-\widetilde{J}_{A1} - R_J\zeta_h^2). \tag{8.3.46}$$

Критерий Рауса-Гурвица имеет вид:

$$b_i > 0,\ /i = \overline{0,4}/;\ \Delta_2 = b_1b_2 - b_0b_3 > 0,\ \Delta_3 = b_3\Delta_2 - b_4b_1^2 > 0. \tag{8.3.47}$$

С учетом (8.3.45) – (8.3.46):

- первая группа условий (8.3.47) принимает вид

$$b_4 = \widetilde{J}_{A1}\widetilde{J}_{B1} - 2R_m\widetilde{J}_{A1}(\widetilde{J}_{B1} + R_J\zeta_h^2) > 0,\ b_3 = \widetilde{H}\widetilde{J}_{A1}\widetilde{J}_{B1} > 0,$$

$$b_2 = (1-\widetilde{J}_{A1})(1-\widetilde{J}_{B1}) - 2R_m[1-\widetilde{J}_{A1} - \widetilde{J}_{B1} - R_J\zeta_h^2(3+\widetilde{J}_{B1} - \widetilde{J}_{A1})] > 0,$$

$$b_1 = \widetilde{H}(1-\widetilde{J}_{A1})(1-\widetilde{J}_{B1}) > 0,\ b_0 = 2R_m(1-\widetilde{J}_{B1})(1-\widetilde{J}_{A1} - R_J\zeta_h^2) > 0;$$

- вторая группа условий (8.3.47) принимает вид

$$\Delta_2 = \widetilde{H}(1-\widetilde{J}_{B1})\{(1-\widetilde{J}_{B1})(1-\widetilde{J}_{A1})^2(1-2R_m) +$$

$$+ 2R_mR_J\zeta_h^2[3+\widetilde{J}_{B1} - \widetilde{J}_{A1}(4-\widetilde{J}_{A1})]\} > 0,$$

$$\Delta_3 = 2\widetilde{H}^2R_JR_m\zeta_h^2\widetilde{J}_{A1}(1-\widetilde{J}_{B1})(1+\widetilde{J}_{B1} - \widetilde{J}_{A1})^2 > 0. \tag{8.3.48}$$

Эти условия будут всегда выполняться при $R_m << 1$, но при выполнении условий:

$$1-\widetilde{J}_{A1} - R_J\zeta_h^2 > 0,\ 1-\widetilde{J}_{B1} - R_J\zeta_h^2 > 0. \tag{8.3.49}$$

С учетом (8.1.45), (8.3.37) (8.3.38) и того, что $\zeta_h = \zeta + R_h$, условия (8.3.49) после преобразований принимают вид:

$$1 - \frac{A_{G1}}{C_G} - \frac{M_\Sigma l^2}{C_G}\left(\frac{z}{l} + \frac{h}{l}\right)^2 > 0,\ 1 - \frac{B_{G1}}{C_G} - \frac{M_\Sigma l^2}{C_G}\left(\frac{z}{l} + \frac{h}{l}\right)^2 > 0,$$

или после преобразований

$$C_G - A_{G1} - M_\Sigma h_z^2 > 0,\ C_G - B_{G1} - M_\Sigma h_z^2 > 0. \tag{8.3.50}$$

В явном виде, относительно параметров системы, условия (8.3.50), учитывая (8.3.37), имеют вид:

$$C - A - Mh^2 > 0,\ C + 2ml^2 - B - Mh^2 > 0. \tag{8.3.51}$$

Так как в общем случае корни характеристического уравнения (8.3.44) получить невозможно, рассмотрим случай когда $R_m << 1$. Представив корни разложениями вида (8.3.21), в нулевом приближении ($R_m = 0$), получим уравнение:

$$(\lambda^{(0)} + \widetilde{H})[\widetilde{J}_{A1}\widetilde{J}_{B1}(\lambda^{(0)})^2 + (1-\widetilde{J}_{A1})(1-\widetilde{J}_{B1})]\lambda^{(0)} = 0, \tag{8.3.52}$$

корни которого имеют вид

$$\lambda_1 \approx -\widetilde{H}, \ \ \lambda_{2,3}^{(0)} = \pm i k_{10}, \ \ \lambda_4^{(0)} = 0, \tag{8.3.53}$$

где $k_{10} = \sqrt{(1-\widetilde{J}_{A1})(1-\widetilde{J}_{B1})\widetilde{J}_{A1}^{-1}\widetilde{J}_{B1}^{-1}}$.

Для поиска следующего приближения мнимых в нулевом приближении корней $\lambda_{2,3}$ представим их в виде:

$$\lambda_{2,3} \approx \lambda_{2,3}^{(0)} + \lambda_{2,3}^{(1)} R_m. \tag{8.3.54}$$

Подставляя (8.3.54) в (8.3.44), и собирая составляющие при R_m, получим:

$$(k_{11} \pm i k_{12})\lambda_{2,3}^{(1)} + k_{13} = 0, \tag{8.3.55}$$

где

$$k_{11} = -3c_3^{(0)}k_{10}^2 + c_1^{(0)} = -2\widetilde{H}(1-\widetilde{J}_{A1})(1-\widetilde{J}_{B1}),$$

$$k_{12} = -2(2c_4^{(0)}k_{10}^2 + c_2^{(0)})k_{10} = -2k_{10}(1-\widetilde{J}_{A1})(1-\widetilde{J}_{B1}),$$

$$k_{13} = b_4^{(1)}k_{10}^4 - b_2^{(1)}k_{10}^2 + b_0^{(1)} = -\frac{2R_J\zeta_h^2}{\widetilde{J}_{A1}^2\widetilde{J}_{B1}}(1-\widetilde{J}_{B1})(1+\widetilde{J}_{B1}-\widetilde{J}_{A1})^2. \tag{8.3.56}$$

Корни линейного уравнения (8.3.55) имеют вид:

$$\lambda_{2,3}^{(1)} = -\frac{k_{13}(k_{11} \pm i k_{12})}{k_{11}^2 + k_{12}^2}, \tag{8.3.57}$$

или

$$\lambda_{2,3}^{(1)} = -\frac{R_J\zeta_h^2(1+\widetilde{J}_{B1}-\widetilde{J}_{A1})^2}{\widetilde{J}_{B1}(1-\widetilde{J}_{A1})[\widetilde{H}^2\widetilde{J}_{A1}\widetilde{J}_{B1} + (1-\widetilde{J}_{A1})(1-\widetilde{J}_{B1})]}(\widetilde{H} \mp i k_{10}). \tag{8.3.58}$$

Для поиска следующего приближения нулевого в нулевом приближении корня λ_4 представим его в виде:

$$\lambda_4 \approx \lambda_4^{(1)} R_m. \tag{8.3.59}$$

Подставив (8.3.59) в (8.3.44), и собирая составляющие при R_m, получим:

$$b_1^{(0)}\lambda_4^{(1)} + b_0^{(1)} = 0. \tag{8.3.60}$$

Корень этого уравнения, с учетом (8.3.46), имеет вид

$$\lambda_4^{(1)} = -\frac{2(1-\widetilde{J}_{A1} - R_J\zeta_h^2)}{\widetilde{H}(1-\widetilde{J}_{A1})}. \tag{8.3.61}$$

Окончательно, корни полинома (8.3.44) имеют разложения:

$$\lambda_1(\pi/2,0) \approx -\widetilde{H},$$

$$\lambda_{2,3}(\pi/2,0) \approx -\frac{R_m\widetilde{H}R_J\zeta_h^2(1+\widetilde{J}_{B1}-\widetilde{J}_{A1})^2}{\widetilde{J}_{B1}(1-\widetilde{J}_{A1})[\widetilde{H}^2\widetilde{J}_{A1}\widetilde{J}_{B1} + (1-\widetilde{J}_{A1})(1-\widetilde{J}_{B1})]} \pm$$

$$\pm i k_{10}\left\{1 + \frac{R_m R_J\zeta_h^2(1+\widetilde{J}_{B1}-\widetilde{J}_{A1})^2}{\widetilde{J}_{B1}(1-\widetilde{J}_{A1})[\widetilde{H}^2\widetilde{J}_{A1}\widetilde{J}_{B1} + (1-\widetilde{J}_{A1})(1-\widetilde{J}_{B1})]}\right\},$$

$$\lambda_4(\pi/2{,}0) \approx -\frac{2R_m(1-\widetilde{J}_{A1}-R_J\zeta_h^2)}{\widetilde{H}(1-\widetilde{J}_{A1})}, \qquad (8.3.62,\ а)$$

где $k_{10} = \sqrt{(1-\widetilde{J}_{A1})(1-\widetilde{J}_{B1})\widetilde{J}_{A1}^{-1}\widetilde{J}_{B1}^{-1}}$.

Учитывая формулы (8.1.45), (8.3.37) и (8.3.38), записываем корни (8.3.62, а) в следующем размерном виде:

$$\lambda_1(\pi/2{,}0) \approx -\frac{H}{ml^2\omega_0},$$

$$\lambda_{2,3}(\pi/2{,}0) \approx -\frac{Hm^2l^2\omega_0(C+2ml^2)(C+B-A)^2(z+h)^2}{q_{11}} \pm$$

$$\pm iq_{10}\left[1+\frac{m^3l^4\omega_0^2(C+2ml^2)(C+B-A)^2(z+h)^2}{q_{11}}\right],$$

$$\lambda_4(\pi/2{,}0) \approx -\frac{2m^2l^2\omega_0(C-A-Mh^2)}{HM_\Sigma[C-A-h^2(\mu+2m)+M_\Sigma z^2]}, \qquad (8.3.62,\ б)$$

где

$$q_{10} = \sqrt{(C_G-A_{G1})(C_G-B_{G1})A_{G1}^{-1}B_{G1}^{-1}},$$

$$q_{11} = B_{G1}(C_G-A_{G1})[H^2A_{G1}B_{G1}+m^2l^4\omega_0^2(C_G-A_{G1})(C_G-B_{G1})].$$

По корням (8.3.62, а) или (8.3.62, б) видно, что переходные процессы в системе, носят колебательно-затухающий характер и имеет место асимптотическая устойчивость по $\alpha,\ \beta,\ \gamma_2$.

Характеристическое уравнение второй подсистемы системы уравнений (8.3.41) имеет вид:

$$[(1-2R_JR_m)\chi+\widetilde{H}]\chi = 0. \qquad (8.3.63)$$

Корни уравнения (8.3.63):

$$\chi_1 = -\widetilde{H}/(1-2R_JR_m),\ \ \chi_2 = 0, \qquad (8.3.64,\ а)$$

или в размерном виде

$$\chi_1 = -H(C+2ml^2)/(ml^2\omega_0 C),\ \ \chi_2 = 0. \qquad (8.3.64,\ б)$$

По корням (8.3.64) видно, что имеет место устойчивость по γ_1.

Таким образом со временем

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma_2 \to 0,\ \ \gamma_1 \to const. \qquad (8.3.65)$$

Из этого следует, что со временем угол нутации полностью устраняется. Скорость стремления к нулю возмущений $\alpha,\ \beta,\ \gamma_2$ полностью характеризуют действительные части корней (8.3.62, а) или (8.3.62, б). Появление нулевого корня χ_2, можно интерпретировать аналогично, как и в п.п. 7.3.2.

Рассмотрим первую подсистему уравнений системы (8.3.42). Введем обозначение, имея в виду, что в данном случае $\lambda = \lambda(\pi/2, \pi/2)$:

$$c_{11}=\widetilde{J}_{A3}\lambda,\ \ c_{12}=1-\widetilde{J}_{A3},\ \ c_{13}=2R_mR_J\zeta_h\lambda,\ \ c_{21}=-(1-\widetilde{J}_{B3}),$$
$$c_{22}=\widetilde{J}_{B3}\lambda,\ \ c_{23}=2R_mR_J\zeta_h,\ \ c_{31}=\zeta_h(\lambda^2-1),$$
$$c_{32}=-2\zeta_h\lambda,\ \ c_{33}=(1-2R_m)\lambda^2+\widetilde{H}\lambda+2R_m. \qquad (8.3.66)$$

Тогда характеристическое уравнение первой подсистемы уравнений системы (8.3.42) имеет вид:

$$\Delta(\lambda)=\left|c_{ij}\right|_1^3=c_4\lambda^4+c_3\lambda^3+c_2\lambda^2+c_1\lambda+c_0, \qquad (8.3.67)$$

где

$$c_4=c_4^{(0)}+c_4^{(1)}R_m,\ \ c_3=c_3^{(0)},\ \ c_2=c_2^{(0)}+c_2^{(1)}R_m,$$
$$c_1=c_1^{(0)},\ \ c_0=c_0^{(1)}R_m, \qquad (8.3.68)$$

и коэффициенты:

- при R_m^0

$$c_4^{(0)}=\widetilde{J}_{A3}\widetilde{J}_{B3},\ c_3^{(0)}=\widetilde{H}\widetilde{J}_{A3}\widetilde{J}_{B3},\ c_2^{(0)}=(1-\widetilde{J}_{A3})(1-\widetilde{J}_{B3}),$$
$$c_1^{(0)}=\widetilde{H}(1-\widetilde{J}_{A3})(1-\widetilde{J}_{B3});$$

- коэффициенты при R_m

$$c_4^{(1)}=-2\widetilde{J}_{B3}(\widetilde{J}_{A3}+R_J\zeta_h^2),\ \ c_2^{(1)}=2[R_J\zeta_h^2(3+\widetilde{J}_{A3}-\widetilde{J}_{B3})-(1-\widetilde{J}_{A3}-\widetilde{J}_{B3})],$$
$$c_0^{(1)}=2(1-\widetilde{J}_{A3})(1-\widetilde{J}_{B3}-R_J\zeta_h^2). \qquad (8.3.69)$$

С учетом (8.3.68) и (8.3.69), условия (8.3.47) в новых коэффициентах (8.3.69) примут вид:

- первая группа

$$c_4=\widetilde{J}_{A3}\widetilde{J}_{B3}-2R_m\widetilde{J}_{B3}(\widetilde{J}_{A3}+R_J\zeta_h^2)>0,\ \ c_3=\widetilde{H}\widetilde{J}_{A3}\widetilde{J}_{B3}>0,$$
$$c_2=(1-\widetilde{J}_{A3})(1-\widetilde{J}_{B3})-2R_m[1-\widetilde{J}_{A3}-\widetilde{J}_{B3}-R_J\zeta_h^2(3+\widetilde{J}_{A3}-\widetilde{J}_{B3})]>0,$$
$$c_1=\widetilde{H}(1-\widetilde{J}_{A3})(1-\widetilde{J}_{B3})>0,\ \ c_0=2R_m(1-\widetilde{J}_{A3})(1-\widetilde{J}_{B3}-R_J\zeta_h^2)>0;$$

- вторая группа:

$$\Delta_2=\widetilde{H}(1-\widetilde{J}_{A3})\{(1-\widetilde{J}_{A3})(1-\widetilde{J}_{B3})^2(1-2R_m)+$$
$$+2R_mR_J\zeta_h^2[3+\widetilde{J}_{A3}-\widetilde{J}_{B3}(4-\widetilde{J}_{B3})]\}>0,$$
$$\Delta_3=2\widetilde{H}^2R_JR_m\zeta_h^2\widetilde{J}_{B3}(1-\widetilde{J}_{A3})(1+\widetilde{J}_{A3}-\widetilde{J}_{B3})^2>0. \qquad (8.3.70)$$

Эти условия всегда будут выполняться при $R_m<<1$ и при выполнении условий:

$$1-\widetilde{J}_{A3}-R_J\zeta_h^2>0,\ \ 1-\widetilde{J}_{B3}-R_J\zeta_h^2>0. \qquad (8.3.71)$$

С учетом (8.1.45), (8.3.37) (8.3.38) и того, что $\zeta_h=\zeta+R_h$, условия (8.3.71) после преобразований примут вид:

$$1-\frac{A_{G3}}{C_G}-\frac{M_\Sigma l^2}{C_G}\left(\frac{z}{l}+\frac{h}{l}\right)^2>0,\ \ 1-\frac{B_{G3}}{C_G}-\frac{M_\Sigma l^2}{C_G}\left(\frac{z}{l}+\frac{h}{l}\right)^2>0,$$

или после преобразований в размерном виде

$$C_G - A_{G3} - M_\Sigma h_z^2 > 0,\ C_G - B_{G3} - M_\Sigma h_z^2 > 0. \qquad (8.3.72)$$

В явном виде, относительно параметров системы эти условия записываются таким образом:

$$C + 2ml^2 - A - Mh^2 > 0,\ C - B - Mh^2 > 0. \qquad (8.3.73)$$

В связи с тем, что в общем случае корни характеристического уравнения (8.3.67) получить невозможно, то рассмотрим случай $R_m << 1$.

Представим корни характеристического уравнения (8.3.67) разложениями вида (8.3.21). Тогда, в нулевом приближении ($R_m = 0$), получим уравнение:

$$(\lambda^{(0)} + \widetilde{H})[\widetilde{J}_{A3}\widetilde{J}_{B3}(\lambda^{(0)})^2 + (1-\widetilde{J}_{A3})(1-\widetilde{J}_{B3})]\lambda^{(0)} = 0, \qquad (8.3.74)$$

корни которого имеют вид

$$\lambda_1 \approx -\widetilde{H},\ \lambda_{2,3}^{(0)} = \pm ik_{30},\ \lambda_4^{(0)} = 0, \qquad (8.3.75)$$

где $k_{30} = \sqrt{(1-\widetilde{J}_{A3})(1-\widetilde{J}_{B3})\widetilde{J}_{A3}^{-1}\widetilde{J}_{B3}^{-1}}$.

Для поиска мнимых в нулевом приближении корней $\lambda_{2,3}$ представим их в виде:

$$\lambda_{2,3} \approx \lambda_{2,3}^{(0)} + \lambda_{2,3}^{(1)} R_m. \qquad (8.3.76)$$

Подставив (8.3.76) в (8.3.67), и собирая составляющие при R_m, получим:

$$(k_{31} \pm ik_{32})\lambda_{2,3}^{(1)} + k_{33} = 0, \qquad (8.3.77)$$

где

$$k_{31} = -3c_3^{(0)}k_{30}^2 + c_1^{(0)} = -2\widetilde{H}(1-\widetilde{J}_{A3})(1-\widetilde{J}_{B3}),$$

$$k_{32} = -2(2c_4^{(0)}k_{30}^2 + c_2^{(0)})k_{30} = -2k_{30}(1-\widetilde{J}_{A3})(1-\widetilde{J}_{B3}),$$

$$k_{33} = c_4^{(1)}k_{30}^4 - c_2^{(1)}k_{30}^2 + c_0^{(1)} = -\frac{2R_J\zeta_h^2}{\widetilde{J}_{A3}^2\widetilde{J}_{B3}}(1-\widetilde{J}_{A3})(1+\widetilde{J}_{A3}-\widetilde{J}_{B3})^2. \qquad (8.3.78)$$

Корни линейного уравнения (8.3.77) имеют вид:

$$\lambda_{2,3}^{(1)} = -\frac{k_{33}(k_{31} \pm ik_{32})}{k_{31}^2 + k_{32}^2}, \qquad (8.3.79)$$

или в явном виде

$$\lambda_{2,3}^{(1)} = -\frac{R_J\zeta_h^2(1+\widetilde{J}_{A3}-\widetilde{J}_{B3})^2}{\widetilde{J}_{A3}(1-\widetilde{J}_{B3})[\widetilde{H}^2\widetilde{J}_{A3}\widetilde{J}_{B3} + (1-\widetilde{J}_{A3})(1-\widetilde{J}_{B3})]}(\widetilde{H} \mp ik_{30}). \qquad (8.3.80)$$

Для поиска нулевого в нулевом приближении корня λ_4 представим его в виде:

$$\lambda_4 \approx \lambda_4^{(1)} R_m. \qquad (8.3.81)$$

Подставив (8.3.81) в (8.3.67), и собирая составляющие при R_m, получим:

$$c_1^{(0)}\lambda_4^{(1)} + c_0^{(1)} = 0, \qquad (8.3.82)$$

корень которого, с учетом (8.3.69), имеет вид

$$\lambda_4^{(1)} = -\frac{2(1-\widetilde{J}_{B3} - R_J\zeta_h^2)}{\widetilde{H}(1-\widetilde{J}_{B3})}. \qquad (8.3.83)$$

Окончательно, корни полинома (8.3.67) имеют вид:

$$\lambda_1(\pi/2, \pi/2) \approx -\widetilde{H},$$

$$\lambda_{2,3}(\pi/2, \pi/2) \approx -\frac{R_m\widetilde{H}R_J\zeta_h^2(1+\widetilde{J}_{A3}-\widetilde{J}_{B3})^2}{\widetilde{J}_{A3}(1-\widetilde{J}_{B3})[\widetilde{H}^2\widetilde{J}_{A3}\widetilde{J}_{B3}+(1-\widetilde{J}_{A3})(1-\widetilde{J}_{B3})]} \pm$$

$$\pm ik_{30}\left\{1+\frac{R_mR_J\zeta_h^2(1+\widetilde{J}_{A3}-\widetilde{J}_{B3})^2}{\widetilde{J}_{A3}(1-\widetilde{J}_{B3})[\widetilde{H}^2\widetilde{J}_{A3}\widetilde{J}_{B3}+(1-\widetilde{J}_{A3})(1-\widetilde{J}_{B3})]}\right\},$$

$$\lambda_4(\pi/2, \pi/2) \approx -\frac{2R_m(1-\widetilde{J}_{B3}-R_J\zeta_h^2)}{\widetilde{H}(1-\widetilde{J}_{B3})}, \qquad (8.3.84, а)$$

где $k_{30} = \sqrt{(1-\widetilde{J}_{A3})(1-\widetilde{J}_{B3})\widetilde{J}_{A3}^{-1}\widetilde{J}_{B3}^{-1}}$.

Учитывая формулы (8.1.45), (8.3.37) и (8.3.38), записываем корни (8.3.84, а) в следующем размерном виде:

$$\lambda_1(\pi/2, \pi/2) \approx -\frac{H}{ml^2\omega_0},$$

$$\lambda_{2,3}(\pi/2, \pi/2) \approx -\frac{Hm^2l^2\omega_0(C+2ml^2)(C+A-B)^2(z+h)^2}{q_{31}} \pm$$

$$\pm iq_{30}\left\{1+\frac{m^3l^4\omega_0^2(C+2ml^2)(C+A-B)^2(z+h)^2}{q_{31}}\right\},$$

$$\lambda_4(\pi/2, \pi/2) \approx -\frac{2m^2l^2\omega_0(C-B-Mh^2)}{HM_\Sigma[C-B-h^2(\mu+2m)+M_\Sigma z^2]}, \qquad (8.3.84, б)$$

где

$$q_{30} = \sqrt{(C_G-A_{G3})(C_G-B_{G3})A_{G3}^{-1}B_{G3}^{-1}},$$

$$q_{31} = A_{G3}(C_G-B_{G3})[H^2A_{G3}B_{G3}+m^2l^4\omega_0^2(C_G-A_{G3})(C_G-B_{G3})].$$

По корням (8.3.84) видно, что переходные процессы в системе, носят колебательно-затухающий характер и имеет место асимптотическая устойчивость по α, β, γ_2. Корни второй подсистемы системы уравнений (8.3.42), имеют вид (8.3.64).

Анализируя корни (8.3.62), (8.3.64) и (8.3.84) приходим к заключению, что:

1) в случае отсутствия неуравновешенности, асимптотическая устойчивость по переменным α, β, γ_2, означает и асимптотическую устойчивость однопараметрической семьи основных движений;

2) нулевой корень отвечает за переход от одного к другому установившемуся движению из однопараметрической семьи.

8.3.3. Исследование условной устойчивости псевдосемьи основных движений ($\widetilde{e}_0 = 1$)

Система уравнений (8.3.13) в случае, когда $\widetilde{e}_0 = 1$ ($\varphi_{02} = \pi$), $\gamma_{02} = \pi / 2$, имеет вид:

$$\widetilde{b}_4 = \widetilde{J}_{A2}\alpha' + (1 - \widetilde{J}_{A2})\beta - 2R_m R_J \zeta_h \gamma_1 = 0,$$

$$\widetilde{b}_5 = -(1 - \widetilde{J}_{B2})\alpha + \widetilde{J}_{B2}\beta' + 2R_m R_J \zeta_h \gamma_1' = 0,$$

$$L_1 = \zeta_h(\beta'' + 2\alpha' - \beta) + [1 - 2R_m(1 + R_J)]\gamma_1'' + \widetilde{H}\gamma_1' + 2R_m\gamma_1 = 0,$$

$$L_2 = \gamma_2'' + \widetilde{H}\gamma_2' = 0. \tag{8.3.85}$$

В случае, когда $\widetilde{e}_0 = 1$ ($\varphi_{04} = \pi$), $\gamma_{04} = 0$, система уравнений (8.3.13) имеет вид:

$$\widetilde{b}_4 = \widetilde{J}_{A4}\alpha' + (1 - \widetilde{J}_{A4})\beta + 2R_m R_J \zeta_h \gamma_1' = 0,$$

$$\widetilde{b}_5 = -(1 - \widetilde{J}_{B4})\alpha + \widetilde{J}_{B4}\beta' + 2R_m R_J \zeta_h \gamma_1 = 0,$$

$$L_1 = \zeta_h(\alpha'' - 2\beta' - \alpha) + [1 - 2R_m(1 + R_J)]\gamma_1'' + \widetilde{H}\gamma_1' + 2R_m\gamma_1 = 0,$$

$$L_2 = \gamma_2'' + \widetilde{H}\gamma_2' = 0. \tag{8.3.86}$$

Видно, что система уравнений (8.3.85) и (8.3.86) распадается на две независимых подсистемы. В первую подсистему системы уравнений (8.3.85) и (8.3.86) входит первое, второе и третье уравнение с переменными α, β, γ_1, во вторую – четвертое уравнение с переменной γ_2.

Рассмотрим первую подсистему уравнений системы (8.3.85). Введем обозначение, имея в виду, что в данном случае $\lambda = \lambda(\pi, \pi / 2)$:

$$d_{11} = \widetilde{J}_{A2}\lambda,\ \ d_{12} = 1 - \widetilde{J}_{A2},\ \ d_{13} = -2R_m R_J \zeta_h,\ \ d_{21} = -(1 - \widetilde{J}_{B2}),$$

$$d_{22} = \widetilde{J}_{B2}\lambda,\ \ d_{23} = 2R_m R_J \zeta_h \lambda,\ \ d_{31} = 2\zeta_h \lambda,$$

$$d_{32} = \zeta_h(\lambda^2 - 1),\ \ d_{33} = [1 - 2R_m(1 + R_J)]\lambda^2 + \widetilde{H}\lambda + 2R_m. \tag{8.3.87}$$

Характеристическое уравнение первой подсистемы уравнений системы (8.3.85) имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = \left| d_{ij} \right|_1^3 = d_4\lambda^4 + d_3\lambda^3 + d_2\lambda^2 + d_1\lambda + d_0, \tag{8.3.88}$$

где

$$d_4 = d_4^{(0)} + d_4^{(1)} R_m,\ d_3 = d_3^{(0)},\ d_2 = d_2^{(0)} + d_2^{(1)} R_m,$$
$$d_1 = d_1^{(0)},\ d_0 = d_0^{(1)} R_m, \tag{8.3.89}$$

и коэффициенты:

- при R_m^0

$$d_4^{(0)} = \tilde{J}_{A2}\tilde{J}_{B2},\ d_3^{(0)} = \tilde{H}\tilde{J}_{A2}\tilde{J}_{B2},\ d_2^{(0)} = (1-\tilde{J}_{A2})(1-\tilde{J}_{B2}),$$
$$d_1^{(0)} = \tilde{H}(1-\tilde{J}_{A2})(1-\tilde{J}_{B2});$$

- коэффициенты при R_m

$$d_4^{(1)} = -2\tilde{J}_A[\tilde{J}_B(1+R_J) + R_J\zeta_h^2],$$
$$d_2^{(1)} = -2\{1-\tilde{J}_{A2}-\tilde{J}_{B2}+R_J[(1-\tilde{J}_{A2})(1-\tilde{J}_{B2}) - \zeta_h^2(3+\tilde{J}_{B2}-\tilde{J}_{A2})]\}, \tag{8.3.90}$$
$$d_0^{(1)} = 2(1-\tilde{J}_{B2})(1-\tilde{J}_{A2}-R_J\zeta_h^2).$$

С учетом (8.3.89) и (8.3.90), условия (8.3.47) в новых коэффициентах (8.3.90) имеют вид:

- первая группа

$$d_4 = \tilde{J}_{A2}\tilde{J}_{B2} - 2R_m\tilde{J}_{A2}[\tilde{J}_{B2}(1+R_J) + R_J\zeta_h^2] > 0,\ d_3 = \tilde{H}\tilde{J}_{A2}\tilde{J}_{B2} > 0,$$
$$d_2 = (1-\tilde{J}_{A2})(1-\tilde{J}_{B2}) - 2R_m\{1-\tilde{J}_{A2}-\tilde{J}_{B2}+$$
$$+R_J[(1-\tilde{J}_{A2})(1-\tilde{J}_{B2}) - \zeta_h^2(3+\tilde{J}_{B2}-\tilde{J}_{A2})]\} > 0,$$
$$d_1 = \tilde{H}(1-\tilde{J}_{A2})(1-\tilde{J}_{B2}) > 0,\ d_0 = 2R_m(1-\tilde{J}_{B2})(1-\tilde{J}_{A2}-R_J\zeta_h^2) > 0;$$

- вторая группа

$$\Delta_2 = \tilde{H}(1-\tilde{J}_{B2})\{(1-\tilde{J}_{B2})(1-\tilde{J}_{A2})^2[1-2R_m(1+R_J)]+$$
$$+2R_mR_J\zeta_h^2[3+\tilde{J}_{B2}-\tilde{J}_{A2}(4-\tilde{J}_{A2})]\} > 0,$$
$$\Delta_3 = 2\tilde{H}^2R_JR_m\zeta_h^2\tilde{J}_{A2}(1-\tilde{J}_{B2})(1+\tilde{J}_{B2}-\tilde{J}_{A2})^2 > 0. \tag{8.3.91}$$

Эти группы условий будут всегда выполняться при $R_m \ll 1$ и при выполнении условий:

$$1-\tilde{J}_{A2}-R_J\zeta_h^2 > 0,\ 1-\tilde{J}_{B2}-R_J\zeta_h^2 > 0. \tag{8.3.92}$$

С учетом (8.1.45), (8.3.37) (8.3.38) и того, что $\zeta_h = \zeta + R_h$, условия (8.3.92) после преобразований примут вид:

$$1-\frac{A_{G2}}{C_G}-\frac{M_\Sigma l^2}{C_G}\left(\frac{z}{l}+\frac{h}{l}\right)^2 > 0,\ 1-\frac{B_{G2}}{C_G}-\frac{M_\Sigma l^2}{C_G}\left(\frac{z}{l}+\frac{h}{l}\right)^2 > 0,$$

или после преобразований

$$C_G - A_{G2} - M_\Sigma h_z^2 > 0,\ C_G - B_{G2} - M_\Sigma h_z^2 > 0. \tag{8.3.93}$$

В явном виде, относительно параметров системы, условия (8.3.93) записываются в виде:

$$C - A - Mh^2 > 0,\ C + \mu e_0^2 + 2ml^2 - B - Mh^2 > 0. \tag{8.3.94}$$

В связи с тем, что в общем случае корни характеристического уравнения (8.3.88) получить невозможно, то рассмотрим случай $R_m << 1$.

Подав корни характеристического уравнения (8.3.88) разложениями вида (8.3.21), окончательно получим корни в виде:

$$\lambda_1(\pi, \pi/2) \approx -\widetilde{H},$$

$$\lambda_{2,3}(\pi, \pi/2) \approx -\frac{R_m \widetilde{H} R_J \zeta_h^2 (1 + \widetilde{J}_{B2} - \widetilde{J}_{A2})^2}{\widetilde{J}_{B2}(1 - \widetilde{J}_{A2})[\widetilde{H}^2 \widetilde{J}_{A2} \widetilde{J}_{B2} + (1 - \widetilde{J}_{A2})(1 - \widetilde{J}_{B2})]} \pm$$

$$\pm ik_{20}\left\{1 + \frac{R_m R_J \zeta_h^2 (1 + \widetilde{J}_{B2} - \widetilde{J}_{A2})^2}{\widetilde{J}_{B2}(1 - \widetilde{J}_{A2})[\widetilde{H}^2 \widetilde{J}_{A2} \widetilde{J}_{B2} + (1 - \widetilde{J}_{A2})(1 - \widetilde{J}_{B2})]}\right\},$$

$$\lambda_4(\pi, \pi/2) \approx -\frac{2R_m (1 - \widetilde{J}_{A2} - R_J \zeta_h^2)}{\widetilde{H}(1 - \widetilde{J}_{A2})}, \qquad (8.3.95, а)$$

где $k_{20} = \sqrt{(1 - \widetilde{J}_{A2})(1 - \widetilde{J}_{B2}) \widetilde{J}_{A2}^{-1} \widetilde{J}_{B2}^{-1}}$.

В размерном виде корни (8.3.95, а), с учетом (8.1.45), (8.3.37) и (8.3.38), можно представить в виде:

$$\lambda_1(\pi, \pi/2) \approx -\frac{H}{ml^2 \omega_0},$$

$$\lambda_{2,3}(\pi, \pi/2) \approx -\frac{Hm^2 l^2 \omega_0 (C + \mu e_0^2 + 2ml^2)(C + B - A)^2 (z + h)^2}{q_{21}} \pm$$

$$\pm iq_{20}\left[1 + \frac{m^3 l^4 \omega_0^2 (C + \mu e_0^2 + 2ml^2)(C + B - A)^2 (z + h)^2}{q_{21}}\right],$$

$$\lambda_4(\pi, \pi/2) \approx -\frac{2m^2 l^2 \omega_0 (C - A - Mh^2)}{HM_\Sigma [C - A - h^2(\mu + 2m) + M_\Sigma z^2]}, \qquad (8.3.95, б)$$

где

$$q_{20} = \sqrt{(C_G - A_{G2})(C_G - B_{G2}) A_{G2}^{-1} B_{G2}^{-1}},$$

$$q_{21} = B_{G2}(C_G - A_{G2})[H^2 A_{G2} B_{G2} + m^2 l^4 \omega_0^2 (C_G - A_{G2})(C_G - B_{G2})].$$

По корням (8.3.95) видно, что переходные процессы в системе, носят колебательно-затухающий характер и имеет место асимптотическая устойчивость по α, β, γ_1.

Для второй подсистемы системы уравнений (8.3.85) находим:

$$(\mu + \widetilde{H})\mu = 0. \qquad (8.3.96)$$

Корни уравнения (8.3.96) имеют вид:

$$\mu_1 = -\widetilde{H}, \; \mu_2 = 0. \qquad (8.3.97, а)$$

или в размерном виде

$$\mu_1 = -\frac{H}{ml^2\omega_0}, \ \ \mu_2 = 0. \qquad (8.3.97, б)$$

По этим корням видно, что имеет место устойчивость по γ_2.

Таким образом со временем

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma_1 \to 0, \ \ \gamma_2 \to const. \qquad (8.3.98)$$

Из этого следует, что со временем угол нутации полностью устраняется. Скорость стремления к нулю возмущений α, β, γ_1 полностью характеризуют действительные части корней (8.3.95).

Появление нулевого корня μ_2 можно интерпретировать аналогично, как и в п.п. 7.3.3.

Рассмотрим первую подсистему уравнений системы (8.3.86). Введем обозначение, имея в виду, что в данном случае $\lambda = \lambda(\pi, 0)$:

$$f_{11} = \widetilde{J}_{A4}\lambda, \ \ f_{12} = 1 - \widetilde{J}_{A4}, \ \ f_{13} = 2R_m R_J \zeta_h \lambda, \ \ f_{21} = -(1 - \widetilde{J}_{B4}),$$
$$f_{22} = \widetilde{J}_{B4}\lambda, \ \ f_{23} = 2R_m R_J \zeta_h, \ \ f_{31} = \zeta_h(\lambda^2 - 1),$$
$$f_{32} = -2\zeta_h\lambda, \ \ f_{33} = [1 - 2R_m(1 + R_J)]\lambda^2 + \widetilde{H}\lambda + 2R_m. \qquad (8.3.99)$$

Тогда характеристическое уравнение первой подсистемы уравнений системы (8.3.86) имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = \left| f_{ij} \right|_1^3 = f_4\lambda^4 + f_3\lambda^3 + f_2\lambda^2 + f_1\lambda + f_0, \qquad (8.3.100)$$

где

$$\begin{gathered} f_4 = f_4^{(0)} + f_4^{(1)} R_m, \ \ f_3 = f_3^{(0)}, \ \ f_2 = f_2^{(0)} + f_2^{(1)} R_m, \\ f_1 = f_1^{(0)}, \ \ f_0 = f_0^{(1)} R_m, \end{gathered} \qquad (8.3.101)$$

и коэффициенты:

- при R_m^0

$$f_4^{(0)} = \widetilde{J}_{A4}\widetilde{J}_{B4}, \ \ f_3^{(0)} = \widetilde{H}\widetilde{J}_{A4}\widetilde{J}_{B4}, \ \ f_2^{(0)} = (1 - \widetilde{J}_{A4})(1 - \widetilde{J}_{B4}), \ \ f_1^{(0)} = \widetilde{H}(1 - \widetilde{J}_{A4})(1 - \widetilde{J}_{B4});;$$

- при R_m

$$f_4^{(1)} = -2\widetilde{J}_{B4}[\widetilde{J}_{A4}(1 + R_J) + R_J\zeta_h^2],$$
$$f_2^{(1)} = -2\{1 - \widetilde{J}_{A4} - \widetilde{J}_{B4} + R_J[(1 - \widetilde{J}_{A4})(1 - \widetilde{J}_{B4}) - \zeta_h^2(3 + \widetilde{J}_{A4} - \widetilde{J}_{B4})]\},$$
$$f_0^{(1)} = 2(1 - \widetilde{J}_{A4})(1 - \widetilde{J}_{B4} - R_J\zeta_h^2). \qquad (8.3.102)$$

С учетом (8.3.101) условия (8.3.47) в новых коэффициентах (8.3.102) записываются в виде:

- первая группа

$$f_4 = \widetilde{J}_{A4}\widetilde{J}_{B4} - 2R_m\widetilde{J}_{B4}[\widetilde{J}_{A4}(1+R_J) + R_J\zeta_h^2] > 0, \;\; f_3 = \widetilde{H}\widetilde{J}_{A4}\widetilde{J}_{B4} > 0,$$

$$f_2 = (1-\widetilde{J}_{A4})(1-\widetilde{J}_{B4}) - 2R_m\{1-\widetilde{J}_{A4} - \widetilde{J}_{B4} +$$
$$+R_J[(1-\widetilde{J}_{A4})(1-\widetilde{J}_{B4}) - \zeta_h^2(3+\widetilde{J}_{A4} - \widetilde{J}_{B4})]\} > 0,$$

$$f_1 = \widetilde{H}(1-\widetilde{J}_{A4})(1-\widetilde{J}_{B4}) > 0, \;\; f_0 = 2R_m(1-\widetilde{J}_{A4})(1-\widetilde{J}_{B4} - R_J\zeta_h^2) > 0;$$

- вторая группа

$$\Delta_2 = \widetilde{H}(1-\widetilde{J}_{A4})\{(1-\widetilde{J}_{A4})(1-\widetilde{J}_{B4})^2[1-2R_m(1+R_J)] +$$
$$+2R_mR_J\zeta_h^2[3+\widetilde{J}_{A4} - \widetilde{J}_{B4}(4-\widetilde{J}_{B4})]\} > 0,$$

$$\Delta_3 = 2\widetilde{H}^2R_JR_m\zeta_h^2\widetilde{J}_{B4}(1-\widetilde{J}_{A4})(1+\widetilde{J}_{A4} - \widetilde{J}_{B4})^2 > 0. \qquad (8.3.103)$$

Первая и вторая группы условий (8.3.103) будут всегда выполняться при $R_m << 1$ и выполнении условий:

$$1-\widetilde{J}_{A4} - R_J\zeta_h^2 > 0, \;\; 1-\widetilde{J}_{B4} - R_J\zeta_h^2 > 0. \qquad (8.3.104)$$

С учетом (8.1.45), (8.3.37) (8.3.38) и того, что $\zeta_h = \zeta + R_h$, условия (8.3.104) после преобразований принимают вид:

$$1 - \frac{A_{G4}}{C_G} - \frac{M_\Sigma l^2}{C_G}\left(\frac{z}{l} + \frac{h}{l}\right)^2 > 0, \;\; 1 - \frac{B_{G4}}{C_G} - \frac{M_\Sigma l^2}{C_G}\left(\frac{z}{l} + \frac{h}{l}\right)^2 > 0,$$

или после преобразований в размерном виде

$$C_G - A_{G4} - M_\Sigma h_z^2 > 0, \;\; C_G - B_{G4} - M_\Sigma h_z^2 > 0. \qquad (8.3.105)$$

В явном виде, относительно параметров системы, условия (8.3.105) записываются в виде:

$$C + \mu e_0^2 + 2ml^2 - A - Mh^2 > 0, \;\; C - B - Mh^2 > 0. \qquad (8.3.106)$$

Так как в общем случае корни характеристического уравнения (8.3.100) получить невозможно, то рассмотрим случай, когда $R_m << 1$.

Подав корни характеристического уравнения (8.3.100) разложениями вида (8.3.21), окончательно получим корни в виде:

$$\lambda_1(\pi,0) \approx -\widetilde{H}, \; \lambda_{2,3}(\pi,0) \approx -\frac{R_m\widetilde{H}R_J\zeta_h^2(1+\widetilde{J}_{A4} - \widetilde{J}_{B4})^2}{\widetilde{J}_{A4}(1-\widetilde{J}_{B4})[\widetilde{H}^2\widetilde{J}_{A4}\widetilde{J}_{B4} + (1-\widetilde{J}_{A4})(1-\widetilde{J}_{B4})]} \pm$$
$$\pm ik_{40}\left\{1 + \frac{R_mR_J\zeta_h^2(1+\widetilde{J}_{A4} - \widetilde{J}_{B4})^2}{\widetilde{J}_{A4}(1-\widetilde{J}_{B4})[\widetilde{H}^2\widetilde{J}_{A4}\widetilde{J}_{B4} + (1-\widetilde{J}_{A4})(1-\widetilde{J}_{B4})]}\right\},$$

$$\lambda_4(\pi,0) \approx -\frac{2R_m(1-\widetilde{J}_{B4} - R_J\zeta_h^2)}{\widetilde{H}(1-\widetilde{J}_{B4})}, \qquad (8.3.107, а)$$

где $k_{40} = \sqrt{(1-\widetilde{J}_{A4})(1-\widetilde{J}_{B4})\widetilde{J}_{A4}^{-1}\widetilde{J}_{B4}^{-1}}$.

В размерном виде корни (8.3.107, а) с учетом (8.1.45). (8.3.37) и (8.3.38) можно представить в виде:

$$\lambda_1(\pi,0) \approx -\frac{H}{ml^2\omega_0},$$

$$\lambda_{2,3}(\pi,0) \approx -\frac{Hm^2l^2\omega_0(C+\mu e_0^2+2ml^2)(C+A-B)^2(z+h)^2}{q_{41}} \pm$$

$$\pm iq_{40}\left\{1+\frac{m^3l^4\omega_0^2(C+\mu e_0^2+2ml^2)(C+A-B)^2(z+h)^2}{q_{41}}\right\},$$

$$\lambda_4(\pi,0) \approx -\frac{2m^2l^2\omega_0(C-B-Mh^2)}{HM_\Sigma[C-B-h^2(\mu+2m)+M_\Sigma z^2]}, \qquad (8.3.107, б)$$

где

$$q_{40}=\sqrt{(C_G-A_{G4})(C_G-B_{G4})A_{G4}^{-1}B_{G4}^{-1}},$$

$$q_{41}=B_{G4}(C_G-A_{G4})[H^2A_{G4}B_{G4}+m^2l^4\omega_0^2(C_G-A_{G4})(C_G-B_{G4})].$$

В данном случае, по корням (8.3.107) видно, что переходные процессы в системе носят колебательно-затухающий характер и имеет место асимптотическая устойчивость по α, β, γ_1.

Корни второй подсистемы системы уравнений (8.3.86) имеют вид (8.3.97), причем имеет место устойчивость по γ_2.

Следовательно, учитывая корни (8.3.95), (8.3.97) и (8.3.107) получаем, что:

1) в случае максимальной неуравновешенности, которую могут устранить маятники, асимптотическая устойчивость по переменным α, β, γ_1, значит и асимптотическую устойчивость псевдосемьи основных движений;

2) нулевой корень отвечает за переход от одного к другому установившемуся движению из псевдосемьи.

8.4. Числовой эксперимент

Исследуется влияние параметров системы на скорость прихода системы к основному движению. Исходные данные аналогичны данным п.п. 7.3.4. В табл. 8.4.1 приведены пределы изменения параметров, шаг их изменения и значения в модели.

Табл. 8.4.1

Пределы, шаг и оптимальное значение параметров в модели

Параметр	Значение по умалчиванию	Пределы изменения параметра	Шаг изменения параметра	Оптимальное значение
n_i, *об/мин*	50	1 – 301	10	50 (m_1)
				60 (m_2)
				50 (m_3)
h, *м*	0,2	0 – 0,75	0,05	0,2 $(m_{1,2,3})$
Hl^2, $кг \cdot м^2 \cdot с^{-1}$	1	0 – 5	0,25	1 (m_1)
				1 (m_2)
				0,25 (m_3)
H_C, *м*	1,5	0,5 – 4	0,25	1,5 $(m_{1,2,3})$
m_i, *кг*	–	0,6 – 9,6	0,6	9,6 (n_1)
				8,5 (n_2)
				4 (n_3)
l, *м*	0,9	0,45 – 1,1	0,05	0,8 (m_1)
				0,95 (m_2)
				0,85 (m_3)

Результаты числовых расчетов в виде графиков представлены на рис. 8.4.1.

По вертикальной оси графиков откладывается максимальное значение действительных частей корней характеристического уравнения (8.3.15), а по горизонтальной – параметр, изменяющийся с определенным шагом. При построении графиков один из параметров изменяется, при этом остальные исследуемые параметры имеют фиксированное значение.

Графики на рис. 8.4.1, а-г, е получены при значениях масс маятников (шаров) m_1, m_2, m_3. На рис. 8.4.1, д график построен при количестве оборотов n_1, n_2, n_3, при построении других графиков количество оборотов составляет n_2.

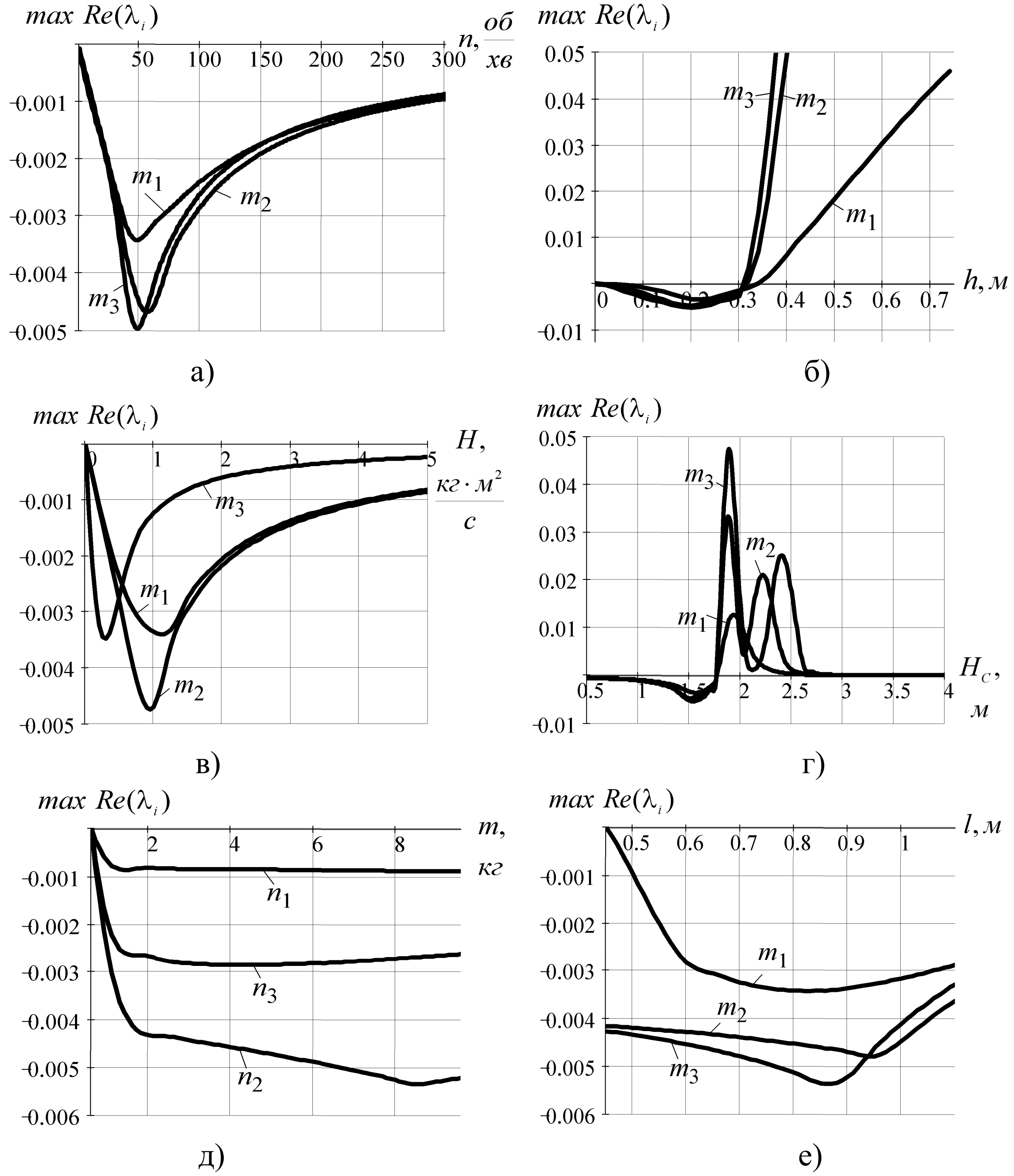


Рис. 8.4.1. Влияние параметров системы на максимальное значение действительных частей корней характеристического уравнения

По рис. 8.4.1, а-е были подобраны значения исследуемых параметров, обеспечивающие наибольшую скорость прихода системы к основному движению. Из рис. 8.4.1, б, видно, что при превышении параметром h значения 0,31 *м* основное движение неустойчиво (для $m = 1{,}2$ кг – $h > 0{,}34$ м). В КА IMAGE – $h = 0{,}625$ м, поэтому жидкостный демпфер, установлен с нарушением условия устойчивости и основное движение – неустойчиво. Это объясняет большие остаточные углы нутации, создаваемые этим демпфером при работе на КА. При превышении параметром H_C значения 1,75 м, что соответствует соотношению осевых моментов инерции тела $A / C > 0{,}92$ (рис. 8.4.1, г), основное движение становится неустойчивым. Это объясняется тем, что нарушаются условия (8.3.18).

Выводы главы 8

При исследовании процесса устранения маятниками угла нутации НТ получены следующие основные результаты.

1. Впервые построена пространственная (НТ осуществляет пространственное движение) теоретико-механическая модель ИС, состоящей из НТ, неподвижных относительно НТ материальных точек, создающих его неуравновешенность, и математических маятников, насаженных на продольную ось НТ, относительному движению которых препятствуют силы вязкого сопротивления.

2. Установлено, что в общем случае ее движение определяют $n+6$ обобщенных координат. В случае статически неуравновешенного НТ и двух одинаковых маятников динамику системы характеризуют двенадцать размерных или восемь существенно различных безразмерных параметров.

3. В рамках пространственной модели ИС, состоящей из вращающегося НТ, материальной точки, создающей его статическую неуравновешенность, и двух одинаковых математических маятников, насаженных на продольную ось НТ и движущихся в плоскости статической неуравновешенности, установлено, что:

- в случае, когда неуравновешенность есть и маятники могут ее устранить с определенным запасом, существует одно основное движение;
- в случае, когда неуравновешенность отсутствует, существует однопараметрическая семья основных движений;
- в случае, когда неуравновешенность максимальна, которую могут устранить маятники, существует одно основное движение, порождающее псевдосемью основных движений;
- условно асимптотически устойчивыми являются отдельные основные движения, если они изолированы, или семья, или псевдосемья основных движений;
- в случае отсутствия неуравновешенности, один нулевой корень характеристического уравнения не влияет на устойчивость однопараметрической семьи основных движений, а отвечает за переход от одного к другому установившемуся движению из семьи;
- в случае максимальной неуравновешенности, наличие одного нулевого корня у характеристического уравнения не влияет на устойчивость основного движения, а отвечает за переход от одного к другому установившемуся движению из псевдосемьи;
- переходные процессы в зависимости от параметров системы могут быть апериодично- или колебательно-затухающие.

ВЫВОДЫ

В монографии изучалась динамика вращающихся ИС с вязким рассеиванием энергии, состоящих из вращающегося НТ и разных ПТ. Наиболее существенные научные результаты, по имеющимся материалам, впервые полученные в монографии, следующие.

1. Конкретизировано применение метода Рауса исследования динамики механических систем с первыми, в частности - циклическими интегралами для исследования динамики ИС с вязким рассеиванием энергии. Конкретизирован вид основных динамических величин, дифференциальных уравнений движения, уравнений установившихся движений, условий устойчивости стационарных движений и т.п.

2. Установлено существование двух независимых тенденций при работе АБ любого типа: уменьшение угла нутации, вызванного неточным приданием начального вращения НТ только в случае сплюснутого СТ (работа АБ как демпфера угла нутации); тенденция к приходу тел АБ к положению, в котором они уравновешивают НТ (работа АБ как автобалансира) в случаях одного или двух АБ и вытянутого СТ или сплюснутого СТ и одного АБ вблизи центра масс системы.

3. Установлено, что два АБ, установленные в двух разных плоскостях уравновешивания НТ, не могут устранить угол нутации, вызванный неуравновешенностью. Установлено, что полностью устранить угол нутации можно только в случае статически неуравновешенного НТ, при условии, что АБ установлен в плоскости дисбаланса, расстояние от центра масс системы до плоскости уравновешивания не превышает определенного предельного значения и СТ – сплюснуто.

4. Без любых ограничений на массы ПТ установлено, что: для демпферов, проявляющих автобалансировочные свойства (маятниковых, жидкостных), для устойчивости основного движения необходимо и достаточно, чтобы СТ было сплюснуто и плоскость уравновешивания находилась вблизи центра масс системы; для упруго закрепленного стержня, ориентированного по продольной оси НТ для устойчивости основного движения необходимо и достаточно, чтобы СТ было сплюснуто и система вращалась с угловыми скоростями, не превышающими определенное предельное значение.

5. Построены плоская и пространственная модели ИС, состоящих из неуравновешенного НТ и математических маятников, насаженных на его продольную ось, относительному движению которых препятствуют силы вязкого сопротивления.

ISBN 978-966-2003-74-1

6. Установлена аналогия в работе маятниковых, шаровых и жидкостных АБ при: устранении больших углов нутации, вызванных неточным приданием начального вращения НТ; создании остаточного угла нутации при установке этих АБ на расстоянии до центра масс НТ, большем предельно допустимого.

Исследован процесс устранения больших углов нутации этими АБ. Найден остаточный угол при установке АБ на большем чем предельно допустимое расстоянии до центра масс НТ.

7. Для плоской и пространственной модели ИС, состоящей из вращающегося НТ, материальной точки, создающей его статическую неуравновешенность, и двух одинаковых математических маятников, насаженных на продольную ось НТ и двигающихся в плоскости статической неуравновешенности, установлено, что:

- когда неуравновешенность есть и маятники могут ее устранить с определенным запасом, существует одно основное движение;
- когда неуравновешенность отсутствует, существует однопараметрическая семья основных движений;
- когда неуравновешенность максимальна, которую могут устранить маятники, существует одно основное движение, но оно порождает псевдосемью основных движений.

8. Для плоской модели ИС установлено, что побочные движения неустойчивы.

9. Для пространственной модели ИС, при условии, что плоскость маятников совпадает с плоскостью статичной неуравновешенности и расстояние от центра масс НТ до плоскости уравновешивания не превышает определенного предельного значения, и для плоской модели ИС с двумя маятниками установлено, что:

- условно асимптотически устойчивыми являются отдельные основные движения, если они изолированы, или семья, или псевдосемья основных движений;
- когда неуравновешенность отсутствует, один нулевой корень характеристического уравнения не влияет на устойчивость однопараметрической семьи основных движений, а отвечает за переход от одного к другому установившемуся движению из семьи;
- когда неуравновешенность максимальна, наличие одного нулевого корня у характеристического уравнения не влияет на устойчивость основного движения, а отвечает за переход от одного к другому установившемуся движению из псевдосемьи;
- в зависимости от параметров системы, переходные процессы могут быть апериодично- или колебательно-затухающими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Filimonikhin G.B. Stability of Steady-State Motion of an Isolated System Consisting of a Rotating Body and Two Pendulums / G.B. Filimonikhin, I.I. Filimonikhina, V.V. Pirogov // International Applied Mechanics, July 2014, Volume 50, Issue 4, pp 459-469. DOI10.1007/s10778-014-0651-9.
2. Filimonikhina I.I. Conditions for balancing a rotating body in an isolated system with automatic balancers / I.I. Filimonikhina, G.B. Filimonikhin // International Applied Mechanics, November 2007, Volume 43, Issue 11, pp 1276-1282. DOI10.1007/s10778-007-0132-5.
3. Filimonikhin G.B. Attitude stabilization of the rotational axis of a carrying body by pendulum dampers / G.B. Filimonikhin, V.V. Pirogov, I.I. Filimonikhina // International Applied Mechanics, October 2007, Volume 43, Issue 10, pp 1167-1173. DOI10.1007/s10778-007-0117-4.
4. Filimonikhin G.B. Stabilization of the Rotation Axis of a Solid by Coupled Perfectly Rigid Bodies / G.B. Filimonikhin, V.V. Pirogov // International Applied Mechanics, 8-2005, Volume 41, Issue 8, pp 937-943. DOI10.1007/s10778-005-0164-7.
5. Filimonikhin G.B. Balancing a Rotor with Two Coupled Perfectly Rigid Bodies / G.B. Filimonikhin, Yu.A. Nevdakha // International Applied Mechanics, March 2002, Volume 38, Issue 3, pp 377-386. DOI10.1023/A:1016050732065.
6. Филимонихин Г.Б. Устойчивость установившихся движений изолированной системы, состоящей из вращающегося тела и двух маятников / Г.Б. Филимонихин, И.И. Филимонихина, В.В. Пирогов // Прикладная механика. – 2014. – т. 50, № 4. – С. 117-128.
7. Пирогов В.В. Особливості зрівноваження маятниками обертового несучого тіла в ізольованій системі: автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.02.01 / В.В. Пирогов; НАН України, Ін-т механіки ім. С.П. Тимошенка – К., 2014. – 20 с.
8. Филимонихин Г.Б. Дослідження процесу усунення пасивними автобалансирами великих кутів нутації / Г.Б. Филимонихин, В.В. Пирогов, И.И. Филимонихина // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2013. – т. 6, № 7(66). – С. 34-38. – Режим доступу : URL: http://journals.uran.ua/eejet/article/view/18705.

9. Філімоніхін Г.Б. Стійкість основних рухів ізольованої системи, складеної з обертового тіла і двох маятників / Г.Б. Філімоніхін, В.В. Пирогов, І.І. Філімоніхіна // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. – 2011. – № 2. – С. 63–68.
10. Філімоніхін Г.Б. Методика виділення і дослідження умовної асимптотичної стійкості усталених рухів ізольованих обертових систем / Г.Б. Філімоніхін, І.І. Філімоніхіна // Збірник наукових праць КНТУ. – 2011. – Вип. 24, част. ІІ. – С. 66–71.
11. Філімоніхіна І.І. Комп'ютерне моделювання динаміки обертового несучого тіла з маятниковими автобалансирами / І.І. Філімоніхіна, Г.Б. Філімоніхін // Загальнодержавний міжвідомчий н.-т. збірник "Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин". – 2010. – Вип. 40, част. ІІ. – С. 86–93.
12. Філімоніхіна І.І. Умови зменшення кута нутації обертового несучого тіла в ізольованій системі: автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.02.01 / І.І. Філімоніхіна; НАН України, Ін-т механіки ім. С.П. Тимошенка – К., 2009. – 20 с.
13. Горошко О.О. Достатні умови усунення автобалансирами кута нутації незрівноваженого обертового тіла в ізольованій системі / О.О. Горошко, І.І. Філімоніхіна // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. – 2008. – №1. – С. 53-58.
14. Філімоніхіна І.І. Умови стійкості основних рухів чотирьох обертових ізольованих систем / І.І. Філімоніхіна, О.О. Горошко // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. – 2008. – № 3. – С. 99-105.
15. Филимонихин Г.Б. Использование пассивных автобалансиров как демпферов угла нутации быстровращающихся спутников / Г.Б.Филимонихин, В.В. Пирогов, И.И. Филимонихина // Системне проектування та аналіз характеристик аерокосмічної техніки: Зб. пр. – Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту. – 2008. – т. VIII. – С. 105-115.
16. Філімоніхін Г.Б. Застосування пасивних автобалансирів у якості демпферів кута нутації обертових супутників / Г.Б. Філімоніхін, В.В. Пирогов, І.І. Філімоніхіна // Збірник наукових праць КНТУ. – 2008. – Вип. №20. – С. 177-184.
17. Пирогов В.В. Дослідження стійкості основного руху одного типу ізольованої механічної системи // Збірник наукових праць КНТУ. – 2008. – Вип. № 20. – С. 306-314.
18. Пирогов В.В. Стійкість основного руху статично незрівноваженого обертового тіла із двома маятниками (кулями) / В.В. Пирогов // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. – 2008. – №3. – С. 89-94.

19. Филимонихина И.И. Условия уравновешивания автобалансирами вращающегося тела в изолированной системе / И.И. Филимонихина, Г.Б. Филимонихин // Прикладная механика. – 2007. – т. 43, №11. – С. 113–120.

20. Филимонихин Г.Б. Стабилизация маятниковыми демпферами пространственного положения оси вращения несущего тела / Г.Б. Филимонихин, В.В. Пирогов, И.И. Филимонихина // Прикладная механика. – 2007. – т. 43, № 10. – С. 120-128.

21. Філімоніхіна І.І. Усталені рухи і умови самозрівноваження одного типу ізольованої системи / Філімоніхіна І.І. // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. – 2007. – № 3. – С. 103-109.

22. Філімоніхіна І.І. Умови зменшення автобалансирами кута нутації обертового супутника землі // Всеукраїнський н.-т. журнал „Вібрації у техніці та технологіях". – 2007. – № 1 (46). – С. 34-37.

23. Філімоніхін Г.Б. Виведення рівнянь руху ізольованої системи, що здійснює просторовий рух / Г.Б. Філімоніхін, В.В. Пирогов, І.І. Філімоніхіна // Загальнодержавний міжвідомчий н.-т. збірник "Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин". – 2006. – Вип. № 36. – С.133-139.

24. Філімоніхін Г.Б. Пространственная стабилизация положения оси вращения несущего тела маятниковыми демпферами / Г.Б. Філімоніхін, В.В. Пирогов, І.І. Філімоніхіна // Збірник наукових праць КНТУ. – 2006. – Вип. №17. – С. 234-240.

25. Горошко О.О. Стабілізація положення осі обертання абсолютно твердого тіла багатомаятниковим (багатокульовим) автобалансиром / О.О. Горошко, Г.Б. Філімоніхін, В.В. Пирогов, І.І. Філімоніхіна // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. – 2005. – №4. – С. 67–76.

26. Филимонихин Г.Б. Стабилизация положения оси вращения твердого тела связанными абсолютно твердыми телами / Г.Б. Филимонихин, В.В. Пирогов // Прикладная механіка. – 2005. – т. 41, № 8. – С.122-129.

27. Філімоніхін Г.Б. Стабілізація маятниками положення осі обертання ізольованого абсолютно твердого тіла / Г.Б. Філімоніхін // Вісник, математика-механіка. Київський національний університет. – 2002. – Вип. №7-8. – С. 67-71.

28. Филимонихин Г.Б. Уравновешивание ротора, совершающего плоскопараллельное движение, двумя связанными абсолютно твердыми телами с неподвижными точками на оси валу ротора / Г.Б. Филимонихин, Ю.А. Невдаха // Прикладная механика. – 2002. – 38, №3. – С. 135-144.

29. Застосування пасивного автобалансира як демпфера кута нутації сплюснутого обертового космічного апарата: Пат. на корисну модель № 28407 Україна, МПК B64G 1/00 / І.І. Філімоніхіна, Г.Б. Філімоніхін (Україна); КНТУ - № 200708020; Заявл. 16.07.2007; Опубл. 10.12.2007, Бюл.№20.
30. Філімоніхін Г.Б. Стабілізація положення осі обертання абсолютно твердого тіла двохмаятниковим (двохкульовим) автобалансиром / Г.Б. Філімоніхін, В.В. Пирогов // Кіровоград. держ. техн. ун-т. – Кіровоград, 2004. – 12 с.: іл. – Бібліогр.: 7 назв. – Укр. – Деп. в ДНТБ України 05.01.04. №4. – Ук. 2004.
31. Филимонихин Г.Б. Устойчивость установившихся движений изолированных вращающихся механических систем с вязким рассеиванием энергии / Г.Б. Филимонихин, И.И. Филимонихина // Тезисы Международной конференции «Метод функций Ляпунова и его приложения. MFL-2014». АР Крым. Алушта, 15-20 сентября 2014. – С. 68-69.
32. Філімоніхіна І.І. Комп’ютерне моделювання динаміки обертового несучого тіла з двохмаятниковим автобалансиром / І.І.Філімоніхіна // Восьма міжнародна науково-практична конференція "Математичне та імітаційне моделювання систем МОДС 2013". Тези доповідей. Чернігів-Жукин, 24-28 червня 2013. – С.176 – 179.
33. Філімоніхіна І.І. Моделювання динаміки обертових ізольованих механічних систем в SolidWorks з використанням модуля Cosmos Motion / Г.Б.Філімоніхін, І.І. Філімоніхіна // Сьома міжнародна науково-практична конференція "Математичне та імітаційне моделювання систем МОДС 2012". Тези доповідей. Чернігів-Жукин, 2012. – С.198 – 199.
34. Филимонихин Г.Б. Устойчивость установившихся движений спутника, стабилизируемого вращением, с пассивным автобалансиром-демпфером угла нутации / Г.Б. Филимонихин, И.И. Филимонихина, В.В. Пирогов // Міжнародна конференція “Моделирование, управление и устойчивость (MCS-2012)”, Севастополь, 2012 р. – С. 151-153. Режим доступу: URL: http://dynsys.crimea.edu/mcs/mcs2012/thesis/filimonikhin-filimonikhina.pdf
35. Філімоніхіна І.І. Зменшення кута нутації високошвидкісних обертових рухомих об’єктів / І.І. Філімоніхіна, Г.Б.Філімоніхін // Міжнародна науково-практична конференція "Управління високошвидкісними рухомими об’єктами та професійна підготовка операторів складних систем". Тези доповідей. Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного університету. Кіровоград, 2012. – С. 308-309.

36. Філімоніхін Г.Б. Пасивний спосіб зменшення кута нутації статично незрівноважених обертових штучних супутників Землі / Г.Б. Філімоніхін, І.І. Філімоніхіна // Зб. "Науково-технічні розробки та інноваційні технології Кіровоградського національного технічного університету". Випуск 3. Кіровоград: КНТУ, 2011. – С. 76-77.
37. Філімоніхін Г.Б. Пасивний спосіб зменшення кута нутації статично незрівноважених обертових штучних супутників Землі / Г.Б. Філімоніхін, І.І. Філімоніхіна // Зб. "Науково-технічні розробки та інноваційні технології Кіровоградського національного технічного університету". Випуск 2. Кіровоград: КНТУ, 2010. – С. 64-65.
38. Пирогов В.В. Усунення кута нутації та незрівноваженості обертових ізольованих систем маятниками (кулями) / В.В. Пирогов // XII Міжнародна молодіжна науково-практична конференція "Людина і Космос". Дніпропетровськ, 2010. – С. 141.
39. Філімоніхін Г.Б. Використання пасивних автобалансирів у якості демпферів кута нутації обертових штучних супутників Землі / Г.Б. Філімоніхін, І.І. Філімоніхіна // Зб. "Науково-технічні розробки та інноваційні технології Кіровоградського національного технічного університету. Кіровоград: КНТУ, 2009. – С. 70-71.
40. Філімоніхіна І.І. Умови зменшення кута нутації обертового несучого тіла в ізольованій системі / І.І. Філімоніхіна // Тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф. "Динаміка, надійність і довговічність механічних і біомеханічних систем та елементів їхніх конструкцій" у Севастополі, 8-11.09.09. – С. 232-233.
41. Пирогов В.В. Стабілізація положення осі обертання тіла-носія маятниками (кулями) / В.В. Пирогов // X Міжнародна молодіжна науково-практична конференція "Людина і Космос". Дніпропетровськ, 2008. – С. 148.
42. Філімоніхіна І.І. Визначення умов зрівноважування обертових тіл пасивними автобалансирами / І.І. Філімоніхіна // Тези доповідей 8-го Міжнародного симпозіуму Українських інженерів-механіків у Львові, 22-25.05.2007, С. 33.
43. Пирогов В.В. Стабилизация оси вращения тела в пространстве пассивными автобалансирующими устройствами / В.В. Пирогов // Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXX Академических чтений по космонавтике, январь 2006 г.: тезисы докл. – М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2006. – С. 96. Режим доступу: URL: http://www.ihst.ru/~akm/30t5.pdf

44. Alfriend K.T. Partially Filled Viscous Ring Nutation Damper / K.T. Alfriend // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1974. – Vol. 11, N. 7. – pp. 456–462.
45. Alper J.R. Analysis of pendulum damper for satellite wobble damping / J.R. Alper // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1965. – Vol. 2, N. 1. – pp. 50–54.
46. Amieux J.C. Analytical design of optimal nutation dampers / J.C. Amieux, M. Dureigne // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1972. – Vol. 9, N. 12. – pp. 934–935.
47. Bernard D.E. Passive Nutation Damping Using Large Appendages with Application to Galileo / D.E. Bernard // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1982. – Vol. 5, N. 2. – pp. 174-180.
48. Bhuta P.G. A Viscous Ring Damper for a Freely Precessing Satellite / P.G. Bhuta, L.R. Koval // International Journal of Mechanical Sciences. – 1966. – Vol. 8. – pp. 383–395.
49. Bhuta P.G. Decay Rates of a Passive Precession Damper and Bounds / P.G. Bhuta, L.R. Koval // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1966. – Vol. 3, N. 3. – pp. 335–338.
50. Biggs J.D. Optimal geometric motion planning for a spin-stabilized spacecraft / J.D. Biggs, H. Nadjim // Systems & Control Letters. – 2012. – Vol. 61, Issue 4. – pp. 609-616.
51. Carrió L. Spin Stabilization and Release Mechanism / L. Carrió, S. Johns, A. Price // Northeast Region Student Conference. – 2005. – Режим доступу: URL: http://www.dartmouth.edu/~aiaa/public_html/Dartsat20 AIAA20Presentation202005.ppt
52. Cartwright W.F. Circular Constraint Nutation Damper / W.F. Cartwright, E.C. Massingill, R.D. Truebloodj // AIAA Journal. – 1963. – Vol. 1, N. 6. – pp. 1375-1380.
53. Chang C.O. Design of a viscous ring nutation damper for a freely precessing body / C.O. Chang, C.S. Chou, S.Z. Wang // Journal of Guidance, Control, and Dynamics.– 1991. – Vol.14, N.6. – pp. 1136-1144.
54. Chang C.O. Dynamics and Stability of a Freely Precessing Spacecraft Containing a Nutation Damper / C.O. Chang, L.Z. Liu, K.T. Alfriend // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1996. – Vol. 19, N. 2. – pp. 297–305.
55. Chinnery A.E. The Motion of a Rigid Body with an Attached Spring-Mass-Damper / A.E. Chinnery, C.D. Hall // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1995. – Vol. 18, No. 6. – pp. 1404–1409.
56. Clark K. Patent 2,405,404 US. Domestic appliance // Serial No 363,321. Field 29.10.1940, Patented 06.08.1946.

57. Cloutier G.J. Nutation damper instability on spin-stabilized spacecraft / G.J. Cloutier // AIAA Journal. – 1969. – N 11. – pp. 2110–2115.
58. Cloutier G.J. Optimum Design Parameters for a Spin-Stabilized Spacecraft Nutation Damper / G.J. Cloutier // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1972. – Vol. 9, N. 6. – pp. 466–468.
59. Cloutier G.J. Resonances of a two-DOF system on a spin-stabilized spacecraft / G.J. Cloutier // AIAA Journal. – 1976. – Vol. 14, N. 1. – pp. 107–109.
60. Cochran J.E. Nutation Dampers vs Precession Dampers for Asymmetric Spacecraft / J.E. Cochran, J.A. Thompson // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1980. – Vol. 3, N. 1. – pp. 22–28.
61. Engelking U. Patent 4,504,033 US. Stabilizing device for gyroscope effect apparatus such as a spacecraft or vehicle, especially with a view to damping the nutation motion // Appl. No: 629,745. Filed: Jul. 10, 1984. Date of patent: Mar. 12, 1985.
62. Ferreira L.D.D. Attitude control simulation of the data collecting satellite – SCD-2 / L.D.D. Ferreira, V. Carrara // Aerospace Technical Center-CTA, são José dos Campos, Brazi1, 1-st Brazilian Symposium of Aerospace Technology, 27-31 Auqust, 1990. – Режим доступу: URL: http://www2.dem.inpe.br/val/publicacoes/ferreira_inpe_5159_pre_1638.pdf
63. Fonseca I.M. On the Attitude Dynamics of the Second Brazilian Scientific Satellite SACI-2 / I.M. Fonseca, M.C. Santos, J.Â. Neri // 50th International Astronautical Congress, Amsterdam, Holland, paper IAF-99-A.3.01, Oct 4 - 8, 1999. – Режим доступу: URL: http://www2.dem.inpe.br/ijar/SACI2IAF99.pdf
64. Fonseca I.M. SACI-2 Attitude Control Subsystem / I.M. Fonseca, M.C. Santos // INPE. – Brasil, 2002. – Vol. 3. – pp. 197–209.
65. Gidlund S. Design Study for a Formation-Flying Nanosatellite Cluster / S. Gidlund // Lulea University of Technology, Department of Space Science, Kanada, 2005. – p. 128. – Режим доступу: URL: http://epubl.luth.se/1402-1617/2005/147/index.html
66. Grahn S. ASTRID – An attempt to make the microsatellite a useful tool for space science / S. Grahn, A. Rathsman // Proc. the 11th Annual AIAA/USU Conf. on Small Satellites, Logan, Utah, 1995. – Режим доступу: URL: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0273117797005607
67. Hambly R.M. AMSAT OSCAR-51 (AO-51) and the New Eagle Satellite / R. Hambly // Columbia, W2GPS, 2004. – Режим доступу: URL: http://www.columbiaara.org/AMSAT-CARA-04-11.ppt
68. Haseltine W.R. Nutation Damping Rates for a Spinning Satellite / W.R. Haseltine // Aerospace Engineering. – 1962. – Vol. 21, N. 3. – pp. 10–17.

69. Hubert C. Patent 5,058,834 US. Liquid balance control for spinning spacecraft // Appl. No: 448,461. Filed: Dec. 11, 1989. Date of patent: Oct. 22, 1991.

70. Hubert C. Surface Tension Lockup in the IMAGE Nutation Damper – Anomaly and Recovery / C. Hubert, D. Swanson // NASA GSFC Flight Mechanics Symposium, 2001. – Режим доступу: URL: http:// image.gsfc.nasa.gov/publication/document/2001_hubert_swanson.pdf

71. Janssens, F.L. On the stability of spinning satellites / F.L. Janssens, J.C. Van der Ha // Acta Astronautica. – 2011. – Vol. 68, Issues 7–8. – pp. 778-789.

72. Johnson D.A. Attitude Stability of Multibody Symmetrical Satellites with Mechanical Dampers / D.A. Johnson // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1974. – Vol. 11, N. 9. – pp. 645–649.

73. Kane T.R. Spacecraft Dynamics / T.R. Kane, P.W. Likins, D.A. Levinson. – McGraw-Hill, New York, 1983. – 436 p.

74. Key Technological Solutions Towards The SACI-1 Microsatellite Design / J.A.C.F. Neri, S. Rabay et al. // Proceedings of the Tenth Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites, September 1996. – Режим доступу: URL: http://microsat.sm.bmstu.ru/e-library/Missions/ saci_abstract.pdf

75. Kiforenko B.N. Numerical solutions to exact equations of motion along near-optimal multi-orbit trajectories for a spacecraft in a Newtonian gravitational field / B.N. Kiforenko, I. Yu. Vasiliev // Cosmic Research. – 2011. – Vol. 49, Issue 5. – pp. 424-439.

76. Kiforenko B.N. Optimal transfers of spacecraft with bimodal propulsion / B.N. Kiforenko, A.M. Kharitonov // International Applied Mechanics. – 2011. – Vol. 46, Issue 10. – pp. 1154-1163.

77. Kiforenko B.N. Problems of the mathematical description of rocket engines as plants / B.N. Kiforenko // International Applied Mechanics. – 2012. – Vol. 48, Issue 5. – pp. 608-612.

78. Konstantinov O.V. Forced oscillations of the system «reservoir – capillary liquid with a free surface» / О.В. Константінов // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки». – 2013. – N 2. – С. 43-46.

79. Kuebler M.E. Patent 3,277,486 US. Method and means for damping nutation in a satellite // Serial No 202,030. Field June 12, 1962, Patented Oct.04.1966.

80. LaBarber J.A. Patent 3,799,619 US. Vibration dampening assembly / J.A. LaBarber, Kurt J. Wagner, Sherman Oaks. Appl. No. - 254,706. Filed May. 18, 1972. Patented Mar. 26, 1974.

81. Leblanc M. Patent 1,159,052. Automatic balancer for rotating bodies // Serial No. - 803,970. Field 01.12.1913, Patented 02.11.1915.
82. Likins P.W. Effects of energy dissipation on the free body motions of spacecraft / P.W. Likins // JPL, Technical Report No 32.860, NASA, California Institute of Technology Pasadena, California, 1966. – p. 70. – Режим доступу: URL: http://www.aoe.vt.edu/~cdhall/courses/aoe4065/NASADesignSPs/sp8016.pdf
83. Meehan P.A. Chaotic motion in a Spinning Spacecraft with Circumferential Nutational Damper / P.A. Meehan, S.F. Asokanthan // Nonlinear Dynamics. – 1996. – Vol. 12. – pp. 69–87.
84. Meissinger H.F. Low-Cost, Minimum-Size Satellites for Demonstration of Formation Flying Modes at Small, Kilometer-Size Distances / H.F. Meissinger // 13-th Annual AIAA, Utah State University Conference on Small Satellites, Logan, Utah, August 23-26, 1999. – p. 15. – Режим доступу: URL: http://www.smad.com/analysis/TS-VI-3.pdf
85. Mercer G.E. Patent 3,433,534 US. Automatic balancer // Serial No. – 616,429. Filed Feb. 10, 1967. Patented Mar. 18, 1969.
86. Meteosat Second Generation. The Satellite Development // European Spate Agency, BR-153, November, 1999. – p. 55. – Режим доступу: URL: http://www.esa.int/esapub/bulletin/bullet100/bul100_publicat.pdf
87. Miles J.W. On the Annular Damper for a Freely Precessing Gyroscope-II / J.W. Miles // Journal of Applied Mechanics. – 1963. – Vol. 30. – pp. 189–192.
88. Newkirk H.L. Pendulum-type nutation damper used in the NASA atmospheric structure satellite S-6 / H.L. Newkirk // California, Navweps Report 8525, June 1965 p. 81. – Режим доступу: URL: http://oai.dtic.mil/oai/oai?verb=getRecord&metadataPrefix=html&identifier=AD0616118
89. Ovchinnikov M.Yu. Small Satellites in Russia (Economical and Management Aspects), Actual Problems of Aviation and Aerospace Systems Journal, Kazan Technical University (Kazan, Russia) and Aeronautical University (Daytona Beach, USA) Publisher. – 1998. – N. 1 (5). – pp. 13-25.
90. Ovchinnikoav M.Yu. Small Satellites in Russia and in the World: Current State / M.Yu. Ovchinnikoav // Journal for Space Communications. – 1995. – Vol. 13, N. 1. – pp. 45-50.

91. Project Spartnik: Microsatellite Design, Construction, Testing, and Operation by Undergraduate Students at San José State University / J. Lin, F. Soriano, M. Schoenman, H.J. Pernicka // San José CA 95192-0087, 1998. – Режим доступу: URL: http://www.engr.sjsu.edu/spartnik/PDF/ Prospectus_April2001b.pdf

92. Sarychev V.A. Optimal Damping of the Nutating Motion of Spin-Stabilized Satellites / V.A. Sarychev, V.V. Sazonov // Celestial Mechanics. – 1976. – Vol. 13. – pp. 383-405.

93. Schneider C.C.Jr Nutation Dampers vs Precession Dampers for Asymmetric Spinning Spacecraft / C.C.Jr Schneider, P.W. Likins // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1973. – Vol. 10, N. 3. – pp. 218–222.

94. Small Spacecraft Technology State of the Art // Mission Design Division Staff. – Ames Research Center, Moffett Field, California, July 2014. – 200 p. – Режим доступу: URL: http://www.nasa.gov/sites/default/files/files/ Small_Spacecraft_Technology_State_of_the_Art_2014.pdf

95. Taylor R.S. A passive pendulum wobble damping system for a manned rotating space station / R.S. Taylor // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1966. – Vol. 3, N. 8. – pp. 1221-1228.

96. The SNOE Spacecraft: Integration, Test, Launch, Operation, and On-orbit Performance / S.C. Solomon et al. // 12-th Annual AIAA/Utah State University Conference on Small Satellites, Logan, Utah, August-September, 1998. – Режим доступу: URL: http://lasp.colorado.edu/ snoedata/publications/ AIAAitlop.pdf

97. Thomson W.T. Motion of an Asymmetric Spinning Body with Internal Dissipation / W.T. Thomson, G.S. Reiter // AIAA Journal. – 1963. – Vol. 1, N. 6. – pp. 1429–1430.

98. Алфутов Н.А. Устойчивость движения и равновесия / Н.А. Алфутов, К.С. Колесников. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 256 с.

99. Артюхин Ю.П. Системы управления космических аппаратов, стабилизированных вращением / Ю.П. Артюхин, Л.И. Каргу, В.Л. Симаев. – М.: Наука, 1979. – 296 с.

100. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости движения. / Е.А. Барбашин. – М.: Наука, 1967. – 223 с.

101. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. / В.В. Белецкий. – М.: Наука, 1965. – 416 с.

102. Блехман И.И. Вибрационная механика. / И.И. Блехман. – М.: Физматлит, 1994. – 400 с.

103. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. / И.И. Блехман. – М.: Наука, 1971. – 896 с.

104. Болграбская И.А. Исследование устойчивости стационарных движений твердых тел при воздействии дебалансов различной физической природы / И.А. Болграбская, А.О. Игнатьев, Г.А. Кононыхин, А.Я. Савченко // Устойчивость движения. – Новосибирск: Наука, 1985. – С. 101–104.

105. Болотин С.В. Теоретическая механика / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: "Академия", 2010. – 432 с.

106. Васильев В.Г. Динамика равновесных конфигураций вращающегося космического аппарата с длинными стержнями / В.Г. Васильев, М.В. Семенюк // Техническая механика. – 2001. – № 1. – С. 110–118.

107. Васильев В.Г. Исследование устойчивости вращения космического аппарата с упругими стержнями / В.Г. Васильев // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 1999. – № 6. – С. 50–57.

108. Васильев В.Г. Модель вращательного движения космического аппарата с упругими стержнями / В.Г. Васильев // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 1999. – № 5. – С. 30–38.

109. Васильев В.Г. Об устойчивости вращения космического аппарата с шарнирно присоединенными стержнями / В.Г. Васильев, В.М. Ковтуненко // Космические исследования. – 1969. – Т. 7, № 5. – С. 627–636.

110. Васильев В.Г. Природа неустойчивости движения вращающегося твердого тела с упругими стержнями / В.Г. Васильев // Техническая механика. – 1999. – № 2. – С. 67–71.

111. Васильев И.Ю. Усреднение уравнений оптимального движения с постоянной и регулируемой по величине тягой в сильном центральном гравитационном поле / И.Ю. Васильев, Б.Н. Кифоренко, З.В. Пасечник // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 5. – С. 110-119.

112. Воробьев В.М. Амортизационная платформа с динамическим маятниковым гироскопическим поглотителем колебаний / В.М. Воробьев // Механіка гіроскопічних систем. – К.: Либідь, 2009. – Вип. 20. – С. 12 – 21.

113. Воробьев В.М. Определение момента, действующего на цилиндр в жидкости при заданном движении его оси / В.М. Воробьев // Механіка гіроскопічних систем. – К.: Либідь, 2001–2002. – Вип. 17–18. – С. 125 – 132.

114. Воротников В.И. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения / В.И. Воротников, В.В. Румянцев. – М.: Научный мир, 2001. – 320 с.

115. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 300 с.

116. Гарбук С.В. Космические системы дистанционного зондирования Земли / С. В. Гарбук, В.Е. Гершензон. – М.: Издательство А и Б, 1997. – 296 с.

117. Гашененко И.Н. О редукции уравнений Эйлера-Пуассона / И.Н. Гашененко, Г.В. Мозалевская, Е.И. Харламова // Механика твердого тела. – 2007. – Вып. 37. – С. 69-84.

118. Гашененко І.М. Інваріантні многовиди і множини припустимих швидкостей в задачах динаміки твердого тіла: автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.02.01 / І.М. Гашененко; НАН України, Інститут прикладної математики і механіки – Донецьк, 2008. – 29 с.

119. Горошко О.А. Динамика упругой конструкции в условиях свободного полета / О.А. Горошко. – К.: Наукова думка, 1965. – 164 с.

120. Гриценко А.А. Использование стабилизированных вращением малых космических аппаратов в системах спутниковой связи на GEO и HEO орбитах / А.А. Грищенко // ЗАО Информационный Космический Центр "Северная Корона". – 2001. – Режим доступу: URL: http://www.spacecenter.ru/Resurses/IEEE-2001-2.doc

121. Гробов В.А. Динамика вращающейся свободной системы тел с ориентируемой осью вращения / В.А. Гробов, В.В. Сивенюк // Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 115-125.

122. Гробов В.А. К теории вращательных движений свободного твердого тела, несущего маятники / В.А. Гробов // Укр. матем. журнал. – 1969. – 21, № 6. – С. 818–823.

123. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия / А.А. Гусаров – М.: Наука, 2002. – 119 с.

124. Де Бра Д.Б. Принципы работы пассивных систем стабилизации и основные направления исследований / Д.Б. Де Бра // Современное состояние механика космического полета. Серия: "Механика космического полета" : сб. науч. тр., пер. с англ. – М.: Наука, 1969. – С. 179–235.

125. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М: Наука, 1967. – 472 с.

126. Детинко Ф.М. Об устойчивости работы автобалансира для динамической балансировки / Ф.М. Детинко // Изв. АН СССР. Мех. Маш-стр. – 1956. – № 4. – С. 38-45.

127. Добронравов В.В. Основы аналитической механики / В.В. Добронравов – М.: Высшая школа, 1976. – 264 с.

128. Докучаев Л.В. Анализ возмущенного движения вблизи границы устойчивости вращающегося КА типа Авроральный зонд проекта ИНТЕРБОЛ / Л.В. Докучаев, Б.И. Рабинович // Космические исследования. – 1999. – Т. 37, № 6. – С. 589–597.

129. Докучаев Л.В. Влияние диссипативных моментов, обусловленных вязкостью жидкого тела, на устойчивость вращения космического объекта / Л.В. Докучаев // Космические исследования. – 2002. – Т. 40, № 1. – С. 42-53.

130. Зинченко, О.Н. Малые оптические спутники ДЗЗ / О.Н. Зинченко // «Ракурс», Москва, 2011. – Режим доступу: URL: http://www.racurs.ru/www_download/articles/Micro_Satellites.pdf

131. Ильин А.А. Динамика быстро вращающихся малых спутников в геомагнитном поле: автореф. дис канд. физ.–мат. наук: 01.02.01. / А.А. Ильин; ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. – М., 2006. – 18 с.

132. Карапетян А.В. Первые интегралы, инвариантные множества и бифуркации в диссипативных системах / А.В. Карапетян // Регулярная и хаотическая динамика. – 1997. – Т. 2. – С. 75-80.

133. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений / А.В. Карапетян – М.: Эдиториал УРСС, 1998. – 168 с.

134. Каргу Л.И. Системы угловой стабилизации космических аппаратов / Л.И. Каргу. – М.: Машиностроение, 1980. – 172 с.

135. Каюк Я.Ф. Движение механической системы с переменными массово-инерционными характеристиками / Я.Ф. Каюк, В.И. Денисенко // Прикладная механика. – 2004. – 40, № 7. – С. 128-135.

136. Кейн Т.Р. Влияние диссипации энергии на вращающийся спутник / Т.Р. Кейн, П.М. Барба // Ракетная техника и космонавтика. – изд-во «Мир», 1966. – № 8. – С. 99-103.

137. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н.А. Кильчевский – М.: Наука; т. 1. – 1977. – 480 с.; т. 2: – 1977. – 544 с.

138. Кифоренко Б.Н. К проблеме оптимизации многовитковых траекторий межорбитальных переходов космических аппаратов с двигателями малой тяги. Ч. I / Б.Н. Кифоренко, И.Ю. Васильев // Прикладная механика. – 2008. – 44, № 7. – С. 110-119.

139. Кифоренко Б.Н. К проблеме оптимизации многовитковых траекторий межорбитальных переходов космических аппаратов с двигателями малой тяги. Ч. II / Б.Н. Кифоренко, И.Ю. Васильев // Прикладная механика. – 2008. – 44, № 9. – С. 115-122.

140. Кифоренко Б.Н. Некоторые проблемы моделирования и оптимизации в механике космического полета / Б.Н. Кифоренко // Прикладная механика. – 2004. – 40, № 1. – С. 45-71.

141. Кифоренко Б.Н. Оценка эффективности оптимального управления тягой электрического ракетного двигателя с солнечным источником энергии / Б.Н. Кифоренко, И.Ю. Васильев, Я.В. Ткаченко // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 5. – С. 99-101.

142. Константинов А.В. Исследование параметрического резонанса в задаче М. Фарадея при наличии слабых гравитационно-капиллярных эффектов / А.В. Константинов, О.С. Лимарченко // Збірник праць Інституту математики. – 2011. – т. 8, № 2. – С. 83-100.

143. Константінов О.В. Узагальнена задача Фарадея про рух резервуара з рідиною / О.В. Константінов, О.С. Лимарченко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2012. – Випуск 16. – С. 76-85.

144. Красовский Н.Н. Некоторые задачи устойчивости движения / Н.Н. Красовский – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.

145. Кубенко В.Д. О многомодовых нелинейных колебаниях цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью / В.Д. Кубенко, П.С. Ковальчук, Л.А. Крук // Прикладная механика. – 2003. – 39, № 1. – С. 99-108.

146. Леви-Чивита Т. Курс теоретической механики: динамика систем с конечным числом степеней свободы / Т. Леви-Чивита, У. Амальди. – М.: Издательство иностранной литературы, 1951. – 555 с.

147. Луковский И.А. Вариационные методы исследования задач динамики твердых тел с жидкостью / И.А. Луковский // Прикладная механика. – 2004. – 40, N 10. – С. 37-77.

148. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов – М–Л.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1950. – 473 с.

149. Майоров В.А. Движение относительно центра масс спутника, стабилизированного вращением / В.А. Майоров, В.И. Попов // Космические исследования. – 1973. – Т. 11, № 5. – С. 696 -703.

150. Макриденко Л.А. Концептуальные вопросы создания и применения малых космических аппаратов / Л. А. Макриденко, С. Н. Волков, В. П. Ходненко [и др.] // Вопросы электромеханики. Труды НПП ВНИИЭМ. – М.: ФГУП «НПП ВНИИЭМ». – 2010. – Т. 114, № 1. – С. 15 – 26.

151. Малые космические аппараты. В 3 кн. Кн. 3. Минисптуники. Унифицированные космические платформы для малых космических аппаратов: справочное пособие / В.Н. Блинов, Н.Н. Иванов, Ю.Н. Сеченов, В. В. Шалай. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2010. – 348 с.

152. Малые космические аппараты информационного обеспечения / Под ред. д.т.н., проф. В.Ф. Фатеева. – М.: Радиотехника, 2010. – 320 с.
153. Малые спутники в сетях связи и вещания / Г.А. Ефремов, В.В. Витер, А.А. Липатов и др. // Технологии и средства связи. – 2000. – №1. – Режим доступу: URL: http://www.spacecenter.ru/Resurses/PGEO.pdf
154. Мартынюк А.А. О некоторых результатах развития теорий устойчивости движения: классических и современных / А.А. Мартынюк // Прикладная механика. – 2001. – 37, № 9. – С. 44-60.
155. Мартынюк А.А. Устойчивость движения сложных систем / А.А. Мартынюк – К.: Наукова думка, 1975. – 351 с.
156. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д.Р. Меркин – М.: Наука, 1987. – 304 с.
157. Мирер С.А. Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа / С.А. Мирер, В.А. Сарычев // Космические исследования. – 1997. – Т. 35, № 6. – С. 651–658.
158. Младов А.Г. Системы дифференциальных уравнений и устойчивость движения по Ляпунову / А.Г. Младов. – М.: Высшая школа, 1966. – 224 с.
159. Моисеев Н.Н. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость / Н.Н. Моисеев, В.В. Румянцев – М.: Наука, 1965. – 439 с.
160. Муйжниек А.И. Исследование устойчивости автоматического динамического балансировщика / А.И. Муйжниек // Ученые записки Рижского политехнического института. – 1959. – Вып. 1. – С. 155-170.
161. Мытарев А.И. Об устойчивости вращающегося космического аппарата, частично заполненного жидкостью. Случай одной полости / А.И. Мытарев, Б.И. Рабинович // Космические исследования. – 2006. – т. 44, № 3. – С. 239-248.
162. Мытарев А.И. Об устойчивости вращающегося космического аппарата, частично заполненного жидкостью. Случай нескольких полостей / А.И. Мытарев, Б.И. Рабинович // Космические исследования. – 2006. – т. 44, № 5. – С. 452-458.
163. Найфе А. Введение в методы возмущений [пер. с англ.] / А. Найфе. – М.: Мир, 1984. – 535 с.
164. Невдаха Ю.А. Забезпечення працездатності нечутливих до сил ваги некласичних автобалансирів **:** автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : 05.02.02 / Ю.А. Невдаха; Київ, НТУУ КПІ, 2003. – 21 с.
165. Неймарк Ю.И. Динамика неголономных систем. / Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука, 1967. – 519 с.

166. Нелинейная динамика осесимметричных тел, несущих жидкость / В.Д. Кубенко, П.С. Ковальчук, Л.Г. Бояршина и др. – Киев: Наук. думка, 1992. – 184 с.

167. Нелинейная механика / Под ред. В.М. Матросова, В.В. Румянцева, А.В. Карапетяна. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 432 с.

168. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы / В.П. Нестеренко – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1985. – 84 с.

169. Овчинников М.Ю. Малые мира сего / М.Ю. Овчинников // Компютерра. – 2007, № 15. – С. 37-43. – Режим доступу: URL: http://old.computerra.ru/2007/683/315829/

170. Овчинников М.Ю. О движении относительно центра масс вращающегося тела с демпфером сухого трения / М.Ю. Овчинников, В.Н. Бондаренко. – М.: ИПМ, 1991. – 29 с. (Препринт / ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР; № 35).

171. Овчинников М.Ю. Системы ориентации спутников: от Лагранжа до Королева / М.Ю. Овчинников // Соросовский образовательный журнал, Математика. – 1999. – № 12. – С. 91-96.

172. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. / П.П. Овчинников, В.М. Михайленко; За заг. ред. П.П. Овчинникова; Пер. з рос. Є.В. Бондарчук, Ю.Ю. Костриці, Л.П. Оніщенко – К.: Техніка, 2003. – Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.

173. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков / И.И. Ольховский. – М.: Наука, 1970. – 569 с.

174. Павловський М.А. Теоретична механіка / М.А. Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.

175. Панкова Н.В. Линейности и нелинейности в свободных системах / Н.В. Панкова // Вестник научно-технического развития. – 2008. – №12 (16). – С. 34–40.

176. Парс Л.А. Аналитическая динамика / Л.А. Парс. – М.: Наука, 1971. – 636 с.

177. Пожарицкий Г.К. Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью / Г.К. Пожарицкий, В. В. Румянцев // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27, вып. 1. – С. 16–26.

178. Попов В.И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов / В.И. Попов – М.: Машиностроение, 1986. – 184 с.

179. Проблемы ориентации искусственных спутников Земли [пер. с англ.] / под ред. С.Ф. Сингера – М.: Наука, 1966. – 452 с.

180. Рабинович Б.И. Математическая модель космического аппарата с полостью, частично заполненной жидкостью. Режим стационарного вращения / Б.И. Рабинович // Полет. – 2003. – №8. – С. 55-60.

181. Рабинович Б.И. Математическая модель космического аппарата с полостью, частично заполненной жидкостью. Режим нестационарного вращения / Б.И. Рабинович, А.И. Мытарев, О.П. Клишев // Полет. – 2003.– № 10. – С. 50-56.

182. Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. В 2 т. [пер. с англ.] / Э.Дж. Раус – М.: Наука; т. 1. – 1983. – 464 с.; т. 2: – 1983. – 544 с.

183. Рейтер Г.С. Вращательное движение пассивных космических аппаратов / Г.С. Рейтер, У.Т. Томсон // Проблемы ориентации искусственных спутников Земли. Серия : “Механика космического полета”: сб. науч. тр., пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – С. 336–350.

184. Ротационное движение космических тросовых систем / А.П. Алпатов, А.Е. Закржевский, В.С. Хорошилов и др. – Днепропетровск, ИТМ НАНУ и НКАУ, 2001. – 404 с.

185. Рубановский В.Н. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах: уч. пос. для вузов. / В.Н. Рубановский, В.А. Самсонов. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит, 1988. – 304 с.

186. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений свободных систем / В.В. Румянцев // Космические исследования. – 1968. – Т. 6, № 5. – С. 643–648.

187. Румянцев В.В. Об устойчивости установившихся движений твердых тел с полостями наполненными жидкостью / В.В. Румянцев // ПММ. – 1962. – т. 26, вып. 6. – С. 877-991.

188. Румянцев В.В. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных / В.В. Румянцев, А.С. Озиранер – М.: Наука, 1987. – 256 с.

189. Румянцев, В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников / В.В. Румянцев. – М.-Ижевск: НИЦ ”Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. – 156 с.

190. Савченко А.Я. Устойчивость движения систем связанных твердых тел / А.Я. Савченко, И.А. Болграбская, Г.А. Кононыхин – К.: Наук. думка, 1991. – 168 с.

191. Сарычев В.А. Демпфирующие устройства с несколькими степенями свободы / В.А. Сарычев, В.В. Сазонов – М.: ИПМ, 1975. – 59 с. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СРСР; № 30).

192. Сарычев В.А. Некоторые вопросы динамики вращательного движения спутников. 1. Нутационные демпферы спутников, стабилизируемых вращением / В.А. Сарычев, В.В. Сазонов – М.: ИПМ, 1974. – 62 с. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СРСР; № 45).

193. Сарычев В.А. Оптимальное демпфирование нутационных колебаний спутника, стабилизированного вращением. Маятниковый демпфер / В.А. Сарычев, С.А. Мирер, А.В. Исаков – М.: ИПМ, 1988. – 28 с. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СРСР; № 88).

194. Сотніков В.С. Динаміка роторів з автобалансирами-демпферами для віброзахисту: автореф. дис на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: 05.02.09 / В.С. Сотніков; Київ, НТУУ КПІ, 2002. – 20 с.

195. Теоретична механіка: збірник задач: навч. посібник для студ. вищих навч. закл. / О.С. Апостолюк, В.М. Воробйов, Д.І. Ільчишина та ін.; під ред. М.А. Павловського – К. : Техніка, 2007. – 400 с.

196. Технология сборки и испытаний космических аппаратов: Учебник для высших технических учебных заведений / И.Т. Беляков, И.А Зернов, Е.Г. Антонов и др.; Под общ. Ред. И.Т. Белякова и И.А. Зернова. – М.: Машиностроение, 1990. – 352 с.

197. Токарь Е.Н. О влиянии ошибок в распределении масс космического аппарата на точность ориентации / Е.Н. Токарь // Космические исследования. – 1965. – Т. 3, № 3. – С. 354–358.

198. Томпсон Дж. М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: [пер. с англ.] / Дж. М.Т. Томпсон. – М.: Мир, 1985. – 254 с.

199. Уиллиамс Д.Д. Моменты и датчики углового положения синхронных спутников, стабилизированных вращением / Д.Д. Уиллиамс // Проблемы ориентации искусственных спутников Земли. Серия: “Механика космического полета”: сб. науч. тр., пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – С. 351–376.

200. Уиттекер Э.Т. Аналитическая динамика / Э.Т. Уиттекер – Ижевск: Удмуртский университет, 1999. – 588 с.

201. Фишел Р.Е. Стабилизация вращением спутников / Р.Е. Фишел // Автоматическое управление космическими летательными аппаратами. – М.: Наука, 1968. – С. 184–191.

202. Філімоніхін Г.Б. Дослідження процесу зрівноважування ротора двомаятниковим автобалансиром із застосуванням програми SolidWorks і модуля Motion / Г.Б. Філімоніхін, О.В. Коваленко // Український міжвідомчий науково-технічний збірник “Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні”. – 2006. – Вип. № 40. – С. 254-261.

203. Філімоніхін Г.Б. Моделювання процесу зрівноваження ротора з нерухомою точкою двохмаятниковим автобалансиром із застосуванням програми SolidWorks і модуля Motion / Г.Б. Філімоніхін, О.В. Коваленко // Загальнодержавний міжвідомчий н.-т. збірник "Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин". – 2006. – Вип. №36. – С.19-28.

204. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами / Г.Б. Філімоніхін. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.

205. Харламов П.В. Избранные труды / НАН Украины; Институт прикладной математики и механики / А.М. Ковалев (отв. ред.). – К.: Наукова думка, 2005. – 256 с.

206. Четаев Н.Г. Устойчивость движения / Н.Г. Четаев. – М.: Наука, 1990. – 176 с.

МОНОГРАФІЯ

Філімоніхін *Геннадій Борисович*
Філімоніхіна *Ірина Іванівна*
Пирогов *Володимир Васильович*

ВЕЛИЧИНА И ДИНАМИКА ИЗМЕНЕНИЯ УГЛА НУТАЦИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ НЕСУЩЕГО ТЕЛА В ИЗОЛИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ

(російською мовою)

Під загальною редакцією Г.Б. Філімоніхіна
Технічний редактор: Лисенко В.Ф.

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 15,6.
Облік. Видав арк. 8,5. Тираж 310. Зам. 105.

Видавець і виготовлювач СПД ФО Лисенко В.Ф.
25029, м. Кіровоград, вул. Пацаєва, 14, к. 1, кв. 101. Тел. (0522) 322-326
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3904 від 22.10.2010.

Авторы:

доктор технических наук, профессор
Филимонихин Геннадий Борисович*,
профессор кафедры деталей машин и прикладной механики,

доктор технічних наук, професор,
Філімоніхін Геннадій Борисович,
професор кафедри деталей машин та прикладної механіки,

doctor of technical sciences, professor,
Filimonikhin Gennadiy Borisovich,
professor of the chair of machine parts and applied mechanics,
filimonikhin@yandex.ua;

кандидат физико-математических наук, доцент
Филимонихина Ирина Ивановна*,
доцент кафедры высшей математики,

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Філімоніхіна Ірина Іванівна,
доцент кафедри вищої математики,

candidate of physical and mathematical sciences, associate professor,
Filimonikhina Irina Ivanovna,
associate professor of the chair of higher mathematics,
fii@online.ua;

кандидат физико-математических наук,
Пирогов Владимир Васильевич*,
старший преподаватель кафедры деталей машин и прикладной механики,

кандидат фізико-математичних наук,
Пирогов Володимир Васильович,
старший викладач кафедри деталей машин та прикладної механіки,

candidate of physical and mathematical sciences,
Pirogov Vladimir Vasilyevich,
senior lecturer of the chair of machine parts and applied mechanics,
vladimir-pirogovvv@rambler.ru.

*Кировоградский национальный технический университет,
Проспект университетский, 8, г. Кировоград, 25006, Украина,
т.: (+380522) 390-547
Кіровоградський національний технічний університет,
Проспект університетський, 8, м. Кіровоград, 25006, Україна,
т.: (+380522) 390-547
Kirovograd national technical university,
Prospekt universitetskij, 8, city Kirovograd, 25006, Ukraine,
t.: (+380522) 390-547