Центральноукраїнський національний технічний університет
Механіко-технологічний факультет
Кафедра “Машинобудування, мехатроніки і робототехніки”

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри ММіР
к.т.н., доцент
_____ Андрій ГРЕЧКА
«____» _____ 2026 р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

за другим (магістерським) рівнем вищої освіти

на тему:

«Синтез героторних зачеплень на основі еліптичних профілів»

«Synthesis of gerotor meshes based on elliptical profiles»

Виконав здобувач вищої освіти 2-го року
магістратури групи ГМ-24М-3
ОНП «Галузеве машинобудування»
спеціальності 133 «Галузеве машинобудування»
_____ Сергій ВАЙВАЛА

Керівник роботи к.т.н., доцент
_____ Олександр СКІБІНСЬКИЙ

Рецензент: к.т.н., доцент
_____ Руслан ОСІН

Кропивницький – 2026

Центральноукраїнський національний технічний університет

Факультет	Механіко-технологічний
Кафедра	Машинобудування, мехатроніки і робототехніки
Рівень вищої освіти	другий (магістерський)
Галузь знань	13 Механічна інженерія
Спеціальність	133 Галузеве машинобудування
Освітньо-наукова програма	Галузеве машинобудування

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри ММР
Андрій ГРЕЧКА
_____

«____» _____ 2026 р.

ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ
ЗА ДРУГИМ (МАГІСТЕРСЬКИМ) РІВНЕМ ВИЩОЇ ОСВІТИ
ЗДОБУВАЧА
Сергія ВАЙВАЛИ
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи: Синтез героторних зачеплень на основі еліптичних профілів
2. Керівник роботи: к.т.н., доц., Олександр СКІБІНСЬКИЙ
3. Строк подання роботи до захисту « » _____ 2026 р.

4. Мета та завдання кваліфікаційної роботи:

Метою роботи є: виконання графоаналітичного синтезу героторного зачеплення на основі еліптичного профілю

Завдання:

– виконати синтез героторного зачеплення на основі епіциклоїдального профілю, як основного аналога героторного зачеплення на основі еліптичного профілю;
– виконати синтез героторного зачеплення на основі еліптичного профілю;
– виконати попереднє порівняння переваг та недоліків героторних зачеплень на основі епіциклоїдальних та еліптичних профілів;
– намітити методи виготовлення робочих поверхонь деталей героторних передач на основі еліптичних профілів.

5. Консультанти по роботі, із зазначенням розділів

Розділ	Консультант	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв
РОЗДІЛ 1	Олександр СКІБІНСЬКИЙ		
РОЗДІЛ 2	Олександр СКІБІНСЬКИЙ		
РОЗДІЛ 3	Олександр СКІБІНСЬКИЙ		
РОЗДІЛ 4	Олександр СКІБІНСЬКИЙ		

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ п/п	Назва етапів роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1	ВСТУП	Січень 2026	вик.
2	РОЗДІЛ 1	Січень-лютий 2026	вик.
3	РОЗДІЛ 2	Березень 2026	вик.
4	РОЗДІЛ 3	Березень-квітень 2026	вик.
5	РОЗДІЛ 4	Квітень 2026	вик.
6	ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ	Квітень-травень 2026	вик.
7	Графічна частина	Квітень-травень 2026	вик.

Дата видачі завдання «_____» _____ 2026 р.

Керівник роботи _____ Олександр СКІБІНСЬКИЙ
(підпис)

Завдання прийнято до виконання «____» _____ 2026 р.

Здобувач _____ Сергій ВАЙВАЛА
(підпис)

Анотація

Вайвала С.О. Синтез героторних зачеплень на основі еліптичних профілів: кваліфікаційна робота для освітнього ступеня «магістр»: спец. 133 «Галузеве машинобудування» / наук. кер. О. І. Скібінський; Центральноукраїн. нац. техн. ун-т. – Кропивницький : ЦНТУ, 2026. – 77 с. Матеріали презентації - 8.

Метою роботи є виконання графоаналітичного синтезу героторного зачеплення на основі еліптичного профілю.

– В роботі виконано: синтез героторного зачеплення на основі епіциклоїдального профілю, як основного аналога героторного зачеплення на основі еліптичного профілю; синтез героторного зачеплення на основі еліптичного профілю; попереднє порівняння переваг та недоліків героторних зачеплень на основі епіциклоїдальних та еліптичних профілів; намічено методи виготовлення робочих поверхонь деталей героторних передач на основі еліптичних профілів.

Актуальність: розробка нових видів зачеплень, які дають можливість за один оберт рухомого колеса героторної передачі, передавати більші об’єми робочої рідини у порівнянні з передачами аналогами є актуальною задачею.

Наукова новизна: виконано синтез героторної передачі на основі еліптичного профілю, отримано формули для розрахунку робочих профілів деталей героторної передачі на основі еліптичного профілю.

Ключові слова: героторне зачеплення, епіциклоїдальний профіль, еліптичний профіль, синтез.

Annotation

Serhii VAIVALA. Synthesis of gerotor meshes based on elliptical profiles. Master's Thesis: CNTU, 2026. - 77 p. Presentation materials - 8.

The aim of the work is to perform a graphical-analytical synthesis of a gerotor engagement based on an elliptical profile.

The work includes: the synthesis of a gerotor engagement based on an epicycloidal profile as the main analogue of a gerotor engagement based on an elliptical profile; the synthesis of a gerotor engagement based on an elliptical profile; a preliminary comparison of the advantages and disadvantages of gerotor engagements based on epicycloidal and elliptical profiles; the proposed methods for manufacturing the working surfaces of gerotor transmission parts based on elliptical profiles.

Relevance: the development of new types of engagements that make it possible to transfer larger volumes of working fluid per one revolution of the moving gear of a gerotor transmission, compared to analogous transmissions, is an urgent task.

Scientific novelty: a gerotor transmission based on an elliptical profile has been synthesized, and formulas have been obtained for calculating the working profiles of gerotor transmission parts based on an elliptical profile.

Keywords: gerotor engagement, epicycloidal profile, elliptical profile, synthesis.

ЗМІСТ

ВСТУП……..... 7
РОЗДІЛ 1. ПЕРЕВАГИ ТА НЕДОЛІКИ ГЕРОТОРНОГО ЗАЧЕПЛЕННЯ НА ОСНОВІ ЕПІЦИКЛОЇДАЛЬНОГО ПРОФІЛЮ……..... 8
1.1. Базові різновиди зачеплень…..……..... 8
1.2. Переваги та недоліки героторних зачеплень……... 15
1.3. Основні способи виготовлення робочих профілів деталей героторних зачеплень…...……...…. 20
1.4. Постановка задач дослідження……. 31
РОЗДІЛ 2. СИНТЕЗ ГЕРОТОРНОГО ЗАЧЕПЛЕННЯ НА ОСНОВІ ЕПІЦИКЛОЇДАЛЬНОГО ПРОФІЛЮ, ЯК ОСНОВНОГО АНАЛОГА ЗАЧЕПЛЕННЯ НА ОСНОВІ ЕЛІПТИЧНОГО ПРОФІЛЮ ……..…… 32
2.1. Основні конструктивні параметри передачі……..... 32
2.2. Синтез героторного зачеплення на основі епіциклоїдального профілю……..... 33
2.3. Висновки…… 39
РОЗДІЛ 3. СИНТЕЗ ГЕРОТОРНОГО ЗАЧЕПЛЕННЯ НА ОСНОВІ ЕЛІПТИЧНОГО ПРОФІЛЮ……..... 40
3.1. Основні конструктивні параметри передачі……..……...…… 40
3.2. Синтез героторного зачеплення на основі еліптичного профілю..... 41
3.3. Висновки…… 54
РОЗДІЛ 4. ПОРІВНЯННЯ ПЕРЕВАГ ТА НЕДОЛІКІВ ГЕРОТОРНИХ ЗАЧЕПЛЕНЬ НА ОСНОВІ ЕПІЦИКЛОЇДАЛЬНИХ ТА ЕЛІПТИЧНИХ ПРОФІЛІВ...…… 56
4.1. Дослідження площ робочих камер героторних зачеплень на основі епіциклоїдальних та еліптичних профілів…… 56
4.2. Дослідження робочого об’єму героторних зачеплень на основі епіциклоїдальних та еліптичних профілів ……..…… 66
4.3. Висновки……..... 71
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ..... 73
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ..... 75

ВСТУП

Героторні зачеплення є одним із найпоширеніших типів робочих органів об’ємних гідравлічних насосів і моторів, що застосовуються в системах змащення, паливоподачі, гідроприводу та теплопередачі завдяки компактності конструкції, низькій вартості виготовлення та надійності роботи. Якість героторного зачеплення безпосередньо визначається геометрією робочого профілю ротора й статора, тому розробка методів синтезу цього профілю залишається актуальною інженерною та науковою задачею.

Традиційно робочий профіль героторної пари будують на основі епіциклоїдальної (трохоїдальної) кривої, що утворюється коченням кола без ковзання по нерухомому колу. Ця схема має аналітичний апарат розрахунку, проте обмежує можливості варіювання форми профілю.

Перспективним напрямом є узагальнення схеми синтезу на випадок рухомої ланки еліптичної форми, що потребує розробки нового математичного апарату кінематики кочення, умов замкненості траєкторії та відсутності самоперетинів робочого профілю.

В роботі досліджено кінематику кочення колового та еліптичного профілів без ковзання по нерухомому колу; встановлено умови замкненості траєкторії та відсутності самоперетинів робочого профілю; розроблено й оптимізовано методику визначення геометричних параметрів еліптичного профілю; виконано кількісне порівняння площі та робочого об'єму обох схем синтезу.

РОЗДІЛ 1. ПЕРЕВАГИ ТА НЕДОЛІКИ ГЕРОТОРНОГО ЗАЧЕПЛЕННЯ НА ОСНОВІ ЕПІЦИКЛОЇДАЛЬНОГО ПРОФІЛЮ

1.1. Базові різновиди зачеплень

У сучасній техніці героторні передачі найширше застосовують у гідравліці - як вузол, що формує робочий тиск, - а також у механічних приводах машин і механізмів, де потрібні великі передаточні відношення. Поширенню цих передач у вказаних галузях сприяє ціла низка позитивних властивостей, зокрема:

– висока точність кінематики та рівномірність ходу;

– значний робочий об’єм міжзубових камер за порівняно компактних розмірів;

– різниця чисел зубців коліс дорівнює одиниці, що уможливлює отримання великих передаточних відношень;

– стабільна частота обертання та крутний момент;

– невисокий рівень шуму під час роботи.

Конструкція героторних передач передбачає наявність міжзубових порожнин, об’єм яких циклічно змінюється в процесі роботи, що й зумовило широке застосування цього типу передач у гідравліці.

Принципову схему героторного насоса наведено на рис. 1.1.

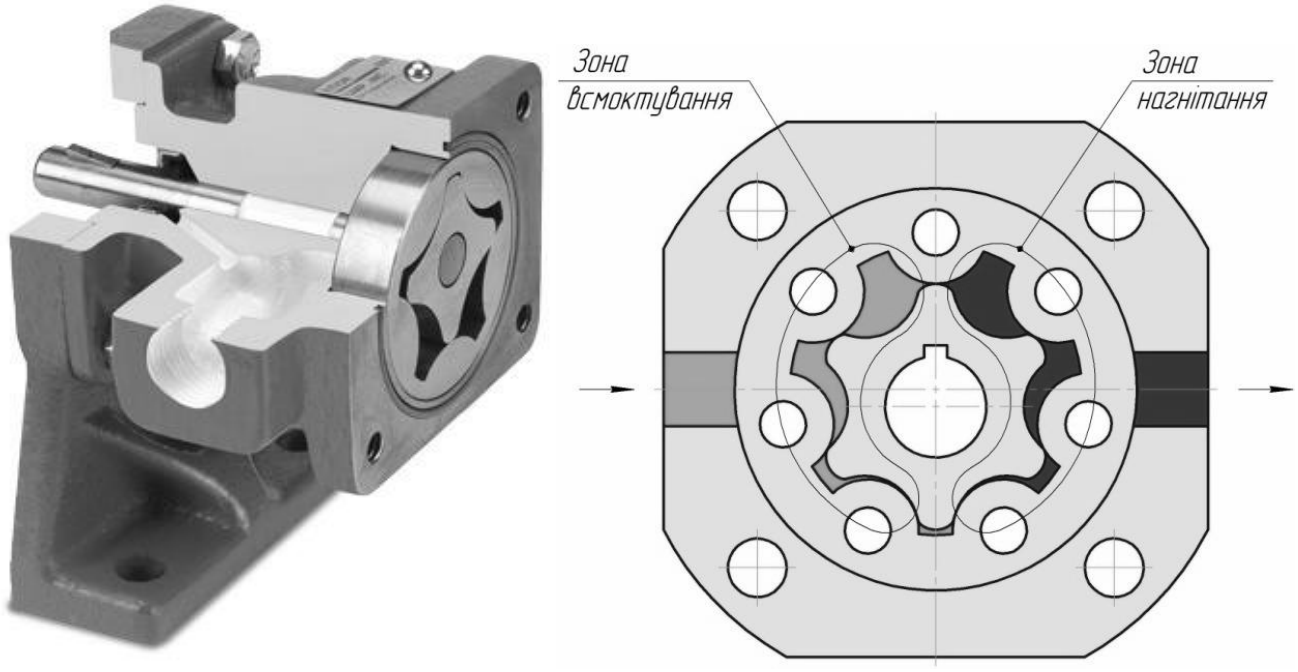


Рис. 1.1. Принципова схема героторного насоса

У 1927 р. американський винахідник Майрон Хілл отримав перший патент [US1648730] на насос із героторною парою. Згодом компанія Hull Engineering Company (Нью-Йорк) почала застосовувати такі насоси для перекачування нафтопродуктів. Окрім перекачування рідин, ці насоси використовують і для точного дозування (так звані насоси-дозатори) у вузлах, де потрібне переміщення, що залежить від дозованого об'єму рідини, наприклад у гідропідсилювачах керма. У 1966 р. розробка радянських дослідників ВНДІБТ (Всесоюзного науково-дослідного інституту бурової техніки) - новий тип гідравлічних двигунів [А.с. СРСР 440498] для буріння з гвинтовими героторними механізмами, основою яких є позацентроїдні циклоїдальні передачі внутрішнього зачеплення (ПЦПВЗ), - започаткувала нову високоефективну технологію буріння, що здобула широке визнання і досі успішно застосовується багатьма компаніями світу.

Думка про застосування ПЦПВЗ у силових передачах виникла практично одразу після їх винайдення. Пошук передач з великими передаточними числами та водночас високим ККД призвів до появи багатьох різновидів планетарних передач внутрішнього зачеплення, однак досягти різниці зубців, що дорівнює одиниці, тривалий час не вдавалося. Евольвентний профіль зубців тут застосувати неможливо через інтерференцію - підрізання профілів. Дослідження першої половини XX століття показали, що зазначеним вимогам відповідає саме позацентроїдне зачеплення з циклоїдальними профілями зубців, де такої проблеми немає. У 20–30-х роках минулого століття провідні європейські компанії - серед них Fr. Deckel, Siemens-Schuckert-Werke, Cyclo - почали освоювати виробництво редукторів на основі ПЦПВЗ. Саме вони першими розробили вдалі конструкції таких редукторів і налагодили їх випуск. Згодом ці розробки почали успішно застосовувати в приводах конвеєрів, компресорів, пресів, механізмах випуску шасі літаків тощо. Із того часу конструкції планетарних редукторів на основі ПЦПВЗ продовжують удосконалюватися й донині.

Утім, попри всі переваги, складність виготовлення деталей і досі заважає ефективному впровадженню цих передач у промисловість та їх конкуренції з іншими видами передач.

Теорія проєктування циклоїдальних передач ґрунтується на властивостях

циклічних кривих. ПЦПВЗ належать до планетарних передач із високим передаточним відношенням, що досягається завдяки тому, що різниця зубців коліс, які утворюють зачеплення, завжди дорівнює одиниці. Це одна з найважливіших конструктивних особливостей таких передач.

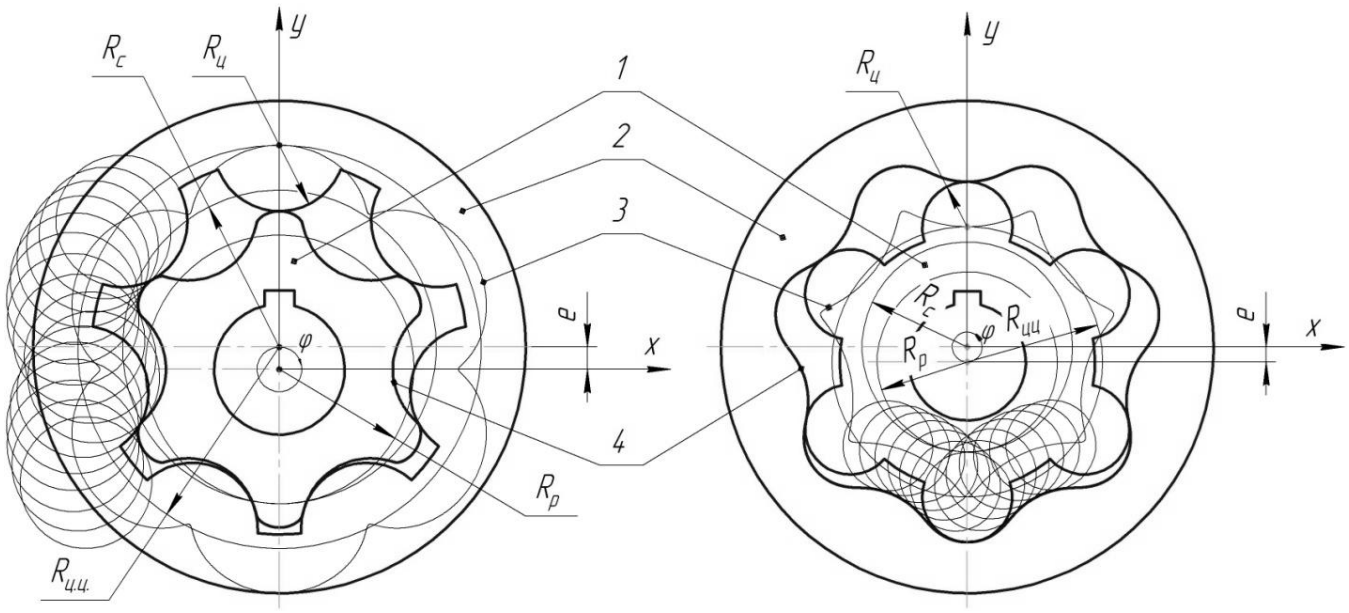
Американський інженер Майрон Хілл описав рух шестерні всередині зубчастого колеса як кочення рухомої центроїди по внутрішній стороні нерухомої центроїди. Точка, яка утворює циклоїдальний профіль, винесена за межі рухомої центроїди шестерні - звідси й назва “позацентроїдне”. Вчений запропонував термін “generated rotor”, що перекладається як “утворюючий ротор”; звідси походить і друга назва передачі - героторна. Наразі відомо кілька конструкцій героторних передач, профіль яких описується циклічними кривими. Їх класифікація наводиться у спеціальній літературі: зокрема, дослідник В. М. Шанніков у праці, присвяченій планетарним передачам із позацентроїдним зачепленням, розподілив їх так:

1. Позацентроїдна епіциклоїдальна цівкова передача внутрішнього зачеплення (ПЕЦПВЗ);

2. Позацентроїдна гіпоциклоїдальна цівкова передача внутрішнього зачеплення (ПГЦПВЗ);

3. Позацентроїдна циклоїдальна передача внутрішнього зачеплення (ПЦПВЗ);

Спільною рисою перших двох типів передач є зубці постійного радіуса - цівки. У ПЕЦПВЗ цівковим є зовнішнє колесо, а у ПГЦПВЗ - внутрішнє. На рис. 1.2 наведено схеми ПЕЦПВЗ (а) та ПГЦПВЗ (б) із позначенням основних конструктивних параметрів. Відповідно до назви, для профілювання тут застосовують позацентроїдні (вкорочені) епі- та гіпоциклоїди, які, на відміну від звичайних, не мають гострих перегинів і самоперетинів. Профіль колеса, що утворює зачеплення з цівками, є еквідистантою до вихідної вкороченої епі- або гіпоциклоїди.



а) б)

Рис. 1.2. Схема позацентроїдного цівкового зачеплення із зазначенням основних параметрів:

а) – позацентроїдне зачеплення, побудоване на вкороченій епіциклоїді; б) – позацентроїдне зачеплення, побудоване на вкороченій гіпоциклоїді

Внутрішнє колесо із числом зубців z_1 (поз. 1, рис. 1.2) умовно називають ротором, оскільки під час роботи він здійснює планетарний рух. Зовнішнє колесо із числом зубців z_2 називають статором (поз. 2); його кількість зубців на одиницю більша, ніж у ротора. Для побудови вкороченої епіциклоїди (поз. 3, рис. 1.2, а) зовнішня центроїда (центроїда статора) радіусом R_C обкочується навколо нерухомої внутрішньої центроїди (центроїди ротора) радіусом R_P, причому центроїда статора жорстко пов’язана з колом центрів цівок статора радіусом $R_{ЦЦ}$; одна точка цього кола і описує епіциклоїду. Для побудови гіпоциклоїди (поз. 3, рис. 1.2, б) зовнішня центроїда нерухома, а внутрішня центроїда R_P обкочується по її внутрішній стороні. Як і у випадку з епіциклоїдою, точка, що породжує гіпоциклоїду, винесена за межі рухомої центроїди і належить колу $R_{ЦЦ}$, жорстко зв’язаному з рухомою центроїдою. В обох випадках центр рухомої центроїди описує коло, радіус якого і є ексцентриситетом передачі *е*. Циклоїдальні криві

можна отримати й іншим способом - коченням малого кола по зовнішній або внутрішній стороні нерухомого кола більшого радіуса, при цьому утворюються відповідно епі- або гіпоциклоїди. Незалежно від способу побудови результатом є абсолютно ідентичні криві.

Для ПЕЦПВЗ і ПГЦПВЗ характерним є співвідношення, яке пов'язує радіуси центроїд із передаточним відношенням передачі:

$$\frac{R_C}{R_P} = \frac{z_2 \cdot e}{z_1 \cdot e} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Рівняння вкороченої епіциклоїди в параметричній формі записують так:

$$x(\varphi) = R_{ЦЦ}\cos(\varphi / z_2) - e \cdot \cos\varphi, \qquad y(\varphi) = R_{ЦЦ}\sin(\varphi / z_2) - e \cdot \sin\varphi$$

Для гіпоциклоїди відповідно:

$$x(\varphi) = R_{ЦЦ}\cos(\varphi / z_1) + e \cdot \cos\varphi, \qquad y(\varphi) = R_{ЦЦ}\sin(\varphi / z_1) - e \cdot \sin\varphi.$$

де φ - кут повороту рухомої центроїди навколо центру нерухомої центроїди.

У ПЕЦПВЗ профіль ротора формується як внутрішня еквідистанта до вихідної епіциклоїди, віддалена на відстань радіуса $R_Ц$ цівки, а в ПГЦПВЗ, навпаки, профіль статора описується зовнішньою еквідистантою. Еквідистанту до циклоїдальної кривої задають рівняннями:

$$\xi(\varphi) = x(\varphi) \mp \frac{R_Ц \cdot y'(\varphi)}{\sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2}}, \qquad \eta(\varphi) = y(\varphi) \pm \frac{R_Ц \cdot x'(\varphi)}{\sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2}}.$$

де $x'(\varphi)$ і $y'(\varphi)$ - перші похідні координат $x(\varphi)$ і $y(\varphi)$.

Зміна знака в цих рівняннях відповідає переходу від внутрішньої до зовнішньої еквідистанти.

Теоретично еквідистанта дотикається до всіх зубців статора одночасно, проте насправді в зачепленні одночасно бере участь лише половина, а іноді й третина пар взаємодіючих зубців.

ПЕЦПВЗ і ПГЦПВЗ є частковими випадками ПЦПВЗ, причому цікаво, що ці передачі можуть існувати одночасно. На рис. 1.3 наведено схему позацентроїдної епіциклоїдальної та гіпоциклоїдальної передачі з проміжними тілами кочення.

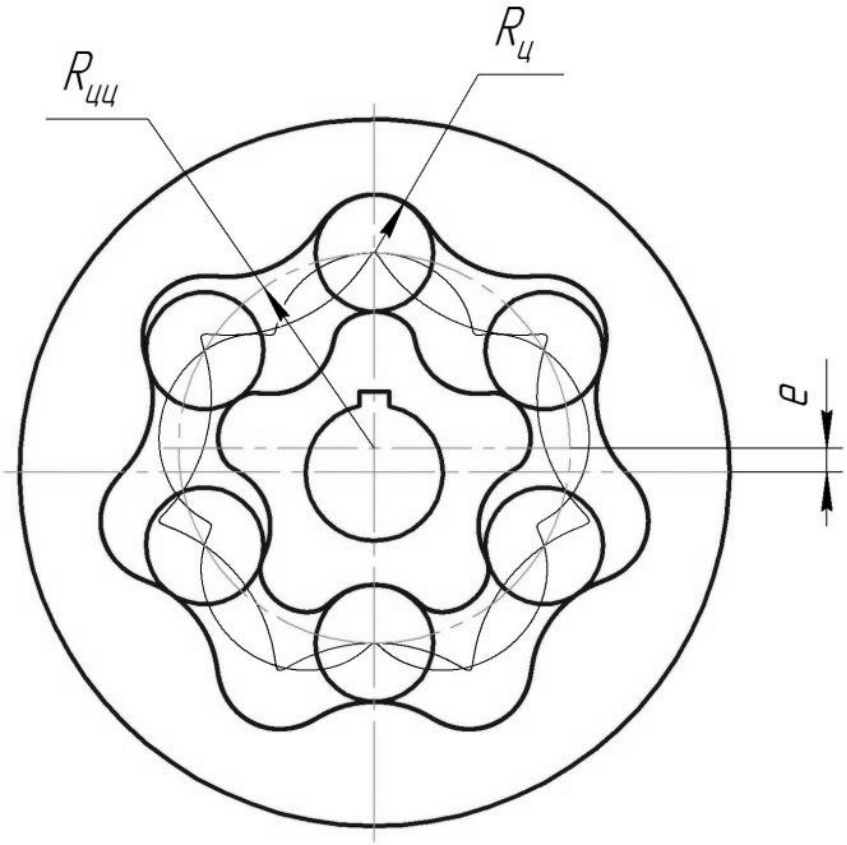
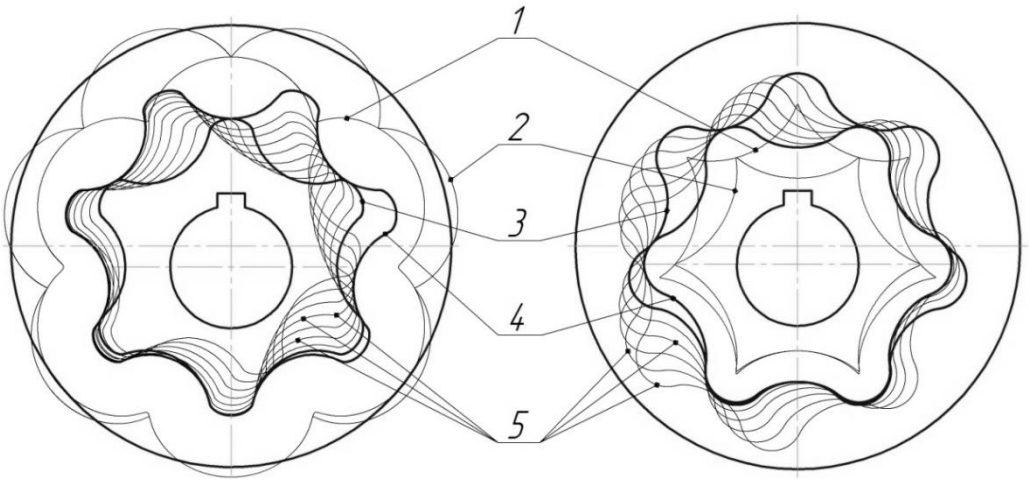


Рис. 1.3. Схема передачі з ПЕЦПВЗ та ПГЦПВЗ

У цьому разі кількість проміжних тіл кочення k на одиницю більша за число зубців ротора z_1 і на одиницю менша за число зубців статора z_2. Еквідистанти зміщені на відстань радіуса ролика $R_Ц$, а коло центрів $R_{ЦЦ}$ проходить через точки перетину епі- та гіпоциклоїди.

Складнішим випадком є позацентроїдна циклоїдальна передача внутрішнього зачеплення (ПЦПВЗ), яка відрізняється від цівкової тим, що вихідним профілем тут є еквідистанта епі- або гіпоциклоїди, а спряжений профіль формується як огинаюча послідовних положень цієї еквідистанти. Огинаюча при цьому не є циклоїдальною кривою - вона складається з ділянок постійної кривизни та ділянок еквідистантного профілю.

Для ПЦПВЗ принципи побудови вихідних вкорочених епі- та гіпоциклоїд, а також закони руху залишаються тими самими, що й для ПЕЦПВЗ і ПГЦПВЗ. На рис. 1.4 показано циклоїдальні передачі на основі епі- (а) та гіпоциклоїди (б).



а) б)

Рис. 1.4. Схема позацентроїдного циклоїдального зачеплення:
а) – ПЦПВЗ на основі вкороченої епіциклоїди; б) – ПЦПВЗ на основі вкороченої гіпоциклоїди

У першому випадку вкорочена епіциклоїда (поз. 1, рис. 1.4, а) здійснює планетарний рух за законами ПЕЦПВЗ, утворюючи огинаючу власних положень (поз. 2). Застосувавши аналогічну схему руху до еквідистанти (поз. 3), отримаємо сукупність її положень (поз. 5) - сімейство кривих, огинаюча яких задає профіль статора (поз. 4). Подібним чином і для вкороченої гіпоциклоїди (рис. 1.4, б), з тією відмінністю, що тут профіль ротора утворюється як огинаюча положень профілю статора.

На рис. 1.5 показано конструкції епі- та гіпо-циклоїдальних передач.

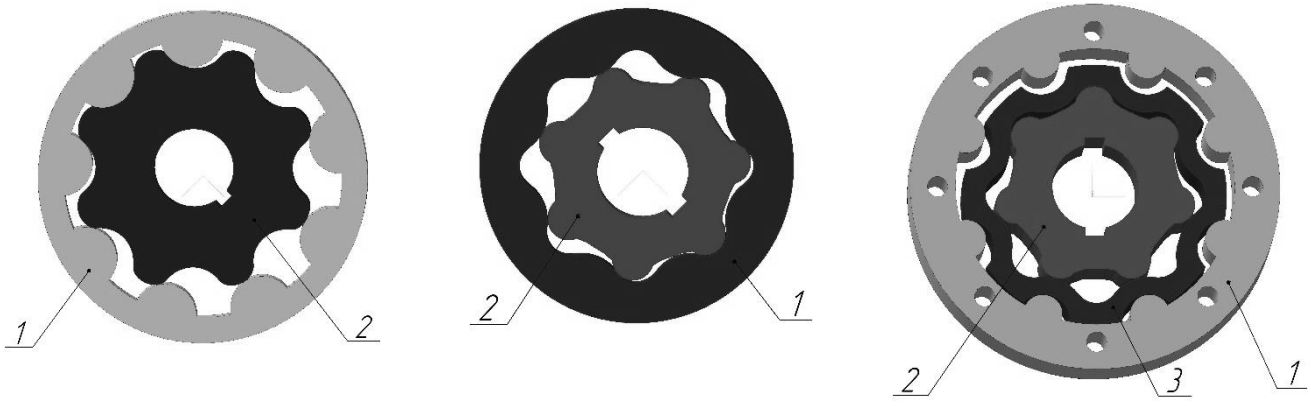


Рис. 1.5. Позацентроїдні циклоїдальні передачі внутрішнього зачеплення:
1 - зовнішнє цівкове або зубчасте колесо; 2 - внутрішнє зубчасте або цівкове колесо (ротор); 3 - корінний статор (центральне зубчасте колесо)

1.2 Переваги та недоліки героторних зачеплень

Героторне зачеплення на основі епіциклоїдальних профілів є універсальним конструктивним рішенням, яке застосовується у вузлах з принципово різним призначенням - від силових гідравлічних насосів і моторів до прецизійних дозувальних пристроїв та високоредукованих механічних передач. Незмінною залишається сама геометрична основа зачеплення - позацентроїдна циклоїдальна пара з різницею зубців, що дорівнює одиниці, проте конкретні вимоги до точності, зносостійкості, герметичності та частоти обертання істотно різняться залежно від призначення вузла. Тому переваги та недоліки героторного зачеплення доцільно розглядати в контексті конкретного типу обладнання, в якому воно застосовується.

У гідравлічних насосах героторна пара виконує функцію витискувального механізму, що періодично змінює об’єм міжзубових камер під час обертання ротора відносно статора. До основних переваг такого виконання належить значна кількість робочих камер, які одночасно беруть участь у процесі всмоктування й нагнітання, завдяки чому пульсація подачі рідини є значно меншою, ніж у шестеренних насосах із зовнішнім зачепленням, що мають лише кілька зубців у зоні контакту. Це забезпечує більш рівномірний потік робочої рідини, знижує вібраційне та шумове навантаження на гідросистему і сприятливо впливає на ресурс ущільнень та трубопроводів. Героторні насоси здатні працювати з рідинами підвищеної в’язкості та з певним вмістом механічних домішок, оскільки контактні навантаження розподілені по довжині профілю, а не зосереджені в одній точці, як у плунжерних або деяких пластинчастих конструкціях. Компактність героторної пари за рахунок суміщення в одному вузлі функцій ротора й статора без додаткових розподільних елементів дозволяє створювати насоси з малими габаритами при достатньо високій подачі.

Водночас героторні насоси мають і суттєві обмеження. Максимальний робочий тиск визначається здатністю профілю зачеплення утримувати лінію контакту без надмірного перетікання рідини між камерами високого та низького тиску, тому за тиску, що перевищує характерні для цього типу насосів значення (як правило, у межах кількох десятків бар для простих конструкцій без додаткового розвантаження торцевих поверхонь), об’ємний коефіцієнт корисної дії помітно знижується. Зі

збільшенням зазорів унаслідок зношування робочого профілю зростають внутрішні перетікання, що призводить до падіння подачі та ККД насоса, особливо за низької частоти обертання, коли частка перетікань відносно номінальної подачі є найбільшою. Героторні насоси, на відміну від шестеренних із зовнішнім зачепленням, складніше виготовляти та ремонтувати через нестандартну форму робочого профілю, що вимагає спеціалізованого оснащення та інструменту. Крім того, такі насоси, як правило, не призначені для тривалої роботи без рідини (“сухого ходу”), оскільки мастильна плівка між зубцями забезпечується самою робочою рідиною.

У гідромоторах героторне зачеплення дозволяє реалізувати характеристику, яка є особливо цінною для низькообертових силових приводів - значний крутний момент за низької частоти обертання, аж до режимів “момент на валу, що не обертається”. Це досягається завдяки великій кількості одночасно навантажених зубців і значному робочому об’єму міжзубових камер при порівняно невеликих габаритах мотора. Героторні гідромотори здатні стабільно й плавно обертатися на дуже малих частотах, що складно забезпечити аксіально-поршневими або шестеренними машинами без додаткових редукторів. Завдяки цьому героторні мотори широко застосовуються в приводах коліс мобільної техніки, у поворотних механізмах, конвеєрах та інших вузлах, де потрібен великий момент за малої швидкості без проміжного редуктора.

Недоліком героторних гідромоторів є залишкова нерівномірність (пульсація) крутного моменту, яка, хоча й менша, ніж у звичайних шестеренних машинах, усе ж проявляється через дискретну зміну числа зубців, що перебувають у зачепленні протягом оберту. Це може спричиняти крутильні коливання приводу, особливо помітні на дуже малих швидкостях обертання. Діапазон робочих частот обертання героторних моторів обмежений зверху - за високих швидкостей зростають інерційні навантаження на профіль зачеплення, посилюється тертя й тепловиділення, що прискорює зношування робочих поверхонь і знижує механічний ККД. Як і у випадку насосів, точність та довговічність героторного мотора істотно залежать від якості виготовлення циклоїдального профілю, тому застосування високоточних методів обробки безпосередньо впливає на термін служби й стабільність вихідних характеристик мотора.

У дозувальних пристроях героторна пара використовується завдяки тому, що об’єм робочих камер є геометрично визначеною й постійною величиною, яка не залежить від тиску в системі так сильно, як, наприклад, у відцентрових насосах. Це дозволяє забезпечити пропорційність між кутом повороту ротора (або кількістю обертів) та об’ємом перекачаної рідини, що є основною вимогою до точного об’ємного дозування - зокрема в гідропідсилювачах керма, паливній апаратурі, системах змащування та хімічного дозування реагентів. Завдяки малій пульсації подачі, властивій героторному зачепленню, забезпечується більш рівномірне й передбачуване дозування порівняно з насосами, що мають невелику кількість робочих камер. Конструктивна компактність героторної пари також дозволяє інтегрувати дозувальний механізм безпосередньо у складі іншого вузла без суттєвого збільшення його габаритів.

Основним недоліком застосування героторного зачеплення в дозаторах є чутливість точності дозування до зміни робочих зазорів між ротором і статором. Із підвищенням температури робочої рідини або зношуванням профілю зазори збільшуються, зростають внутрішні перетікання, і фактичний об’єм, що подається за один оберт, відхиляється від номінального розрахункового значення, що особливо критично за малих частот обертання та малих витрат, коли частка перетікань відносно корисної подачі є значною. В’язкість робочої рідини, що залежить від температури, також впливає на величину перетікань, а отже, і на стабільність дозування в умовах змінних температурних режимів. Дозатори на основі героторного зачеплення, як правило, непридатні для перекачування абразивних або кристалізуючих рідин, оскільки малі робочі зазори, необхідні для точного дозування, швидко втрачають свої властивості при потраплянні твердих частинок або осадженні кристалів на робочих поверхнях.

В механічних приводах героторне (циклоїдальне) зачеплення лежить в основі окремого класу планетарних редукторів, які забезпечують одне з найбільших передаточних відношень серед усіх типів зубчастих передач в межах одного ступеня. Це досягається завдяки тому, що різниця зубців ротора й статора дорівнює одиниці, а передаточне відношення прямо пропорційне числу зубців статора, тому навіть при порівняно невеликих габаритах редуктора можна отримати передаточні відношення в

межах кількох десятків і навіть сотень одиниць в одному ступені. Важливою перевагою таких редукторів є одночасний контакт значної частини зубців (теоретично - до половини їх загальної кількості), що рівномірно розподіляє навантаження й забезпечує високу навантажувальну здатність, стійкість до ударних і пікових навантажень та підвищену крутильну жорсткість передачі порівняно зі звичайними евольвентними передачами тих самих габаритів. Завдяки малому кутовому люфту циклоїдальні редуктори широко застосовуються в приводах промислових роботів, поворотних столів верстатів, слідкувальних та позиціонувальних систем, де потрібна висока точність відпрацювання кута повороту.

До недоліків циклоїдальних редукторів належить висока складність і вартість виготовлення робочих профілів ротора та статора, які потребують спеціалізованого технологічного оснащення та високої кваліфікації виробництва, що детально розглянуто в попередньому розділі. Наявність ексцентрикового механізму та додаткових проміжних елементів (роликів, цівок або підшипників кочення) ускладнює кінематичну схему редуктора порівняно зі звичайною одноступеневою евольвентною передачею й вимагає більш ретельного підбору матеріалів, термообробки та системи змащування. Через одночасну роботу кількох пар тертя (зачеплення, ексцентрикові підшипники, опорні підшипники вихідного вала) механічний ККД циклоїдального редуктора, особливо за великих передаточних відношень, може бути дещо нижчим, ніж у редукторів з паралельними валами та евольвентними колесами. Крім того, зі зростанням передаточного відношення в межах одного ступеня зростають і вимоги до точності виготовлення ексцентриситету та циклоїдального профілю, оскільки похибки виготовлення безпосередньо переходять у кутову похибку (люфт) на вихідному валу редуктора.

Незалежно від конкретного типу вузла, до спільних переваг героторного зачеплення на основі епіциклоїдальних профілів можна віднести: компактність конструкції за рахунок суміщення функцій кількох зубців в одній парі ротор–статор; високу плавність та рівномірність робочого процесу завдяки великій кількості одночасно задіяних робочих камер чи зубців; здатність забезпечувати значні передаточні відношення або великий крутний момент за малих швидкостей в одному ступені без додаткових механізмів; підвищену стійкість до ударних і змінних

навантажень завдяки розподілу зусилля між кількома парами контакту одночасно; порівняно низький рівень шуму та вібрації під час роботи.

До спільних для всіх розглянутих застосувань недоліків героторного зачеплення належать: висока складність і вартість виготовлення робочого циклоїдального профілю, що потребує спеціалізованого верстатного обладнання та інструменту; підвищена чутливість експлуатаційних характеристик (подачі, моменту, точності дозування) до величини робочих зазорів, яка, у свою чергу, залежить від точності виготовлення та інтенсивності зношування профілю в процесі роботи; обмежений діапазон робочих швидкостей та тисків порівняно з деякими іншими типами насосів, моторів і передач; необхідність застосування якісного змащування або робочої рідини відповідної якості, оскільки саме вона часто забезпечує мастильну плівку в зоні контакту профілів.

Слід також зазначити, що вибір матеріалів і виду термообробки робочих поверхонь ротора й статора істотно впливає на прояв перелічених недоліків у конкретному вузлі. Застосування зносостійких покриттів, гартування робочого профілю або використання твердосплавних вставок дозволяє суттєво продовжити термін стабільної роботи героторної пари в умовах підвищених навантажень чи абразивного середовища, проте додатково підвищує собівартість виготовлення деталі. Аналогічно якість мастильного матеріалу або робочої рідини, що одночасно виконує функцію змащення зони контакту, безпосередньо визначає інтенсивність зношування профілю та, відповідно, темп деградації експлуатаційних характеристик насоса, мотора, дозатора чи редуктора протягом терміну служби.

Отже, вибір героторного зачеплення на основі епіциклоїдальних профілів для конкретного вузла - насоса, мотора, дозатора чи редуктора - завжди є компромісом між компактністю, рівномірністю робочого процесу та навантажувальною здатністю з одного боку, і складністю виготовлення, вартістю та чутливістю до зношування з іншого. Саме тому підвищення точності та зносостійкості робочого профілю шляхом удосконалення методів його виготовлення, розглянутих у попередньому розділі, є одним із ключових напрямів, що дозволяють розширити сферу ефективного застосування героторних передач і знизити вплив притаманних їм недоліків на експлуатаційні характеристики вузлів гідроприводу та механічних передач.

1.3 Основні способи виготовлення робочих профілів деталей героторних зачеплень

Точність робочого профілю безпосередньо визначає ККД та ресурс героторного вузла, тому до неї висуваються підвищені вимоги - як правило, на рівні 6–7 квалітету. Водночас найпоширеніший спосіб виготовлення таких деталей - порошкова металургія - забезпечує точність лише в межах 8–9 класу, через що ККД пари знижується, а робочий профіль зношується швидше, ніж очікувалося. Крім того, цей метод стає невигідним економічно, якщо партія деталей невелика. Подолати зазначені обмеження можна, доповнивши формування профілю порошковою металургією наступною абразивною обробкою на спеціалізованому устаткуванні.

Серед лезових методів формоутворення внутрішнього профілю статора одним із найдавніших є зубодовбання довбачем Феллоу за схемою обкату (рис. 1.6). Обробку виконують за класичною кінематичною схемою зубодовбання: оброблюваний статор 1 та інструмент 2, перебуваючи у зачепленні, узгоджено виконують колові подачі $S^{к}_{дет.}$, $S^{к}_{інст.}$ а довбач додатково рухається зворотно-поступально у вертикальній площині. $V_{З.П.}$ Сам довбач Феллоу - багатозубий інструмент, профіль якого утворюється як огинаюча послідовних положень профілю статора в процесі обкату їхніх центроїд одна навколо одної. Число зубців довбача завжди перевищує одиницю; конкретну їх кількість підбирають так, щоб гарантувати потрібні зазори між робочими зубцями статора і тими зубцями довбача, які в певний момент не задіяні в різанні. На передній і задній поверхнях зубців довбача виконують заточні кути, необхідні безпосередньо для процесу різання. Профіль формують поступово, за кілька повних обкатів, заглиблюючи довбач на величину $S_{рад.}$ радіальної подачі, що в результаті дає точність 11–13 квалітету за шорсткості 6,3…2,5 мкм.

Складність реалізації цього методу криється не в самій обробці деталі, а у виготовленні інструмента: ріжучий профіль довбача Феллоу має бути виконаний з високою точністю, що саме по собі є непростим завданням. Додатково під час різання ріжуча кромка послідовно переходить від випуклої ділянки профілю до увігнутої, і

цей перехід супроводжується знакозмінними навантаженнями, які додатково обмежують точність, що реально досягається в процесі обробки.

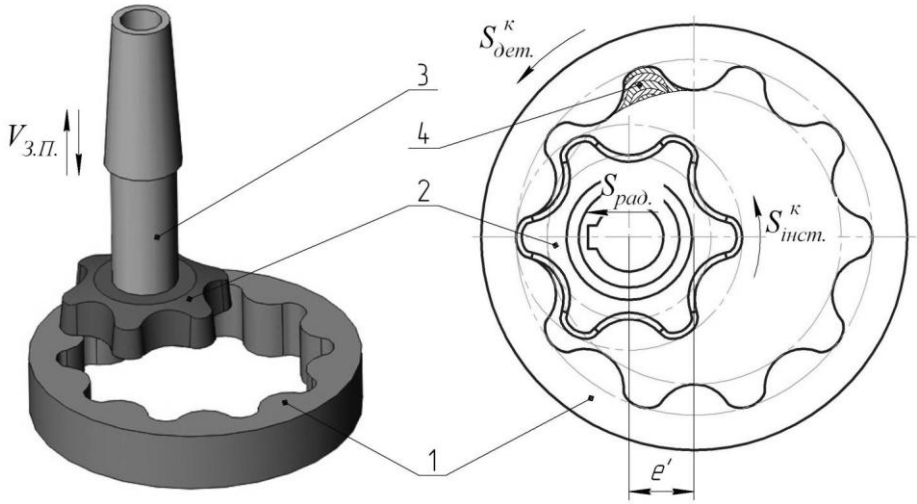


Рис. 1.6. Формоутворення профілю статора довбачем Феллоу за схемою обкату:

1 – оброблювана деталь (статор); 2 – ріжуча частина інструменту; 3 – корпус інструменту; 4 – зрізаємий припуск; e' - ексцентриситет верстатного зачеплення; $V_{З.П.}$ – швидкість зворотно – поступального руху інструменту у вертикальній площині; $S^{к}_{дет.}$ – рух колової подачі деталі; $S^{к}_{інст.}$ – рух колової подачі інструменту; $S_{рад.}$ – рух подачі в радіальному напрямку

Внутрішній профіль, утворений огинаючою сімейства еквідистант вкорочених епіциклоїд, можна отримати й іншим способом - обкатом однозубого довбача [Пат. України 55734А] (рис. 1.7). У цьому варіанті центроїда статора, жорстко пов’язана із заготовкою, обкочується навколо нерухомої центроїди ротора, з якою пов’язаний інструмент; рух обкату заготовці надає або планетарне пристосування зубодовбального верстата, або планетарний стіл зі змінним ексцентриситетом [Пат. України 46348А]. Роль нерухомої центроїди умовного ротора при цьому виконує однозубий інструмент [Пат. України 46410А], завдяки чому утворюється верстатне зачеплення.

Робочою частиною такого інструмента є пластина 2, механічно закріплена в гнізді корпусу 3 (рис. 1.7). На відміну від довбача Феллоу, її геометрія обмежується

лише випуклою ділянкою еквідистанти вкороченої епіциклоїди - увігнутих ділянок тут немає; замість них пластина має прямі ділянки, орієнтовані за дотичними у точках K_1, K_2, де профіль переходить із випуклого в увігнутий. Деталь 1 здійснює складний планетарний рух: одночасно переміщується по коловій траєкторії V_1 та обертається навколо миттєвого центра, V_2 причому радіус кола обкату дорівнює ексцентриситету передачі *e*. Саме узгодженість цих двох рухів і формує остаточний внутрішній профіль деталі.

Завдяки тому що профіль пластини має кривизну сталого знака, у процесі різання не виникають знакозмінні навантаження, властиві довбачу Феллоу. Кількість можливих переточувань конструктивно не обмежена, а сам інструмент може оснащуватися твердосплавними пластинами з кількома ріжучими кромками - це помітно знижує витрати на інструмент за частої зміни типорозмірів деталей. Точність такого методу сягає 11–12 квалітету за шорсткості Ra 2,0…2,6, чого достатньо для чистової обробки деталей твердістю 28…35 HRC. Гнучкості процесу можна додати, якщо застосувати верстат із планетарним столом зі змінним ексцентриситетом: це дозволяє обробляти широкий спектр циклоїдальних статорів, а за потреби - і профілі роторів, тобто фактично поєднати в одному обладнанні дві технології, які на перший погляд мало пов’язані між собою.

Продуктивність цього способу залишається невисокою: щоб повністю обробити профіль, деталь має пройти стільки обкатів, скільки зубців має статор. Окрім того, на точність впливає похибка самого планетарного пристосування, яке забезпечує обкат. З огляду на помірні показники точності й шорсткості, цей метод доцільніше використовувати як напівчистовий, передбачаючи подальшу термообробку та остаточне фінішне оброблення.

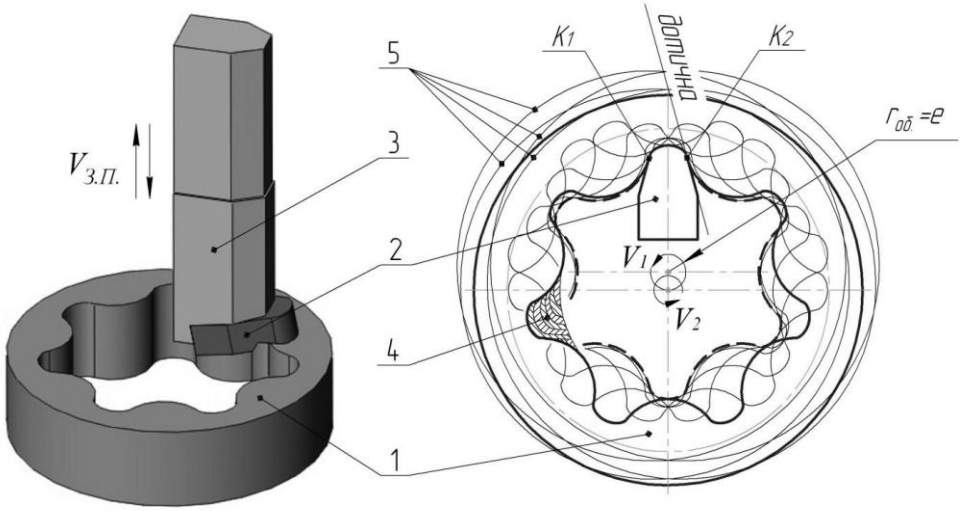


Рис. 1.7. Формоутворення профілю статора однозубим довбачем за схемою обкату:

1 – оброблювана деталь (статор); 2 – ріжуча частина інструменту; 3 – корпус інструменту; 4 – зрізаємий припуск; 5 – положення статора під час обробки в різні моменти часу; $r_{об.}$ – радіус кола обкату, який дорівнює ексцентриситету передачі *e*; $V_{З.П.}$ – швидкість зворотно – поступального руху інструменту у вертикальній площині; V_1 - швидкість переміщення центру статора по колу обкату; V_2 – швидкість обертання статора навколо миттєвого центру обертання; K_1, K_2 – кінцеві точки профілю інструмента

Ще один спосіб формування внутрішніх зубчастих і шліцьових вінців - протягування (рис. 1.8), яке виконують на універсальних протяжних верстатах набором профільних протяжок. Цей метод вирізняється високою продуктивністю та практично не потребує втручання оператора в процес. Щоб зняти якомога менший припуск, заготовку перед протягуванням зазвичай виконують із попередньо сформованим профілем або прорізаними пазами, з яких надалі формується міжзубова западина; при цьому висота протягуваного статора обмежена діаметром протяжки.

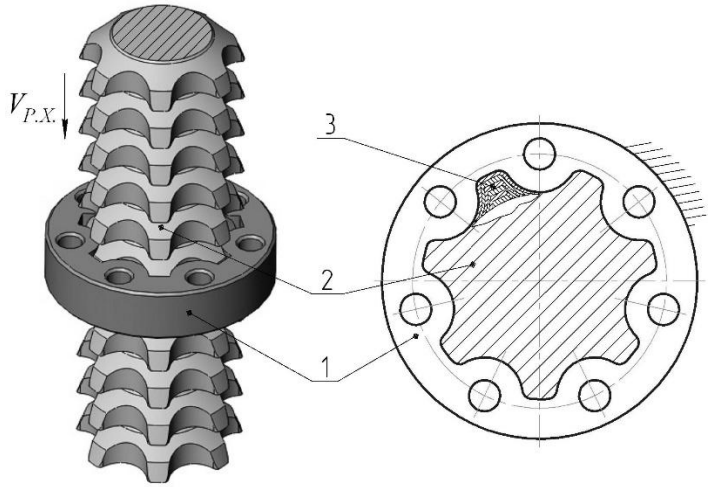


Рис. 1.8. Формоутворення профілю статора ПЕПВЗ протягуванням:

1 – оброблювана деталь (статор); 2 – інструмент (протяжка); 3 – зрізаємий припуск; $V_{P.X.}$ – швидкість робочого ходу протяжки

Натомість сама протяжка повинна мати високоточний профіль, через що її виготовлення і подальше переточування виявляються трудомісткими та витратними операціями. Тому протягування економічно обґрунтоване лише за багатосерійного й масового випуску деталей. Кожне переточування дещо змінює відтворюваність профілю, а отже ресурс інструмента за кількістю переточувань обмежений. Зазвичай такі протяжки виготовляють цілісними зі швидкорізальної сталі, оскільки оснащення їх твердосплавними елементами вимагає виготовлення цілого набору фасонних кільцевих зубців, що ускладнює виробництво.

За такої схеми обробки досягається 7–9 квалітет точності та 5–8 клас шорсткості.

Підсумовуючи, можна сказати, що лезові методи обробки, кожен по-своєму, дозволяють отримати деталь із потрібними точністю, якістю поверхні та продуктивністю - конкретний вибір методу залежить від обсягу виробництва.

Поряд із лезовою обробкою застосовують і абразивні методи. Один із них - шліфування робочого профілю статора циліндричним кругом на координатно-шліфувальних верстатах (рис. 1.9), за якого кожну цівку колеса (поз. 2) обробляють окремо. Деталь закріплюють у спеціальному пристосуванні на поворотному столі, причому критично важливою умовою є співвісність осі обертання стола з оброблюваною цівкою. Коли планшайба обертається, профіль цівки огинає

шліфувальний інструмент зі швидкістю подачі s, яку забезпечує оператор, вручну обертаючи маховичок стола. Для переходу до наступної цівки деталь перебазовують на черговий технологічний отвір, передбачений у центрі кожної цівки. Сам шліфувальний круг (поз. 1) обертається з частотою $n_к$ і одночасно виконує зворотно-поступальний рух ПХ.

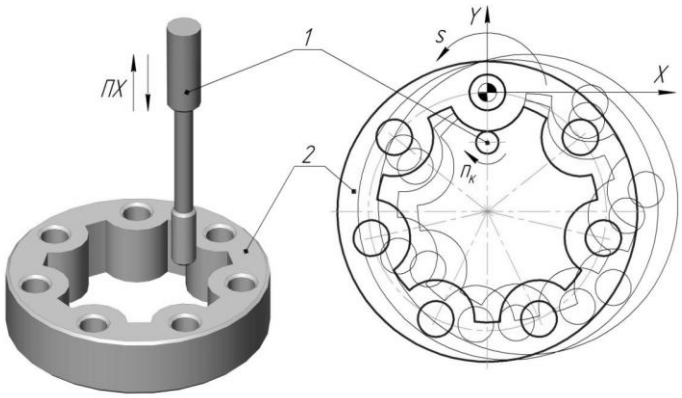


Рис. 1.9 Шліфування зубців цівкового колеса циліндричним кругом за одиничного ділення

Через високу трудомісткість і вимоги до кваліфікації оператора цей метод виправдовує себе хіба що для пробних партій деталей, відпрацювання конструкції вузла або одиничного виробництва.

Головна вада такої схеми обробки - необхідність кількаразового перебазування деталі, через що неминуче накопичується похибка базування; додатково на точність впливає зазор у з'єднанні технологічного отвору з базовим пальцем, який зростає з кожним наступним перебазуванням. Розмір самого шліфувального круга обмежений міжцівковими западинами, тому круг виходить недостатньо жорстким: під час обробки він може відхилятися, утворюючи конусність профілю та обмежуючи допустиму висоту деталі. До того ж метод придатний лише для зубців постійного радіуса - якщо профіль окреслений огинаючими сімейств еквідистант епі- чи гіпоциклоїд, цю схему застосувати неможливо.

Підвищити точність обробки циліндричним кругом можна, перейшовши на контурно-шліфувальні верстати з ЧПК (рис. 1.10).

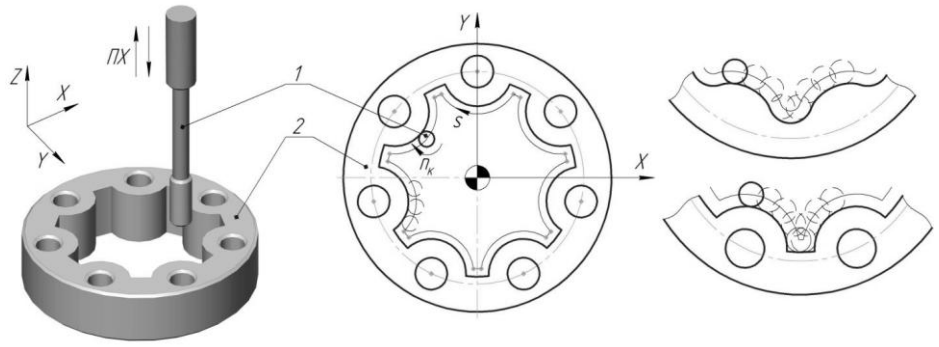


Рис. 1.10 Шліфування зубців цівкового колеса циліндричним кругом на контурно-шліфувальному верстаті з ЧПК

У такій схемі круг (поз. 1, рис. 1.10) рухається не вручну, а за траєкторією, яку задає керуюча програма, - це одразу й підвищує точність, і знижує трудомісткість порівняно зі схемою на рис. 1.8. Власне обертання круга з частотою $n_к$ поєднується із зворотно-поступальними рухами ПХ у вертикальній площині, причому залежно від кінематики верстата запрограмований рух можуть виконувати як інструмент, так і стіл із закріпленою на ньому деталлю.

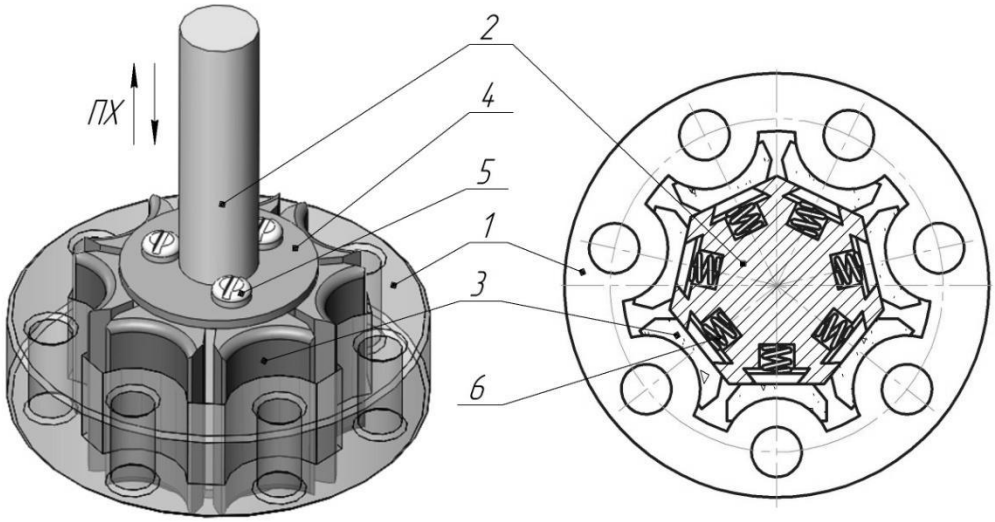
Перевага програмного керування траєкторією в тому, що форма міжцівкової западини більше не обмежує технологічні можливості: можна обробляти практично будь-які статори ПЦПВЗ, крім хіба що випадків, коли кривизна профілю не дозволяє побудувати траєкторію без “вироджених” ділянок із самоперетином.

Лишаються, однак, і обмеження: жорсткість інструмента - така сама проблема, як і раніше, а додатково на точність впливає дискретність переміщень стола з закріпленою деталлю - кожен дискретний крок вносить власну похибку.

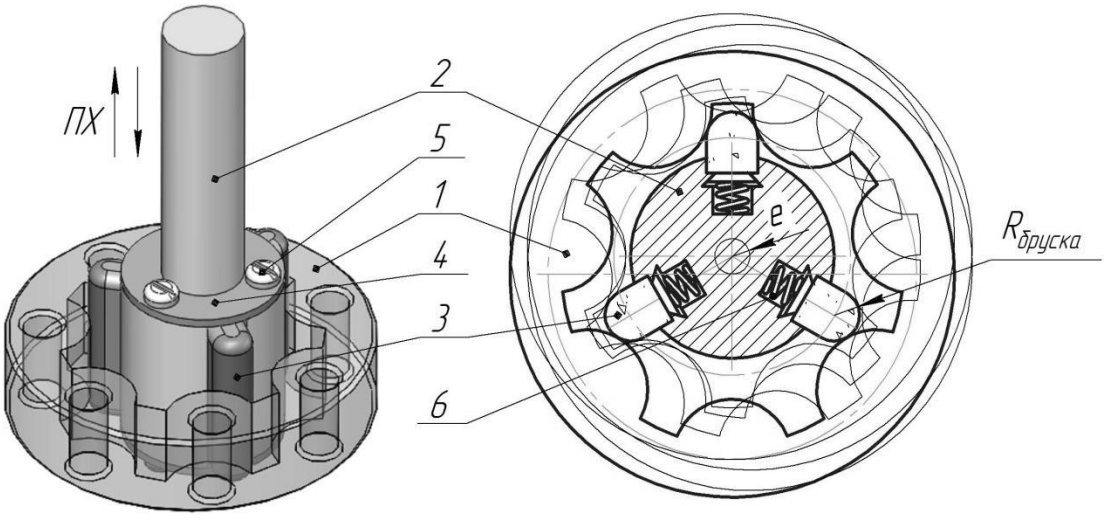
Окрім шліфування, для абразивної обробки робочого профілю статора застосовують хонінгування - методом копіювання або методом обкату (рис. 1.11, а, б). Призначення цієї операції - поліпшити мікрогеометрію вже загартованого профілю: усунути забоїни, задирки й слід окалини, а також скомпенсувати невеликі похибки, що виникли під час термообробки.

Порівняно з раніше розглянутими схемами хонінгування вирізняється вищою продуктивністю, хоча й потребує спеціальних хонів з абразивними брусками на керамічній зв’язці або з покриттям КНБ. У варіанті копіювання (рис. 1.11, а) профіль кожного бруска повторює профіль цівки, яку він обробляє; можна обійтися й одним

бруском, але тоді цівки доводиться обробляти послідовно, надаючи деталі рух ділення. Сама хонінгувальна головка складається з корпусу (поз. 2) із пазами типу “ластівчин хвіст”, куди вставляють абразивні бруски (поз. 3) із металевою серцевиною; через наявний у кріпленні зазор положення брусків може дещо коливатися. Постійний притиск брусків до оброблюваного колеса (поз. 1) забезпечують пружини (поз. 6), тоді як фіксацію у вертикальному напрямку - фланці (поз. 4) разом із гвинтами (поз. 5).



а)



б)

Рис. 1.11. Хонінгування статора двома методами

а) – метод копіювання; б)– метод обкату

У варіанті хонінгування методом обкату (рис. 1.11, б) конструкція хона залишається практично тією самою, проте профіль бруска тепер описує коло, спряжене одночасно з двома сусідніми цівками в точках їхнього контакту з ротором. Подібну конструкцію хона разом із планетарним механізмом на базі героторної передачі описано в патенті [US4346534].

Обом варіантам притаманний спільний недолік - складна конструкція хонінгувальної головки та обмежена гнучкість технології, оскільки профіль інструмента виготовляють під конкретну деталь і перенести його на іншу не можна.

Окремо варто згадати метод абразивної обробки, який пропонує німецька фірма KAPP, - шліфування профільним кругом (рис. 1.12). На сайті KAPP-NILES [10], у розділі “Ваша деталь - наше системне рішення”, компанія представляє профілешліфувальні верстати та інструмент саме для обробки статорів із радіусними зубцями.

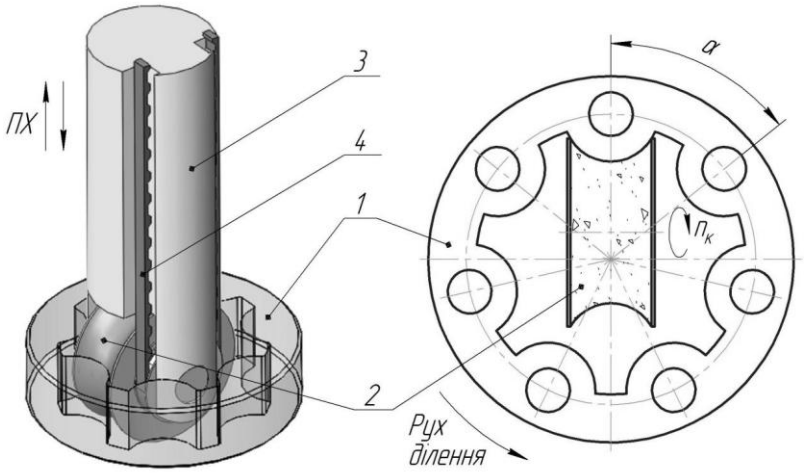


Рис. 1.12 Шліфування статора профільним кругом методом копіювання з дискретним діленням

Шліфування виконують дисками CBN (поз. 2, рис. 1.12), закріпленими в оправці (поз. 3); привод обертання передається через зубчасто-пасову передачу (поз. 4), а сама деталь (поз. 1) виконує дискретний рух ділення, повертаючись на кут α перед обробкою кожної наступної цівки. Типовий приклад такого устаткування - верстат VIG 41 фірми KAPP для шліфування внутрішніх зубів, який є вдосконаленою версією моделі VIG 332 й оснащений системою керування 840D від Siemens; він дозволяє

повністю шліфувати внутрішній зубчастий профіль дисками CBN, що не потребують правки. Орієнтовна вартість такого верстата сягає близько 1 050 000 €, а самі диски CBN - це прецизійний загартований сталевий диск із нанесеним гальванічним способом одношаровим покриттям із кубічного нітриду бору, завдяки чому пристосування для правки взагалі не потрібні. Вартість одного диска для попереднього шліфування становить приблизно 651 €, а диска для доведення - близько 873 €.

Недоліки розглянутих абразивних методів у сукупності вказують на доцільність розроблення нової, гнучкішої схеми обробки, яка б поєднувала потрібну точність і якість профілю з простим та достатньо жорстким інструментом без істотного зростання собівартості деталі.

Принципово відмінним від розглянутих лезових та абразивних способів є виготовлення робочого профілю героторної пари методом порошкової металургії. У цьому випадку профіль не вирізають із суцільної заготовки, а одразу формують із металевого порошку шляхом його пресування у прес-формі з подальшим спіканням за температури, нижчої за точку плавлення основного металу.

Технологічний ланцюжок включає підготовку шихти потрібного гранулометричного складу, її дозування та пресування у прес-формі, робоча поверхня якої повторює форму майбутньої деталі; далі спресована заготовка проходить спікання у печі, набуваючи остаточної міцності, а за потреби - додаткове калібрування чи незначну механічну доробку.

Головна перевага такого підходу для героторних пар полягає в тому, що за один технологічний цикл можна отримати деталь складної форми з внутрішнім циклоїдальним профілем, не вирізаючи кожен зуб механічно, а також істотно знизити витрати металу, оскільки практично весь обсяг шихти переходить у готовий виріб. Це особливо вигідно за масового або багатосерійного випуску однотипних статорів і роторів, коли вартість прес-форми розподіляється на велику партію деталей.

Водночас профіль, отриманий пресуванням і спіканням, відповідає лише 8–9 класу точності, а залишкова пористість спеченого матеріалу (зазвичай у межах кількох відсотків) знижує контактну міцність робочих поверхонь і прискорює їх зношування під навантаженням. Тому деталі героторних пар, виготовлені порошковою

металургією, здебільшого потребують додаткової фінішної обробки - насамперед абразивної, - щоб довести точність профілю до робочого 6–7 квалітету.

Для героторних деталей шихту найчастіше формують на основі залізного порошку з легувальними добавками (мідь, нікель, графіт), що після спікання та просочення мастилом дозволяє отримати самозмащувальну структуру матеріалу - властивість, корисну саме для пари тертя “ротор–статор”. Склад шихти, тиск пресування та режим спікання визначають кінцеву густину матеріалу, а відповідно й комплекс його механічних властивостей.

Економічно порошкова металургія себе виправдовує лише за достатньо великих обсягів випуску, оскільки виготовлення самої прес-форми - дороге і тривале за часом завдання. За дрібносерійного чи одиничного виробництва витрати на оснащення не встигають окупитися, тому в таких випадках перевагу віддають лезовій або абразивній обробці з розглянутих вище методів.

Аналіз показує, що жоден із розглянутих методів не поєднує одночасно високу точність, високу продуктивність і низьку собівартість деталі. Лезові методи - зубодовбання довбачами Феллоу чи однозубим інструментом, а також протягування - добре підходять для серійного й багатосерійного виробництва, проте обмежені точністю.

Абразивні методи здатні забезпечити суттєво вищу точність і якість поверхні, однак це досягається за рахунок зниження продуктивності та підвищення вимог до оснащення - особливо у випадку контурно-шліфувальних верстатів з ЧПК чи профільних кругів CBN фірми КАРР, вартість яких істотно перевищує вартість традиційного лезового інструменту. Хонінгування при цьому варто розглядати не як самостійний спосіб формоутворення профілю, а як фінішну операцію, що усуває похибки попередньої термообробки.

Порошкова металургія найкраще підходить для масового випуску завдяки високій продуктивності й мінімальним втратам металу, проте отриманий нею профіль практично завжди потребує додаткової абразивної доробки для досягнення робочої точності 6–7 квалітету.

Таким чином, для більшості сучасних героторних передач раціональною є комбінована технологія: чорнове формоутворення профілю порошковою металургією

або одним із лезових методів із подальшим фінішним абразивним обробленням (шліфуванням чи хонінгуванням). Саме таке поєднання дозволяє узгодити прийнятну продуктивність із точністю та довговічністю робочого профілю, потрібними для ефективної роботи героторного зачеплення.

1.4 Постановка задач дослідження

З проведеного вище аналізу маємо беззаперечні переваги героторних зачеплень на основі епіциклоїдальних профілів перед іншими видами зачеплень. Інтерес представляє саме одна із переваг яка дає можливість передавати збільшений об’єм робочої рідини за один оберт. Перспективним напрямком є створення нових зачеплень, які дають можливість збільшити робочий об’єм героторної передачі за один оберт. З цією метою в роботі буде розглянуто метод профілювання робочого профілю передачі за допомогою еліптичного профілю замість колового, що ймовірно забезпечить збільшення робочого обєму передачі.

Для досягнення поставленої мети необхідно:

– виконати синтез героторного зачеплення на основі епіциклоїдального профілю, як основного аналога героторного зачеплення на основі еліптичного профілю;

– виконати синтез героторного зачеплення на основі еліптичного профілю;

– виконати попереднє порівняння переваг та недоліків героторних зачеплень на основі епіциклоїдальних та еліптичних профілів;

– намітити методи виготовлення робочих поверхонь деталей героторних передач на основі еліптичних профілів;

– виконати необхідні економічні розрахунки.

Слід також зауважити, що переваги героторних зачеплень мають місце саме при точному технологічному відтворенню робочих профілів, тому, безумовно, перспективним напрямком є також розробка нових способів виготовлення робочих профілів передач.

РОЗДІЛ 2. СИНТЕЗ ГЕРОТОРНОГО ЗАЧЕПЛЕННЯ НА ОСНОВІ ЕПІЦИКЛОЇДАЛЬНОГО ПРОФІЛЮ, ЯК ОСНОВНОГО АНАЛОГА ЗАЧЕПЛЕННЯ НА ОСНОВІ ЕЛІПТИЧНОГО ПРОФІЛЮ

2.1. Основні конструктивні параметри передачі

Вихідними даними синтезу є кількість зубців ротора zr та ексцентриситет e. Кількість зубців статора визначається умовою zs = zr + 1. Радіус нерухомого кола обчислюється за формулою Rr = e·zr. Рухома ланка є колом з радіусом Rs = e·zs. З рухомим колом жорстко пов’язане коло Rf = Rs + 2·e. Точка Mf, що формує робочий профіль, належить саме колу Rf. Перелік основних конструктивних параметрів зведено в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Основні конструктивні параметри

Параметр	**Позначення**	**Спосіб визначення**
Кількість зубців ротора	zr	вхідний параметр, ціле число, $zr \geq 3$
Кількість зубців статора	zs	$zs = zr + 1$
Ексцентриситет, мм	e	вхідний параметр
Радіус нерухомого кола, мм	Rr	$Rr = e \cdot zr$
Радіус рухомого кола, мм	Rs	$Rs = e \cdot zs$
Радіус утворюючого кола, мм	Rf	$Rf = Rs + 2 \cdot e$
Радіус генерувального кола, мм	r_i	має бути $r_i < \rho min$

2.2. Синтез героторного зачеплення на основі епіциклоїдального профілю

Синтез робочого профілю героторної пари полягає у визначенні таких геометричних параметрів зачеплення - ексцентриситету, кількості зубців ротора й статора, радіуса генерувального кола, - які забезпечують безперервний спряжений контакт робочих поверхонь протягом усього циклу обертання. Найпоширенішим геометричним базисом такого синтезу є циклоїдальні криві - епіциклоїди, що утворюються коченням одного кола по іншому без ковзання. У цьому розділі розглянуто повний цикл синтезу героторного зачеплення на основі епіциклоїдального профілю: від кінематичної схеми утворення базової кривої до побудови огинаючої, яка формує реальний робочий профіль деталі.

В основі синтезу лежить класична схема кочення двох спряжених кіл без ковзання. Нерухоме коло радіусом Rr задає базову систему відліку, а рухоме коло радіусом Rs котиться по його зовнішній поверхні, дотикаючись до неї своєю внутрішньою поверхнею - тобто нерухоме коло Rr увесь час перебуває всередині рухомого кола Rs, торкаючись його внутрішньої стінки в єдиній точці контакту (рис. 2.1).

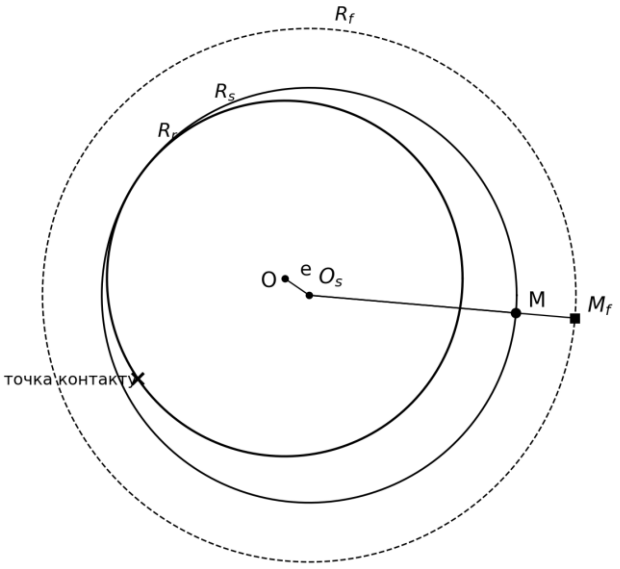


Рис. 2.1. Кінематична схема утворення епіциклоїдального профілю: O - центр нерухомого кола Rr; Os - центр рухомого кола Rs; e - ексцентриситет передачі; M - точка на колі Rs; Mf - точка на жорстко пов’язаному з ним колі Rf

Оскільки рухоме коло *Rs* охоплює нерухоме коло *Rr*, відстань між їхніми центрами *O* і *Os* дорівнює різниці радіусів:

$$D = Rs - Rr = e\cdot(zs - zr) = e \qquad (2.1)$$

Оскільки за умовою синтезу zs = zr + 1, ця різниця тотожно дорівнює ексцентриситету e: центр рухомого кола Os описує навколо нерухомого центра O коло радіусом саме e. У цьому й полягає фізичний зміст ексцентриситету героторної передачі - це не довільний конструктивний параметр, а безпосередній наслідок різниці кількості зубців ротора та статора, що дорівнює одиниці.

За умовою задачі центр Os рухається по годинниковій стрілці. Параметризуючи орбітальний кут повороту лінії O–Os як t, положення центра рухомого кола описується рівнянням:

$$Os(t) = (e\cdot\cos t, -e\cdot\sin t) \qquad (2.2)$$

З умови кочення без ковзання випливає, що при контакті в точці дотику відсутня відносна швидкість ковзання: матеріальна точка кола Rs, яка в даний момент перебуває в контакті з нерухомим колом Rr, має нульову абсолютну швидкість. Розв’язавши це рівняння відносно кутової швидкості власного обертання тіла Rs, одержуємо, що кут власного повороту β пов’язаний з орбітальним кутом t співвідношенням:

$$\beta(t) = -\,t / zs \qquad (2.3)$$

Тобто рухоме коло Rs здійснює один повний оберт навколо власної осі за zs орбітальних обертів центра Os навколо нерухомого центра O. Саме ця властивість - повільне власне обертання тіла за швидкого орбітального руху ексцентрика - є визначальною для героторних передач і циклоїдальних редукторів із малою різницею чисел зубців: вона забезпечує значне передаточне відношення в межах одного ступеня.

З колом Rs жорстко пов’язана точка M, що лежить на його ободі (на відстані Rs від центра Os), а також жорстко пов’язане концентричне коло Rf, на ободі якого лежить точка Mf. Оскільки обидві точки належать одному й тому самому твердому тілу, що обертається з кутом β(t), їхні траєкторії описуються тими самими тригонометричними функціями, відмінними лише амплітудою другого доданка:

$$xM(t) = e\cdot\cos t + Rs\cdot\cos(t/zs),$$

$$yM(t) = -e \cdot \sin t - Rs \cdot \sin(t/zs) \quad (2.4)$$

Аналогічно для точки Mf, яка лежить на колі Rf:

$$xMf(t) = e \cdot \cos t + Rf \cdot \cos(t/zs),$$

$$yMf(t) = -e \cdot \sin t - Rf \cdot \sin(t/zs) \quad (2.5)$$

Перший доданок цих рівнянь (з амплітудою e та незалежним аргументом t) відповідає орбітальному руху центра Os, а другий доданок (з амплітудою Rs або Rf та аргументом t/zs) - власному обертанню тіла. Через те що аргументи цих двох доданків мають різні періоди - 2π для першого і 2π·zs для другого, - крива замикається лише тоді, коли обидва доданки одночасно повертаються у вихідне положення, тобто за параметром t у межах:

$$t \in [0,\ 2\pi \cdot zs] \quad (2.6)$$

За цей інтервал центр Os встигає здійснити рівно zs повних орбітальних обертів, тоді як саме тіло - лише один оберт навколо власної осі. Геометрично крива набуває вигляду замкненої «квітки» із zs листками, кожен з яких є результатом одного орбітального оберту, повернутим відносно попереднього на кут 2π/zs (рис. 2.2).

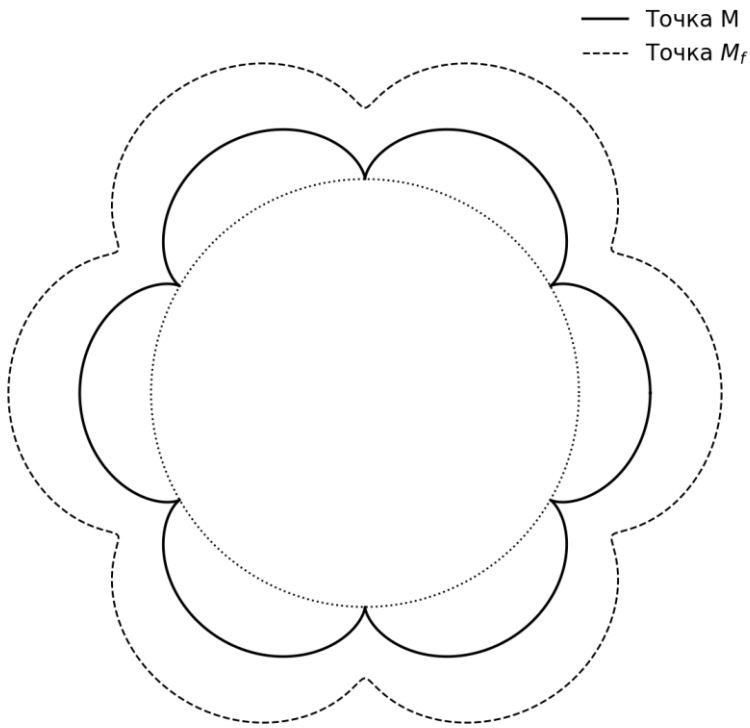


Рис. 2.2. Повні траєкторії точок M і Mf для прикладу zr = 6, zs = 7 (нерухоме коло Rr показано пунктиром)

Як видно з рисунка, точка M, що лежить точно на ободі рухомого кола Rs, описує епіциклоїду із загостреннями (cusps) у кожному з zs листків - це класична властивість циклоїдальної кривої, утвореної точкою генератора, віддаленою від центра рухомого кола точно на величину радіуса цього кола. Натомість точка Mf, віддалена від того самого центра на більшу відстань Rf, описує подовжену епіциклоїду (епітрохоїду) без загострень, але з характерними самоперетинами-петлями в зоні кожного листка.

Крива, описана точкою Mf, сама по собі ще не є технологічно зручним робочим профілем деталі: вона задає лише траєкторію центрів циліндричних елементів (роликів, цівок або інструмента-генератора) фіксованого радіуса rin, які реалізують реальний контакт зі спряженою деталлю. Дійсний робочий профіль отримують як огинаючу сімейства кіл радіуса rin, центри яких розташовані вздовж кривої Mf(t).

Огинаючу сімейства кіл будують класичним методом нормального офсету: у кожній точці кривої Mf обчислюють одиничний вектор нормалі та відкладають від нього відстань rin у напрямку, перпендикулярному до дотичної. Похідні координат точки Mf за параметром t дорівнюють:

$$x'Mf(t) = -e\cdot\sin t - (Rf/zs)\cdot\sin(t/zs)$$
$$y'Mf(t) = -e\cdot\cos t - (Rf/zs)\cdot\cos(t/zs) \qquad (2.7)$$

Одинична нормаль до кривої в точці, що відповідає параметру t, дорівнює:

$$nx(t) = -y'Mf(t) / \sqrt{(x'Mf2+y'Mf2)}$$
$$ny(t) = x'Mf(t) / \sqrt{(x'Mf2+y'Mf2)} \qquad (2.8)$$

Тоді координати огинаючої кривої - реального робочого профілю деталі - визначаються як:

$$X(t) = xMf(t) - rin\cdot nx(t), \quad Y(t) = yMf(t) - rin\cdot ny(t) \qquad (2.9)$$

Знак перед доданком rin визначає, з якого боку від кривої Mf будується профіль (внутрішня чи зовнішня гілка огинаючої); для робочого профілю героторної пари обирають внутрішню гілку, оскільки саме вона дає плавну, без самоперетинів, контактну поверхню деталі (рис. 2.3).

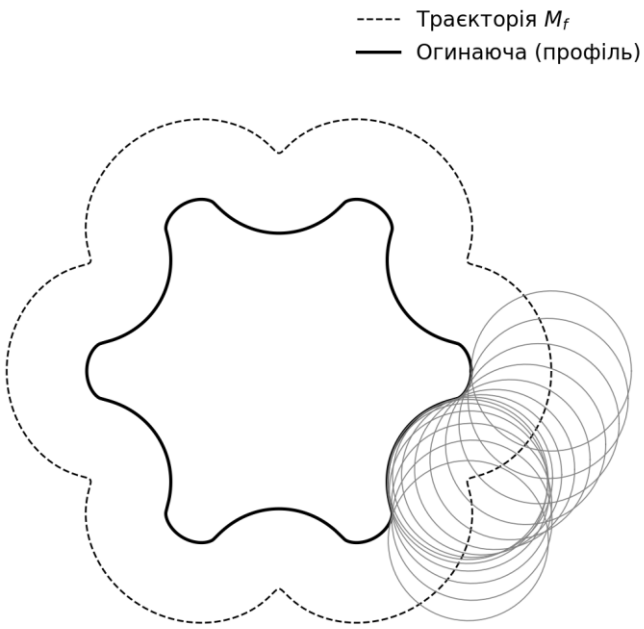


Рис. 2.3. Побудова робочого профілю як огинаючої сімейства кіл радіуса rin із центрами на кривій Mf

На рисунку добре видно, що огинаюча є істотно гладшою кривою, ніж сама траєкторія Mf: гострі ділянки й локальні петлі траєкторії-генератора усуваються самою процедурою побудови огинаючої, а підбором радіуса rin можна додатково регулювати кривизну профілю в зоні вершин і впадин зубців, узгоджуючи її з технологічними можливостями подальшої абразивної обробки, розглянутої в попередньому розділі.

Підсумовуючи розглянуту кінематичну схему, можна виокремити повний перелік параметрів синтезу та зв’язки між ними. Незалежними (вхідними) параметрами синтезу є лише два: ексцентриситет e та кількість зубців ротора zr. Усі інші геометричні характеристики є похідними:

$$zs = zr + 1$$
$$Rs = e \cdot zs$$
$$Rr = e \cdot zr$$
$$Rf = Rs + 2e \qquad (2.10)$$

Мала різниця zs − zr = 1 є визначальною конструктивною ознакою саме героторного (а не довільного циклоїдального) зачеплення: вона одночасно забезпечує мінімально можливий ексцентриситет при заданих радіусах Rr і Rs, а також максимально можливе передаточне відношення кінематичної пари “ексцентрик - вихідна ланка” у межах одного ступеня. Збільшення zr при незмінному e пропорційно збільшує всі основні радіуси передачі (Rs, Rr, Rf), залишаючи незмінним відносний масштаб профілю - форма листків епіциклоїди залежить виключно від zr (точніше, від zs), а e відіграє роль суто масштабного множника, що визначає лише абсолютний розмір передачі.

Окремим параметром синтезу, що визначає вже не саму базову криву, а реальний робочий профіль, є радіус генерувального кола rin. Його обирають із конструктивних міркувань - як радіус циліндричного ролика, цівки чи фрезерного/шліфувального інструмента, яким реалізується огинаюча. Зменшення rin наближає робочий профіль до кривої Mf (зі збереженням характерних самоперетинів за надмірно малих значень), тоді як надто велике rin призводить до вирожених ділянок профілю - траєкторій з різкими переходами кривизни, які неможливо реалізувати фізичним інструментом. Раціональний діапазон rin підбирають чисельно, перевіряючи відсутність самоперетинів огинаючої для конкретного поєднання e, zr і rin.

Виконаємо приклад розрахунку параметрів зачеплення для zr = 6 та ексцентриситету e = 3,775 мм. Кількість зубців статора, відповідно до умови синтезу, складає zs = zr + 1 = 7. Тоді:

$$Rs = e \cdot zs = 3{,}775 \cdot 7 = 26{,}425 \text{ мм}$$

$$Rr = e \cdot zr = 3{,}775 \cdot 6 = 22{,}650 \text{ мм}$$

$$Rf = Rs + 2e = 26{,}425 + 7{,}550 = 33{,}975 \text{ мм}$$

Якщо для побудови огинаючої прийняти радіус генерувального кола rin = 11,1 мм, отримана крива (рис. 2.2, рис. 2.3) матиме zs = 7 листків і замкнеться рівно за 7 орбітальних обертів ексцентрика - саме ці числові значення використано для побудови наведених вище рисунків 2.1–2.3.

Передаточне число кінематичної пари “ексцентрик - вихідна ланка” у межах одного ступеня для цього прикладу чисельно дорівнює zs = 7 (тобто кількості

орбітальних обертів ексцентрика на один оберт вихідної ланки). Це й пояснює практичну цінність героторної схеми з різницею зубців, що дорівнює одиниці, для побудови компактних редукторів з великим передаточним відношенням: навіть за порівняно невеликого zr досягаються передаточні числа, які для звичайної евольвентної одноступеневої передачі вимагали б істотно більших габаритів колеса.

2.3 Висновки

У розділі виконано повний цикл синтезу героторного зачеплення на основі епіциклоїдального профілю: від кінематичної схеми кочення кола Rs по нерухомому колу Rr до аналітичного опису траєкторій точок M і Mf та побудови реального робочого профілю як огинаючої сімейства кіл радіуса rin. Встановлено, що ексцентриситет передачі e фізично є радіусом орбітального руху центра рухомого кола, а конструктивна умова zs = zr + 1 забезпечує максимальне передаточне відношення кінематичної пари при мінімальному ексцентриситеті.

На числовому прикладі (zr = 6, e = 3,775 мм) показано, що похідні параметри передачі (zs, Rs, Rr, Rf) однозначно визначаються лише двома вхідними величинами, а отримана за методикою огинаюча дає плавний, технологічно реалізовний робочий профіль зачеплення, придатний для подальшої абразивної обробки методами, розглянутими в попередньому розділі.

РОЗДІЛ 3. СИНТЕЗ ГЕРОТОРНОГО ЗАЧЕПЛЕННЯ НА ОСНОВІ ЕЛІПТИЧНОГО ПРОФІЛЮ

3.1. Основні конструктивні параметри передачі

Узагальнення розглянутої в розділі 2 циклоїдальної схеми синтезу героторного зачеплення природно постає у напрямку заміни колового профілю рухомої ланки профілем довільної гладкої замкненої кривої. Найпростішим і водночас змістовним узагальненням є заміна рухомого кола Rs на еліпс з піввісями a (мала) та b (велика), який котиться без ковзання по тому самому нерухомому колу Rr. На відміну від кола, периметр еліпса не пропорційний куту повороту, а кривина контуру змінна вздовж нього, тому пряме перенесення формул розділу 2 неможливе. Окрім того, оскільки реальний робочий профіль деталі будується не самою траєкторією, а огинаючою сімейства генерувальних кіл радіуса r_i, у випадку еліптичного профілю виникає принципово новий клас вузлових точок - таких, що з'являються не на самій траєкторії, а саме на стадії побудови огинаючої. У цьому розділі побудовано повний математичний апарат для обох видів вузлових точок, а також розв'язано задачу оптимального вибору форми еліпса та радіуса r_i, за яких робочий профіль є гладким і не має самоперетинів.

Вихідними даними синтезу, як і в епіциклоїдальній схемі розділу 2, є кількість зубців ротора zr та ексцентриситет e. Кількість зубців статора визначається умовою zs = zr + 1. Радіус нерухомого кола обчислюється за формулою Rr = e·zr. Рухома ланка є еліпсом з піввісями a (мала) і b (велика, b > a); форма еліпса - співвідношення τ = b/a - є додатковим параметром синтезу. З рухомим еліпсом жорстко пов'язаний концентричний еліпс F з піввісями aF = a + 2e, bF = b + 2e (за повною аналогією з Rf = Rs + 2e у епіциклоїдальній схемі); точка Mf, що формує робочий профіль, належить саме еліпсу F. Перелік основних конструктивних параметрів зведено в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Основні конструктивні параметри героторного зачеплення на основі еліптичного профілю

Параметр	**Позначення**	**Спосіб визначення**
Кількість зубців ротора	zr	вхідний параметр, ціле число, zr ≥ 3
Кількість зубців статора	zs	zs = zr + 1
Ексцентриситет, мм	e	вхідний параметр
Радіус нерухомого кола, мм	Rr	Rr = e·zr
Піввісі рухомого еліпса, мм	a, b	чисельно з умови (3.8); b = τ·a
Коефіцієнт форми еліпса	τ = b/a	вільний параметр, оптимізується (п. 3.10)
Запас стійкості (1-го роду)	C = a²/(Rr·b)	має бути C > 1 (п. 3.6)
Піввісі еліпса F, мм	aF, bF	aF = a+2e, bF = b+2e
Радіус генерувального кола, мм	r_i	має бути r_i < ρmin (п. 3.8–3.9)
Мінімальний радіус кривини траєкторії Mf, мм	ρmin	ρmin = 1/max κ(φ) (п. 3.8)
Орбітальний і власний кути	φ, ψ(φ)	кінематичні параметри кочення (п. 3.3)

3.2. Синтез героторного зачеплення на основі еліптичного профілю

Розглянемо нерухоме коло радіуса Rr з центром у точці O та рухомий еліпс з піввісями a, b (a < b), центр якого позначимо Oc. Еліпс котиться по зовнішньому боці кола Rr без ковзання, торкаючись його в єдиній точці контакту K (рис. 3.1). Положення точки контакту на нерухомому колі задається кутом φ:

$$K(\varphi) = (Rr\cdot\cos\varphi,\ Rr\cdot\sin\varphi) \qquad (3.1)$$

Точку контуру еліпса, що в даний момент дотикається до нерухомого кола, параметризуємо власним кутом θ; її положення в супутній (неповернутій) системі координат еліпса:

$$p(\theta) = (b \cdot \cos\theta,\ a \cdot \sin\theta) \tag{3.2}$$

Матеріальну точку, жорстко закріплену на контурі еліпса в положенні θ = 0, що формує робочу траєкторію, позначимо M; її локальні координати - (b, 0). Світова координата довільної точки Q, жорстко зв'язаної з еліпсом і має локальні координати Qлок, обчислюється за формулою:

$$Q(\varphi) = Oc(\varphi) + R\psi(\varphi) \cdot Qлок \tag{3.3}$$

де Rψ - матриця повороту на кут власного повороту еліпса ψ(φ). Залишається визначити функції ψ(φ) та Oc(φ); цьому присвячено наступний підрозділ.

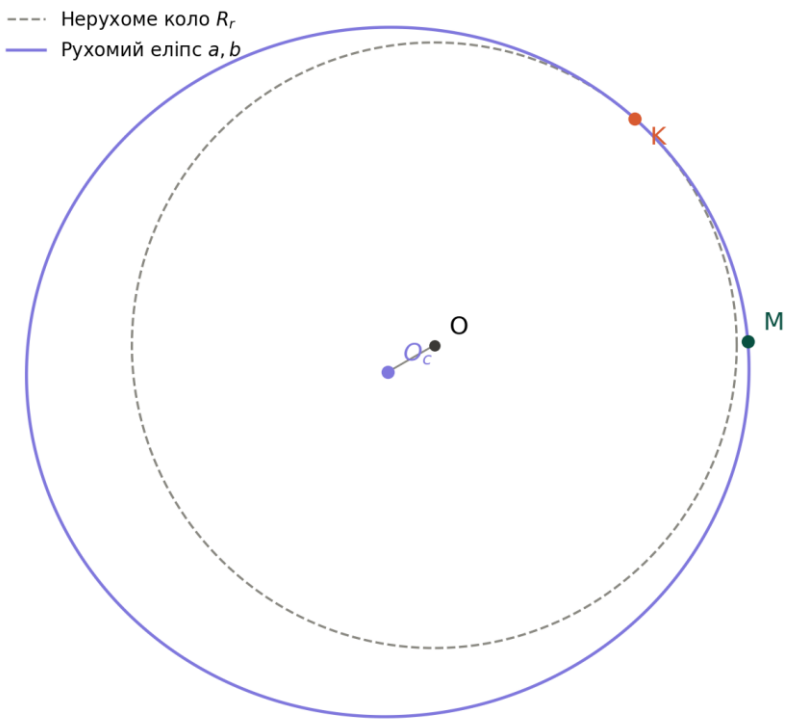


Рис. 3.1. Кінематична схема кочення еліпса з піввісями a, b по нерухомому колу Rr без ковзання: O - центр нерухомого кола; Oc - центр рухомого еліпса; K - точка контакту; M - точка на контурі еліпса

Кочення без ковзання означає рівність довжин дуг, які проходить точка контакту по нерухомому колу і по контуру еліпса:

$$Rr\cdot\varphi = L(\theta) = \int_0^{\theta} \sqrt{(b^2\sin^2 u + a^2\cos^2 u)}\, du \qquad (3.4)$$

Інтеграл (3.4) є еліптичним і не виражається через елементарні функції; залежність $\theta(\varphi)$ знаходять чисельно - побудовою таблиці $L(\theta)$ методом трапецій та подальшою оберненою інтерполяцією. Кут власного повороту визначають з умови дотику нормалей:

$$\alpha N(\theta) = \operatorname{atan2}(\sin\theta / a,\ \cos\theta / b) \qquad \psi(\varphi) = \varphi - \alpha N(\theta(\varphi)) \qquad (3.5)–(3.6)$$

(з розгортанням αN при переході θ через 2π). Положення центра еліпса:

$$Oc(\varphi) = K(\varphi) - R\psi(\varphi)\cdot p(\theta(\varphi)) \qquad (3.7)$$

Формули (3.4)–(3.7) є прямим узагальненням класичного співвідношення $\psi = \varphi\cdot(1 - Rr/r)$ для кочення кола радіуса r (отримується підстановкою $a = b = r$).

Траєкторія точки M замикається, коли відношення довжини дуги нерухомого кола до периметра еліпса $P = L(2\pi)$ є раціональним числом p/q у нескоротному вигляді; крива замикається після p обертів ексцентрика та q обходів контуру еліпса. Для героторної пари ($zs = zr + 1$, числа взаємно прості за побудовою) покладаємо $p = zs$, $q = zr$, що дає основне рівняння синтезу:

$$P(a,b) = (zs/zr)\cdot 2\pi\cdot Rr = 2\pi\cdot e\cdot zs \qquad (3.8)$$

Траєкторія замикається рівно після zs орбітальних обертів і складається з zs конгруентних віток (рис. 3.2, приклад $zr = 6$, $zs = 7$).

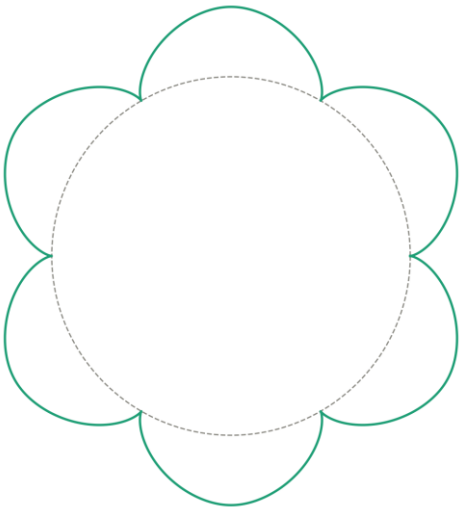


Рис. 3.2. Замкнена траєкторія точки M для zr = 6, zs = 7, e = 3,775 мм (пунктиром - нерухоме коло Rr)

Формула (3.10), на якій ґрунтується весь подальший аналіз вузлових точок, є наслідком елементарного, але важливого факту кінематики твердого тіла. Будь-який рух твердого тіла в площині, при якому одна його точка (точка контакту K) в кожний момент має нульову швидкість, є чистим обертанням навколо цієї точки в цей момент. Дійсно, для довільної точки Q, жорстко зв'язаної з тілом, поле швидкостей твердого тіла має вигляд $v(Q) = v(K) + \omega \times (Q - K)$, де ω - кутова швидкість тіла. Якщо $v(K) = 0$ (умова кочення без ковзання - контактна точка нерухомого і рухомого профілів у точці дотику не має відносного зміщення), то $v(Q) = \omega \times (Q - K)$ для будь-якої точки Q. У плоскому русі оператор «векторний добуток з ω» зводиться до множення на ω і повороту вектора на 90°, що й дає формулу (3.10), де роль кутової швидкості (в параметризації за φ, а не за часом) відіграє похідна $\psi'(\varphi)$. Принципово важливо, що ця формула не залежить від того, яку саме точку Q ми обираємо - вона визначається лише положенням K і Q відносно одна одної, а кутова швидкість $\psi'(\varphi)$ є характеристикою руху тіла як цілого. Саме тому умова відсутності вузлових точок першого роду, виведена для точки M, автоматично виконується і для точки Mf.

Практична реалізація формул (3.4)–(3.7) потребує трьох чисельних процедур. Перша - побудова таблиці довжини дуги еліпса $L(\theta)$ методом трапецій на сітці з $N \sim 4000–8000$ вузлів, що забезпечує точність не гірше 10^{-6} відносно периметра. Друга -

обернена інтерполяція цієї таблиці для θ(φ) (бінарний пошук з лінійною інтерполяцією, складність O(log N) на запит). Третя - розгортання (unwrap) кута αN(θ) при переході θ через 2π шляхом накопичувального підсумовування приростів, обмежених інтервалом (−π, π]; без цього кроку кут власного повороту ψ(φ) у формулі (3.6) мав би штучні розриви на 2π, яких немає у фізичній системі. Усі похідні величини (3.10)–(3.20) обчислюються аналітично через значення θ(φ), ψ(φ) з цієї ж таблиці, без додаткового чисельного диференціювання - що принципово важливо для підрозділу 3.8, оскільки пряме чисельне диференціювання вже інтерпольованої кривої Mf(φ) дає значну й непридатну для практичних висновків похибку при обчисленні другої похідної (кривини).

За аналогією з точкою Mf, яка в епіциклоїдальній схемі розділу 2 належить колу Rf = Rs + 2e, жорстко зв'язаному з рухомим колом Rs, у схемі з еліптичним профілем вводимо концентричний еліпс F з піввісями:

$$aF = a + 2e, \quad bF = b + 2e \tag{3.9}$$

Точка Mf належить еліпсу F і взята в тому самому локальному положенні θ = 0, що й точка M на еліпсі a, b; її локальні координати - (bF, 0). Ключовий теоретичний факт, який дозволяє перенести весь подальший аналіз на точку Mf без повторного виведення, такий: оскільки точка контакту K в кожний момент є миттєвим центром нульової швидкості рухомої ланки (стандартний результат кінематики кочення без ковзання), швидкість будь-якої точки Q, жорстко зв'язаної з еліпсом, незалежно від її локального положення Qлок, визначається єдиною формулою:

$$dQ/d\varphi = \psi'(\varphi)\cdot \mathrm{Rot}_{90}(Q(\varphi) - K(\varphi)) \tag{3.10}$$

де Rot_{90} - поворот вектора на 90°. Формула (3.10) застосовна як до точки M (Qлок = (b,0)), так і до точки Mf (Qлок = (bF,0)) - функція ψ′(φ) для обох точок одна й та сама, оскільки вона визначається виключно кінематикою кочення самого еліпса a, b і не залежить від того, яку жорстко зв'язану точку ми розглядаємо. Це означає, що всі

висновки підрозділу 3.6 щодо умови відсутності самоперетинів траєкторії M автоматично переносяться на траєкторію Mf без додаткового доведення.

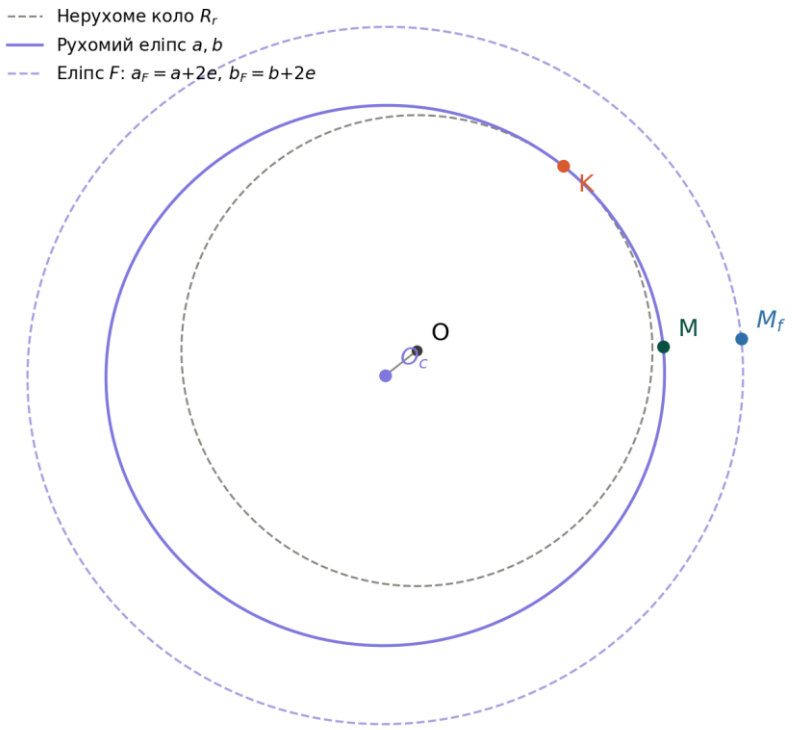


Рис. 3.3. Кінематична схема з пов’язаним еліпсом F: O - центр нерухомого кола; Oc - центр рухомого еліпса; K - точка контакту; M - точка на еліпсі a, b; Mf - точка на еліпсі F

З формули (3.10) випливає, що швидкості всіх точок рухомої ланки одночасно дорівнюють нулю в ті моменти, коли $\psi'(\varphi) = 0$. Якщо при цьому $\psi'(\varphi)$ змінює знак, траєкторія «розвертається назад» і перетинає вже пройдену ділянку - утворюється вузлова точка першого роду (за термінологією, яку вводимо для розрізнення від вузлових точок огинаючої, розглянутих у підрозділі 3.8). Диференціюючи (3.6), отримуємо:

$$\psi'(\varphi) = 1 - (Rr \cdot a \cdot b) / v^3(\theta(\varphi)), \quad v(\theta) = \sqrt{(b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)} \qquad (3.11)$$

Оскільки $v(\theta) \in [a, b]$ за умови $b > a$, достатньою умовою того, що $\psi'(\varphi)$ ніде не дорівнює нулю (отже, ніде не змінює знак), є:

$$A^2 > Rr \cdot b, \quad C := a^2/(Rr \cdot b) > 1 \qquad (3.12)–(3.13)$$

Нерівність (3.12) - умова відсутності вузлових точок першого роду; вона однакова для траєкторій і M, і Mf (підрозділ 3.5). На рис. 3.4 наведено порівняння траєкторії M для C = 1,084 > 1 (гладка крива) і C = 0,777 < 1 (вузлові точки на кожній з 7 віток, виділені червоним там, де $\psi'(\varphi) < 0$).

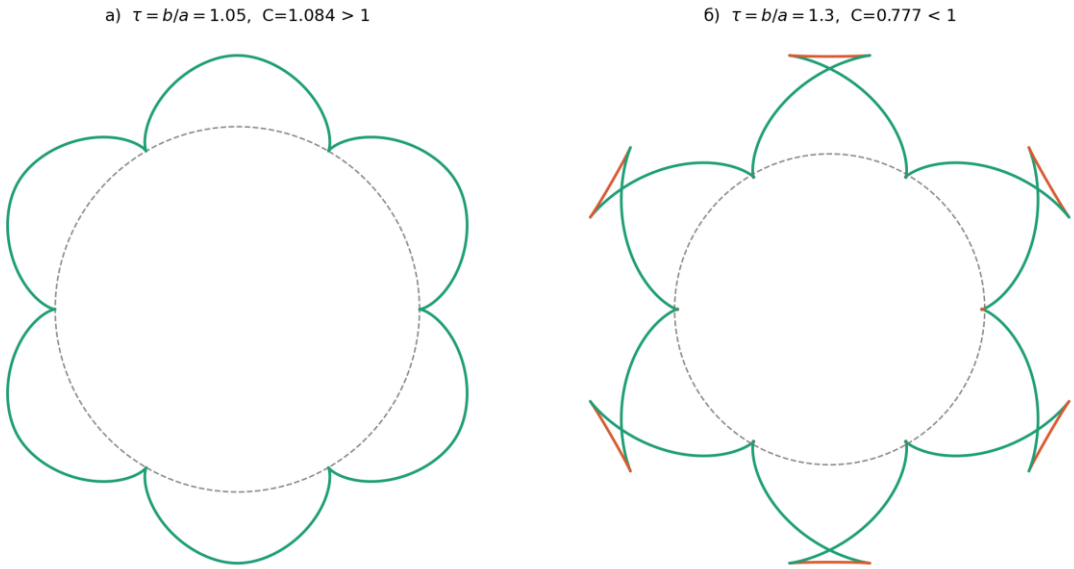


Рис. 3.4. Порівняння траєкторій точки M для zr = 6, e = 3,775 мм: а) C = 1,084 > 1 - без самоперетинів; б) C = 0,777 < 1 - з вузловими точками першого роду (червоним - ділянки $\psi'(\varphi) < 0$)

Реальний робочий профіль ротора будується як огинаюча сімейства кіл радіуса r_i, центри яких рухаються по траєкторії точки Mf - точно за методикою підрозділу 2.3, перенесеною на еліптичний випадок. Оскільки траєкторія $Mf(\varphi)$ не має аналітичного вигляду, дотичний і нормальний вектори в кожній точці обчислюються чисельно - центральними різницями за вже побудованою таблицею значень $Mf(\varphi_i)$:

$$T(\varphi) \approx (Mf(\varphi+\Delta\varphi) - Mf(\varphi-\Delta\varphi)) / |\cdot|, \quad n(\varphi) = Rot_{-90}(T(\varphi)) \qquad (3.14)$$

Напрямок $n(\varphi)$ узгоджують так, щоб він був напрямлений «назовні» (від центра O); огинаючу (робочий профіль) обирають як внутрішню гілку - зсув від Mf на відстань r_i у напрямку, протилежному $n(\varphi)$:

$$E(\varphi) = Mf(\varphi) - r_i \cdot n(\varphi) \qquad (3.15)$$

Саме ця крива $E(\varphi)$ і є робочим профілем деталі.

Визначимо умову, за якої ця крива не має власних самоперетинів.

Формула (3.15) задає так звану еквідистантну (офсетну) криву базової траєкторії Mf(φ). Для довільної регулярної плоскої кривої з одиничним дотичним вектором T(φ) і лівою нормаллю Frenet N(φ) = Rot₉₀(T(φ)) офсетна крива E(φ) = C(φ) + d·N(φ) має похідну:

$$E'(\varphi) = (1 - d\cdot\kappa(\varphi))\cdot C'(\varphi) \qquad (3.16)$$

де κ(φ) - signed-кривина базової кривої відносно тієї ж нормалі N. Формула (3.16) - стандартний факт диференціальної геометрії плоских кривих (наслідок формул Френе dT/ds = κ·N). Швидкість офсетної кривої перетворюється в нуль, коли d·κ(φ) = 1; за цим параметром офсетна крива набуває загострення, а за d, що перевищує 1/κ(φ) в точці максимальної кривини, - самоперетинається (складка), за тим самим принципом, що й у підрозділі 3.6, але вже стосовно відображення «зсув уздовж нормалі», а не «жорсткий поворот». Це і є вузлова точка другого роду.

Щоб обчислити κ(φ) без втрати точності (пряме чисельне двократне диференціювання вже інтерпольованої таблиці Mf(φ) дає значний шум), використовуємо аналітичні похідні, отримані за тим самим прийомом, що й формула (3.10). Перша похідна точки Mf:

$$Mf'(\varphi) = \psi'(\varphi)\cdot Rot_{90}(Mf(\varphi) - K(\varphi)) \qquad (3.17)$$

Диференціюючи (3.17) ще раз і використовуючи dK/dφ = Rot₉₀(K(φ)), отримуємо другу похідну в замкненому вигляді:

$$Mf''(\varphi) = \psi''(\varphi)\cdot Rot_{90}(Mf-K) - \psi'(\varphi)^2\cdot(Mf-K) + \psi'(\varphi)\cdot K(\varphi) \qquad (3.18)$$

де друга похідна кута власного повороту знаходиться диференціюванням (3.11):

$$\psi''(\varphi) = 3\cdot Rr^2\cdot a\cdot b\cdot(b^2 - a^2)\cdot\sin(2\theta(\varphi)) / (2\cdot v(\theta(\varphi))^6) \qquad (3.19)$$

Маючи Mf′(φ) і Mf″(φ) у замкненому вигляді (3.17)–(3.19), кривину обчислюють за стандартною формулою:

$$K(\varphi) = (x'y'' - y'x'') / (x'^2 + y'^2)\text{^}(3/2) \qquad (3.20)$$

Умова відсутності вузлових точок другого роду на робочому профілі - щоб офсет (3.15) ніде не досягав загострення, тобто щоб $d \cdot \kappa(\varphi) = r_i \cdot \kappa(\varphi)$ не дорівнювало 1 для жодного φ із додатною кривиною (від'ємна кривина відповідає протилежному напрямку вигину кривої і не обмежує зсув у вибраному напрямку (3.15)):

$$R_i < \rho\min := 1 / \max_\varphi \kappa(\varphi) \qquad (3.21)$$

Нерівність (3.21) - головний результат цього підрозділу і друга (поряд з (3.12)) умова, яку повинен задовольняти робочий профіль героторної пари на основі еліптичного профілю.

Обґрунтування формули (3.16): нехай s - натуральний параметр (довжина дуги) базової кривої C, $T(s) = dC/ds$ - одиничний дотичний вектор, $N(s) = Rot_{90}(T(s))$ - ліва нормаль Френе. За визначенням signed-кривини, $dT/ds = \kappa(s) \cdot N(s)$ (формула Френе для плоских кривих), а з ортогональності T і N також $dN/ds = -\kappa(s) \cdot T(s)$. Диференціюючи офсетну криву $E(s) = C(s) + d \cdot N(s)$ за s, маємо $dE/ds = T(s) + d \cdot (-\kappa(s) \cdot T(s)) = (1 - d \cdot \kappa(s)) \cdot T(s)$. Переходячи від натурального параметра s до довільного параметра φ (з $dE/d\varphi = (dE/ds) \cdot (ds/d\varphi)$ і аналогічно для C), отримуємо формулу (3.16): $E'(\varphi) = (1 - d \cdot \kappa(\varphi)) \cdot C'(\varphi)$, де $\kappa(\varphi)$ - та сама кривина, виражена як функція φ. Це й показує, що швидкість офсетної кривої звертається в нуль точно тоді, коли зсув d дорівнює оберненій кривині $1/\kappa(\varphi)$ - тобто радіусу кривини базової кривої в цій точці.

Алгоритм обчислення $\rho\min$ для заданих zr, e, τ такий: будують таблицю $\theta(\varphi)$, $\psi(\varphi)$ (підрозділ 3.3) з кроком, що забезпечує $N \sim 10^4$–$2 \cdot 10^4$ точок на повний період замкнення; у кожній точці за формулами (3.11), (3.19) обчислюють $\psi'(\varphi)$, $\psi''(\varphi)$; за формулами (3.17)–(3.18) - $Mf'(\varphi)$, $Mf''(\varphi)$; за формулою (3.20) - $\kappa(\varphi)$; $\rho\min$ визначають як обернену величину максимуму додатних значень $\kappa(\varphi)$.

На рис. 3.5 показано графік кривини $\kappa(\varphi)$ для числового прикладу (zr = 6, e = 3,775 мм, τ = 1,0346 - оптимальне значення, обґрунтоване в підрозділі 3.10): крива має 7 періодичних ділянок (відповідно до zs = 7), кожна з яких містить глибокий від'ємний пік (не обмежує r_i за прийнятою умовою (3.21)) і помірний додатний максимум $\kappa \approx 0{,}0780$ мм$^{-1}$, що відповідає $\rho\min \approx 12{,}82$ мм.

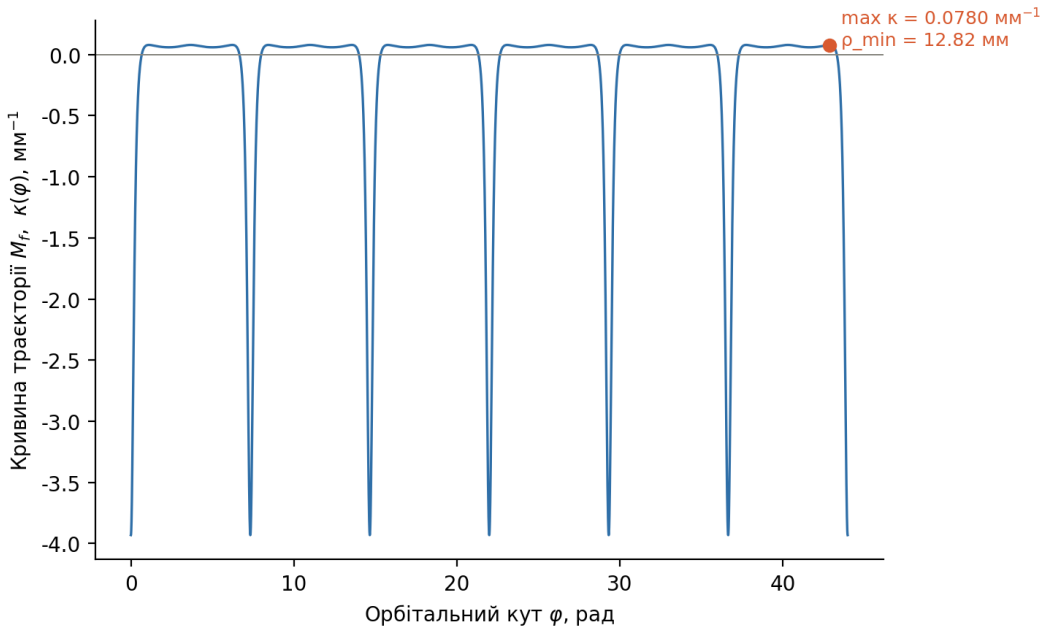


Рис. 3.5. Кривина κ(φ) траєкторії Mf для оптимального прикладу (zr = 6, e = 3,775 мм, τ = 1,0346); позначено максимум, що визначає ρmin

Для перевірки правильності формули (3.21) застосовано незалежний прямий геометричний метод: для пробних значень r_i будують офсетну криву (3.15) у явному (точковому) вигляді та шукають фактичні перетини відрізків кривої (з просторовим хешуванням для прискорення пошуку та пропуском пар відрізків, близьких один до одного за параметром φ, які не утворюють змістовного самоперетину). Бісекцією за r_i знайдено значення, при якому мінімальна швидкість офсетної кривої (обчислена чисельним диференціюванням) вперше досягає нуля; це значення збіглося зі значенням 1/max κ(φ), отриманим за формулою (3.20)–(3.21), з точністю, що перевищує 10^{-3} мм, що підтверджує коректність аналітичного підходу. Рисунок 3.6 демонструє результат для r_i = 10,90 мм (менше ρmin = 12,82 мм - профіль гладкий) та r_i = 16,02 мм (більше ρmin - на профілі з'являються вузлові точки другого роду, виділені фіолетовим кольором; пряма перевірка виявила 42 точки самоперетину).

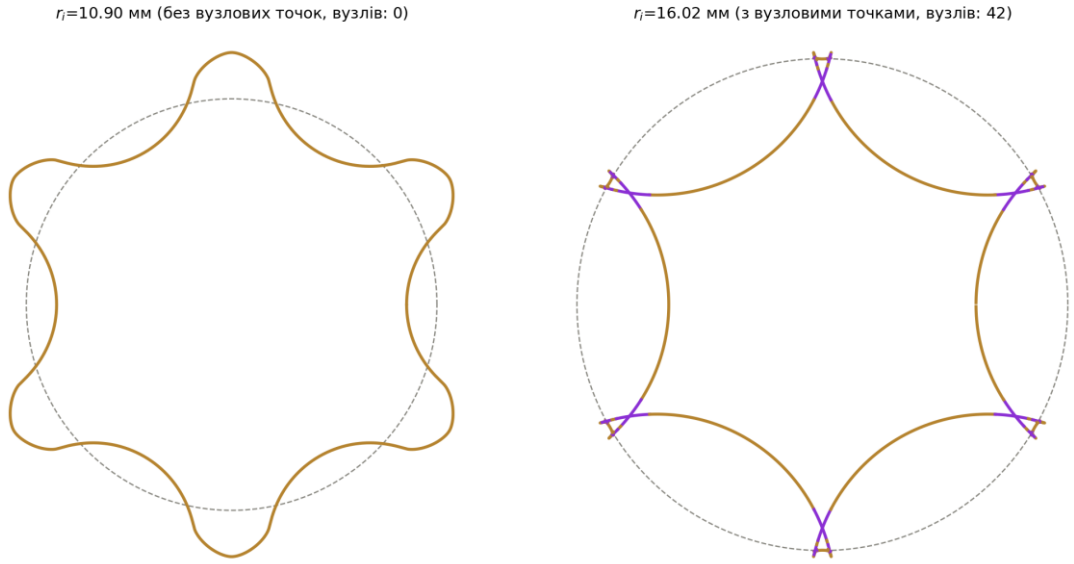


Рис. 3.6. Робочий профіль ротора (огинаюча сімейства кіл r_i): а) r_i = 10,90 мм < ρmin - гладкий профіль без вузлових точок; б) r_i = 16,02 мм > ρmin - вузлові точки другого роду (фіолетовим)

Умови (3.12)–(3.13) і (3.21) разом визначають допустиму область параметрів (a, b, r_i) для заданих zr, e. Природна постановка задачі оптимізації - знайти такий коефіцієнт форми τ = b/a (у межах τ ∈ (1, τкр), де τкр відповідає C = 1), який максимізує ρmin(τ), тобто дає найбільший допустимий радіус генерувального кола r_i. Це безпосередньо відповідає інженерній меті: більший r_i означає менш чутливий до похибок виготовлення та довговічніший генерувальний інструмент (ролик, фрезу).

Чисельне сканування ρmin(τ) (рис. 3.7, для zr = 6, 8, 10 за e = 3,775 мм) виявило цікавий і не цілком очевидний результат: залежність ρmin(τ) не є монотонною - вона має внутрішній максимум за τ, помітно більшим за 1. Це означає, що інтуїтивне припущення «чим ближче еліпс до кола, тим краще» в загальному випадку неправильне: побудова (3.4)–(3.9) пов’язує абсолютний масштаб кривої (через рівняння периметра (3.8)) з її формою, і взаємодія цих двох факторів дає невипадковий внутрішній оптимум, аналітичного виразу для якого в загальному вигляді не отримано - оптимальне τ* визначається чисельно (методом золотого перетину за τ).

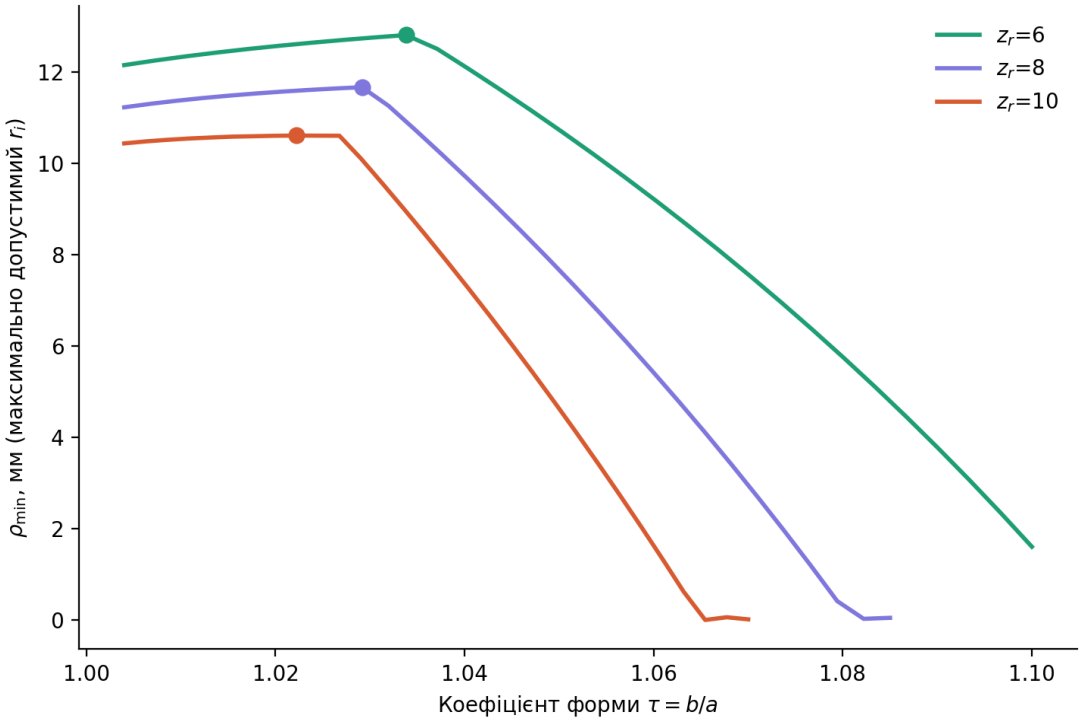


Рис. 3.7. Залежність ρmin від коефіцієнта форми τ для zr = 6, 8, 10 (e = 3,775 мм); точками позначено знайдені оптимуми τ*

Для основного числового прикладу (zr = 6, e = 3,775 мм) оптимум становить τ* = 1,0346, що дає (таблиця 3.2).

Таблиця 3.2

Оптимальні параметри робочого профілю для zr = 6, e = 3,775 мм

Параметр	**Значення**
τ*	1,0346
a, мм	25,973
b, мм	26,873
aF, мм	33,523
bF, мм	34,423
C = $a^2/(Rr \cdot b)$	1,1083 (> 1, умова (3.13) виконана)
ρmin*, мм	12,820
Рекомендований r_i (запас 15 %), мм	10,90

Рекомендований радіус генерувального кола обрано із запасом близько 15 % нижче ρmin* ($r_i = 0{,}85 \cdot \rho min^* \approx 10{,}90$ мм) - саме це значення використано для побудови гладкого профілю на рис. 3.6, а.

Повторивши процедуру підрозділу 3.10 для zr від 4 до 14 (за e = 3,775 мм), отримано залежності оптимального коефіцієнта форми τ*(zr) і відповідного максимально допустимого радіуса ρmin*(zr) (рис. 3.8). Обидві залежності монотонно спадні: зі зростанням кількості зубців ротора оптимальна форма наближається до кола (τ* → 1), а максимально допустимий радіус генерувального кола зменшується - з 13,95 мм для zr = 4 до 9,18 мм для zr = 14.

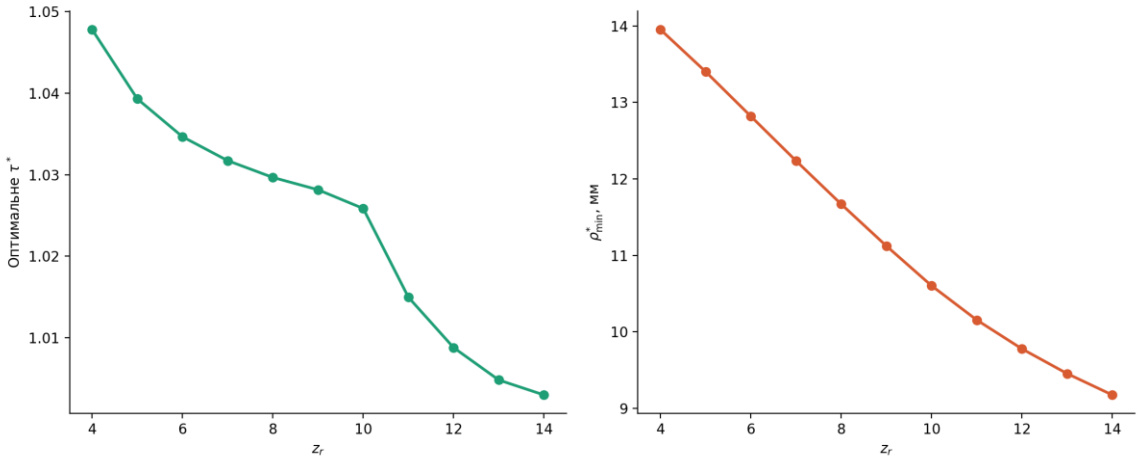


Рис. 3.8. Залежність оптимального коефіцієнта форми τ* (зліва) і відповідного ρmin* (справа) від кількості зубців ротора zr (e = 3,775 мм)

Інженерний висновок: героторні передачі на основі еліптичного профілю з великою кількістю зубців ротора допускають помітно менший запас на радіус генерувального інструмента і вимагають форми, ближчої до колової, тоді як передачі з малою кількістю зубців дозволяють використовувати помітніше еліптичні профілі з більшим (а отже, технологічно зручнішим) радіусом r_i.

Інженерний висновок: героторні передачі на основі еліптичного профілю з великою кількістю зубців ротора допускають помітно менший запас на радіус генерувального інструмента і вимагають форми, ближчої до колової, тоді як передачі з малою кількістю зубців дозволяють використовувати помітніше еліптичні профілі з більшим (а отже, технологічно зручнішим) радіусом r_i. Таблиця 3.3 узагальнює оптимальні параметри для декількох типових значень zr.

Таблиця 3.3

Оптимальні параметри робочого профілю для різних zr (e = 3,775 мм; рекомендований $r_i = 0{,}85 \cdot \rho min^*$)

zr	**τ***	**C(τ*)**	**ρmin*, мм**	**Рекомендований r_i, мм**
4	1,0478	1,165	13,953	11,86
6	1,0347	1,108	12,820	10,90
8	1,0297	1,077	11,671	9,92
10	1,0212	1,066	10,603	9,01
12	1,0090	1,069	9,778	8,31
14	1,0030	1,067	9,176	7,80

Зведемо повний ланцюжок синтезу для прикладу zr = 6, e = 3,775 мм. Вхідні параметри визначають zs = 7, Rr = 22,650 мм та цільовий периметр $P = 2\pi \cdot e \cdot zs$ = 166,033 мм (3.8). Оптимізація за підрозділом 3.10 дає τ* = 1,0346, a = 25,973 мм, b = 26,873 мм - при цьому запас C = 1,1083 > 1 гарантує відсутність вузлових точок першого роду (3.6) на траєкторіях M і Mf. Піввісі пов’язаного еліпса F: aF = 33,523 мм, bF = 34,423 мм (3.9). Аналітичне обчислення кривини траєкторії Mf (3.17)–(3.20) дає ρmin = 12,820 мм; обраний з 15-відсотковим запасом радіус генерувального кола r_i = 10,90 мм задовольняє умову (3.21) і дає гладкий, перевірений прямим геометричним методом (підрозділ 3.9) робочий профіль ротора (рис. 3.6, а) - остаточний результат синтезу цього розділу.

3.3 Висновки

У розділі побудовано повний математичний апарат синтезу героторного зачеплення на основі еліптичного профілю, що враховує два принципово різні види вузлових точок:

1) отримано загальні кінематичні залежності (3.4)–(3.7) для кочення еліпса без ковзання по нерухомому колу та умову замкненості траєкторії (3.8), що випливає із взаємної простоти zr і zs;

2) показано (формула (3.10)), що умова відсутності вузлових точок першого роду - самоперетинів самої траєкторії - однакова для будь-якої точки, жорстко зв'язаної з рухомою ланкою, а отже автоматично переноситься з точки M на точку Mf, що належить пов'язаному еліпсу F ($a_F = a+2e$, $b_F = b+2e$, за повною аналогією з $R_f = R_s+2e$); умова має вигляд $a^2 > R_r \cdot b$ (3.12);

3) встановлено другий, принципово новий тип вузлових точок - самоперетини огинаючої (робочого профілю), що виникають через офсетну побудову (3.15) незалежно від першого типу; виведено замкнену аналітичну формулу для кривини траєкторії Mf (3.17)–(3.20) на основі других похідних кута власного повороту (3.19) та строгу умову відсутності таких самоперетинів $r_i < \rho_{min}$ (3.21);

4) запропоновано й чисельно перевірено (прямим геометричним методом виявлення самоперетинів) методику визначення ρ_{min} та обґрунтовано задачу оптимізації - вибір коефіцієнта форми τ, що максимізує допустимий радіус генерувального кола r_i; виявлено, що ця залежність має внутрішній (не крайовий) оптимум, який визначається чисельно;

5) числовим дослідженням встановлено монотонне зменшення оптимальних τ^* і ρ_{min}^* зі зростанням кількості зубців ротора zr, що дає практичну рекомендацію щодо вибору форми профілю та технологічного радіуса генерувального інструмента для передач різного типорозміру.

Отримані результати (таблиця 3.2, рис. 3.6–3.8) дають завершену, перевірену чисельно методику синтезу робочого профілю героторної пари на основі еліптичного профілю - від вихідних параметрів zr, e до остаточних розмірів a, b, a_F, b_F та технологічного радіуса r_i, що гарантовано забезпечує гладкий, без самоперетинів обох видів, робочий профіль деталі.

РОЗДІЛ 4. ПОРІВНЯННЯ ПЕРЕВАГ ТА НЕДОЛІКІВ ГЕРОТОРНИХ ЗАЧЕПЛЕНЬ НА ОСНОВІ ЕПІЦИКЛОЇДАЛЬНИХ ТА ЕЛІПТИЧНИХ ПРОФІЛІВ

У розділах 2 і 3 побудовано дві самостійні методики синтезу робочого профілю героторної пари - на основі епіциклоїдального профілю (рухома ланка - коло Rs) та на основі еліптичного профілю (рухома ланка - еліпс з піввісями a, b). Обидві методики застосовано до однакових вихідних даних (zr = 6, zs = 7, e = 3,775 мм), що дозволяє провести пряме кількісне порівняння геометричних і робочих характеристик отриманих профілів. У цьому розділі порівнюються площа поперечного перерізу робочого профілю ротора та робочий об’єм героторного зачеплення при висоті профілю H = 20 мм.

4.1. Дослідження площ робочих камер героторних зачеплень на основі епіциклоїдальних та еліптичних профілів

Площею робочого профілю ротора S називають площу плоскої фігури, обмеженої замкненою кривою робочого профілю - огинаючою сімейства генерувальних кіл радіуса rin (для епіциклоїдальної схеми, підрозділ 2.3) або радіуса r_i (для еліптичної схеми, підрозділ 3.7). Для довільної замкненої плоскої кривої, заданої набором дискретних точок (Xk, Yk), k = 0, …, N−1 (обхід проти годинникової стрілки), її площа обчислюється за формулою Гаусса:

$$S = \tfrac{1}{2} \cdot \left| \sum (X_k \cdot Y_{k+1} - X_{k+1} \cdot Y_k) \right| \qquad (4.1)$$

де індекси беруться циклічно (XN ≡ X0). Формула (4.1) точна для багатокутника з вершинами в точках (Xk, Yk) і прямує до точної площі гладкої кривої при $N \to \infty$; для робочих профілів обох схем (N порядку $2 \cdot 10^4$ точок на період) похибка дискретизації не перевищує тисячних часток відсотка.

Формула (4.1) є дискретним аналогом формули Гріна для площі плоскої області, обмеженої гладкою замкненою кривою C, заданою параметрично як (x(φ), y(φ)):

$$S = \tfrac{1}{2} \oint_C (x\,dy - y\,dx) = \tfrac{1}{2} \int_0^{\Phi} \left(x(\varphi)\cdot y'(\varphi) - y(\varphi)\cdot x'(\varphi) \right) d\varphi \qquad (4.1a)$$

де Φ - повний період замикання кривої. Формула (4.1) отримується з (4.1a) заміною інтеграла скінченною сумою (методом трапецій) за вже побудованою таблицею точок кривої - тобто є послідовним, контрольованим за точністю наближенням до точного інтегрального визначення площі, а не довільною евристикою.

Щоб переконатися, що використана в підрозділах 4.1.1–4.1.2 кількість точок ($N \sim 2\cdot10^4$) достатня для практичної точності, виконано дослідження збіжності значення площі S при зростанні N від 100 до 30000 для обох профілів (таблиця 4.1a).

Таблиця 4.1a

Збіжність обчисленої площі робочого профілю при зростанні кількості точок дискретизації N (zr = 6, e = 3,775 мм)

N	**Sепі, мм²**	**Sеліпс, мм²**	**Похибка Sепі відносно N=30000, %**
100	1648,456	1704,644	4,164
300	1592,182	1655,321	0,607
1000	1583,508	1647,318	0,0564
3000	1582,714	1646,557	0,00626
10000	1582,623	1646,469	0,000503
30000	1582,616	1646,461	база порівняння

Похибка спадає приблизно квадратично відносно N (типова поведінка методу трапецій для гладких періодичних підінтегральних функцій), і вже при N = 3000 похибка не перевищує 0,01 % - це на два порядки точніше за типову технологічну похибку виготовлення героторної пари. Усі результати підрозділів 4.1.1–4.2 обчислено з N = 20000, що дає похибку дискретизації на рівні 10^{-4} % - нехтовно малу порівняно з усіма іншими джерелами невизначеності в задачі.

Для епіциклоїдальної схеми (розділ 2) робочий профіль - огинаюча сімейства кіл радіуса rin з центрами на траєкторії точки Mf, що рухається по колу радіуса Rf = Rs +

2e, де Rs = e·zs. Застосувавши формулу (4.1) до профілю з параметрами zr = 6, zs = 7, e = 3,775 мм, Rs = 26,425 мм, Rf = 33,975 мм, rin = 11,1 мм (значення, прийняті в підрозділі 2.4 розділу 2), отримано:

$$S_{епі} = 1582{,}62 \text{ мм}^2$$

Для еліптичної схеми (розділ 3) робочий профіль - огинаюча сімейства кіл радіуса r_i з центрами на траєкторії точки Mf, що належить пов'язаному еліпсу F (aF = a+2e, bF = b+2e). Застосувавши формулу (4.1) до оптимального профілю, знайденого в підрозділі 3.10 (zr = 6, zs = 7, e = 3,775 мм, τ* = 1,0347, a = 25,973 мм, b = 26,874 мм, r_i = 10,90 мм - рекомендоване значення з 15-відсотковим запасом до ρmin* = 12,820 мм), отримано:

$$S_{еліпс} = 1646{,}46 \text{ мм}^2$$

Рисунок 4.1 показує обидва робочі профілі, побудовані в одній системі координат і в однаковому масштабі (для одних і тих самих zr, zs, e), що дозволяє наочно оцінити їхню геометричну відмінність.

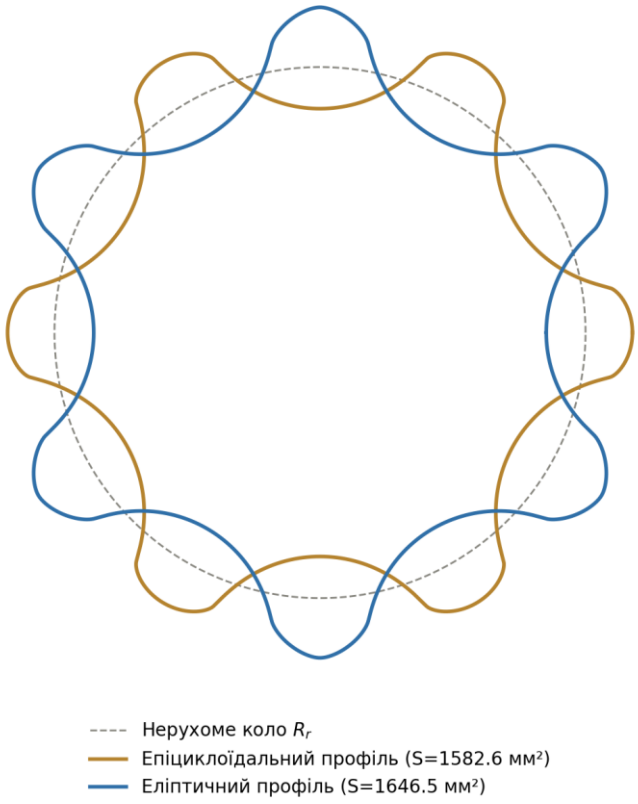


Рис. 4.1. Порівняння робочих профілів ротора в однаковому масштабі: епіциклоїдальний профіль ($S_{епі}$ = 1582,6 мм², rin = 11,1 мм) та еліптичний профіль ($S_{еліпс}$ = 1646,5 мм², r_i = 10,90 мм) для zr = 6, zs = 7, e = 3,775 мм

Зведемо результати порівняння площ робочого профілю в таблицю 4.1.

Таблиця 4.1

Порівняння площ робочого профілю ротора для епіциклоїдальної та еліптичної схем

Показник	**Епіциклоїдальний профіль**	**Еліптичний профіль**
zr / zs	6 / 7	6 / 7
e, мм	3,775	3,775
Параметр форми рухомої ланки	Rs = 26,425 мм (коло)	a=25,973; b=26,874 мм (τ*=1,0347)
Радіус генерувального кола, мм	rin = 11,1	r_i = 10,90
Площа робочого профілю S, мм²	1582,62	1646,46
Відносна різниця, %	база порівняння	+4,03 %

Площа еліптичного робочого профілю перевищує площу епіциклоїдального на 63,8 мм², або на 4,03 % відносно епіциклоїдального профілю, незважаючи на близькі за порядком величини радіуси генерувального кола (rin = 11,1 мм проти r_i = 10,90 мм). Це показує, що при однакових вихідних параметрах zr, zs, e еліптична схема синтезу дає геометрично «повніший» робочий профіль - переважно за рахунок більшого віддалення траєкторії Mf від центра O (оскільки aF, bF в еліптичній схемі визначаються через незалежно оптимізовану форму τ, тоді як Rf в епіциклоїдальній схемі жорстко прив’язаний до Rs = e·zs).

Цікаво також дослідити, як змінюється площа кожного профілю зі зміною радіуса генерувального кола: оскільки збільшення rin (r_i) однаково «зрізає» профіль з усіх боків, можна очікувати близьку до лінійної залежність S(rin). Рисунок 4.2 підтверджує це для обох схем у широкому діапазоні радіусів.

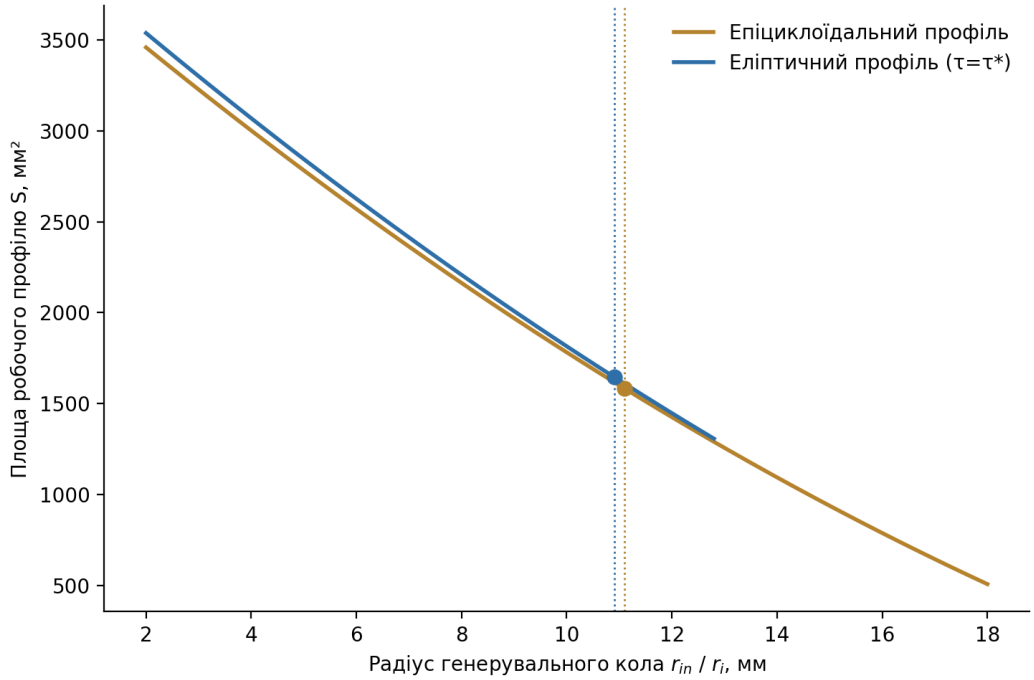


Рис. 4.2. Залежність площі робочого профілю від радіуса генерувального кола для епіциклоїдальної та еліптичної схем; точками позначено прийняті в розділах 2 і 3 значення rin = 11,1 мм та r_i = 10,90 мм

Обидві залежності практично лінійні й близькі за нахилом у дослідженому діапазоні, а еліптична крива розташована систематично вище епіциклоїдальної на всьому інтервалі - це підтверджує, що виявлена різниця площ (4,03 % при обраних радіусах) є стійкою геометричною властивістю порівнюваних схем синтезу, а не випадковим наслідком конкретного вибору rin, r_i.

Порівняння в підрозділах 4.1.1–4.1.3 виконане для одного конкретного значення zr = 6. Щоб з'ясувати, чи є виявлена перевага еліптичної схеми (+4,03 %) стійкою характеристикою самого методу синтезу, чи випадковим результатом для конкретного zr, повторимо порівняння площ для діапазону zr = 4…12 за того самого ексцентриситету e = 3,775 мм. Для коректного порівняння радіус генерувального кола епіциклоїдальної схеми rin утримувався пропорційним e (rin = 2,9404·e, що відтворює прийняте в розділі 2 співвідношення rin/e для zr = 6), а для еліптичної схеми для кожного zr заново розв'язувалася задача оптимізації коефіцієнта форми τ* і визначався рекомендований радіус r_i = 0,85·ρmin* за методикою підрозділу 3.10 розділу 3. Результати наведено на рис. 4.3 і 4.4.

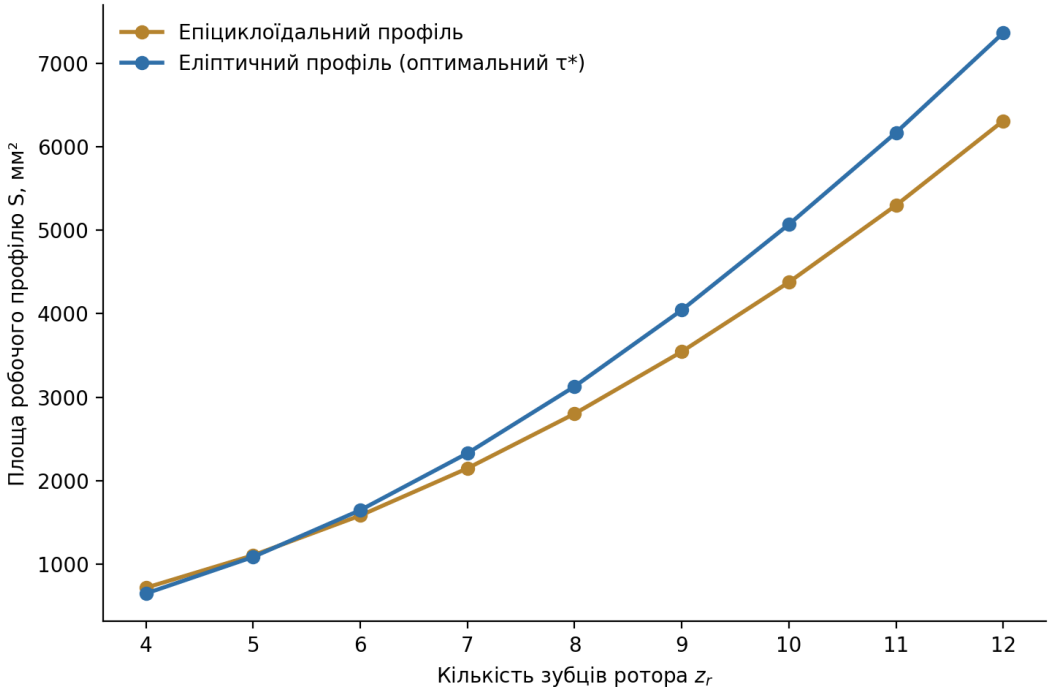


Рис. 4.3. Залежність площі робочого профілю від кількості зубців ротора zr для епіциклоїдальної та еліптичної (з оптимальним τ* для кожного zr) схем (e = 3,775 мм)

Рисунок 4.6 показує ту саму інформацію у вигляді відносної переваги еліптичної схеми, ΔS/Sепі·100 %, як функції zr.

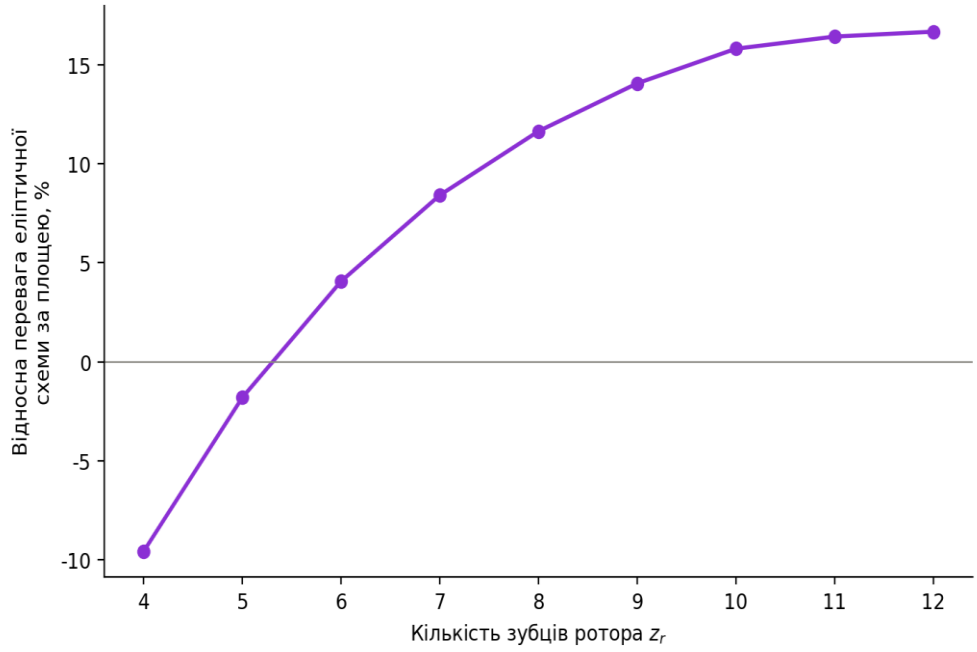


Рис. 4.4. Відносна перевага еліптичної схеми за площею робочого профілю як функція кількості зубців ротора zr

Виявлено принципово важливий і не очевидний заздалегідь результат: перевага еліптичної схеми за площею не є постійною - вона змінює знак. Для малих zr (zr = 4, 5) епіциклоїдальна схема дає більшу площу робочого профілю (еліптична поступається на 9,57 % при zr = 4 і на 1,80 % при zr = 5); приблизно при zr ≈ 5,3 криві перетинаються, а для zr ≥ 6 перевага переходить до еліптичної схеми й монотонно зростає, сягаючи близько 16–17 % при zr = 10…12, після чого приріст переваги вирівнюється (графік на рис. 4.4 наближається до горизонтальної асимптоти).

Це пояснюється взаємодією двох протилежно спрямованих ефектів, виявлених окремо в розділах 2 і 3. З одного боку, у еліптичній схемі оптимальне τ* (підрозділ 3.11 розділу 3) спадає зі зростанням zr, наближаючи форму рухомої ланки до кола, а максимально допустимий радіус ρmin* (а відповідно й обраний r_i) також спадає - це саме по собі зменшує площу профілю. З іншого боку, основне рівняння замкненості (3.8) пов’язує периметр еліпса P = 2π·e·zs з повним числом зубців статора zs = zr+1, а не з Rs = e·zs, як в епіциклоїдальній схемі: при зростанні zr ця різниця у визначенні масштабу профілю накопичується швидше для еліптичної схеми, ніж компенсаційне зменшення r_i, тому за zr ≥ 6 перший ефект домінує. Інженерний висновок: вибір схеми синтезу за критерієм максимізації робочого об’єму при заданих e, H має враховувати конкретну кількість зубців ротора - при малих zr (зокрема для типового мінімального zr = 4) перевагу за площею (а отже, і за продуктивністю) має епіциклоїдальна схема, тоді як для zr ≥ 6 - еліптична.

Окрім сумарної площі робочого профілю, для героторних насосів практичне значення має рівномірність зміни робочого об’єму впродовж оберту - нерівномірність прямо пов’язана з пульсацією подачі рідини. Повний аналіз пульсації потоку вимагає розгляду миттєвої площі робочих камер, утворених парами сусідніх зубців ротора і статора, що виходить за межі цього розділу; натомість як спрощений орієнтовний показник розглянемо локальну швидкість «замітання» площі точкою Mf відносно центра O:

$$dA/d\varphi = \tfrac{1}{2}\cdot\left| x(\varphi)\cdot y'(\varphi) - y(\varphi)\cdot x'(\varphi) \right| \qquad (4.7)$$

де (x(φ), y(φ)) - траєкторія точки Mf (для епіциклоїдальної схеми обчислюється аналітично за формулами підрозділу 2.3, для еліптичної - за формулою (3.17)

підрозділу 3.8 розділу 3). Рисунок 4.8 показує цю величину для обох схем на прикладі zr = 6.

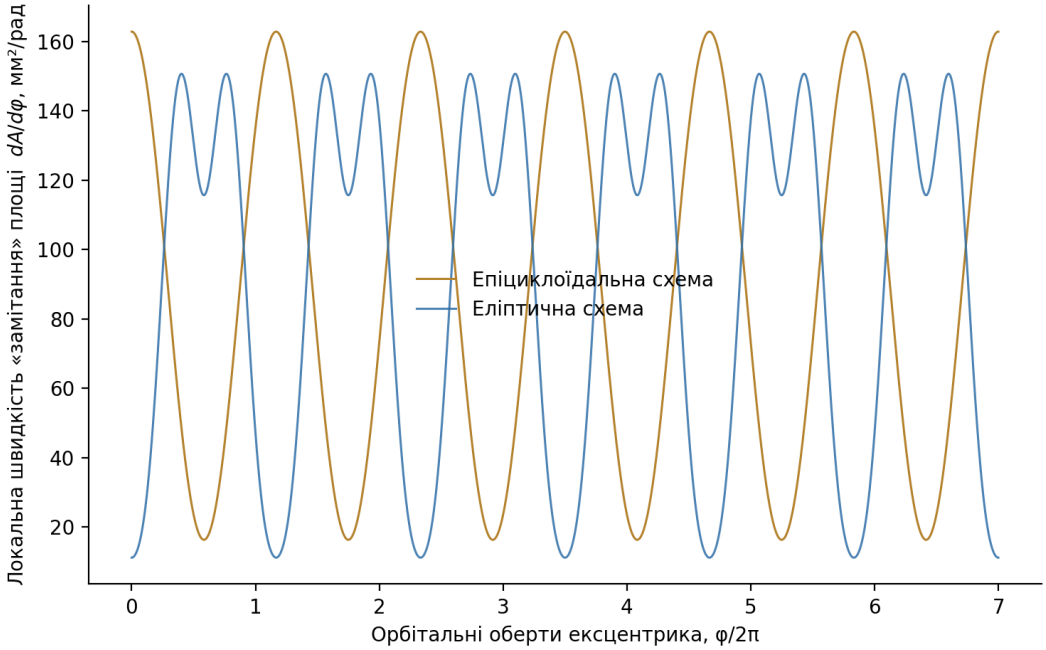


Рис. 4.5. Локальна швидкість замітання площі dA/dφ як орієнтовний показник рівномірності робочого циклу для обох схем (zr = 6, e = 3,775 мм)

Обидві криві мають однакову періодичність (zs = 7 періодів за повний цикл замикання), проте крива еліптичної схеми має характерну додаткову дрібну осциляцію всередині кожного періоду (два локальні максимуми замість одного) - наслідок змінної кривини еліптичного профілю, на відміну від кола, де кривина стала. Коефіцієнт варіації (відношення стандартного відхилення до середнього значення) для епіциклоїдальної схеми становить 0,579, для еліптичної - 0,551, тобто еліптична схема демонструє дещо нижчу відносну нерівномірність замітання площі. Втім, оскільки використаний показник (4.7) є спрощеним проксі, а не прямим обчисленням миттєвої подачі насоса, цей результат слід розглядати лише як орієнтовний натяк на потенційно сприятливішу динамічну характеристику еліптичної схеми, що потребує окремого, повнішого дослідження з урахуванням реальної геометрії робочих камер між ротором і статором.

Геометричну природу цього переходу наочно ілюструє рисунок 4.9, де профілі обох схем накладено одне на одне для трьох характерних значень zr: для zr = 4 епіциклоїдальний профіль (жовтий) візуально «повніший» за еліптичний (синій), для

zr = 8 профілі вже близькі за розміром із незначною перевагою еліптичного, а для zr = 12 еліптичний профіль явно та рівномірно перевищує епіциклоїдальний по всьому контуру.

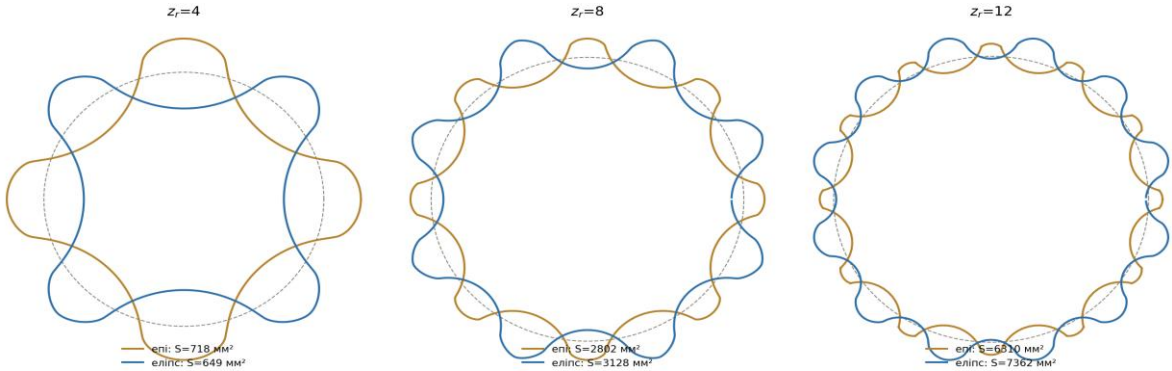


Рис. 4.6. Порівняння робочих профілів обох схем для трьох значень кількості зубців ротора: zr = 4 (перевага епіциклоїдальної схеми), zr = 8 (профілі близькі), zr = 12 (перевага еліптичної схеми)

Усі лінійні розміри обох схем синтезу (Rr, Rs, Rf для епіциклоїдальної; Rr, a, b, aF, bF для еліптичної) виражаються через ексцентриситет e або пропорційно до нього (за фіксованих zr, zs і - для еліптичної схеми - фіксованого коефіцієнта форми τ), а радіус генерувального кола в обох схемах також обирається пропорційним e (rin = const·e, r_i = const·e). Звідси випливає, що вся геометрія робочого профілю масштабується як єдиний геометричний подібний об’єкт при зміні e - тобто координати кожної точки профілю пропорційні e, а отже площа, яка має розмірність квадрата довжини, повинна підпорядковуватися закону:

$$S(e) = k \cdot e^2 \tag{4.8}$$

де коефіцієнт k залежить лише від безрозмірних параметрів схеми (zr, zs та, для еліптичної схеми, τ), але не від самого e. Це твердження перевірено чисельно: обчислення площі профілю для діапазону e = 1…10 мм (за фіксованих zr = 6, rin/e = 2,9404 для епіциклоїдальної схеми та r_i/e = 2,886 і τ = 1,0347 для еліптичної) дало відношення S/e², яке з точністю до 10 значущих цифр лишається сталим для кожної схеми (kепі = 111,0596 мм²/мм² для епіциклоїдальної, kеліпс = 115,5786 мм²/мм² для еліптичної), що повністю підтверджує теоретичний квадратичний закон (4.8) і

водночас слугує незалежною перевіркою коректності всієї побудованої числової методики обчислення площі (підрозділ 4.1) - оскільки масштабна інваріантність геометрії є точним наслідком безрозмірності формул синтезу (розділи 2, 3), будь-яка похибка в реалізації обчислень із високою ймовірністю порушила б цю інваріантність.

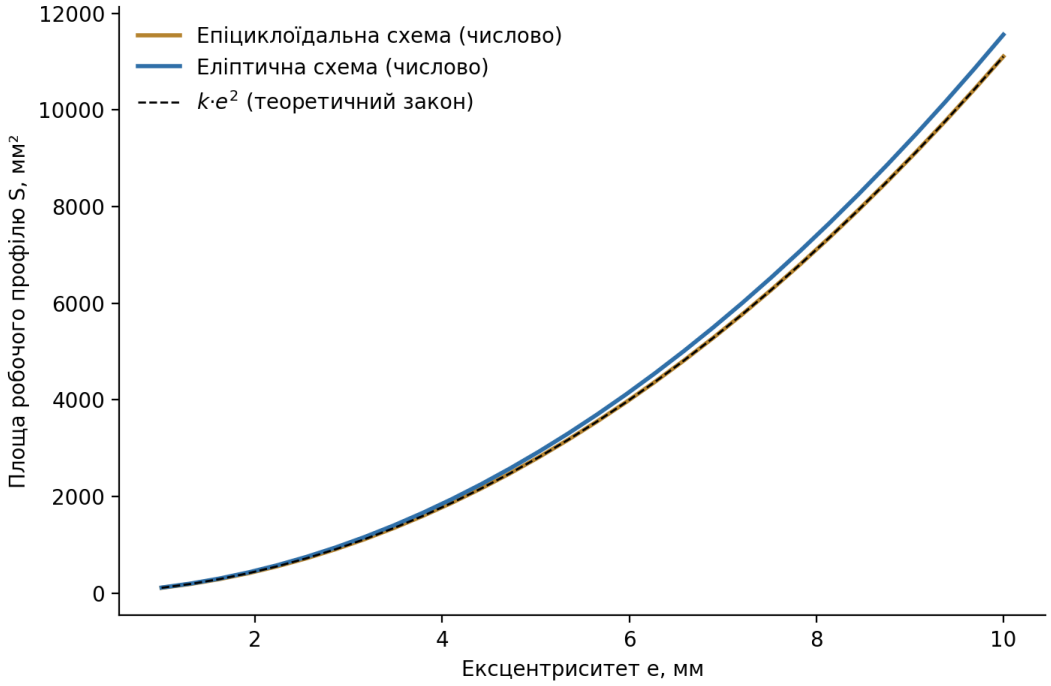


Рис. 4.10. Залежність площі робочого профілю S від ексцентриситету e для обох схем синтезу разом із теоретичною квадратичною залежністю $k \cdot e^2$ (zr = 6; для епіциклоїдальної схеми rin/e = 2,9404; для еліптичної τ = 1,0347, r_i/e = 2,886)

Практичний наслідок закону (4.8): відносна перевага однієї схеми над іншою за площею (а отже, і за робочим об'ємом, підрозділ 4.2), знайдена для одного конкретного значення e (підрозділи 4.1.1–4.1.3), залишається тією самою для будь-якого іншого e за тих самих безрозмірних параметрів zr, zs, τ, rin/e, r_i/e - оскільки відношення Seліпс(e)/Seпі(e) = keліпс/keпі не залежить від e. Це суттєво розширює область застосовності результатів підрозділу 4.1.4 (залежність переваги від zr): знайдена там залежність справедлива для довільного ексцентриситету, а не лише для e = 3,775 мм, використаного в основних числових прикладах.

4.2. Дослідження робочого об’єму героторних зачеплень на основі епіциклоїдальних та еліптичних профілів

Героторна машина (насос, мотор, компресор) є циліндричним механізмом: робочий профіль, синтезований у розділах 2 і 3 як плоска крива, є поперечним перерізом реальної тривимірної деталі, яка отримується видавлюванням (екструзією) цього перерізу вздовж осі обертання на висоту героторного блока H. Робочий об’єм героторного зачеплення, що визначає продуктивність насоса за один оберт, обчислюється елементарно - як добуток площі поперечного перерізу на висоту:

$$V = S \cdot H \tag{4.4}$$

Формула (4.4) точна, оскільки профіль уздовж осі обертання не змінюється (видавлювання - паралельне перенесення плоскої фігури без повороту чи масштабування). Для порівняння обох схем синтезу приймемо однакову, технологічно типову для героторних насосів малого та середнього типорозміру висоту профілю H = 20 мм; рисунок 4.3 ілюструє тривимірну геометрію обох профілів при такому видавлюванні.

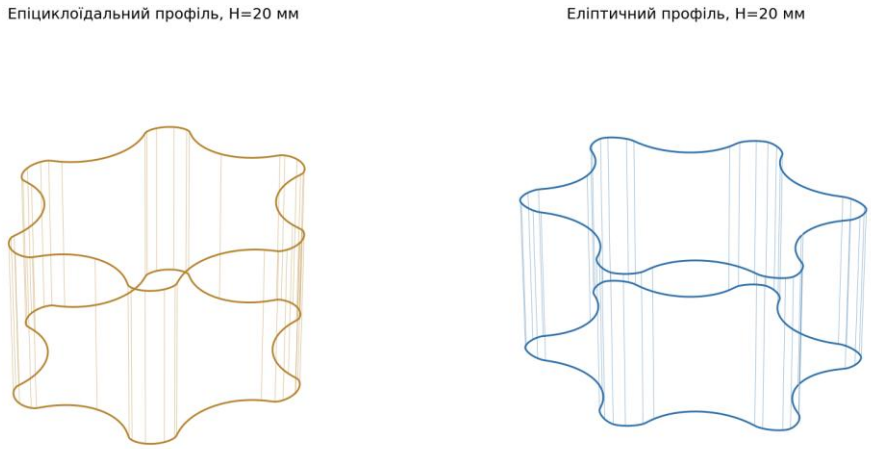


Рис. 4.7. Тривимірна геометрія робочого профілю ротора при видавлюванні на висоту H = 20 мм: а) епіциклоїдальний профіль; б) еліптичний профіль

Підставляючи в (4.4) знайдені в підрозділі 4.1 значення площ Sепі = 1582,62 мм² та Sеліпс = 1646,46 мм², а також H = 20 мм, отримуємо:

$$V_{епі} = S_{епі} \cdot H = 1582{,}62 \times 20 = 31652{,}34 \text{ мм}^3 = 31{,}652 \text{ см}^3 \quad (4.5)$$

$$V_{еліпс} = S_{еліпс} \cdot H = 1646{,}46 \times 20 = 32929{,}24 \text{ мм}^3 = 32{,}929 \text{ см}^3 \quad (4.6)$$

Різниця робочих об’ємів становить $\Delta V = V_{еліпс} - V_{епі} = 1276{,}91$ мм³ = 1,277 см³, що відповідає тим самим 4,03 %, знайденим для площ (підрозділ 4.1.3) - оскільки висота H однакова для обох схем, відносна різниця об’ємів точно дорівнює відносній різниці площ поперечного перерізу, що випливає безпосередньо з лінійності формули (4.4) за S.

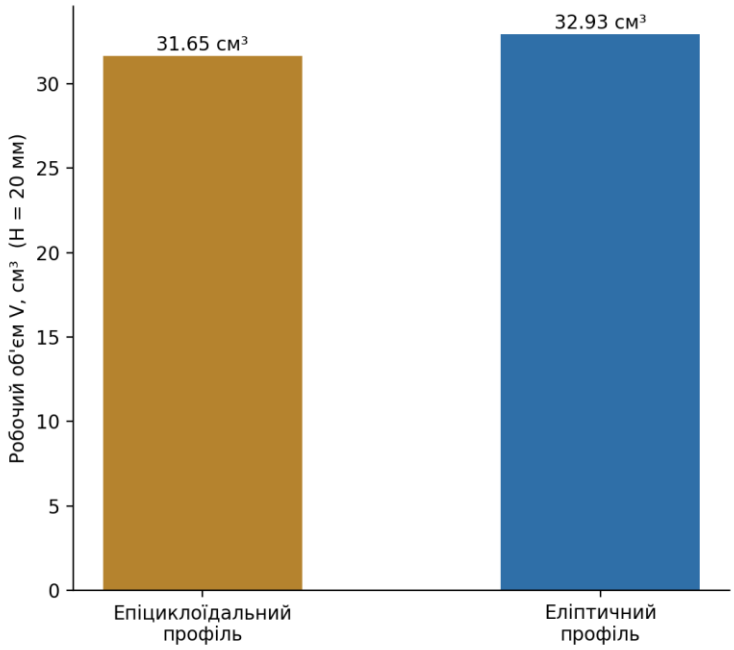


Рис. 4.8. Порівняння робочого об’єму героторного зачеплення для двох схем синтезу при H = 20 мм

Графічно лінійна залежність V(H) для обох схем показана на рис. 4.9, де позначено й точку H = 20 мм, використану для основного числового порівняння в підрозділах 4.2.1–4.2.2.

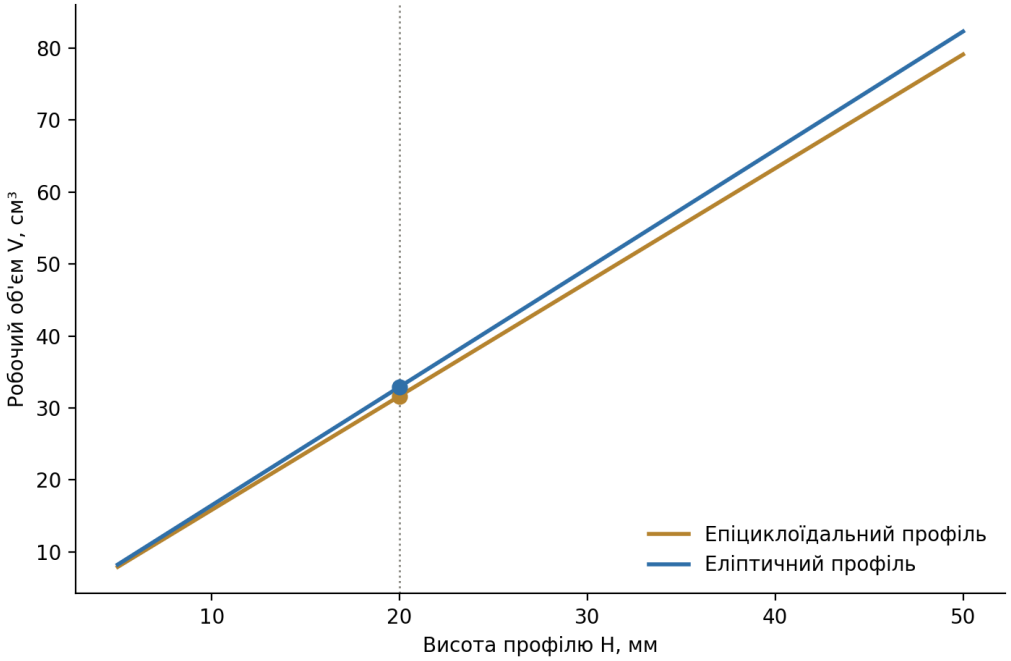


Рис. 4.9. Залежність робочого об’єму героторного зачеплення V від висоти профілю H для обох схем синтезу (zr = 6, e = 3,775 мм); точками позначено прийняте значення H = 20 мм

Оскільки залежність (4.4) лінійна за H, відносна перевага еліптичної схеми за робочим об’ємом (4,03 %) не залежить від конкретного обраного значення H - вона залишається тією самою для будь-якої висоти героторного блока, тоді як абсолютна різниця $\Delta V = (S_{еліпс} - S_{епі}) \cdot H$ зростає пропорційно H. Так, наприклад, для H = 10 мм абсолютна різниця становила б 0,638 см³, а для H = 40 мм - 2,554 см³, тоді як відносна різниця в обох випадках залишається на рівні 4,03 %. Це означає, що висновок про геометричну перевагу еліптичної схеми за робочим об’ємом, отриманий у підрозділі 4.2.1 для H = 20 мм, є загальним і поширюється на героторні блоки будь-якої технологічно реалізовної висоти.

Таблиця 4.3 поширює знайдену в підрозділі 4.1.4 залежність площі від zr на робочий об’єм при H = 20 мм для всього дослідженого діапазону zr - наочно показуючи перехід переваги від епіциклоїдальної до еліптичної схеми.

Таблиця 4.3

Робочий об'єм героторного зачеплення для діапазону zr = 4…12 при H = 20 мм, e = 3,775 мм

zr	Vепі, см³	Vеліпс, см³	ΔV, см³	Відносна перевага, %
4	14,358	12,984	-1,374	-9,57
5	22,124	21,726	-0,398	-1,80
6	31,653	32,941	+1,288	+4,07
7	42,954	46,569	+3,615	+8,42
8	56,031	62,558	+6,527	+11,65
9	70,889	80,861	+9,972	+14,07
10	87,530	101,375	+13,845	+15,82
11	105,958	123,368	+17,410	+16,43
12	126,175	147,218	+21,043	+16,68

Окрім кількісної відмінності за площею та об’ємом, дві схеми синтезу істотно різняться за складністю практичної реалізації, що варто враховувати при остаточному виборі схеми для конкретного героторного виробу.

Аналітичність розрахунків. Епіциклоїдальна схема (розділ 2) має повністю замкнений, аналітичний вигляд усіх розрахункових формул - Rs, Rf, координати точок M і Mf виражаються через zr, e елементарними функціями. Еліптична схема (розділ 3) вимагає чисельного розв’язання трансцендентного рівняння замкненості (3.8) методом бісекції; це не є серйозною технічною перешкодою для сучасних САПР, але унеможливлює «ручний» розрахунок без обчислювальних засобів, на відміну від епіциклоїдальної схеми.

Кількість обмежень синтезу. Епіциклоїдальна схема не має внутрішніх обмежень на rin, окрім очевидної геометричної умови rin < Rf − Rs (профіль не повинен «зникати»); еліптична схема вимагає одночасного виконання двох незалежних умов - відсутності самоперетинів траєкторії (3.13) і відсутності самоперетинів огинаючої (3.21), що ускладнює процедуру призначення допусків при виготовленні.

Чутливість до похибок виготовлення. Менший запас стійкості C (для еліптичної схеми, типово C ≈ 1,05–1,17 за оптимального τ*, підрозділ 3.10–3.11 розділу 3) означає, що технологічні відхилення форми еліпса від номінальної можуть швидше призводити до появи вузлових точок порівняно з епіциклоїдальною схемою, де кругова форма рухомої ланки робить її геометрично нечутливою до подібного типу дефекту за побудовою (кривина кола стала, тому $\psi'(\varphi)$ ніколи не змінює знак).

Робочий об'єм (продуктивність). Як показано в підрозділах 4.1–4.2, перевага за цим показником залежить від zr: для zr ≥ 6 еліптична схема дає більший робочий об'єм за тих самих e, H (до +16,7 % при zr = 11–12), що є практичною перевагою для насосів середньої й великої продуктивності; для малих zr (4–5) перевагу за об'ємом зберігає епіциклоїдальна схема.

Технологічність генерувального інструмента. Радіус генерувального кола r_i в еліптичній схемі систематично менший за rin епіциклоїдальної схеми за порівнюваних умов (підрозділ 3.9–3.10), що означає менший діаметр фрези або ролика для виготовлення робочого профілю - це може як спрощувати (менші габарити інструмента), так і ускладнювати (вища відносна похибка позиціонування) технологічний процес залежно від конкретного обладнання.

Для коректного порівняння героторних передач різного типорозміру корисно перейти від абсолютного робочого об'єму до безрозмірної питомої характеристики - відношення площі профілю до квадрата радіуса нерухомого кола, S/Rr^2, яке характеризує, наскільки ефективно схема синтезу використовує доступний радіальний габарит передачі (саме Rr визначає зовнішній диаметральний розмір героторного блока). Для основного числового прикладу (zr = 6, e = 3,775 мм, Rr = 22,65 мм):

$$(S/Rr^2)\text{епі} = 1582{,}62 / 22{,}65^2 = 3{,}085$$

$$(S/Rr^2)\text{еліпс} = 1646{,}46 / 22{,}65^2 = 3{,}209$$

Еліптична схема демонструє на 4,03 % вищу питому продуктивність (відношення (4.10) до (4.9) збігається з раніше знайденою відносною перевагою за площею, оскільки обидві схеми порівнюються за однакового Rr = e·zr) - тобто за тих самих габаритних обмежень (однаковий зовнішній радіус) еліптична схема дозволяє

реалізувати більший робочий об’єм героторного блока. Це узгоджується з висновком підрозділу 4.1.4 про перевагу еліптичної схеми для $z_r \geq 6$ і дає додаткове, незалежне від конкретного e (за законом масштабування (4.8) підрозділу 4.1.6) обґрунтування цього висновку в термінах, безпосередньо придатних для порівняння героторних передач різного розміру.

4.3. Висновки

У розділі виконано пряме кількісне порівняння робочих профілів героторного зачеплення, синтезованих за двома незалежними методиками (розділи 2 і 3) для однакових вихідних даних $z_r = 6$, $z_s = 7$, $e = 3{,}775$ мм:

1) площа поперечного перерізу робочого профілю обчислена за формулою Гаусса (4.1) для обох схем: $S_{епі} = 1582{,}62$ мм² (епіциклоїдальна схема, $r_{in} = 11{,}1$ мм) та $S_{еліпс} = 1646{,}46$ мм² (еліптична схема, оптимальне $\tau^* = 1{,}0347$, рекомендоване $r_i = 10{,}90$ мм);

2) еліптична схема синтезу дає на 4,03 % більшу площу робочого профілю за однакових вихідних z_r, z_s, e при $z_r = 6$, що підтверджено не лише в одній обраній точці, а й залежністю $S(r_{in}/r_i)$ у широкому діапазоні радіусів генерувального кола (рис. 4.2);

3) дослідження залежності переваги від кількості зубців ротора (підрозділ 4.1.4) виявило, що перевага еліптичної схеми не є універсальною - вона змінює знак приблизно при $z_r \approx 5{,}3$: для $z_r = 4$–5 більшу площу й об’єм дає епіциклоїдальна схема (до −9,6 % у еліптичної схеми при $z_r = 4$), тоді як для $z_r \geq 6$ перевага переходить до еліптичної схеми й зростає до +16–17 % у дослідженому діапазоні (рис. 4.3–4.4, таблиця 4.3);

4) робочий об’єм героторного зачеплення обчислено за формулою видавлювання $V = S \cdot H$ для технологічно типової висоти профілю $H = 20$ мм: для $z_r = 6$ $V_{епі} = 31{,}652$ см³, $V_{еліпс} = 32{,}929$ см³ (+4,03 %); показано (підрозділ 4.2.3), що відносна перевага не залежить від обраної висоти H - вона визначається виключно співвідношенням площ поперечного перерізу;

5) якісне порівняння (підрозділ 4.2.4) показало, що крім кількісної переваги за об’ємом, схеми відрізняються за технологічною складністю: епіциклоїдальна схема

має повністю аналітичний апарат розрахунку і нечутлива до самоперетинів за побудовою, тоді як еліптична схема потребує чисельних методів, подвійної перевірки умов відсутності самоперетинів (3.13), (3.21) і має менший запас стійкості до похибок виготовлення.

Отримана кількісна та якісна картина дає змогу сформулювати практичну рекомендацію щодо вибору схеми синтезу: для героторних передач з малою кількістю зубців ротора ($zr = 4–5$) доцільніше застосовувати епіциклоїдальну схему - як з огляду на більший робочий об’єм, так і через простішу й повністю аналітичну методику розрахунку; для передач з $zr \geq 6$, де важливим є максимальний робочий об’єм (продуктивність) при заданих габаритах, виправданим є застосування еліптичної схеми синтезу за умови ретельного дотримання обох умов відсутності самоперетинів, встановлених у розділі 3.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У роботі побудовано та порівняно дві самостійні методики синтезу робочого профілю героторного зачеплення - на основі епіциклоїдального профілю (розділ 2) та на основі еліптичного профілю (розділ 3), а також виконано їх кількісне порівняння за площею робочого профілю та робочим об'ємом (розділ 4).

Для епіциклоїдальної схеми отримано повністю аналітичний апарат синтезу.

Для еліптичної схеми (розділ 3) узагальнено кінематику кочення на випадок еліпса з піввісями a, b: отримано умову замкненості траєкторії через рівняння периметра, умову відсутності самоперетинів першого роду (через знак похідної кута власного повороту $\psi'(\varphi)$, $C = a^2/(Rr \cdot b) > 1$) та умову відсутності вузлових точок другого роду на огинаючій (через кривину траєкторії Mf, $r_i < \rho min$). Розв'язано задачу оптимізації коефіцієнта форми $\tau = b/a$, яка максимізує допустимий радіус генерувального кола.

Пряме порівняння обох схем (розділ 4) за однакових вихідних даних ($zr = 6$, $zs = 7$, $e = 3{,}775$ мм) показало, що еліптична схема дає на 4,03 % більшу площу робочого профілю (1646,46 мм² проти 1582,62 мм²) і відповідно більший робочий об'єм при H = 20 мм (32,929 см³ проти 31,652 см³). Дослідження залежності переваги від zr виявило, що вона змінює знак приблизно при $zr \approx 5{,}3$: для zr = 4–5 більший об'єм дає епіциклоїдальна схема, а для $zr \geq 6$ - еліптична, причому перевага зростає до 16–17 % при zr = 11–12.

Встановлено квадратичний закон масштабування площі профілю за ексцентриситетом ($S = k \cdot e^2$), підтверджений чисельно, що поширює знайдені залежності на довільний ексцентриситет за фіксованих безрозмірних параметрів схеми.

Якісне порівняння показало, що епіциклоїдальна схема технологічно простіша.

Таким чином, вибір схеми синтезу робочого профілю героторного зачеплення доцільно здійснювати з урахуванням кількості зубців ротора: для передач з малою кількістю зубців (zr = 4–5) рекомендується епіциклоїдальна схема, а для передач з $zr \geq 6$, де пріоритетним є максимальний робочий об'єм, - еліптична схема за умови

суворого дотримання встановлених у розділі 3 умов відсутності самоперетинів обох видів.

Також необхідно відмітити, що використання героторних передач на основі еліптичних профілів вимагає подальших детальних досліджень, а в роботі покладено лише початок таких досліджень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Altare G., Rundo M. Advances in simulation of gerotor pumps: an integrated approach. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2017. DOI: 10.1177/0954406217694663.
2. Andrenko P., Hrechka I., Khovanskyi S., Rogovyi A., Svynarenko M. Improving the technical level of hydraulic machines, hydraulic units and hydraulic devices using a definitive assessment criterion at the design stage. Journal of Mechanical Engineering (JMechE). 2021. Vol. 18, No. 3. P. 57–76.
3. De Martin A., Jacazio G., Sorli M. Optimization of Gerotor Pumps with Asymmetric Profiles through an Evolutionary Strategy Algorithm. Machines. 2019. Vol. 7, No. 1. Art. 17.
4. Devendran R. S., Vacca A. Theoretical analysis for variable delivery flow external gear machines based on asymmetric gears. Mechanism and Machine Theory. 2017. Vol. 108. P. 123–141.
5. Gamez-Montero P. J., Bernat-Maso E. Taguchi Techniques as an Effective Simulation-Based Strategy in the Design of Numerical Simulations to Assess Contact Stress in Gerotor Pumps. Energies. 2022. Vol. 15, No. 19.
6. Gamez-Montero P. J., Castilla R., Codina E. Methodology based on best practice rules to design a new-born trochoidal gear pump. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2018. Vol. 232, No. 6. P. 1057–1068.
7. Gamez-Montero P. J., Codina E., Castilla R. A Review of Gerotor Technology in Hydraulic Machines. Energies. 2019. Vol. 12, No. 12. Art. 2423.
8. Hutsol T. et al. European Green Deal: Improving the Efficiency of Using Planetary Hydraulic Machines. Energies. 2023. Vol. 16, No. 18.
9. Ivanovic L. Reduction of the maximum contact stresses by changing geometric parameters of the trochoidal gearing teeth profile. Meccanica. 2016. Vol. 51, No. 9. P. 2243–2257.
10. Kiurchev S., Abdullo M. A., Vlasenko T., Prasol S., Verkholantseva V. Automated Control of the Gear Profile for the Gerotor Hydraulic Machine. Advances in Design, Simulation

and Manufacturing VI : Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham, 2023. P. 1–10.

11. Lee S., Kwak H., Han G., Kim C. Design of Gerotor Oil Pump with 2-Expanded Cardioids Lobe Shape for Noise Reduction. Energies. 2019. Vol. 12, No. 6. Art. 1126.
12. Maláková S., Urbanský M., Fedorko G., Molnár V., Sivak S. Design of Geometrical Parameters and Kinematical Characteristics of a Non-circular Gear Transmission for Given Parameters. Applied Sciences. 2021. Vol. 11, No. 3. Art. 1000.
13. Matejic M., Ivanovic L. et al. Improving Gerotor Pump Performance Trough Design, Modeling and Simulation. International Journal of Fluid Power. 2021.
14. Підгаєцький М. М., Щербина К. К., Кириченко А. М., Годорожа В. А., Джус Т. П. Функціональний портрет шестеренної гідравлічної машини. Центральноукраїнський науковий вісник. Технічні науки. 2023. Вип. 8(39), ч. II. С. 3–10. DOI: 10.32515/2664-262X.2023.8(39).2.3-10.
15. Panchenko A., Voloshina A., Milaeva I., Panchenko I., Titova O. The influence of the form error after rotor manufacturing on the output characteristics of an orbital hydraulic motor. International Journal of Engineering & Technology. 2018. Vol. 7, No. 4.3. P. 1–5.
16. Panchenko A., Voloshina A., Luzan P., Panchenko I., Volkov S. Kinematics of motion of rotors of an orbital hydraulic machine. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2021. Vol. 1021. Art. 012054.
17. Pareja-Corcho J. C., Bartoň M., Pedrera-Busselo A., Mejia-Parra D., Moreno A., Posada J. On shape design and optimization of gerotor pumps. Computer Graphics Forum. 2024. Vol. 43. Art. e15140.
18. Pareja-Corcho J., Pedrera-Busselo A., Ciarrusta J. et al. Accelerating the design of gerotor pumps using interactive tools and fast simulation. International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM). 2024. Vol. 18. P. 5001–5014.
19. Pellegri M., Vacca A. Numerical simulation of Gerotor pumps considering rotor micro-motions. Meccanica. 2017. Vol. 52, No. 8. P. 1851–1870.
20. Prikhodko A. Experimental kinematic analysis of an intermittent motion planetary mechanism with elliptical gears. Measurements in Engineering. 2020. Vol. 8. P. 122–131.

21. Robison A., Vacca A. Multi-objective optimization of circular-toothed gerotors for kinematics and wear by genetic algorithm. Mechanism and Machine Theory. 2018. Vol. 128. P. 150–168.
22. Robison A., Vacca A. Multi-Objective Optimization of Gerotor Port Design by Genetic Algorithm with Considerations on Kinematic vs. Actual Flow Ripple : SAE Technical Paper 2019-01-0834. 2019.
23. Скібінський О. І., Гуцул В. І., Гнатюк А. О. Визначення умов існування спряженої огинаючої сімейства еквідистант до вкорочених епіциклоїд в циклоїдальній передачі внутрішнього зачеплення. Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Серія: Машинобудування. К. : НТУУ «КПІ», 2014. № 70. С. 159–165.
24. Skibinskyi O. I., Hnatiuk A. O. A Novel Design of Cutting Tool for Efficient Finishing of G-Rotors. In: Radzevich S. P., Storchak M. (eds.) Advances in Gear Theory and Gear Cutting Tool Design. Springer, Cham, 2022. P. 181–204.
25. Skibinskyi O. I., Hnatiuk A. O. Determination of laws of movement of contact points of the conjugate profiles of the wheels of a gerotor gearing. Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu. 2017. No. 6.
26. Rundo M. Models for flow rate simulation in gear pumps: A review. Energies. 2017. Vol. 10, No. 9. Art. 1261.
27. Stryczek J., Bednarczyk S., Codina E., Gamez-Montero P. J., Ivanovic L., Matejic M. Gears or rotors – three approaches to design of working units of hydraulic machines. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 659, No. 1. Art. 012006.
28. Stryczek J., Stryczek P. Synthetic Approach to the Design, Manufacturing and Examination of Gerotor and Orbital Hydraulic Machines. Energies. 2021. Vol. 14, No. 3.
29. Voloshina A., Panchenko A., Boltyansky O., Titova O. Improvement of manufacture workability for distribution systems of planetary hydraulic machines. Advances in Design, Simulation and Manufacturing II : Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham, 2020. P. 732–741.
30. Zariatin D. L., Suwandi A. Advanced design of a small-scale mini gerotor pump in a high-temperature and high-viscosity fluid thermal system. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2023. Vol. 1, No. 8 (121). P. 30–39.–