УДК 631.35

А.Ю.Горбовой, д-р. техн. наук
Волынский институт экономики и менеджменту
Т.Д.Гуцол, канд. техн. наук
Подольский государственный агротехнический университет

Математическая модель колебаний прицепного уборочного сельскохозяйственного машинного агрегата

Исследовано и проанализировано колебательное движение прицепного уборочного сельскохозяйственного машинного агрегата в процессе его движения по неровностям поверхности почвы. Составлены дифференциальные уравнения движения механической системы в продольно-вертикальной плоскости с одной степенью свободы.
машинный агрегат, колебательная система, профиль поверхности почвы, эквивалентная динамическая модель

Введение. Качество выполнения технологического процесса сельскохозяйственными машинами и машинными агрегатами в значительной степени зависит от устойчивости их движения в вертикальной плоскости по неровностям поверхности почвы. Особенно это касается прицепных машинных агрегатов, которые являются сложными динамическими системами, т.е. агрегатами, которые состоят из трактора, прицепного комбайна и, в некоторых случаях, прицепа для сбора убираемой продукции. Самоходный сельскохозяйственный машинный агрегат можно представлять собой как самоходное шасси (или трактор), на которое навешиваются все рабочие органы комбайна. Поскольку у самоходного машинного агрегата рабочие органы навешиваются на шасси (трактор), то его можно считать во время движения единой колебательной системой.

Анализ последних исследований и публикаций. Теоретическому исследованию движения разных сельскохозяйственных машин и машинных агрегатов, в том числе уборочных, было уделено достаточно внимания как отечественными, так и зарубежными учеными [1, 2]. Однако, к сожалению, аналитическому исследованию движения навешиваемых на самоходное шасси и прицепных машинных агрегатов разных компоновочных схем не было уделено достаточного внимания.

Цель исследования. Установить степень влияния колебательных движений сельскохозяйственных машинных агрегатов на качественные показатели их работы.

Результаты исследования. Рассмотрим методику построения математической модели колебательного процесса прицепного сельскохозяйственного машинного агрегата. Учитывая то, что в прицепном машинном агрегате рабочие органы навешиваются на шасси (трактор), то рабочие органы представляют собой единое целое и их колебательные движения осуществляют одновременно.

При анализе колебаний во время движения машинного агрегата по неровностям поверхности почвы в первую очередь главнейшими являются колебания его рабочих органов, которые, в свою очередь, будут определяться колебаниями центра масс машинного агрегата. Построим вначале расчетную математическую модель прицепного сельскохозяйственного машинного агрегата с навешенными на его раме рабочими органами с двухколесним ходом.

Построим, прежде всего, эквивалентную схему, для чего представим прицепной сельскохозяйственный машинный агрегат в виде плоской двухколесной модели (параметры двух колес суммируются). Отнесем машинный агрегат к неподвижной, относительно поверхности почвы, системы координат *Oxyz*. При этом плоскость *xOz* является вертикальной плоскостью, перпендикулярной к поверхности поля (рис. 1).

Для упрощения вывода дифференциальных уравнений и анализа колебательных движений прицепного машинного агрегата в продольно-вертикальной плоскости сделаем ряд допущений [1, 2, 3]:

– прицепной агрегат во время выполнения технологического процесса движется равномерно и прямолинейно вдоль оси *Ox*;

– профиль опорной поверхности почвы под обеими колесами одинаковый;

– опорные колеса сохраняют постоянный точечный контакт с поверхностью почвы;

– профиль пути является стационарной случайной функцией пройденного расстояния;

– сопротивление машин, которые агрегатируются, является случайной функцией времени и приводится к силе $F_{KPZ}(t)$, которая с некоторым приближением приложена в точке прицепа машинного агрегата;

– характеристики упругих элементов подвески машинного агрегата линейные;

– силы сопротивления в подвесках и шинах пропорциональны скорости колебаний.

Эквивалентная динамическая модель прицепного сельскохозяйственного машинного агрегата будет иметь вид, изображенный на рис. 1. Это будет механическая система с одной ступенью свободы. За обобщенную координату примем вертикальное перемещение *z* подрессоренной массы над задними ходовыми колесами (передних нет). Обобщенную координату *z* будем отсчитывать от положения статического равновесия системы. Тогда движение данной механической системы описывается уравнением в форме Лагранжа II-го рода такого вида:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial T}{\partial z} = Q_z, \qquad (1)$$

где $T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2$ – кинетическая энергия системы;

$\Pi = \frac{1}{2} c (z - h)^2$ – потенциальная энергия;

$h = h(t)$ – закон изменения неровностей почвы;

$\Phi = \frac{1}{2} \mu (\dot{z} - \dot{h})^2$ – диссипативная функция;

$m = \frac{M\, l_1}{l}$ – масса части машинного агрегата, которая осуществляет вертикальные колебательные движения.

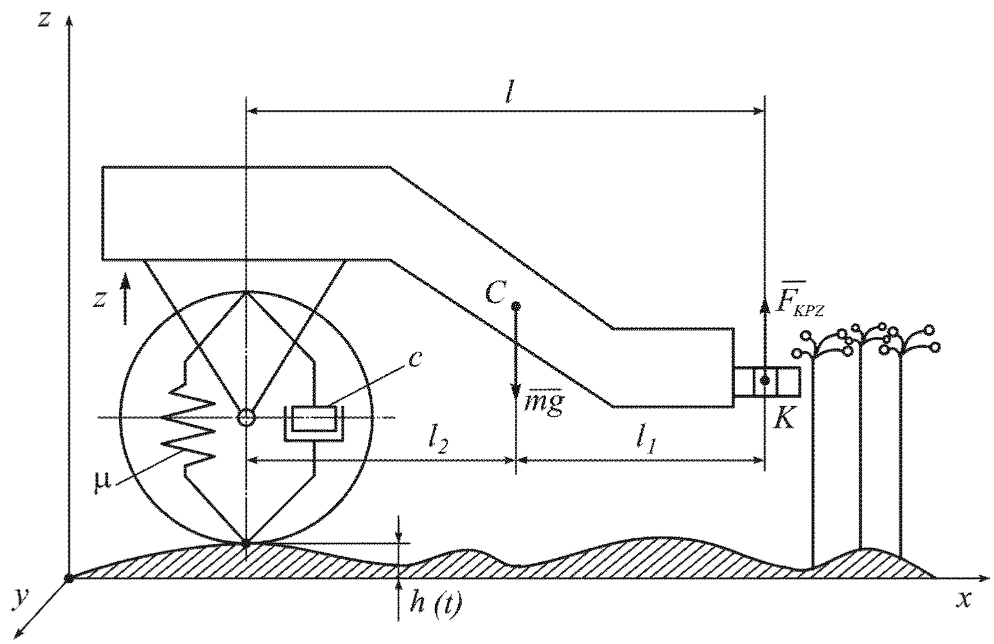

Рисунок 1 – Эквивалентная схема прицепного машинного агрегата, которая приведена к колебательной механической системе с одной ступенью свободы

Определим обобщенную силу для этого случая движения прицепного машинного агрегата. Она будет равна:

$$Q_z = Q_z^{(П)} + Q_z^{(Ф)} + Q_z^{(B)}, \tag{2}$$

где $Q_z^{(П)} = -\dfrac{\partial П}{\partial z} = -c(z-h)$,

$Q_z^{(Ф)} = -\dfrac{\partial Ф}{\partial \dot{z}} = -\mu(\dot{z}-\dot{h})$,

$Q_z^{(B)} = 0$,

$Q_z = -c(z-h) - \mu(\dot{z}-\dot{h})$.

Выполним для (2) необходимые преобразования. Имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) = m\ddot{z},$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

Подставляя (2) в (1) и используя выполненные преобразования, получим:

$$m\ddot{z} = -c(z-h) - \mu(\dot{z}-\dot{h}),$$

или

$$\ddot{z} = -\frac{c}{m}(z-h) - \frac{\mu}{m}(\dot{z}-\dot{h}),$$

или

$$\ddot{z}+\frac{\mu}{m}\dot{z}+\frac{c}{m}z=\frac{ch}{m}+\frac{\mu}{m}\dot{h}. \qquad (3)$$

Пусть

$$\frac{c}{m}=k^2,$$

$$\frac{\mu}{2m}=n.$$

Тогда дифференциальное уравнение (3) приобретает следующий вид:

$$\ddot{z}+2n\dot{z}+k^2z=k^2h(t)+2n\dot{h}(t). \qquad (4)$$

Известно, что общее решение дифференциального уравнения (4) равно:

$$z=z_1+z_2, \qquad (5)$$

где z_1 – общее решение однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{z}+2n\dot{z}+k^2z=0, \qquad (6)$$

а z_2 – частное решение неоднородного дифференциального уравнения, которое зависит от вида правой части.

Согласно теории дифференциальных уравнений общее решение дифференциального уравнения (6) может иметь один из следующих видов:

– если имеет место малое сопротивление $(n<k)$:

$$z_1(t)=e^{-nt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t),\ k_1=\sqrt{k^2-n^2}, \qquad (7)$$

или

$$z_1(t)=ae^{-nt}\sin(k_1t+\beta);$$

– если имеет место большое сопротивление $(n>k)$:

$$z_1(t)=e^{-nt}\left(C_1e^{k_2t}+C_2e^{-k_2t}\right),\ k_2=\sqrt{n^2-k^2}; \qquad (8)$$

– если имеет место критическое сопротивление $(n=k)$:

$$z_1(t)=e^{-nt}(C_1+C_2t). \qquad (9)$$

В выражениях (7–9) C_1 и C_2 – произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий.

Случаи 2 и 3 – это затухающие не колебательные движения. Случай 1 – свободные затухающие колебания с амплитудой ae^{-nt} и частотой k_1.

Структура $z_2(t)$ – частного решения дифференциального уравнения (5) зависит от формы неровностей поверхности почвы, т.е. от вида функции $h(t)$.

Пусть в некотором приближении неровности поверхности почвы описываются видом следующей гармонической функции:

$$h(t)=h_o\sin\left(\frac{Vt}{L}\right), \qquad (10)$$

где $h(t)$ – высота неровностей поверхности почвы;

L – длина неровностей поверхности почвы;

V – поступательная скорость движения прицепного машинного агрегата;

(h_o, V, L) – параметры, значения которых задаются.

Обозначим далее

$$\frac{V}{L} = k_3 .$$

Тогда выражение (10) приобретает такой вид:

$$h(t) = h_o \sin k_3 t . \qquad (11)$$

Подставляя выражение (11) в дифференциальное уравнение (4) получаем:

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + k^2 z = k^2 h_o \sin k_3 t + 2nh_o k_3 \cos k_3 t . \qquad (12)$$

Тогда частное решение z_2 уравнения (12) необходимо искать в следующем виде:

$$z_2 = A \sin k_3 t + B \cos k_3 t , \qquad (13)$$

где A и B – неизвестные коэффициенты.

Определим коэффициенты A и B методом неопределенных коэффициентов. Для этого находим необходимые производные:

$$\dot{z}_2 = Ak_3 \cos k_3 t - Bk_3 \sin k_3 t , \qquad (14)$$

$$\ddot{z}_2 = -Ak_3^2 \sin k_3 t - Bk_3^2 \cos k_3 t . \qquad (15)$$

Подставляя выражения (14) и (15) в (12), получаем:

$$\begin{aligned} & -Ak_3^2 \sin k_3 t - Bk_3^2 \cos k_3 t + 2nAk_3 \cos k_3 t - \\ & -2nBk_3 \sin k_3 t + k^2 A \sin k_3 t + \\ & +k^2 B \cos k_3 t = k^2 h_o \sin k_3 t + 2nh_o k_3 \cos k_3 t. \end{aligned} \qquad (16)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях выражения (16), получаем следующую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных A и B:

$$\left.\begin{aligned} & -Ak_3^2 - 2nBk_3 + k^2 A = k^2 h_o , \\ & -Bk_3^2 + 2nAk_3 + k^2 B = 2nh_o k_3 . \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Для решения системы уравнений (17) применим метод Крамера, а потому перепишем данную систему следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} & \left(k^2 - k_3^2\right)A - 2nk_3 B = k^2 h_o , \\ & 2nk_3 A + \left(k^2 - k_3^2\right)B = 2nh_o k_3 . \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Вычислим необходимые определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} k^2 - k_3^2 & -2nk_3 \\ 2nk_3 & k^2 - k_3^2 \end{vmatrix} = \left(k^2 - k_3^2\right)^2 + 4n^2 k_3^2 ,$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} k^2 h_o & -2nk_3 \\ 2nh_o k_3 & k^2 - k_3^2 \end{vmatrix} = h_o \left[k^2 \left(k^2 - k_3^2\right) + 4n^2 k_3^2 \right],$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} k^2 - k_3^2 & k^2 h_o \\ 2nk_3 & 2nh_o k_3 \end{vmatrix} = -2nk_3^3 h_o .$$

Тогда:

$$A=\frac{\Delta_A}{\Delta}=\frac{h_o\left[k^2\left(k^2-k_3^2\right)+4n^2k_3^2\right]}{\left(k^2-k_3^2\right)^2+4n^2k_3^2},\tag{19}$$

$$B=\frac{\Delta_B}{\Delta}=-\frac{2nk_3^3h_o}{\left(k^2-k_3^2\right)+4nk_3^2}.\tag{20}$$

Таким образом, частное решение $z_2(t)$ находится из выражения (13), где коэффициенты A и B определяются из выражений (19) и (20) соответственно. Известно, что выражение (13) можно записать в следующем виде:

$$z_2(t)=H\sin(k_3t+\beta_3),\tag{21}$$

где $H=\sqrt{A^2+B^2}$, $tg\beta_3=B/A$. (22)

Выражение (21) описывает вынужденные колебания сельскохозяйственного машинного агрегата в продольно-вертикальной плоскости с амплитудой H и частотой k_3.

При этом число $\beta_3=arctg\,\mathrm{B}/\mathrm{A}$ (23)

является начальной фразой вынужденных колебаний машинного агрегата.

Итак, учитывая (4), общее решение дифференциального уравнения (12) можно записать в одном из следующих видов:

1. Если имеет место малое сопротивление $(n<k)$:

$$z(t)=e^{-nt}\left[C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t\right]+A\sin k_3t+B\cos k_3t,$$

или

$$z(t)=ae^{-nt}\sin(k_1t+\beta)+H\sin(k_3t+\beta_3).\tag{24}$$

2. Если имеет место большое сопротивление $(n>k)$:

$$z(t)=e^{-nt}\left(C_1e^{k_2t}+C_2e^{-k_2t}\right)+A\sin k_3t+B\cos k_3t,$$

или

$$z(t)=e^{-nt}\left(C_1e^{k_2t}+C_2e^{-k_2t}\right)+H\sin(k_3t+\beta_3).\tag{25}$$

3. Если имеет место критическое сопротивление $n=k$:

$$z(t)=e^{-nt}(C_1+C_2t)+A\sin k_3t+B\cos k_3t,$$

или

$$z(t)=e^{-nt}(C_1+C_2t)+H\sin(k_3t+\beta_3).\tag{26}$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из следующих начальных условий:

при $t=0$:

$z=0$, $\dot{z}=0$. (27)

Если имеет место большое или критическое сопротивление, то довольно быстро не колебательные движения затухают, а потому при $t>T$, где T – некоторый момент времени, можно считать, что

$$z(t)\approx H\sin(k_3t+\beta_3),\tag{28}$$

т.е. колебания машинного агрегата происходят лишь за счет вынужденных колебаний. При наличии малого сопротивления ($n < k$) свободные затихающие колебания могут существенным образом влиять на колебательный процесс прицепного машинного агрегата.

Поскольку общий колебательный процесс прицепного машинного агрегата, при наличии малого сопротивления ($n < k$), описывается дифференциальным уравнением (24), то определим произвольные постоянные C_1 и C_2 из начальных условий (27).

Продифференцируем выражение (24) по времени t, получим:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= -ne^{-nt}\left(C_1\cos k_1t + C_2\sin k_1t\right) + \\ &+ e^{-nt}\left(-k_1C_1\sin k_1t + k_1C_2\cos k_1t\right) + \\ &+ k_3A\cos k_3t - k_3B\sin k_3t.\end{aligned} \tag{29}$$

Учитывая начальные условия (28), получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных C_1 и C_2:

$$\left.\begin{aligned}-nC_1 + k_1C_2 + k_3A = 0,\\ C_1 + B = 0.\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Из полученной системы уравнений находим:

$$C_1 = -B,\; C_2 = -\frac{nB + k_3A}{k_1}. \tag{31}$$

Подставив значение C_1 и C_2 из (31) в выражение (24), получаем закон колебательного движения прицепного машинного агрегата в вертикальной плоскости, которые возникают вследствие влияния неровностей поверхности почвы:

$$\begin{aligned}z(t) = -e^{-nt}\left(B\cos k_1t + \frac{nB + k_3A}{k_1}\sin k_1t\right) + \\ + A\sin k_3t + B\cos k_3t,\end{aligned} \tag{32}$$

где коэффициенты A и B определяются из выражений (19) и (20) соответственно.

Запишем выражение (32) следующим образом:

$$z(t) = -\alpha e^{-nt}\sin\left(k_1t + \beta\right) + H\sin\left(k_3t + \beta_3\right), \tag{33}$$

где $\alpha = \sqrt{B^2 + \dfrac{(nB + k_3A)^2}{k_1^2}}$, $\beta = arctg\dfrac{k_1B}{nB + k_3A}$, (34)

H и β_3 определяются согласно выражениям (22) и (23) соответственно.

Выполним пример вычислений колебательных движений прицепного сельскохозяйственного машинного агрегата (например, прицепного льноуборочного комбайна), используя такие значения его конструктивных и кинематических параметров:

l = 3,00 *м*; l_1 = 2,975 *м*; l_2 = 0,025 *м*; L = 1 *м*; V = 1,5 *м/с*;
M = 1800 *кг*; c = 250 000 *Н/м*; μ = 1785 *кг/с*;
$h_\circ$ = 0,03 *м*; $z(0) = 0$; $\dot{z}(0) = 0$.

Из графика, приведенного на рис. 2, видно, что в начальный период времени (0 – 9 *с*) влияние формы неровностей поверхности почвы на продольные колебания машинного агрегата является существенным, а при $t > 9$ *с* колебания агрегата согласовывает с формой неровностей поверхности почвы.

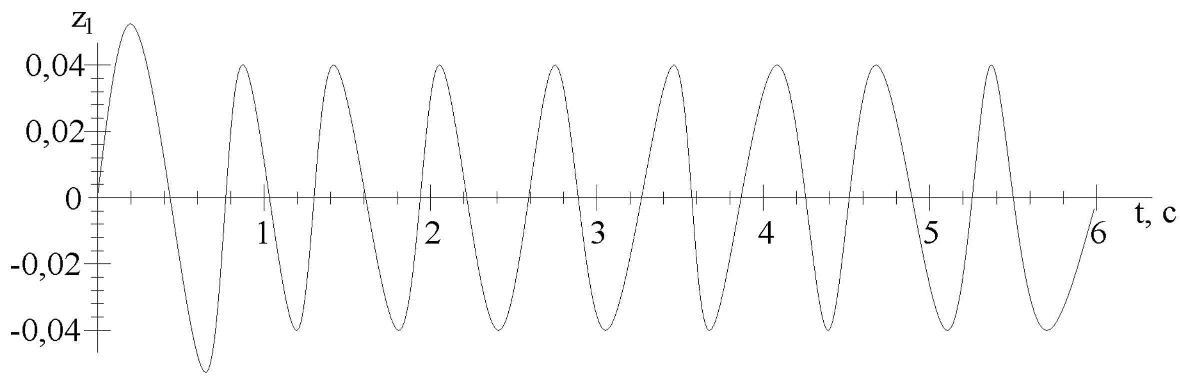

Рисунок 2 - Отклонение центра масс прицепного машинного агрегата от положения статического равновесия в начале его движения

Выводы.

1. Предложенная теория колебательных движений разработана для стабилизации движения прицепных сельскохозяйственных машинных агрегатов (особенно уборочных) при их движении по неровностям поверхности почвы. Во время движения сельскохозяйственные машинные агрегаты копируют неровности поверхности почвы и совершают колебания на пневматических опорно-ходовых колесах, соответственно их рабочие органы отклоняются от прямолинейного движения, которое служит причиной некачественного выполнения технологического процесса работы.
2. Применение этой теории дает возможность аналитически найти условия стабилизации движения прицепных сельскохозяйственных машинных агрегатов в продольно-вертикальной плоскости, что, в свою очередь, приведет к улучшению качества выполнения технологических процессов.

Список литературы

1. Василенко П.М. Введение в земледельческую механику. К.: Сільгоспосвіта, 1996. – 252 с.
2. Булгаков В.М. Математическая модель процесса копирования поверхности почвы самоходной корнеуборочной машиной // Вестник сельскохозяйственной науки. – 1984, №2. – С. 86–92.
3. Горбовий А.Ю. Построение математической модели функционирования прицепного льноуборочного агрегата // Сборник научных трудов КМТИ "Механизация производственных процессов рыбного хозяйства, промышленных и аграрных предприятий". Выпуск 4. – Керчь: КМТИ. – С. 181–186.
4. Гуськов В.В., Велев Н.Н., Атаманов Ю.Э., Богаров Н.Ф., Ксеневич И.П., Солонский А.С. Тракторы: Теория: – М.: Машиностроение, 1988. – 376 с.
5. Камкэ Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.:Наука,1971. – 378с.

А.Горбовий, Т.Гуцол

Математична модель коливань причіпного збирального сільськогосподарського машинного агрегату

Досліджено та проаналізовано коливальний рух причіпного збирального сільськогосподарського машинного агрегату в процесі його руху по нерівностях поверхні грунту. Складені диференціальні рівняння руху механічної системи у повздовжньо-вертикальній площині з однією ступенню вільності.

A.Gorbovoj, T.Gutsol,
Mathematical model of fluctuations of the hook-on harvest agricultural machine unit

The oscillating motion of the hook-on agricultural machine aggregate during its driving on irregularities of a surface of soil is examined and analysed. The differential equations of driving of mechanical system in a longitudinal-vertical plane with one degree of freedom are made.

Получено 10.08.09